ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

RELME

CUBA 2002

Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

16

TOMO 2

VOLUMEN

AÑO 2003

Instituto Superior Politécnico
José Antonio Echeverría
cujae

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 16

Tomo 2

Clame
Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
Volumen 16, año 2003

Editor:
Juan Raúl Delgado Rubí

Diseño de Portada:
Marcos Díaz Cedeño

I.S.B.N.: 956-8298-01-0 (Obra Completa)
Volumen 2 I.S.B.N.: 956-8298-03-7

Diagramación e Impresión:
Lorena Impresores Ltda.
Ñuble 1161, Santiago
Fonos: 4639343 - 5559292 - Fono/Fax: 4639342
E-mail: lorenaimpresores@hotmail.com

Impreso en Chile/ Printed in Chile

Indice del Tomo 2

FORMACION DE PROFESORES

LENGUAJE MATEMATICO

VISUALIZACION

GRAFICA Y FUNCIONES

TECNOLOGIA AVANZADA

APRENDIZAJE COOPERATIVO

MEDICION Y EVALUACIÓN

VARIOS

Conferencia Plenaria

¿ Problemas en la escuela ?

Luis Campistrous Pérez

Instituto central de ciencias pedagógicas. Cuba

Lcampistrous@yahoo.com

Resumen

En esta conferencia se trata sobre una de las actividades más importantes y maltratadas de la enseñanza de la matemática: la resolución de problemas.

Se trata de mostrar mediante ejemplos de la historia y la enseñanza actual que esta actividad ha estado presente desde siempre en la escuela y que durante unos 4000 años los problemas escolares han formado una clase especial de problemas con características semejantes que no contribuyen a desarrollar la capacidad de resolución de problemas.

A partir de trabajos del autor y de algunos alumnos se incursiona en el mundo de las estrategias de resolución de problemas que utilizan los alumnos.

Introducción

Esta disertación está motivada por la importancia que le concedemos a la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática, como actividad que desarrolla el pensamiento. No es por gusto que en la época clásica, platón, uno de los filósofos más grandes de la antigua grecia, que fundó en el 387 a.c. En atenas su escuela conocida como la academia, colocó a la entrada un anuncio que decía:

"se prohíbe la entrada a quien no sepa geometría"

En realidad, no es que a platón le interesara que sus alumnos supieran geometría por ella misma, sino porque él consideraba que la matemática, y en especial la geometría, desarrollaban el pensamiento, y eso si era importante para los objetivos de su academia. En esta aspiración de lograr mediante la matemática el desarrollo del pensamiento juega un papel esencial la resolución de problemas, de ahí la importancia de este tema.

Con respecto a la situación de los problemas en la escuela, hay quién dice que la escuela está llena de problemas y un colega muy apreciado tiene en su oficina un *affiche* que dice lo siguiente:

¿por qué se suicidó el libro de matemáticas?

Porque tenía muchos problemas.

Siempre reflexionamos con él, si en realidad esa es una razón para que el libro de matemática se suicidara, pues para mí no lo es y vale la pena discutir si los libros de la escuela tienen muchos problemas, o si son solo situaciones que son consideradas problemas, pero que en la realidad no lo son, y esto puede traer como consecuencia que nos estemos engañando en cuanto al cumplimiento de esa importante función de la matemática de desarrollar el pensamiento.

Desarrollo

A finales del siglo pasado se estudió mucho la situación de la solución de problemas en la escuela, y pareciera que es llover sobre mojado volver a hablar de esta situación. Se ha trabajado mucho, se ha investigado mucho, hay muchos resultados, se han escrito muchos libros, pero nosotros lo que queremos precisamente es referirnos a la situación de la escuela y no al aspecto lógico de la resolución de problemas o al enfoque matemático de la resolución de problemas.

Con respecto a la situación actual de la escuela, podríamos decir que en las condiciones de nuestros países, en el mejor de los casos, un aula tiene cuarenta, cincuenta o más alumnos y lo que se ha escrito hasta el momento realmente no tiene aplicación. Hay que tener resultados que puedan ser utilizados en estas condiciones específicas. Esta contradicción de la importancia del trabajo con problemas y de lo que se está haciendo realmente en la escuela para lograrlo, no ha sido resuelta y es la idea esencial que queremos trasmitir mediante esta intervención.

Nadie discute que los problemas han formado parte histórica del trabajo de la matemática en la escuela. El conocido matemático e historiador de la matemática soviético, b. Gnedenko (1963), adelantó la hipótesis de que los primeros documentos matemáticos que se conocen, es decir las tablillas de mesopotamia y los papiros egipcios, son ni más ni menos modelos para enseñar a "resolver problemas" como los que tienen los libros actuales. Estas ideas las queremos ilustrar a continuación mediante un breve recuento histórico acerca del tratamiento de los problemas, de modo que se vea que algunas de las características de los problemas más antiguos son las mismas que la de los problemas que aún permanecen en nuestros libros de matemática de la escuela.

Empezaremos con uno de los problemas que aparecen en el papiro del rhind[1]

El montón y la séptima parte del montón son 19.

¿cuánto es el montón?

Una mirada a las características de este problema nos permite identificar a un problema típico de ecuaciones de primer grado, o de fracciones o de proporcionalidad, de los que están en nuestros libros en la escuela. La solución de ese problema, por cualquiera de las vías que escojamos, nos permite reconocer que está todavía vivo y no parece tan viejo.

La diferencia con lo que hacían los antiguos egipcios, tal como aparece en los papiros, puede encontrarse en la vía de solución empleada pues ellos lo hacían por el método que denominaban de la falsa posición que ya no se acostumbra a utilizar. Por esa vía ellos escogían un número cómodo para probar, por ejemplo, en este caso suponían que el resultado es 7, y al comprobar si el valor funciona se tiene que:

$$7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 7 + 1 = 8$$

[1] El papiro egipcio Rhind, escrito hacia el 1650 a.C., incluye varios tipos de acertijos aritméticos. Se encuentran en este momento en la Biblioteca de Londres y se le denomina así por haber sido descubiertas por un investigador de ese nombre. Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2002. © 1993-2001 Microsoft Corporation.

Pero el resultado debe ser 19, entonces el montón debe ser $\frac{19}{8}$ de 7, es decir

$$\frac{19}{8} \cdot 7 = \frac{133}{8}$$

Este problema nos permite marcar algunas de las características de los problemas que aparecen aún en la escuela. Vean ustedes que estamos hablando de un montón y de la séptima parte de ese montón, aunque no sabemos de cuánto es el montón. Desde el punto de vista de la práctica este problema no tiene mucho sentido, porque es difícil imaginar una situación en la que se conozca la suma del todo y su séptima parte sin saber cuánto es el todo.

En ellos es como si planteara algo que el alumno debe querer resolver y este hace como si lo quisiera resolver, pero al alumno realmente ni le importa, ni necesita hacer ningún esfuerzo por resolverlo.

Otro ejemplo ha sido tomado de las tablillas mesopotámicas, también referido por b. Gnedenko.

El cuadrado menos el lado es 14,30. ¿cuánto es el lado?

Aquí se reconoce enseguida que se trata de un problema para aplicar ecuaciones de segundo grado, muy semejantes a los que podemos encontrar en cualquier libro de texto de la escuela, de nuevo en una situación referida a la práctica, pero con muy pocas probabilidades de ser creíble pues la situación presentada mezcla magnitudes de naturaleza diferentes.

De esta forma podemos ilustrar problemas a lo largo de la historia pasando por los griegos, los romanos, los árabes, el medioevo hasta llegar a la época actual. Razones de espacio nos impiden referirlos para ilustrar cuantas características comunes hay entre ellos.

De todas formas tomaremos un ejemplo de los problemas que aparecen en la escuela actual para completar la comparación

Elena y su hermana pesan 87 kg. La hermana pesa la mitad que elena. ¿cuánto pesa elena?[2]

Este problema aparece en el libro de texto de 4° grado de la escuela cubana y es notable que su estructura es la misma del problema egipcio del montón y la séptima parte del montón, así como de otros muchos a lo largo de la historia de la escuela. Se pueden hacer las mismas observaciones que para el problema egipcio: ¿cómo saber que la hermana pesa la mitad que elena sin conocer los pesos?

Podría parecer que con esta reiteración y tanta experiencia, se debe lograr que los alumnos se enfrenten a situaciones de este tipo sin dificultades y en su mayoría lo puedan realizar. Que esto no es así lo ilustra el hecho de que en una medición de calidad de la educación de uno de nuestros países, realizada en época reciente, el siguiente problema aplicado al sexto grado de la escuela inicial obtuvo el 31,4 % de respuestas correctas.

Rizo, Celia y otros. Matemática 4 Editorial Pueblo y Educación La Habana 1991 Pág 46

Efraín pagó 19,50 por la cuota inicial de un equipo de sonido. Si el costo del equipo es de 78,00. ¿qué porcentaje pagó en la cuota inicial?[3]

Como vemos realmente los alumnos no son capaces de resolver planteamientos tan simples y con una historia tan larga como éstos. Hablamos de planteamientos porque tenemos el criterio de que no son problemas reales, para verlo analicemos cuál es el concepto de problema. No pretendemos dar una definición, destacaremos las características esenciales que aparecen en casi todas las definiciones actuales.

Como ilustra la figura 1, en un problema hay una situación inicial que debe transformarse en una situación final, hay un individuo que quiere realizar la transformación y la vía es desconocida.

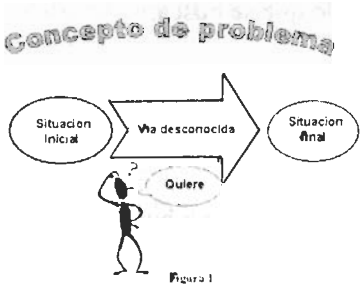


Figura 1

De esta forma en el concepto de problema aparecen elementos subjetivos que convierten el planteamiento de problemas en una tarea didáctica difícil; en efecto, en las condiciones de nuestras aulas hay que encontrar situaciones que despierten el interés por la transformación en grupos de 40 o más alumnos y garantizar que no conozcan la vía de solución.

A pesar de estas dificultades, es necesario el trabajo con problemas en la escuela, no para hacer que los alumnos repitan la resolución de "tiras de problemas" iguales, que por tanto dejan de ser problemas, sino para contribuir a desarrollar en ellos la capacidad general de resolver problemas, capacidad que sí ha de ser útil en la vida. Puede ser que la mayoría de los alumnos que cursan matemática en la escuela no tengan nunca que resolver un "problema tipo" de fracciones, pero seguro que todos se enfrentan con frecuencia a verdaderos problemas en su vida y para eso la escuela actual no los prepara.

De lo dicho no puede inferirse que restamos importancia al trabajo clásico en la escuela, sólo queremos señalar que no es suficiente pues se reduce a un tipo especial de problemas que llamamos problemas escolares.

- Son situaciones didácticas que asumen una forma problémica.
- Su objetivo principal es la fijación o aplicación de los contenidos.
- Aparecen generalmente en el contexto de los programas.
- Son tipificados en mayor o menor medida.
- Se resuelven con procedimientos más o menos rutinarios.[4]

[3] SINEA 6° Grado. Informe para el docente Editorial del Ministerio de Educación. Caracas 1998 Pág 112
[4] Rodríguez Expósito, Félix 2002. V

como vemos, estos problemas agotan los que de manera usual se plantean en la escuela y es para ellos que se trabaja en mayor medida en las teorías didácticas tradicionales, así mismo de ellos se trata cuando se habla de la importancia de la resolución de problemas en matemática.

El paso para ir más allá de estos problemas se lo debemos al matemático húngaro g. Polya que impactó a la comunidad de la enseñanza de la matemática con su trabajo sobre la resolución de problemas y las llamadas estrategias de resolución. En realidad polya no habló de estrategias sino de operaciones intelectuales, algo mucho más coherente con la idea de su lista pues la comprensión del término estrategia es mucho más abarcadora.

Una muestra de estas "estrategias" es la siguiente:

- Analizar lo que se da y lo que se busca.
- Dibujar una figura.
- Separar una condición en partes.
- Considerar casos especiales.
- Pensar en un problema más simple.
- Considerar el problema resuelto.

La utilización de estas estrategias conduce a buenos resultados cuando son utilizadas por expertos; sin embargo, resulta difícil lograr que los aprendices se apropien de ellas y obtengan resultados. Esto se debe a varios factores, entre los cuales destacan el hecho de que cada estrategia es en realidad una categoría de estrategias semejantes, que se utilizan en diferentes ocasiones y de forma diferente, el que una vez utilizada la estrategia, no es evidente como aprovecharla, el hecho de que no reemplazan a los conocimientos, el que se han diseñado para ser usadas bajo la guía de un docente, que no son algorítmicas y que los problemas escolares no son problemas y, por tanto, no son necesarias.

El trabajo de polya fue continuado por schoenfeld, quien identificó cuatro componentes en la resolución de problemas uno de los cuáles es la heurística, pero entre los que juegan un papel importante los recursos y las creencias de los alumnos. Este trabajo arroja luz sobre el proceso de resolución de problemas y complementa los resultados de polya, pero no resuelve los problemas de la escuela puesto que no se trata de modelar su situación real y sus recomendaciones resultan demasiado complejas para ser utilizadas en las aulas por profesores que no son expertos resolvedores de problemas.

Por otra parte, en el proceso de trabajo en el aula, los alumnos no sólo conforman creencias sino que desarrollan estrategias espontáneas que generalmente no son eficientes y que dificultan el aprendizaje de procedimientos adecuados de pensamiento. En este contexto entendemos por estrategia:

Una estrategia (de resolución de problemas) es un procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es especifico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento "ad hoc" y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de la acción de búsqueda de la solución.

---

[5]Campistrous, L. y Celia Rizo. (1999)

Conclusiones

De lo dicho se puede ver que si se quiere que los alumnos resuelvan verdaderos problemas, se hace necesario modelar:

- *Cómo piensan los alumnos.*
- *Cómo debe actuar el maestro para formar buenos procedimientos en los alumnos*
- *Cómo elaborar sistemas de problemas.*
- *Cómo lograr que los alumnos sustituyan sus estrategias ineficientes por otras más eficientes..*

Lograr esto exige buscar soluciones, no memorizar procedimientos; explorar patrones, no memorizar fórmulas; formular conjeturas, no sólo hacer ejercicios, es decir que se complementa con una serie de acciones en la clase de matemática que van más allá del acto mismo de resolución de problemas.

Una vía para lograr avanzar en este camino es la descomposición de las estrategias en componentes más simples que llamamos técnicas: que son acciones orientadoras y reguladoras que sirven de herramientas para la solución de problemas. Este carácter de acciones las convierte en algo más simple y más sencillo de adquirir, lo que facilita el proceso de trabajo en el aula. Como un paso posterior se elaboran estrategias, proceso que debe ser guiado por el docente, pero no pensando en hacer que el alumno memorice "estrategias de experto", sino para contribuir a que desarrolle por sí mismo estrategias adecuadas.

El espacio no permite profundizar más en este tema, sólo observar que por este camino pueden lograrse resultados que contribuyen a desarrollar en los alumnos una forma de pensamiento matemático y que es posible en cualquier nivel encontrar problemas que constituyan verdaderos problemas para los alumnos sin ser prohibitivos para la mayoría de ellos.

Referencias bibliográficas:

Campistrous, L. & Rizo, C (1999) Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Relime*, vol.2 No.3 noviembre. Pag. 31 a 46. México.

Campistrous, L. & Rizo, C. (2000) A*prende a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Campistrous, L. & López, J (2001). La calculadora como una herramienta heurística. Revista *UNO*, No.28 septiembre. Razonamientos y pruebas. Pag..84 a 99. Editorial Grao. Barcelona..

D'amore, B (1997). *Problemas*. Editorial Síntesis. Madrid.

Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2002. © 1993-2001 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

Gnedenko, B. (1963). La matemática de los antiguos pueblos de mesopotamia. *Matematika v shkolie* nº 6. Moscú.

Labarrere, A.F. (1994) B*ases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana .

Mónaco, B. S. & Aguirre, I. (1997). *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio: un estudio de casos.* Tesis en opción del grado de maestro en ciencias. U.A.G. Guerrero, México.

Mónaco, B. S. & Aguirre, I. (1997). *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio: un estudio de casos*. Tesis en opción del grado de maestro en ciencias. U.A.G. Guerrero, México.

Polya, G. (1976) *Matemáticas y razonamiento plausible* (en ruso). Editorial Nauka. Moscú.

Polya, G. (1990) *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México.

Rizo, C & Campistrous, L. (2002). La calculadora en la escuela primaria, ¿amiga o enemiga? Revista *uno*, No.29 Enero. Competencias matemáticas. Pag. 95 a 123. Editorial Grao. Barcelona.

Rodríguez, F. (2002) *Un procedimiento generalizado y técnicas asociadas al mismo para la resolución de problemas escolares de química física*. Tesis en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Cuba.

Schoenfeld, H. (1985) *Mathematical problem solving*. Academic press. Usa schoenfeld, a. H (1988) cuando la buena enseñanza conduce a malos resultados: el desastre de los cursos de matemática "bien enseñados". *Psicólogo educacional*. Vol.23. No.2.

Schoenfeld, H. (1994) *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. Editorial OMA. Buenos Aires.

Conferencia Especial

¿Qué aporta la didáctica de la matemática a la formación inicial de los matemáticos?

Bernardo Gómez Alfonso

Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Valencia. España

b.gomez@uv.es

Resumen

Recientemente se ha puesto en evidencia la necesidad de integrar asignaturas de Didáctica de las Matemáticas en los Planes de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas, el problema que esto plantea es cómo llenar de contenido estas asignaturas. El reto es acertar con un perfil que, recogiendo las aportaciones de la investigación afín, sea apropiado y aceptado por la Comunidad de los Matemáticos, por los profesores de las Facultades de Matemáticas y por los mismos estudiantes de Matemáticas. Para enfrentar este reto adelanto a continuación algunas ideas.

La didáctica de la matemática y su ámbito de actuación

Por un lado la Didáctica de las Matemáticas atiende a la construcción de modelos teóricos para explicar los distintos aspectos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el marco de los sistemas educativos. Como tal es una disciplina científica que pretende ser reconocida por sus aportaciones en un ámbito de estudio propio, aunque para lograrlo tiene que hacer frente a dificultades que proceden de un clima de opinión reticente por parte de la Comunidad afín, la de los matemáticos, más consolidada, prestigiosa y avanzada.

Por otro lado, la Didáctica de las Matemáticas atiende al desarrollo y concreción de conocimientos aplicados y comprometidos con la práctica educativa. Como tal es una disciplina profesional cuyo ámbito de actuación es la formación de docentes, en particular en su formación inicial y, en este terreno, también tiene que hacer frente a dificultades de otra índole, las que proceden de las prácticas y creencias de los estudiantes para futuros profesores de matemáticas.

El modelo de formación de profesores de matemáticas

Se puede decir que la formación de profesores de matemáticas tiene su origen en las reformas educativas del siglo XIX que es cuando se universaliza el sistema general y público de enseñanza. Este fenómeno planteó la necesidad de formar a una gran cantidad de profesionales de la enseñanza para atender las demandas del nuevo sistema, lo que dio lugar a la creación de las instituciones que se conocerían como Escuelas Normales. Es en las Normales, encargadas de la formación inicial de los profesores, donde aparecen las asignaturas denominadas de *Metodología,* que posteriormente se llamarán de *Didáctica.* En España y en muchos otros países las Normales quedaron inicialmente fuera del sistema universitario y sólo atendieron a la formación de los docentes de Educación Primaria, denominados Maestros. La docencia en Secundaria y otros niveles superiores quedó reservada a los licenciados universitarios, quienes en su ámbito de actuación son denominados profesores.

¿Qué aporta la didáctica de la matemática a la formación inicial de los matemáticos?

Bernardo Gómez Alfonso

Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Valencia. España

b.gomez@uv.es

Resumen

Recientemente se ha puesto en evidencia la necesidad de integrar asignaturas de Didáctica de las Matemáticas en los Planes de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas, el problema que esto plantea es cómo llenar de contenido estas asignaturas. El reto es acertar con un perfil que, recogiendo las aportaciones de la investigación afín, sea apropiado y aceptado por la Comunidad de los Matemáticos, por los profesores de las Facultades de Matemáticas y por los mismos estudiantes de Matemáticas. Para enfrentar este reto adelanto a continuación algunas ideas.

La didáctica de la matemática y su ámbito de actuación

Por un lado la Didáctica de las Matemáticas atiende a la construcción de modelos teóricos para explicar los distintos aspectos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el marco de los sistemas educativos. Como tal es una disciplina científica que pretende ser reconocida por sus aportaciones en un ámbito de estudio propio, aunque para lograrlo tiene que hacer frente a dificultades que proceden de un clima de opinión reticente por parte de la Comunidad afín, la de los matemáticos, más consolidada, prestigiosa y avanzada.

Por otro lado, la Didáctica de las Matemáticas atiende al desarrollo y concreción de conocimientos aplicados y comprometidos con la práctica educativa. Como tal es una disciplina profesional cuyo ámbito de actuación es la formación de docentes, en particular en su formación inicial y, en este terreno, también tiene que hacer frente a dificultades de otra índole, las que proceden de las prácticas y creencias de los estudiantes para futuros profesores de matemáticas.

El modelo de formación de profesores de matemáticas

Se puede decir que la formación de profesores de matemáticas tiene su origen en las reformas educativas del siglo XIX que es cuando se universaliza el sistema general y público de enseñanza. Este fenómeno planteó la necesidad de formar a una gran cantidad de profesionales de la enseñanza para atender las demandas del nuevo sistema, lo que dio lugar a la creación de las instituciones que se conocerían como Escuelas Normales. Es en las Normales, encargadas de la formación inicial de los profesores, donde aparecen las asignaturas denominadas de *Metodología,* que posteriormente se llamarán de *Didáctica.* En España y en muchos otros países las Normales quedaron inicialmente fuera del sistema universitario y sólo atendieron a la formación de los docentes de Educación Primaria, denominados Maestros. La docencia en Secundaria y otros niveles superiores quedó reservada a los licenciados universitarios, quienes en su ámbito de actuación son denominados profesores.

La ideología que sustenta el modelo tradicional de formación de profesores de secundaria

Los licenciados universitarios se forman únicamente en los contenidos propios de su disciplina y no reciben formación didáctica a lo largo de su carrera. Para paliar esta deficiencia, en España, los licenciados que quieran acceder a un puesto en la enseñanza oficial deben realizar un curso de especialización didáctica, una vez finalizada la carrera. Este curso denominado CAP, ha venido conjugando dos ideologías:

1. Una, que considera que para enseñar es suficiente con el dominio de la disciplina.
2. Otra, que percibe la didáctica como un arte y como tal el profesor se forma dentro de su propia práctica, o guiado por los prácticos.

Desde el primer punto de vista se señala que lo importante es la formación científica y, por tanto, se reniega de lo didáctico bajo la idea de que es una falsa ciencia, un discurso ideológico que desea imponerse en detrimento del conocimiento disciplinar. En consecuencia, se considera que para cursar la *especialización didáctica* se debe esperar a que los estudiantes terminen su carrera, con el fin de tener garantías de que ya se saben lo importante; esto es, las matemáticas.

Desde el segundo punto de vista se entiende que la Didáctica se debe centrar en la instrucción y en la práctica; es decir, en los problemas de selección, secuenciación, temporalización, metodología de los contenidos curriculares, y gestión de la clase. En consecuencia, se considera que los responsables del *curso de especialización didáctica* deben ser los profesores de Secundaria en ejercicio, miembros experimentados de las mismas instituciones que finalmente son las que van a recibir a los futuros profesores cuando estos terminen sus estudios. ¡No los especialistas en Didáctica!

El punto de vista de la didáctica de las matemáticas en relación con el modelo tradicional

Desde la comunidad de profesionales de la Didáctica de las Matemáticas se cuestionan estas dos ideologías. Por una parte, frente a la renuncia a lo didáctico que se sigue de la primera ideología, se señala que son los matemáticos los que han de responsabilizarse de lo que se hace en su nombre y que, por lo tanto, que los matemáticos deberían pensar en la formación en Didáctica de las Matemáticas como algo propio. Por otra parte, frente al centramiento en la instrucción que se sigue de la segunda ideología se señalan carencias, ya que se afirma que cuando sólo se mira la instrucción y gestión de la clase no se discute el contenido, no se tiene en cuenta el aprendizaje y no se pone en duda el conocimiento del profesor. En otras palabras, se ignora que hay otros objetos de estudio y reflexión que amplían el ámbito de actuación de la disciplina, entre los que cabe citar el conocimiento del funcionamiento de los alumnos o del profesor, el diseño e innovación curricular, o la evaluación.

Un nuevo modelo de formación de profesores de secundaria

Como consecuencia de estos planteamientos desde la Didáctica de las Matemáticas se ha defendido un nuevo modelo de formación de profesores de matemáticas para los niveles Secundario y Bachillerato. Este nuevo modelo reivindica la necesidad de que los Planes de Estudio de Matemáticas integren asignaturas de Didáctica de las Matemáticas y, para ello, se argumenta con tres tipos de razones principales:

- Razones de índole social, ya que la Didáctica de las Matemáticas puede hacer aportaciones en otros ámbitos de actuación tales como, por ejemplo, la difusión y mantenimiento social o el proselitismo de la disciplina.
- Razones de índole académico, ya que la Didáctica de las Matemáticas es un dominio de conocimientos que amplía el ámbito de estudio de los matemáticos, ámbito que a estos incumbe y que no pueden dejar en manos de otros profesionales, con las consecuencias que esto acarrearía.
- Razones de índole profesional, ya que la Didáctica de las Matemáticas es una disciplina que implica como salida profesional muchos estudiantes de matemáticas.

El panorama actual

En el panorama actual español se ha conseguido integrar en los planes de estudio de las licenciaturas de Matemáticas asignaturas de Didáctica de las Matemáticas, aunque con carácter optativo. Se implica así a nuestra comunidad profesional de una manera directa en los estudios del segundo ciclo universitarios. Esto no ha sido un logro gratuito sino que se debe a un cambio en el clima de opinión académico motivado por:

- Los retos del nuevo modelo educativo implantado en España y que eleva la Educación obligatoria hasta los 16 años. Retos que no sólo afectan a los contenidos, objetivos, metodología y criterios de evaluación, sino también al papel del profesor.
- La institucionalización de la Didáctica de la Matemática como Área de Conocimiento en la Universidad española, que ha permitido su consolidación académica.
- El gran incremento en investigación y desarrollo de la Didáctica de la Matemática y el reconocimiento creciente de su importancia.
- La existencia de una numerosa comunidad profesional de didactas de las matemáticas.

Reticencias

No obstante todavía existen resquicios de clima de opinión reticente basado en la desconfianza acerca de lo que "lo didáctico" puede aportar en la formación de los matemáticos. Opinión que, dejando de lado argumentos basados en prejuicios o corporativismos, encuentra justificación en dos ideas: una es que una reflexión didáctica no puede adquirir significado con jóvenes sin experiencia y que, por tanto, debe reservarse para la formación permanente; la otra es el temor a que la formación didáctica se haga en detrimento de la formación matemática de los estudiantes.

Dificultades

Este clima de opinión reticente se ve reforzado por las dificultades específicas que hay que vencer en el trabajo diario con los estudiantes de matemáticas. Dificultades que tienen que ver con sus creencias, con sus hábitos y con las expectativas que despierta la Didáctica.

Los estudiantes creen que la materia puede ser dominada si trabajan en ella y si han tenido éxito es porque han trabajado duro (Schoenfeld, 1989 p. 66). Además, "la mayoría de los (estudiantes) que tienen éxito nunca ponen en duda su conocimiento matemático o las matemáticas que han aprendido: después de todo, no hace ninguna falta si tienen éxito" Sin embargo, "la situación es bastante diferente para la mayoría de los jóvenes que no tienen éxito. Siguen creyendo que las matemáticas son importantes, pero también que son difíciles –imposibles para muchos - , misteriosas, sin sentido y aburridas. No tratan de nada y provocan sentimientos de opresión y de estar bajo el dominio de alguien, no se sabe quién. No es probable que estas personas pongan en duda las matemáticas mismas, pero seguramente pondrán en duda, criticarán y vilipendiarán la llamada educación matemática que han recibido. Culpan a los enseñantes de no haberlos comprendido nunca, culpan al currículo de matemáticas por todos sus ejercicios irrelevantes y soporíferos y, naturalmente, culpan al sistema educativo por haberlos engañado. El sistema les hizo creer que el estudio de las matemáticas era, y es, importante, y el sistema les ha fallado. El sistema creó la necesidad pero ha sido incapaz de satisfacerla" (Bishop, 1991, p. 18 y 19).

En cuanto a los hábitos de los estudiantes para futuros profesores, éstos tienden a emular las metodologías de sus antiguos maestros sin cuestionar su idoneidad. A falta de otra experiencia, tienden a organizarse de acuerdo con sus últimas vivencias, lo que trasladan a la Escuela hasta que al darse de bruces con la realidad comienzan a generar sentimientos negativos por la falta de éxito esperado.

Finalmente, las expectativas que despierta la didáctica en los estudiantes suelen ser frustrantes, tanto por la complejidad de las nociones didácticas, su lenta comprensión y su vinculación a la experiencia de su puesta en práctica, como por las contradicciones de la ideología dominante que presupone la existencia de una relación de transferencia simple de la enseñanza al aprendizaje (Laborde, 1992, p. 167). De aquí que, al comienzo, la visión didáctica sea desestabilizadora y decepcionante y, como no parece dar respuestas a los problemas, favorece más la crítica de la enseñanza tradicional que la oferta de soluciones inmediatas.

Respuestas

Dado este panorama tan complejo es claro que hay que reaccionar en un sentido que tenga en cuenta que a los estudiantes de matemáticas como futuros profesores se les va a exigir conocer las matemáticas de una manera diferente a las otras personas implicadas exclusivamente en la cultura matemática formal. No como un producto acabado, sino como un producto en elaboración, que se plantea desde una perspectiva cultural, comprometida con la educación de los ciudadanos, con sus procesos de enseñanza-aprendizaje, con su comportamiento y sus sentimientos. Un conocimiento de Matemáticas diferente del que necesita de las aplicaciones de las Matemáticas (un estadístico, un ingeniero o un físico). Por lo tanto, es necesario producir cambios en la forma en que están viviendo su formación los estudiantes de matemáticas, y para esto es necesario el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas en los planes de estudio de las licenciaturas de Matemáticas. En otras palabras, es necesario introducir en ellos asignaturas de Didáctica de las matemáticas.

Componentes de las asignaturas "Didáctica de la matemática

Para articular las asignaturas de "Didáctica de las matemáticas", en el sentido señalado en el epígrafe anterior, las componentes que se pueden abordar y cuyo desarrollo darán forma concreta al trabajo en el salón de clase podrían ser las siguientes:

Una componente cognitiva

Para mostrar la complejidad de las relaciones de enseñanza-aprendizaje que se manifiestan en la subjetividad y en la insuficiencia de la práctica de la enseñanza.

La subjetividad, que se deriva del hecho de que los procesos de toma de decisión del profesor se ven influidos por múltiples factores, por ejemplo, el impacto de sus creencias, su pensamiento, su conocimiento y experiencia previa mientras aprendió matemáticas; o el conocimiento acerca de cómo piensan y resuelven tareas los aprendices.

Y la insuficiencia de la enseñanza que se deriva de que siendo el aprendiz un constructor activo de su propio conocimiento las presentaciones claras no son suficientes, por lo que éste con ideas correctas puede adquirir conocimientos locales, parciales, vagos, incoherentes o erróneos. Los profesores construyen este tipo de conocimientos que son resistentes, difíciles de erradicar y los llevan a sus clases produciendo como una bola de nieve.

Una componente de enseñanza

Para revelar la relatividad del curriculum, la metodología y la evaluación que se manifiesta en una obra inacabada que es el resultado de decisiones de grupos dominantes, que evoluciona y obedece a leyes que rigen su desarrollo interno, y que está conformada con elementos que no son incuestionables.

Una componente formal.

No para mostrar los contenidos de la materia que los alumnos cuando sean profesores tendrán que enseñar a sus alumnos; contenidos cuyo conocimiento se les supone por haberlos cursado en otras disciplinas matemáticas, sino porque es preciso saber cuáles son, en qué sentido están concebidos, y como son objeto de un proceso de *elementarización*.

Una componente histórico-epistemológica.

Para mostrar el proceso constructivo del conocimiento matemático en sus dimensiones cognitiva, pedagógica y epistemológica que se manifiesta en su progreso evolutivo y, no tratando de introducir la historia como un pasatiempo, presentando anécdotas del pasado, biografías o descripciones de hechos ordenados cronológicamente.

La dimensión cognitiva, para aprovechar paralelismos entre las concepciones y dificultades en la historia de las ideas matemáticas y en los estudiantes de hoy cuando están tratando de ser competentes en las matemáticas de la enseñanza. La dimensión epistemológica, para señalar los cambios en las concepciones hasta llegar al concepto en su formulación actual, así como los avances, retrocesos y controversias en la aceptación de esos cambios y, los errores, contradicciones e incoherencias de los matemáticos del pasado, sus explicaciones y sus justificaciones en relación también con esos cambios. Y la dimensión pedagógica, para mostrar el orden en la presentación de las ideas matemáticas, su razón de ser y como se organizan y relacionan, en los libros de texto.

Ejemplos ilustrativos de estas componentes

Componente cognitiva

La insuficiencia de la enseñanza se puede poner de relieve de muchas maneras, en particular, enfrentando a los estudiantes con su propio proceso de enseñanza-aprendizaje en relación con sus concepciones, el sentido de sus conocimientos, sus limitaciones, etc. Para ilustrar esta idea son muchos los ejemplos que podemos utilizar, uno de ellos es el caso de los decimales y los porcentajes.

Planteamos a los estudiantes que discutan acerca de las siguientes afirmaciones:

- 1,23 y 1,230 representan números diferentes
- No hay ningún decimal entre 3,25 y 3,26,
- El número siguiente de 3'25 es 3'26;
- $3{,}9 < 3{,}12$ porque 9 12,
- $0{,}1^2 = 0{,}1$ porque $1 \times 1 = 1$
- No es posible tomar del 200% de una cantidad ya que el 100 %, ya que de esa cantidad es el todo. Sin embargo si es posible una ganancia del 200%
- Si la gasolina sube un 20%, y después baja un 20%, el precio no ha variado
- Un comercio puede anunciar que hace el 100% de descuento y sin embargo no regalar los productos, solo tiene que vender a 50 lo que antes vendía a 100.

Componente histórico-epistemológica.

Para hacer emerger las concepciones y dificultades de los estudiantes del presente planteamos preguntas en relación con las concepciones de los matemáticos del pasado. Para ilustrar esta idea también son muchos y variados los ejemplos que podemos utilizar, uno de ellos es el caso de los negativos.

Recordemos que los negativos obligaron a plantear la necesidad de una nueva ordenación de las números. Al querer conservar el orden numérico, por necesidad de la operatoria, hubo que aceptar que cualquier cantidad negativa tenía que ser menor que cualquier cantidad positiva.

$$2 < 7 \quad 2-3 < 7-3 \quad -1 < 4$$

Y, de aquí, que las cantidades negativas tenían que ser cantidades menores que cero.

$$-2 < 1 \quad -2-1 < 1-1 = 0$$

Esto dio lugar a acaloradas discusiones y a razonamientos absurdos.

- Si las cantidades negativas son menores que las positivas se tiene que: $-3 < 2$, mientras que $(-3)^2 > 2^2$ de donde entre dos cantidades desiguales el cuadrado de la más pequeña es mayor que el cuadrado de la más grande (Carnot, 1753-1823) y esto es absurdo.

Otro caso paradigmático es el de los complejos:

- $(-1) = (1)$ $(-1)^2 = (1)^2$ $\log(-1)^2 = \log(1)^2$, de donde aplicando las reglas para operar con logaritmos se tiene que $2\log(-1) = 2\log(1)$ $\log(1) = \log(-1)$. Igualdad que introduce el logaritmo de un número negativo, en contra de la definición escolar que afirma que no existen los logaritmos de los números negativos, dado que el logaritmo es un exponente. Pero es que, además, de $\log(1) = \log(-1)$ se sigue, usando la cancelación que usamos con frecuencia para resolver las ecuaciones logarítmicas, que $1=-1$ y esto es difícilmente aceptable.

- Por otra parte, de la definición de $i=-1$ se tiene que $i^2=-1-1$ y por las reglas para operar radicales se tiene que -1-1=(-1)(-1)=1=±1 de donde $i^2=\pm1$.Pero por la definición de raíz cuadrada se tiene que: $i^2=(-1)^2=-1$ y esto es absurdo.

Otro ejemplo de controversia epistemológica esta relacionado con la dificultad para entender la convergencia / divergencia de series.

- Autores como Bernouilli, Leibnitz o Euler, obtuvieron que la serie 1-1+1-1...+... $(-1)^{n-1}$ era sumable y de suma 1/2. Bernouilli, denotando la suma por S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+ ..., y reordenándola obtuvo que S = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)- ... , e igualando, obtuvo que 1-S = S, de donde S = 1/2. Mientras que Euler, tomando la serie geométrica $1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+...$, obtuvo para x = - 1, que 1-1+1-1+... = 1/2. Sin embargo, escribiendo la serie en la forma (1-1)+ (1-1)+ (1-1)+..., se obtiene que la suma debería ser 0. Igualmente, escribiendo la serie como 1-(1-1)-(1-1)-(1-1) +..., se obtiene que la suma debería ser 1. ¿Qué se puede decir de esto?

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. México. Ed. Iberoamericana.7-23

Laborde, C. (1992). *Audacia y razón de las investigaciones francesas en didáctica de las matemáticas*. Proceedings (1989). PME 13. 46 – 61. Versión en inglés: "Audacity and Reason: French Research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics* 9(1989) 31-36. Versión en español de Rodrigo Cambray Núñez. En R. Cambray; E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.): *Antología en Educación matemática. Educación matemática 1*. Grupo de estudios sobre enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV. México, D. F.

Bishop. A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Temas de educación.* Barcelona: Paidós. 1991

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza. 1972.

Gómez, B. (2002). Aportaciones del área a la formación inicial de los matemáticos. La visión de un profesor de Didáctica de las Matemáticas. En M. Carmen Penalva, Germán Torregrosa y Julia Valls. *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*. Universidad de Alicante.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education* 20 338-355. Versión en español de A. Sánchez. En R. Cambray; E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.): *Antología en Educación matemática. Educación matemática 1*. Grupo de estudios sobre enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. S. Matemática Educativa. CINVESTAV. México, D. F.

Pensamiento Matemático Avanzado

Predicción y simulación: nociones asociadas a las ecuaciones diferenciales

Miguel Solís Esquinca
Universidad Autónoma de Chiapas, Cinvestav IPN, México
solise@montebello.unach.mx

Resumen

A partir de la hipótesis de que una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y de Simulación sea el eje del Cálculo Integral escolar, reportamos, aquí, algunos resultados de nuestro trabajo con estudiantes universitarios con los que hemos explorado aspecto de la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Favoreciendo la idea de simulación, se trabajó con la ecuación diferencial , dónde se variaron uno a uno los parámetros *a*, *b* y *c*.
Encontramos un argumento gráfico que atiende las tendencias de las gráficas, ya sea en una suma de funciones, en la variación de los parámetros o en la forma de la gráfica de la solución de las ecuaciones diferenciales, favorecidos por los dispositivos tecnológicos permiten concebir a una función globalmente.

Introducción

La ciencia y la tecnología se han desarrollado a lo largo de la historia del ser humano a través de dos cuestiones fundamentales: la predicción y el control de los fenómenos naturales. Si bien, la noción de Predicción permite conocer la evolución posterior de los fenómenos de variación continua cuantificando la relación funcional entre variables a partir de las condiciones iniciales y de las variaciones de las variables involucradas en el fenómeno (Muñoz, 2000), esto es construir $F(t)$; el control de estos fenómenos de variación estaría vinculado a la noción de Simulación, esto es, partir de $F(t)$, construir y analizar la organización de los comportamientos de $y(t)$ a través de la variación de los parámetros (A, a, B y b).

En un ambiente gráfico favorecido por el contexto social y cultural contemporáneo del uso de calculadoras y computadoras con capacidad gráfica, las actividades didácticas que privilegien a la simulación se verán también favorecidas. A partir de la hipótesis de que una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y de Simulación sea el eje del Cálculo Integral escolar, reportamos, aquí, algunos resultados de nuestro trabajo con estudiantes universitarios con los que hemos explorado aspecto de la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Antecedentes

Los dispositivos tecnológicos emergentes disponibles, calculadoras programas matemáticos de cómputo cada vez más sofisticados, son ahora comunes entre los estudiantes de nuestro sistema educativo mexicano en el nivel superior y, aunque no en la misma medida de su disponibilidad, están siendo incorporados al aula. Libros de texto han incorporado el uso de calculadoras o computadoras en su discurso, en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa pueden encontrarse un número respetable de artículos que tratan al respecto. Esto ha permitido pensar en modificaciones de la presentación de la matemática en la escuela.

Los cambios más significativos han consistido en adelantar contenidos, que formaban parte de cursos posteriores, a los cursos actuales, por ejemplo, el precálculo tradicionalmente enfocado a funciones y sus gráficas, aborda ahora conceptos como máximos y mínimos o función creciente y decreciente, sin tener que introducir el concepto de derivada, sin embargo, estos argumentos son aplicados solo en este curso, en Cálculo serán incluso inhibidos. En la matemática universitaria, donde el cálculo ocupa un papel predominante, no es claro como estos argumentos visuales usados en precálculo pueden ayudar al entendimiento de los estudiantes de temas que están ubicados en niveles avanzados del currículo, por ejemplo en las ecuaciones diferenciales.

El Problema de Investigación

El problema de investigación, que hemos venido trabajando, es estudiar entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales a través de observar actos visuales y actos analíticos (Zazkis et al, 1996) que se presentan en las estrategias de los estudiantes al resolver un problema. Para este estudio se crea un ambiente gráfico específico donde se privilegia la idea de simulación con lo que es posible encontrase con los argumentos gráficos usados en el precálculo, usando calculadoras que grafican funciones. Observando estrategias de estudiantes identificaremos los actos visuales y analíticos que surgen de éstas y determinaremos el papel que éstos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales. Usamos un argumento gráfico, favorecido por el uso de calculadoras que grafican funciones, y que hemos llamado "comportamiento tendencial" (Cordero & Solís 1997). El proyecto ha ofrecido algunos resultados que pueden consultarse en Solís, 2000.

Lo que reportamos

En este trabajo reportamos una serie de experiencias llevadas a cabo con estudiantes universitarios, en la dirección descrita, enfrentándose a situaciones matemáticas, particularmente de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Lo que aquí presentamos es la continuación de lo ya reportado en Solís (2000).

En aquella ocasión, describimos una experiencia donde diez estudiantes universitarios se enfrentaron a situaciones que involucran ecuaciones diferenciales. Las observaciones de sus producciones las hicimos mediante el método de entrevista clínica. El protocolo de la entrevista individual consistía de tres partes: en la primera el estudiante se familiarizaba con una "aritmética gráfica"; en la segunda parte, se presentaban las ecuaciones diferenciales $y_1+y=F(x)$ cuando $F(x)=k$, $F(x)=x$ y $F(x)=x^3$, y y se preguntaba sobre su solución, algebraica y gráfica; en la tercera parte se trabajó la generalización $F(x)=x^n$. En una entrevista colectiva, un grupo de cinco estudiantes trabajaron las mismas relaciones, ahora usando en formas tabulares.

El diseño de esas entrevistas respondía más la posibilidad de observar las relaciones que se establecieran entre la expresión algebraica de una ecuación diferencial y la gráfica de su solución, en ese contexto, la noción de comportamiento tendencial jugó un papel fundamental.

Con esto como antecedente, se procedió a diseñar una nueva actividad donde ahora se favoreciera la "aritmética gráfica" del precálculo (dilataciones, contracciones, traslados) además de privilegiar la noción de simulación (control). Ahora son los parámetros (coeficientes) de la ecuación el centro de atención en el problema. Si en la primera actividad, los estudiantes se centraron en observar el comportamiento global de la función $F(x)$ para predecir el comportamiento de la solución, en esta nueva, la atención estará en los efectos que la variación de los parámetros tiene en la solución.

Diseño de la situación

Para favorecer la idea de simulación, se trabajó con la ecuación diferencial , dónde se variaron uno a uno los parámetros a, b y c. El diseño y la aplicación se hicieron en dos partes. Primero, un grupo regular de estudiantes de la Universidad Autónoma de Chiapas, que cursan la materia de ecuaciones diferenciales, en grupos de cinco respondieron el siguiente cuestionario:

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales y bosqueja las gráficas de las soluciones (toma $c = 1$ como constante de integración).

$$y'(x) + y(x) = x^2$$

$$2y'(x) + y(x) = x^2$$

$$y'(x) + 2y(x) = x^2$$

$$y'(x) + y(x) = 2x^2$$

Compara las soluciones gráficas y algebraicas de las cuatro ecuaciones.¿Cuál es el efecto en la solución al variar los coeficientes en la ecuación?

Un segundo grupo de cinco estudiantes, en entrevista clínica, se enfrentaron a la siguiente situación: primero se presentaba en una hoja dos columnas, la de la izquierda mostraban cuatro ecuaciones $y'(x) + y(x) = x^2$; $2y'(x) + y(x) = x^2$; $y'(x) + 2y(x) = x^2$; $y'(x) + y(x) = 2x^2$, en la columna de la derecha se mostraban ocho gráficas que eran dos de las soluciones para cada ecuación, aquí se les pedía relacionaran las dos columnas; enseguida se presentaba una hoja similar a la primera pero ahora mostrando en la columna de la derecha ocho expresiones algebraicas que correspondían a dos de las soluciones de cada ecuación; en una tercera hoja se presentaba tres columnas, la de la izquierda mostraba las ecuaciones, la del centro las ocho gráficas y la de la derecha las ocho expresiones algebraicas. En la tercera y segunda hoja también se les pedía relacionar las columnas.

Descripción de las acciones

Los estudiantes que se someten a la primera parte de la situación, el cuestionario, lo hacen como parte de su curso de ecuaciones diferenciales. Ellos cursan el tercer semestre de la carrera de Ingeniería Civil, resuelven el cuestionario dentro del horario de clases, en una sesión de un poco más de hora y media. No todos los equipos logran terminar, sobre todo con lo que se refiere a la última pregunta, que es la que más nos interesaba. Se dividen el trabajo de resolver las ecuaciones, utilizando el método de factor integrante, y graficar la solución, algunos utilizan calculadoras que grafican. A continuación presento un párrafo que a manera de conclusión nos ofrece uno de los equipos que pudo terminar la actividad.

> ...En todas nuestras gráficas es la misma parábola (sic) la que se refleja, sin embargo la variación de los coeficientes hace que se abra o cierre más la

parábola. Si se duplica la derivada, la parábola es más abierta y la pendiente de la gráfica es menor. En caso de variar la función, la parábola se abre más de un lado, y la parte de la izquierda se acerca mucho más al eje de las "y".

La segunda parte de la actividad se llevó a cabo con estudiantes distintos a los que estuvieron en la anterior, estos estudiantes, aunque ya habían cursado la materia de ecuaciones diferenciales no se habían enfrentado a una situación similar. Aunque saben resolver este tipo de ecuaciones, cuando se les presenta la primera hoja que sólo contiene las ecuaciones y las gráficas, no intentan una solución algebraica, al menos en un principio. Su atención se centra en los comportamientos de las gráficas. Aunque no pueden establecer todas las relaciones correctamente, un argumento del precálculo es usado para justificar una elección que resultó correcta. Los estudiantes reconocen una parte de la gráfica como una parábola y la relacionan con el término $F(x)$ en la ecuación . A continuación un extracto de la trascripción.

Estudiante: ...ésta (la gráfica) debe corresponder con ésta o ésta (las expresiones) porque las parábolas (parte derecha de la gráfica) están mas cerradas que las otras.

Entrevistador: ¿Más cerradas?

Estudiante: Sí, ... no es como las otras que están casi igual de cerradas y como ésta es la única que está multiplicada por dos (se refiere a) y las otras no.

Entrevistador: Pero estas dos también tienen un término multiplicado por dos, por ejemplo aquí (señala $2y$ en una ecuación) y aquí (señala en otra).

Estudiante: Si pero no en parábola.

La relación en cuestión es entre una gráfica muy conocida (la parábola) y la forma de la curva solución de la ecuación diferencial. Ya vimos que los estudiantes, al observar los comportamientos de las funciones involucradas en una suma pueden predecir el comportamiento de la función suma a partir de los comportamientos de las funciones involucradas en ésta. En el caso de las ecuaciones diferenciales lineales la pregunta está en uno de los sumandos. Esto adquiere un significado especial, ya que estudiantes que no participaron en la primera experiencia pueden percibir a la solución como una función que tiene características de la función suma, en este caso la parábola. Con esta lógica, le atribuyen a la solución las mismas propiedades que al término $F(x)$ (la función suma).

Análisis

Los estudiantes que se sometieron a estas situaciones están familiarizados con las gráficas de funciones cuadráticas así cómo también sobre los efectos que la variación de sus coeficientes tienen sobre las mismas. Esto favorece que en la actividad se relacionen las gráficas de las soluciones con parábolas y los efectos que sobre una parábola ocurren cuando se varían sus parámetros en la expresión algebraica sean trasladados, ahora, en lo que ocurre cuando los parámetros son variados en la ecuación diferencial.

En esta experiencia pudimos observar cómo los estudiantes trasladan las propiedades geométricas de una curva conocida que han trabajado en el precálculo al contexto de las ecuaciones diferenciales. Sus argumentos están relacionados a los comportamientos gráficos, en general a los de carácter global, como comportamientos asintóticos, comportamientos al infinito, curvas que es una ventana "ampliada" de su calculadora se "parecen", entre otras, sin embargo algunos estudiantes también ponen atención a los comportamientos de carácter local, como intersección con los ejes, vértices.

Las actividades son presentadas a los estudiantes cuando ellos ya saben resolver ecuaciones lineales de primer orden, incluso de un tipo, que cualquier texto diría, mas difícil de las aquí presentadas. No obstante las preguntas sobre las soluciones parecían ser nuevas para los estudiantes. El método que emplearon para resolver sus ecuaciones fue el del factor integrante.

El método de resolución, que les da a los estudiantes control en esta etapa de solución no permitió ver a la ecuación como una suma de funciones, no dos funciones cualquiera sino una y su derivada, situación que si se presentó en estudiantes que aún no dominaban un método de solución. Esto es, el método no permite reflexionar en el proceso de solución y la relación entre la ecuación y su solución se torna difícil y sólo se observa la "parte" parabólica de ambas expresiones (ecuación y solución).

En Solís (2000) se reportó un método que un estudiante empleó para resolver una ecuación a partir de ir completando la solución, proponiendo primero una función que se aproximara a la solución y después ir quitando o agregando términos que permitieran a la función cumplir con la ecuación.

El considerar a la ecuación diferencial aquí escrita como una suma de funciones, en este caso particular como una parábola (función) mas una recta (derivada) hubiera permitido reconocer propiedades de tangencia en el punto donde la gráfica cruza al eje y. Estudiantes en precálculo han llegado a establecer estos comportamientos locales ante una situación netamente de precálculo, usando el argumento de que la función suma "hereda" las propiedades de la funciones sumandos.

En una actividad muy reciente, llevada a cabo no de forma sistemática con profesores de posgrado, en la que se trabajaron situaciones de precálculo de suma de funciones, favoreciendo el argumento de comportamiento tendencial (Cordero, 2001; y Solís, 2000), resolvieron la actividad aquí descrita usando los mismos argumentos que el precálculo, el decidir entre una curva y otra se hizo a través de las propiedades de tangencia de la curva solución en la intersección con el eje y.

A continuación, a manera de resumen, enlisto algunos hechos que hemos observado a partir de estas actividades:

- Las calculadoras y aplicaciones de cómputo que grafican funciones hace que los estudiantes fijan su atención a formas globales de las gráfica, favoreciendo argumentos gráficos que responden a comportamientos tendenciales de las funciones.
- El argumento de comportamiento tendencial surge en la actividad de sumar una función con una "recta" cuándo la pregunta se hace a partir del contexto gráfico en que ocurre, lo que hemos llamado una aritmética gráfica.

- Las propiedades gráficas de las funciones sumandos, de la actividad descrita en el párrafo anterior, son heredadas a la función suma, estableciendo argumentos gráficos que tienen que ver con estrategias locales (tangencia en un punto) y estrategias globales (reconocimiento de formas geométricas completas)
- Estudiantes pudieron construir un método de solución de un tipo particular de ecuaciones diferenciales a partir de reconocimientos de patrones analíticos, para esto lo fundamental fue predecir una posible expresión para la solución de la ecuación y reconocer que la ecuación está formada, en este caso, por un polinomio (función propuesta) mas otro de grado menor en uno (función derivada). Esto llevó también a involucrar la derivación sucesiva en el método de solución.
- Se conservan en la variación de parámetros (coeficientes) de una ecuación diferencial lo que los estudiantes han experimentado en el precálculo. Aunque sólo las dos ecuaciones en las que el término de la ecuación es afectado, y , pudieron ser relacionadas con su solución, los argumentos usados están anclados en que la solución debe parecerse al término y que los efectos en esta parábola (, en este caso), deben ser parecidos a los efectos en la situación, pudiendo establecer la correcta relación con sólo la observación de la concavidad de la parábola.
- El método estándar de solución de este tipo de ecuaciones diferenciales no favorece este tipo de análisis gráfico ya que el centro de la solución está en el término exponencial de la solución y no en el polinomio, lo que no permite establecer una relación entre ellos. Nuestra tarea sería ahora diseñar una actividad en la que los argumentos gráficos fueran favorecidos.

Reflexiones Finales

Los trabajos de esta investigación aportan una visión que nos sitúa en un marco funcional, en el sentido de establecer relaciones entre procesos y objetos a través de significados, de ahí que un lenguaje de herramientas y nociones sea privilegiado sobre un lenguaje de objetos (Cordero, 2001). Esto distingue nuestro estudio de aquellos que atienden a los significados desde la perspectiva de un objeto matemático dado e inamovible (la definición de éste), en estos los significados que los estudiantes dan a un objeto están cerca o lejos de su definición. Las investigaciones que hacemos no presuponen un objeto matemático dado, son las significaciones que los estudiantes dan a las situaciones matemáticas nuestro objeto de estudio.

Situarse en ese marco permitió encontrar un argumento gráfico, implícito algunas veces y explícito en otras, en las explicaciones de los estudiantes. Surge en un ambiente gráfico favorecido por los dispositivos tecnológicos que grafican funciones y que permiten concebir a una función globalmente, esto es, la gráfica es un objeto completo y no se percibe el proceso que la antecede. Este argumento atiende las tendencias de las gráficas, ya sea en una suma de funciones, en la variación de los parámetros o en la forma de la gráfica de la solución de las ecuaciones diferenciales. Habilitado a partir de las explicaciones, éste argumento, al que hemos llamado comportamiento tendencial de las funciones, se convierte ahora en un programa que organiza contenidos del cálculo, de ahí que adquiera un statu quo epistemológico y puede considerarse como una categoría del cálculo. Así, una pregunta obligada en Matemática Educativa es ¿cómo organizar el Cálculo Integral al seno de las instituciones escolares de tal forma que el funcionamiento del sistema didáctico permita propiciar que la mayoría de los estudiantes lo aprendan? Nuestra hipótesis es que una relación simbiótica entre la noción de Predicción y de Simulación puede convertirse en el eje organizador del Cálculo Integral escolar.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Volumen 4, número 2. pp 103 – 128. México: Clame - International Thomson Editores.

Cordero, F. & Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo.* Edición Especial Casio. Cuadernos Didácticos. Volumen 2. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. (2000). *Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Volumen 3, número 2. pp. 131 – 170. México: Clame - International Thomson Editores.

Solís, M. (2000). *Comportamientos gráficos y analíticos en las explicaciones de los estudiantes: Situaciones con ecuaciones diferenciales.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 13. Año 2000. México: Clame - Grupo Editorial Iberoamérica.

Zazkis, R. & Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). *Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4.* Journal for Research in Mathematics Education. (27)4, 435-457.

La predicción y la regla de los signos de descartes

Ricardo Cantoral y Marcela Ferrari

rcantor@mail.cinvestav.mx y mferrari@mail.cinvestav.mx

Resumen

René Descartes publicó en 1637 su famosa *Géométrie*, un tratado donde aplica el álgebra a la geometría y desarrolla un original sistema de álgebra simbólica. En el tercer libro de la *Géométrie* enuncia, sin demostración, su célebre regla de los signos de Descartes. Durante dos siglos, el mundo matemático intentó sin éxito una demostración general y satisfactoria a los estándares de la época. Finalmente, Carl Frederick Gauss la demostró de la manera más general en 1828 recurriendo a métodos algebraicos.

En este artículo, presentamos el tratamiento que la regla de los signos tiene en los libros de texto de álgebra y proponemos una justificación original alternativa apoyada en la idea de predicción que, hasta donde sabemos, no ha sido reportada en la literatura especializada.

Introducción

Este trabajo sobre la regla de los signos de Descartes, centra su atención en un método que se encuentra en el cruce de caminos entre los procedimientos algebraicos y analíticos y en un época marcada por el nacimiento de un nuevo espíritu científico. Nuestra pretensión consiste, después de analizar la evolución conceptual de la regla, en proponer una justificación de naturaleza didáctica que permita el manejo flexible y articulado entre los diferentes marcos de representación usando para ello la idea de predicción.

Enmarcamos nuestra investigación en el acercamiento socioepistemológico, entendiéndose por tal a la aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre: la epistemología o lo relativo al conocimiento, la dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento socialmente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales.

La regla de los signos de Descartes

René Descartes publicó en 1637 su famosa *Géométrie*, un tratado donde aplica el álgebra a la geometría y en el que introduce el simbolismo algebraico actual que permitió a la postre la emergencia del álgebra clásica y de la geometría analítica. Particularmente, en el tercer libro de la *Géométrie* se enuncia, sin demostración, su célebre regla de los signos que hoy lleva su nombre:

On connoist aussy de cecy combien il peut y avoir de vrayes racines, & combien de fausses en chasque Equation. A sçavoir il y en peut avoir autant de vrayes, que les signes, & s'y trouvent de fois estre changés; & autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes o deux signes qui s'entresuivent. (Descartes, 1637).

Sin una demostración de la regla, explica su método aplicándolo a $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, ecuación construida multiplicando las ecuaciones x-2=0, x-3=0, x-4=0, x+5=0 a fin de obtener una ecuación de cuarto grado con tres raíces positivas, $(x-2)(x-3)(x-4)(x+5) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$. Como sabemos, la regla limita el número de raíces positivas de una ecuación polinomial al declarar que no exceden el número de cambios de signo en los coeficientes del polinomio. Naturalmente el número de cambios de signos se considera cuando el polinomio ha sido escrito de forma que sus potencias desciendan o equivalentemente asciendan.

Una demostración satisfactoria de la regla fue publicada por Gauss en 1828, luego de un periodo que va de 1637 a 1828 en el que se produjo una gran cantidad de intentos de demostración sin que ninguno de ellos alcanzara su objetivo. Algunos sin embargo, sirvieron para analizar casos particulares y para explicar la regla en la enseñanza de la época. Después de esta demostración, las discusiones sobre la regla de los signos siguieron distintos rumbos. Entre ellos, se intentó, como lo hicieran Budan, Sturm o Fourier (ver Dickson, 1903 o Rey Pastor et al, 1963), generalizarla de manera que los métodos de separación de raíces fuesen más potentes.

Regla de los signos de Descartes en los textos

En los libros de texto contemporáneos, no se presenta a la regla acompañada de sus demostraciones ni de justificaciones que la presenten factible a los estudiantes, sino mas bien, como dijera el propio Descartes, se considera que el examen de diversos ejemplos dará las pistas de su validez. Así encontraremos, presentaciones que podemos ubicar en dos vertientes: unas que se ocupan de la validez y pertinencia de la regla a partir de ejemplos, y otras que se interesan por demostrarla bajo un cierto cuerpo discursivo. Entre las primeras podemos mencionar a (Sullivan, 1989; Mataix, 1969; Hall & Knight, 1980), mientras de las segundas a (Dickson, 1939; Ferrar, 1943; Kostrikin, 1978; Uspensky, 1948). La primera de dichas formas se apoya en el teorema fundamental del álgebra de Gauss (acercamiento algebraico), mientras que la segunda lo hace basando sus argumentaciones en el teorema de Bolzano o teorema del valor intermedio del análisis matemático clásico (acercamiento analítico).

Para la lógica algebraica, la explicación de las variaciones de signo entre los coeficientes se debe al efecto que produce sobre el signo de los coeficientes la multiplicación del polinomio por el factor (*x raíz positiva*); mientras que en la lógica analítica en cambio, la presencia de la raíz positiva se justifica a través de las variaciones de signo entre coeficientes. En este segundo caso se usa la explicación del cambio de signo de la función en dos puntos del dominio para mostrar la existencia de raíces entre dichos puntos.

Acercamiento algebraico	Acercamiento analítico
Si $V(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_2x^2 + a_1x + a_0) = q$ $\Rightarrow V[(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_2x^2 + a_1x + a_0)(x - a) = q+1$	Si $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x + a_0$ y con $a_i a_{i+1} < 0$ para algún $i \Rightarrow$ f puede tener a lo más una raíz en un cierto intervalo
Una adición de un cambio ded signo proviene de la presencia de una raíz positiva más	Un cambio de signo en la lista de los coeficientes sucesivos, hace factible una raíz positiva más

Esquema de las lógicas algebraica y analítica

Visualizando la regla de los signos de Descartes

Entendemos visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso social muy utilizado en distintas áreas del conocimiento matemático y científico. Nos interesa analizar el comportamiento que tendrán las gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas a consecuencia de los signos de sus coeficientes. Consideramos que en estos casos particulares, es posible distinguir el papel que desempeñan los signos de los coeficientes de la función con las oscilaciones de las gráficas y en consecuencia con el número de raíces positivas de la ecuación algebraica respectiva.

Iniciemos planteando el caso de la función lineal $p(x)axb$, donde a y b son reales distintos de cero. Estas funciones quedan caracterizadas mediante los coeficientes a y b; respectivamente su pendiente y su ordenada al origen, por tanto en caso de producirse un cambio de signo entre los coeficientes a y b, se tendrá en consecuencia una raíz real positiva de la ecuación. Esta afirmación confirma el enunciado de la regla y se apoya en el sentido que las variables visuales, pendiente y ordenada, juegan en el diseño anterior.

Continuemos con el análisis de las funciones polinomiales de segundo grado. Consideremos para ello, la función real $p(x)ax^2bxc$ en la que a no es cero. En esta situación habremos de centrar la atención en la concavidad de la curva. Consideraremos sólo parábolas cóncavas hacia arriba, de este modo, al igual que en el caso de las ecuaciones lineales tendremos que, de producirse un cambio de signo en la secuencia de los coeficientes a, b y c de la cuadrática, existen tantas raíces reales positivas como cambios de signo se tengan en la ecuación, o en su defecto, dos raíces menos a causa de la posibilidad de contar con raíces complejas conjugadas. Esta afirmación confirma el enunciado de la regla de los signos, que hemos asociado a las variables concavidad, pendiente y ordenada.

Predicción y la regla de los signos de Descartes

En este apartado presentaremos la regla de los signos con argumentos basados en la noción de predicción. Para ello, habremos de vincular los signos de los coeficientes con los signos de las derivadas sucesivas de la función original. En este sentido, al mirar al polinomio como una expresión en serie de potencias podremos interpretar los cambios de signo en los coeficientes con los cambios de "dirección" en la gráfica.

Desde nuestro punto de vista, la noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud B con el paso del tiempo. Sabemos, por ejemplo, que B depende a su vez de otra magnitud P que fluye incesantemente. Necesitamos saber entonces el valor que tomará B antes de que transcurra el tiempo, antes de que P transite del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que, el verdadero valor de B esté distante de las expectativas que nos generan los valores de B y de P en un momento dado, de la forma en la que P y B cambian, de la forma en la que cambian sus cambios, y así sucesivamente.

El caso de mayor interés se presenta, naturalmente, cuando no se dispone en forma explícita de la relación entre B y P. Entonces habrá que hacer emerger progresivamente una nueva noción, una que permita de algún modo la generación de la solución óptima a una clase de situaciones propias de la predicción. En su momento, este programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo, con el programa de Lagrange donde emerge la noción de función analítica.

Ahora bien, para aplicar estas ideas de predicción al problema de la determinación de las raíces positivas de un polinomio arbitrario tendremos que recordar que los coeficientes de una ecuación polinomial se corresponden con las derivadas sucesivas de la función polinomial evaluadas en cero. Ejemplificaremos esto para el caso de las funciones cúbicas.

De este modo, la ecuación $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$, puede escribirse como . $f(x)=\frac{f'''(0)}{6}x^3+\frac{f''(0)}{2}x^2+f'(0)x+f(0)=0$ El número de cambios de signo entre a, b, c y d es entonces el número de cambios de signo entre $f'''(0)$, $f''(0)$, $f'(0)$ y $f(0)$. Esto es coherente con la idea de predicción que hemos presentado, pues el comportamiento de la gráfica a la derecha (a la izquierda) del origen está completamente determinado por el comportamiento de la función en un punto, en nuestro caso en $x = 0$.

Para visualizar esto, resumimos en un diagrama y de forma sucinta, la relación entre los signos de las derivadas sucesivas de una función cúbica con el comportamiento de la misma.

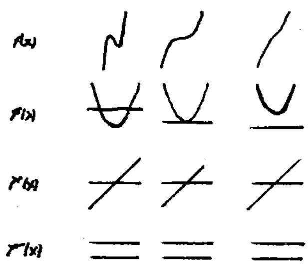


Diagrama 1: Gráficas de las cúbicas y sus derivadas

Siguiendo estas ideas, podemos establecer la regla de acotación de Newton: "Un número positivo a es cota superior de las raíces positivas de la ecuación $f(x)$ 0, donde f es una función polinomial de grado n, si ninguna de las derivadas sucesivas en a es negativa". Si $f(a) \geq 0, f'(a) \geq 0, ..., f^{(n-1)}(a) \geq 0$ y $f^{(n)}(a) > 0$, se tendrá entonces para todo número p mayor que la cota, $p > a$, que la función evaluada vale $f(p) = f(a) + f'(a)(p - a) + ... + f^{(n)}(a)/n!\,(p-a)^n > 0$. De este modo, sabemos que el comportamiento de la función después de a, es tal que no le permite cruzar al eje X en esa zona.

Así, podemos estudiar las combinaciones de signos y analizar las posibles gráficas de los polinomios $y = f(0)$, $y = f(0) + f'(0)x$, $y = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2!$, ..., $y = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2! + ... + f^{(n)}(0)x^n/n!$ que aproximan a la función polinomial f. Con este esquema, el número de cambios de signo en las derivadas es coherente con la tesis que postula la regla de los signos de Descartes y explica el comportamiento de la gráfica a partir de las ondulaciones de la gráfica de la función original (ver diagrama 2).

Conclusiones

El desarrollo de conceptos como función, raíz o solución han requerido de siglos de evolución hasta alcanzar sus estados actuales. Durante ese periodo las nociones se modifican y adquieren progresivamente los significados que les son característicos. Es por esa razón que consideramos importante indagar respecto del proceso de construcción de los significados asociados a los conceptos y procedimientos matemáticos a lo largo de su devenir histórico y social. Pues comprender estos episodios resulta valioso al momento de buscar explicarse el por qué estos conceptos matemáticos resultan tan resistentes al entendimiento de los alumnos de nuestros días.

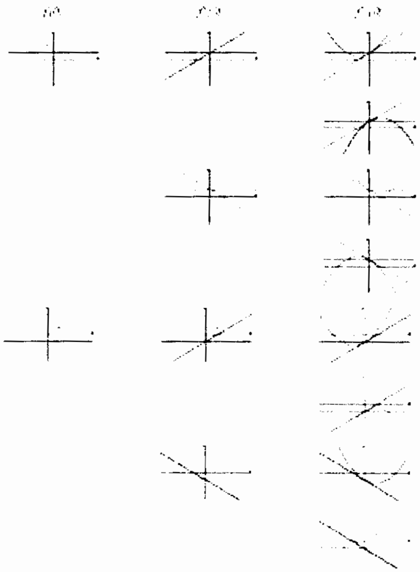


Diagrama 2. **Gráficas de las aproximaciones polinomiales**

Creemos que este trabajo ilustra el sentido de la búsqueda de la construcción social del conocimiento, pues si bien el teorema que hemos estudiado es publicado por Descartes y también por Harriot, hecho que dio lugar a una muy prolongada polémica respecto de la originalidad del resultado (Stedall, 2000), es cierto también que su completa demostración y difusión institucional se ha debido a una gran cantidad de personas en contextos y circunstancias concretas. Así mismo, la explicación alternativa de la regla de los signos que hemos propuesto con apoyo de la predicción es la continuación de un programa de trabajo cooperativo pues consideramos que la preocupación por la predicción, no es exclusiva de los físicos o los astrónomos, sino que es, como hemos insistido, el producto cultural de un largo proceso de socialización de diversas y complejas necesidades humanas que llegan a formar, en algún momento de su evolución, parte de teorías altamente sofisticadas así como del conocimiento institucional, ya sea al nivel de los eruditos o de la sociedad escolarizada.

Consideramos también que el conocimiento matemático, como parte de la cultura, vive en sus instituciones y en las prácticas que le son características. La predicción, la regla de los signos, la teoría de ecuaciones o la noción de verdad en la ciencia, comparten escenarios y circunstancias culturales, históricas e institucionales. Las actividades humanas que acontecen al seno de organizaciones sociales impregnan por igual a las prácticas cotidianas como aquellas que consideraríamos las más especializadas; en este sentido, al atender a estas cuestiones creemos que un amplio programa de investigación emerge en beneficio del quehacer didáctico. El problema de la estructuración del conocimiento escolar, cada vez con más claridad, está siendo entendido como un verdadero asunto de investigación científica. Este aporte en consecuencia, se suma a aquellos que plantean el estudio sistémico del quehacer educativo.

Referencias bibliográficas

Acevedo, M. & Falk, M. (2000). *Formación del pensamiento algebraico de los docentes*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(3), 245 – 264.

Bartolozzi, M. & Franci, R. (1993). *La Regola del Signi dall'Enunciato di R. Descartes (1637) alla Dimostrazione di C. F. Gauss (1828)*. Archive for History of Exact Sciences 45(4), 335 – 374.

Borowczyk, J. (1989). *Sur l'histoire des démonstrations de la règle des variations de signe de Descartes. La Démonstration mathématique dans l'histoire*. Actes du 7ème colloque inter - IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, IREM de Besançon et IREM de Lyon, 275 – 293.

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis*. Epsilon, Vol. 42, Núm. 14(3), 854 – 856.

Descartes, R. (1637). *Géométrie.*

Dickson, L. (1903). *Introduction to the Theory of Algebraic Equations.*

Ferrar, W. (1943). *Higher Algebra*. Oxford University Press.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemologíca. Estudio de la función logaritmo.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav del IPN.

Gauss, C. (1828). *Beweis eines algebraischen Lehrsatzes.* Journal für die reine und angewandte Mathematick. 1 – 4.

Hall, H. & Knight, S. (1980). *.Álgebra Superior.* Unión tipográfica editorial hispano americano.

Kostrikin, A. (1978). *Introducción al Álgebra.* Editorial MIR.

Lacroix, S. (1797). *Traité élémentaire de calcul différentiel, et de calcul intégral.* Bachelier Imprimeur Libraire de l'Ecole Polytechnique.

Lagrange, J. (1797). *Théorie des fonctions analytiques.* Imprimeur libraire pour les mathématiques.

Pastor, R. (1963). *Análisis Matemático.* Tomo 1. Buenos Aires, Argentina: Kapeluz.

Stedall, J. (2000). *Rob'd of Glories: The Posthumous Misfortunes of Thomas Harriot and His Algebra.* Archive for History of Exact Sciences 54(6), 455 – 497.

Uspensky, J. (1948). *Theory of equations.* McGraw Hill.

La convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento

Gustavo Martínez Sierra
CICATA-IPN & UAG, México,
gustavomtzs@yahoo.com.mx

Rosa María Farfán Márquez
CINVESTAV-IPN, México,
rfarfan@mail.CINVESTAV.mx

Resumen

Este escrito es continuación a aquellas indagaciones (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez, 2000, 2002) que se han ocupado de las interacciones didácticas de las convenciones matemáticas presentes en los exponentes. Se presenta una síntesis de los resultados que permiten aislar la presencia de un mecanismo constructivo común en las diversas formulaciones del concepto exponente. Se ha denominado *convención matemática* al mecanismo y se lo ha caracterizado en tanto su función para la integración sistémica de un conjunto de conocimientos.

Introducción

En el presente escrito están contenidos algunos de los hallazgos de una investigación que contribuye a los esfuerzos de un grupo de investigadores interesados en la caracterización de la construcción del conocimiento matemático. De manera retrospectiva, a esta línea de investigación se le ha dado por llamar *perspectiva socioepistemológica.* La hipótesis teórica fundamental de tal perspectiva consiste en considerar que la construcción del conocimiento puede ser explicada y descrita a través de diferentes componentes: a) la epistemológica, b) la de la comunicación, c) la cognitiva y d) la social. En términos metodológicos esta consideración determina un *sistema de componentes* fundamental a estudiar en las investigaciones y teóricamente representa la unidad mínima del análisis socioepistemológico. Se postula que la determinación de principios, que regulan la construcción del conocimiento, proporciona los elementos necesarios para predecir e intervenir en la evolución de una comunidad integrada con el objetivo de estudiar un contenido o enfrentada a situaciones problemáticas de tipo matemático. En particular en este documento se reporta una síntesis, desde la epistemología, de los elementos generales que permiten aislar la presencia de un mecanismo de construcción de conocimiento, al que hemos denominado *convención matemática.* Metodológicamente se opta por hacer un estudio de caso de su funcionamiento en los exponentes.

Primera aproximación al mecanismo

De inicio hemos de aclarar nuestra elección de la expresión *convención matemática.* La acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. Pero ¿qué es aquello que es conveniente para las matemáticas? De ahí que la caracterización sea *funcional*; es decir, que debe señalar las funciones de conveniencia. Al respecto el análisis epistemológico del desarrollo sobre el concepto de exponente no natural muestra la presencia de un mecanismo uniforme de construcción de conocimiento, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinar. Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* <u>convenido</u> *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* <u>matemático</u> *(es decir para la integración* *sistémica de conocimientos).* Es por ello que de manera sintética designamos al mecanismo con la expresión: *convención matemática*. Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de los objetivos teóricos específicos. A lo anterior se debe agregar que por el carácter sistémico de una teoría es posible que la inclusión de un nuevo objeto provoque la exclusión de otro. En este sentido, es importante, para la caracterización, el tipo de consideraciones *metamatemáticas* vertidas en un proceso de construcción; las cuales se presentan bajo la forma de *argumentos* acerca de lo que se debe o no conservar en el sistema. Dicha caracterización coloca el énfasis en que las convenciones matemáticas son un instrumento teórico a fin de satisfacer ciertos requerimientos de preservación de un conocimiento anterior en una nueva organización del conocimiento. A continuación se presenta un ejemplo del funcionamiento del mecanismo en la sintaxis algebraica.

En primera instancia, el exponente natural mayor o igual a dos representa una multiplicación reiterada, que surge como una *convención simbólica* que atiende a un principio de economía en la escritura. En términos matemáticos, con dicha definición se provoca la existencia del objeto matemático llamado *potencia*, que surge de la integración de los objetos matemáticos *base* y *exponente*. La interacción que se da entre este objeto matemático nuevo con las operaciones algebraicas genera, de manera deductiva, un sistema de conocimientos sobre su operatividad que comúnmente son designados como *leyes de los exponentes*:

- $A^{n}A^{m}=A^{n+m}$,
- $A^{n}/A^{m}=A^{n-m}$ con $n > m +1$, A 0
- $(A^{n})^{m}=A^{nm}$

A continuación, se plantea la necesidad de la inclusión de un objeto matemático nuevo[1], por ejemplo A^{0}. Por un principio metamatemático, su inclusión debe ser de tal manera que el nuevo sistema de conocimientos conserve la coherencia y unidad del precedente. En este caso se conviene que $A^{0}=1$. La realización del mecanismo, en este caso, es la igualdad $A^{0}=1$ y en consecuencia el modelo de exponente como multiplicación reiterada carece de sentido para el nuevo objeto matemático. Esta pérdida del sentido primitivo ocasiona la emergencia de la negociación de significados y de lo que debe ser conservado en el sistema. El aspecto funcional del mecanismo, para la integración sistémica de conocimientos, puede ser constatado con el siguiente razonamiento: si únicamente se utiliza la propiedad $(A^{n})^{m}=A^{nm}$ para convenir un valor para A^{0} nada se puede decir; ya que, por ejemplo, $(A^{0})^{2}=A^{0*2}$ entonces $(A^{0})^{2}=A^{0}$ por lo que $A^{0}=1$ o $A^{0} = 0$.

El punto central que se quiere señalar es que el argumento anterior no es producto de un razonamiento lógico en el sentido estricto del término (producto de inferencias lógicas aceptadas por el razonamiento deductivo). Para clarificar este punto se puede considerar el argumento más común, en la escuela y en los libros de texto, para el exponente cero, el cual induce la impresión de que $a^{0} = 1$ se puede *deducir*: Como $1 = a^{n}/a^{n} = a^{n-n} = a^{0}$ entonces $a^{0} = 1$.

---

[1] Aquí no se consideran las causas que originan la necesidad de incluir objetos nuevos en un sistema de conocimientos. Además, se hace notar que el nuevo objeto podría ser A; ya que este no tiene sentido en el contexto de la multiplicación reiterada.

Cuando $m > n+1$ la igualdad $a^m/a^n = a^{m-n}$ (recuérdese que la definición de partida es: a^n es igual a multiplicad

a^n veces) puede tener el argumento *lógico* siguiente;

entonces eliminando factores queda lo que se afirma. Sin embargo el argumento: como $1 = a^n/a^n = a^{n-n} = a^0$ entonces $a^0 = 1$; no es de la misma naturaleza que el anterior; pues se apoya implícitamente en que $a^m/a^n = a^{m-n}$; la cual es indemostrable por ser la ley que se quiere conservar.

Presencia del mecanismo en el devenir del concepto de exponente

A la luz del análisis epistemológico de fuentes históricas se presenta el siguiente esquema de la construcción social del exponente no natural:

- En el marco del pensamiento algebraico la noción de exponente no natural surgiócon la intención de preservar la relación entre las progresiones aritmética y geométrica,con el fin de unificar un algoritmo para la multiplicación de monomios.
- En el marco del problema de cuadraturas de curvas existió una auténtica reconstrucción de la convención; ya que emergió como organizadora de las fórmulas de cuadraturas.
- A lo anterior le acompañó una etapa de ocasiones de uso, de las reglas de trans formación[2] relacionadas con los exponentes, dentro del pensamiento variacional que permitió la total aceptación de la noción de exponente no natural: cálculo de diferenciales y primitivas en el paradigma leibniziano, el cálculo de fluxiones y momentos en el paradigma newtoniano y la construcción del binomio de Newton. Estos factores ocasionaron que el universo de "curvas algebraicas"(con fórmula) tuviera su centro en expresiones de la forma $f(x)^{m/n}$ (donde f(x) es un polinomio).

Lo anterior puede ser esquematizado por la evolución de las siguientes etapas de conocimiento: 1) La semántica geométrica, 2) Primera sintaxis algebraica. 3) Segunda sintaxis algebraica (La aceptación de que el exponente puede ser cero y negativo), 4) Primera semántica de la cuadratura de las curvas (Índice de las curvas de Wallis) y 5) Segunda semántica de la cuadratura de las curvas (Posición relativa del área). Para que estas formulaciones fueran posibles fue necesario poner en funcionamiento diferentes principios metamatemáticos como son: 1) uniformidad en los métodos para realizar las operaciones entre monomios, 2) uniformidad en las fórmulas para determinar la cuadratura de curvas y 3) inducción para la uniformidad de las operaciones con monomios. A continuación se revisan algunas de las hipótesis epistemológicas más importantes acerca del pasaje de las etapas de conocimiento mencionadas, centrando la atención en el papel del mecanismo de convención matemática. Tomando en cuenta el devenir histórico, la emergencia de las convenciones matemáticas para los exponentes no surge de preguntarse por el significado de la expresión 2 para un valor arbitrario de . Se remarca esta aseveración debido a que en la organización escolar tradicional de los saberes (basado en la estructura de los números reales) el problema de las convenciones es reducido a un problema de extensión. Tradición comenzada por Euler y continuada por Cauchy en su programa de organizar a las matemáticas como una gran estructura hipotético-deductiva.

[2]Es decir las reglas: $a^1 = a$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = 1/a^n$ y $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Dentro del marco de las sintaxis algebraicas, los convencionalismos tienen por finalidad incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes caracteres *cósicos*[3] La estructura operativa está basada en las relaciones entre la progresión aritmética y geométrica. En la primera sintaxis algebraica se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5,...\}$. De esta manera se construye un símbolo especial que tiene la propiedad del neutro multiplicativo, aunque éste no sea identificado con el 1. El número 5, entonces, es representado como 5. En el marco de esta primera sintaxis algebraica los cocientes del tipo x^5/x^7, es decir, donde el grado del dividendo es menor que el del divisor, no son incluidos como caracteres cósicos ya que, como remarca Marco Aurel (Meavilla, 1993) *tal partición no se podrá partir y quedará como quebrado*. Este hecho señala una diferencia sustancial con la segunda sintaxis algebraica, en donde el progreso en la operatividad con los números negativos hace posible tal inclusión, pues se establecen los convencionalismos para incluir a los cocientes $1/x$, $1/x^2$,.... entre los caracteres cósicos y su operatividad. Al parecer, por el contexto de tal formulación debida a Chuquet (Struik, 1986), uno de los objetivos de esta inclusión era dar legitimidad a los números negativos. En resumen, se puede decir que en el marco del pensamiento algebraico la noción de exponente no natural surgió por la intención de preservar la operatividad de los caracteres cósicos al momento de incluir objetos matemáticos nuevos, a través de un mecanismo de convención matemática. La fuente de esta convención surge de un principio metamatemático que establece que en matemáticas se busca el mayor grado de unidad al momento de incluir nuevos objetos matemáticos a su cuerpo de conocimientos. En términos de la perspectiva social que se quiere atender; este principio puede ser interpretado como un consenso que establece que un conocimiento es válido si con él se atiende a cierta unidad de un sistema de conocimientos.

La aparición de una representación gráfica, que utiliza la sintaxis algebraica como saber de referencia, ocasiona que los convencionalismos algebraicos sean revisados. Éstos no pueden ser abandonados, ya que ello sería lo mismo que perder un conocimiento útil y aceptado; por lo que es necesario, si es posible, construir interpretaciones que *no lo contradigan*. Si se abandona el conocimiento anterior, debe ser por razones poderosas o casi inevitables (como sucedió, por ejemplo, con los logaritmos de los números negativos). En este sentido, el mecanismo de convención matemática debe ser puesto en funcionamiento con el objetivo de lograr una *coordinación* o *integración sistémica* de las representaciones. Es por ello que parte de la rica semántica de los números negativos es recuperada; por ejemplo, la noción de *negatividad* es puesta en funcionamiento en el campo de las proporciones como *carencia* y como *estar al otro lado* en la representación gráfica. En este mismo sentido, los índices de las curvas, construidos por Wallis, estaban íntimamente ligados a la razón característica (una proporción entre áreas). Estas interpretaciones tenían como propósito que un *único* algoritmo funcionará para el cálculo de cuadraturas de todas las curvas algebraicas conocidas, en tanto la ecuación que la representaba.

[3] En el lenguaje moderno se pueden identificar estos caracteres cósicos con la segunda potencia, la tercera potencia... de la incógnita.

Un ejemplo ilustrativo: las semánticas de la cuadratura de las curvas

Citemos como ejemplos, que resaltan los elementos fundamentales utilizados para la caracterización del mecanismo, las formulaciones hechas por Wallis y Newton en el marco del cálculo de cuadraturas de las curvas algebraicas. En ellas se puede notar la integración sistémica de dos formas de la noción de *negatividad* con dos conceptos diferentes de operatividad algebraica y aritmética con el objetivo de utilizar una única fórmula para el cálculo de cuadraturas. En el caso de Wallis la integración de la noción de negatividad es "no tener" y el concepto de proporción da como resultado una aritmética de infinitos; en cuanto a Newton (cuya noción de negatividad es “estar del otro lado”) se tiene, como resultado, una interpretación geométrica del signo negativo que surge con la operación formal de los números negativos. Como se ha dicho hay dos diferencias sustanciales entre las dos versiones de esta nueva interpretación: en la de Wallis, las razones en donde el *denominador* es negativo se puede observar que no admite la operación división, mientras que en la de Newton si se hace. Este hecho, entre otros, ocasiona que se presenten dos versiones de funcionamiento del mecanismo:

- Paráfrasis de los razonamientos de Wallis (Confrey y Dennis, 2000): La curva de índice p, $y = x^p$ (p entero positivo) tiene una razón característica[4] de $1/(1 + p)$. Dado que la razón característica de la curva $y = \sqrt[q]{x}$ (q entero positivo) es $1\text{-}1/(1 + q)=1/(1 +1/q)$ entonces, para preservar esta estructura, la curva *debe* tener índice $1/p$. Aunque no se sabe cuál es la razón característica de la curva $y = \sqrt[q]{x^p}$ es de esperarse que sea $1/(1 + p/q)$. Además, puesto que la cuadratura de la curva $y = 1/x$ es infinita, su índice es -1 (usando álgebra) por lo que su razón característica es $1/(1\text{-}1) = 1/0 =$ infinito. De manera análoga se puede interpretar que la cuadratura de la curva $y = 1/x^2$ es $1/(1\text{-}2) = 1/\text{-}1$ (es decir, igual a un infinito más grande que el anterior).

- Paráfrasis de los razonamientos de Newton (1669): Sabemos que la curva $x^{m/n} = y$, tiene área $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ (m, n enteros positivos). Además, la expresión $y = 1/x^2$ puede ser rescribirse como $y = x^{-2/1}$ por lo que *se puede* decir que su área es igual a $\frac{1}{-2+1} x^{\frac{1}{-2+1}} = -1x^{-1} = \frac{-1}{x}$ El signo negativo *puede* ser interpretado como el área infinitamente extendida del lado opuesto que en los casos anteriores, ya que $1/x$ es efectivamente el valor de esa área.

---

[4]Proporción existente entre el área debajo de la curva y el área del rectángulo que la contiene.

A manera de conclusión

Hemos ejemplificado de manera sucinta un mecanismo, al que denominamos convención matemática, y descrito sus significados y funcionalidad en el caso de los exponentes. Con ello nuestro proyecto didáctico de *reconstrucción* del discurso matemático escolar se robustece permitiéndonos señalar objetos y mecanismos constructivos que deben tomarse en cuenta en eventuales reconstrucciones. En términos epistemológicos, a la pregunta básica, ¿qué es lo que permite construir conocimiento?, añadimos un marco de referencia específico y la respuesta apunta hacia la conformación de un *escenario* centrado en una *práctica social*, que puede ser fomentada en la escuela, de integración sistémica de conocimientos matemáticos; en donde la convención matemática sería un consecuencia particular de tal práctica. De modo que la conformación de tal escenario representa la posibilidad teórica de ser la que posibilite la construcción de otros conocimientos que adquieren su sentido en y para una organización sistémica de conjuntos de conocimientos. Nuestras indagaciones ulteriores apuntarán en tal dirección.

Referencias bibliográficas

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). *La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 3(1), 5-31.

Farfán, R. & Martínez, G. (2001). *Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero*. En G. L. Beitía (Ed.) Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 14. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. & Martínez, G. (2002). *Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes*. En C. R. Crespo (Ed.) Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 15 Tomo I. (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Martínez, G. (2002). *Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 5(1) 45-78.

Meavilla, V. (1993). *Una aproximación al "Libro primero de arithmetica algebratica" de Marco Aurel*. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991. (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Newton, I. (1669). *De Analysi per equationes infinitas*. (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.) The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)(pp. 206-247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Struik, D. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio

Sabrina, Garbin Dall'Alba
Universidad Simón Bolivar , Sartenejas (Caracas), Venezuela
sgarbin@usb.ve

Resumen

El estudio consiste en la primera fase de una investigación cualitativa que centrada en las situaciones de coherencia y/o incoherencia que manifiestan los alumnos en relación con sus esquemas conceptuales asociados a la noción de infinito actual, pretende acercarse a responder: ¿Qué tipo de conexiones reconocen y establecen los estudiantes universitarios que tienen conocimientos previos de cálculo diferencial e integral en problemas en que está presente el mismo concepto pero expresado en diferente forma?. ¿Qué relación y cómo influencian estas nociones formales en la coherencia y/o incoherencias de los estudiantes?. ¿Cómo influyen estos conocimientos formales en la formación consistente de la imagen conceptual del infinito actual?. Participaron 89 estudiantes con edades comprendidas, entre 18 y 20 años. Los resultados de esta primera fase inducen a pensar, que el conocimiento previo formal del cálculo diferencial e integral es de ayuda, pero no de manera significativa o determinante, a establecer y reconocer las conexiones oportunas y fundamentales entre los problemas planteados.

Antecedentes y fundamentación teórica

Son numerosas las investigaciones realizadas en didáctica sobre el infinito matemático y las que se pueden considerar pilotos y pilares en el área de la didáctica del infinito matemático (Fischbein, Tirosih y Hess(1979); Tirosh(1991); Nuñez (1994); Moreno y Waldegg(1991); Tsamir y Tirosh (1995,1999)) revelan entre otras cosas que la intuición natural del infinito es sumamente inestable y que las situaciones de conflicto que se presentan dependen de las influencias conjeturales y contextuales de las cuestiones involucradas. El estudio que aquí se reporta, está centrado en la teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus en relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado. Los conceptos tratados son, de manera particular, el concept image y el concept definition (Tall y Vinner, 1981) e inconsistencias (Vinner, 1990; Tall, 1990; Tirosh, 1990). En Garbin (2000)(Garbín y Azcárate, 2002) se quiere identificar las inconsistencias y representar, categorizar y analizar las situaciones de coherencia que manifiestan alumnos de 16-17 años en relación con sus esquemas conceptuales (concept image) asociados al concepto de infinito actual. Se caracterizan los términos incoherencia, diferenciándolo del de inconsistencia, y tarea de conexión. Se construyen tres líneas de coherencia (finitista (o de evasión de infinitud), actual y potencial) y se clasificaron tres tipos de alumnos: alumno coherente y consistente, alumno coherente pero inconsistente, y, alumno incoherente.

Tall (2001), define y caracteriza a la informal image y el formal image. Afirma que entre la imagen formal e informal ocurren interconexiones y probablemente se originan confusiones, lo cual no favorece una formación coherente de la imagen formal; y por tanto, los esfuerzos individuales deben reconstruir conceptos y conexiones en el esquema conceptual para buscar la coherencia deseada de la imagen formal. Esta caracterización de Tall (2001) y el estudio de Garbin (2000)(Garbin y Azcárate, 2002) plantean nuevas interrogantes: ¿Qué tipo de conexiones reconocen y establecen los estudiantes universitarios que tienen conocimientos previos de cálculo diferencial e integral en problemas en que está presente el mismo concepto pero expresado en diferente forma?. ¿Qué relación y cómo influencian estas nociones formales en la coherencia y/o incoherencias de los estudiantes?. ¿Cómo influyen estos conocimientos formales en la formación consistente de la imagen conceptual del infinito actual?. Surge entonces el interés de comenzar una investigación que permitiera acercarse a las respuestas. En el presente reporte se describe el estado actual y primera fase de esta investigación.

Metodología, descripción de los participantes e instrumentos de recogida de datos.

La investigación se enmarca en un estudio de tipo cualitativo. El análisis de datos es inductivo y el foco de la investigación tiene un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Se sigue, en parte, la metodología usada en Garbin (2000)(Garbin, Azcárate (2002)). La experiencia se realiza con 89 estudiantes universitarios con edades comprendidas entre 17 y 25 años (73 de los 89 alumnos tienen entre 18 y 20 años). Nueve de los alumnos estudian Ciencias (Química y Física) y el resto Ingeniería (Polímeros, Mecánica, Metalmecánica, Computación, Eléctrica, Producción, Electrónica, Geofísica y Metalúrgica). Los estudiantes tienen conocimientos previos formales sobre límites, derivadas, integrales, sucesiones y series; todos estudiaron los mismos cursos básicos de matemáticas dictados por el departamento de matemáticas (Matemáticas I, II, III y IV) y están cursando la quinta matemática obligatoria.

Se utiliza como instrumentos de recogida de datos, dos cuestionarios (C_1 y C_2). El *primer cuestionario*, C_1 (fig.1, ver Anexo), consta de las mismas 5 preguntas del C_1 aplicado en el estudio de Garbin (2000) (Garbin y Azcárate (2002)). En todas está implícita la noción matemática, el infinito actual, y los problemas son de divisibilidad infinita. La particularidad de la mayoría de las preguntas consiste en ser una versión actualizada, diferenciada por el contexto, de la primera paradoja de Zenón de la división. Otras generan la misma paradoja. El *segundo cuestionario*, C_2 (fig. 2, ver Anexo), se aplica al mismo grupo de alumnos después de aplicar el C_1. Consta de 6 preguntas y su objetivo es poder extraer información sobre las posibles conexiones y relaciones que establecen los estudiantes a partir de las preguntas 1,3 y 4 del C_1; y el reconocimiento o no de la influencia que puedan tener los problemas entre sí, en la resolución y respuestas de los mismos, a partir de las conexiones que se pueden hacer.

Metodología específica y resultados

Las líneas de coherencia y la "utilización" de los conceptos asociados de límites, sucesiones y series en la resolución de los problemas.

Se opta por el uso de las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) como sistema de representación de los datos cualitativos obtenidos a partir de las respuestas de los alumnos.

Se diseña una red sistémica para cada pregunta del cuestionario, con la que se pueden observar las respuestas categorizadas de los alumnos. Se elabora con estos datos las líneas de coherencia: potencial, actual y finitista (o de evasión de infinitud), instrumento que permite mostrar las respuestas coherentes y/o incoherentes de los estudiantes en los problemas de C_1. (Metodología empleada en Garbin 2000, (Garbin y Azcárate, 2000; 2002)). La pregunta 2(b) no se considera en el análisis por considerarse no relevante para esta primera fase de la investigación. El número y el porcentaje de alumnos por pregunta en cada línea, se observa en la siguiente tabla:

	Línea finitista (o de evasión de infinitud) (línea 1)		**Línea potencial (línea 3)**		**Línea actual (2) (línea 2)**	
	Nº	**%**	**Nº**	**%**	**Nº**	**%**
Pregunta 1	3	3,37	56	62,92	17	19,10
Pregunta 2	25	28,8	14	15,73	13	14,60
Pregunta 3	8	88,98	34	38,20	18	20,22
Pregunta 4	2	2,24	60	67,41	21	23,59
Pregunta 5	16	17,97	27	30,33	17	19,10

Las líneas de coherencia permiten clasificar la situación de coherencia y/o incoherencia de cada estudiante. Las respuestas coherentes en el sentido de cada línea, son las que determinan la clasificación: a) Si un alumno tiene tres o más respuestas coherentes según una línea determinada, se le sitúa en el grupo de la línea correspondiente; b) Si un alumno tiene sus respuestas situadas en diferentes líneas, se le sitúa en un grupo que se llama Mixto. Con estos criterios se obtienen 4 grupos de alumnos, en la siguiente tabla podemos observar el número y el porcentaje de alumnos por grupo:

Grupo	**1**	**2**	**3**	**Mixto**
Nº alumnos	3	12	32	42
%	3,37	13,8	35,95	47,19

De cada grupo se pudo establecer unas subcategorías que permiten observar el número de respuestas "actualistas", "finitistas" (o de evasión) y/o potenciales. Se llama respuestas "finitistas" a las que fueron escritas con argumentos finitos y "actualistas" las que reflejan una concepción actual del infinito. Es decir un alumno pudo tener 5 respuestas en la línea actual (5A) o, 3 en la línea actual, 1 en la línea finitista (o de evasión) y 2 en la línea potencial (3A+1F+2P). En la siguiente tabla se observan las subcategorías y entre paréntesis el número de alumnos.

Grupo 1		
4F + 1P (i)	3F + 2P (1)	3F (1)

Grupo 2						
5A (1)	4A (1)	3A (2)	3A + 1P (2)	3A + 2P (4)	4A +1F (1)	4A +1P (1)

Grupo 3				
5P (2)	4P+1A (5)	3P (4)	3P+1A (2)	3P+ 2A (2)
4P (5)	4P+ 1F (6)	3P+1F (2)	3P+2F (1)	3P+1A+1F (3)

Grupo Mixto			
1F (1)	1A (4)	2A+1P (5)	1F+2A+2P (1)
1F+2P (8)	1A+1P (4)	2P (7)	1F+2A+2P (1)
2F+1P (1)	1A+2P (2)	2P+2F (1)	2F+1A+2P (1)
2F+2P (1)	2A+1F (2)	1F+1A+2P (3)	2F+1A+2P (1)

Se nota, entre otras cosas, que hay un solo estudiante coherente y consistente (grupo 2) y dos alumnos coherentes en el grupo 3 en todas las preguntas. Un alto número de estudiantes se encuentran en el grupo Mixto. No hay presencia de respuestas "actualistas" en el grupo 1 y sólo un estudiante del grupo 2 presenta una respuesta "finitista" (o de evasión de infinitud) en sus respuestas.

Los grupos 1 y 3, muestran un mayor "arraigo" de la concepción potencial del infinito, a pesar del conocimiento previo de las nociones asociadas a las preguntas, de límite, sucesiones y series. Los alumnos que se encuentran en el grupo Mixto muestran una mayor apertura a la concepción actual del infinito y un mayor número de combinaciones de incoherencias en sus respuestas.

Por lo que muestran las respuestas de los estudiantes y las redes sistémicas, la mayoría de los estudiantes responden afirmativamente o negativamente a las preguntas: a) dejándose llevar por la intuición; b) con argumentos que recurren a la división infinita en mitades, posibilidad de poder dividir infinitamente o a la existencia de infinitos puntos en una recta; c) sumando y aproximando valores; e) afirmando que una pelota siempre recorre una distancia finita; d) aceptando sin demostración la convergencia o divergencia de la serie $1/2^n$. De los 89 alumnos sólo 2 estudiantes prueban, a partir del cálculo del límite de las sumas parciales, que $1/2^n=1$. (para responder a la pregunta 2).

La noción de infinito actual está implícita en los problemas, y las respuestas de los alumnos muestran que si bien saben calcular una suma infinita (aunque no calculen la suma), reconocen si es convergente o divergente, y conocen y saben calcular un límite al infinito, no necesariamente aceptan la situación de que en el infinito se alcanza el punto límite. Pueden sustentar su creencia haciendo uso de estos conceptos. Al resolver la pregunta 1 el Alumno (40)(A(40)) escribe: "No es posible llegar a una situación donde el punto de bisección coincide con el punto B. Podemos ilustrarlo pensando que cada bisección es la suma de una distancia. Así podemos pensarlo como una serie $1/2^n$, que sabemos nunca llega a 1 aunque puede llegar muy cerca de él (converge a 1). Si la distancia entre A y B es considerada 1 entonces sabemos que la suma de las distancias (vistas como serie) no llega nunca a ser 1".

Clasificación de las relaciones que evidenciaron los estudiantes entre los tres problemas del C_2.

Se analizan las respuestas de la pregunta 1 del C_2 y se clasifican en grupos no excluyentes: un mismo estudiante puede estar en uno o en varios de los grupos. Los estudiantes expresan las relaciones de similitud entre los tres problemas y focalizan su atención en diferentes aspectos estructurales: a) *El planteamiento del problema*: la respuesta del alumno está en relación a lo que plantean los problemas o en lo que se pide hacer: A (33): "Supongo que el planteamiento de los tres casos es probar el concepto de tendencia. Examinar si para el estudiante es teóricamente posible que si una sucesión, una suma, o fracción tiende a un número determinado, llegará eventualmente a tomar el valor de dicho número. Para mí no es así"; A (59): "Los tres problemas son distintas maneras de plantear la misma situación, una suma infinita de términos que decrecen. La primera es la forma geométrica, luego una forma analítica (sólo álgebra) y después en forma gráfica". b) *El proceso de convergencia y divergencia implícito en cada pregunta (aceptando o no la situación límite)*: A (16):"las funciones van haciendo que sea un valor más y más pequeño, además de que su planteamiento es un valor que a medida que crece, genera un resultado que tiende a otro valor más pequeño. c) *El concepto implícito*, la noción de infinito, o el reconocimiento que se trata del mismo concepto o tema en todas las preguntas: A(38)": "los tres se relacionan con el infinito"; A(82): "En los tres problemas se plantean que para llegar a un resultado hay que tener en cuenta el matemático (...); A(3): "La pregunta es la misma, el concepto que se quiere "evaluar" es el mismo para las tres preguntas". d) *Los conceptos asociados de límites, sucesiones y/o series*: A(9):"Tienen como fundamento las definiciones de límites, sucesiones y series. e) *Resultados: puede ser el tipo de resultado o el procedimiento o modo de resolución del problema:* A(22): "la resolución de los tres en forma exacta es imposible"; A(8): "se resuelven similarmente". f) *Encuentran similitud en algunas y/o detallan semejanzas y diferencias entre los problemas:* A(12): "Sólo hay similitud entre el problema 1 y 2 a manera de fracciones"; A(75): "Entre el primer problema y el segundo hay una similitud, pues hay un término que se va dividiendo a la mitad y el siguiente término es cada vez más pequeño. Sin embargo, en el primer problema tenemos una sucesión y los puntos de la recta se van acercando a un límite que sería el extremo B, mientras que en el segundo problema tenemos una serie armónica cuyos términos se van sumando sin converger a un valor (su límite tiende a o no existe). En el tercer ejemplo tenemos una función que tiene límite igual a 2, y al tener límite podemos decir que tiene unasimilitud con la sucesión del problema 1.

En la siguente tabla se puede ver el número de alumnos por cada grupo clasificado.

Planteamiento General		**Conceptos Asociados**							
Planteamiento (Finalidad)	Lenguajes matemáticos diferentes	Límite, sucesión y serie	Límite	serie	suces ión	sucesión y serie	Suma ∞	Función Expone ncial	Infinitesi males
7	4	1	10	8	4	7	3	1	1

Proceso implícito de convergencia y divergencia			**Concepto implícito**	
Acepta situación límite	No Acepta situación límite	No Aluden la situación límite	Noción de ∞	Mismo concepto o teoría matemática
3	1	9	3	2

Resultados		**similitud en algunas, semejanzas y/o diferencias en los lenguajes**
Tipo de Resultado	**Procedimiento o modo de resolución**	
11	20	9

En Garbin (2000) se caracteriza la "tarea de conexión", "que consistiría en identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas asociadas coherentes en los problemas". La inducción de esta tarea en algunos alumnos entrevistados, deja en evidencia que ha sido "fundamental": a) reconocer en todas las preguntas el proceso de divisibilidad infinita, con los dos tipos de iteraciones, la divergente y convergente; b) establecer la relación y conexión entre las preguntas a través de la sucesión numérica. Como se puede observar en las tablas anteriores, los alumnos focalizaron su atención al describir las relaciones, conexiones o similitudes en los problemas de C_2 , en diferentes partes estructurales de ellos, el planteamiento, la resolución, los resultados, los conceptos asociados, etc. Se puede decir que algunas de las similitudes expresadas no son elementos estructurales fundamentales para la coherencia y/o el reconocimiento de que se está en presencia de un mismo problema pero expresado de forma diferente, como son las afirmaciones que los procedimientos de solución son similares, los conceptos asociados son los mismos o de que se necesita la misma teoría matemática para su resolución.

Conclusiones e implicación docente

El análisis de la "utilización" de los conceptos asociados a las preguntas, de límites, sucesiones y series por parte de los estudiantes en la resolución de los problemas, está pautada para la segunda fase. Sin embargo, por los datos reflejados, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes responden afirmativamente o negativamente a las cuestiones, sin recurrir a argumentos probatorios matemáticos, ni a los conceptos antes mencionados. Por otra parte, que los alumnos de los grupos "finitista" y potencial muestran un mayor arraigo de la concepción potencial del infinito y del grupo Mixto de la concepción actual, en sus esquemas conceptuales.

La clasificación de 6 grupos (no excluyentes) de respuestas, muestran en parte, qué tipo de conexiones reconocen y establecen los estudiantes entre tres de los problemas planteados en el estudio. Esta clasificación evidencia que reconocer y/o establecer conexiones "fundamentales" entre "un mismo" problema pero representado e diferente forma, no es una habilidad espontánea y que debe ser adquirida. El docente debe ser consciente de que el estudiante ante un "mismo problema" pero representado en diferentes lenguajes, puede o no reconocer este hecho, así como puede reconocer sólo algunos de los aspectos de semejanza estructurales de los problemas, como los clasificados. Las similitudes y diferencias, en cuanto a planteamiento, concepto implícito, conceptos asociados, procedimiento de resolución y tipos de resultados, deben ser inducidas durante la práctica docente, así cómo la habilidad de reconocer aquellas conexiones "fundamentales" que generen respuestas asociadas coherentes.

Los resultados, en esta primera fase, inducen a pensar, que el conocimiento previo formal del cálculo diferencial e integral es de ayuda, pero no de una manera significativa o determinante, para establecer y reconocer las conexiones "oportunas" y "fundamentales" entre los problemas planteados; así como de potenciar la noción del infinito actual.

Referencias bibliográficas

Bliss, J. & Monk, M. & Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research.* Coom Helm. London.

Fishbein, E. & Tirosh, D. & Hess, P. (1979): *The intuition of infinity.* En Educational Studies in Mathematics, 10, 2-40.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. España. ISBN: 84-490-2029-8.

Garbin, S. & Azcárate, C. (2000). *Esquemas conceptuales e incoherencias con relación al concepto de infinito actual.* En Educación Matemática, 12 (3), 5-17.

Garbin, S. & Azcárate, C. (2002). *Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años* . En Enseñanza de las Ciencias, 20 (1).

Moreno, L. & Waldegg, G. (1991). *The conceptual evolution of actual mathematical infinity.* En Educational Studies in Mathematics, 22 (3), 211-231.

Nuñez, E. (1994). *Subdivision and small infinities: Zeno, paradoxes and cognition.* En Actas del PME 18, 3, 368-375.

Tall, D. (1990). *Inconsistencies in the learning of calculus and analysis.* En Focus on Learning Problems in Mathematics, 12. Pp. 49-64.

Tall, D. (2001). *Natural and Formal Infinities.* En Educational Studies in Mathematics, 48 (2/3), 199-238. •

Tall, D. &Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity*. En Educational Studies in Mathematics, 12 (2), 151-169.

Tirosh, D. (1990). *Inconsistencies in students' mathematical constructs*. En Focus on Learning Problems in Mathematics,12, 111-129.

Tirosh, D. (1991). *The role of students' intuitions of infinity in teaching the cantorian theory*. En Tall, D. (ed), Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/Boston/London, 199-214.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1995). *Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito* En La matemática e la sua didattica, 2, 122-131.

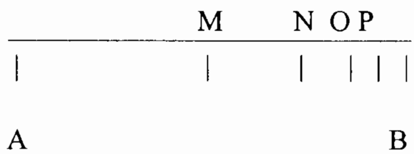
Tsamir, P. & Tirosh, D. (1999). *Consistency and Representations: The Case of Actual Infinity*. Journal for Research in Mathematics Education, 30 (2), 213-219.

Vinner, S. (1990). *Inconsistencies: their causes and function in learning mathematics*. En Focus on Learning Problems in Mathematics,12, 85-97.

ANEXO
Primer Cuestionario (C_1)

1.- Observa la siguiente figura.

Nos muestra un esquema en el que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir los puntos M, N, O, P, son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.



Si se siguen haciendo más y más bisecciones. ¿Crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B?.

Explica tu respuesta de forma detallada.

2.- Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura h/2.

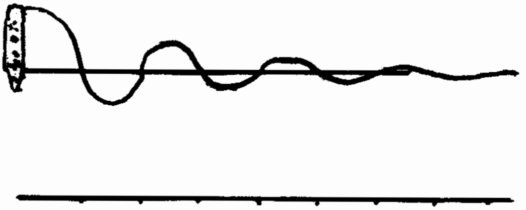
a)¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota?. Explica tu respuesta de forma detallada.

b)¿Podrías decir cuantos rebotes hará la pelota?. Explica tu respuesta de forma detallada?.

3.- Considera la siguiente suma $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + \ldots$

¿Cuál crees que es el valor de la suma?. Explica tu respuesta de forma detallada.

4.- La siguiente figura representa la gráfica de una función



Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x. ¿Podrías determinar el valor de la función cuando x se hace extremadamente grande?. Explica tu respuesta con detalle.

5..- Considera la siguiente ecuación: $y = 1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + ... + 1/2^n + ...$

¿Podrías decir para qué valor de n resulta y = 2?.

Explica tu respuesta en forma detallada.

Cuestionario 2 (C2)

La primera página del cuestionario presenta nuevamente las preguntas 1, 3 y 4 del C_1.

Aparece la siguiente indicación: Lee los tres problemas y contesta a las preguntas que aparecen en las páginas siguientes:

1.- Si existen, defina una o varias relaciones (conexiones, similitudes) entre los tres problemas (planteamiento y resolución) presentados en la página anterior. Escriba detalladamente.

Observación: Escribimos sólo la primera pregunta del C_2, debido a que es la única pregunta que ha sido analizada y categorizada en la primera fase de la investigación.

Génesis didáctica del cálculo integral: el caso de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico

Germán Muñoz Ortega

CIMATE de la Universidad Autónoma de Chiapas & DME del Cinvestav-IPN. México

german_munoz_ortega@hotmail.com

Resumen

Una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. Buscamos desentrañar las condiciones para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico pero vista como una unidad dialéctica. Nuestras investigaciones nos han permitido percibir a la Didáctica del Cálculo integral en el sentido de identificar las condiciones para propiciar y controlar la génesis artificial, de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, que necesariamente exige el funcionamiento del sistema didáctico inmerso en un contexto sociocultural específico, a lo cual denominamos génesis didáctica. Un hallazgo de nuestra investigación cuando intentamos controlar la génesis artificial de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico consiste en perfilar un rol del profesor que no se corresponde con la devolución ni con la institucionalización.

Introducción

Todo proyecto didáctico en tanto proyecto social (Chevallard, *et al*, 1997) tiene asociado un contexto sociocultural contemporáneo específico, el cual por una especie de necesidad funcional intenta no sólo generar nuevo conocimiento científico sino también transmitir el conocimiento científico construido por generaciones anteriores. En ese sentido la Matemática Educativa en tanto disciplina científica se encarga de propiciar las condiciones para transmitir el conocimiento científico a través de la institución escolar. Sin embargo, esta tarea, demasiado compleja, origina una serie de fenómenos que van desde la selección del conocimiento a enseñar hasta el predominio de ciertas relaciones entre profesor, estudiantes y saber matemático.

Una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. El sentido último de nuestras investigaciones consiste en generar las condiciones para propiciar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico (vista como una unidad dialéctica) del Cálculo integral en instituciones escolares específicas.

Nuestros trabajos de investigación se han anclado fuertemente en la epistemología genética y nos ha permitido alejarnos de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra), y enseguida buscar condiciones de relación a partir de los dos objetos. Más bien analizamos las relaciones a partir del objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico (Muñoz, 1999a).

Por la naturaleza tan compleja de nuestra problemática ha sido necesario apoyarnos en varios supuestos teóricos y también ha sido necesario construir, en cierto modo, otros supuestos teóricos que nos están permitiendo tener una perspectiva cada vez más clara de dicha problemática y de la relevancia para la Matemática Educativa.

Hacia la construcción de un marco teórico

Algunos de los supuestos de las teorías desarrolladas en nuestra disciplina entran en conflicto cuando se trata de investigar la problemática planteada anteriormente, por ejemplo:

Analizamos el libro "Understanding in Mathematics" de Sierpinska (1994), con el propósito de tener un referente, en cierto modo, respecto a lo que podría significar *entender un concepto o entender un algoritmo* y encontrar relaciones entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. De acuerdo a la autora, más precisamente hablaríamos de actos de entendimiento de un concepto, actos de entendimiento de un algoritmo o de actos de entendimiento de un problema que permita pensar en la integración, es decir, el objeto de entendimiento sería el Concepto, el Algoritmo o el Problema; en donde dicho objeto interactúa con el sujeto que entiende (el cual tiene una base de entendimiento). A través de esta teoría se pueden establecer relaciones entre los actos de entendimiento de un concepto y los actos de entendimiento de un algoritmo a partir de dos objetos de entendimiento distintos, sin embargo, esta perspectiva no nos permitiría observar la génesis de los conceptos y de los algoritmos.

También, analizamos la obra de Dubinsky (ver por ejemplo: Dubinsky, 1991 & Dubinsky, 1996) y discutimos con él la Teoría APOS (por sus siglas en Inglés) desde la perspectiva de nuestra problemática, por ejemplo, la etapa de Acción de un concepto tiene algunos aspectos de la naturaleza de un algoritmo, entonces, qué sería la etapa de Acción cuando lo que se está abordando es un algoritmo, cómo sería la etapa de Proceso, Objeto y Esquema en dicho caso. Otro punto de discusión fue si suponemos que tenemos la Descomposición Genética de un concepto y la Descomposición Genética de un algoritmo cómo podemos estudiar la relación entre los conceptos y los algoritmos. Nuevamente es posible estudiar la relación, sin embargo, esta perspectiva no nos permitiría observar la génesis de los conceptos y de los algoritmos.

Ahora presentamos un análisis teórico desde la perspectiva de la Epistemología Genética y considerando aspectos epistemológicos del Cálculo integral desarrollados en Matemática Educativa. Al analizar el trabajo de Cantoral (1990) se puede observar que, en cierto modo, recurre al análisis histórico-crítico para caracterizar algunos aspectos del desarrollo sociogenético del Cálculo infinitesimal, en donde encontramos una evidencia de la imposibilidad de esa separación en el desarrollo sociogenético del Cálculo integral, debido a que existe una relación muy estrecha entre la noción de *Predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor*. Entonces, cuáles son las condiciones para propiciar que el funcionamiento del sistema didáctico permita garantizar la relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, con referencia al Cálculo integral. Identificamos una condición necesaria a través del siguiente análisis:

Por una parte, en la enseñanza de la Matemática se ha reducido el concepto de integral a la definición de integral de Cauchy o de Riemann (en tanto objeto de enseñanza) y al estudiante como sujeto cognoscente se le obliga a interactuar con la definición en tanto objeto de conocimiento. Sin embargo, a partir de los trabajos de Cantoral (1990) y Cordero (1994) hemos encontrado evidencias que nos muestran que en el desarrollo sociogenético del Cálculo integral han jugado un papel crucial las nociones de *Predicción, Acumulación y Constantificación de lo variable.* Por supuesto existen otras nociones asociadas al concepto de integral, sin embargo, es importante remarcar que las nociones mencionadas adquieren sentido para el estudiante cuando el objeto de conocimiento se caracteriza por una situación problema derivada de un fenómeno de variación o cambio. También, en cierto modo, la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990) señala que un concepto no puede ser reducido a su definición, si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza, sino que es a través de situaciones problema por resolver como un concepto adquiere sentido para el estudiante.

Por otra parte, la enseñanza de la Matemática ha reducido el aprendizaje de los algoritmos a la ejercitación del procedimiento subyacente del algoritmo. En cierto modo, se intenta obligar al estudiante a interactuar con un procedimiento preestablecido en tanto objeto de conocimiento, lo cual conduce a cierto tipo de empirismo debido a que se cree que el estudiante por simple condicionamiento, a través de la experiencia de realizar ejercicios repetitivos de los procedimientos preestablecidos, hace una copia pasiva de la realidad externa (en este caso el procedimiento preestablecido juega el papel de realidad externa) u ocurre un simple reflejo-copia del saber ajeno a través de la transmisión social. Hemos analizado tres procedimientos de integración socialmente establecidos y de acuerdo a la definición de algoritmo, en el contexto de los campos conceptuales, es indispensable una situación problema, previamente clasificada, para discutir ciertos aspectos de la algoritmia (ver Muñoz, 2000b).

Este análisis nos conduce a identificar un objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico, el cual se refiere a que existen situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento) a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados al Cálculo integral. Este aspecto en común es una condición necesaria para propiciar la relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico aunque no suficiente para los fines de la Matemática Educativa.

De manera que la identificación de la condición anterior nos permitió alejarnos de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra), y enseguida buscar condiciones de relación a partir de los dos objetos. Nuestras investigaciones nos han conducido a buscar las relaciones a partir de precisar, en lo más posible, las características del *objeto de conocimiento común* a lo Conceptual y a lo Algorítmico (Muñoz, 1999a), es decir, que las situaciones problema permitan, al interactuar con el estudiante, construir ciertas nociones y procedimientos asociados al Cálculo integral, y así poder encontrar condiciones para propiciar la relación a partir de investigar cómo se coordina el desarrollo de las nociones con el desarrollo de los procedimientos ante una secuencia de situaciones problema, por ejemplo, si alguna noción resulta crucial para que un procedimiento alcance el nivel de algoritmo. Así que la pregunta obligada es ¿cuál es ese tipo de problemas?

En resumen, la naturaleza del objeto de conocimiento común a lo Conceptual y a lo Algorítmico la precisamos, en lo más posible, a través de precisar el tipo de problemas cuya solución exige de una integración; después analizamos y clasificamos las diferentes situaciones que se derivan de ese tipo de problemas (ver Muñoz, 2000b). Las implicaciones del hallazgo teórico de haber identificado el objeto de conocimiento común a lo Conceptual y lo Algorítmico se pueden resumir en:

a) La posibilidad de mirar a lo Conceptual y lo Algorítmico como una unidad dialéctica (mirar las propiedades de la molécula de agua H_20, por ejemplo, por qué extingue el fuego). Y no correr el riesgo de analizar por separado a lo Conceptual (las propiedades de H, por ejemplo, enciende el fuego) y a lo Algorítmico (las propiedades de 0, por ejemplo, mantiene el fuego) y enseguida buscar las condiciones para propiciar la relación (a través de mirar la adición de las propiedades de H y 0).

b) El centrar la atención en un objeto de conocimiento común a lo Conceptual y lo Algorítmico y no en dos objetos de conocimiento nos está permitiendo desentrañar la génesis de lo Conceptual y lo Algorítmico a través de analizar la interacción de los estudiantes ante una secuencia de situaciones problema diseñadas a partir de la naturaleza del *objeto de conocimiento común*.

Hacia la construcción de una metodología de investigación

En forma breve el recorrido que estamos siguiendo para producir secuencias de actividades didácticas consiste en:

a) Selección de un Marco Epistémico compatible con la naturaleza de la institución escolar específica: Por ejemplo, en el contexto de una institución escolar para usuarios de la matemática como la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma de Chiapas seleccionamos el marco epistémico de Newton: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior de un sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget & García, 1994), constituido en un contexto sociocultural específico del siglo XVII, y en donde se puede apreciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, por ejemplo, existe una relación muy estrecha entre la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor*, en la cual subyace un procedimiento de derivación sucesiva (Cantoral, 1990). En breve, en la *génesis histórica* encontramos una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico y cuya naturaleza es compatible con la institución escolar analizada.

b) Construcción de un campo conceptual a partir de un marco epistémico: Construimos un campo conceptual del Cálculo (ver Muñoz, 2000b), es decir, un conjunto de situaciones que le dan sentido al Cálculo integral y que implican la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, con base en el marco epistémico de Newton y en la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990) así como en la perspectiva de la integral vía la noción de *acumulación* (Cordero, 1994). Por ejemplo, para la primera categoría, tres situaciones posibles son:

(SA) $\boxed{F(t_o)} \xrightarrow{T} \boxed{F(t)=?}$ Relación funcional entre variables

(SB) $\boxed{F(t_o)} \xrightarrow{T} \boxed{F(t_n)=?}$ Números (Estado)

(SC) $\boxed{F(t_o)} \xrightarrow{T=?} \boxed{F(t_n)}$ Números (Transformación) en donde: SA=Situación A; SB=Situación B; SC=Situación C; T=Transformación; $F(t_0)$=Condición inicial conocida. En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, o $F(t_n)-F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$), (Cordero, 1994). Las tres situaciones abarcan a la llamada integración definida porque las condiciones iniciales del problema están dadas. También caracterizamos una segunda categoría en donde se requiere encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación o cambio cuando no son conocidas las condiciones iniciales del problema.

c) **Caracterización de la génesis contemporánea**: Hemos realizado algunos estudios experimentales con estudiantes contemporáneos, inmersos obviamente en un contexto sociocultural contemporáneo específico, para estudiar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico (Muñoz & Cordero, 1998a; Muñoz, 1998b; Muñoz, 1999b). Las situaciones específicas a tratar con los estudiantes son desprendidas del campo conceptual previamente construido.

d) **Hacia una génesis didáctica:** Intentamos propiciar y controlar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en la institución escolar específica vía un diseño adecuado de secuencias de actividades didácticas, es decir, desarrollamos estudios experimentales que buscan el *control de la génesis artificial de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico.* Todo lo anterior siempre estará matizado por la perspectiva del rediseño del discurso matemático escolar. Partimos de un diseño inicial que consiste en una secuencia de seis hojas de actividades didácticas, y que servirá como punto de partida para rediseños posteriores con base en los estudios experimentales que se desprenderán producto de la interacción entre investigadores y profesores en ejercicio. Las seis hojas de actividades didácticas están organizadas a través de tres niveles. **En el nivel 1** los estudiantes interactuaron con un fenómeno de variación específico, el movimiento uniforme. **En el nivel 2** los estudiantes interactuaron con un fenómeno de variación específico, el movimiento no uniforme, en donde se proporcionó la información de la velocidad. Además las preguntas son de naturaleza correspondiente a las situaciones A, B, y C del campo conceptual descrito anteriormente, por ejemplo, la **Hoja de actividades No. 3:** *De una partícula que se está moviendo sobre una línea recta se obtuvo la siguiente información,*

t / 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...............................(segundos)
V/ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,......................(metro/segundo)

t / 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...............................(segundos)
P/ 2, (metros)

i) Calcular la posición de la partícula cuando el tiempo sea igual a 6 segundos **ii)** Calcular la posición de la partícula para cualquier tiempo **iii)** Calcular la distancia que recorrería la partícula desde el tiempo 6 (segundos) hasta el tiempo 12 (segundos) **iv)** Realizar la gráfica de velocidad vs tiempo y la gráfica de posición vs tiempo **v)** Dar diferentes valores a la pendiente de la gráfica de la velocidad, considerando fijo el valor de la velocidad inicial, en los siguientes intervalos: mayor que uno, menor que uno y mayor que cero, menor que cero. Discutir el efecto en las gráficas de posición **vi)** Describir el comportamiento de las gráficas de la posición cuando la pendiente de la gráfica de velocidad tiende a infinito positivamente, cuando tiende a cero y cuando tiende a infinito negativamente **vii)** Construir una expresión algebraica para la función velocidad y para la función posición que describa la síntesis del inciso vi).

Sin duda que los estudios experimentales del tipo que se han mencionado en el inciso d) son de importancia capital, sin embargo, sostenemos que no debe darse primacía a los estudios experimentales en situación escolar ni tampoco primacía a los estudios experimentales en situaciones no escolares, sino que debe haber una interacción entre los dos tipos de estudios, lo cual nos permitiría propiciar la compatibilidad entre la génesis contemporánea y la génesis didáctica.

En todo el recorrido anterior nos estamos guiando por las siguientes hipótesis: *i)* La relación entre lo conceptual y lo algorítmico que se presenta en la *génesis histórica* se conservará en lo que hemos llamado la *génesis contemporánea*, pero su naturaleza será distinta. *ii)* El caracterizar, en lo más posible, la *génesis contemporánea* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico permitirá identificar las condiciones para propiciar la *génesis didáctica* de dicha relación, en el funcionamiento del sistema didáctico en tanto sistema abierto.

La primera hipótesis nos guiará en la pregunta: cómo se constituye un marco epistémico contemporáneo cuando los estudiantes interactúan con situaciones problema en tanto objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico derivado del marco epistémico de Newton. Por lo cual es indispensable analizar la interacción entre la componente social y la componente intrínseca al sistema cognoscitivo a través de la noción de mediación social, específicamente a través de caracterizar los tipos de mediación social (ver Muñoz, 2001). Aun más en Matemática Educativa es necesario tener control de esas constituciones de marcos epistémicos en la sociedad contemporánea vía la institución escolar. Para lo cual, la segunda hipótesis nos guiará en el sentido que entre más precisemos los tipos de mediación social ganaríamos precisión acerca de: en que momento la intervención del profesor es necesaria, en que momento es necesaria la interacción estudiantes-situación problema y en que momento se le debe ceder el paso a los procesos comunicativos. Sin embargo, una pregunta obligada de importancia capital y muy compleja es ¿Cómo llevar a cabo dichos tipos de mediaciones?

Consideraciones finales

Un hallazgo de nuestra investigación cuando intentamos controlar la génesis artificial de la relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico consiste en perfilar un rol del profesor que no se corresponde con la devolución ni con la institucionalización (Brousseau, 1994; Brousseau, 2000) sino con un tipo de intervención del profesor en el sentido de introducir propiedades que no pueden ser "abstraídas" por la interacción entre los estudiantes y el objeto de conocimiento común a lo Conceptual y lo Algorítmico, y en donde es imprescindible la mediación social, *por ejemplo, cuando los estudiantes desarrollan la hoja de actividades No.3 (descrita anteriormente) el profesor introduce el análisis de la variación local de la variable independiente para poder predecir la evolución de la variable dependiente.*

Así, nuestros hallazgos nos han permitido percibir a *la Didáctica del Cálculo integral* en el sentido de desentrañar las condiciones para propiciar y controlar la *génesis artificial*, de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, que necesariamente exige el funcionamiento del sistema didáctico inmerso en un contexto sociocultural específico; a lo cual denominamos *génesis didáctica*.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1994). *Los diferentes roles del maestro*. Didáctica de las Matemáticas: aportes y reflexiones (pp. 65-94). Argentina: Ed. Paidós Educador.

Brousseau, G. (2000).*Educación y didáctica de las matemáticas.Educación Matemática 12(1), 5-38.*

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, Sección de Matemática Educativa, México.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Ed. Aique.

Chevallard, Y; Bosch, M; Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* España: Ed. ICE-Horsori.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking.* In D. Tall (Ed.). Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-126). Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). *Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria.* Educación Matemática 8 (3), 24-41. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. & Cordero, F. (1998a). *Epistemological and cognitive aspects of the link between the conceptual and the algorithmic in the teaching integral calculus. Proceedings of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volumen 1, p. 157). North Carolina State University Raleigh, North Carolina, USA..

Muñoz, G. (1998b). *Lo conceptual y lo algorítmico en la integración: algunos aspectos cognitivos*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 12 (1), 34-37. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. (1999a). *Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración.* Ponencia aceptada en la modalidad de análisis teórico e impresión de un resumen en el Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo (pp. 14-15). México.

Muñoz, G. (1999b). *Relación entre lo conceptual y lo algorítmico desde la perspectiva de la psicogénesis de la integral.* Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo (p. 53). México.

Muñoz, G. (2000a). *Análisis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en el aprendizaje y la enseñanza de la integración.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13 (1), 96-103. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. (2000b). *Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3 (2), 131-170.

Muñoz, G. (2001). *Tipos de mediación social en la didáctica del Cálculo integral: relación entre lo conceptual y lo algorítmico.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14(1), 532-539. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Piaget, J. & García R. (1994). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI, 6a. ed.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* Studies in Mathematics Education Series. Vol. 2. Series Editor: Paul Ernest. USA: School of Education University of Exeter, The Falmer Press.

Vergnaud, G. (1990). *La Théorie des Champs Conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques 10 (13), 133-170.

Pensamiento Geométrico

El geoespacio como recurso didáctico en la enseñanza de la geometría

Manuel Vara Orozco
Escuela Normal Superior de México. Estados Unidos Mexicanos.
mavaor57@hotmail.com

Resumen

Se proponen actividades utilizando el geoespacio, el cual es un material que el alumno manipulará para aprender en forma práctica, y así se consolidará el aprendizaje de las matemáticas, en especial de la geometría.

Por medio de dibujos en isométrico se hará la representación plana de los sólidos que se formen en el geoespacio.

Pescarini y Puig Adam han presentado una modificación del geoplano para hacer posible el estudio del espacio de tres dimensiones; lo han llamado geoespacio y sus posibilidades son sensiblemente menores. Consta de tres paredes de tela metálica fina formando un triedro. Con trozos de alambre se materializan las figuras del espacio, particularmente las poliédricas. En este trabajo se presenta al geoespacio como una estructura cúbica que lleva un sistema de argollas dispuestas en las aristas, donde podrán colocarse ligas de colores para formar sólidos y presentar diversas situaciones didácticas.

Introducción

Para enseñar la geometría racional a alumnos de secundaria es necesario primero valerse de la geometría intuitiva, ya que durante esta etapa de la vida la mente se abre a la abstracción. (Piaget, 1997)

La geometría intuitiva ayudará al alumno a construir la geometría racional. (Douady, 1984)

Usar el dibujo como recurso didáctico no se suficiente por estar estático y por no dar imagen real de una situación espacial.

Un alumno podrá aprender con más facilidad si usamos objetos manipulables (Revista Lux Pax Vis, 1997); el geoespacio permitirá el desarrollo de la habilidad espacial de los educandos y verán con mayor claridad la aplicación del teorema de Pitágoras. Para cumplir los objetivos perseguidos nos auxiliaremos de dibujos en isométrico y el estudiante podrá hacer la representación plana de los sólidos que forma en el geoespacio. (Revista "de seis a diez", 1998).

Objetivo

Proponer actividades, valiéndonos del geoespacio, el cual es un material que el alumno podrá manipular para aprender en forma práctica, y así se consolidará el aprendizaje de las matemáticas, en especial de la geometría. (García, 1996).

Desarrollo del trabajo

Emma Castelnuovo propone en su libro "Didattica della Matemática" (Florencia, Italia) el uso de una jaulilla de forma cúbica, cuyos lados han sido hechos con red metálica para poder estudiar cortes o secciones, auxiliándose del rayo de luz de un proyector. (Castelnuovo, 1997)

Este libro se publicó en México en 1970 y el profesor Marco Antonio García Juárez hizo algunas adecuaciones de este material, las cuales se detallan a continuación.

El geoespacio es una estructura cúbica que lleva un sistema de argollas dispuestas en las aristas, donde podrán colocarse ligas de colores para formar sólidos y presentar diversas situaciones didácticas.

Se propone como el modelo más conveniente para trabajar con los alumnos el geoespacio de siete argollas en cada arista, y con una medida de 24 centímetros por arista; así, la distancia entre una argolla y otra será de cuatro centímetros.

El geoespacio ayuda a enseñar algunos contenidos de geometría y lleva al alumno a la curiosidad de explorar; puede manipular, observar y experimentar, ya sea individual o grupalmente, dirigido adecuadamente por el profesor.

En el geoespacio puede representarse un punto, una recta o varias, uno o más planos, una recta que interseque a un plano. Pueden analizarse propiedades de la geometría, postulados y teoremas: por un punto del espacio puede pasar una infinidad de rectas, por dos puntos del espacio pasa una y sólo una recta. Se puede hacer pasar un plano por tres puntos dados, ¿qué ocurre si los tres puntos están alineados? Pueden localizarse en un geoespacio líneas paralelas, secantes, perpendiculares; si una recta pertenece a un plano, si está fuera de él, si lo interseca, si es paralela o perpendicular. En cuanto a planos: si son paralelos, si se intersecan o si son perpendiculares. (Revista "de seis a diez", 1998).

Puede pedirse a los alumnos que formen diversos sólidos y luego hagan los dibujos en isométrico o en perspectiva; que formen un triángulo y calculen su área; que hagan un corte para obtener una sección hexagonal; que formen diversos prismas y calculen sus áreas laterales, áreas totales y volúmenes; también pueden formar pirámides y hacer con ellas los mismos cálculos. (Memoria del XIV Congreso Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas, 1997).

Pueden obtenerse secciones triangulares, cuadradas, rectangulares, trapezoidales o hexagonales, haciendo diversos cortes. (Memoria del V Congreso Regional Metropolitano sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 1998)

En todos los sólidos que los alumnos formen, ayudándose de las ligas, deberán usar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de las diagonales que se presenten. (Memoria de la 7ª. Jornada sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática, 1999)

Otras actividades que se sugieren

Para aritmética: se propone llenar de cubitos el geoespacio, seis por arista, y preguntar al alumno el número de cubitos que hay en el geoespacio. Son $6^3 = 216$ cubitos.

Si lleno el geoespacio a la mitad tendré 108 cubitos, que equivalen a un medio del volumen total del geoespacio. 54 cubitos ocupan la cuarta parte del volumen total del geoespacio. 50 cubitos equivalen a 25/108 del volumen total del geoespacio.

Para raíz cuadrada, si se observan 36 cuadrados en una cara del geoespacio, se tendrán seis cuadrados por lado.

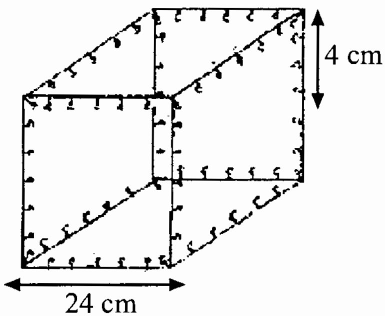
Para raíz cúbica, si se tienen 216 cubitos dentro del geoespacio, se tendrán seis cubitos por arista.

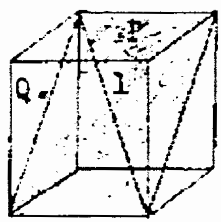
En álgebra pueden explicarse productos notables: cuadrado y cubo de un binomio.

En trigonometría podrán calcularse los ángulos de la base de una pirámide hexagonal, auxiliándose del teorema de Pitágoras. (Alarcón et al, 1994)

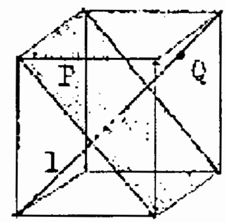
Pueden hacerse gráficas, suponiendo que se va llenando el geoespacio con cubitos que contienen agua, alcohol, petróleo, mercurio, éter, etc., ayudándose de una tabla de densidades.

También se propone hacer estructuras de geoespacio, es decir, unir varios geoespacios, cara con cara, para poder armar figuras más elaboradas o complejas.

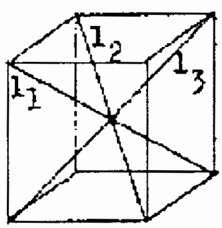




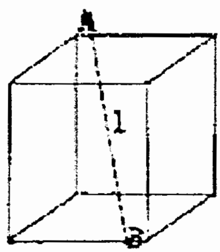
Un punto, una recta y un plano



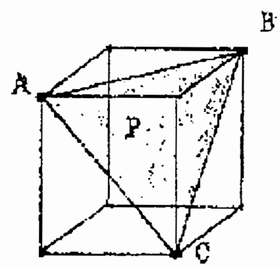
Una recta interseca a un plano y a un punto



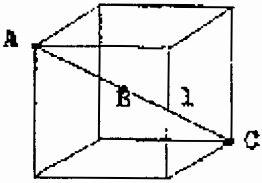
Por un punto pueden pasar una infinidad de rectas



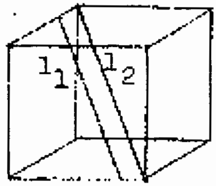
Por 2 puntos pasa una recta, y sólo una



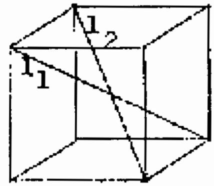
Hacer pasar un plano por 3 puntos dados.
El corte genera un triángulo



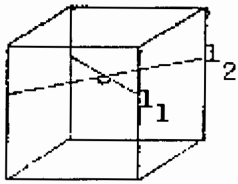
Por 3 puntos alineados pasa una recta



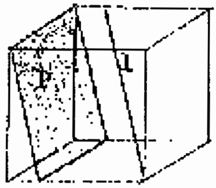
Dos rectas paralelas



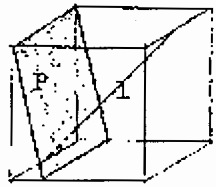
Intersección de dos rectas



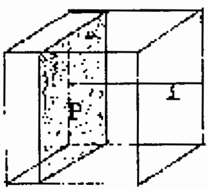
Dos rectas perpendiculares



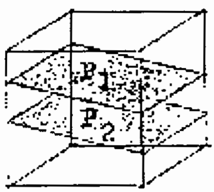
Una recta paralela a un plano



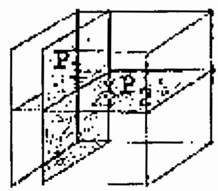
Una recta que interseca a un plano



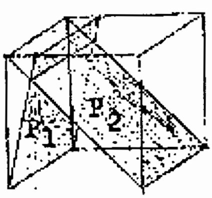
Una recta perpendicular a un plano



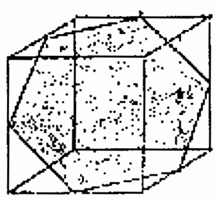
Dos planos paralelos



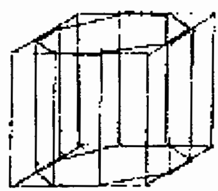
Dos planos perpendiculares



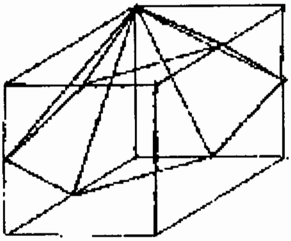
Intersección de 2 planos



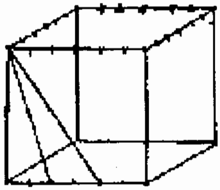
Un corte que genera un hexágono



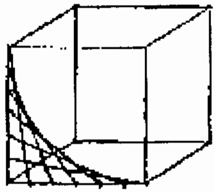
Prisma octogonal



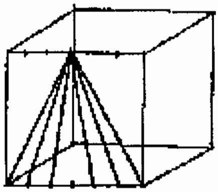
Pirámide hexagonal



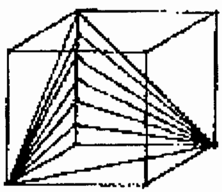
Triángulo de 2u de base
El vértice superior ocupa
24 posiciones diferentes



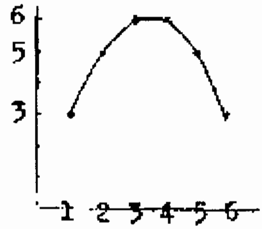
6 triángulos
rectángulos



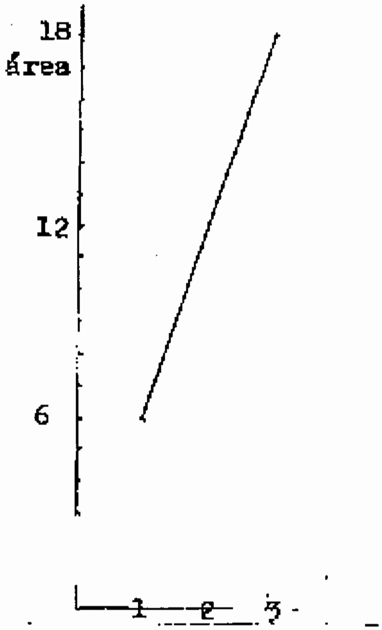
3 triángulos con igual
altura y diferente base



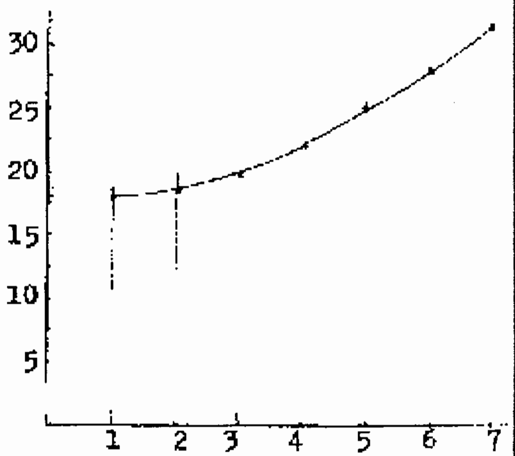
7 triángulos con igual base
y diferente altura



Gráfica de áreas de los
6 triángulos rectángulos



Gráficas de áreas de los 3 triángulos



Gráficas de áreas de los 7 triángulos

Referencias bibliográficas

Alarcón, J. (1994). *Libro para el Maestro*. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México.

Catalá, A. & Burgués, C. & Fortuna, J. (1992). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Ed. Síntesis. 2ª. reimp. Madrid, España.

Belmonte, J. & Chamorro, M. del C. (1991). *El Problema de la Medida*. Didáctica de las Magnitudes Lineales. Ed. Síntesis. la. reimp. Madrid, España.

Castelnuovo, E. (1997). *Didáctica de la matemática moderna*. Ed. Trillas. 3ª. ed. México.

Douady, R. (1984). *Juegos de Marcos y Dialéctica a Herramienta-Objeto*. Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa. Grupo de estudios sobre la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. Sección de matemática educativa del CINVESTAV IPN. Editores: Ernesto A. Sánchez Sánchez y Gonzalo Zubieta Badillo. México. 1993.

García, M. (1996). *Introducción a la resolución de problemas. Teoría y estrategias matemáticas*. Ed. Esfinge. 1a. ed. México.

Lovell, K (1977). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Ediciones Morata, S. A. 3a. ed. Madrid.

Moreno, Ma. & De los Ángeles, F. & Gil, F. (1993). *Superficie y volumen, ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Ed. Síntesis. 1ª. reimp. Madrid, España.

Piaget, J. (1997). *Seis estudios de Psicología*. Ed. Ariel Seix Barral. 33ª. ed. México.

Polya, G. (1997). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas. 21ª. reimp. México.

Resnick, L. (1988). *Fundamentos psicológicos en el aprendizaje de las Matemáticas*. Ed. Paidós. Madrid.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). Núm. 15 *Medida*. Ed. Trillas. 19a. reimp. México.

Revista LUX PAX VIS (1997). *Órgano de comunicación y divulgación académica de la BENM*. 2a. época. Vol. II. Núm. 21. Abril-mayo-junio.

Revista "de seis a diez" (1998). *Revista de opinión sobre la enseñanza de la matemática*. Época II. Vol. 1. No. 3, enero-marzo, 1998, y No. 4, abril-junio. México.

Memoria del XIV Congreso Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas. (1997) Toluca, México.

Memoria del V Congreso Regional Metropolitano sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (1998). México.

Memoria de la 7ª. Jornada sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática (1999). México.

Modelo holístico para el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría descriptiva y analítica

María Lourdes Rodríguez González y Roberto Portuondo Padrón
Universidad de Camagüey. Cuba.
mlord@reduc.cmw.edu.cu rportuondo@yahoo.com

Resumen

En esta investigación se estableció un modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Descriptiva y Analítica, como dos formas de un mismo contenido, que posibilita el aumento de las vías para la apropiación del contenido de acuerdo a las características del intelecto de los estudiantes. La interacción entre ambas ramas del saber geométrico se aproveche en el proceso. En el desarrollo de la investigación fue necesario hacer un estudio lógico - histórico del desarrollo de la Geometría como ciencia, de su didáctica, del contexto en que se desarrolla su enseñanza en la actualidad y sus tendencias, comprobándose que el problema de la baja solidez en el aprendizaje estaba centrado en la forma de organizar el contenido de la Geometría durante el proceso, que conducía a la adquisición de un conocimiento geométrico fraccionado, y se demostró, que una de las vías para resolver el problema de investigación es precisamente la enseñanza holística de la Geometría. El modelo que se aporta, que contempla un libro de texto con este enfoque, es el resultado de varios años de investigación y se está experimentando en la carrera de Arquitectura desde el año 1994 con buenos resultados.

Introducción

La situación económica y social del mundo actual exige, como condición única, el desarrollo de la ciencia para la lucha por la supervivencia ante la competencia del mercado que nos impone el modelo neoliberal, en consecuencia con ello los perfiles del currículo de las ingenierías debe ser más general que amplio, donde las ciencias básicas ocupen un lugar decisivo, por esta razón, es imposible conducir la enseñanza sin la obtención de solidez en los conocimientos básicos; ya que no les permitirían en su vida de egresados aplicar las ciencias básicas para el desarrollo de la profesión.
Al irse produciendo la transformación del perfil de la fuerza de trabajo, por un lado hay un acelerado incremento de la demanda de profesionales con habilidades de alto nivel técnico científico, en particular con las competencias necesarias para la aplicación de las tecnologías de información, y por otro lado, están los cambios en las habilidades requeridas para el manejo de nuevos métodos y sistemas de producción, así como la transformación de la tecnología, lo que reclama de la formación del futuro egresado de la Educación Superior, el desarrollo de competencias científico-profesionales.

Desarrollo

La Educación Superior tiene que plantearse la formación de profesionales que, además de sólida instrucción y educación, desarrollen competencias que les permitan convertirse en verdaderos creadores y transformadores, capaces de autoprepararse sistemáticamente durante toda la vida y para ello es necesario una educación más general, desarrolladora y holística. El objetivo de educar holísticamente a las nuevas generaciones es el de formar un profesional de amplio desarrollo integral, tanto en lo intelectual como en lo ejecutivo y lo intuitivo: un ser humano despierto, de mente amplia y que aplique lo aprendido en las aulas de forma creativa a la vida en sociedad (UNILATINA, 2001).

Más adelante UNILATINA señala que la educación holística está encaminada al desarrollo de la conciencia social y de profundos valores éticos y morales. El desarrollo de la conciencia holística potencia las aptitudes psíquicas superiores, así como la inteligencia emocional, que permite la capacidad crítica y el pensamiento científico creativo. Este tipo de educación incrementa la capacidad emprendedora, que desarrolla las aptitudes de la estructura de la personalidad global, contribuyendo a la maduración de la personalidad profesional, y preparando a los estudiantes para enfrentar un mundo globalizado.

Según el Dr. Gallegos; "El ser humano posee una capacidad ilimitada para aprender. Percibe el mundo en términos de relación e integración, reconoce que toda la vida en la tierra está organizada en una vasta red de interrelaciones" (Gallegos, 2001).

Por todo lo antes expuesto es que los autores de este trabajo definirán en lo adelante holístico en el sentido del sistema de conocimientos y habilidades de una ciencia, que se relacionan con los sistemas de conocimientos y habilidades de los temas de las diferentes asignaturas que presentan una dirección más estrecha de los objetos geométricos, es decir, los temas de las diferentes asignaturas que están más relacionados con la Geometría; lo que posibilita que los elementos particulares sean apoyos en la apropiación del conocimiento del todo y a la vez de sus partes.

El contenido de la enseñanza, no puede verse como un punto, o sea, que su enseñanza no pasa por una sola línea recta, sino que puede llevarse a cabo por infinitas líneas rectas, que al mezclarse muestran una relación de orden superior, transdisciplinar.

El Modelo Holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Descriptiva y Analítica tiene su base en el enfoque sistémico y en el Modelo de Van Hiele, diferenciándose de este último en su aspecto globalizador, ya que está orientado al autoconocimiento (Vigotsky) y a la transformación del proceso aprendizaje en el estudiante. Este modelo permite que el estudiante, al pasar por los diferentes niveles, establezca los nexos existentes en las diferentes ramas de la Geometría y la vida, y a su vez, aplique lo aprendido a otras ciencias como herramienta teórica y fundamentación de las mismas, de forma creativa y eficiente.

El proceso docente-educativo de la Geometría se desarrolla partiendo de una totalidad, que es su futura profesión; de esta forma le es significativo el contenido de la enseñanza al estudiante, de aquí, que se aumenta su motivación.

Los autores plantean el siguiente esquema a modo de sintetizar los pasos seguidos en la investigación para conformar el Modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Descriptiva y Analítica, el cual se explicará a continuación.

En las observaciones de casos se partió de:

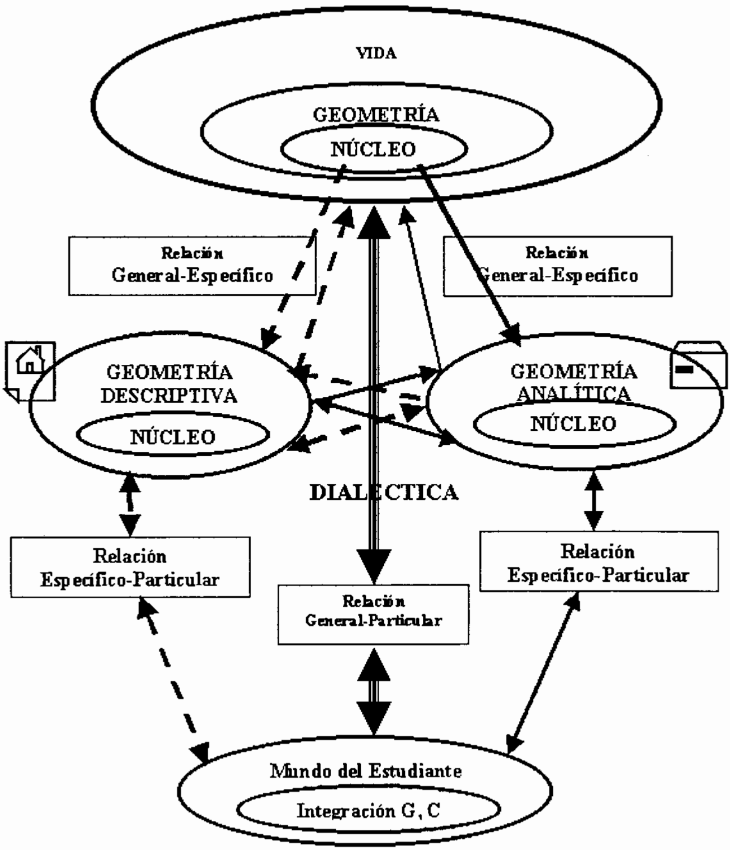
- Los problemas existentes en los estudiantes para aplicar lo aprendido en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en las asignaturas de la especialidad.
- De los problemas a escala nacional e internacional de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría y sus principales causas.
- De la necesidad de la recuperación del pensamiento geométrico en los estudiantes de Arquitectura.

Del estudio de las observaciones de casos, es que surge la primera versión del Modelo Holístico, que consistió en la integración de los contenidos de las dos ramas de la Geometría antes mencionadas, es decir, el primer elemento de este modelo son los puntos de contacto que existen en estas dos ramas.

Se ve la Geometría como elemento de la vida cotidiana, pero ella como ciencia tiene su núcleo que contiene su objeto de estudio y que como esencia de ese núcleo ella genera todas sus ramas; pero en este caso particular las dos ramas a las cuales se hace el estudio son la Descriptiva y la Analítica, cada una de ellas con sus núcleos respectivos, que están formados por el núcleo de la Geometría y sus características esenciales que identifican a cada una: la Geometría Descriptiva caracteriza la representación de los cuerpos mediante sus proyecciones y la Geometría Analítica caracteriza la representación de los cuerpos a través de sus ecuaciones esencialmente.

En la integración de la Geometría Descriptiva y la Analítica aparece otro núcleo que no pierde lo general del objeto de estudio de la Geometría y se caracteriza por poseer la esencia de la Geometría Descriptiva y la Analítica, siendo en las invariantes de las mismas, donde se hace un estudio de los modelos espaciales a través de sus partes y proyecciones; la integración holística aumenta las direcciones para el análisis de la lógica del fenómeno, posibilitándole al estudiante diversas vías para resolver su problema en la vida.

Análisis teórico del modelo holístico de razonamiento geométrico



Esta integración pone en equilibrio el estudio de los modelos espaciales donde se hace el estudio en forma de sistema mediante sus partes y los complejos de transformaciones del plano, el modo de cómo se ha integrado se pone de manifiesto en el modelo propuesto.

Se llegó a la conclusión que esta integración le permite al estudiante apoyarse para su estudio en los elementos que le proporciona la Geometría Descriptiva y la Analítica; el alumno, según le resulte más factible para su comprensión, en un caso toma los elementos de la Geometría Descriptiva y después los de la Analítica y retorna a la Descriptiva, en otro va de la Analítica a la Descriptiva y retorna a la Analítica, este proceso de retorno se da n-veces, y de ahí va a la Geometría en general y a la vida, a través de la actividad profesional.

Estas interacciones consisten en producir una dialéctica: de lo general a lo específico y de lo específico a lo particular y viceversa, y entre lo abstracto y lo concreto del pensamiento, esa dialéctica entre lo general y lo particular y lo abstracto y concreto del pensamiento es lo que provoca que el estudiante de Arquitectura se apropie de los elementos geométricos necesarios de la Geometría de la vida.

Este modelo holístico toma como referencia a los niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele, enriquecidos con lo holístico de la Geometría y con el nivel de generalización, haciéndose una adaptación según las habilidades por lograr en los estudiantes de la carrera de Arquitectura, de la Universidad de Camagüey; el mismo se apoyó en un estudio fenomenológico a través de encuestas, entrevistas y examen a los estudiantes.

Los niveles de razonamiento:

Nivel I: Análisis de la Realidad Visible:

Este nivel se caracteriza por un reconocimiento elemental de los entes geométricos, en contacto con el mundo real; cada vez que se le presente a los estudiantes algún concepto geométrico nuevo estos van a pasar por este nivel, aunque sea rápidamente.

Nivel II: Identificación y Representación de los entes geométricos:

En este nivel se empieza a hacer un razonamiento geométrico (aunque limitado) y los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar a partir de la observación y manipulación, pues usarán las propiedades de los entes geométricos como si fueran independientes entre sí, para identificarlas y representarlas.

Nivel III: Interpretación y representación de los entes geométricos de una de las ramas de la ciencia:

En este nivel los estudiantes han adquirido la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de los entes geométricos dentro de una rama de la Geometría, sin llegar a conectar lógicamente la relación existente entre las diferentes ramas, se logra la comprensión del sistema de axiomas propio de una rama de la Geometría.

Nivel IV: Interpretación y Representación de los entes geométricos de forma integrada:

En este nivel los estudiantes han adquirido la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de los entes geométricos, ya pueden interrelacionar correctamente los aspectos esenciales que caracterizan a cada rama de la Geometría, aunque no se logra la comprensión completa de los sistemas axiomáticos formales y sus vínculos con otras ramas del saber.

Nivel V: Generalización:

El estudiante que se encuentra en este nivel logra plena capacidad de razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadora de la Geometría Descriptiva y Analítica, ve las mismas íntimamente relacionadas, y es capaz de crear y aplicar lo aprendido en su futura actividad profesional.

Etapas de enseñanza-aprendizaje del modelo holístico de la Geometría Descriptiva y Analítica.

Las **etapas de Enseñanza-Aprendizaje** son momentos en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje, que permiten graduar y organizar las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento.

Primera etapa: la de información

En esta se preparan las condiciones para la atención de los estudiantes e informarles qué tipo de trabajo van a hacer; el profesor investiga en qué nivel de razonamiento están sus estudiantes en los conocimientos necesarios para enfrentar el nuevo tema y qué saben del mismo.

Segunda etapa: orientación dirigida

El objetivo de ésta es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc., principales en el área de la Geometría que están estudiando.

Tercera etapa: de reafirmación

Esta etapa es de aprender nuevos contenidos, pero utilizando los viejos conocimientos mediante la revisión del trabajo hecho anteriormente, para poner a punto las conclusiones a que el estudiante ha arribado, y de practicar y perfeccionar la forma de expresarse.

Cuarta etapa: la de aplicación

Los estudiantes, al poseer la esencia de ambas ramas, deberán interrelacionar entre sí los conocimientos y el lenguaje que acaban de adquirir.

Quinta etapa: integración

Los estudiantes deben adquirir una visión global de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos adquiridos, con otras ciencias que estén estudiando o que hayan estudiado.

Si en el proceso de enseñanza-aprendizaje se lleva a efecto siguiendo las etapas referidas anteriormente, se crearán las bases para que el alumno alcance el nivel V. Estas acciones tienen el objetivo de desarrollar el papel activo, consciente y participativo, donde: la comunicación, la motivación, la relación entre lo individual y lo social, el aprendizaje significativo, reflexivo y constructivo, constituyen pilares fundamentales en la apertura de espacios. Al respeto, la confiabilidad, la responsabilidad y el papel que desempeñan los estudiantes en este proceso, son fundamentales para aumentar la solidez de sus conocimientos geométricos, y así cumplir con los objetivos previstos en el plan de estudio.

Conclusiones

En el transcurso de esta investigación se conformó y aplicó el modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Descriptiva y Analítica en la carrera antes mencionada y se llegó a las siguientes conclusiones más importantes:

- La integración sistémica de la Geometría Descriptiva y la Analítica posibilita la apropiación del conocimiento geométrico a través de un proceso dialéctico de lo general, lo particular y lo específico y de lo abstracto y lo concreto.
- La caracterización cualitativa de las etapas por las que pasa el razonamiento de los estudiantes que reciben Geometría, y de cómo actúan cuando se encuentran en cada una de ellas, permite una atención particular a cada estudiante sobre bases científicas.
- La aplicación de la metodología basada en al modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Descriptiva y Analítica logró el aumento de la solidez de los conocimientos de los estudiantes, constatado a través de la aplicación exitosa de los conocimientos geométricos en las asignaturas de ejercicio de la profesión de la carrera.
- La utilización del libro de texto, con el enfoque holístico, contribuyó al aprendizaje de los estudiantes, como medio para la organización del trabajo independiente.

Todas estas conclusiones se concretaron en un trabajo de tesis doctoral por parte de la Master María Lourdes Rodríguez.

Referencias bibliográficas

Plan de Estudio de la Carrera de Arquitectura. (1990)Habana; Cuba

Plan de Estudio Carrera de Ingeniería Civil. (1991). Habana. Cuba.

Plan de Estudio de la Carrera de Arquitectura. (19989). Habana; Cuba.

Álvarez, C. (1999). *La escuela en la vida.* Didáctica; Editorial Pueblo y Educación.

Bishop. *Implicaciones Didácticas de la Investigación sobre la Visualización.* Cambridge University.

Gil, D. (1993). *Enseñanza de las Ciencias Matemáticas*; Editorial Popular S. A.

Giraldo, V. (1997) *¿Una sola o varias Geometrías?* RELME. (del 14 al 18 de Julio).

González, O. (1991). *El enfoque histórico cultural como fundamento de una concepción pedagógica*; Tendencias Pedagógicas Contemporanes; EMPES; La Habana.

Gracia, F. (1997). *Taller de Intuición Espacial.* RELME. (del 14 al 18 de Julio).

Gutiérrez, A. y Jaime. A. (1991). *El Método de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría.* Revista Educación Matemática. Volumen 3 #2. Agosto.

Guzmán, J. (1993). *Implicaciones Educativas de seis Teorías Psicológicas*; Departamento de Psicología Educativa; Editorial Conalte; Madrid.

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática.* Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. Depósito Legal: M-9207-1993.

Pérez, E. (1998). *Estructuración de contenidos y problemas profesionales de la Disciplina Proyecto en la Carrera de Arquitectura*; Tesis en opción al grado de master en Educación Superior; Cuba.

Saiz, I. (1997). *La ubicación espacial en los primeros años de escolaridad.* RELME. (del 14 al 18 de Julio).

Vigotsky, L. (1935). *El desarrollo mental de los niños en el proceso de enseñanza.* Edit. Universidad de Moscú, Moscú.

Pensamiento Variacional

Resignificación escolar de la regla de la cadena: una visión socioepistemológica

Ramón Flores Hernández
Universidad Autónoma de Coahuila-Instituto Tecnológico de Saltillo. México
rnfloresh@hotmail.com

Resumen

Esta es una investigación que pretende tomar la aproximación socioepistemológica como sustento teórico para llegar a establecer el objetivo de mirar a la regla de la cadena bajo una perspectiva distinta a como es mirada en los textos escolares, acarreando este proceso un desarrollo tendiente a encontrar elementos de orden epistemológico que expliquen las dificultades que conlleva su construcción social. Para tal efecto, se tomó la ingeniería didáctica como metodología de investigación. El estado actual que guarda este trabajo corresponde al tránsito del análisis preliminar a la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, localizando una problemática relacionada con tres estadios: la apropiación, las matemáticas aplicadas en contextos variacionales y, el consenso y didáctica.

Introducción

Actualmente la sociedad reclama de manera más consciente e insistente el uso inmediato, en el medio social, de las matemáticas que se enseñan en la escuela. Por otro lado, el contenido curricular en cuanto a matemáticas, cada vez que se revisa debido a diferentes causas, es modificado irresponsablemente, legitimando las propuestas por consenso, tal como señala Cantoral (2001). De aquí se dilucidan dos problemas: el primero, relacionado con las matemáticas aplicadas y el otro, relacionado con el consenso. Dentro de esta problemática dual está inmerso el objeto de estudio: la regla de la cadena, mirada bajo la perspectiva de aplicación y, consenso y didáctica; esto último originado ahora por los textos escolares. De manera genérica se puede mencionar que su uso se hace indispensable cuando, por necesidad del problema o teorema tratado, se quiere expresar una derivada en función de otra variable independiente y no de la variable independiente original. El papel que toma en diversos problemas variacionales permite detectar una doble dificultad: por un lado de enseñanza; por otro, de aprendizaje, acarreando una problemática que se mirará desde una perspectiva epistemológica y, que induce a plantear la siguiente interrogante: ¿bajo qué epistemología podemos dar cuenta de la resignificación de la regla de la cadena, de tal forma que alcance a ser mirada como un conocimiento con utilidad (un saber)? Este trabajo pretende enmarcarse en la Matemática Educativa, dentro de la línea de investigación denominada "Pensamiento y Lenguaje Variacional" (Cantoral y Farfán, 2000), desarrollada en el CINVESTAV del IPN en México.

Marco teórico

Ésta investigación está encaminada al rediseño del discurso matemático escolar, bajo un interés centrado en el efecto que tiene el aspecto social en la construcción del conocimiento matemático y, de cómo es puesto en la escena educativa.

La visión de ver en primer plano la actividad humana en la construcción del conocimiento matemático y no como se ha venido viendo, al considerar primero el conocimiento matemático hecho por una sociedad (Cordero, 2001), permite que se teorice esta perspectiva, generándose una aproximación basada en las practicas humanas produciendo conocimiento matemático. Tal aproximación es llamada el acercamiento socioepistemológico (Cantoral y Farfán, 2000; Cantoral, 2001), el cual incorpora cuatro componentes para el estudio de la construcción social del conocimiento: epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural. Aquí la construcción social del conocimiento matemático avanzado se da cuando se articulan los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de la matemática avanzada y las practicas humanas altamente especializadas (Cantoral, 2001). El funcionamiento de las componentes citadas no es aislado, sino que se articulan bajo una práctica institucional y una práctica social. La práctica institucional es inmediata y está implícita en el proceso de investigación de la construcción social del conocimiento matemático y, la práctica social se adiciona a cada una de las cuatro componentes citadas de tal forma que se ancla en ellas, siendo ahora inherente a sus significados. Este acercamiento permite, en consecuencia, hacer un cambio de epistemología hacia la matemática, donde se privilegia la actividad humana.

Objetivos de la Investigación

En seguida se plantean los alcances de la investigación. Con base en esta pretensión y en nuestro problema de investigación, se puede señalar como objetivo general:

> *Favorecer la construcción de la regla de la cadena bajo la actividad de encontrar elementos de orden epistemológico que expliquen las dificultades vividas en su apropiación, utilizando las practicas humanas para provocar la relación; epistemología - generación de conocimiento.*

Bajo el objetivo general, se deducen otros objetivos secundarios con los cuales se logra especificar algunos alcances de este trabajo:

- Diseñar secuencias didácticas en torno al tema regla de la cadena que den explicación sobre su apropiación.
- Analizar el papel que juega la función compuesta en la regla de la cadena y si ésta constituye un obstáculo para su aprendizaje.
- Describir los elementos intrínsecos que se originan al ponerse en juego el cambio de variable independiente de la función derivada y su influencia en la relación sujeto –objeto de conocimiento.
- Provocar en el estudiante una movilización de registros de representación de la regla de la cadena bajo diferentes contextos sociales y matemáticos y, observar sus efectos desde una aproximación socioepistemológica.

Finalmente, se puede decir que: existen formas distintas de conocer o, mecanismos alternos que permiten mirar la regla de la cadena bajo un estatus de saber, al modificar el discurso matemático escolar actual desde una perspectiva socioepistemológica.

Metodología

La metodología utilizada en la investigación corresponde a la ingeniería didáctica. Metodología orientada por un proceso experimental basado en cuatro fases: la primera fase se refiere al análisis preliminar, la segunda fase es la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la tercera fase es la experimentación y, la fase cuarta se refiere al análisis a posteriori y evaluación (Artigue, 1995).

Una actividad principal de la ingeniería didáctica, es la de diseñar situaciones didácticas;

para lo cual, se establecen y controlan variables didácticas relacionadas con el sistema didáctico, de tal forma que favorezcan la aparición del saber de referencia en el estudiante. La ingeniería didáctica se utilizó, en principio, como un medio para la producción de situaciones didácticas, teniendo como noción central la regla de la cadena. Pero también será utilizada como metodología de investigación, donde bajo esta visión se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase (Artigue, 1995), significando que bajo un trabajo *in situ*, se conciben, realizan, observan y analizan secuencias de enseñanza; en este caso, bajo el fin de buscar explicación sobre el comportamiento del estudiante ante el conocimiento de la regla de la cadena. Artigue (1995), menciona que la ingeniería didáctica se diferencia respecto a otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por: el registro en el cual se ubica, es decir, los estudios de caso y; las formas de validación a las que está asociada, es decir, por una validación interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Análisis preliminar

Esta primera fase se estructurará con base en las componentes: didáctica, epistemológica y cognitiva y; bajo el apoyo del marco teórico, se complementará con la componente sociocultural, la que permitirá examinar el quehacer humano en la construcción de significados y además, asegurar la interrelación de las componentes.

Componente didáctica

La dimensión didáctica se refiere al estado que guarda la enseñanza del tema aludido; es decir, cómo vive la regla de la cadena en el aula y cuál es su devenir como saber enseñable. Como inicio, se revisó la problemática existente en la enseñanza de la regla de la cadena, recabando apuntes de clases de distintos profesores: al examinarlos, se observa que la forma tradicional de enseñar el cálculo, incluyendo la regla de la cadena, es con base en los libros de texto. El discurso matemático escolar del profesor es copiado del contenido de dichos libros, por lo que en esta acción está de por medio un consenso con un fin didáctico (Cantoral, 2001). Así que el trabajo se centró en estudiar los libros de texto utilizados cotidianamente. En la mayoría de ellos la regla de la cadena es presentada fuera de contextos físicos o sociales (presentación que se debe tomar en cuenta para el diseño), en cambio, bajo una pequeña explicación "lógica" de adquisición de valores de las variables en juego, tratan de hacer obvio una cadena de esta toma de valores; viniendo en seguida, la exposición del teorema que regula dicha regla, teniendo como base la función compuesta. Aquí es donde cabe hacer un estudio epistemológico que nos dé luz acerca de algunos procesos relacionados con la regla de la cadena, tales como: ¿cuál fue su epistemología de origen en cuanto a un contexto social y un contexto matemático?

Componente epistemológica

La realización de un estudio epistemológico de la regla de la cadena localiza su naturaleza en los escritos de Newton, en especial en "The October 1666 Tract on Fluxions" (Newton, 2001; Edwards, 1979); primer trabajo formal sobre el cálculo. A principios de 1665, Newton estudió el problema de la tangente a través de combinar las componentes de la velocidad de un punto móvil en un sistema coordenado. Esta investigación fue la motivación para el nuevo método de fluxiones (derivadas: $\dot{x}$ y $\dot{y}$) y la llave para sus aplicaciones geométricas.

Edwards (1979), menciona que Newton mira a la curva f(x,y) = 0, como el lugar de la intersección de 2 líneas móviles, una vertical y otra horizontal y, mira el movimiento como la composición de estos 2 movimientos (horizontal y vertical), teniendo como vectores velocidad a $\dot{x}$ (notación punto) y a $\dot{y}$ respectivamente. Así mismo, el vector tangente velocidad es considerado como la suma de los vectores $\dot{x}$ y $\dot{y}$ (ley del paralelogramo). Por lo mismo, la pendiente de la recta tangente a la curva es $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ (aquí se mira a la tangente dinámicamente y no estáticamente como en la geometría griega).

Actualmente vemos que las fluxiones $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son simplemente las derivadas de x y y con respecto a t (tiempo): $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ y $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$ (a),

y su razón es la derivada de y con respecto a x : $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{dy}{dx}$ (b)

Newton trata un primer problema, el cual consiste en encontrar la relación entre las fluxiones x y y dada la relación $f(x,y)=0$. Para el caso donde $f(x,y)=\sum a_{ij}x^iy^j$ sea un polinomio, él da la solución: $\sum\left(\frac{i\dot{x}}{x}=\frac{j\dot{y}}{y}\right)a_{ij}x^iy^j=0$ (c)

Newton también trata el problema inverso; es decir, la antidiferenciación. Al tratar estos dos problemas es que surge la regla de la cadena, al respecto Edwards (1979) menciona:

The tangent and area problems emphasize the importance of systematic procedures for differentiation (the calculation of , given) and antidifferentiation by substitution methods –equivalent to what we call the chain rule and integration by subtitution-- that is essentially "built into" the calculus of fluxions.

Se puede decir que, originalmente la regla de la cadena surge como un método de sustitución; es decir, como una herramienta que permitía hacer un cambio de variable bajo la mira de encontrar la derivada de una función. Este procedimiento de cómo Newton aplicaba la regla de la cadena para calcular $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, lo podemos ver generalizado en seguida: Supongamos que queremos diferenciar $y=[f(x)]^{m/n}$, donde es un polinomio; Newton inicia introduciendo una nueva variable $z=f(x)$ con fluxión $\dot{z}=f'(x)\dot{x}$, según (c). Entonces $y^n=z^m$, y por (c) tenemos:

$ny^{n-1}\dot{y}=mz^{m-1}\dot{z}$

De aquí surge $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{mf'(x)[f(x)]^{m-1}}{n[f(x)]^{\left(\frac{m}{n}\right)(n-1)}}=\frac{m}{n}[f(x)]^{\frac{m}{n}-1}f'(x)$

Lo anterior permite ver el significado intrínseco de la regla de la cadena, ésta basada en las relaciones (a), donde Newton considera a las fluxiones y en un contexto físico como cambios instantáneos de un movimiento continuo.

Componente cognitiva

Esta componente se refiere a cómo piensa la regla de la cadena el estudiante de ingeniería y cuáles son las dificultades que se dan en su apropiación. Al respecto se examinaron 5 grupos de estudiantes de distintas ingenierías en el periodo 1999-2001, en el Instituto Tecnológico de Saltillo, bajo un proceso directo *in situ*, consistente en examinar las respuestas de reactivos tocantes a la regla de la cadena, elaborados bajo dos perspectivas: de aplicación en contextos matemáticos (para funciones de una y dos variables), y de aplicación en contextos físicos (para funciones de una variable). Este estudio permitió observar que, el estudiante no logra comprender, en principio, la función compuesta, y por otro lado, no logra comprender el producto $\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$; es decir, no entiende la parte toral de la regla de la cadena: cómo una variable es en el mismo hecho matemático, variable independiente y variable dependiente y, la ligazón de sus razones instantáneas de cambio o variaciones. En otros casos, la concepción que poseen es que la confunden con la regla de las potencias. Por otro lado, cuando la regla de la cadena es enseñada fuera de todo contexto, solo logran hacer el algoritmo. Se puede mencionar que, las dificultades vividas en el proceso de apropiación de la regla de la cadena devienen en tres direcciones: dificultades asociadas a las ideas intrínsecas que contiene, dificultades relacionadas a la vinculación con contextos matemáticos y, con contextos sociales.

Componente sociocultural

Lo sociocultural permitirá observar el problema desde una perspectiva social; es decir, permitirá mirar el problema a través de un trabajo humano, desarrollando una actividad matemática, con el objetivo de reconstruir el conocimiento matemático bajo un fin último, el de su apropiación. Por lo mismo, ayudará a unir las componentes anteriores con base en el quehacer humano desarrollado en cada una de ellas; por ejemplo: la actividad humana localizada en el estudio didáctico tiene que ver con el profesor y los autores de libros (saber a ensañar) ejercitando mecanismos de consenso y de reproducción social. Lo anterior permite decir que un elemento que entra en juego en el sistema escolar y que miraremos bajo un trabajo humano, es el texto escolar. Este soporte de acción y de puesta en el escenario educativo de un saber afectado por una transposición didáctica, obedece a una mecánica de formación de consensos; es decir, los textos escolares son un medio que permite generar consensos hacia el qué enseñar e incluso hacia el cómo enseñar y a la vez, es un medio de reproducción social (Cantoral, 2001). Así que los textos escolares permiten generar consensos para explicar la regla de la cadena; pero, a diferencia de otros temas matemáticos donde podemos aplicar diferentes versiones de lo mismo, el tema de estudio no posee dicho aspecto y, es aquí donde cobra fuerza la investigación acerca de este concepto, pues deberíamos tener otros caminos u presentaciones de la regla de la cadena (ver Dubinsky, 1998) y así generar un verdadero consenso. El diseño, entonces, debe ser diferente a cómo los textos escolares enseñan la citada regla. El estudio epistemológico apoya este cambio de epistemología, con base en la explicitación del sentido social que propició la naturaleza de la regla de la cadena; es decir, en el trabajo desarrollado por Newton hacia cómo él, bajo una idea de movimiento, con un origen social, llega a establecer la regla de la cadena.

En cuanto a la dimensión cognitiva, la influencia social se ubica en el consenso y didáctica (Cantoral, 2001), puesto que el estudiante aborda problemas que utilizan la regla de la cadena sólo con base en las explicaciones que da el profesor y no con base en recursos variacionales o estrategias de resolución de problemas.

Así que bajo un trabajo humano, considerado en un primer plano, la regla de la cadena no sólo debe ser mirada como una estructura teórica, sino que también debe ser vista como un ente con movilidad y en consecuencia, factible a resignificarse al embonarla en diferentes contextos variacionales. La regla de la cadena bajo este acercamiento sociocultural no sólo es derivar una función compuesta, sino es estudiar un fenómeno útil para una sociedad que requiera evolucionar a través de cambios sucesivos, llevando como proceso fundamental un cambio de variable independiente de la función derivada.

Conclusiones acerca del análisis preliminar

Del análisis preliminar se puede señalar que los textos escolares no hacen una explicación clara de la regla de la cadena; su base de la explicación se fundamenta en la función compuesta, misma que no entiende el estudiante. En la mayoría de los libros examinados no hay una presentación en contexto. Los estudiantes cuando la manejan, sólo hacen su algoritmo; no pueden aplicarla en contextos sociales ni matemáticos. En algunos casos la confunden con la regla de la potencia. Por otra parte, Newton hace un tratamiento distinto al que ahora hacen los textos escolares: utiliza un cociente de cambios instantáneos y un cambio de variable. También se observa que el origen social de la regla de la cadena se ubica en el estudio del movimiento, el que es tomado como una circunstancia de su invención. Lo que permite decir que en esta transición de épocas y de sociedades, ocurre un cambio de epistemología, gestándose obstáculos tales como: uno, reconocido fuertemente, es el concepto de función (Sierpinska, 1993), el cual arrastra el concepto de función compuesta; otro, es el relacionado con el doble papel que asume una variable en una situación problema, como variable independiente y como variable dependiente; y, la ligazón intrínseca de las razones de cambio que se da entre éstas. Los obstáculos se pueden ubicar alrededor del obstáculo de función, por su interdependencia. Finalmente diré que, el diseño se circunscribe en tres direcciones según la componente sociocultural: textos escolares, cambio de epistemología y, mirar al estudiante como parte de un colectivo.

Recapitulando lo expuesto se puede mencionar que, cuando la regla de la cadena es puesta en la escena educativa, su problemática deviene en tres direcciones: una, relacionada con su apropiación; otra, relacionada con las matemáticas aplicadas (cómo y donde se aplica); y, la ultima, relacionada con el consenso y didáctica (es el medio actual que se utiliza para decidir cómo enseñarla).

Situación didáctica inicial

Con base en el análisis preliminar se diseñó una situación didáctica, teniendo un carácter de referencia, pues dependiendo del análisis a posteriori se podrán diseñar nuevas exploraciones. Los objetivos que persigue este diseño son los siguientes:

- Proporcionar contextos sociales que permitan introducir la transición de variables y así ver aparecer la función compuesta.
- Proporcionar contextos sociales que permitan aparecer en el estudiante la regla de la cadena ligada a la función compuesta, bajo el doble papel que asume una variable y la fusión intrínseca que se origina entre razones de cambio.
- Confrontar la presentación de la regla de la cadena como un cociente de cambios instantáneos, con la de un producto de cambios instantáneos.
- Inducir al estudiante a transitar dentro de tres registros de representación que posibiliten la construcción social de la regla de la cadena: registro gráfico, numérico y algebraico; bajo una construcción de consensos.

También se identificaron las siguientes variables didácticas:

- La relación existente entre las variables independiente y dependiente y, sus contextos.
- Los contextos de ubicación de la regla de la cadena: matemático (gráfico, numérico y algebraico) y social (dentro de la vida cotidiana, dentro de la ingeniería o dentro de otra rama de la ciencia).
- La formación de la función compuesta bajo la necesidad de utilizar una tercera variable.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica*. En Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Gómez, P. (ed.). Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica. México., pp. 33-59

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol 7, N° 2, pp. 33-115.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2000). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. En R. Cantoral (Ed.), El futuro del Cálculo Infinitesimal. ICME-8. Sevilla, España. México: Grupo Editorial Iberoamérica., pp. 69-91

Cantoral, R. (2001). *Sobre la Articulación del Discurso Matemático Escolar y sus Efectos Didácticos*. En G. L. Beitía (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 14. Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición, pp. 64-75

Dubinsky, E. (1998). *Una Década de Investigación en Educación Matemática Sobre Algunos Temas de Matemáticas Avanzadas*. En F. Cordero (Ed.). Programa Editorial. Serie: Antologías. N° 3, pp. 223-247. CINVESTAV-IPN. México

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. USA: Springer-V.

Newton, I. (2001). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*. UNAM. México. [I. Newton. *Tractatus De Methodis Serierum Et Fluxionum*. 1671]

Sierpinska, A. (1993). *On Understanding the Notion of Function*. En The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. Harel y Dubinsky (Eds.). MAA Notes Vol. 25., pp. 25-59

Visualización y tecnología: un enfoque a las aproximaciones sucesivas

E. Aparicio, R. Cantoral y F. Rodríguez
Cinvestav – IPN, México
aparicio@mail.cinvestav.mx rcantor@mail.cinvestav.mx frodrig@mail.cinvestav.mx

Resumen

Presentamos un tratamiento didáctico sobre el problema de recurrencia de sucesiones e intentamos mostrar como algunas nociones, como la noción de límite de una sucesión en un sentido práctico, puede ser visualizada. Nos enfocamos sobre las aproximaciones sucesivas a partir del tratamiento de actividades que articulan el uso de la calculadora con capacidad gráfica y el acto de visualizar. En este sentido, sugerimos que el aprendizaje puede ser entendido como el resultado de prácticas especificas en los individuos en un marco de situaciones problemas.

Introducción

El presente trabajo es producción de una línea de investigación afanada por el grupo de investigación del Nivel Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN sobre el estudio de la variación y el cambio, en particular nos referimos al estudio de la noción de aproximación, asimismo, fundamentamos a la visualización como un status de permutación de diferentes representaciones cognitivas sobre un escenario en el cual el estudiante es constructor de las significaciones matemáticas. Por otra parte, buscamos trascender sobre posturas antagónicas con una visión alternativa en cuanto al uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Concretamente se hace uso de la calculadora con capacidad gráfica Casio modelo Álgebra FX 2.0 PLUS.

Consideramos que el tópico es de fundamental importancia dado que la mayoría de temas en cálculo y análisis se ven afectadas por la convergencia, tal es así, que en las ciencias a fines con la ingeniería, la economía, la administración o la biología se ven inmersos los métodos de aproximación para resolver problemas aplicados a dichas ciencias. Por ende, exponemos un acercamiento didáctico novedoso de las aproximaciones sucesivas, para acercar nuestro discurso al conocimiento de los estudiantes a través de la visualización. De esta forma, contemplamos tres apartados principales para el desarrollo de la investigación: visualización y recursividad, problemas epistemológicos ligados a las nociones de aproximación y límite, y finalmente, una serie de actividades de enseñanza respecto de la recursividad y el límite. El tratamiento didáctico que seguiremos se apoya por una parte, en la teoría de situaciones fundamentales, adaptada a la matemática avanzada y al empleo de tecnología especializada, y por otra a la postura teórica del grupo de investigación al que pertenecemos, la socioepistemología.

Cordero, 2001) refiere a la aproximación sociepistemológica a través de las prácticas sociales que surgen de cierta necesidad como las de medir, predecir, estimar, con el propósito de justificar o explicar cierto saber, dando origen a situaciones donde el individuo determina hacer uso de diferentes estrategias con el propósito de reconstruir significados. Dichas situaciones son entendidas como situación de variación, aproximación y de transformación en los distintos tópicos del cálculo.

> ...así, los estudiantes construyen representaciones y aplican procedimientos con relación a las operaciones que ellos son capaces de hacer, con relación a las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar, y con relación a los conceptos que ellos van construyendo progresivamente

El problema

Un aspecto que llama la atención en la enseñanza de las matemáticas, es la tendencia a favorecer los métodos "exactos" por sobre los aproximados, soslayando las actividades generadoras de conocimiento. No obstante, entendemos que la noción de aproximación resultó ser de gran importancia como un método aproximado para encontrar raíces.

Las nociones matemáticas de límite, convergencia y aproximación son concebidas desde un punto de vista cognitivo, como entes estrechamente relacionados para su aprendizaje, por ejemplo, notamos que las dos primeras son tratadas en un cierto momento de la enseñanza de manera secuencial, pero la tercera, suele no verse muy favorecida en dicho tratamiento, ignorando su contribución en el aprendizaje de éstas nociones.

En este sentido, nuestro problema de partida lo constituye el hecho de que la noción de límite en matemáticas tal y como es tratada en la enseñanza, se resiste al entendimiento de la mayoría de los estudiantes[1]. Así, nuestra propuesta rebasa el sólo tratamiento de técnicas de enseñanza y métodos de aprendizaje, para ofrecer alternativas didácticas novedosas.

Marco teórico

La necesidad de ofrecer una matemática que pueda ser construida por las y los que la aprenden resiste sobre la postura teórica de nuestro grupo de investigación, a saber, la socioepistemología, la cual sostiene que para que exista un aprendizaje de los objetos matemáticos debe considerárseles como fruto de prácticas sociales específicas (Cantoral, 2001) De este modo, pretendemos que nuestro enfoque de visualización esté del lado de prácticas sociales que suministren juicios a la práctica educativa.

De este modo, buscamos escenarios propicios en los cuales la reconstrucción de significados es la parte medular para dirigir al estudiante hacia un entendimiento de la noción de aproximación y límite. En este sentido, se asume que reorganizar el discurso matemático escolar dirige la atención hacia la reconstrucción de significados y ésta provee de categorías del conocimiento matemático con relación a la actividad humana.

El marco teórico que sustenta esta investigación es la Teoría de Situaciones Didácticas, la cual sostiene que el conocimiento de un individuo se genera a partir de la capacidad de abstraer del medio, elementos para adaptarlos a la construcción de su propio conocimiento. La teoría de situaciones didácticas, busca proveer un conjunto de conceptos tales que su utilización permita el estudio de los fenómenos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por tanto, se asume que la relación de la problemática con el marco teórico se ve establecida en la visión de la aproximación socioepistemológica pues en ella se presume que en las actividades y prácticas sociales se suscita conocimiento.

---

[1]Otras dificultades sobre el límite de una sucesión se reportar en Moreno (1999).

Metodología

La metodología empleada para el trabajo consistió en el planteamiento de un mecanismo didáctico innovador que contempla el uso de tecnología de tal forma que se vio favorecido tanto el método exacto como el aproximado para cimentar el método de aproximación, particularmente para encontrar raíces, estimar límites y desarrollar procesos recursivos.

Para el mecanismo didáctico se consideraron 12 profesores activos en el área de matemáticas en el nivel superior, donde el objetivo de las actividades fue desarrollar la noción de límite a través de recurrir a procesos de visualización. Fueron 4 las actividades sugeridas, presentamos una que a nuestro juicio es el eje sobre el que se basa el mecanismo:

Actividad

a) Calcule $\sqrt{28}$ en el modo RUN de su calculadora.

b) Calcule $\sqrt{28}$ haciendo aproximaciones como en el método de los babilonios en su calculadora. Para ello siga las siguientes instrucciones:

- Pulse en la tecla MENU
- Posiciónese en el icono RUN – MAT y pulse la tecla [EXE]
- Ingrese un valor aproximado a $\sqrt{28}$ y pulse [EXE]
- Escriba la expresión $\frac{1}{2}(Ans + \frac{28}{Ans})$ que determina la aproximación de
  Pulse [EXE] varias veces.

c) ¿Calcule $\sqrt{32}$ con el mismo método?

La selección de esta actividad obedece por un lado a la familiarización del empleo de la calculadora y al objetivo del proyecto, a saber, *la propuesta de un mecanismo didáctico novedoso de tal suerte que nos permita reconocer y analizar los procesos inmersos en la adquisición de la noción de límite, con el apoyo de un recurso tecnológico y la visualización.*

Por ejemplo, las gráficas que a continuación mostramos se derivan de una actividad propuesta, de tal forma que se exhibe el fenómeno discriminante de convergencia y divergencia en el contexto gráfico.

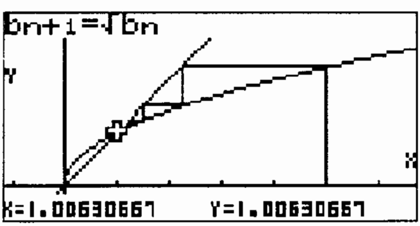


Fig. 1 Convergencia

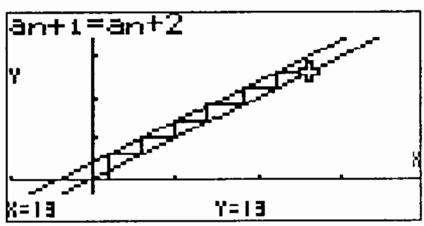


Fig. 2 Divergencia

Este tipo de gráficas permiten realizar un análisis comparativo abstrayendo información visual para la aprehensión del objeto límite.

Resultados

Dentro de las dificultades en la construcción del conocimiento pudimos constatar el hecho de ignorar a una sucesión como una función, puesto que se recurre al tratamiento de sucesión como una serie de cálculos recursivos de valores. Asimismo, se detecta que el proceso de iteración de una función responde a un algoritmo mecanizado, en otras palabras, es vista como un objeto y no como un proceso en sí.

Otra dificultad que advertimos se enfoca sobre el manejo de contextos de representación, pues la mayoría de respuestas a las actividades reflejan el delicado trabajo en el contexto analítico y el contexto geométrico.

Sin embargo, destacamos que dentro de nuestros logros estuvo el fundamentar la noción de punto fijo y del límite hacia él. Esto permite presuponer que el escenario formulado para el mecanismo didáctico en efecto arrojó algunos resultados esperados sobre el desarrollo de la noción de límite y convergencia de sucesiones recurrentes.

Conclusiones

La noción de límite es considerada necesaria en el estudio de conceptos como la continuidad y la recursividad. En ambos casos dicha noción, es tratada como un número A con la propiedad de que los términos de la sucesión A_n se acumulan de cierta manera en su entorno. Mas precisamente, esto se expresa en los siguientes términos: cualquier intervalo centrado en A contiene una infinidad de los elementos de la sucesión y, de hecho a partir de cierto valor N contiene a todos los valores que le siguen. Esta descripción suele escribirse de una manera más sintética como sigue: , cuando n tiende a infinito.

Tratamos de enfatizar que nuestra postura didáctica va más allá del sólo entendimiento de las estrategias utilizadas en la resolución de problemas y de métodos en la mejora de éstas. Pues nuestra preocupación reside en la elaboración de situaciones de aprendizaje que permitan atender a los objetos matemáticos como significaciones abstraídas por el ente mismo. A manera de síntesis señalamos, que en la didáctica actual de las matemáticas se precisa de mejoras en la elaboración y planeación de las alternativas en el discurso escolar del cálculo y el análisis.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. SA de CV.

Berger, M. (1998). *Graphic calculators: an interpretative framework*, in For the Learning of mathematics. An international Journal of Mathematics Education. 18_2 p. 13-20.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et métodos de la didáctica de las matemáticas.* En Recherches en Didactique des Mathematiques 7(2): pp. 33- 115

Cantoral, R. (2001). *Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones*. Serie cuadernos didácticos, Grupo Editorial Iberoamérica SA de CV.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice – Hall.

Conte, & Boor, (1974). *Análisis numérico elemental*. Mc Graw-Hill de México, SA de CV. 2ª Ed.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2₁

Devaney, R. (1990). *Chaos, Fractals and Dynamics. Computer experiments in mathematics*. Addison – Wesley.

García, M. (2001). *El efecto de la calculadora graficadora en la construcción de relaciones entre variables visuales y algebraicas de funciones cuadráticas.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14.

Moreno, J. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación.* Trabajo de tesis de maestría. Cinvestav – IPN.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America, Notes No. 19.

Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato

Crisólogo Dolores Flores y Luis Arturo Guerrero Azpeitia

CECYTEH, CIMATE de la UAG, México

cdolores@uagro.mx / luis_arturo_guerrero@hotmail.com

Resumen.

En este artículo se reportan los resultados de una investigación que explora las concepciones alternativas de profesores de matemáticas de bachillerato acerca del comportamiento de funciones. Para tal exploración se diseñó un cuestionario en el que se usan los sistemas de representación verbal, gráfico y analítico. En especial se exploraron concepciones relativas al comportamiento variacional de funciones [v. gr: Para qué x, $f'(x)>0$], comportamiento variacional y signo simultáneamente [v. gr: Para qué x se cumple que: $f'(x)>0$ y $f(x)<0$] y las relativas a los procesos de reversibilidad: [v. gr: Dada $f'(x)$ esbozar $f(x)$ y viceversa]. Los resultados indican que una cantidad significativa de profesores, creen que $f(x)<0$ si su gráfica está en el semieje negativo de las x; consideran a $f'(x)$ como asociada a un punto y no al comportamiento de $f(x)$; la mayoría se muestra imposibilitado para transferir información variacional de la gráfica de $f'(x)$ a $f(x)$.

1. Elementos básicos de la investigación

Problema y objetivo. Varios trabajos de investigación (Dolores, 1996; Dolores, 1998; Dolores/Guerrero/Medina/Martínez, 2001; Cáceres, 1997) muestran que en situación escolar, el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (PLV) en estudiantes universitarios y preuniversitarios es muy deficiente. En el marco de este problema global, adoptamos un problema específico: cómo se manifiestan en los profesores de bachillerato esas deficiencias, en especial cuando analizan el comportamiento de funciones. Para el desarrollo del PLV es indispensable poder leer e interpretar las gráficas de funciones, no obstante se ha reportado que los estudiantes no pueden usar las gráficas para comunicar o extraer información (Wainer, 1992), o que existen confusiones entre la pendiente y la altura, entre un intervalo y en un punto, etc. (Leinhardt, G. et al, 1990). Incluso estudiantes y profesores confunden la trayectoria del movimiento físico con la gráfica cartesiana (Dolores /Bello/ Carvajal, 2002). ¿Pero qué pasa con las concepciones de los profesores sobre el comportamiento de funciones? El análisis de funciones es muy importante en la escuela media y superior pues en él se sintetiza el objetivo primordial de la matemática de las variables. Por ello en esta investigación nos planteamos como objetivo, detectar y caracterizar las concepciones alternativas de profesores de matemáticas de bachillerato sobre los aspectos básicos del análisis de funciones.

Elementos teóricos. El PLV es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática del cambio por una lado y los procesos del pensamiento por otro; implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio (Cantoral, 1997). Por otro lado, las representaciones semióticas juegan el papel de mediatizadores del conocimiento en la actividad matemática, a través de ellos, las representaciones mentales se exteriorizan para fines de comunicación y son al mismo tiempo esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento, ya que aquellas dependen de la interiorización de las representaciones semióticas (Duval, 1998). Los rasgos característicos del comportamiento de las funciones de nuestro interés son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios; región donde la función es: positiva, negativa o nula; estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica, analítica, etc. y se constituyen en los medios que adoptamos para explorar concepciones de los profesores. En los medios escolares se cree que las gráficas son de gran ayuda para visualizar el comportamiento de funciones. Sin embargo, con frecuencia esas visualizaciones y los significados que los estudiantes atribuyen a las gráficas no son congruentes con los significados aceptados en textos o los que comparten los expertos. Esta incongruencia causa conflictos en la comprensión y aceptación de los significados, por ello ha recibido varias denominaciones: errores, errores sistemáticos, preconcepciones y concepciones alternativas. El término error enfatiza la incongruencia entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento científico aceptado, las preconcepciones se caracterizan por aquel tipo de conocimiento precientífico formado por las experiencias cotidianas y que está fuertemente arraigado en la mente, las concepciones pueden o no ser acordes con los significados aceptados por textos y expertos, por nuestra parte en este trabajo adoptamos el término concepciones alternativas en el sentido de Confrey (1990), Mevarech y Kramarsky (1997), porque enfatiza lo que las personas piensan o saben por sobre lo que no conocen.

Metodología. Para la exploración se utilizó un cuestionario y entrevistas. El cuestionario se diseñó para que permitiera extraer información sobre las concepciones de los profesores al analizar el comportamiento de funciones por medio de los sistemas de representación gráfico, analítico y verbal. Se plantearon nueve situaciones que fueron diseñadas sobre la base de cuatro criterios: dadas las condiciones analíticas de $f'(x)$ construir o seleccionar $f(x)$, dadas las condiciones (en forma verbal) de $f'(x)$ seleccionar $f(x)$, dada la gráfica de $f'(x)$ construir $f(x)$ y dada la gráfica, seleccionar las condiciones analíticas a las que se sujeta.

CUADRO 1. CARACTERISTICAS DE LAS PERGUNTAS DEL CUESTIONARIO

PREGUNTAS	TRANSICIÓN	DADA LA CONDICIÓN VARIACIONAL EN FORMA:
1	Gráfico-Analitico	Gráfica, seleccionar su comportamiento expresado en forma analítica.
2,3	Analítico-gráfico	Analítica de f' (x), seleccionar la gráfica de f(x)
7,8		Analítica de f' (x),constrtuir la gráfica de f(x)
4,5	Verbal-gráfico	Verbal de f' (x), seleccionar la gráfica de f(x)
6,9	Gráfico-gráfico	Gráfica de f' (x), construir la gráfica de f(x)

El cuestionario se aplicó a 16 profesores de matemáticas que tenían experiencia en la enseñanza del Cálculo Diferencial, todos ellos adscritos al Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Hidalgo (CECyTEH), institución educativa de nivel medio superior. Además a ocho de estos profesores se les entrevistó utilizando las mismas situaciones planteadas en el cuestionario a fin ampliar y confirmar la información encontrada. Para la detección de las concepciones se hizo un análisis cualitativo a las respuestas obtenidas en el cuestionario y en las entrevistas. A continuación se presenta el análisis de las respuestas, las gráficas correspondientes a cada una de las preguntas (cuando fueron proporcionadas) aparecen en el Cuadro 2.

2. Análisis las respuestas dadas al cuestionario

Pregunta 1. La gráfica siguiente corresponde a cierta función f(x). Subraye la opción u opciones que satisfagan a cada pregunta ¿Para qué intervalos se cumple que:

1.A) $f(x + \mathrm{h})\ f(x) > 0$, para h > 0? a) $-3 < x < -2$ b) $-2 < x < 0$ c) $0 < x < 2$ d) $-3 < x < -0.5$ e) otro: ________

1.B) $f(x + \mathrm{h})\ f(x) < 0$, para h > 0? a) $-3 < x < -2$ b) $-2 < x < 0$ c) $0 < x < 2$ d) $-0.5 < x < 0.5$ e) otro: ________

1.C) $f(x + \mathrm{h})\ f(x) = 0$, para h > 0? a) $x = -3$ b) $x = -0.5$ c) $x = 0$ d) $x = 2$ e) otro: ________

Respecto de la pregunta 1C, una quinta parte de los profesores consideró que: f(x+h)-f(x)=0 en x = 0 y otra quinta parte en x = 2, ninguno asoció todos los puntos estacionarios de la función con esta expresión, un tercio de los profesores la asoció con los puntos de corte de la gráfica con el eje x. Por otra parte, el 18% de los profesores asocian: f(x+h)-f(x)>0 con la región donde f(x) > 0 y f(x+h)-f(x)<0 con la región donde f(x)< 0, esto hace suponer que confunden crecimiento con el signo positivo de la función y decrecimiento con el signo negativo de la misma; solo el 13% identificó correctamente los rasgos solicitados, un tercio no dio respuesta .

Pregunta 2. Escriba, f′(x)>0; f′(x)<0 o f′(x)=0, donde las gráficas satisfagan la condición. Un 40% establece relaciones aceptables entre las condiciones analíticas dadas y sus correspondientes representaciones gráficas, es decir, relacionó simultáneamente las tres condiciones con sus respectivas gráficas: la 2A, 2C y 2E con f′(x)>0; las gráficas 2B y 2F con f′(x)<0 y la gráfica 2D con f′(x)=0. El 20% de los profesores asoció f′(x)>0 con la gráfica ubicada en el semieje positivo de las ordenadas y a f′(x)<0 con la gráfica que se ubica en el semieje negativo de las ordenadas donde x<0. Por otra parte, el 13% asoció las expresiones f′(x)<0 y f′(x)>0 con las gráficas que se ubican en el semieje negativo y positivo de las abscisas, respectivamente. Estos resultados hacen suponer que, para este sector de profesores existe confusión entre f′(x) con f(x), parecen no diferenciar que la primera reporta comportamiento y la segunda ubicación.

Pregunta 3. Escriba, f′(x)>0 y f(x)>0, o bien f′(x)<0 y f(x)<0, donde las gráficas satisfagan las condiciones al mismo tiempo. El 44% asoció simultáneamente tanto las condiciones f′(x)>0 y f(x)>0 (creciente y positiva) con las gráfica 3A, 3C y 3F, como f′(x)<0 y f(x)<0 con las gráficas 3B y 3D; a pesar de que la gráfica 3E no satisfacía ninguna de las condiciones dadas los profesores la seleccionaron para alguna de ellas. El 33% de los profesores, tal parece que sólo asocian una de las dos condiciones ya sea f′(x)>0 y f(x)>0 si la gráfica de la función está en el semieje positivo de las ordenadas o bien f′(x)<0 y f(x)<0 si se ubica en el semieje negativo. El 18% asocia solo una de las dos expresiones analíticas, mostrando preferencia por f′(x)<0 y f(x)<0 si la gráfica de la función se localiza en el semieje negativo de las abscisas o bien por f′(x)>0 y f(x)>0 si se ubica en el semieje positivo de las abscisas. En forma global, para el 50% de los profesores, es suficiente el cumplimiento de una condición.

Pregunta 4. Escriba sobre la raya correspondiente: función creciente y positiva, o bien, función decreciente y negativa, según el comportamiento de sus gráficas. El 66.7% de los profesores asoció correctamente las gráficas de 4B y 4F con las condiciones creciente y positiva, en tanto que para las gráficas 4D y 4E asociaron las condiciones decreciente y negativa, sin embargo, de esta cifra, el 80% tuvo alguna elección simultáneamente en las gráficas 4D y 4E, lo que hace suponer que las elecciones de profesores son endebles; en tanto que el restante 20% no asoció ninguna de las dos condiciones que se le presentaron, mostrando, tal vez, cierta solidez en sus argumentos. En el 33% restante no mostró un patrón definido en sus respuestas. Es posible que cierto sector de los profesores considere que al cumplirse una de las dos condiciones de la conjunción, es suficiente, mostrando cierta tendencia a asociar función creciente con función positiva por una parte, y por la otra, función decreciente con función negativa.

Pregunta 5. Escriba sobre la raya correspondiente: función creciente y negativa, o bien, función decreciente y positiva, según el comportamiento de sus gráficas. El 26.7% de los profesores consideró que las gráficas 4D y 4E cumplen la condición de creciente y negativa y, decreciente y positiva respectivamente (afirmación correcta), sin embargo, solo el 13.3% muestra cierto dominio en el análisis de gráficas en los rasgos ya citados, en tanto que el 13.3% restante manifiesta contradicciones en cuanto al cambio de signo de la función en dos o más incisos. Al analizar en conjunto las preguntas 4 y 5, se tiene que el 33.4% manifiesta contradicciones en sus respuestas (6.7 referente a la variación y 26.7 respectivo al signo). Un 20%, mantiene la concepción de asociar crecimiento con positividad y decrecimiento con negatividad de la función. Un 20 por ciento manifiesta proclividad a considerar como función negativa a aquella que está sobre el semieje negativo de las abscisas y positiva si esta sobre el semieje positivo. Finalmente el 13.4 por ciento no manifiesta un patrón bien definido.

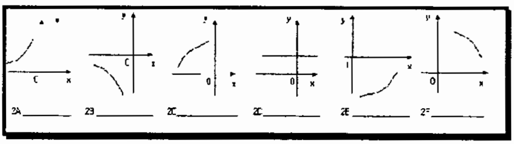
Pregunta 6. Se muestra una porción de la gráfica de la función $f'(x)$ en torno de $x = a$, esboce la gráfica de $f(x)$ en torno ese punto. El 83.4% de los profesores que esbozaron gráficas, consideraron al punto $(a, 0)$ como un cero de $f(x)$. Nótese que la pregunta planteada requiere de pasar, de la gráfica de la derivada a la de la primitiva, es decir la reversibilidad asociado al paso de $f(x)$ a $f'(x)$. Solo un profesor fue capaz de esbozar una gráfica que cumple con las condiciones solicitadas.

Pregunta 7. Trace las gráficas de funciones que satisfagan las siguientes condiciones: a) $f(a)>0$, $f'(a)<0$; b) $f(a)<0$, $f'(a)>0$; c) $f(a)<0$, $f'(a)=0$. Solo el 14% de los profesores esbozan gráficas correctas, sin embargo sólo el 7 por ciento, hizo manifiesta en ellas la ubicación del punto a, para, a partir de esto, cumplir con las condiciones preestablecidas, utilizando como principal argumento, una recta tangente en $f(a)$; mientras que el resto de profesores no ubicaron al citado $x = a$ y bosquejaron gráficas que cumplieron con las condiciones para toda x; otro aspecto importante de resaltar, es que solamente el profesor que ubicó $f(a)$ fue quien relacionó a $f'(a)=0$ con un punto estacionario, el resto consideró una línea recta positiva o negativa y paralela al eje de las abscisas, posiblemente el argumento sea: si $f(x) = c$ entonces $f'(x) = 0$. El 28.5%, elabora esbozos que satisfacen únicamente una condición y que corresponde a $f(x)$; en tanto que el 7% busca satisfacer las condiciones para $f'(x)$ únicamente. El 14% considera gráficas separadas para cada condición solicitada, sin embargo no las satisfacen, en tanto que un 21% construye gráficos separados en las que cada uno de ellas por separado cumple las condiciones de $f(x)$ o $f'(x)$. Solamente dos profesores elaboraron gráficas para satisfacer las condiciones de $f(a)$ y $f'(a)$, el resto para las condiciones de $f(x)$ y $f'(x)$, para un punto y para toda x respectivamente.

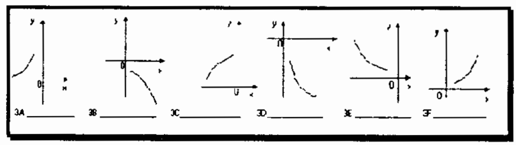
Pregunta 8. Si $f(x)$ tiene un solo punto estacionario en $x = 2$, $f'(x)> 0$ para $x < 2$ y $f'(x)> 0$ para $x > 2$. Esboce una gráfica para $f(x)$ que satisfaga estas condiciones y de la fórmula de la función. El 66.7% de los profesores que realizaron al menos un esbozo para las condiciones solicitadas, asoció al punto estacionario de la función con el cero de la misma. Con estos datos es posible considerar que existe confusión entre f(x) y f′(x), al menos en x=a. El 45.5%, esboza gráficas que cumplen con las condiciones de $f(x)>0$ para $x<2$ y para $x>2$, aunque estas condiciones debieron cumplirse pero para f′(x). Un 27.3% bosquejó una gráfica que cumple las condiciones solicitadas para f′(x), solamente un profesor no asoció al punto estacionario con el cero de la función. Solamente un profesor construyó una gráfica que cumple con todas las condiciones solicitadas. Existe proclividad a confundir a f(x) con f′(x) al menos en un 60% de los casos.

Pregunta 9. La gráfica siguiente corresponde a cierta f′(x), esboce al menos una que corresponde a f(x). El 44.4% de los profesores esbozó una gráfica creciente. El 22% pretendió realizar un análisis de f′(x) a través de rectas tangentes en algunos puntos. Es posible que no exista habilidad en el tratamiento en el sistema de representación gráfico y por tal motivo, el proceso de reversibilidad no se haya manifestado (y si existe parece no ser consistente).

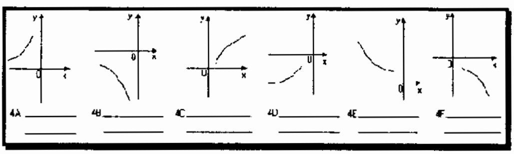
CUADRO 2 .GRÁFICAS DADAS EN LAS PREGUNTAS 2, 3, 4 ...9



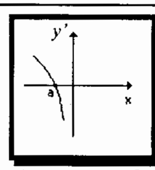
Pregunta 2



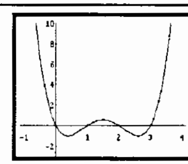
Pregunta 3



Pregunta 4 y 5



Pregunta 6



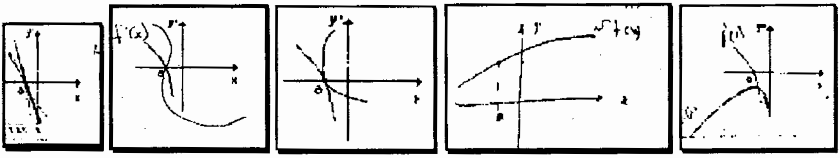
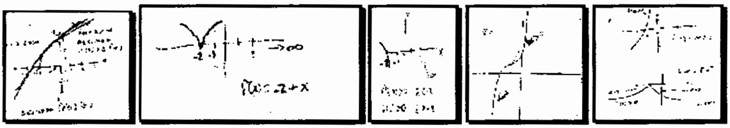
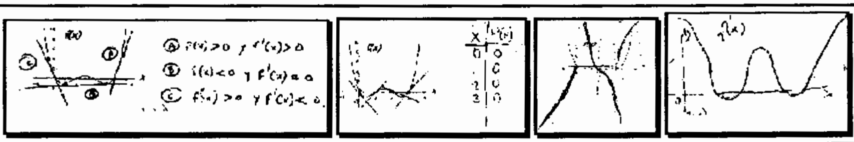
Pregunta 9

Mediante las entrevistas pudimos confirmar algunas cuestiones observadas en el cuestionario, para el 88 % (63 manifestó estar seguro y el 25 manifiesta contradicciones) considera que, crecimiento y función positiva, por un lado y decrecimiento con función negativa, son condiciones concomitantes. El 25% considera como argumento la concavidad para determinar el signo de la función (cóncava hacia arriba implica función positiva). El 38% considera privilegia al eje de las ordenadas como referencia para realizar el análisis de la función.

3. Concepciones alternativas encontradas.

Un tercio de los profesores asoció a $f(x+h)-f(x)=0$ con los cero de la función; un 18% asoció a $(x+h)-f(x)>0$ con la región donde $f(x) > 0$ y $f(x+h)-f(x)<0$ con la región donde $f(x) < 0$, esto hace suponer que confunden crecimiento con el signo positivo de la función y decrecimiento con el signo negativo de la misma. La mayoría de los profesores cuestionados asocian consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva (expresadas en forma verbal-escrita) con una las graficas correspondientes, sin embargo, al pedirles que asocien las condiciones creciente y negativa (bajo las mismas condiciones) por un lado, y decreciente y negativa por otro, tienden a asociar aquella función que es positiva y negativa respectivamente. Al solicitar la construcción de gráficas que cumplan dos condiciones del estilo $f'(x)>0$ y $f(x)<0$, los profesores son proclives a esbozar una gráfica por cada una de las dos condiciones, las cuales no siempre satisfacen la condición respectiva para la cual fueron construidas. Observamos que existe la tendencia en cierto grupo a confundir el crecimiento de una función ($f'(x)>0$) con su ubicación en el semieje positivo de las abscisas, en tanto que el decrecimiento de la función ($f'(x)<0$) es asociada con las gráficas cuya ubicación es el semieje negativo de las abscisas. Para otro grupo de profesores, existe proclividad a relacionar la expresión $f'(x)>0$ con una gráfica cuyas ordenadas sean positivas, mientras que, aquella función que posea ordenadas negativas, es asociada con la expresión $f'(x)<0$. En términos generales notamos la tendencia de sólo atender una condición cuando se planteaban dos simultáneamente. Es probable que esté fuertemente arraigada la idea de asociar crecimiento con *positividad* y de crecimiento con *negatividad* de la función.

Se detectó gran proclividad a considerar que, gráficamente se cumple que $f(x_0)$ es equivalente con $f'(x_0)$. El proceso de reversibilidad, el paso de la gráfica de $f'(x)$ a $f(x)$, casi no se manifiesta en los profesores, tienden a analizar o construir gráficas que satisfagan las propias condiciones de $f'(x)$ y no las correspondientes a $f(x)$, solo trabajan en un mismo plano de coordenadas pues se muestran imposibilitados para transferir información variacional del plano de coordenadas $(x, f'(x))$ al de coordenadas $(x, f(x))$ o viceversa. Generalmente el proceso de graficación de $f'(x)$ dada $f(x)$, es relativamente transitable (empíricamente), en cambio, en nuestra indagación, observamos que los profesores al plantearles construir $f(x)$ dada $f'(x)$ esbozan rectas tangentes en algunos puntos de la gráfica de $f'(x)$, solo un profesor construyó una gráfica aceptable.

CUADRO. ALGUNAS PRODUCCIONES DE LOS PROFESORES	
Pregunta 6	
Pregunta 7	
Pregunta 8	
Pregunta 9	

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional.* Seminario de Investigación, Área de Educación Superior, Cinvestav/IPN México D.F.

Confrey, J. (1990). *A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming.* Review of research in Education. Vol. 16. Pp. 3-56

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II. pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis Doctoral. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro.

Dolores, C. & Bello, G. & Carvajal, D. (2002). *Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria.* Artículo en revisión para la revista RELIME.

Cáceres, T. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional. Un estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años.* Tesis de Maestría. Matem. Educ. Cinvestav del IPN, Méx.

Dolores, C. & Guerrero, L. & Medina, M. & Martínez, M. (2001). *Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales.* Reporte de Investigación aceptado para su publicación en las Actas de RELME XV. Buenos Aires, Arg.

Leinhardt, G. & Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990) *Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching.* Review of Educational Research Vol. 60. Pp. 1-64

Mevarech , Z. & Kramarsky, B. (1997). *From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions.* Educational Studies in Mathematics. Vol. 32 Núm. 3. pp. 229-263

Wainer, H. (1992). *Understanding graphs and tables.* Educational Researcher Vol. 21, pp.14-23

Resignificación de las derivadas sucesivas en las ecuaciones diferenciales de segundo orden

Héctor Márquez Martínez, Ricardo Cantoral, Francisco Cordero

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

hmarquez2@starmedia.com

Resumen

El presente trabajo centra la atención en problemáticas que se ocupan de la matemática relevante en la enseñanza superior –la resignificación de las derivadas sucesivas en las ecuaciones diferenciales- asumiendo que la matemática interviene en ese nivel casi exclusivamente como disciplina principal de enseñanza, donde el problema fundamental de la enseñanza de las matemáticas consiste en el significado más que en la cuestión del rigor, pero ¿cómo puede construirse este significado? Se busca en todo saber una transferencia de conocimiento, en particular, transferir las derivadas sucesivas a las ecuaciones diferenciales, esto es, buscar el momento en que aparecen las derivadas sucesivas en casos como: el cambio de variable $y = y'$, $y' = y''$ o en términos eulerianos $dy = pdx$, $dp = qdx$, $ddy = pddx + dxdp$ y en los significados que adquieren las relaciones: posición igual a velocidad, velocidad igual a aceleración, pendiente igual a concavidad, ¿qué significan estas igualdades?

Problema de investigación

Los errores que se observan en el aprendizaje de los alumnos se deben en gran parte a la metodología que se utiliza en la enseñanza de los contenidos matemáticos, generalmente se parte de la manipulación de los objetos concretos, de la definición del objeto de conocimiento, tal como la derivada. A partir de aquí iniciaremos nuestro estudio para entender, ¿cuál es el significado del manejo simultaneo de las derivadas sucesivas en las ecuaciones diferenciales de segundo orden? Nuestro estudio se ubica en la rama del diseño de situaciones didácticas - situaciones didácticas de resignificación de la línea de investigación Pensamiento y lenguaje variacional dirigido por el Dr. Ricardo Cantoral Uriza.

Hipótesis de investigación

1. Se asume que los conceptos de la matemática avanzada tienen complejidad intrínseca: los estudiantes parece que no pueden articular el manejo simultáneo de las derivadas sucesivas en las ecuaciones diferenciales de segundo orden porque solo conciben a la derivada como una iteración.

2. La obtención de un significado para el conocimiento matemático, le permitirá al estudiante comprender mejor el papel que juega la noción de variación.

Metodología utilizada

Dado que la ingeniería didáctica se constituye como una metodología de investigación que se aplica tanto a los productos de enseñanza basados o derivados de ellas, así como una forma adecuada de conducir la experimentación en clase, hemos elegido emplearla a nuestro trabajo de investigación. En términos teóricos, ella proviene de las teorías de transposición didáctica y de situaciones didácticas y en consecuencia de ambas se desprende la necesidad de dotar al estudio del fenómeno didáctico de un acercamiento sistémico. Diseñamos situaciones didácticas preliminares y secuencias didácticas de exploración, se llevaron a la puesta en escena y posteriormente analizamos los resultados. Las actividades que se proponen tienen como objetivo por un lado, que los alumnos construyan estrategias, es decir, "aprendan" un método de resolución de sus problemas, donde las estrategias son, en alguna medida confirmadas o invalidadas por la experiencia en especie de diálogo con la situación y por otro, ver en que momento aparece el manejo simultáneo de las derivadas sucesivas en las ecuaciones diferenciales. Se diseñaron actividades en las que se necesitan realizar las siguientes acciones:

* Afirmar si una partícula se mueve con aceleración constante.
* Esbozar las gráficas de las funciones derivadas dadas las gráficas de funciones
* Asociar una ecuación diferencial a la gráfica de la solución.
* Informar el significado que adquiere la relación $y''=y$

Perspectiva socioepistemológica

Una característica importante en el procedimiento para resolver una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es, proponer un factor de integración que convierta la ecuación diferencial en exacta, esta forma de proceder tiene algunas variantes en los libros de texto actuales. Por cierto, esta característica es usada por Euler en forma frecuente, como un método para reducir el orden de una ecuación diferencial, la cual obedece que ahí, la ecuación diferencial es independiente de la progresión de las variables, la solución de ella puede encontrarse con el recurso de la libertad de progresiones (Bos, 1974: 72). Así también recurre a los cambios de variable $dy = p\ \ dx$ y $dp = qdx$ ya que las ecuaciones diferenciales de orden superior poseen un cierto tipo de indeterminación que se resuelve especificando la progresión de la variable, luego la ecuación diferencial se encuentra sujeta a esa restricción. En suma, Euler supone que un diferencial de primer orden es constante. Veamos el siguiente estracto:

831. Sea dx un elemento constante, si en la ecuación propuesta de la forma

$$ddy + Pdxdy + Qydx^2 = 0 \qquad (1)$$

P y Q son funciones para ésta x, regresarla a una ecuación diferencial de primer grado

Solución: Sean $y, p\ q$ tres variables tales que

$$dy = pdx \text{ y } dp = qdx$$

$$ddy = pddx + dxdp = pddx + qdxdx$$

sustituyendo esta expresión en (1), tenemos

$$pddx + qdxdx + Pdx.pdx + Qydx^2 = 0, \text{ como } ddx = 0,$$

entonces

$$d^2x\ (q + Pp + Qy) = 0 \Rightarrow q + Pp + Qy = 0\ ,$$

en la cual si establecemos $p = uy\ (3)$ y $q = vy$, obtenemos la ecuación entre x , u , y v

$$0 = vy + uyP + Qy = y(v + Pu + Q) \Rightarrow v + Pu + Q = 0 \Rightarrow v = -\ (Pu + Q)$$

Lo cierto es que de (2) y (3) $dy = pdx = uydx\ (p = uy) \Rightarrow \frac{dy}{y} = udx$

$vydx = qdx = dp = udx + ydu \Rightarrow udy = vydx - ydu = y\,(vdx - du) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{vdx\text{-}du}{u}$

Además como

$$\frac{dy}{y} = udx = \frac{vdx\text{-}du}{u} \Rightarrow uud = vdx - du \Rightarrow du + uudx = vdx = -\,(Pu + Q)\,dx = -Pudx - Qdx$$

$\Rightarrow du + uudx + Pudx + Qdx = 0$ Esta última es la ecuación diferencial de primer grado

Comentarios: Tomar cómo hipótesis el cambio de variable para reducir el orden de la ecuación diferencial conlleva a formular una tesis: Si el cambio de variable $dy = pdx$ *o* $y' = f(x)$ existe, entonces significa que $f(x)$ es derivable y por lo tanto debe ser continua. Cuál es el significado de reducir una ecuación diferencial de segundo orden a una de primer orden?

Elementos teóricos

Tomamos como marco teórico la teoría de transposición didáctica porque nos suministrará tres ejes de estudio: el saber matemático tal como se originó (*savoir savaint*), la reestructuración que de este saber hace el profesor vía los libros de texto (*savoir á enseiger*) y cómo este saber "re-estructurado" pasa a ser un saber enseñado (*savoir enseigné*) en los alumnos.

Cada concepto avanzado es basado en conceptos elementales, y no puede ser captado fuera de un sólido y llegan a ser significativos dentro de una estructura, es decir, los conceptos de matemática avanzada llevan un alto grado de complejidad y solamente pueden ser comprendido dentro de una red total de otros conceptos, por ejemplo, los estudiantes no pueden entender que significa una ecuación diferencial a menos que tengan bien entendido el concepto de diferenciación, no pueden captar las ideas tras los métodos de solución fuera de entender la integración vinculada a ideas visuales y numéricas (Cantoral, 1996).

Entonces, el aprendizaje entraña una especie de metamorfosis, una transformación del estudiante. Pero, ¿cómo ocurre esta metamorfosis del estudiante?, ¿cómo modifica el estudiante la naturaleza original?, ¿cómo injerta lo nuevo con lo viejo? La transformación del aprendizaje es un lugar común de la vida y, sin embargo, teóricamente se expresa en el proceso de transmisión de la ignorancia al conocimiento. El aprendizaje se convierte realización de lo que existía en potencia desde su concepción. Quizá sea necesaria el ambiente de la escuela para facilitar la realización de esta capacidad en potencia, pero lo que debemos recordar es que cualquier novedad en el proceso proviene de la naturaleza del estudiante, no del medio ambiente. Así, el aprendizaje es un desenvolvimiento de lo que estaba contenido ya originalmente, es algo que se desarrolla, una especie de crecimiento. La epistemología genética ha puesto en evidencia que las nociones que el estudiante adquiere pasan por un complejo proceso de construcción y, por lo tanto no puede ser capturado, es decir, que el conocimiento matemático no puede ser aprehendido por simple transmisión de información. Aparece así, el propósito de que el estudiante construya su conocimiento a partir de la reflexión sobre la organización de su misma actividad y para ello es necesario producir las condiciones para que él los construya, es decir, situaciones que lleven a una génesis escolar del conocimiento. A partir de lo anterior, es necesario diseñar situaciones que permitan la construcción del conocimiento matemático y cuyo objetivo es llegar a conocer lo que sucede en el aula escolar que, ante una situación determinada, se pueda garantizar su reproductibilidad y eficacia bajo controles bien precisos, estas situaciones son llamadas situaciones didácticas en el sentido de Brousseau[2]

Sobre las actividades realizadas

Participaron en el trabajo de investigación 20 estudiantes universitarios del segundo semestre de las Carreras de Ingeniería en Mecatrónica y Telemática de la Unidad Profesional Interdisciplinario en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas (UPIITA) del Instituto Politécnico Nacional. El grupo de estudiantes tenía como característica común el haber cursado, al momento de la experiencia, el curso de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales. Dos secuencias de actividades fueron desarrolladas durante un lapso de un mes, la primera llevada acabo en UPIITA con una duración de 1:45 minutos, la segunda realizada en el Laboratorio del Departamento de Matemática Educativa Área de Educación Superior (CINVESTAV) con una duración de 4 horas consecutivas, con un intermedio de 15 minutos. Contrastamos la realización de acuerdo a los tipos de argumentos, de las principales dificultades y obstáculos que se presentan en el aprendizaje y buscamos lo que el alumno rechaza, acepta o confirma.

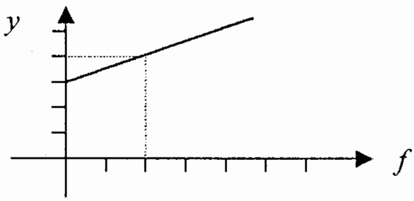
Situación 1: En cada uno de los incisos se da información sobre una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta ¿Puedes con dicha información afirmar que la partícula se mueve con aceleración constante? Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es la aceleración constante con que se está moviendo dicha partícula?

a) En la siguiente tabla se dan algunas velocidades de la partícula en determinados tiempos.

T	0	1	2	3	4
V	1	4	9	7	12

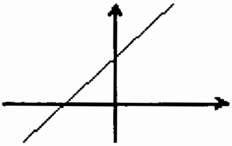
b) La ecuación de velocidad de la partícula está dada por: $v = (8 - 5t)\ m/seg$.

c) Se tiene la gráfica de la ecuación velocidad de una partícula.



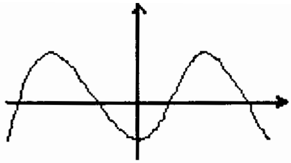
Situación 2: Se ha observado que en temas correspondientes a derivadas, se imparte de forma tradicionalista, esto es, dada una función explícita se procede a encontrar la derivada, así mismo la gráfica de la misma, pero que pasaría si ahora presentamos la gráfica de una función e intentamos esbozar la gráfica de las derivadas, tal es el caso de la siguiente situación: aparecen las gráficas de tres funciones, analícense cuidadosamente y esboce las gráficas de sus funciones derivadas.

[2]Definida como un conjunto de relaciones establecidas explícitas y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución



Gráfica (A)

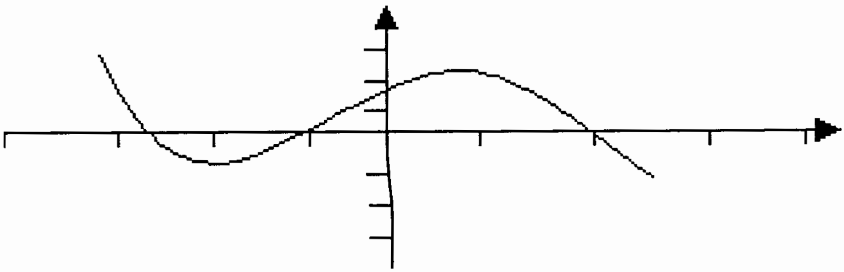
Gráfica (B)



Gráfica (C)

En esta situación, los estudiantes pensaron un prototipo de función que representara la gráfica en cuestión, derivarla y graficarla. Para el primer caso plantearon una función del tipo $y = m(x + b)$ o $y = ax + b$, en la segunda gráfica $y = 3x$ + algo (donde ese algo representa una función cuadrática) y en la tercera gráfica una función trigonométrica, sea este seno o coseno, pero también una función polinómica de tercer grado argumentando que la gráfica mostrada cruza por tres puntos en el eje .

Situación 3: Otra de las cuestiones que no se presentan en los temas de ecuaciones diferenciales y que requieren de un tratamiento didáctico es el problema siguiente: sí la siguiente gráfica representa la solución de una ecuación diferencial, ¿Cuál es la ecuación diferencial que se le asocia? Argumenta tu respuesta



Esta es una situación en la que los estudiantes deben manejar simultáneamente información de la función y primera derivada. Algunas de las estrategias utilizadas por los estudiantes es asignarle a la gráfica una función que la represente para posteriormente derivarla y expresarla como una ecuación diferencial:

Caso1: Consideraron a la gráfica como una unión de parábolas en los intervalos $(-\infty, -1],[-1,\infty)$ donde para el primer intervalo asignan la función $f(x) = 2x^2 + 4$.

Caso2: Asignaron una función polinómica de tercer grado completa e incompleta $y = 0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$ y $y = x^3$ respectivamente, argumentando que la gráfica cruzaría por tres puntos en el eje x

Caso 3: Asignaron funciones trigonométricas tales como $y' + y = 0, y'' + y = 0$, ya que recordaron al momento que una de ellas, la solución era expresada en términos de seno o coseno cuya gráfica se asemeja a la presentada en la figura.

Otros: Realizaron un análisis a la gráfica mostrada, pendiente positiva, pendiente negativa, concavidad.

Como los estudiantes se encuentran "armados" con una serie de conceptos, concepciones, conocimientos adquiridos anteriormente, provoca que no cuenten con una estrategia inicial seguro, por lo que se ven inmersos en una dialéctica de ensayo y error que les ofrece mucha información, por ejemplo el momento de relacionar la gráfica con una función trigonométrica (por la forma que ésta tiene).

Situación 4: Dentro del gran mundo de las ecuaciones diferenciales, podemos encontrar problemas, que en su mayoría, solo se busca la solución de la misma a través métodos o de aplicaciones, pero que sucedería si a un estudiante se le pregunta: ¿De qué tipo es si $y'' = y$? Entre las respuestas encontradas, se encuentran:

* Asignar a la función $y=f(x)$ una función explícita, como $y=sen\ x$ o $y=cosx$, ya que argumentan que al derivarlas n veces se obtiene el mismo resultado
* Asignar a la función $y=f(x)$ una función constante. Al respecto cabe aclarar que los estudiantes realizaron un debate con la cuestión de que sí tiene sentido derivar segunda vez, ya que la primera derivada es igual a cero.
* Asignar a la función $y=f(x)$ una función exponencial

Conclusiones

Partimos de la investigación epistemológica, de que sólo, hasta que se entienda las derivadas sucesivas, se entenderá o podrá construir un significado a las ecuaciones diferenciales. Es decir, las derivadas sucesivas podrán construirse en el pensamiento de los estudiantes cuando entiendan que en situaciones como el cambio de variable, como en la gráfica anterior aparece una articulación de las derivadas simultanea. La puesta en escena es sólo una parte de la construcción del conocimiento en el aula: aquella que ha sido modificada la presentación del contenido que se sugiere en el texto para transmitirlos. Pero el conocimiento presentado entra al espacio social de las comprensiones compartidas, donde se transforma con las intervenciones de los estudiantes quienes aportan nuevos matices y elementos. Conjeturamos que la resignificación de las ecuaciones diferenciales no se logra ya que el marco de referencia que se favorece en el medio áulico son las secuencias de iteraciones.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica. Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Benítez, L. (1993). *Significación de los objetos matemáticos centrado en las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. México.

Cantoral, R, & Farfán, R. (2000). *Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional: pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Desarrollo del pensamiento matemático*. Grupo editorial trillas, México.

Cantoral, R, &Farfán, R. (2001). *La sensibilidad a la contradicción: un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja.*

Departamento de Matemática Educativa. México.

Cantoral, R. (2000). *Teoría de situaciones didácticas. Desarrollo del pensamiento matemático*. Grupo editorial trillas, México.

Cantoral, R. (1996). *Pensamiento y Lenguaje Variacional*. Seminario de investigación del Área de Educación Superior. México, Cinvestav – IPN.

Chevallard Y, & Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje*. Editorial Biblioteca para la actualización del maestro. España.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.* . Aique. Buenos Aires, Argentina.

Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Euler, L. (1968-1770) *Institutiones Calculi Integralis*, Vol. II. St. Peterburgo [Academy Press].

Gonzalez, R. (2000). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. México

Hernández, A. (1995). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en la relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. México.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. México.

Rockwell, E., (1995). *La escuela cotidiana. De huellas, bardas y veredas: una historia cotidiana en la escuela*. Sección de obras de educación y pedagogía. Fondo de cultura económica. México.

El paso de la letra como objeto a la letra como número generalizado una experiencia de aula en el CED San Bernardino

Blanca María Peralta y Carmen Martínez
CED San Bernardino. CED Brasilia. Bogotá, Colombia.
bmpguacheta@hotmail.com camartin@uniandes.edu.co

Resumen

El propósito de este proyecto es facilitar el tránsito de los estudiantes desde la interpretación de la letra como objeto hasta la interpretación como número generalizado. El procedimiento seguido para el desarrollo de este proyecto fue el siguiente, se aplicó la prueba diagnóstica propuesta por Küchemann, a partir de los resultados de esta se hizo una clasificación haciendo un análisis global de la prueba y luego una mirada particular a cada uno de los ítems. Después de la clasificación se dispuso el diseño de talleres que permitieran superar algunas de las dificultades vistas a través de esta prueba; cada uno de los talleres podía tener una duración mayor de una clase o incluso una semana, al final de estos se sacaban conclusiones para evaluar la efectividad de los mismos. Las actividades, se basaron en encontrar patrones en una organización dada, con ello los estudiantes debían ilustrar la situación, responder unas preguntas guía y por último hallar una fórmula que les permitiera hallar la cantidad de objetos, en una posición o momento cualquiera.

Introducción

Dentro de las dificultades que se presentan en el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas escolares, se encuentra la incursión de los estudiantes en el álgebra y su lenguaje. Según estudios realizados por Brown et al (tomado de <u>El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar</u>) *"Los estudiantes de bachillerato parecen tener, en general, algún conocimiento de los conceptos básicos de la geometría y el álgebra. Sin embargo, los resultados de esta evaluación indican, como lo han mostrado otros resultados, que frecuentemente los estudiantes no son capaces de aplicar este conocimiento a situaciones de resolución de problemas y que tampoco parecen comprender muchas de las estructuras que están detrás de estos conceptos y habilidades"* Una consecuencia de esta situación es la imposibilidad que muestran los estudiantes para representar situaciones usando un lenguaje diferente al cotidiano, así mismo encontrar posibles hipótesis que expliquen dicha situación ó que de alguna manera logre asociar con su entorno. Por lo tanto es de vital importancia que el alumno se apropie de estructuras algebraicas que le permitan ampliar su visión de las matemáticas y por tanto, que le faciliten desarrollar habilidades y destrezas cuando se enfrenten a la solución de problemas que lo involucren. Dentro de estas estructuras se halla la interpretación de la letra, es importante que se haya realizado el paso desde la letra como objeto hasta la letra como variable para que la modelización de situaciones cotidianas sea más sencilla.

Objetivos

Objetivo General:

- Plantear y desarrollar una propuesta para facilitar el paso de los estudiantes desde la letra no usada hasta la letra como número generalizado.

Objetivos Específicos:

- Proponer y desarrollar actividades que le permitan al estudiante apropiarse y hacer uso de otros significados de la igualdad.
- Ampliar el universo numérico que poseen los estudiantes.
- Hacer evidente la necesidad del uso de signos de agrupación en expresiones algebraicas.
- Proponer y desarrollar actividades que le ayuden al estudiante a usar la letra como objeto, como incógnita y como número generalizado.

Descripción

3.1 Antecedentes. La nueva Ley de Educación de nuestro país pretende mejorar la educación matemática, tanto a nivel de enseñanza como de aprendizaje. Esto ha generado la conformación de grupos de investigación interesados en estudiar las características de la población educativa e implementar metodologías acordes a ellas, aunque inspiradas en las tendencias educativas actuales internacionales. En el año 1998 el Ministerio de Educación Nacional expide los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) que proponen el desarrollo del pensamiento numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio a través de procesos de resolución de problemas, comunicación, representación y conexión con otras áreas del conocimiento. Esta propuesta implica su implementación durante toda la etapa escolar, sin embargo los currículos del país insisten en permanecer diseñados como lo obligaba una ley en 1975, la cual colocaba el álgebra en el octavo grado y solo hasta ese grado se estudiaban temas concernientes a ella; esto ha hecho que se descuide el proceso de desarrollo de pensamiento del estudiante y se presenten tantas dificultades en la enseñanza como en el aprendizaje del álgebra escolar.

3.3 Descripción de la población

El proyecto de aula se realizó en el C.E.D San Bernardino J.T. , ubicado en la Localidad 7(Bosa), sur de Bogotá. En los grados décimo y noveno de educación básica secundaria, con 112 estudiantes cuyas edades oscilan entre los 14 y los 19 años, pertenecientes a los estratos socioeconómicos 1 y 2. Algunos provienen de hogares desintegrados y en algunos casos trabajan para ayudar con el sostenimiento económico de sus familias o ayudan con las actividades domésticas o con el cuidado de sus hermanos menores

3.2 Marco Teórico

El lenguaje algebraico

El cálculo algebraico nace como generalización del modelo numérico, para trabajar con un modelo algebraico, debemos ser hábiles en cálculos con variables.

Todo cálculo algebraico se construye a partir de las cinco propiedades características del sistema numérico: la conmutativa y asociativa de la suma y el producto, y la distributiva del producto respecto de la suma.

- *El signo de igualdad*

En aritmética el signo = se entiende como una acción física, sirve para conectar un problema con su resultado numérico, otras veces permite relacionar dos procesos que dan el mismo resultado 3x4=4+4+4 y en algunos casos relaciona las secuencia de pasos intermedios de un proceso que conduce a un mismo resultado 3x(5-2)+4=3x3+4=13 donde cada eslabón de la cadena de igualdades, expresa una simplificación o cambio de forma de su predecesor, es decir, una reducción.

En álgebra el sentido de igualdad aritmética se conserva cuando se trabaja con tautologías algebraicas, pero no en las ecuaciones.

- *La sustitución formal*

La sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos tales como:

- Generalización: cuando términos numéricos son reemplazados por variables o modelos concretos son extendidos
- Simplificación, cuando en una expresión dada, expresiones parciales son reemplazadas por variables
- Eliminación, cuando variables implicadas en una sustitución son suprimidas, por ejemplo en los sistemas de ecuaciones.
- Complicación estructural, cuando en una expresión las variables son reemplazadas por expresiones dadas
- Particularización, cuando las variables son reemplazadas por números para verificar ciertas expresiones

- *El uso y significado de las letras*

Clasificación de la letra según Kuchemann (Tomado de La transición aritmética álgebra):

a) Letras evaluadas.

A las letras se les asigna un valor numérico desde el principio. Por ejemplo cuál es el valor de 5 a+*3* cuando *a=1. a=2, a=3.*

b) Letras ignoradas.

Los alumnos ignoran las letras, o a lo más reconocen su existencia, pero no le asignan ningún significado. ¿Sí *a+b=43 a+b+2=?*

c) Letras como objeto.

Son vistas como un objeto concreto (frutas, lados de un polígono, etc.), eliminando así el significado abstracto de las letras por algo más concreto y real.

El uso de las letras como objeto reduce el significado abstracto de las letras u objetos, pero esta reducción ocurre con frecuencia donde no es adecuada. Esto sucede especialmente en problemas donde se involucran objetos (lápices, peras, etc.) y es esencial distinguir entre los objetos mismos y su cantidad.

d) Letras como incógnitas

Son consideradas como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente.

e) Letras generalizando números.

Consideradas como una representación, o al menos son capaces de deducirlo, de varios valores numéricos antes que de uno exactamente.

f) Letras como variables.

Son consideradas como una representación de un conjunto de valores no especificados, y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

El concepto de variable implica claramente el conocimiento de la incógnita y de sus posibles valores pero esto está más allá de la comprensión de las letras como magnitudes y como generalización de números.

Los Estadios de Desarrollo y las Matemáticas

1. Preoperatorio (4-6 años).

2. Temprano de operaciones concretas (7-9 años).

Capacidad para trabajar significativamente con operaciones simples sobre elementos concretos, pero los elementos y las operaciones están relacionadas con objetos físicos y situaciones realizadas experimentalmente. La clausura es fundamental y tener un resultado único para que la operación tenga sentido.

3. Estadio 2 final de operaciones concretas (10-12 años).

Capacidad para trabajar con cierto número de operaciones en secuencias si los números son pequeños y con números grandes si forman parte de operaciones simples. Comparan expresiones sencillas como $5+8+7$ con $5+8+3$.

4. Estadio 3 de generalización concreta (13-15 años).

Se usa cierto número de operaciones, no asequibles físicamente, en la medida en que tienen una garantía de que los elementos y sus combinaciones pueden clausurarse en cualquier momento y proporcionan un resultado único que puede ser aplicado a la realidad física. Utilizan elementos generalizados (cifras grandes y letras en sustitución de números) y trabajan con fórmulas siempre que se les capacite para tener en cuenta que cada letra representa a un único número y que cada operación binaria puede clausurarse en cualquier momento.

5. Estadio 4 de operaciones formales (16 años en adelante).

No hay necesidad de relaciones, elementos, operaciones o la combinación de ellos con modelos análogos físicos, y se puede tomar como realidad un sistema abstracto bien determinado con sus definiciones, relaciones y reglas, no aborda la clausura hasta que ha agotado todas las posibilidades.

Trabajan con letras que representan números o variables que empleen una operación bien determinada. Puede trabajar con variables como tales, porque puede sacar una generalización sin necesidad de agotar todas las posibilidades.

En síntesis el pensamiento operacional concreto es caracterizado por la necesidad de considerar y manipular materiales físicos, implica solamente, operaciones que representen clausura, es decir, una expresión matemática será significativa si es posible concluir con un único número.

3.3 Metodología

Para el desarrollo de este proyecto se tomaron en cuenta los siguientes pasos, primero, se aplicó la prueba diagnóstica propuesta por Küchemann. Esta prueba esta dividida en dos secciones, la primera conformada por siete preguntas y la segunda por seis. Las preguntas involucran conceptos numéricos y geométricos. En estas secciones presenta preguntas que indagan por la interpretación de la letra, desde la letra ignorada hasta la letra como número generalizado.

Segundo, a partir de los resultados de esta se hizo una clasificación de los estudiantes, haciendo un análisis global de la prueba y luego una mirada particular a cada una de las repuestas de los itemes. Tercero, después de la clasificación se dispuso el diseño de talleres, dirigido a los estudiantes, de tal manera que les permitiera superar algunas de las dificultades vistas a través de esta prueba. Las actividades, fueron de diversas características, en su orden se trabajó el significado de igualdad, la ampliación del universo numérico y la generación de patrones. En todas las actividades estaba inmerso el lenguaje algebraico como medio para representar la situación presentada, la representación gráfica de la situación y de la expresión algebraica (pues no siempre la expresión algebraica era representante de la situación). En general las clases se desarrollaron así: los estudiantes se organizaban por grupos de tres personas, se presentaba a los estudiantes la situación problema junto con las preguntas, se les daba un tiempo determinado para su solución al cabo de la cual se discutían los resultados entre todos los integrantes del curso.

La primera actividad llevaba el nombre de *el juego de las igualdades*, con el se pretendía propiciar un acercamiento al trabajo con la igualdad, estimular el cálculo mental y el trabajo con calculadora, ampliar el universo numérico que los estudiantes manejan y evidenciar la necesidad del uso de símbolos de agrupación y propiedades de las operaciones. Para esta actividad se escribían ciertos números en el tablero, los cuales debían ser hallados usando algunas o todas las operaciones aritméticas y una clase de números determinados con anterioridad, podrían ser las naturales, los enteros, los racionales o los reales. A pesar de parecer bastante sencilla esta actividad tardó un mes y medio aproximadamente. Se esperaba que con el paso del tiempo y el incremento en el nivel de dificultad de los problemas, los estudiantes fueran más ágiles en cálculos mentales, de tal manera que fuera mas sencillo el uso de la calculadora, con esto el estudiante debía anticipar ciertos errores o dificultades que se podrían presentar de acuerdo con la naturaleza de los números. La segunda actividad se tituló *reconocimiento de patrones*, en esta se pretendía, Identificar patrones de regularidad en problemas dados, escribir patrones de regularidad usando lenguaje algebraico, identificar situaciones en las cuales la letra es vista como objeto, representar patrones de regularidad usando diversas formas (tabular, simbólica, gráfica, concreta). Para estas clases se presentó un problema de organización de un campeonato de fútbol en el colegio, aquí se pretendía que el estudiante pudiese hallar una expresión algebraica que le pudiera representar, la cantidad de equipos, los partidos por equipos y los partidos que en total se jugarían en el campeonato. En esta parte hubo una tardanza de mes y medio aproximadamente La tercera actividad se denominó *a contar cuadritos*, consistía en la presentación de una secuencia de cuadritos. En gran parte se parecía a la anterior pues la finalidad era hallar una expresión algebraica para representar la situación y resolver exitosamente unas preguntas. De nuevo la tardanza en esta situación fue de dos y medio meses. En total el proyecto tuvo una tardanza de un año.

En términos generales las teorías de Piaget y Kieran presentan ciertos estadios o momentos del desarrollo de los estudiantes, se suponía que por la edad que la mayoría de los estudiantes tenía algunas de esos estadios deberían haberse superado. Lo mínimo que se esperaba era la ampliación del universo numérico, la percepción de otro sentido de la igualdad y el reconocimiento de patrones.

4. Análisis y discusión de resultados

Hasta el momento los resultados de esta propuesta son: ampliación del universo numérico, lo cual se consiguió por medio del juego de las igualdades, este juego también les permitió a los estudiantes diferenciar los decimales infinitos periódicos de los infinitos no periódicos, reconocer las fracciones como división indicada, de igual manera diferenciarla de la división como operación, utilizar adecuadamente los signos de agrupación, desarrollar un método para operar números usando calculadora, ver la igualdad como una relación de equivalencia, empezar una distinción entre la letra como objeto y la letra como incógnita, utilizar diversas formas de representación para un problema (tabular, gráfica, pictórica, simbólica), realizar traducciones entre ellas. Estos hallazgos fueron evidenciados mediante la observación directa de la actitud, preguntas, y reacciones de los estudiantes en el desarrollo de la clase. Dos de los tres cursos que participaron hallaron las regularidades, hicieron varias representaciones, tabular, gráfica, algebraica, pictórica y traducciones entre ellas, sin embargo no hay una razón muy clara de la razón por la cual el otro curso no ha conseguido progresar en este sentido.

El trabajo en equipo fomentó la participación, la discusión, el análisis, el respeto por la opinión del otro, la tolerancia, la solidaridad y el sentido de la responsabilidad.

5. Conclusiones

El hecho de buscar nuevas estrategias metodológicas hace evidente la preocupación del docente por mejorar su quehacer y en esa medida motivar al estudiante para un mayor y mejor desempeño dentro y fuera de clase.

Para tener éxito en la aplicación de las actividades propuestas es necesario contar con bastante tiempo para que el maestro estudie, planee sus clases adecuadamente y haga un correcto análisis de los resultados encontrados que le permitan colaborar mas eficientemente en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y en esa misma medida evaluar su propio desempeño.

Referencias bibliográficas

Grupo Pretexto. (1999). *La transición aritmética álgebra*. Bogotá: Editorial GAIA

Socas, M. Matías, M. Palarea, M. Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

Kieran, C. (1994). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. (Vilma María Mesa, trad). Bogotá: Una empresa docente.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de educación.

NCTM (1995). *Estándares curriculares de matemáticas*.

Pensamiento Algebraico

La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria

José Antonio Juárez López

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

jajul32@hotmail.com

Resumen

Gran parte de los estudios realizados en torno al concepto de variable y sus diferentes usos se ha centrado en estudiantes de secundaria, bachillerato y primer semestre universitario; en todos ellos se han detectado divesrsas dificultades para la comprensión y manejo adecuado de tal concepto. El concepto de variable es fundamental no sólo para el aprendizaje sino también para la enseñanza del álgebra. Como marco teórico para esta investigación se utilizó la descomposición que Ursini y Trigueros (1998) hacen del concepto de variable. En ésta se consideran una serie de aspectos que incluyen la capacidad de interpretación, simbolización y manipulación de cada uno de los 3 usos de la variable que se consideran, a saber: variable como incógnita específica, variable como número general y variables en relación funcional. Este resumen se refiere a los resultados de una investigación llevada a cabo con 74 profesores de matemáticas de secundaria a los que se les aplicó un cuestionario de 65 preguntas abiertas, dicho instrumento ya había sido diseñado y validado para realizar un estudio con estudiantes universitarios. Posteriormente se realizaron entrevistas a 6 profesores, tomando como base las respuestas dadas en el cuestionario. Se encontró que algunas de estas dificultades son similares a las que presentan los estudiantes.

Introducción

La presente investigación tiene como propósito analizar la comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria. Asimismo se contempla detectar cuáles son las dificultades más comunes que presentan los profesores al tratar con los diferentes aspectos de la variable en el contexto del álgebra elemental.

Gran parte de los estudios que se han realizado en torno a la comprensión del concepto de variable está centrada en estudiantes de secundaria (Booth, 1988; Stacey y MacGregor, 1996; Warren, 1999). También se conocen resultados de investigaciones realizadas con estudiantes de bachillerato (López, 1996) e incluso, se ha estudiado la evolución que tiene la comprensión de dicho concepto a lo largo de las etapas escolares que van desde el primer grado de secundaria hasta el primer semestre universitario (Lozano, 1998; Trigueros y Ursini, 1999; Trigueros, Ursini y Lozano, 2000). En otro estudio realizado con estudiantes universitarios que iniciaban el primer semestre (Ursini y Trigueros, 1998) se encontró que el aprendizaje del concepto de variable es poco significativo, lo que se reflejó en las dificultades que presentaron los estudiantes para resolver problemas que involucraban dicho concepto.

Sin embargo, los estudios realizados hasta el momento sobre la comprensión del concepto de variable no han sido suficientes para poder dilucidar la problemática de su aprendizaje dentro del álgebra elemental en la que, sin duda, este concepto juega un papel preponderante. En particular, no hay hasta ahora estudios que indaguen las posibles dificultades que tienen los profesores de matemáticas de secundaria con el concepto de variable. Este es justamente el objetivo del presente estudio en el cual nos proponemos investigar la comprensión que tiene el profesor de matemáticas de secundaria en torno al concepto de variable y sus diferentes usos dentro del álgebra elemental.

Antecedentes y marco teórico

Tal como mencionan Schoenfeld y Arcavi (1988) el tratar de definir el término "variable" con una sola palabra nos conduce a usar palabras como: símbolo, parámetro, argumento, espacio vacío, entre otras, de ahí que consideren que este término tiene diversos significados que dependen del contexto en el que aparece. Otros investigadores también han subrayado la importancia que tiene el contexto en el papel que juegan las letras cuando los estudiantes usan el álgebra elemental (Philipp, 1992; Wagner, 1981). Esta última autora, por ejemplo, sugiere que así como las palabras del lenguaje verbal, los símbolos de variables matemáticas adquieren significado cuando aparecen en algún contexto y tienen algún referente. Así como en el lenguaje verbal, el símbolo y su referente determinan el papel semántico de la variable, mientras que el símbolo y su contexto determinan el papel sintáctico de la variable; esto quiere decir que el contexto y el referente determinan el papel matemático de la variable. Wagner (1983), por otro lado, comenta la complejidad que tiene el uso de literales así como la dificultad que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a ellos.

El concepto de variable es fundamental no sólo para el aprendizaje sino también para la enseñanza del álgebra. En el salón de clase se suele presentar como si pudiera entenderse fácilmente llegando, incluso, a manejarlo con cierta naturalidad, sin valorar la complejidad del concepto ni los significados y usos que pueden tener las letras. En este sentido, Rosnick (1981) realizó un estudio acerca de las concepciones erróneas sobre el uso de letras que presentaron algunos estudiantes de nivel superior y encontró que cuando se les presentan relaciones funcionales en forma analítica, tienden a confundirse entre la variable independiente y la variable dependiente. El concepto de variable es multifacético e incluye diversos aspectos. Usiskin (1988), por ejemplo, pone de manifiesto cuatro usos diferentes de la variable y los asocia a cuatro distintas concepciones del álgebra haciendo énfasis en la relación de éstas con los propósitos de la enseñanza del álgebra elemental. Dichos usos aparecen en la tabla siguiente:

CONCEPCIÓN DEL ÁLGEBRA	USO DE LA VARIABLE
Aritmética generalizada	Generalizadores de patrones
Procedimientos para resolver problemas	Incógnitas, constantes
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos, parámetros
Estudio de estructuras	Marcas arbitrarias en el papel

Tabla 1 (Usiskin, 1988, p. 17)

Por otra parte, Ursini (1994) considera que en el álgebra elemental aparecen esencialmente 3 usos de la variable: incógnita específica, número general y en relación funcional. Señala también que un usuario competente del álgebra es capaz de interpretar la variable de modos distintos dependiendo del problema donde aparece. Esto significa que, por ejemplo, a pesar de que las siguientes expresiones involucran el mismo símbolo literal:

$$(x + 2)(x + 3) \qquad\qquad (x + 2) + (x + 3) = 24$$

el uso que se hace de él en cada una es distinto, pues mientras en la primera expresión la letra representa un número general, en la segunda representa un valor específico y están dadas las condiciones para determinar dicho valor. Además, la misma autora señala que un usuario competente debe ser capaz de manipular las variables simbólicas sin necesidad de conocer su valor eventual. Esto quiere decir, por ejemplo, que debe poder simplificar una expresión algebraica como:

$$(2xy + 3x) - (4xy - 2)$$

También debe ser capaz de trabajar con la idea de correspondencia y variación cuando las variables se encuentran en una relación funcional. Por ejemplo, debe ser capaz de resolver el siguiente problema:

Dada y = 3x + 2, encuentra el valor de y cuando x toma valores en el intervalo –2 x10

Un usuario competente debe poder también identificar la incógnita y determinar su valor específico, por ejemplo, en una ecuación:

Determinar el valor de *x* en la ecuación $3(x + 2) = 2(x + 1)$

Existen también importantes resultados de investigaciones sobre la manera en que los alumnos interpretan los símbolos literales. Así Küchemann (1980) analizó las respuestas que más de 3000 estudiantes entre 13 y 15 años dieron a un cuestionario que implicaba el uso de los símbolo literales. Para contestar el cuestionario los alumnos debían interpretar y manipular expresiones algebraicas. Küchemann identificó seis maneras diferentes de interpretar los símbolos literales:

1) **Letra evaluada**: A la letra se le asigna un valor numérico.
2) **Letra no utilizada**: La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado.
3) **Letra como objeto**: Se considera la letra como una abreviatura del nombre de un objeto o como a un objeto en sí.
4) **Letra como incógnita específica**: La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.
5) **Letra como número generalizado**: Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores.
6) **Letra como variable:** Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

De acuerdo con este autor, estos resultados revelan esencialmente dos niveles de comprensión de los alumnos: el primero abarca las tres primeras categorías y refleja un bajo nivel de respuesta mientras que las tres categorías restantes indican que el alumno se está acercando al álgebra. Aunque este autor propone un orden de dificultad creciente para las 6 categorías encontradas, Ursini (1994) considera que esto no implica que tal orden sea recomendable para la enseñanza pues los distintos usos de la variable pueden ser enseñados en diferentes niveles de complejidad.

Como marco teórico para la presente investigación, se utilizó la descomposición que Ursini y Trigueros (1998) hacen del concepto de variable. En esta descomposición se consideran una serie de aspectos que incluyen la capacidad de interpretación, simbolización y manipulación de cada uno de los 3 usos de la variable considerados, a saber: variable como incógnita específica, variable como número general y variables en relación funcional.

La descomposición del concepto de variable usada como marco teórico para esta investigación aparece de manera esquemática a continuación:

Variable como incógnita

Se considerará que un manejo adecuado de la variable como incógnita implica:

- reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;
- interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;
- sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;
- determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;
- simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y usarlas para plantear ecuaciones.

Variable como número general

Se considera que un manejo adecuado de la variable como número general implica:

- reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas
- interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado que puede asumir cualquier valor;
- deducir reglas generales y métodos generales distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en secuencias y familias de problemas;
- manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica;
- simbolizar oraciones generales, reglas y métodos.

Variables en relación funcional.

Se considera que un manejo adecuado de las variables en relación funcional implica:

- reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;

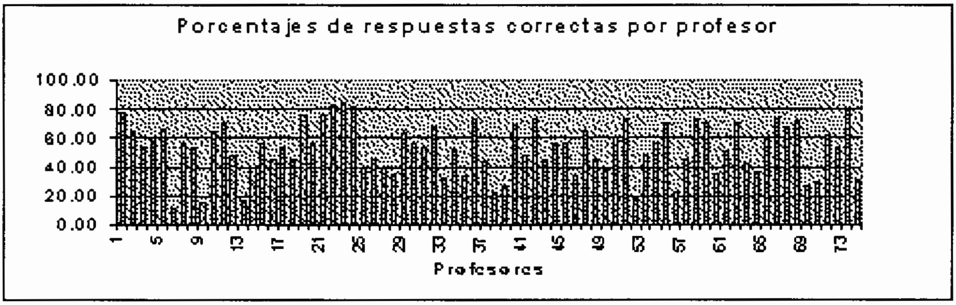
- ❖ determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;
- ❖ determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;
- ❖ reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;
- ❖ determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;
- ❖ simbolizar una relación funcional basada en el análisis de los datos de un problema.

Metodología

Para llevar a cabo la presente investigación se utilizó una metodología que combina un acercamiento cuantitativo con un acercamiento cualitativo. Inicialmente se aplicó un cuestionario de 65 preguntas abiertas a una población de 74 profesores de matemáticas de secundaria, tanto en el D. F. como en la ciudad de Puebla. Posteriormente se realizaron entrevistas para profundizar sobre la comprensión y las dificultades de los maestros en torno a este concepto, tomando como base las respuestas dadas al cuestionario.

Análisis cuantitativo de las respuestas

En la siguiente gráfica podemos apreciar que de los 74 profesores sólo 3 obtuvieron más del 80% de respuestas correctas; 23 obtuvieron entre el 60% y el 80% de aciertos, mientrasque 28 obtuvieron entre el 40% y el 60%; 16 profesores alcanzaron entre el 20% y el 40% de aciertos; y sólo 4 profesores no alcanzaron ni el 20% de respuestas correctas. Resalta también el hecho de que ningún profesor pudo contestar correctamente todas las preguntas. Estos resultados muestran que sólo un 35% de los profesores contestaron correctamente la mayor parte de las preguntas del cuestionario.



Análisis e interpretación de las entrevistas

En este apartado se muestran algunos de los resultados del análisis realizado a las entrevistas hechas a seis de los profesores que fueron seleccionados previamente. Aparece aquí sólo una pregunta donde se pudo apreciar algunas de las dificultades de los profesores para contestarla.

Pregunta 4.

"En este ejercicio, solamente escribe una fórmula. NO CALCULES el número. Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7."

Para contestar esta pregunta se requiere que el profesor traduzca al lenguaje algebraico una oración y sea capaz de simbolizar el número general así como de operar con él. Dicha pregunta ha sido motivo de análisis en otros trabajos (Ursini y Trigueros, 1998; Lozano, 1998). La respuesta incorrecta típica que dan los profesores para esta cuestión es: en donde se observa el uso de dos variables ligadas mediante el signo igual, lo que establece una relación funcional. Resalta el hecho de que este tipo de respuesta se encontró con alumnos de secundaria, de bachillerato y estudiantes universitarios, (ver Lozano, 1998; López, 1996 y Ursini y Trigueros, 1998). Cabe mencionar que 27 profesores dieron esta respuesta lo que coincide con las respuestas dadas por cuatro de los seis profesores que fueron entrevistados. Lo que resalta más en cuanto a las dificultades para contestar esta pregunta es el hecho de que los profesores entrevistados no conciben la expresión ***x/5*** como un objeto con el cual se puede operar, de ahí que lo relacionen con otra variable a través del signo igual. Parece ser que la palabra resultado los induce a escribir el signo de igualdad, tal como lo menciona el siguiente profesor que denominaremos S9 (de aquí en adelante se identificará a cada profesor con una S seguida del número que se le asignó a cada profesor desde el inicio del estudio).

6. E: "¿Por qué dice que, necesariamente tiene que hallar un resultado?"

7. S9: "Porque así me lo está expresando. Aquí dice: un número desconocido dividido por 5 y el resultado (*enfatiza*) sumado a 7, es lo que yo entiendo que tengo que encontrar un resultado y le tengo que sumar 7."

Esta tendencia también la podemos observar con otro profesor:

29. E: "Bueno ¿para usted por qué es necesario poner el signo igual, o sea por qué tiene que aparecer?"

S28: "Es quizá la costumbre puesto que aquí tenemos la palabra resultado, suponemos siempre que se trata de algo "igual a", quizás ya es algo...un esquema ¿no?, una reacción automática, al escuchar "resultado" suponemos que se trata ya de una igualdad, de un valor que ya conocemos."

Conclusiones

Los resultados de esta investigación sugieren que los profesores de matemáticas de secundaria no tienen un buen manejo de los tres usos de la variable estudiados. Si bien se observó que son capaces de reconocer el papel de la variable en expresiones y problemas simples, un aumento leve en la complejidad de los mismos provoca generalizaciones inadecuadas y la tendencia a buscar soluciones memorizadas o a emplear procedimientos aritméticos. Gran parte de los estudios que se han realizado hasta ahora pusieron de manifiesto las diversas dificultades que tienen los estudiantes cuando trabajan con el álgebra. Lo anterior sugiere que dichas dificultades podrían ser causadas por la escasa comprensión que tiene el profesor de los diferentes aspectos de la variable y que al momento de enseñar los contenidos esta misma incomprensión es transmitida a los alumnos sin que el profesor sea consciente de ello.

Referencias bibliográficas

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. *The Ideas of Algebra, K-12.* NCTM, pp. 20 – 32.

Küchemann D. (1980). The Understanding of Generalized Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children, *PhD Thesis, University of London.*

López A.L. (1996). *Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos de nivel medio superior*. Tesis de Maestría. UAQ. México.

Lozano D. (1998). El concepto de variable: evolución a lo largo de la instrucción matemática. *Tesis de Licenciatura. ITAM. México.*

Philipp R. (1992). The Many Uses of Algebraic Variables, Mathematics Teacher 85 *(October): 557 – 61.*

Rosnick P. (1981). Some Misconceptions Concerning the Concept of Variable, *Mathematics Teacher 74* (September): 418 – 20.

Schoenfeld A. H. y Arcavi A. (1988). On the Meaning of Variable, Mathematics Teacher 81 *(September): 420 – 27.*

Stacey K. y MacGregor M. (1996). Origins of Students' Interpretations of Algebraic Notation, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (Eds.), Proceedings of the XX PME Inrenational Conference, *Valencia, España, p. 3 – 297, 3 – 304.*

Trigueros M. y Ursini S. (1999). Does the Understanding of Variable Evolve through schooling?, en Zaslavsky, O. (Ed.), *Proceedings of the XXIII PME International Conference*, Haifa, Israel, p. 4 – 273, 4 – 280.

Trigueros M., Ursini S. y Lozano D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. Educación Matemática. *México, Grupo Editorial Iberoamérica, 12, 2, ag. pp. 27-48.*

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. Educación Matemática. *México, Grupo Editorial Iberoamérica, 6, 3, dic. pp. 90-108.*

Ursini S. y Trigueros M. (1998). *Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable.* En Hitt, F. (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 445-463.

Usiskin Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. *The Ideas of Algebra, K-12.* NCTM, pp. 8 – 19.

Wagner S. (1981). An Analytical Framework for Mathematical Variables, in *Proceedings of The V PME International Conference,* Grenoble, France, p. 165 – 170.

Wagner S. (1983). What are These Things Called Variables?, Mathematics Teacher 76 *(October): 474 – 79.*

Warren E. (1999). The Concept of a Variable; Gauging Students' Understanding, en Zaslavsky, O. (Ed.), Proceedings of the XXIII PME International Conference, *Haifa, Israel, p. 4 – 313, 4 – 320.*

Modelos Matemáticos

Métodos y resultados del aprendizaje de la investigación de operaciones hacia un desarrollo independiente

Rosario Garza Ríos e Ileana Pérez Vegara

Dpto. Matemática Aplicada, Fac. Ingeniería Industrial, ISPJAE

rosariog@ind.ispjae.edu.cu e ileper@ind.ispjae.edu.cu

Resumen

La impartición de la asignatura Investigación de Operaciones en la carrera de Ingeniería Industrial ha sufrido desde su introducción en Cuba en los años 60, variaciones tanto en su contenido como en el nombre de la misma. Conocida actualmente como Modelación Económica Matemática, en sus inicios incluía solamente dos asignaturas y no es hasta el diseño del Plan de Estudios " C ", que se decide dividirla en tres, por la importancia que han cobrado en el mundo estas técnicas en la gestión empresarial.
Es por esta razón que en el presente trabajo se analiza cómo la inclusión de la computación y de un fuerte trabajo independiente de los estudiantes en las asignaturas, permite alcanzar un mayor dominio de los contenidos y elevar la calidad en la impartición de la misma, obteniéndose como resultado un egresado con mayor capacidad para el análisis y solución de problemas de toma de decisiones en la gestión empresarial.

Introducción

Desde comienzos de la década del 70 se observa un creciente interés en el desarrollo y aplicación de las técnicas de optimización y de ayuda a la decisión; muchos reconocen que es éste el campo de la Investigación Operativa que crece con mayor velocidad, tanto en sus aplicaciones prácticas como en los resultados teóricos. Las razones que impulsan su desarrollo son numerosas: la necesidad de la optimización de los recursos, de realizar decisiones coherentes en condiciones de conflicto e incertidumbre, de modelar y asimilar la experiencia de expertos, de facilitar las decisiones en grupos y otras. La potencia de los medios de cómputo hace posible la creación de modelos matemáticos que cada vez en forma más compleja y rica reflejan los aspectos reales de la toma de decisiones; su bajo costo relativo los pone al alcance de vastos sectores. La racionalidad de las decisiones, ese ideal eterno de la conducta humana, es también cada vez menos lejana.

Las técnicas de la Investigación Operativa para el apoyo a la toma de decisiones juegan un papel creciente en la actividad práctica de la dirección económica (Anderson, 1999). En importantes centros universitarios del mundo desarrollado se forman hombres de negocio con conocimientos significativos en el campo de la ayuda a la decisión. El empresario (Hernández, 1990) puede además buscar el apoyo de un profesional que, a partir de una formación básica en ingeniería industrial, informática, economía o matemática, haya obtenido un dominio profundo del método científico, y conocimientos avanzados en la teoría y la práctica del análisis de la decisión, y de otros métodos modernos de la matemática aplicada, la inteligencia artificial y la informática, con capacidad para resolver problemas científico - técnicos y generar nuevo conocimiento a través de la investigación.

Es por esto, que la Facultad de Ingeniería Industrial del Instituto Superior Politécnico (Ingeniería Industrial, 1995, 1999), tiene entre sus objetivos la vinculación de los estudiantes de ingeniería industrial a las empresas, lo que coadyuvará a elevar el nivel practico - cognoscitivo del estudiante al tener que enfrentarse a los problemas de las empresas cubanas, teniendo que hacer uso de los conocimientos teóricos adquiridos en Investigación Operativa para ayudar en el proceso de toma de decisiones auxiliados del software adecuado.

En el presente trabajo se expone la experiencia y el desarrollo adquiridos en la impartición de los contenidos de las asignaturas de Modelación Matemática y su vinculación con los problemas que enfrentan las empresas cubanas en las condiciones actuales, haciendo énfasis en la Modelación Matemática II.

1. Mejoramiento del proceso enseñanza aprendizaje de la Investigación de Operaciones.

No es hasta la década de los 60 que comienza en Cuba la impartición de la Investigación de Operaciones dentro de la especialidad de Ingeniería Industrial, la cual inició e impulsó los estudios de estas técnicas; en ese entonces se impartían los contenidos referentes a (Hillier, 1997): Programación Lineal, sus extensiones y aplicaciones, Programación Dinámica, Teoría de Colas y Simulación. Esto fue perfeccionándose paulatinamente con el desarrollo científico alcanzado por el claustro de profesores que la imparten, las necesidades del país y el entorno internacional.

Entre 1973 y 1976 se produce un intenso trabajo de perfeccionamiento de la especialidad de ingeniería industrial obteniéndose el Plan de Estudios " A ", en el cual de acuerdo al reclamo de aquellos momentos era necesario elevar la vinculación de la teoría con la práctica, por lo que se dedicó una parte importante del tiempo a la formación laboral del estudiante, lo que permitió un mejor enfoque de las formas de enseñanzas.

En estos momentos se le da un vuelco a la enseñanza de la Matemática Aplicada dedicándose un total de 406 horas a la impartición de estos contenidos. A partir de entonces comienza un profundo cambio en el proceso enseñanza – aprendizaje, lo que se evidenció en el desarrollo del Plan de estudios " B ", el cual tuvo entre sus logros el desarrollo en el campo de la informática y la optimización de decisiones.

No obstante los esfuerzos realizados, aún era insuficiente el tiempo dedicado a la enseñanza de la Modelación Matemática, insuficiente el desarrollo de habilidades y hábitos y una limitada vinculación de estas técnicas con las condiciones reales de la industria y los servicios, lo que motivó la creación del Plan de estudios " C ", el cual fue diseñado para dar respuesta a las crecientes necesidades del desarrollo del país y las necesidades de elevar el nivel del egresado cubano en la especialidad de Ingeniería Industrial, reestructurándose las asignaturas de Modelación Matemática, lo que se muestra a continuación:

Antes del Plan de estudios C: Estas asignaturas formaban parte de una disciplina que incluía:

✓ Modelación Ec onómico Matemática I (MEM I): La misma se impartía en el primer semestre del cuarto año de la carrera de industrial e incluía: Programación Lineal y sus aplicaciones, extensiones de la PL: El problema de transporte, trasbordo y asignación y la optimización en redes, con métodos de solución.

- ✓ Modelación Económico Matemática II (MEM II): Esta asignatura se impartía en el segundo semestre del cuarto año, a continuación de la anterior, contando entre sus contenidos: Programación Dinámica, Teoría de Colas, Modelos de Inventario, Simulación, Lenguaje de Simulación, Diseño de Rutas de Distribución.

Con el Plan de Estudios C estas asignaturas pasan a formar parte de la disciplina Matemática Aplicada que incluye seis asignaturas: Probabilidades, Estadística I, Estadística II, Simulación, MEM I y MEM II

Por una parte, la disciplina ha estado muy ligada al desarrollo de las computadoras digitales, pues para poder aplicar métodos, generalmente iterativos, que caracterizan a la disciplina, es necesario el uso de dicho equipamiento; y por otra, existe una relación estrecha de las asignaturas de la disciplina, con otras asignaturas del perfil informático.

La disciplina tiene un carácter eminentemente práctico, aunque debe sustentarse sobre una base teórica que permita, ante el planteamiento de un problema, que el estudiante sea capaz de: identificar los datos necesarios, reconocer sus características, plantearlo, darle solución por un método adecuado y analizar los resultados obtenidos; estos problemas deben estar referidos a situaciones prácticas, preferiblemente vinculadas a la carrera.

Es fundamental en todas las asignaturas de la disciplina, que el estudiante asimile la forma eficiente de utilizar, aplicar el software existente y analizar los resultados obtenidos de la aplicación de dichos software, siendo este el enfoque principal que tiene la disciplina dentro de la carrera.

En este trabajo sólo haremos referencia, como se planteó anteriormente, a las asignaturas de Modelación Matemática, las cuales tienen asignadas en el Plan de Estudio vigente una cantidad de 210 horas repartidas de la siguiente forma: Simulación 64 horas, Modelos Matemáticos I 82 horas y Modelos Matemáticos II 64 horas.

El método de enseñanza que se utiliza actualmente tanto para la formación del futuro Ingeniero Industrial, como para la actividad de postgrado en las temáticas de Modelación Matemática incluye las siguientes actividades:

- Formación teórica de los contenidos.
- Desarrollo de casos prácticos donde se simulen las condiciones de las empresas cubanas.
- Realización de Proyectos de Cursos y tesis de grado en una organización productiva o de servicio.

En las actividades prácticas se hará énfasis fundamentalmente en la asimilación y aplicación del software existente a la solución de problemas, incluyendo el análisis de alternativas y resultados principalmente en trabajos de control extraclases discutidos en las microcomputadoras. Todo esto se corresponde con la necesidad de aumentar el trabajo independiente de los estudiantes, lo que redundará en un incremento del conocimiento y una mayor capacidad para enfrentarse a problemas reales.

Se fundamenta el trabajo en la necesidad de que los estudiantes de nivel superior no sólo reciban conocimientos sólidos en las asignaturas que correspondan a su especialidad, sino que sean capaces de vincular los mismos de forma creativa a la gestión empresarial, con el objetivo de que obtengan mejores resultados en la labor futura.

La asignatura **MEM II,** objeto de análisis en este trabajo es la última asignatura del ciclo, la cual forma parte del curriculum de 4to año de la especialidad de Ingeniería Industrial, y se imparte en el primer semestre. La misma está encaminada al planteamiento y solución de determinados tipos de problemas asociados con la toma de decisiones secuenciales, donde es fundamental el enfoque que se utilice en la solución de estos tipos de problemas, así como los métodos de solución que deben aplicarse, entre ellos los métodos heurísticos; también se incluyen en su contenido las técnicas de toma de decisiones en presencia de múltiples criterios, herramientas que se incorporan a la Modelación Matemática con el Plan de Estudios " C ". Además, en esta asignatura se debe dar a conocer la utilidad de los Decision Support Systems y sus posibilidades de aplicación como herramientas para la toma de decisiones.

Esta asignatura concibe dentro de su sistema de evaluación los Proyectos de Curso, los cuales serán ejecutados por grupos de 2 ó 3 estudiantes; en los mismos se realiza un diagnóstico de la empresa donde los estudiantes describen la situación actual de la misma, detectan deficiencias, proponen soluciones y definen qué técnica matemática se debe utilizar para darle solución al problema planteado; para ello utilizarán la metodología propuesta por: (Hillier, 1997), (Otero, 1990), (Lane, 1983), (Morales, 1984).

Dentro del conjunto de habilidades que deben adquirir los estudiantes del 4to año de la especialidad de Ingeniería Industrial se encuentran:

- Utilizar paquetes de software existentes acordes a la actividad desempeñada.
- Utilizar la modelación matemática en la solución de los problemas cuantificables acorde a la actividad asignada.
- Redactar informes técnicos que contengan soluciones propuestas y aplicadas.
- Valorar económicamente las soluciones a las medidas propuestas.

Para que el aprendizaje sea eficaz debemos crear en el estudiante la necesidad de aprender y propiciar un ambiente donde se motive esta necesidad (Blanco, 1994). En la incansable búsqueda de distintas alternativas de solución a este problema y con el objetivo de dar cumplimiento al sistema de habilidades diseñado y por tanto lograr obtener un egresado con mayor calificación, es que se propone mejorar la impartición de la asignatura con la introducción de la tecnología informática, la que se ha transformado en una herramienta importante en los procesos de aprendizaje, investigación y aplicación de las ciencias. Esto motivó planificar un mayor número de actividades prácticas, con el uso de la máquina computadora, dedicándose el 32% del total de horas de la asignatura a estas actividades docentes.

Las actividades programadas son:

- Conferencia en el aula especializada.
- Clase práctica en el laboratorio de máquinas computadoras, en la cual los estudiantes deben resolver un problema relativo al tema en cuestión, haciendo uso de los conocimientos hasta el momento adquiridos; cada estudiante tendrá una problemática a resolver y deberá entregar un informe donde plantee: los datos del problema, la técnica a utilizar, el software empleado y un análisis de los resultados a los que arribó.

Las últimas tres actividades docentes de la asignatura se dedicarán a la realización de un trabajo de control extraclases. Para llevar a cabo este trabajo los estudiantes harán uso de la metodología planteada anteriormente.

En la primera, cada estudiante recibirá una problemática a resolver, la misma vincula todos los conocimientos adquiridos en el ciclo, e incluye en algunos casos conocimientos adquiridos en las demás asignaturas del semestre, presenta cierta complejidad en la cual estará presente la aplicación de los conocimientos de más de una disciplina o técnica, según sea el caso, antes de poder llegar a la toma de decisiones final, deberá analizar los datos que se presentan, determinar de ellos cuáles son de interés para la solución del problema o cómo va a valorar cada uno de ellos.

La próxima actividad se dedicará a la solución del problema con la utilización de la máquina computadora y el software adecuado, y en la última actividad el estudiante expondrá sus criterios acerca de la solución del problema, como lo resolvió y cuáles fueron los resultados obtenidos por él, entregando además un informe que contenga todo lo anterior; esta última final será la que más influirá en la nota de la asignatura dado por que ella no tiene examen final, sólo actividades evaluativas parciales.

2. Resultados obtenidos

Para analizar los resultados tomando en cuenta las modificaciones propuestas para el nuevo Plan de Estudios se analizaron las variables que podían influir en los resultados lo que se muestra en la tabla 1:

	Indice académico para el ingreso	Promedio académico
Curso 98/99	97.3	4.00
Curso 98/00	96.8	4.05
Diferencia	0.5	-0.05

Diferencia**Tabla 1:** Variables analizadas.

Como se aprecia en la tabla 1 la diferencia académica entre los estudiantes de un curso y otro no es significativa por lo que se decide no incluirlas en el análisis.

Se muestran los resultados obtenidos en la calidad de la docencia producto de la aplicación de estas actividades de forma experimental en el Plan " C". Esto se hace con el objetivo de evaluar su efectividad en la impartición de la asignatura; con el desarrollo de estas actividades docentes, además se podrá comprobar la efectividad del Plan de Estudios "C " en la asimilación de los conocimientos adquiridos por los estudiantes al elevar los indicadores cuantitativos de la misma, lo que puede verse en la tabla 2.

	Curso 92/93 Plan "B"	% vs Matricula	Curso 98/99	% vs Matricula	Curso 99/00	% vs Matricula
Matricula	79		32		26	
5	8	10	7	21.8	7	26.9
4	19	24	8	25	12	46.1
3	50	63.3	16	50	7	26.9
2	2	2.5	1	3.1	-	0

Tabla 2: Comparación de la calidad de la docencia

Si analizamos los resultados con respecto a la calidad de la docencia (5 y 4 puntos) obtenidos en el curso 92/93 (Plan de Estudios " B ") , último curso en que la asignatura MEM II tenia examen final e incluía otros contenidos, con los resultados obtenidos en el curso 99/00 donde se impartió de forma experimental a como se planifica para el Plan " C ", podemos concluir que existe una diferencia del 33.43% a favor de este último, lo que corrobora la efectividad de la realización de este tipo de actividades docentes.

Si comparamos estos resultados con los del curso 98/99 podemos notar que en este curso la cantidad de estudiantes con evaluación entre 4 y 5 puntos es del 46,8 %, mientras que en el curso 99/00 se obtuvo un 73%, lo que provoca que exista una diferencia de 26.2 %.

A este análisis se puede añadir la cantidad de horas del estudiante frente a la máquina computadora, lo cual esta en correspondencia con el plan director de computación, lo que se muestra en la tabla 3 con respecto a las horas planificadas.

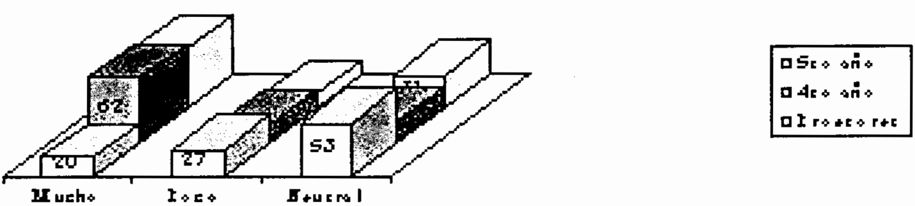
	plan	real	%
Cantidad de horas	8	15	187.1

Tabla 3: Cantidad de horas frente a la máquina computadora

De la presentación de los resultados alcanzados por los estudiantes en el trabajo realizado tres trabajos de ellos fueron seleccionados y expuestos en la Jornada Científica Estudiantil de la Facultad, por la creatividad, originalidad y calidad de la solución dada a la problemática planteada y la presentación del trabajo.

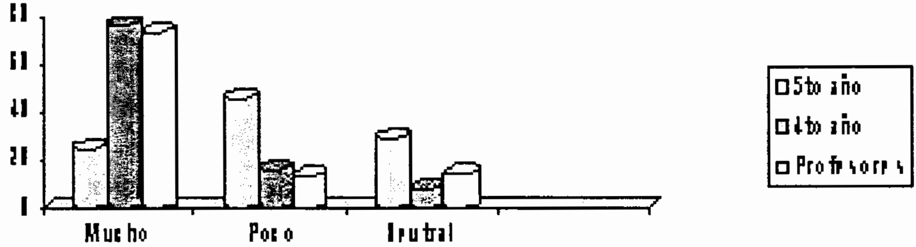
Para comprobar la efectividad de la introducción de estos tipos de actividad en la impartición de la asignatura MEM II se encuestaron 47 estudiantes de 5to y 4to Año de Ingeniería Industrial y 48 profesores, lo que permitió corroborar que los cambios propuestos garantizan el cumplimiento de los objetivos y habilidades que deben adquirir los estudiantes, la vinculación lograda con otras asignaturas, el grado de creatividad, independencia alcanzados y la motivación por la utilización de estas técnicas, lo que se muestra en los gráficos 1, 2 y 3.

Pregunta 1: Ha aumentado la utilización de las técnicas matemáticas para la toma de decisiones en la

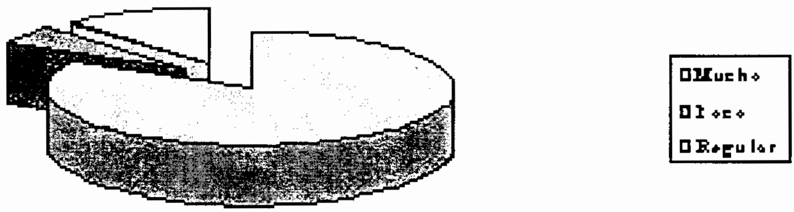


asignatura que imparte y/o recibe.

Pregunta 2. Se encuentra motivado con la utilización de técnicas matemáticas en trabajos extraclases y extracurriculares.



Pregunta 3. Es de utilidad para la toma de decisiones del ingeniero industrial el conocimiento de estas técnicas.



El análisis de la encuesta realizada a los estudiantes y profesores muestra una mayor motivación por aplicación de las técnicas matemáticas en la toma de decisiones, lo que corrobora la utilidad del cambio de paradigma en la impartición de la asignatura Modelos Matemáticos II para la especialidad de ingeniería industrial.

Conclusiones

El extraordinario desarrollo de la computación electrónica en nuestros días ha elevado en modo notable la aplicabilidad y efectividad de la Modelación Matemática en la especialidad de ingeniería industrial.

La introducción más activa de la maquina computadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Modelación Matemática para ayudar a la toma de decisiones en la solución de una problemática dada es una herramienta eficiente y particularmente eficaz lo cual se ilustró a través de los resultados obtenidos en su aplicación experimental en el curso 99/00.

Se considera que estas transformaciones propician el desarrollo de la creatividad en los estudiantes, así como del espíritu crítico y autocrítico y la responsabilidad dentro del sistema de valores que se ha propuesto desarrollar la carrera Ingeniería Industrial en sus estudiantes.

Referencias bibliográficas

Anderson, D. & Sweeney, D. & Williams, T. (1999). *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. Séptima Edición, International Thomson Editores S.A de C.V.

Blanco S. (1994). *La orientación de las acciones del estudiante en el proceso de asimilación*. Revisrta Cubana de Educación Superior, Vol. 14 No 2.

Hernández, H. (1990): *Salta a la vista lo evidente*. Revista Cubana de Educación Superior, Vol. X No 1.

Hillier, F. & Lieberman, G. (1997). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. España.

Ingeniería Industrial (1999), *Planes de Proceso Docente. Planes de Estudios " C " Perfeccionados*. MES, Editora Abel Santamaria, Nov, 1999.

Ingeniería Industrial (1995), *Plan de Estudios de Ingeniería Industrial*, ISPJAE, Cuba.

Lane, A. & Mansour, H. & Harpell, L. (1993) . *Operations Reseachs Techniques*. Interfaces 23 -2.

Morales, A. (1984). *Programación Lineal. Metódica de Aplicación*. Editorial de Ciencias Sociales, La Habana.

Modelación matemática en otras ciencias a través de la hoja electrónica de cálculo

Miguel Ángel León H. - Simón Mochón

Dpto. de Matemática Educativa. CINVESTAV IPN - MÉXICO

maleon@mail.cinvestav.mx - smochona@conacyt.mx

Resumen

Comúnmente la enseñanza de las Matemáticas aparece desvinculada de otras ciencias tales como: Física, Química y Biología; esto trae como consecuencia, que el alumno de nivel secundaria, no interrelacione los principios y conocimientos matemáticos previamente adquiridos para la resolución de problemas de la vida cotidiana, así como para su aplicación en un ámbito curricular científico. En este estudio, utilizamos el ambiente computacional de la Hoja Electrónica de Cálculo, para investigar el papel que juega como mediador en la enseñanza y aprendizaje de contenidos curriculares de otras ciencias.

Este trabajo se centra en el marco del proyecto EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología), el cual tiene como uno de sus propósitos principales, la selección y aplicación de nuevas tecnologías en el quehacer educativo, con la finalidad de generar y actualizar métodos de enseñanza que brinden al profesor formas alternativas de abordar los contenidos curriculares (Rojano, et. al, 2000).

Introducción

La enseñanza de las Matemáticas por lo general resulta en un aprendizaje aislado, debido a su desvinculación con otras ciencias tales como: *Biología, Física y Química*. El problema que esto origina es: El alumno no puede aplicar los conocimientos básicos adquiridos en Matemáticas, en un ámbito diferente; por ejemplo, en otras ciencias.

Un estudio realizado en conjunto México-Inglaterra (Rojano-Sutherland, 1997) acerca de las prácticas matemáticas en el aula de ciencias, revela que en México, al contrario que en el Reino Unido, existe una tendencia a introducir los temas del currículum a partir de enunciar principios o fórmulas generales (*por ejemplo de la Química*) para después pasar a mostrar ejemplos particulares, y al estudiante se le requiere, por un lado, un dominio del tratamiento formal y por otro, ser capaz de realizar una gama de aplicaciones.

En la década de los setentas, los desarrollos tecnológicos abrieron una amplia gama de posibilidades para el empleo de nuevos instrumentos computacionales, poco tiempo después, estos instrumentos arribaron a los sistemas educativos. No obstante, el impacto sobre las prácticas cotidianas no ha sido tan fuerte como se esperaba; sin embargo, el impacto epistemológico ha sido mayor de lo previsible para ese entonces (Balacheff & Kaput, 1996). Según estos autores, esto se debe fundamentalmente al proceso de reificación de los objetos matemáticos, y a las relaciones entre ellos que el estudiante puede activar en los entornos interactivos computacionales.

El proyecto EMAT[1] responde a los lineamientos establecidos por el Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000, que plantea la educación a distancia como una acción prioritaria y estratégica para avanzar en la solución de la problemática educativa que actualmente enfrenta el país (Ursini & Rojano, 2000). Uno de los propósitos principales de este proyecto, se centra en la selección y aplicación de las nuevas tecnologías en el ámbito educativo, para generar y actualizar métodos y contenidos educativos de la Matemática Escolar, con la finalidad de mejorar la calidad de la enseñanza.

Considerando que el proyecto EMAT incluye el uso de la Hoja Electrónica de Cálculo, y uno de los objetivos primordiales es: "que el alumno adquiera conocimientos y habilidades que le sean de utilidad, no sólo en materias de carácter científico y estudios posteriores, sino también en su vida cotidiana" (Rojano, Mochón, et al., 2000); Es por ello que nos interesa investigar: El papel que juega la Hoja Electrónica de Cálculo, como mediador en la enseñanza escolar a nivel secundaria, para el aprendizaje de contenidos curriculares específicos de otras ciencias.

Marco teórico

Una razón para utilizar en nuestro estudio, la modelación matemática con hoja electrónica de cálculo, es porque el alumno puede considerar este ambiente como un mundo artificial, donde todos los componentes son conocidos; de aquí la importancia de emplear un modelo matemático, debido a que incluye elementos y variables de un fenómeno, que en muchas ocasiones no son tomados en cuenta (Molyneux, Rojano, et. al, 1999).

Por otro lado, mediante la modelación matemática, el alumno puede explorar fenómenos semejantes a la realidad, e incluso, le brinda la oportunidad de crear, manipular e interpretar situaciones imaginarias al considerar datos irreales; esto crea una visión más amplia de los fenómenos de las ciencias, favoreciendo así, la comprensión de conceptos. Considerando que los modelos matemáticos sirven para predecir lo que sucedería en una situación real, tanto en condiciones normales, como al modificar algún factor que intervenga en el modelo (Mochón & Rojano, 1998), podemos decir, que esto facilita en los alumnos la formación de ideas intuitivas acerca de la explicación y comportamiento de algunos fenómenos naturales; además de generar nuevas formas de pensar y ver a los conceptos de las ciencias, mismos que hasta hace algunas fechas estaban supeditados, en el mejor de los casos, a la repetición de los fenómenos en el laboratorio escolar.

Con respecto a la modelación matemática, otros autores (García & Salat, 2001) mencionan: "es un proceso que requiere poner a prueba los datos frente a modelos teóricos que se apliquen a una realidad mucho más amplia que los mismos datos".

A partir de la modelación matemática se obtiene un modelo matemático, el cual se define como "una representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas" (Mochón, 2000). Otros autores lo definen como "un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno en cuestión o problema de situación real" (Salett & Hein. 1999).

---

[1]Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología. Proyecto de investigación CINVESTAV-CONACyT, que forma parte del Proyecto de Desarrollo Educativo SEP-ILCE (1997)

Para la modelación matemática, el grupo inglés: The London Mental Models Groups menciona que existen dos tipos de modelos: los modelos expresivos, los cuales son construidos por el propio alumno, de acuerdo a sus ideas sobre el fenómeno; y los modelos exploratorios, que son proporcionados al alumno con la finalidad de que él, entienda mejor un fenómeno mediante su exploración. (Mellar & Bliss, 1994).

No obstante, es importante no perder de vista que: cuando se tiene la construcción matemática para la resolución de algún problema; en términos del modelo, es importante definir el propósito para la cual está hecho. En ocasiones pareciera que un mismo modelo cumpliera varios fines, pero es de vital importancia enfatizar el campo de funcionalidad de éste. Reforzando lo anterior, Duval (1995) afirma que " toda confusión entre el objeto y sus representaciones, a mediano o a largo plazo, desencadena una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos, pronto llegan a ser inutilizables fuera del contexto de aprendizaje; ya sea por no recordarse o por quedar como representaciones inertes que no sugieren algún tratamiento". Todo ello, porque es necesario distinguir entre los objetos matemáticos y sus representaciones.

Método

El escenario de este estudio se ubica en la Escuela Secundaria Oficial N° 456 "José María Morelos y Pavón", turno matutino, en el municipio de Chimalhuacán, Edo. de México. La población la integran 16 alumnos del 2° grado (13 y 14 años de edad); la selección de los alumnos, se realizó mediante una convocatoria abierta, dirigida a estudiantes interesados en participar en este estudio, con posibilidades de asistir en un horario extraclase.

Se llevaron a cabo 22 actividades, las cuales tienen propósitos de estudio específicos y se realizaron, mediante el trabajo en equipo de dos alumnos. Las actividades incluyen tareas que involucran el desarrollo de ideas, modelos expresivos y modelos exploratorios; éstas se clasifican en tres: actividades del cuaderno preeliminar (10), actividades de Química (6) y actividades de Biología (6).

Las actividades del cuaderno preeliminar tienen como finalidad, familiarizar al alumno con el ambiente computacional de hoja electrónica de cálculo; además se eligieron algunas actividades de Química y Biología, considerando aquellas que requerían, por parte del alumno, un nivel de conocimiento científico muy general.

Las actividades involucran: el uso de papel y lápiz, que permitan al alumno generar ideas que servirán como preparación para la hoja electrónica de cálculo; la aplicación de modelos expresivos, en los cuales el alumno debe llevar a cabo el proceso de modelación matemática, al introducir fórmulas y crear tablas que le permitan modelar alguna situación de la vida real; y modelos exploratorios, en los cuales el alumno sea capaz de analizar y reflexionar, sobre los datos obtenidos en un modelo matemático que ha sido generado en la hoja electrónica de cálculo.

Se emplea la técnica de investigación-acción, siendo el investigador quien lleva a cabo la aplicación y coordinación de las actividades indicadas en las hojas de tareas: resuelve dudas, observa el desarrollo de la sesiones y analiza con atención los hechos y situaciones que son consideradas relevantes.

Al final de la aplicación de actividades, se realizará una entrevista a 4 alumnos, eligiendo aquellos que durante el desarrollo de las sesiones, presentaron problemas y/o situaciones interesantes con respecto al análisis de resultados; esto con la finalidad de validar nuestro estudio con base en los avances que se presentaron durante el desarrollo de la investigación, y asimismo indagar acerca de su experiencia al utilizar este ambiente computacional.

El diseño de las actividades que realizan los alumnos presenta un formato específico; inician con una reflexión para el alumno mediante un cuestionamiento, mismo que puede propiciar una lluvia de ideas, posteriormente debe modelar una hoja de cálculo que le permita analizar una serie de datos y de este modo estar en facultad de responder a los cuestionamientos que se hacen al inicio de la sesión. En las primeras actividades del cuaderno preeliminar, al alumno se le proporcionan las instrucciones precisas para crear su hoja de cálculo, sin embargo; a medida que avanzan las sesiones, el alumno debe ser capaz de realizar el diseño de su hoja de trabajo, introduciendo las fórmulas precisas y analizando sus resultados, mediante cuestionamientos hechos en las hojas de trabajo.

Resultados y conclusiones

Al inicio del estudio, por el desconocimiento de esta herramienta, los alumnos tuvieron algunos problemas de carácter técnico, entre ellos destacamos los siguientes:

No sabían cómo desplazarse a través de la hoja de cálculo, fue necesario hacer la indicación de que podían hacerlo con el "ratón" o con la teclas de navegación. También tuvieron problemas para validar las celdas con los textos, algunos de ellos (César y Erika, Fabiola y Berenice) después de escribir el texto, validaban posicionando el cursor con el ratón en otra celda, algunos otros (Noemí y Diana) hicieron lo mismo, pero con las teclas de navegación.

En la actividad los textos están centrados, los alumnos al escribir los suyos y validarlos en las celdas veían que quedaban "movidos" hacia la derecha, algunos se detuvieron un momento a pensar acerca de: ¿porqué sus hojas no quedaban igual a la que se mostraba en la actividad? e invirtieron tiempo en tratar de averiguarlo, otros no le dieron importancia y siguieron adelante. Una pareja de alumnos (César y Erika, Fabiola y Berenice) al posicionarse en la celda y escribir en ella, observaban que el texto se desplazaba a la derecha, ellos intentaron varias veces centrar el texto utilizando la barra espaciadora sin tener éxito. Solo una pareja (Miguel y Kimberly) logró centrar los textos.

Al final de la actividad se les pide que "hermoseen" su hoja, es decir; que den formato, centren textos, agreguen colores, etc.; esta tarea les agrada y entretiene a todos ellos, incluso algunos (Miguel y Kimberly, Erika y Fabiola) han insertado dibujos.

Pasando al aspecto didáctico, en la primera actividad, se pide a los alumnos que escriban una fórmula que relaciona el valor de una celda con otra (*ejem. "=A1+1"*), ellos un tanto incrédulos al introducirla, esperaban obtener el resultado que mostraba la hoja de tareas, sin embargo; no pasaba nada. Sucedía que no validaban la celda, y al observar el resultado en el monitor del compañero que estaba junto, se cuestionaban unos a otros y explicándose entre ellos, encontraban la respuesta. Es común ver que algunos olvidan anteponer el signo igual a la fórmula, no obstante que en la actividad se hace esta indicación.

Al terminar el diseño de su hoja de actividades, a los alumnos se les pide que la usen para resolver algunos cuestionamientos; para esto esperábamos que ellos cambiaran los valores en las celdas, sin embargo, ellos repiten las acciones hechas con anterioridad, escribiendo nuevamente los datos y las fórmulas en celdas inferiores, esto muestra que aún no se dan cuenta que bastaría con validar nuevamente las celdas introduciendo estos nuevos valores.

Al inicio del estudio notamos que los alumnos escriben fórmulas, y no logran ver como variables el nombre de las celdas (A1,A2, B1,etc.); para ello, fue necesario una explicación más detallada en el pizarrón al respecto, haciendo referencia a que el valor de las celdas puede ir cambiando. Esto permitió a los alumnos entender, que la variable que conocen como “x, y, z” en Matemáticas y en Física como “d, t, v”, ahora la manejan con el nombre de las celdas. Cuando en la actividad se pide a los alumnos que expliquen las fórmulas que introducen, al principio ellos hacían referencia únicamente al nombre de las celdas y a la operación aritmética realizada, sin embargo a medida que avanza el estudio logran explicar la fórmula en función del resultado, vinculándolo así, al contexto empleado en la actividad.

Otro resultado interesante en el desarrollo de las actividades, lo encontramos cuando se pide a los alumnos que copien fórmulas hacia abajo y que interpreten el resultado, a estas alturas de la investigación, todos, logran vincular sus resultados con el contexto de la actividad, de tal modo que explican la fórmula haciendo referencia a los datos reales, excepto una pareja de alumnos (Javier y Juan), que siguen anclados en el modelo, y justifican su respuesta solo mediante la repetición escrita de la fórmula, más adelante, mediante una entrevista, trataremos de ver ¿por qué no logran vincular sus respuestas con el contexto? .

A continuación presentamos parte de la actividad: “Mezclas y aleaciones 3ª parte”.

Mezclas y aleaciones (3ª parte)

Nombre de los alumnos ______________________________

Construye una hoja de calculo como la mostrada a continuacion. Las dos densidades y las dos masas del oro y del cobre se toman como los datos. Las otras seis cantidades se deben calcular con formulas (para los volumenes utiliza la formula: volumen = masa/densidad):

	A	B	C	D
1	Densidad oro (g/cm³)	Densidad cobre (g/cm³)		
2	19.3	8.9		
3				
4	Masa oro (g)	Masa cobre (g)	Masa total (g)	% de oro en masa
5	100	[illegible]	200	[illegible]
6				
7	Vol. oro (cm³)	Vol. cobre (cm³)	Vol. total (cm³)	% de oro en volumen
8	5.18	11.24	16.42	[illegible]

La aleación anterior es de "12 quilates" ya que contiene [illegible] de oro en masa (al oro 100% puro se le denomina de "24 quilates").

Notarás que el volumen del oro es menor que el del cobre, aun cuando sus masas son iguales. Trata de explicar esto, basándote en el hecho de que la densidad del oro es mayor.

Con tu hoja de calculo resuelve los siguientes problemas:

- Un anillo contiene [illegible] gramos de oro y [illegible] gramos de cobre. ¿Que masa total tiene este anillo? _____

¿Que volumen total tiene? _____

En esta actividad el alumno modela su propia hoja, introduciendo las fórmulas que le permitan realizar algunos cálculos y de este modo, dar respuesta a las preguntas planteadas.

En este ejemplo, al introducir la fórmula en la celda A8, algunos alumnos escriben: "=100/19.8", esto indica que; aún tienen dificultades para relacionar estos valores con el nombre de las celdas, y no pueden verlas como variables. Se presentó un caso al introducir la fórmulas en A8 "=A5/A2", al cambiar el valor de la celda A5, una alumna (Gabriela) esperaba que también variara la celda A2, esto indica que aún no perciben la diferencia entre: las celdas que cambian (variables) y las celdas con valores fijos (datos).

En este caso particular, para calcular la masa total del oro y del cobre escriben en la celda C5 "=A5+B5"; sin embargo, para responder la cuestión ¿Qué masa total tiene este anillo?, donde ahora el oro tiene una masa de 18g y el cobre de 6, ellos escriben estos valores en las celdas A6 y B6 respectivamente, y en la celda C6 "=A6+B6". De este hecho podemos referir, que los alumnos han aprendido a introducir fórmulas relacionando los valores respectivos en forma correcta, pero todavía no pueden darse cuenta que una celda referida a una fórmula puede emplearse como variable y cambiar los datos tanto como se requiera.

Con base en las explicaciones hechas por los estudiantes en las hojas de trabajo, observamos en ellos el reforzamiento y afinamiento de conceptos, y podemos afirmar, que a partir de manipular y analizar los datos, ellos logran comprender el uso de fórmulas y variables empleadas en la modelación de sus hojas de trabajo; además, el manejo de los datos en un margen más amplio, facilita en ellos la aprehensión intuitiva y formal de conceptos de las ciencias al tener la oportunidad de representar situaciones tan reales o imaginarias como se requiera o pretenda.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). *Computer-based learning Enviroment in Mathematics*. En A:J: Bishop et al (eds) International Handbook of Mathematics Education, 469-501 Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993). *Registres de représentation semiótica et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique el de Sciences Cognitives* 5, (pp.37-65) Traducción: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV. México.

García, L. & Salat, R. (2001). Un ejemplo ilustrativo de modelación. *Memorias "Noveno encuentro de Profesores de Matemáticas de nivel medio superior"* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. (107-110). Enero 2001.

Mellar, H. & Bliss, J. (1994). *Modelling and Education, en Mellar, Bliss, Boohan, Ogborn & Tompsett (eds..)* Learning with Artificial Worlds. The Folmer Press, Londres y Washington D.C.

Mochón, S. (2000). *Modelos matemáticos para todos los niveles*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Mochón, S. & Rojano, T. & Ursini, S. (2000). *Matemáticas con la Hoja Electrónica de Cálcul.* SEP ILCE. México.

Mochón, S. & Rojano, T. (1998). *La modelación a nivel secundaria: el puente entre las Matemáticas y las ciencias*. En: Investigaciones en Matemática Educativa II. Ed. Hitt , F. Grupo Editorial Iberoamérica (369-380) México

Molineux, S. & Rojano, T. & Sutherland, R. & Ursini, S. (1999). *Mathematical modeling: the interaction of culture and practice*. En: Educational Studies in Mathematics 39: (pags. 167-183). Holanda.

Rojano, T. & Sutherland, R. & Jinich, E. & Mochón, S. & Molineux, S. (1996). *Las prácticas matemáticas en las materias científicas de la enseñanza media: el papel de la modelación*. En: Investigaciones en Matemática Educativa, Hitt. F. Ed. 365-388 Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1997). *Mathematical Practices in the Sciences: School Cultural Influences on Classroom Participation*, Paper presented at American Educational Research Association, Chicago, IL. .

Salett, M. & Hein, N. (1999). *Modelación Matemática: Estrategia para enseñar y aprender Matemática.* Educación Matemática Vol 11. Grupo Editorial Iberoamérica. pp (119-134). México.

Resolución de Problemas

Los modelos matemáticos en el contexto de los circuitos eléctricos y la metacognición

Patricia Camarena Gallardo y Javier Herrera Espinosa
Instituto Politécnico Nacional, México
patypoli@prodigy.net.mx

Resumen

En este reporte se presentan los resultados de una investigación que se llevó a cabo con una muestra de cuarenta estudiantes del nivel superior de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica del Instituto Politécnico Nacional, a quienes se les presentaron problemas del área de circuitos eléctricos que deberían modelar matemáticamente. De este proceso se determinaron los elementos metacognitivos que entran en acción al momento de la resolución de los problemas. Al procesar la información se hizo una clasificación de estos elementos metacognitivos para establecer categorías que son fuente de apoyo a la instrucción de la matemática en el contexto de la ingeniería.

El marco teórico en que se mueve la investigación es *la matemática en el contexto de las ciencias* en su fase de estrategia didáctica y toma la concepción de metacognición que describe Santos como monitoreo y autoevaluación de los procesos cognitivos, así como las habilidades metacognitivas de Nickerson. En la metodología de investigación se emplea la entrevista clínica y la interpretación de la información de cada individuo se lleva a cabo en términos de los elementos teóricos; la investigación es de tipo etnográfico.

Introducción

Es un hecho el conflicto cognitivo que representa la matemática en los estudiantes (Camarena, 1987). Aunque el papel que juega esta ciencia básica en el nivel superior es muy distinto al de los otros niveles educativos, ya que es una herramienta para la carrera que apoya, sin dejar a un lado el carácter formativo que ésta ofrece (Camarena, 1987 y 1995).

Por otro lado, todos los objetivos de las carreras universitarias expresan que se dará una formación integral al estudiante, cuando generalmente las asignaturas de las ciencias básicas están aisladas de las demás materias; es decir, el elemento de interdisciplinariedad que debe estar presente en los planes y programas de estudio de una carrera dada es hipotético.

Además, los egresados durante su vida profesional tendrán que enfrentarse a problemas reales donde deben manejar los conocimientos integrados y deberán saber resolver problemas (Camarena 1995 y 2001). Por otro lado, la teoría de la resolución de problemas incluye cuatro elementos teóricos: las heurísticas, las habilidades, la metacognición y las creencias, todos ellos importantes. En esta presentación se toma en cuenta solamente la metacognición.

Por lo antes expuesto, se formula el problema de investigación como aquel que pretende determinar los elementos metacognitivos que entran en acción por parte de los estudiantes ante la resolución de problemas de *la matemática en el contexto de las ciencias*, en particular, de problemas de circuitos eléctricos donde los modelos matemáticos están presentes.

Marco teórico y metodológico

La matemática en el contexto de las ciencias es el marco teórico de la investigación ya que los problemas que serán instrumentados con los estudiantes forman parte del dominio de la matemática en el contexto de las ciencias en su fase didáctica, la denominada matemática en contexto (Camarena, 1995 y 2001). Entre los elementos que resaltan de la estrategia didáctica que de ahí emerge se tienen los modelos matemáticos que es un concepto que se supone debe manejar el egresado durante su vida profesional, pero resulta que en ningún momento ni en ningún programa de estudios del nivel superior están incorporados, éste forma parte del currículo oculto (Camarena, 1995 y 1997).

Por otro lado, a través de la matemática en contexto se resuelven problemas contextualizados en otras áreas del conocimiento, situación que lleva a incorporar los elementos teóricos que intervienen en la teoría de la resolución de problemas.

De manera semejante, al concepto de modelos, se tiene que la resolución de problemas es un elemento del currículo oculto. Los egresados deben estar preparados para resolver problemas, sin embargo nadie los preparó para ello. Desde luego que no hay recetas para la resolución de problemas, si las hubiera no habría problemas solamente serían ejercicios.

Preparar al estudiante para resolver problemas (contextualizados) de su disciplina significa desarrollarle habilidades del pensamiento, habilidades para aplicar heurísticas y metacognición y, hacerlo consciente de las creencias (Santos, 1997) negativas que están en juego al momento de resolver problemas.

Cabe mencionar que la resolución de problemas es uno de los niveles de orden superior en las habilidades del pensamiento, requiere de los conocimientos disciplinarios previos para hacer uso de ellos en cualquier momento (Nickerson, 1994).

Como se ha mencionado, la metacognición es el elemento teórico de la resolución de problemas que será abordado en este reporte. Este elemento corresponde a aquella parte del individuo que le hace ser consciente de su propio conocimiento, de saber si tiene o no todos los elementos cognitivos cuando resuelve un problema o tiene que ir a buscar en libros o consultar personas, etc. Cuando la persona está en el proceso de resolución de un problema la metacognición es el elemento que se encarga de que el individuo se pregunte a sí mismo si va por buen camino o no, es decir, hace que busque contradicciones, incongruencias o elementos que le den la pauta para decir que sí va bien o no va bien (en la teoría de *la matemática en el contexto de las ciencias* a esto se le denominan "puntos de control de error"). Cabe mencionar que Ausubel (1990) fue uno de los pioneros en el estudio de la metacognición.

Hay algunas diferencias de concepción respecto al término metacognición por parte de algunos investigadores. Así, Santos (1997) lo cataloga como monitoreo y autoevaluación de nuestros procesos cognitivos (puedo o no puedo, voy bien o no voy bien). Mientras que Nickerson (1994) habla de las habilidades metacognitivas y menciona que éstas son las necesarias para la adquisición, el empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas.

Esto también lo dice comentando que una persona no sólo necesita tener conocimientos disciplinarios sino también el conocimiento de cómo y cuándo aplicar ese conocimiento en problemas a resolver. Es decir, ante la resolución de un problema se pueden formular las siguientes interrogantes: ¿se lo que debo hacer?, ¿hay algo más que deba saber antes de empezar?, ¿hay algo que sepa que me pueda ser útil?

Relacionando lo anterior con la práctica docente se mira la necesidad de cultivar las capacidades introspectivas del alumno, de hacerlo consciente de las incongruencias (puntos de control de error) en la disciplina, así como de desarrollarle habilidades para la predicción de resultados, entre otros.

Los indicadores para la detección de los elementos metacognitivos estarán determinados por los constructos de Santos y Nickerson: *monitoreo, autoevaluación, adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas*.

La investigación es de tipo etnográfico ya que se lleva a cabo la descripción y análisis de los elementos metacognitivos que son empleados por estudiantes específicos, quienes son entrevistados en su ambiente. El detectar los elementos metacognitivos involucra el captar el punto de vista, sentido e intenciones que los actores otorgan a sus propias acciones de aprendizaje y resolución de problemas.

La metodología a seguir se lleva a cabo a través de tres fases fases:

1. Determinación de la muestra.
2. Selección y elaboración de los problemas a aplicar.
3. Entrevistas a los estudiantes cuando resuelven los problemas y análisis de la información.

Desarrollo

Primera fase.

Para el desarrollo del trabajo se toman a cuarenta estudiantes, de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional de México, que fueron elegidos de un grupo de clases de los investigadores. Es decir, la selección estuvo determinada por las características reales de tiempo y disposición de material humano de los investigadores.

Segunda fase.

El área de desarrollo de la investigación son los circuitos eléctricos que se imparten en carreras de ingeniería eléctrica y electrónica, así como sus ramas afines.

Se inició con estudiantes que llevaban un primer curso de circuitos eléctricos en carreras de ingeniería. Sin embargo, para la población elegida en un 70 % ya tenían nociones del tema, porque el Instituto Politécnico Nacional, institución donde se lleva a cabo la investigación, incluye al nivel medio superior, donde los estudiantes reciben una formación encausada al área de conocimiento a la que pertenece la carrera profesional que cursarán; es decir, los alumnos que han cursado el ciclo educativo en la misma institución ya han recibido un curso introductorio a los circuitos eléctricos.

Los problemas se seleccionaron, y en otros casos se elaboraron, de acuerdo a los programas de estudios del primer curso de circuitos eléctricos de carreras de ingeniería. Para lo cual se determinó el común de conocimientos de los programas de estudio de seis carreras diferentes en el área de la electricidad y la electrónica. Es claro que cuando se quiere vincular la matemática con otras ciencias los alumnos deben tener claros los conceptos cualitativos de la disciplina del contexto, ya que si no es así de poco les servirá la matemática que poseen.

El caso que se describe solamente requiere del conocimiento de los conceptos de resistencia y fuente de voltaje, así como las leyes de Kirchhoff y Ohm. Son problemas donde dado un circuito se piden encontrar resistencias equivalentes y otros donde se pide encontrar el voltaje en cada resistencia.

Tercera fase.

Para las entrevistas se repartió el número de alumnos de la muestra entre los dos investigadores. Se les daban a los pupilos los problemas a resolver y se les iba inquiriendo acerca de lo que escribían, apuntando las respuestas así como los comentarios que se hacían así mismos.

De la información recaba (la narrativa del proceso de resolución de problemas) se separaron los elementos metacognitivos, los cuales se clasificaron de forma tal que se establecen siete categorías o tipos diferentes de comportamientos metacognitivos, como se muestran a continuación (véase la tabla de este documento).

Descripción de las categorías.

Ante el problema de encontrar la resistencia equivalente:

La categoría del sujeto tipo **A** formula las ecuaciones de cada malla y no sabe qué más hacer, luego regresa y hace rayones como si estuviese pensando.

Tal parece que esa colección de ecuaciones inconexas le crean una barrera; de hecho, la barrera pude estar creada por alguno o varios de los siguientes elementos: el número de ecuaciones, que son ecuaciones o simplemente que su estrategia fue fallida.

Pasa de un esquema VISUAL al ALGEBRAICO y de ahí al BLOQUEO, no sabe cuáles son sus capacidades.

En este caso no se ve clara la autoevaluación parece que más bien ya no siguió porque no pudo no porque hubiese sabido que no podía. Su habilidad para el empleo de conocimiento fracasó y no hubo adquisición de conocimiento. No detecta incongruencias y no predice la solución.

El sujeto tipo **B** se va directamente a modificar el diagrama a otro equivalente donde tenga acomodados los elementos de forma más fácil de mirar el circuito hasta llegar a la solución. Resuelve el problema de forma visual y numérica, es decir, con los puros diagramas que va simplificando.

Ésta es su estrategia o heurística para abordar el problema, lo que habla de su metacognición como autoevaluación, ya que es consciente que le será más fácil de resolver el problema si hace uso de sus diagramas, sabe que él no es abstracto; mismo caso para sus habilidades metacognitivas de empleo y control de su conocimiento. Sin embargo no se aprecia ningún indicio de que haya verificado incongruencias o predicho la solución, tal parece que su seguridad en sí mismo, conocedor de sus capacidades, no le piden que verifique incongruencias. Se mueve en un mundo visual, de hecho, de esquema VISUAL sigue en el VISUAL y de ahí pasa al NUMÉRICO.

El sujeto tipo **C** pasa directamente a la formulación algebraica del circuito sin necesidad de simplificar visualmente el circuito, trabaja algebraicamente y luego sustituye valores para dar el resultado numérico.

Este alumno sabe que su poder de abstracción es bueno, confía en él.

Pasa del esquema VISUAL al ALGEBRAICO exitosamente y al final solamente sustituye para dar la solución numéricamente.

Sin embrago tampoco hace predicciones acerca del resultado, tal vez le parezca que no lo necesita, o no tiene compromiso con el problema.

Habilidades Metacognitas	*Categorías*						
	A	B	C	D	E	F	G
Autoevaluación de los procesos cognitivos	X	X	X	XX	XXX	XXX	XXX
Emplear el conocimiento y habilidades cognitas		X	X	X	X	X	X
Controlar el conocimiento y habilidades cognitas		X	X	XXX	XX	XXX	X
Adquirir el conocimiento y habilidades cognitas	No se da y no procede	No se da y no procede	No se da y no procede	No se da y no procede	No se da y no procede	No se da y no procede	No se da y no procede
Monitoreo: Detectar incongruencias en el proceso, predecir la solución de un problema	No se da	No se da	No se da	No se da	No se da	No se da	No se da

TABLA. Categorías de los elementos metacognitivos

(Se pondera con el No. de equis el peso de la habilidad metacognitiva en cada categoría)

El estudiante tipo **D** pasa a simplificar el circuito con otro esquema y en cuanto siente que tiene controlada la situación pasa a las expresiones algebraicas para terminar en este registro el problema.

La habilidad de autoevaluación está muy clara en este tipo de sujetos ya que en cuanto saben que pueden trabajar algebraicamente (ya que este proceso representa un nivel más de abstracción que el manejo visual) dejan los esquemas. Cabe mencionar que esta categoría fue la que menos alumnos tuvo.

Pasan de un esquema VISUAL al ALGEBRAICO y finalmente dan la solución numérica.

Ante el problema de encontrar los voltajes en cada resistencia

La categoría tipo **E** encuentra el voltaje total y después regresa al esquema original para que con el dato obtenido y simplificando el circuito encontrar en cada resistencia el voltaje. Elige una estrategia con la cual sabe que puede poner en acción sus conocimientos.

Pasa de esquema VISUAL al NUMÉRICO regresa al VISUAL para simplificar el circuito a través de otro esquema VISUAL que conlleva la asociación NUMÉRICA en cada resistencia con la que se topa. La habilidad metacognitiva de control del conocimiento juega un papel fuerte en esta categoría.

El alumno tipo **F** se va directamente a calcular en voltaje en cada elemento siguiendo un proceso de reducción del circuito original. Aquí se presenta una mezcla de visualización con elementos numéricos, es claro que ellos saben cuáles son sus habilidades y conocimientos.

La categoría del alumno tipo **G** pasa a las expresiones algebraicas pero no logra conjuntarlas, sustituye unas en otras sin sentido como queriendo llegar a una sola expresión. Regresa y mediante dos esquemas de simplificación del original y calculando numéricamente las resistencias, sigue un proceso rutinario, escribe las ecuaciones del último circuito y luego sustituye valores numéricos Este alumno emplea las habilidades de autoevaluación, y al parecer sí controla y regula su conocimiento.

Cabe mencionar que se presentaron las categorías B y C como distintas ya que en el proceso de resolución del problema en la categoría B se muestra un gran manejo de abstracción mientras que en el caso C esto no es así, situación que se reflejará en las habilidades de adquisición de conocimientos.

Conclusiones

Un elemento notorio fue que en general los muchachos quieren trabajar mecánicamente pero los procesos de resolución no se los permiten por lo que los elementos metacognitivos entran en acción.

Por otro lado, en los primeros problemas donde se requería encontrar resistencias equivalentes se obtuvieron cuatro categorías, de las cuales las tres primeras tienen porcentajes muy semejantes de estudiantes, de hecho, los porcentajes son 22 %, 29 % y 24 % para las categorías A, B y C, mientras que en la categoría D solamente el 9 % de los estudiantes caen en esa clasificación.

Para los problemas que solicitaban encontrar voltajes para cada resistencia del circuito eléctrico se lograron tres categorías, donde los porcentajes de estudiantes que se clasificaron en éstas fueron muy diversos: 28 %, 18 % y 35 % en orden de aparición.

Referencias bibliográficas

Ausubel , P. Novak D. & Hanesian Helen (1990). Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo. *Editorial Trillas.*

Camarena., P. (1987). Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos. *Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.*

Camarena., P. (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. *XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.*

Camarena , P & Rocha, M. (1997). Modelos matemáticos de la electricidad y magnetismo. *Actas de RELME 11. Morelia.*

Camarena G., P. (2001). La matemática en el contexto de las ciencias. *Red de Cimates, Serie Antologías No. 1. Edit. CINVESTAV-IPN.*

Nickerson, R S. Perkins, D. N. y Smith, E. E. (1994). Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual. *Editorial Paidós M. E. C.*

Santos, L. M. (1997). Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. *Grupo Editorial Iberoamérica SA de CV.*

La resolución de problemas en la Educación Matemática.

Silvia Vilanova, María C Rocerau, Guillermo Valdez, María I Oliver, Susana Vecino, Perla Medina, Mercedes Astiz, Estella Alvarez

Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U.N.M.P. Argentina

svilano@mdp.edu.ar

Resumen

En educación matemática, se observa un especial énfasis en la resolución de problemas como método integral de enseñanza. Sin embargo, el término *resolución de problemas* ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente y no siempre los docentes conocen los aspectos que intervienen en el proceso, ni las características de las clases basadas en resolución de problemas. En este trabajo presentamos un proyecto de investigación en curso en el que se analizan algunas concepciones sobre el término "resolución de problemas" y sus consecuencias en la enseñanza, se describen y evalúan algunos de los aspectos que intervienen en el proceso y se presentan los primeros resultados obtenidos hasta el momento sobre una muestra de más de 300 docentes y alumnos de distintos niveles del sistema educativo argentino.

Marco Teórico

Concepciones sobre la Matemática y la Educación Matemática.

Según señala Hersh (1986), "La concepción sobre la matemática afecta la propia concepción sobre cómo debe ser enseñada. La manera de enseñar es un indicador sobre lo que uno cree que es esencial en ella... El punto entonces es ¿de qué se trata la matemática?". En este sentido, la educación matemática debería proveer a los estudiantes de una concepción y un sentido de la disciplina (alcance, poder, usos, historia...), y de una aproximación al hacer matemático, en el nivel adecuado a sus posibilidades. Desde esta perspectiva, la enseñanza debería ser encarada no sólo como un mero desarrollo de habilidades sino como una comprensión conceptual, que permita a los estudiantes la habilidad de aplicar los contenidos aprendidos con flexibilidad y criterio. Se debería también proveer a los alumnos de la oportunidad de enfrentar un amplio rango de situaciones, que vayan desde los ejercicios hasta los problemas abiertos, para ayudarlos a desarrollar "un punto de vista matemático" (Schoenfeld, 1992), caracterizado por la habilidad de analizar y comprender, de percibir estructuras y relaciones estructurales, de expresarse oralmente y por escrito con argumentos claros y coherentes.

Esta concepción sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, al igual que el término "resolución de problemas" varían ampliamente en su interpretación.

Thompson (1992) señala que existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles en la que saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido.

Una visión alternativa acerca del significado y la naturaleza de la matemática consiste en considerarla como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados deben ser juzgados en relación al ambiente social y cultural. La característica que subyace es precisamente su hacer, sus procesos creativos y generativos. De esta concepción surge un enfoque de la enseñanza en la que los estudiantes deben comprometerse en actividades con sentido, que requieran de un pensamiento creativo que permita conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como probar esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Esta visión de la educación matemática está en agudo contraste con la anterior en la cual el conocimiento y manejo de conceptos y procedimientos es el objetivo último de la instrucción.

Sobre los distintos significados del concepto "problema"

Existe un acuerdo general en aceptar la idea de que el objetivo primario de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan matemática a partir de la resolución de problemas. Sin embargo, dadas las múltiples interpretaciones del término, este objetivo difícilmente es claro. En efecto, el término *resolución de problemas* ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente.

Según Stanic y Kilpatrick (1988), "los problemas han ocupado un lugar central en el curriculum matemático escolar desde la antigüedad, pero la resolución de problemas, no. Sólo recientemente los que enseñan Matemática han aceptado la idea de que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención especial. Junto con este énfasis en la resolución de problemas, sobrevino la confusión. El término "resolución de problemas" se ha convertido en un slogan que acompañó diferentes concepciones sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemática en general y resolución de problemas en particular."

Una de los significados asignados al término "problema" es el que los considera *como contexto*, es decir, como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares (como una justificación para enseñar matemática, para proveer especial motivación a ciertos temas, como actividad recreativa, como medio para desarrollar nuevas habilidades o como práctica de técnicas ya adquiridas).

Otro de los posibles significados del término es concebir la resolución de problemas *como una habilidad*. Es decir, resolver problemas no rutinarios es caracterizado como una habilidad de nivel superior, a ser adquirida luego de haber resuelto problemas rutinarios, habilidad que a su vez, es adquirida a partir del aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas básicas. Es importante señalar que, aún cuando los problemas son vistos como una habilidad en sí misma, las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen son las mismas que las señaladas en la interpretación anterior: las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con problemas de práctica relacionados, para que estas técnicas puedan ser dominadas.

Por último, hay un punto de vista particularmente matemático: resolver problemas es *hacer matemática*. Polya es el matemático más conocido que sostiene esta idea de la actividad matemática. Su concepción de la matemática como actividad se pone de manifiesto en la siguiente cita: "Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados (...). Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel." (Polya, 1954). Desde este significado, la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas y los estudiantes tienen que adquirir el sentido de esta disciplina como una actividad; es decir, sus experiencias con la matemática deben ser consistentes con la forma en que la matemática es hecha.

Aspectos que intervienen en el proceso de resolución de problemas matemáticos y antecedentes de investigación.

Hasta el momento, a pesar de no haber un marco explicativo completo sobre cómo se interrelacionan los variados aspectos del pensamiento matemático, parece haber un acuerdo general en considerar la presencia de cinco de ellos en el proceso de resolución de problemas: el *conocimiento de base*, las *estrategias,* la *metacognición*, la *comunidad de práctica* y los *factores afectivos* y el *sistema de creencias* (Schoenfeld, 1992).

El *conocimiento de base,* también llamado recursos matemáticos, se refiere a las herramientas matemáticas que tiene a su disposición la persona que resuelve un problema, es decir, qué información relevante para la situación matemática o problema tiene a mano, cómo accede a esa información y cómo la utiliza.

Los aspectos del conocimiento que llamamos de base, relevantes para la resolución de problemas, incluyen: conocimiento intuitivo e informal sobre el dominio del problema, hechos, definiciones y procedimientos algorítmicos, procedimientos rutinarios, competencias y conocimiento acerca de las reglas del lenguaje en ese dominio (Schoenfeld, 1985). Los hallazgos en la investigación señalan la importancia y la influencia de este tipo de conocimientos, que son el vocabulario y las bases para el rendimiento en situaciones rutinarias y no rutinarias de resolución de problemas. Sin embargo, este conocimiento también puede contener información incorrecta; los estudiantes arrastran sus concepciones previas o sus limitaciones conceptuales a la resolución de problemas y esas son las herramientas con las que cuentan.

Las discusiones sobre *las estrategias (o heurísticas)* en matemática, comienzan con Polya en su libro "Cómo Plantear y resolver Problemas" (1954) quien amplía su tratamiento en Mathematical Discovery (1981). Sin embargo, mientras su nombre es frecuentemente invocado, sus ideas son habitualmente trivializadas; poco de lo que se hace en el nombre de Polya, conserva el espíritu de sus ideas (Schoenfeld, 1992). Sobre este aspecto de la resolución de problemas es sobre el que más matemáticos han trabajado y más se ha escrito, observándose distintas posturas, desde considerar que las heurísticas deben ser enseñadas y luego utilizadas por el alumno, hasta considerar que deben ser exploradas y descubiertas por cada persona.

La metacognición, se relaciona con el monitoreo y el control del progreso de las actividades intelectuales. Hallazgos de investigación en educación matemática señalan que el desarrollo de la autorregulación en temas complejos es difícil y frecuentemente implica modificaciones de conducta, que pueden producirse pero requieren largos períodos de tiempo. Los aspectos metacognitivos se relacionan, en suma, con la manera en que se seleccionan y despliegan los recursos matemáticos y las heurísticas de que se dispone.

Los factores afectivos y las creencias, concebidas como la concepción individual y los sentimientos que modelan las formas en que el individuo conceptualiza y actúa en relación con la matemática, comenzaron a ocupar el centro de la escena en la investigación en educación matemática, a partir de la última década. Sobre esta cuestión, Lampert (1992) señala: " Comúnmente, la matemática es asociada con la certeza; saber matemática y ser capaz de obtener la respuesta correcta rápidamente van juntas. Estos presupuestos culturales, son modelados por la experiencia escolar, en la cual hacer matemática significa seguir las reglas propuestas por el docente y recordar y aplicar la regla correcta cuando el docente hace una pregunta o propone una tarea. La "verdad" matemática es determinada cuando la respuesta es ratificada por el docente. Las creencias sobre cómo hacer matemática y sobre lo que significa saber matemática en la escuela son adquiridas a través de años de mirar, escuchar y practicar."

Las creencias pueden ser consideradas la zona oscura o de transición entre los aspectos cognitivos y afectivos. Thompson (1992), reseñó los estudios que documentan cómo los docentes difieren ampliamente en sus creencias sobre la naturaleza y el sentido de la matemática, así como en su visión sobre cuáles son los objetivos más importantes de los programas escolares de matemática, el rol de los docentes y los estudiantes en las clases de matemática, los materiales de aprendizaje más apropiados, los procedimientos de evaluación, etc. Estas investigaciones también han mostrado que existen relaciones entre las creencias y concepciones de los docentes de matemática y sus visiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática y su propia práctica docente. Thompson encontró grandes diferencias en la visión de docentes sobre la naturaleza y el significado de la matemática, que inciden en la práctica de la enseñanza que realizan.

En suma, concientes o no, las creencias modelan el comportamiento matemático y son abstraídas de las experiencias personales y de la cultura a la que uno pertenece. Esto conduce a la consideración de la *comunidad de práctica de la matemática*, como el último, pero no por eso el menos importante, de los aspectos a considerar.

Un gran cuerpo de literatura emergente en los últimos años, considera al aprendizaje matemático como una actividad inherentemente social (tanto como cognitiva), y como una actividad esencialmente constructiva, en lugar de receptiva. La idea principal, es que la comunidad a la que uno pertenece modela el desarrollo del punto de vista de sus miembros. Es decir, el aprendizaje es culturalmente modelado y definido: las personas desarrollan su comprensión sobre cualquier actividad a partir de su participación en lo que se ha dado en llamar la "comunidad de práctica", dentro de la cual esa actividad es realizada. Las lecciones que los alumnos aprenden acerca de la matemática en el aula son principalmente culturales y se extienden más allá del espectro de conceptos y procedimientos matemáticos que se enseñan: lo que se piensa que la matemática es, determinará los entornos matemáticos que se crearán y la clase de comprensión matemática que se desarrollará.

En síntesis, se puede afirmar que cada uno de los aspectos analizados hasta aquí que intervienen en la resolución de problemas, es en sí mismo coherente y dentro de ellos la investigación ha producido interesantes ideas sobre los mecanismos principales. Pero todavía se comprende poco acerca de las *interacciones* entre estos aspectos y menos acerca de cómo confluyen todos en dar a un individuo su particular sentido de la actividad matemática, su "punto de vista matemático".

Es necesaria una nueva aproximación a los factores afectivos, que considere a los alumnos como individuos con un sistema de creencias o visión del mundo particular. Comprender esa visión del mundo en toda su complejidad es una tarea difícil; las reacciones afectivas hacia la matemática ocurren dentro de una estructura relacionada con cómo se concibe al mundo en general. Es necesario conectarse entonces con las diferencias individuales y culturales en sus respuestas hacia la matemática

En suma, gran parte de lo investigado en resolución de problemas matemáticos se ha centrado en los procesos de pensamiento usados por los individuos mientras resuelven problemas. Sin embargo, queda pendiente el centrase en los grupos y los ambientes de clase, indagando los procesos de enseñar y aprender matemática.

A partir de esta situación y desde el enfoque de la resolución de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, se propone este proyecto, como continuación de la línea de investigación que vienen desarrollando los integrantes del equipo de trabajo desde el año 1993.

Problema de investigación:

¿Cómo interactúan recursos, estrategias y creencias de docentes y alumnos en la resolución de problemas matemáticos en el aula?

Objetivos de la Investigación.

1. Determinar la incidencia de la s concepciones y creencias de docentes y alumnos de distintos niveles de enseñanza sobre la matemática en general y la resolución de problemas en particular.
2. Evaluar si la adquisición de estrategias y conceptos para la resolución de problemas matemáticos se ve favorecida por la utilización de recursos no convencionales como las herramientas informáticas.
3. Analizar la concepción sobre resolución de problemas subyacente en la secuenciación y organización de actividades de los libros de texto de matemática más usados en la escuela.
4. Describir y comparar la utilización de estrategias y recursos en la resolución de problemas matemáticos en docentes y alumnos de distintos niveles de enseñanza.

Metodología y plan de trabajo

Tipo de investigación

Este proyecto se aborda como una investigación de tipo descriptivo-correlacional, porque se describen y evalúan diversos aspectos o dimensiones que intervienen en el proceso de resolución de problemas matemáticos y se determina el grado de relación que existe entre variables.

Sobre esta base, el proyecto se organiza a través de cuatro ejes temáticos relacionados con distintos aspectos vinculados a la resolución de problemas:

Eje 1: Concepciones y creencias de docentes y alumnos sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje a través de la resolución de problemas.

Eje 2: Efectos de la utilización del recurso informático en la adquisición y transferencia de estrategias y conceptos en la resolución de problemas.

Eje 3: Concepción subyacente sobre resolución de problemas que aparece en los libros de texto más usados por docentes y alumnos de distintos niveles del sistema educativo a partir de la reforma educativa.

Eje 4: Inventario de recursos y estrategias para la resolución de problemas matemáticos de docentes y alumnos de distintos niveles del sistema educativo.

Estos ejes son desarrollados de manera relacionada entre sí, pero con la necesaria adecuación de metodologías e instrumentos en función de los objetivos que persigue cada uno.

Los temas que aborda cada Eje, fueron determinados en parte por los resultados obtenidos anteriormente por el equipo de trabajo y en parte por las preguntas aún abiertas en el campo de la investigación.

Consideraciones finales en base a los resultados obtenidos hasta el momento.

Los resultados obtenidos, se relacionan principalmente con los siguientes temas:

a) Con respecto al *diagnóstico de recursos y estrategias para la resolución de problemas en docentes y alumnos de distintos niveles del sistema educativo*, se realizaron hasta ahora tres tipos de actividades:

* Talleres y encuentros de resolución de problemas con docentes de matemática de distintos ciclos y niveles. Estos talleres tuvieron una doble finalidad: a) realizar un diagnóstico de las estrategias y recursos matemáticos y b) intervenir en la modificación de la concepción sobre resolución de problemas observada.

* Análisis de la capacidad predictiva de la resolución de problemas matemáticos en el rendimiento académico posterior de alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, a partir de la administración de una prueba de Matemática cuya aprobación era requisito para ingresar. A través de un análisis estadístico se determinó la correlación existente entre el rendimiento académico posterior de los alumnos (independientemente de la carrera elegida) y la posesión, al momento del ingreso, de estrategias y recursos matemáticos adecuados.

* Administración de pruebas de resolución de problemas para evaluar las heurísticas para la resolución de problemas matemáticos que poseen los alumnos de distintos niveles del sistema educativo: E.G.B. 3, Polimodal y Universitario (profesorado en Matemática).

b) Con respecto al *efecto de la utilización de recursos informáticos en el desarrollo y transferencia de estrategias para la resolución de problemas,* se trabajó con una muestra de 145 docentes de E.G.B. 3 se indagó la influencia de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática atendiendo a las recomendaciones de distintos organismos relacionados con la educación, el conocimiento sobre las posibilidades que ofrecen estas herramientas, las diferentes formas de incluirlas en el proceso de enseñanza-aprendizaje y el cambio de rol del docente ante la incorporación de las mismas en el aula.

Los datos reflejaron que la mayoría de ellos no conoce software para la enseñanza de la matemática. Por otra parte, aquellos que sí conocen, en su mayoría afirman no saber utilizarlos o no disponer del laboratorio de computación para su uso. Por último, quienes lo utilizan lo hacen en algún tópico puntual, no aprovechando toda su potencialidad y sólo en clases aisladas. Estos docentes también expresaron como objetivo principal del uso del software reforzar y fijar temas ya vistos con ejercitación adecuada al software seleccionado.

c) Concepciones y creencias de los docentes sobre la matemática en general y la resolución de problemas en particular.

Algunos de los resultados obtenidos muestran que los docentes que se desempeñan en el último ciclo de la Educación General Básica (E.G.B. 3) tienen distintas concepciones sobre la Matemática como ciencia y sobre lo que es un problema matemático, de las que se desprenden variadas consecuencias en la enseñanza. Así mismo, muchos de estos docentes (especialmente maestros y profesionales con título no específico en matemática), desconocen estrategias y recursos necesarios para enseñar a través la resolución de problemas.

A partir de los cuestionarios, entrevistas y observaciones realizadas, se ha observado que predominan en los docentes (150 docentes de E.G.B.3) dos concepciones distintas sobre la actividad matemática:

* Una parte (minoritaria), pone el énfasis en la resolución de problemas, definiendo la matemática como una clase de actividad mental, una construcción que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, acorde a lo que Skemp denomina *matemática relacional.*

* El resto de los docentes tiene una visión *instrumental*, en la que "saber matemática" es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina con el fin de resolver problemas cotidianos o simplemente "aprender más matemática". Tal concepción de la matemática conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido y que implícitamente se ve reflejada, por un lado, en la manera en que orientan y evalúan a sus alumnos y por otro, en la forma en que ellos mismos encaran la resolución de los problemas planteados en el cuestionario.

Referencias bibliográficas

Hersh, R. (1986). *Some proposals for revising the philosophy of mathematics.* In T. Tymoczko(Ed) New directions in the philosophy of mathematics. Boston: Birkhauser.

Lampert, M. (1992). *Handbook for Research on Mathematics. In Schoenfed,* A.: Learning to think mathematically, Teaching and Learning. D.Grows, Ed. New York:Mac Millan.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving. Combined* Edition. New York: Wiley & Sons, Inc.

Polya, G. (1954). *How to solve it,* Princeton:Princeton University Press.

Resnik, L. & Collins, A. (1996). *Cognición y Aprendizaje.* En Anuario de Psicología. (69) pp 189-197. Barcelona: Grafiques 92, S.A.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics.* In Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning. New York: Macmillan.

Schoenfeld, A.(1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: A.Press.

Schoenfeld, A.(1989). *Explorations of student's mathematical beliefs and behavior.* In Journal for Research in Mathematics Education. 20 (4), pp 338-355. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stanic, G. & Kilpatrick, J.(1989). *Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum.* In R. Charles&Silver (Eds.) The teaching and assesing of mathematical problem solving, pp.1-22 Reston, VA: N.C.T.M.

Thompson, A.(1985). *Teacher's conceptions of mathematics and the teaching of problem solving.* In E.A. Silver, Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives ,pp 281-294. Hillsdale, NJ:Erlbaum

Sobre la formulación de problemas matemáticos

Miguel Cruz Ramírez, Salvador Álvarez Reyes y Leonardo Torno Hidalgo

Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero", CUBA

mcruz@isp.holguin.inf.cu

Resumen

En el presente trabajo se propone una nueva estrategia para la formulación de problemas matemáticos, a partir de una idea desarrollada por Brown y Walter (1990). Esta estrategia tiene una estructura no lineal y consta de seis acciones, en las cuales se concatena un subsistema de operaciones constitutivas. El aprendizaje de esta estrategia, sobre la base de un sistema de técnicas aisladas por otros autores (véase Kilpatrick, 1987), ha sido experimentado en la formación del profesor de Matemática del Instituto superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero". Para ello se ha propuesto una metodología para caracterizar el proceso de formulación, y se han elaborado nuevos instrumentos como el que resulta de extender los «episodios gráficos» de Schöenfeld al conjunto de acciones propuestas. Los resultados obtenidos constataron que la implementación de dicha estrategia favorece el proceso de formulación de problemas. También se corroboró la existencia de una estrecha interrelación entre los procesos de formulación y resolución de problemas, lo cual ha sido advertido por varios autores (Brown y Walter, 1993; Silver, 1994 y 1996; English, 1998).

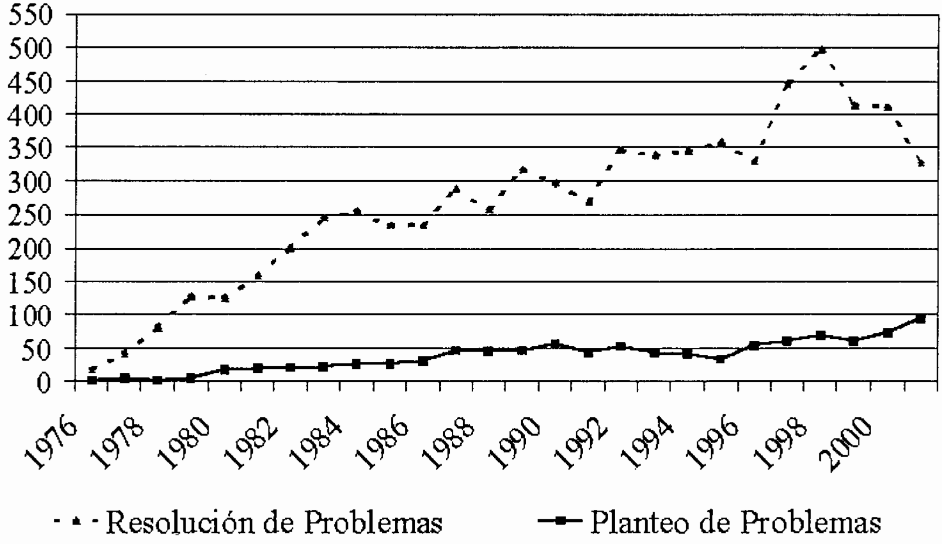
Antecedentes

Figuras prominentes de la Matemática Educativa, como Pòlya, Freudenthal y Kilpatrick han señalado que el hallazgo de nuevos problemas no sólo es una etapa cualitativamente superior de los procesos de resolución de problemas, sino también un vehículo eficaz para potenciar el aprendizaje de la Matemática. Es por ello que el *National Council of Teachers of Mathematics* en sus *Estándares Curriculares* plantea «[...] una meta mayor de la Matemática de la escuela media consiste en equipar los estudiantes con conocimientos y herramientas que les permitan formular, abordar y resolver problemas más allá de aquellos que han estudiado [...]. Ellos deben tener oportunidades para formular y refinar problemas, pues los que ocurren en el ambiente real no llegan puramente diseñados. Los estudiantes necesitan experiencia para identificar problemas y articularlos claramente, lo suficiente como para determinar cuando ellos han arribado a soluciones» (NCTM, 2000, p. 335). Algo similar se plantea en las actuales transformaciones del enfoque metodológico de la matemática educativa cubana, pues se aboga por «[l]a presentación y tratamiento de los nuevos contenidos *a partir del planteamiento y solución de problemas prácticos*, de carácter político–ideológico, económico–laboral y científico–ambiental, y no solo desde la propia lógica de la asignatura» (Ministerio de Educación, 2001, p. 1; las itálicas en el original).

Por otra parte, aunque en el diseño de diversos currículos se promulga la necesidad de que los estudiantes planteen nuevos problemas, el sustento teórico que hoy existe es bastante efímero. Por ejemplo, en la base de datos MATH–DI[1], entre los años 1976 y el 2000, de 90812 resúmenes de investigación registrados sólo 990 contienen el referente

[1]Correspondiente a la revista ZDM (*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, http://www.emis.de/ MATH/DI/searcha.htm).

«problem–posing» (0.01 %). En el gráfico siguiente se ilustra la cantidad de artículos registrados en dicha base de datos, relacionados con el planteo y solución de problemas. El análisis estadístico arroja una correlación logarítmica significativa (r = 0.91), lo que confirma la aseveración de muchos investigadores sobre el estrecho vínculo que enlaza estos campos de investigación.

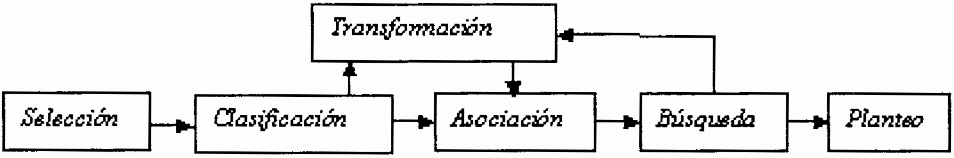


A pesar de su importancia, la formulación de problemas no ha recibido la atención requerida, como parte del currículo matemático, ni tampoco las investigaciones relacionadas con esta temática han sido lo suficientemente sistemáticas En el presente trabajo se propone una estrategia que le facilita al maestro la formulación de problemas para su quehacer pedagógico.

Desarrollo

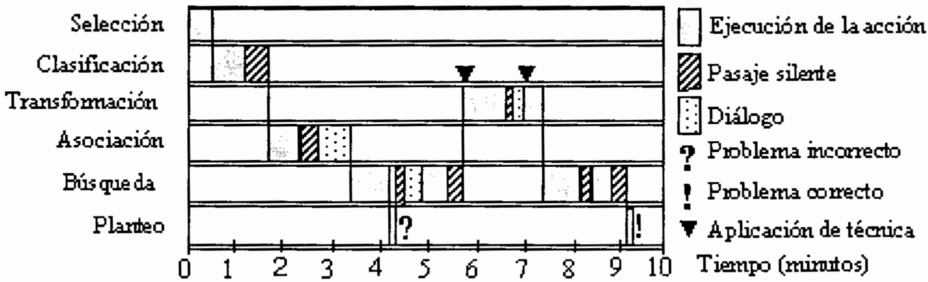
Una exploración objetiva del proceso de formulación de problemas exige esclarecer tanto su forma como su contenido. Tal esclarecimiento es posible si se conceptúa el acto de formulación como problema en sí mismo. En efecto, según Silver (1995, p. 69) se trata de un problema de tipo abierto, pues se parte de una situación inicial, que puede ser o no precisa; del conocimiento de la meta a alcanzar, la cual es esencialmente imprecisa; así como de la certidumbre de que el proceso de obtención del nuevo problema es desconocido a priori.

Sobre la base de las ideas de la escuela histórico–cultural, Campistrous y Rizo han conceptuado las estrategias de resolución de problemas. Para ellos una estrategia de resolución de problemas es "un procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es específico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento 'ad hoc' y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de la acción de búsqueda de la solución" (2000, p. 8). Particularmente, a partir de una idea desarrollada por Brown y Walter (1990), nosotros proponemos una estrategia que facilita la formulación de nuevos problemas, así como la implementación de otras estrategias más simples y específicas denominadas técnicas. Entre estas técnicas podemos encontrar la generalización–limitación, la utilización de analogías, considerar variables algunos elementos del problema, etcétera (véase Cruz, 2002). A diferencia de los "niveles" propuestos por Brown y Walter, los cuales permiten implementar su técnica "What–if–not", nosotros proponemos una estrategia no lineal compuesta de seis acciones básicas. En esta estrategia no sólo se incluyen los "niveles" de estos autores, sino que se contempla también la puesta en práctica de otras estrategias de naturaleza distinta.



La **selección del objeto** es la primera acción. Su ocurrencia está condicionada por necesidades de carácter pedagógico como evaluar, motivar, ejemplificar, etcétera; así que responde a un objetivo consciente. El sujeto analiza qué clases de objetos matemáticos resultan apropiados, comparándolos con el fin de escoger aquellos que le brinden mayores posibilidades. En esta primera etapa influye mucho la esfera afectiva, por cuanto la toma de decisiones está condicionada frecuentemente por los gustos e intereses del sujeto. Una vez que se ha elegido el objeto ocurre la **clasificación de componentes**. En esta acción se procede a desmembrar el objeto en sus partes constitutivas (análisis), y la información obtenida se organiza y compara atendiendo a ciertos criterios. Paralelamente, subsiste una respectiva integración de los componentes (síntesis), de manera que pueden conformar ellos mismos otros componentes más complejos del objeto. Como ejemplo puede tomarse una figura plana, la cual está compuesta por segmentos, y a la vez ciertos tríos conforman triángulos que también son partes integrantes de la figura. La acción subsiguiente consiste en la **transformación del objeto**, que puede ser total, parcial o idéntica. Estos cambios pueden ocurrir tras la generalización de ciertos elementos emergentes durante la clasificación. Tal operación lógica es muy compleja y puede tener una naturaleza sintética o analítica. En esencia, la generalización facilita el paso de un concepto específico a otro genérico, al quitar de su contenido aquellos indicios que lo especifican (disminuye el contenido y aumenta el volumen del concepto). También es posible transformar el objeto empleando analogías; en este caso se trata de un razonamiento sobre la pertenencia a cierto objeto de un determinado indicio (propiedad o relación), tomando como base la homología de indicios sustanciales con otro objeto. Según el carácter de la información trasladada del modelo al prototipo, la analogía puede ser de propiedades o de relaciones. Habiendo transformado o no el objeto, la acción subsiguiente comprende la **asociación de conceptos**, de manera que los elementos resultantes de la clasificación son separados por abstracción y luego relacionados con un conjunto de conceptos matemáticos, los cuales pueden ser de propiedades (área, perímetro, monotonía,…) o relacionales (semejanza, paralelismo, congruencia,…). Nuevamente es necesaria la toma de decisiones, pues el sujeto debe elegir un subconjunto de tales conceptos asociados. En estos momentos pueden emerger varias interrogantes de manera natural, sin embargo es posible que muchas no tengan sentido. Es por eso que consideramos una penúltima etapa, relacionada con la **búsqueda de dependencias**, donde se analizan las relaciones existentes entre las propiedades que han sido asociadas. Finalmente se sintetiza toda la información, y las interrogantes inmanentes son valoradas a fin de seleccionar una (o varias) de ellas. Con esta toma de decisión culmina el **planteo de la pregunta**, teniendo lugar entonces la etapa subsiguiente del metaproblema.

En la etapa de formulación es posible el análisis de las estrategias desarrolladas, una manera de hacerlo consiste en aplicar los conocidos diagramas de Schöenfeld (1985) o «episodios gráficos». En este caso hemos realizado una adaptación, en la cual tomamos el producto cartesiano entre las acciones demarcadas en el esquema anterior y el tiempo transcurrido[2]. Partiendo de una situación vinculada a un objeto o fenómeno, orientamos al estudiante que formule un problema asociado,



destacando la posibilidad que tiene de efectuar transformaciones. La actividad será grabada, lo cual favorece la mayor exactitud en el análisis ulterior; y en todo momento debe crearse un clima agradable, donde el alumno exprese verbalmente sus ideas. El experimentador tomará nota de sus observaciones, lo cual se complementa con la información escrita y la grabación; también podrá interaccionar con el estudiante siempre que lo considere necesario.

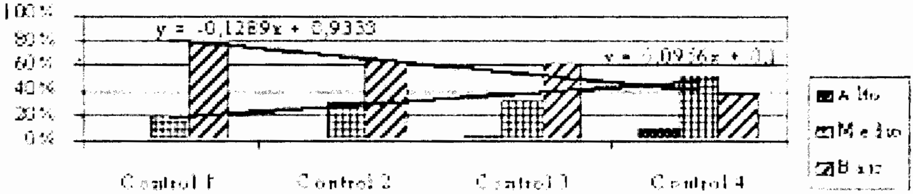
Estos diagramas nos permitirán comprender mejor la logicidad de las estrategias, así como las dificultades que experimentan los estudiantes durante su ejecución. Por ejemplo, la figura anterior ilustra el caso de un estudiante que no encontró grandes obstáculos en el transcurso de las dos primeras etapas, sin embargo durante la asociación comenzó a experimentar ligeras dificultades con la toma de decisiones. Al interaccionar con él fue posible que pasara a buscar relaciones convenientes, pero una síntesis inadecuada de la información lo condujo a plantear una pregunta que no tenía sentido. Después de unos segundos fue posible observar la ausencia de un examen retrospectivo, lo cual fue constatado con un nuevo diálogo. Al continuar la búsqueda y no encontrar relaciones decidió, por sí mismo, transformar el objeto dado, mostrando habilidades al respecto ya que la nueva búsqueda lo condujo al planteo de un problema después de unos dos minutos. Particularmente, el tiempo total se corresponde con la sencillez del objeto propuesto y las relaciones analizadas. La simplicidad se acentuó aún más con la transformación que tuvo lugar, la cual fue originada por la doble aplicación de la técnica lógica de limitación. Estos diagramas son una evidencia de que la estrategia propuesta no está constreñida a un orden rígido de sus acciones. La forma en que esta transcurre varía de un sujeto a otro, inclusive un mismo individuo puede obrar de manera diferentes en dependencia de la situación dada. Además, a pesar de que la selección de las técnicas pone de relieve ciertos cambios de contenido, esto no es óbice para seguir considerando

---

[2] Schöenfeld lo hace considerando el modelo de Pòlya enriquecido y el tiempo.

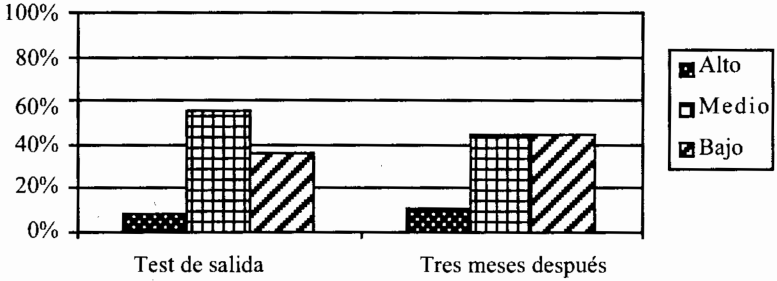
la estrategia como tal, pues tales cambios no alteran el conjunto de las acciones. Es necesario señalar que aún prescindiendo de la grabación, es posible recopilar información valiosa. En este caso, el instrumento coincide simplemente con la conocida técnica de «pensar en voz alta».

Junto a esta estrategia también hemos desarrollado las técnicas, a partir de sistematizarlas en una tipología tricotómica (algorítmicas, lógicas y heurísticas). Por su parte, a fin de materializar la implementación de la estrategia en la formación del profesor de Matemática, hemos conceptuado un ambiente de aprendizaje que facilita la enseñanza de esta y sus respectivas técnicas en la Carrera de Magisterio. Así, la realización de un experimento nos ha podido mostrar las ventajas y deficiencias de la estrategia metacognitiva. Para ello también elaboramos una metodología que nos permite caracterizar el proceso de formulación de manera cualitativa, partiendo de tres indicadores sustantivos: la metacognición, la estrategia y el problema formulado. A continuación se ilustra los resultados obtenidos después del experimento.



Como puede observarse, subsisten mejorías discretas. Esto era esperado pues se experimentó con un grupo de estudiantes noveles (primer año). El análisis de los rangos medios mostró un elevado nivel de significación, de acuerdo al test de Friedman ($^2{}_p(3) = 45,3$; $p < 0,001$). Es más, de 36 estudiantes cuyo proceso fue caracterizado como bajo en el control inicial, 19 pasaron al nivel medio (52,8%); mientras que de 9 en el nivel medio, 5 pasaron al alto (55,6%). En ningún caso se observó involución lo cual, junto a la observación anterior, constituye una muestra de desarrollo uniforme.

Una vez concluido el período de experimentación, se procedió a la aplicación de un test post hoc tres meses después. El objetivo consistía en determinar el nivel de fijación de la estrategia aprendida. Los resultados se muestran a continuación.



Como puede observarse, existen diferencias entre el control final y el post hoc; no obstante, el test de Wilcoxon para el análisis de los rangos de signos muestra que este cambio no fue significativo ($Z_p = -0{,}816$; $p = 0{,}414 > 0{,}05$). Asimismo tampoco se observó cambios significativos en ninguno de los indicadores, especialmente en el problema ($Z_p = -0{,}333$; $p = 0{,}739 >> 0{,}05$). Esto permite concluir que el aprendizaje fue sólido, pero advierte la necesidad de dar continuidad al desarrollo del proceso.

Con el fin de comparar los resultados obtenidos en esta investigación con los de otras afines, se procedió a calcular la correlación no paramétrica entre el proceso de resolución (al inicio del experimento) y el de formulación. La aplicación del test de Spearman reveló que, en la medida en que el proceso de formulación se iba favoreciendo, la correlación con el proceso de resolución tendía a crecer en cada control ($r_s = 0, 628$; 0,654; 0,635 y 0,734). Esto reafirma una tesis defendida por muchos autores, referida a la estrecha interrelación que enlaza ambos procesos.

Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto una nueva estrategia, la cual le facilita al maestro de Matemática la formulación de problemas para su quehacer pedagógico. Esta estrategia está conformada por un sistema de acciones y estas, a su vez, se componen de un conjunto de operaciones básicas. A fin de constatar el valor práctico de esta propuesta, se ha experimentado su enseñanza en la formación de este profesional. Los resultados revelan que el aprendizaje de la estrategia, sobre la base de un grupo de técnicas específicas, favorece el proceso de formulación de problemas.

Es necesario destacar que el desarrollo de esta investigación ha develado una multiplicidad de problemas abiertos, como la necesidad de controlar las variables "proceso de formulación" y "proceso de resolución", de manera que se esclarezca mejor su interdependencia. También es necesario profundizar en la forma en que la estrategia tiene lugar. Si bien se muestra un ejemplo, no fue posible extender el instrumento a la realización de los controles del experimento (como ocurre a menudo, este es un fruto a posteriori de la investigación). De esta manera se podría analizar la frecuencia de cambio entre las acciones, el tiempo promedio de estas, la ubicación de las técnicas dentro de la estrategia, etcétera. Sin embargo, tal vez el más interesante de los problemas abiertos consiste en traer a colación la implementación de esta estrategia en la formulación de problemas no matemáticos, como lo son los problemas físicos, químicos, biológicos, geográficos, etcétera. Esto abre un fascinante campo de investigación para un futuro inmediato.

Referencias bibliográficas

Brown, S. & Walter, M. (1990). *The art of problem posing* (2nd ed.). Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

Brown, S. & Walter, M. (1993, Eds.). *Problem posing: reflections and applications.* Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

Campistrous, L. & Rizo, C. (2000). *Tecnología, resolución de problemas y didáctica de la Matemática.* ICCP, Ministerio de Educación, La Habana

Cruz, M. (1999). *Sobre el planteo de problemas matemáticos.* Órbita, ISP "Enrique José Varona", La Habana.

Cruz, M. (2001). *Estrategias para la elaboración de ejercicios del análisis diofántico.* Biblioteca Virtual de los ISP, MINED, La Habana.

Cruz, M. & Álvarez, S. (2002). *La formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática.* Memorias del II Taller Internacional "Didáctica de las Ciencias", OEI–MINED, La Habana.

Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática.* Tesis Doctoral (no defendida), ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

English, L. (1997). *Promoting a problem–posing classroom.* Teaching Children Mathematics, 4 (3), 172–179.

English, L. (1998). *Children's problem posing within formal and informal context.* Journal for Research in Mathematics Education, 29 (1), 83–107.

Kilpatrick, J. (1987a). *Is teaching teachable? George Pòlya's view on the training of mathematics teacher.* In F. R. Curcio (Ed.): Teaching and learning: A problem–solving focus (pp. 85–97). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, V. A.

Kilpatrick, J. (1987b). *Problem formulating: where do good problems come from*? In A. H. Schöenfeld (Ed.): Cognitive science and mathematics education (pp. 123–147). Erlbaum, Hillsdale.

Ministerio de Educación (2001). *Programas de Matemática para las Secundarias Seleccionadas*, Pueblo y Educación, La Habana.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* URL: http://standards.nctm.org/protoFINAL

Silver, E. (1994). *On mathematical problem posing.* For the Learning of Mathematics, 14 (1), 19–28.

Silver, E. (1995). *The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives.* ZDM, 2, 67–72.

Silver, E. (1996). *Posing mathematical problems: an exploratory study.* Journal for Research in Mathematics Education. 27 (3), 293–309.

Schöenfeld, A. (1985). *Mathematical problem–solving.* Academic Press, New York.

Estrategias y creencias acerca de la resolución de problemas matemáticos en profesores de Secundaria Básica

Vilma Toledo Dieppa

Universidad Agraria de La Habana "Fructuoso Rodríguez Pérez" Cuba.

vilma@isch.edu.cu vtoledodieppa@yahoo.com

Resumen

El trabajo que se presenta, es una investigación en desarrollo, la cual tiene como objetivo determinar mediante un estudio de casos, aquellos factores para los problemas que afectan el aprendizaje de los estudiantes en la solución de problemas matemáticos, relacionados con la labor del docente, para lo cual fueron aisladas algunas estrategias y creencias que estos tienen acerca de este contenido de enseñanza.

Los tests aplicados fueron confeccionados a partir de la precisión que se realizó del concepto de problema siendo los mismos validados antes de la aplicación definitiva del mismo, además se realizaron entrevistas individuales y una encuesta para recoger información adicional. El análisis de los resultados de estas herramientas, permitieron confirmar o rechazar las estrategias y creencias previstas. entre lasque destacan: Tanteo sistemático, usar figuras convenientes, opera con los números dados, procedimiento rutinario asociado a un indicador textual, palabras claves, plantar una solución,, modelación: analógica intuitiva, algebraica.

Introducción

El Programa Director de la Matemática (1997) expresa:

"La importancia de la Matemática para la formación multilateral de los educandos es universalmente reconocida. Los contenidos básicos de esta asignatura son indispensables para lograr un aprendizaje significativo, sólido y aplicable tanto en la conducta cotidiana como en el desempeño profesional."

A este objetivo se agrega que la resolución de problemas ha sido reconocida como un componente importante en el estudio del conocimiento matemático y que como expresara el eminente matemático George Polya, *"... dominar la Matemática significa poder resolver problemas, y no solo problemas tipo, sino también problemas que exigen pensamiento independiente, sentido común, originalidad e inventiva."*

En relación con esto el programa vigente de 7° grado se plantea: "El enfoque metodológico de la asignatura en el grado, está dirigido a desarrollar el pensamiento lógico y creador sobre la base de la resolución de ejercicios y problemas...", pero a pesar de ello y del empeño preciso de los documentos, en la escuela es bien clara otra realidad.

La raíz de estas dificultades puede ser de diferente naturaleza, entre las que pueden encontrarse:

- La concepción curricular.
- La preparación previa que tienen los estudiantes para ello.
- La formación del propio docente para enfrentar esta tarea.

- La forma en que el docente organiza y dirige el aprendizaje de los alumnos en la solución de problemas.

Este último planteamiento es de mucho interés, pues es necesario determinar aquellos factores que afectan el aprendizaje de los estudiantes en la solución de problemas matemáticos, conocer el proceder del docente ante esta tarea, sus creencias, las estrategias que utiliza para resolver problemas, qué tipos de problemas utiliza en clases. Todo lo anteriormente expresado motivo la ejecución, de este trabajo cuyo objetivo es describir el estado actual del proceso de dirección del aprendizaje de la solución de problemas matemáticos en la secundaria básica y encontrar algunas explicaciones (factores) para los problemas que se presenten en el aprendizaje de los alumnos, relacionados con la labor del docente en un municipio de La Habana.

Fundamentación teórica y métodos utilizados

Asumir el concepto de problema es esencial en este tema, para lo cual se analizaron 13 definiciones de problemas, agrupadas en tres campos Psicológico (4), Didáctico (6), e Investigativo (3).

Entre todas las definiciones existen puntos comunes como los siguientes:

- El sujeto que resuelve el problema no conozca como hacerlo.
- Se utilizan procedimientos y conocimientos matemáticos para su solución.

Otros autores determinan además que:

- Es importante la motivación del individuo ante la tarea.
- Sus conocimientos o experiencias en la actividad.

Como los criterios no son unánimes se precisaba de una definición que abarcara todo lo anteriormente expresado, esta es la que plantean los Doctores Luis Campistrous y Celia Rizo en el libro "Aprende a Resolver Problemas Aritméticos" (1996) pues de manera sintetizada describen los rasgos esenciales que deben caracterizar un verdadero problema. Los definen problema como"*... toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo.*"

Agregan además que:

- La vía de solución para pasar de una situación a otra tiene que ser desconocida
- Que la persona quiera realmente resolverlo.

Para abordar esta temática, se aplica un estudio de casos cuya selección se fundamenta en el propio objetivo de la investigación, lo cual nos obliga a intercambiar con los profesores y precisar de esta manera con la mayor exactitud posible sus respectivas formas de resolver un problema por una parte y por otra como desarrollan esa actividad con sus estudiantes. Estos estudios son realizados cuando el tema a tratar es poco explorado o nunca se ha tratado y entre las investigaciones que se han consultado, al menos en Cuba respecto al asunto estrategias y creencias no se ha logrado encontrar una que se refiera al docente. Estos estudios de casos se encuentran enmarcados dentro del paradigma cualitativo, pero no se excluye el uso de información cuantitativa.

La muestra utilizada se toma entre profesores de Secundaria Básica de dos municipios habaneros, en total 32 profesores. Entre los tests aplicados tanto en la validación como en los definitivos debían obtenerse 160 respuestas correctas pero solo fueron obtenidas 34 respuestas correctas lo cual representa el 21.3% del total.

La metodología aplicada es la que proponen los Doctores Celia Rizo y Luis Campistrous los cuales han obtenido resultados muy valiosos en investigaciones anteriores sobre esta temática, pero con estudiantes de las enseñanzas primaria y secundaria.

- Búsqueda bibliográfica para decidir los problemas que contendrían los tests a aplicar.
- Validación del primer test confeccionado.
- Análisis de los resultados.
- Desarrollo de entrevistas para describir algunas de las estrategias encontradas aplicación de los tests definitivos.
- Análisis de los nuevos resultados.
- Descripción de las estrategias encontradas.
- Desarrollo de entrevistas para conocer las creencias y corroborar las estrategias previstas.
- Análisis de las soluciones y entrevistas para definir consideraciones.

En esta investigación se añade la aplicación y tabulación de una encuesta que permitirá llegar al análisis acerca del proceder del docente sobre la dirección del proceso de enseñanza de los problemas y la metodología que utiliza.
El marco conceptual del trabajo que se expone tiene como fundamento teórico metodológico el Enfoque Histórico Cultural de L.S. Vigostky (1982,1987), y algunos aspectos de la Teoría de la Formación por Etapas de las Acciones Mentales de Galperin (1974, 1983, 1986,1987). Se complementa este con los trabajos realizados por otros autores cubanos y extranjeros.

Valoración de los resultados

1.2.1 Estrategias encontradas

No obstante a las dificultades presentadas en las soluciones de los problemas propuestos (ver anexo), al revisar minuciosamente los temarios y entrevistas grabadas, realizadas a los profesores, pudieron ser aisladas las estrategias que se muestran en breve.
Se encontraron un total de ocho estrategias:

- Tanteo sistemático
- Usar figuras convenientes
- Opera con los números dados
- Procedimiento rutinario asociado a un indicador textual
- Palabras claves
- Plantar una solución
- Modelación
    - analógica
    - intuitiva
    - algebraica

1.2.2 Sistema de creencias

Del análisis de las soluciones se obtuvo que el problema:

El minutero avanza un número exacto de minutos y el horario está dos divisiones detrás. ¿Qué hora es?(problema 1 del anexo), no pudo ser resuelto por profesor alguno, manifestándose a través de este y otros las siguientes creencias:

1ª CREENCIA ***¨ Si no hay números no se puede resolver el problema ¨***

2ª CREENCIA: **"La búsqueda empírica para resolver un problema no tiene nada que ver con la Matemática"**

3ª CREENCIA: **"Si la figura está hecha, no puedo hacerle nada"**

4ª CREENCIA: **"A pesar de que lo que hago no sea lo correcto, lo sigo porque realizo menos esfuerzo y es más fácil"**

5ª CREENCIA: **"Resolver un problema es cumplimentar una orden"**

6ª CREENCIA: **"En las clases de Matemática no se pueden utilizar verdaderos problemas pues los alumnos no están preparados para ello"**

7ª CREENCIA: **"Un problema siempre tiene que tener una solución"**

8ª CREENCIA: **"Los problemas implican siempre el empleo de un procedimiento rutinario"**

De las creencias detectadas pudo ser planteada la siguiente hipótesis:

Hipótesis # 1: **El modo de actuación de los alumnos respecto a los problemas y su solución, están en estrecha relación con la manera de enseñar y de actuar de los profesores.**

Hipótesis # 2: **La actividad metodológica que se realiza en los centros respecto a los problemas es deficiente, pues no se discuten estrategias de solución, ni otros aspectos del trabajo con problemas.**

Otros resultados significativos se tienen respecto a los tipos de problemas que con mayor frecuencia son utilizados en clases. Estos son:

- Los que se relacionan con la vida práctica **(94,4%)**
- Los que se resuelven por cálculo porcentual o geométrico **(88,9%)**
- Los que conducen a ecuaciones o sistemas **(83,3%)**
- A veces no tienen nada que ver con lo que se esta trabajando **(44,4%)**
- Son propuestos para enseñar a utilizar estrategias de trabajo **(38,9%)**

Consideraciones finales

En el trabajo realizado se aislaron siete estrategias para resolver problemas, algunas de ellas muy irreflexivas y que coinciden, en muchos casos, con las ya antes aisladas en investigaciones realizadas con alumnos, o que puede significar que son conductas inducidas por la forma en que los docentes ejercen la dirección del proceso docente educativo y la influencia que tiene en esa dirección su papel como conductor.

Se manifestaron, además, un grupo de **creencias** que en su mayor parte limitan la actividad del docente en la solución de estos problemas, y que en el caso estudiado son un resultado no esperado, y quizás tampoco percibido, del propio proceso de enseñanza aprendizaje de la solución de problemas en el proceso de formación de estos docentes. Es interesante que la mayor parte de ellas están asociadas al papel de la **búsqueda empírica en la solución de problemas**, que es considerada por algunos docentes como algo no matemático, **a un cierto proceder facilista**, en la actitud al enfrentarse a un verdadero problema para ellos, y **pesimista** al considerar que a los alumnos no se les puede enfrentar a retos de esa naturaleza, limitando con ellos no solo su propio desarrollo sino el de sus alumnos.

Las hipótesis que se generaron como resultado del análisis de la información obtenida por vía empírica, adelantan algunas explicaciones sobre los factores que pueden estar incidiendo en el fenómeno de las insuficiencias que manifiestan los docentes y también los alumnos para resolver problemas, que se ponen de manifiesto en los casos estudiados, pero que pueden ser de un orden más general y, por tanto, pueden ser consideradas como punto de partida para investigaciones de mayor amplitud, y para el rediseño del proceder metodológico para la solución de problemas matemáticos, en la población estudiada.

Referencias bibliográficas

Almeida, B. (1992) *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Almeida, B. (1999) *Didáctica de la resolución de problemas matemáticos en la escuela media.* Academia. Ciudad de la Habana.

Campistrous, L. & Rizo, C. (1997) *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Campistrous, L. & Rizo, C. *¿Problemas en ciencias*?. Conferencia dictada en el Evento Pedagogía 2001, La Habana.

Cervera, P. (1999*) Algunas estrategias para la resolución de problemas geométricos en duodécimo grado*. Tesis de maestría. Instituto Superior Politécnico "Julio Antonio Mella". Facultad de Matemática – Física. Santiago de Cuba.

Guzmán, M. & Gil, D. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática: Tendencias e Innovaciones*. Popular. S.A. Madrid..

Junk, W. (1981) *Conferencia sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2, segunda parte*. Libros para la Educación. Ciudad de la Habana..

Labarrere, A.. (1987) Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

MINED. (1997).*Programa director de la enseñanza de la Matemática.* Ciudad de la Habana.

MINED. (1999). *Transformaciones a aplicar en la enseñanza secundaria*. Ciudad de la Habana.

Mónaco, B. & Aguirre, M.(1996) *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio básico: Un estudio de casos.* Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero.

Muñoz, F. (1989) *Libros de texto Matemática 7º, 8º y 9º grados*. Pueblo y Educación.

Muñoz, F. (1989) *Orientaciones Metodológicas 7º, 8º y 9º grados*. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Muñoz, F. (1990) *Programas Matemáticos 7º, 8º y 9º grados*. Pueblo y Educación.

Polya, G. (1976). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Editorial Trillas. México.

Rizo, C. & Campistrous, L. (1999) *Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos.* Curso PRE-reunión Pedagogía 99. Ciudad de la Habana.

Rizo, C. & Campistrous, L. (1999) *El tanteo, ¿Técnica de solución o adivinación? Ponencia.* Ciudad de la Habana.

Santos, L. (1996) *Principios y Métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Ibero América.

ANEXO 1

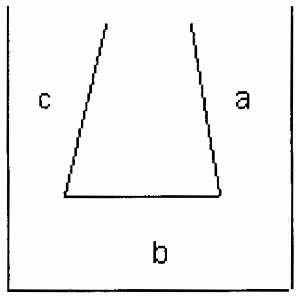
Grupo de problemas para los profesores

1) El minutero avanza un número exacto de minutos y el horario está dos divisiones detrás. ¿Qué hora es?
2) Hay dos cajas de naranjas, una con 380 y la otra con 504. ¿Cuántas naranjas se necesitan para que en ambas cajas se tenga la misma cantidad?
3) Para ir de la ciudad A hasta la B hay que recorrer 665 km. Dos autos salen al mismo tiempo, uno de A hacia B a 40 km/h y el otro de B hacia A. Si dichos autos se encuentran al cabo de 7,0 horas y durante ese tiempo sus velocidades se mantienen constantes, ¿cuál es la velocidad del móvil que salió del B?
4) Dentro de ocho años. Esperanza será dos años mayor de lo que será Alicia ahora: ¿Cuál de las dos niñas es mayor?
5) Se tiene un número de cinco cifras que es el cubo de un número de dos cifras y no hay ninguna cifra repetida. ¿Cuál es el número?
6) Tengo una vasija llena de miel que pesa 500 g. Esta misma vasija llena de luz brillante pesa 350 g. La luz brillante es dos veces más ligera que la miel. ¿Cuánto pesa la vasija?
7) Las personas que asistieron a una recepción se estrecharon las manos. Uno de ellos observó que los apretones de manos fueron 66. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?
8) En un triángulo ABC, la mediana $A\overline{M}$ tiene la mitad de la longitud de $B\overline{C}$. Expresa la relación que puedes establecer entre las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo.
9) Se tiene un triángulo equilátero ABC y se trazó la recta MN perpendicular a la bisectriz del ángulo B, MN interseca a los lados y en los puntos M y N.

Clasifique el triángulo MBN y justifica su respuesta.

10) El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia es $15u^2$, cuál es el área del cuadrado inscrito en la semicircunferencia .Generalice.

11) En la siguiente figura, se da una hoja de papel donde aparece dibujado una parte de un triángulo. Calcula su perímetro y su área.



12)En el siguiente arreglo , calcule la suma de la 60^{ava} y la 121^{ava} filas

Primera fila 1

Segunda fila 1 – 1

Tercera fila 1 – 1 1

Cuarta fila 1 – 1 1 – 1

Quinta fila 1 – 1 1 – 1 1

13) Sustituir cada letra por un dígito de manera que en cada fila y columna halla un cuadrado perfecto.

S A L

A N A

L A S

14) Dos alumnos conversan el día que comienzan las clases:

A- ¿Cuántos años te faltan para terminar el preuniversitario?

B- Tanto como los que tú has estudiado. ¿Y tú?

A- El doble.

¿Qué grado comienza cada uno?

15) En un preuniversitario hay 13 personas que conocen al menos un idioma extranjero: 10 inglés, 7 alemán y 6, francés; 5 de ellos hablan inglés y alemán, 4, inglés y francés y 3, alemán y francés. ¿Cuántos saben los tres idiomas? ¿Cuántos sólo inglés?

16) Se traza una tangente a una circunferencia en un punto P de esta y diámetro . Se trazan las perpendiculares desde A y B a la tangente. ¿Cuál es la posición de para que la suma de las longitudes de las perpendiculares sea máxima .

17) Se traza una circunferencia de centro O. Se traza otra circunferencia interior a esta que pasa por O y es tangente a la primera. Se trazan por los extremos del diámetro de la primera circunferencia las tangentes a la segunda. Buscar posición del diámetro para que la suma de los cuadrados de las tangentes sea máxima.

La enseñanza de estrategias para la resolución de problemas matemáticos en una escuela de ingeniería

Alejandro Muñoz Diosdado, Araceli Arce Viveros

UPIBI, Instituto Politécnico Nacional, Universidad Pedagógica Nacional, México.

amunoz@acei.upibi.ipn.mx

Resumen

En este trabajo se abordan la enseñanza y aprendizaje de estrategias de resolución de problemas matemáticos en una escuela de Ingeniería de nivel superior, entendiendo por estrategia la definición de un objetivo y la planificación, selección e implementación de diferentes procedimientos para alcanzarlo. Los elementos más importantes de esta propuesta consisten en la selección de problemas contextualizados en la experiencia y el entorno de los estudiantes, en el diseño de cuestiones sobre diferentes procesos del proceso de resolución de tales problemas, en la planificación y utilización por parte del profesor de estrategias de enseñanza de modelaje y de autointerrogación y del diseño de situaciones de aprendizaje que favorecen la resolución de problemas de forma cooperativa entre parejas de alumnos. La experiencia descrita se centra en problemas de Probabilidad de un curso de Bioestadística y describe como fue que al aprender los alumnos las estrategias para resolver problemas, no sólo mejoraron su rendimiento sino que se logró un cambio cualitativo en las creencias y actitudes de los alumnos en relación con la Probabilidad.

Introducción

Uno de los principales objetivos en la enseñanza de las Matemáticas es que los alumnos puedan resolver problemas, y de ser posible, problemas contextualizados, ya que el aprendizaje se hace más significativo si las actividades que realiza el alumno están relacionados con su experiencia personal o con su entorno. En las escuelas de Ingeniería, la competencia para resolver problemas es crucial. Las escuelas de Ingeniería de México no son la excepción. No obstante este es un objetivo difícil porque en general, resolver un problema en Matemáticas es un proceso complejo en el cual intervienen un gran número de variables, entre las que sobresalen: el gran número de estrategias generales y específicas que cualquier persona puede intentar para resolver un problema, el tipo de problema, los métodos de enseñanza del profesor, las actitudes, emociones y creencias que tienen tanto los alumnos como los profesores acerca de la resolución de un problema matemático, etc. (Schoenfeld, 1992; Carrillo, 1998; Blanco, 1998; Lester, 1994; Pifarré y Sanuy, 2001). Los profesores de matemáticas en las escuelas de Ingeniería saben que deben resolver problemas y después de la exposición de los conceptos matemáticos dedican buena parte de su tiempo a esa tarea con resultados que dependen de muchos factores, pero la tarea en sí se centra en que el alumno vea como el profesor resuelve uno o varios ejercicios de algún libro y se espera que el alumno de esta forma aprenda a resolver ejercicios similares, usualmente en algún momento se espera la participación del alumno y la actividad se cierra cuando el profesor asigna para su resolución extra clase alguna serie del mismo tipo de ejercicios. Aún después de estas actividades es común encontrar que muchos alumnos no pueden resolver problemas de aplicación relacionados con los temas que se revisaron en la clase e incluso muchos de ellos no pueden resolver siquiera los ejercicios del libro que el profesor dejó para que se resolvieran en casa. Esto se debe en parte a que la forma en que se aborda tradicionalmente la resolución de problemas es poco efectiva, pero también se debe a cierta tendencia que hace ver a la matemática como aburrida, difícil y estéril. Incluso en las escuelas de Ingeniería se ha notado una tendencia a elegir aquellas carreras que tienen menos cursos de Matemáticas o Física.

En este trabajo se pretende mostrar que es necesario que el profesor dedique más tiempo a la selección de los problemas que se van a resolver en clase, que no es muy útil resolver todos los ejercicios de los libros de texto y que debe hacerse más énfasis en la enseñanza y aprendizaje de estrategias de resolución de problemas matemáticos. Al igual que otros autores (De Corte, 1993; Carrillo, 1998; Pifarré y Sanuy, 2001) se afirma que el proceso de enseñanza centrado en mejorar las estrategias de solución de problemas, incrementa el rendimiento del alumno y por lo tanto, puede modificar sus creencias, actitudes e incluso emociones en relación con la Matemática.

Las estrategias de resolución de problemas

Las personas que saben resolver problemas disponen de un conjunto de estrategias generales o específicas que les ayudan a superar las dificultades encontradas durante el proceso de solución. Los especialistas en la enseñanza de estrategias de solución de problemas han observado las acciones que realizan las personas al resolver problemas y han logrado aislar las acciones y los procesos generales que sirven para resolverlos. Han construido una serie de modelos ideales que tienen un conjunto de procedimientos, habilidades y competencias necesarias para resolver un problema. Esto les ha permitido estructurar fases o pasos que facilitan su enseñanza aprendizaje, sin embargo, se ha cuestionado mucho la manera en que esta enseñanza se ha llevado a la práctica. En primer lugar, porque el proceso de resolución de problemas se trata como un proceso lógico matemático en el cual necesariamente los alumnos aprenderán a resolver los problemas. El hecho de segmentar el proceso de solución en pasos para organizar y facilitar el aprendizaje en el cual se siguen secuencias ordenadas de procedimientos aplicados como en un algoritmo parece una buena idea, pero en la práctica no funciona. En México esta idea se ha llevado a una sobre simplificación terrible. Esta segmentación se inicia desde la educación secundaria, cuando el alumno tiene que resolver un problema sigue una especie de receta en la que primero trata de escribir los datos, luego hace un planteamiento del problema, después viene un procedimiento en el cual por lo regular el alumno busca una fórmula y trata de sustituir los datos en tal fórmula, obtiene un resultado numérico y ¡ya está!, el problema ha sido resuelto. La mayoría de los libros de Matemáticas y prácticamente todos los de Física están escritos con este esquema, esto continúa en la educación media superior, de tal forma que al llegar a las escuelas de nivel superior el alumno está tan apegado a este esquema que siempre busca una fórmula para resolver el problema. Esta forma de proceder no ayuda nada a la resolución de problemas y termina con la frustración del alumno.

El tratar el proceso de resolución de problemas como un contenido procedimental ignora la importancia de los factores de tipo cultural, social y cognitivo; el proceso de resolución de problemas es más bien un proceso de construcción personal, en el cual deben incorporarse las características y conocimientos previos de los alumnos, la adaptación del modelo de resolución a las características de los problemas a resolver y las características de los mismos profesores (Pifarré y Sanuy, 2001). La segmentación en fases no es totalmente negativa si se incentiva que el alumno tome decisiones sobre los procedimientos más adecuados y su secuenciación, de tal forma que se evite el aprendizaje lineal (Derry, 1990). Deben también enseñarse no solamente estrategias generales, sino también estrategias específicas a la materia de que trata el problema y no debe olvidarse el importante papel que juega el profesor, debe planificarse la actuación del profesor en el proceso de enseñanza aprendizaje. El profesor debe facilitar la enseñanza de las estrategias de resolución de problemas, tiene que ser el modelo de los alumnos y ha de ser el monitor del aprendizaje de los alumnos.

Pero ¿cuáles son los métodos más apropiados para que el profesor facilite el aprendizaje de las estrategias generales y específicas para la resolución de problemas? La respuesta a esta pregunta no es fácil ni única, en este trabajo se reporta una experiencia realizada con alumnos de un curso de bioestadística de una escuela de ingeniería de corte interdisciplinario con alumnos que usualmente tienen dificultades con los temas de Probabilidad. Tradicionalmente, el rendimiento de los alumnos en los temas de Probabilidad en esta escuela es bajo, los alumnos no pueden resolver los problemas a pesar de que los profesores resuelven una gran cantidad de los mismos y tratan de motivar de varias formas que el alumno se interese en los temas, una de ellas consiste en resolver problemas relacionados con las carreras de los alumnos, otra en la elaboración de materiales de apoyo para el aprendizaje, sin embargo, la situación no había mejorado notablemente hasta hace poco.

Una experiencia en la enseñanza de estrategias para la resolución de problemas

Siguiendo con la situación planteada en la sección anterior, algunos profesores del curso de bioestadística propusieron el trabajo en equipo para la resolución de problemas, es decir, después de que el profesor explicaba los conceptos y resolvía algunos ejercicios planteaba algún problema y organizaba a los alumnos en equipos para la discusión y posterior resolución del mismo, esto ocasionaba dificultades por la movilización de las sillas y porque usualmente los equipos eran numerosos y si bien algunos participaban, otros no lo hacían y resultaba que al final no se ganaba casi nada y además se perdía tiempo. Entonces se planteó la estrategia que se describirá a continuación y que coincidió con un factor externo decidido por las autoridades: se reemplazó el mobiliario escolar por sillas y mesas en las cuales pueden estar dos alumnos atendiendo la clase. Este factor y la propuesta de Pifarré y Sanuy (2001) motivaron una reflexión que llevó a implementar el siguiente estudio.

El profesor debe permitir la creación de espacios de análisis y reflexión sobre los diferentes procedimientos de resolución de problemas utilizados por él mismo y por los alumnos, de tal forma que éstos observen, identifiquen e interioricen nuevas formas de afrontar la resolución de un problema. Con esta premisa se procedió con la siguiente metodología.

Metodología

El profesor, utilizando alguna técnica adecuada (exposición en pizarrón, retroproyector, etc.) introduce los conceptos de la clase y después inicia la resolución de los problemas haciendo énfasis en la existencia de diferentes procedimientos para resolverlo. La selección adecuada de los problemas es crucial, previamente debe hacerse una selección cuidadosa de problemas relacionados con la carrera de los alumnos y con su entorno y deben ser debidamente ordenados en cuanto a su grado de complejidad, deben ser resueltos previamente y preferiblemente discutidos en la Academia de profesores. En la resolución de los problemas el profesor debe establecer un diálogo con los alumnos de manera que permita que los alumnos hagan propuestas de solución basadas en sus conocimientos previos y que se especule sobre las ventajas y las desventajas de los diferentes procedimientos. El profesor debe mostrar todo el proceso de pensamiento y cómo las sugerencias de los alumnos pueden contribuir o no a la solución del problema.

En una segunda etapa se aborda la resolución de otro u otros problemas de manera conjunta entre el profesor y los alumnos, pero primero los alumnos discuten en parejas y proponen alguna estrategia de solución, los alumnos y el profesor van discutiendo las diferentes acciones realizadas y por consenso van anotando las respuestas más adecuadas. En esta etapa el profesor debe motivar la discusión haciendo una *autointerrogación*, el profesor previamente debe preparar las preguntas que a su juicio o el de la Academia puedan favorecer que los alumnos se planteen cuestiones importantes del proceso de resolución.

En una tercera etapa y de manera progresiva, los alumnos resuelven por sí mismos los problemas. El profesor continúa activo supervisando el proceso de resolución y dirigiendo preguntas y orientaciones para dirigir la resolución de los problemas. Por último, una pareja del grupo expone los principales procedimientos utilizados para resolver el problema y el resto del grupo compara con lo realizado por ellos y valora el proceso y el resultado obtenido. Es importante resaltar que el nuevo mobiliario favorece esta discusión porque a priori los alumnos están ya sentados por parejas y no se pierde tiempo organizando equipos, además la discusión de problemas matemáticos se favoreció cuando la discusión se realizó en parejas. Se observó que cuando los equipos eran más numerosos se avanzaba más lentamente, en parte porque no se establecen rápidamente los consensos sobre los mejores procedimientos.

Después se resuelven todos los problemas planteados y se favorece un trabajo cooperativo entre los alumnos, primero discutiendo, reflexionando y llegando a acuerdos sobre los diferentes procedimientos, y segundo, favoreciendo que se establezcan entre los dos alumnos, procesos de pedir y dar ayuda sobre los procedimientos. El profesor puede evaluar la actividad y hacer participar de esta evaluación a las parejas de alumnos.

Resultados

Por la misma naturaleza de los problemas que se resuelven en Probabilidad, éste método resultó ser muy efectivo para que los alumnos lograran un mayor entendimiento de los mismos. Si el alumno no trabaja en equipo para resolver este tipo de problemas, es usual que interprete el problema de forma equivocada, pero cuando se discute en parejas y además con la ayuda del profesor se pueden ir rechazando las interpretaciones equivocadas. De la misma forma, el procedimiento de solución no es único, de tal manera que se pueden ir ensayando diferentes procedimientos. Por ejemplo, si en el problema se necesitara aplicar técnicas de conteo, algunas parejas podrían hacer diagramas de árbol, otras podrían proceder a hacer una enumeración de los elementos del espacio muestral, otras probablemente harían el conteo usando cajas y otros tal vez reflexionarían si el orden es importante y entonces utilizarían las reglas de permutaciones o de combinaciones. Cuando el profesor o algún alumno muestran que se llega a los mismos resultados, el alumno adquiere seguridad en los cálculos realizados y además aprenden nuevos procedimientos.

Debe hacerse una rotación de parejas para que no sean homogéneas, es más provechoso tener parejas de alumnos de diferentes niveles porque los alumnos más avanzados pueden ayudar al profesor a nivelar a los alumnos más atrasados. Preocupa mucho a los profesores que con esta metodología se resuelven menos problemas porque se invierte más tiempo en su resolución. Sin embargo, se invierte menos tiempo que cuando se trabaja en equipos numerosos y se obtiene mucho más provecho. Debe insistirse en que la selección de los problemas debe ser muy cuidadosa, tanto de los que se resuelven en el aula como de los que se resuelven en casa y debe fomentarse que los problemas extra clase se resuelvan también en equipo.

Los resultados en las evaluaciones se han incrementado en promedio aproximadamente un 20%. Aunque este resultado es positivo, falta mucho por mejorar; es necesario aplicar la metodología de forma continuada y reconocer que el problema del proceso de enseñanza aprendizaje es multifactorial y no puede resolverse sólo de una forma. Un resultado cualitativo es necesario resaltar: las creencias y actitudes iniciales se han modificado, es difícil cuantificar esto, pero los alumnos llegan a esta clase mucho más interesados y motivados y su participación se ha incrementado.

La comparación con lo reportado por Pifarré y Sanuy es muy interesante, estos autores trabajaron con alumnos de educación secundaria y enfatizan un material didáctico que llaman *hojas para pensar el problema* y que son guías para describir las diferentes acciones que realizan los alumnos para resolver el problema. En este trabajo no se consideró necesario usar tales guías por ser alumnos de nivel superior, sin embargo, muchas de las preguntas que ellos plantean en sus guías se retomaron y el profesor se las plantea verbalmente a los alumnos durante la experiencia de aprendizaje. Los autores mencionados midieron el tiempo que los alumnos invierten en las diferentes acciones para resolver algún problema. Tales acciones las agruparon en diferentes categorías. Análisis: en el cual el alumno lee, relee, selecciona datos, anota datos del enunciado y los representa. Planificación: en ésta categoría se selecciona la estrategia general de resolución, se tantean las diferentes acciones para resolverlo, y se organizan tanto éstas acciones como los datos. Ejecución: el alumno realiza un conjunto de acciones y de procedimientos matemáticos para resolver el problema. Revisión: uno o los dos alumnos cuestionan la validez del resultado y buscan posibles errores. En la categoría de metacognición registran si los alumnos hacen reflexiones sobre el enunciado o la estructura del problema, sobre las capacidades para resolverlo o si reflexionan sobre el proceso de resolución. Nuestros resultados se muestran en la Tabla 1. En comparación con el trabajo de Pifarré y Sanuy estos alumnos de nivel superior dedican más tiempo al análisis y la planificación y menos tiempo a la ejecución, llama la atención en ambos casos el hecho de que dediquen tan poco tiempo a la revisión, pero eso puede deberse a que están más seguros del resultado por haber trabajado en equipo.

Tabla I. Estrategias Cognitivas y Metacognitivas	
Categoría	Porcentaje
Análisis	15%
Planificación	15%
Ejecución	30%
Revisión	5%
Inacción	18%
Metacognición	17%

Conclusiones

Se ha mostrado que es posible mejorar las estrategias para resolver problemas con alumnos de ingeniería en los temas de Probabilidad mediante la aplicación de una propuesta didáctica, en la cual se crean espacios para la discusión y el análisis alrededor de los procedimientos para la resolución de problemas, en la cual los alumnos se organizan en equipos de dos personas y por un profesor que contextualiza los problemas, que utiliza métodos de enseñanza que hagan visibles las acciones para resolver un problema y que prepara materiales didácticos que incentivan la selección y organización de los diferentes procedimientos. Por otro lado, la complejidad de los problemas matemáticos requiere que las estrategias para resolverlos se prueben una y otra vez en periodos largos de tiempo y que se intenten en diferentes áreas, por lo que sería necesario aplicar esta metodología a los demás cursos de Matemáticas y de Física.

Referencias bibliográficas

Blanco, L. (1998) *Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar matemáticas.* Cultura y Educación, 9, 77-96.

Carrillo, J.(1998) *La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué.* Épsilon, 40, 15-16.

Corte, E.(1993) *La mejora de habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación*, en Beltrán, J. A. & Vercejo, V. & Prieto, M. & Vence, D. (1993) Intervención psicopedagógica, 146-148. Madrid: Pirámide.

Derry, S. (1990). *Learning strategies for acquiring useful knowledge*, en Jones, B. & Idol, L. (eds.). Dimensions of thinking and cognitive instruction, 347-380. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F.(1994). *Mussings about mathematical problem solving research: 1970-1974.* Journal for researh in mathematics education, 25(6), 660-675.

Pifarré, M. & Sanuy, J.(2001) *La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto*. Enseñanza de las ciencias, 19(2), 297-308.

Schoenfeld, A.(1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. D. Grouws, Ed., New York, Macmillan, 334-370.

Modelación didáctica de la representación y su formación en el proceso de resolución de problemas matemáticos

Isabel Alonso Berenguer

Universidad de Oriente. Cuba

ialonso@csd.uo.edu.cu

Resumen

En el trabajo se propone un modelo didáctico de la representación del problema matemático y su formación en el proceso de resolución, que presenta como novedad científica, la concepción y fundamentación del representar como una habilidad, con una estructuración donde se integran las operaciones externas e internas, como dos fases cuyo resultado tributa a la excelencia de la representación. También se devela la representación como una dimensión dinamizadora del proceso de resolución de problemas matemáticos.

La representación de un problema matemático

Un referente importante, que a los propósitos de la modelación teórica se tiene en cuenta, lo propicia la Didáctica de la Matemática cuando postula que mediante el trabajo con las representaciones los estudiantes asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, sin lo cual no es posible la resolución de problemas. También constituye un referente, la Psicología Cognitiva Contemporánea y dentro de ella, dos de sus direcciones fundamentales: la Escuela Histórico Cultural con su tesis sobre el origen histórico social de las funciones psíquicas superiores y el Enfoque del Procesamiento de la Información, basado en la semejanza entre los programas computacionales y los procesos cognitivos.

De acuerdo con la Escuela Histórico Cultural, las funciones psicológicas superiores tienen una estructura mediatizada y para comprenderlas es necesario estudiar los instrumentos que actúan como mediadores. En el contexto de la Matemática estos instrumentos mediadores adquieren importancia esencial, al no ser los objetos matemáticos directamente accesibles a la percepción, sino, por el contrario, construcciones de la mente que requieren de su representación.

El Enfoque del Procesamiento de la Información estudia la cognición humana en términos de los procesos por medio de los cuales las entradas sensoriales son transformadas, reducidas, elaboradas, almacenadas, recuperadas y usadas. El hecho de que se haya postulado la existencia de representaciones mentales brinda un basamento teórico de gran importancia para introducir, en esta investigación, la modelación didáctica de la representación interna, poco trabajada en la didáctica de la Matemática, en su necesaria interrelación con la representación externa, para la resolución de problemas matemáticos.

A partir de este paradigma del procesamiento de la información, se asume que el resolutor se forma una organización interna de la información que le brinda el problema, la que va reelaborando en función de los intercambios con el exterior y, sobre la base de esta organización interna (esquemas, reglas, etc.), interpreta, resignifica y configura en forma dinámica el problema. Así, la representación de un problema puede verse como el procesamiento de la información que éste brinda, regulado por la BCE del resolutor.

Para profundizar en cómo el estudiante se representa y resuelve un problema matemático surge la necesidad de una nueva definición de problema, que explicite el tipo de información que brinda éste y su estructura. De aquí que se defina un problema matemático como una situación matemática que contempla tres elementos objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: *condiciones y exigencias relativas a esos elementos; y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias.*

Una vez definido el problema matemático, es necesario pasar al estudio de la representación del mismo. Para ello pueden encontrarse conceptos generales de representación, representación interna y representación externa, los cuales no se ajustan a los requerimientos de esta investigación, siendo necesario dar una definición de representación de un problema matemático, es decir: *abstracciones de los objetos, características y relaciones que intervienen en el problema que se está resolviendo, las cuales son formadas e integradas sobre la base de los conocimientos y experiencias adquiridos previamente, reflejadas en forma de imágenes y conceptos y manifestadas a través de la expresión oral, símbolos escritos, dibujos o tablas.*

Poder desarrollar el proceso de representación de un problema implica una habilidad, que como tal se puede formar en los estudiantes. Sin embargo el *representar* como habilidad no ha sido tratada por los didactas, no habiéndose develado su estructura operacional, de ahí que no exista un instrumento que oriente a los docentes sobre la forma en que debe realizarse dicha formación y en esa dirección se dirige esta investigación. A continuación se explican las operaciones que conforman la habilidad en cuestión.

La formación de una representación de un problema matemático requiere que el resolutor descomponga mentalmente el problema en sus partes e identifique los elementos que intervienen en el mismo. Para ello requerirá de la comparación de esos elementos del problema con conceptos disponibles en su base de conocimientos y experiencias (BCE), de manera que los mismos adquieran un significado objetivo. Así, en el momento de la identificación necesitará adicionar información, resultado de esa comparación, necesaria para hacer inferencias adecuadas. Adicionar información es "vestir" al problema con elementos que no posee, que tiene el resolutor guardados en su BCE.

Una vez identificados los elementos involucrados, se requerirá de su comparación y del establecimiento de nexos entre ellos y con respecto a las componentes del problema, de manera que se puedan seleccionar los aspectos relevantes, en dependencia de las exigencias y condiciones del problema. Esta identificación y selección de los elementos relevantes, su posterior abstracción del análisis de las partes y su integración, dan lugar a una síntesis y conclusión, al nivel superior, en el conocimiento del problema.

El proceso de abstracción - generalización desarrollado hasta aquí, se logra a través de un proceso de análisis y síntesis por medio del cual se lleva a cabo el aislamiento de unos aspectos de otros, el establecimiento de relaciones entre ellos y la selección de los esenciales o relevantes. A partir de la integración de los elementos considerados esenciales, se alcanza una síntesis como resultado de la integración de los mismos en función de las condiciones y exigencias del problema, lo que constituye una primera representación del problema y un peldaño superior en su comprensión.

A través de todo este proceso se establece un canal de comunicación entre la BCE del resolutor y los elementos del problema, mediados por las condiciones y exigencias del mismo. Esto permite realizar comparaciones sistemáticas entre los elementos del problema y los conceptos y experiencias almacenadas en la memoria del resolutor. El intercambio se establece mediante un proceso de análisis y síntesis como base de generalizaciones que se van haciendo y que permiten la adición de la información necesaria para profundizar y precisar la información que da el problema. La exteriorización, de la representación del problema puede hacerse mediante la expresión verbal, el uso de gráficos, modelos etc.

Todo lo anterior permite presentar la habilidad representar un problema matemático con una estructura operacional conformada por las operaciones *descomponer* mentalmente el problema en partes, *identificar* los elementos que involucra, *comparar* y establecer nexos entre los elementos y en relación con el problema, *identificar* y seleccionar elementos relevantes para su solución, *integrar* los elementos seleccionados y *exteriorizar* la representación concebida a través de la expresión oral, un modelo, etc. Todas mediadas por las operaciones *comparar* los elementos del problema con los de la BCE del resolutor y *adicionar* información necesaria para la precisión de elementos que contempla el problema.

El proceso de resolución de problemas matemáticos

La representación es un proceso que dinamiza el proceso de resolución de problemas matemáticos, dado su carácter mediador en el conocimiento, permitiendo al resolutor dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Es una dimensión que nos ha posibilitado explicar el movimiento del proceso de resolución de problemas matemáticos y conceptualizar dicho proceso, de manera novedosa, como *la evolución de las representaciones del problema en el pensamiento del resolutor*. Las representaciones del problema que se van obteniendo a lo largo de su resolución, expresan el tránsito desde un primer estadio, es decir, desde la representación inicial, hasta un estadio final o solución.

Los eslabones del proceso de resolución de problemas matemáticos permiten expresar la lógica interna del mismo, a través de la relación temporal que se establece entre ellos. Así, identificamos como tales a *la valoración del problema, la concepción de una representación inicial del mismo, la generación progresiva de una serie de representaciones y la evaluación de la solución y del proceso.*

La valoración del problema permite determinar el grado en que éste se corresponde con los criterios que tiene el resolutor disponibles en su BCE, los cuales según A. Labarrere (1994), constituyen un sistema referencial que se ha formado a partir del análisis precedente de problemas que ha resuelto o visto resolver, y en los que se han desmembrado aquellos aspectos que serán motivo de valoración y que una vez observados se han guardado, integrados en un sistema que le permite valorar otros problemas. De esta manera, la relación entre el *problema matemático* y la BCE del estudiante da lugar a una *representación general* de dicho problema que determinará el surgimiento, o no, de la necesidad de resolver la dificultad intelectual que el mismo trae implícita.

Una vez que el estudiante comienza a ocuparse de la resolución del problema, se manifiesta el eslabón *concepción de una representación inicial del mismo*. Se orienta en la tarea, comienza a representarse los objetos que intervienen en el problema, la lógica de sus relaciones, nexos y cualidades y empieza a generar esquemas virtuales de solución.

Para conformar una representación interna requerirá de operaciones ya explicadas en la estructura operacional. Al culminar la fase interna, el producto obtenido puede ser considerado como una representación inicial del problema, pudiéndose exteriorizar a través operaciones como graficar, simbolizar, expresar verbalmente, modelar o simular. La exteriorización de la representación interna puede dar lugar a su perfeccionamiento ya que permite hacer un análisis más completo. La interrelación y el equilibrio entre las dos fases de la representación tienen su manifestación en la excelencia del producto obtenido.

El tercer eslabón, *generación progresiva de una serie de representaciones,* parte de la representación inicial obtenida. En la generalidad de los casos la vía de solución de un problema no es obtenida con la primer representación, por lo que será preciso generar otras, más elaboradas, que conduzcan a la misma. Esto lleva a la sistematización de dicha representación. Para lograr esta generación de representaciones, será necesario adicionar elementos que vayan enriqueciendo cada representación del problema en la dirección de la solución. Estos elementos deben facilitar el paso de una representación a otra que debe ser cualitativamente superior ya que estará más cercana a la solución.

La determinación de los elementos a adicionar dependerá de los conocimientos del resolutor, el que deberá recuperar de su memoria, los conceptos, métodos y procedimientos que puedan ser congruentes con la representación a transformar, los que deberá probar. En caso de no resultar aplicables deberá descubrir o elaborar el procedimiento adecuado.

La representación inicial del problema, activa el conocimiento específico guardado en la memoria del resolutor. Cuando uno de los esquemas del mismo se relaciona con la representación en cuestión, éste guía sus acciones dando lugar a una representación que puede conducir a la solución. Si la aplicación del conocimiento específico lleva a una nueva representación (o representación transformada) que no aporta un avance en la búsqueda de la solución, se requerirá una reevaluación de las fases previas. Si se llega a una nueva representación del problema pero de ella no se obtiene aún la solución, se someterá al análisis la nueva representación obtenida con el objetivo de generar, a partir de ella, otra que sea cualitativamente superior y así hasta alcanzar la solución.

En caso de que el esquema de que dispone el resolutor no sea lo suficientemente rico como para que le permita abordar la solución del problema de manera directa, tendrá que guiarse por estrategias generales para buscar algún método específico de solución. Si la aplicación del método encontrado lleva a una nueva representación, pero ésta no genera un avance en la búsqueda de la solución, habrá que reevaluar las fases anteriores. Si se llega a una nueva representación pero de ella no se obtiene aún la solución, se continuará trabajando sobre la misma para tratar de generar otra cualitativamente superior y el proceso se desarrollará así hasta alcanzar la solución. Realmente, en la práctica, este eslabón no transcurre de una forma rígida. Aunque se tiende a usar más un conocimiento que el otro; ante un problema, ambos interactúan para llegar a la solución.

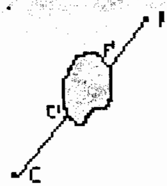
El cuarto eslabón se manifiesta una vez resuelto el problema, al hacer una *evaluación de la solución y del proceso.* Para someter a regulación los diferentes momentos de la solución, el resolutor debe introducir elementos comparadores, que son representaciones que tiene de cómo debería ser ejecutada la actividad y acerca de cómo ella se ha ejecutado realmente. De esta forma, al finalizar el proceso puede tener una representación general de cómo se desarrolló el mismo. Existen también los comparadores que se integran a partir de representaciones de resultados, los cuales permiten el control de la solución obtenida (Labarrere, 1994).

Ejemplo de Solución de un problema matemático

En la Grecia antigua la población de una ciudad creció tanto que el abastecimiento de agua llegó a ser insuficiente y fue necesario conducir el agua desde los montes vecinos. Como una alta montaña se interponía entre la ciudad y la fuente, no había otra alternativa que cavar un túnel. Los constructores del túnel comenzaron la excavación a ambos lados de la montaña y se encontraron en el centro, según lo planificado. Cómo determinaron los planificadores la dirección exacta de manera que ambos grupos se encontraran?

Una vez leído y valorado el problema, y que ha surgido un interés por hallar su solución, comienza una segunda lectura más detallada de la situación original; se van analizando las partes, comparando sus elementos con los conocimientos almacenados en la BCE, e identificando los objetos involucrados. Dichos objetos, en este problema, resultan muy comunes, pues se trata de una ciudad, una fuente, un túnel y una montaña. Si se profundiza en el estudio de las características de estos objetos y sus relaciones, se puede pensar en considerar dos puntos, uno simbolizando la ciudad y el otro la fuente. Además, el supuesto canal a construir, se puede imaginar como el segmento de línea recta que une esos dos puntos y la montaña interponiéndose.

Al relacionar todo esto con la exigencia del problema, puede llegarse a que la dificultad está en cómo trazar esa dirección a ambos lados de la montaña, dado que desde uno de estos puntos no se divisa el otro. La exteriorización de la representación interna que del problema se tiene puede hacerse mediante la siguiente representación geométrica:

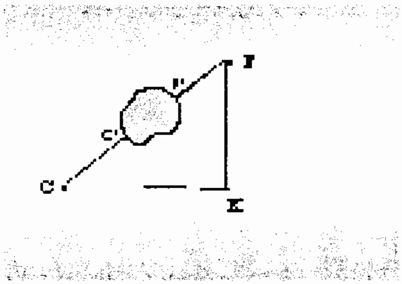


Aquí C^1 y F^1 son puntos en la base de la montaña sobre la recta CF, quedando integrados todos los elementos considerados en dicha representación. Debe puntualizarse cómo para su formación no fue necesario tener en cuenta que la situación ocurrió en Grecia ni elcrecimiento de la población, dichos aspectos se excluyeron del análisis, trabajando sólo con la información que se consideró relevante. Puede notarse, además, la adición de objetos matemáticos para representar los objetos reales del problema.

crecimiento de la población, dichos aspectos se excluyeron del análisis, trabajando sólo con la información que se consideró relevante. Puede notarse, además, la adición de objetos matemáticos para representar los objetos reales del problema.

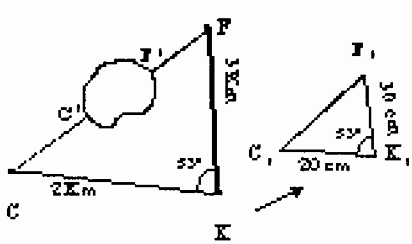
La insuficiencia de esta representación inicial del problema está dada por la imposibilidad de conectar directamente los puntos C y F. Sin embargo, estos se podrían conectar indirectamente a través de un tercero (adición de un nuevo objeto). Para ello será necesario seleccionar un punto K desde el cual sean visibles C y F. Esta extensión de la representación del problema nos lleva al plano, donde tenemos tres puntos C, F y K, los cuales determinan un triángulo.

La nueva representación del problema (o representación transformada), después de adicionado el punto K y relacionado con los otros puntos C y F mediante los segmentos KC y KF, puede expresarse mediante la siguiente representación geométrica:



Al comparar esta representación con los conocimientos almacenados en la BCE, se puede llegar a recordar información importante para la solución buscada. Por ejemplo, se sabe que conocer completamente un triángulo significa conocer las medidas de sus lados ángulos y que hay diferentes criterios que permiten, a partir del conocimiento de algunos de estos elementos, determinar los restantes. Observando la actual representación del problema, se puede ver que los segmentos KC y KF son medibles, así como el ángulo correspondiente al vértice K. Sin embargo desde el punto C no puede verse el punto F y viceversa, motivo por el cual los ángulos en los vértices C y F no son medibles, como tampoco lo es el segmento CF, es decir, pueden conocerse dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre estos.

Como la dirección CK es conocida, si se tuviera la magnitud del ángulo en el vértice C, podría trazarse la dirección CC^1. Análogamente, si se conociera la magnitud del ángulo enel vértice F podría trazarse la dirección FF^1. Es decir, que el conocimiento de estos ángulos es suficiente para la solución del problema. Pero es imposible medir directamente en el terreno los ángulos en los vértices C y F. Sin embargo, en este caso puede emplearse la semejanza de triángulos. Se construye sobre papel un triángulo que posea un ángulo igual al ángulo en el vértice K y los lados que comprenden a este ángulo posean una misma razón de proporcionalidad con los lados KC y KF. Suponiendo que la distancia KC fuera de 2 Km., la KF de 3 Km. y que el ángulo CKF fuera de 53^0, puede dibujarse el triángulo semejante $C_1K_1F_1$ con longitud K_1C_1 de 20 cm y longitud K_1F_1 de 30



cm y con un ángulo $C_1K_1F_1$ de 53^0. Visto así, la representación geométrica del problema sería como se muestra en la figura:

Como los triángulos tienen ángulos homólogos iguales, el ángulo KCC^1 es igual a $K_1C_1F_1$ y el ángulo KFF^1 es igual a $K_1F_1C_1$. Y como en el triángulo construido podemos medir los ángulos $K_1C_1F_1$ y $K_1F_1C_1$, queda resuelto el problema. Notar que la solución del problema permite calcular el largo del túnel y de aquí, el trabajo a realizar por los constructores.

Como puede observarse, durante el proceso de solución se formó una *representación inicial del problema*, para lo cual hubo de realizarse un proceso de análisis y síntesis que permitió la adición de la información necesaria para profundizar y precisar la que brindaba el problema. Dicha representación se fue transformando a partir de la adición de nuevos elementos, hasta llegar a una que permitió calcular la solución del problema.

Conclusiones

La modelación didáctica de la formación de representaciones de problemas matemáticos que se propone se ha fundamentado a partir de importantes y actualizados referentes teóricos.

La concepción del representar como habilidad y su estructuración de manera tal que se integran las operaciones internas y externas como dos fases cuyo resultado tributa a la excelencia de la representación del problema, constituye un resultado novedoso dentro de la modelación que se presenta.

La concepción de la representación en calidad de dimensión dinamizadora del proceso de resolución de problemas matemáticos permitió explicar el mismo, y conceptualizarlo como la evolución de las representaciones del problema en el pensamiento del resolutor.

Referencias bibliográficas

Alonso, I. & González, H. (2003). *¿Cómo tener éxito al resolver problemas matemáticos*? Libro de texto. Ed. Visión Creativa. Bolivia.

Fridman, L. & Turetski, E. (1989). *Como aprender a resolver problemas*. Ed. Ilustración. Moscú.

Krantz, S. (1997). *Techniques of Problem Solving.* American Mathematical Society. USA.

Labarrere, A. (1994). *Pensamiento. Análisis y autorregulación en la actividad cognoscitiva de los alumnos*. Angeles Editores. México.

Morenza, L. (1997*). Psicología Cognitiva Contemporánea y Representaciones Mentales. Algunas aplicaciones al aprendizaje*. Curso Pre-Congreso Pedagogía'97. C. H. Cuba.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Ed. Tecnos. Madrid. España.

Rubinstein, J. (1967). *Principios de Psicología General*. Ed. Pueblo y Educación. Cuba.

Desarrollo del pensamiento a través de la búsqueda de relaciones

Joaquín Palacio Peña, Adognis Aguilar Pérez, Disocorides Miranda, José L. Sánchez Santiesteban y Esmereldo Carbó Salazar.
Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero". Holguín. Cuba.
palacio@cristal.hlg.sld.cu palacio@isp.holguin.inf.cu

Resumen

Este trabajo está dirigido a evitar la tendencia a la ejecución inmediata que manifiestan los estudiantes para resolver problemas matemáticos. Para ello se presenta como proceder para el logro de este objetivo, mostrando ejemplos donde los alumnos tienen que detenerse forzosamente a pensar, pues se pide la búsqueda de relaciones que no exigen cálculos numéricos. Por otra parte, las situaciones que se presentan no llevan implícito los contenidos matemáticos a aplicar. Ambas situaciones están dirigidas a mostrar la necesidad de redescubrir contenidos que en algún momento han sido explicados por su maestro o profesor.

Introducción

Cuando dedicamos nuestra vida laboral a la enseñanza de las ciencias, lo hacemos en una entrega total, pero lamentablemente, cada año, al terminar el curso escolar y pasar revista al trabajo realizado, regularmente comprobamos que los resultados obtenidos, no están en correspondencia el esfuerzo desarrollado.

Es posible que existan muchos factores que incidan negativamente en estos resultados no deseados, por ejemplo, la pobre dedicación al estudio de nuestros estudiantes, mal trabajo de los docentes que nos han precedido, limitaciones intelectuales de los alumnos, la influencia del medio social y en particular el hogareño, la organización escolar, la asistencia de los alumnos a clases, etc.

Los docentes, regularmente hacemos recaer los pobres resultados obtenidos a una o varios de los problemas citados con anterioridad u otros que quizás hemos omitido, pero nunca hacemos un análisis introspectivo de nuestra labor en el aula, a fin de valorar los recursos pedagógicos que pudieran existir y que nosotros no hemos aplicado.

En nuestro contacto con los estudiantes de varias escuelas de nuestra provincia, a lo largo de nuestra vida laboral, nos hemos encontrado diversas situaciones que merecen un análisis didáctico que quizás conduzcan a facilitar el trabajo docente. En este trabajo deseamos presentar algunos de estos problemas

La simple lectura de los aspectos que pensamos enumerar, consideramos que puede contribuir a que meditemos en ellos y por tanto, nos traigan beneficios en el trabajo docente futuro. Los aspectos que deseamos enumerar son los siguientes:

- ¿Qué hacemos para evitar el impulso a la ejecución inmediata de nuestros alumnos?
- ¿Nos preocupamos por la forma en que nuestros alumnos captan la información, interpretan el contenido y exponen sus ideas?
- ¿El enunciado de los problemas llevan implícito los contenidos a aplicar o son los alumnos los que tienen que redescubrirlos?

- ¿Proponemos en nuestras clases problemas en forma sistemática?
- ¿Proponemos problemas sobre contenidos que se han impartido con anterioridad o todos son sobre la temática que estamos desarrollando?
- ¿Tenemos presente la sistematicidad de la enseñanza?
- ¿Proponemos situaciones de la vida real para buscar un modelo matemático y darle solución, o nos limitamos a dar el modelo en todas las oportunidades?

Los invito a que lleguen a un aula y cuando el docente plantee un problema a sus alumnos, esperen que empiecen a trabajar, acérquense a uno de ellos (que se supone esté trabajando), pídanle o ciérrenle la libreta y pregunten por el contenido del problema que está resolviendo; notarán que son muy pocos los que pueden decirle de qué trata, cuáles son los datos que se le ofrecen y cuál es la pregunta formulada; y si esto es así ¿qué están tratando de resolver?. Evidentemente jamás podrán llegar a un resultado satisfactorio. A este accionar de los alumnos es lo que hemos llamado tendencia a la ejecución inmediata. ¿Qué está sucediendo en nuestras aulas respecto a la resolución de problemas?. Lo que sucede es que apenas el alumno ve un número, una fórmula, una función, una figura que le resulta familiar; ya empieza a trabajar con ella sin preocuparse en lo absoluto de la situación planteada y de los conocimientos que puede extraer de forma explícita o implícita de los datos, figuras, preguntas, etc. Esto en el mejor de los casos pues puede suceder que ni siquiera nos oiga lo que hemos dicho, pues está pensando en algunos de los múltiples programas que ocupa hoy día la mente de gran parte de nuestra juventud: lo que sucederá en la telenovela que sigue por televisión; en la última moda vista en la revista o que usaba una amiga o amigo; en la salida planificada para el fin de semana; en el artículo que piensan comprar y en cómo pedirle el dinero a los padres, etc. ¿Qué hacemos para resolver esta situación? No exageramos cuando decimos que nada o casi nada. Entre los objetivos de nuestro trabajo está proponer algunas indicaciones que nos permitan incidir favorablemente sobre los tres primeros aspectos planteados en la página anterior. Nos limitamos a los tres primeros aspectos debido a las normas exigidas para este tipo de trabajo, en cuanto extensión.

En la colección de ejercicios que se proponen al final de este trabajo puede apreciarse que la forma en que están redactados evita la ejecución inmediata, pues no conlleva cálculos numéricos que necesiten lápiz y papel, solo se exigirá un proceso de búsqueda de relaciones, para descubrir como llegar a solucionar la pregunta que se formula, actividad a la que no están acostumbrados nuestros escolares.

Consideramos que si entrenamos a los estudiantes en esta vía, llegará el momento en que ante un problema que exija cálculos numéricos, se detendrán a pensar previo a la ejecución y posteriormente seguirán una vía segura y consciente que los conduzca al éxito.

Los problemas presentados tienen características matemáticas y/o de otro tipo. ¿En qué momentos deben plantearse este tipo de preguntas? Es posible que muchas de ellas se puedan situar en clases específicas en relación con las temáticas contempladas en nuestros programas vigentes; otras tendrán que plantearse en actividades extraescolares, quizás en un mural apropiado, para que los alumnos la puedan tomar para su realización en el hogar; otras pueden proponerse de tareas. Lo que si estamos seguros es que todas serán recibidas con agrado por los alumnos, pues encierran situaciones no solo de carácter escolar, sino que constituyen un verdadero entretenimiento para todos los escolares y más, para los que no son escolares, a la vez que encierran gran valor formativo.

El trabajo está recogido en un software de fácil manejo y que le permite al estudiante ir evaluando sus respuestas y obtener un resultado final. Estas las hemos agrupados de manera que correspondan a:

- Relaciones entre números.
- Relaciones entre figuras.
- Relaciones entre números y letras
- Relaciones entre letras
- Relaciones entre figuras y números o letras

Otra situación que pretendemos abordar en este trabajo está en relación a si nos preocupamos por la forma en que nuestros alumnos captan la información, interpretan el contenido y exponen sus ideas. No hace falta plantear nuevas situaciones que ilustren esta parte del trabajo, pues los problemas que presentaremos al final sólo tienen solución si el alumno capta e interpreta profundamente la información que se ofrece; además, la respuesta es oral, por lo tanto tendrá que elaborar hipótesis y exponer sus ideas respecto a las relaciones captadas y como es capaz de inferir nuevas relaciones. Esto nos permitirá monitorear el pensamiento de nuestros alumnos y con la sistematicidad de la actividad podremos observar el avance que realiza y resolver los problemas que se le vayan presentando. Todos sabemos las limitaciones que tienen nuestros alumnos para expresar sus ideas, en realidad normalmente los alumnos saben más que lo que dicen, pues es frecuente oír decir a un estudiante, que él sabe resolver una situación dada, pero que no sabe como decir lo que tiene que hacer. No hay por que dudar que estos ejercicios contribuyan en gran medida al desarrollo de la lengua materna.

A continuación ofrecemos algunos ejemplos de cada una de las secciones de que consta el trabajo.

I. Relaciones entre números

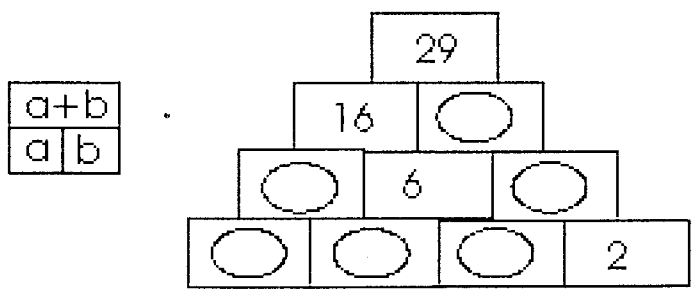
1. ¿Dónde debe colocarse el número 37, arriba o abajo?

3 7 11 17 23 29 31

---

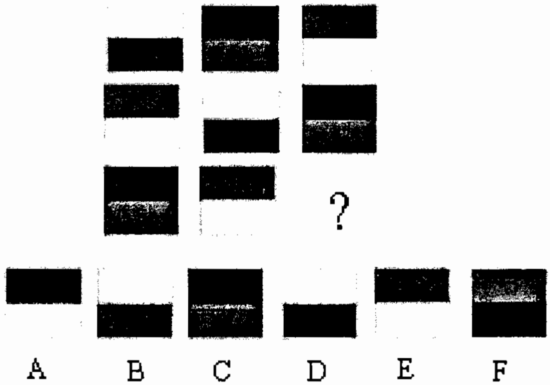
6 9 12 14 15 24

2.- Basado en la indicación dada en la parte superior izquierda, complete la pirámide. (Matemática. Lineamientos curriculares, 1998)



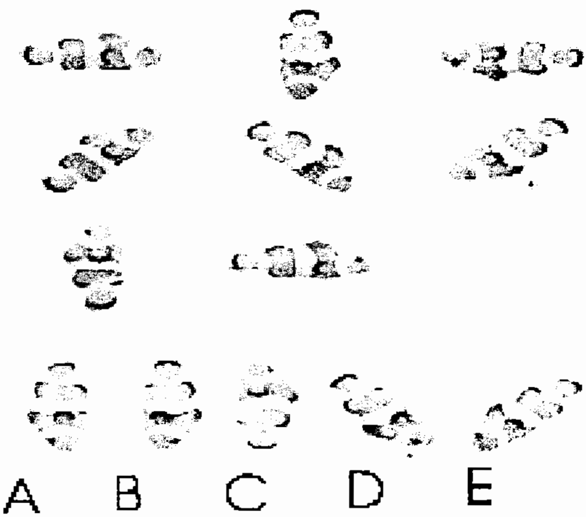
II. Relaciones entre figuras.

1. Cuál de los cuadrados de la última línea completa el diagrama?.



2.- ¿Cuál de los peces de la fila final completa el diagrama?

(Butter E. and Pirrie M. 1990).

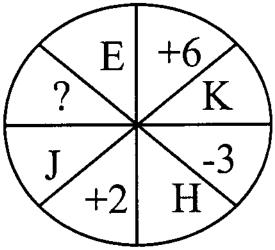


III.- Relaciones entre números y letras.

1.- Sustituya las letras por los números a fin de obtener un resultado correcto (Analiza dos posibilidades)

$$\begin{array}{rcccc} & \mathbf{S} & \mathbf{E} & \mathbf{I} & \mathbf{S} \\ + & \mathbf{S} & \mathbf{E} & \mathbf{I} & \mathbf{S} \\ \hline & \mathbf{D} & \mathbf{O} & \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{array}$$

2.- ¿Cuál es la letra o el número perdido?



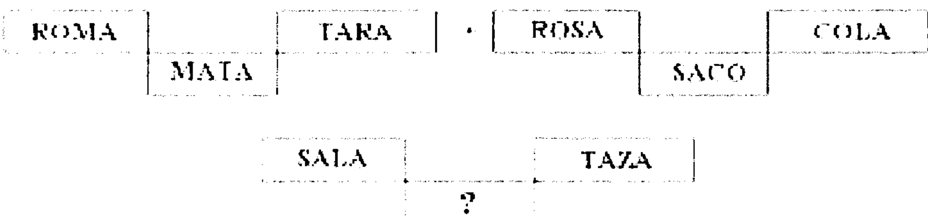
IV.-Relaciones entre letras

1.- La escritura de las palabras dadas tiene una característica común. Descúbrala y entonces complete la escritura de la palabra final de manera que tenga la misma característica.

M U R C I É L A G O	**C U L T I V A D O R E S**
E M U L A C I O N	**N U M E R A C I Ó N**
S I M U L T A N E O	**R E F U G I A D O S**

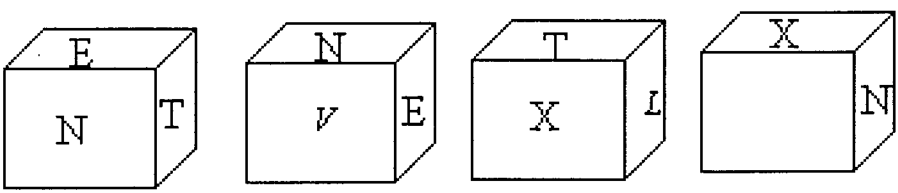
--D – C – C -- -- N.

2.- ¿Cuál es la palabra perdida?

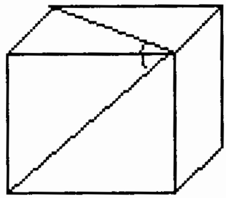


V. Relaciones entre figuras y números o letras

1.- En el diagrama están representadas cuatro diferentes posiciones de un mismo juguete que tiene forma de cubo. Escriba la letra que falta en la cara que está en blanco. (Butter, E. and Pirrie, M, 1990).



2.- ¿Cuál es el valor del ángulo señalado entre las dos diagonales de las caras del cubo representado en la figura? .



Conclusiones

Actualmente son más los trabajos dirigidos a resolver directamente el problema de la impartición de los contenidos que los dirigidos o que contemplan los problemas sociales que existen en nuestras aulas. Si no sabemos manejar las distintas situaciones sociales que se presentan en nuestras aulas, no lograremos llevar con eficiencias la docencia a nuestros estudiantes. Tampoco vamos a caer en el extremo opuesto, esto es, considerar que resolver los problemas sociales es lo principal y lo demás es lo secundario. Hay que llevar las dos situaciones a la vez y estar consciente de que están en nuestras aulas y que nosotros somos los encargados de resolverlas. Nuestra propuesta de búsqueda de relaciones previo a la resolución de los problemas parece no constituir algo nuevo en la enseñanza de la Matemática pues los distintos modelos, sea de una forma o de otra, siempre hablan de una etapa de comprensión del problema y en realidad, la búsqueda de relaciones debe estar incluida en esa importante etapa; lo que si consideramos que es un aporte de nuestro trabajo es la forma de hacerlo, pues "obliga"a los estudiantes a tal búsqueda y lo hemos puesto entre comillas porque la forma en que planifica, no constituye una tarea tediosa para los alumnos, al contrario es algo entretenido que despiesrta la curiosidad del estudiante y cuando viene a darse cuenta ya está metido de lleno en ese proceso de razonamiento tan necesario en todo estudiante y en particular en los de cuencias.

Los software preparados con los ejercicios, su manera de presentarlos y evaluarlos, constituyen otro factor que hace que la actividad sea atrayente para los alumnos, pues la actividad tiende a convertirse en un "juego" atractivo, dando, además, oportunidad del uso de la computadora como medio de enseñanza, artículo éste que se encuentra en todas las escuelas de nuestro sistema nacional de Educación.

La experiencia obtenida en las visitas realizadas en las aulas, en las cuales hemos trabajado directamente con los alumnos, nos ha demostrado que el trabajo es útil y que los alumnos se sienten motivados por la actividad.

Referencias bibliográficas

Butter, E. & Pirrie, M. (1990). *Boost your IQ*. Pan Books Ltd.London

Campistrous, L & C. Rizo. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Ciudad de la Habana, Cuba.. Editorial Pueblo y Educación.

Garners, M. (1987). *More Mathematical Puzzles and Diversions*. England. Penguin Books

Jannseen, R. (1992). *Multiobjetive decisión suport for envionmental management*. Boston/London. Dordirecht: Kluwer Academic Publishers.

Labarrere, A. (1996). *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*. Ciudad de la Habana, Cuba. Editorial Pueblo y Educación

Matemática. Lineamientos curriculares. (1998). *Áreas obligatorias fundamentales*. Colombia. Ministerio de Educación Nacional

NCTM. (1994). *Estándares curriculares y evaluación para la enseñanza de la Matemática*. United States, Sociedad Andaluza de Ediciones Matemáticas "Thales".

Palacio, J. (2001). Hacia *una mayor efectividad en el aprendizaje de problemas matemáticos*. Congreso Internacional Pedagogía 2001. Ciudad de la Habana. Curso preevento. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (IPLAC).

Polya. G. (s/f). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Editorial Trilla.

University of Cambridge (1996). *Gce Olevel Mathematics Syllabus D*. Mauritius. R. Ramajanjooloo & Co. Ltd.

Las creencias en la solución de problemas matemáticos: enfoque desde la reflexión del alumno

Deysi de los Angeles Sánchez Santisteban
Facultad de Economía de la Universidad de La Habana. Cuba
dsanchezsan@fec.uh.cu

Resumen

Esta investigación fue la tesis de maestría de la autora, está basada en el estudio de las creencias de los alumnos del nivel medio superior con talento en las ciencias exactas. Fundamenta la influencia del sistema de creencias en el comportamiento humano y en especial en la resolución de problemas matemáticos.

En su parte fundamental muestra cómo en la práctica pueden transformarse y/o formarse el sistema de creencias en los alumnos mediante diferentes actividades encaminadas a ello, dentro de la propia clase. Dentro de ellas el trabajo con los problemas, Afrontamiento, Relo, Prueba de desarrollo y otras.

Obteniendo como resultado un mayor desempeño en la resolución de problemas, con la utilización de estrategias heurísticas y metacognitivas adecuadas, así como desarrollo del pensamiento. Para ello utilizamos la investigación- acción como método de investigación, como proceso educativo y como medio para adoptar decisiones. Los resultados de esta investigación ponen al servicio de los profesores un potente instrumento de transformación de la esfera motivacional valorativa para el caso de la solución de problemas matemáticos.

Creencias y solución de problemas

El estudiar cómo las personas resuelven problemas y cómo ello repercute en el ámbito educativo, es sin lugar a dudas una de las funciones esenciales de aquellos interesados en la educación matemática.

Durante el aprendizaje de esta disciplina, los alumnos estudian conceptos, teoremas, algoritmos, definiciones y estrategias que son utilizados para resolver problemas y lograr los objetivos propuestos en la enseñanza.

Si es así ¿por qué a pesar de tener conocimientos adecuados de contenidos y estrategias cognoscitivas, un alumno no llega a ser un buen resultor de problemas matemáticos?

En la actividad cognoscitiva y en especial la solución de problemas a la que se enfrentan los alumnos, influyen en él factores afectivos, cognitivos y motivacionales, dentro de ellos se encuentra el sistema de creencias que poseen y las estrategias metacognitivas (Campistrous& Rizo, 2000).

Es interés de nuestra enseñanza de la Matemática, que los alumnos aprendan a resolver problemas y por lo cual ha sido tema de investigación, dentro de ellas tenemos: con respecto a las habilidades (Delgado, 1999), los métodos heurísticos (Campistrous & Rizo, 1996) y algunos sobre metacognición (Hernández et al, 1997; Delgado, 1999 y Jiménez, 2000)

Sin embargo los factores afectivos que pueden incidir en el buen desempeño en la solución de problemas, entre ellos el sistema de creencias, no son tenidos en cuenta en las investigaciones y propuestas metodológicas realizadas, al menos de forma directa en la enseñanza de la Matemática en Cuba; a pesar de la actualidad del tema, estos han sido conocidos por literatura especializada (Schoenfeld, 1985, 1991, 1994; Sánchez, 2000) y en estudios realizados por A.F. Labarrere (1994, 2000).

Al analizar estos aspectos encontramos que los graduados del centro Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas (I.P.V.C.E). "V.I. Lenin" a pesar de tener un alto índice de entrada al nivel universitario, tienen dificultades en la competencia y desarrollo del pensamiento, dadas sobre todo por sus vagos procesos reguladores de la actividad, dentro de estos tenemos por ejemplo: autocontrol, reflexión, búsqueda de diferentes vías de solución, toma de decisiones, entre otros; todo lo anterior se acentúa en la no descripción de su propio pensar (aprender a aprender) y por creencias inadecuadas que poseen.

En nuestra opinión estas dificultades provienen del proceso de enseñanza-aprendizaje al que son sometidos, donde no se trabaja, por lo menos de manera consciente, sobre la metacognición ni con el sistema de creencias. Aquí influye no solamente el desconocimiento del docente de estos elementos, sino también que los criterios empleados son los de rendimiento y no los del desarrollo del pensamiento.

Por todo lo anterior nos planteamos el siguiente problema de investigación:

"¿Cómo puede contribuir un trabajo sistémico de reflexión, sobre la influencia de las creencias de los alumnos, a la transformación de creencias negativas en la solución de problemas y en la Matemática a través de procesos reflexivos y metacognitivos?".

Para el desarrollo de esta investigación nos propusimos como objetivos:

1. Explorar la relación entre metacognición, sistema de creencias, pensamiento matemático y solución de problemas.
2. Construir un modelo para el desarrollo del pensamiento matemático y la elevación de su competencia en la solución de problemas, en los alumnos del I.P.V.C.E. "V.I. Lenin".
3. Propiciar el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos y las habilidades para actuar sobre él desde el sistema de creencias y determinados factores metacognitivos.

Teniendo como objeto de la investigación, las creencias que poseen los alumnos a través de su influencia y transformación, utilizamos la investigación-acción como: método de investigación, como proceso educativo y como medio para adoptar decisiones para el desarrollo, en ella incorporamos algunos elementos de la investigación clásica o positivista, todo lo cual propicia: El desarrollo del docente y la formación del alumno; ya que los participantes (alumnos y profesor) están integrados e implicados en la actividad, el profesor aprende durante la investigación, le permite ir transformando la realidad directamente con un plan flexible y los alumnos participan y reciben el beneficio de todo el trabajo.

La investigación se realizó con 2 grupos de alumnos de la enseñanza media superior en los cuales la autora impartió clases durante todo el curso. Se siguió el comportamiento de los grupos y de tres casos de estudio.

La importancia teórica que tiene el trabajo radica, en el esclarecimiento de la influencia de las creencias sistematizadas sobre la actuación de los alumnos durante la solución de problemas matemáticos. La repercusión práctica está determinada por la incidencia directa que esta investigación ejerce en el contexto donde se realiza y la posibilidad de transferirla paulatinamente a situaciones similares, convirtiéndose en un instrumento en las manos de los profesores. La presente pone al servicio de los maestros un potente instrumento de transformación de la esfera motivacional valorativa para el caso de la solución de problemas matemáticos.

Teniendo en cuenta el desarrollo vertiginoso de la ciencia y la técnica, donde cada día el volumen de información es mayor, es más provechoso que los alumnos aprendan procesos del pensamiento, que le permitan estructurar sus conocimientos (establecer conexiones entre los conocimientos pertinentes que posee y los nuevos conocimientos) que le permitan enfrentarse a las tareas matemáticas o para la solución de problemas. Nos preguntamos entonces ¿cómo enseñar a pensar si no conocemos los factores que influyen en su desarrollo?

¿Qué son las creencias?

En el contexto de la enseñanza de la Matemática y en particular la resolución de problemas encontramos este concepto referido por diferentes autores, entre ellos tenemos a Schoenfeld, 1987 (referido en Sánchez, D., 2000), que realizó estudios que le permitieron entender como los estudiantes intentan resolver problemas y consecuentemente proponer actividades que puedan ayudarlos. Encontró que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas, que denominó categorías, estas son: dominio del conocimiento o recursos, los métodos heurísticos, estrategias metacognitivas y el sistema de creencias; sobre este última plantea:

"Es el conjunto de puntos de vista, de representaciones subjetivas, que la persona va interiorizando (individualizando) y reforzando o debilitando en el de cursar de su vida. Este sistema establece el contexto dentro del cual los recursos, la heurística y el control funcionan".

Las creencias pueden darse en cuatro direcciones:

- Sobre sí mismo: es todo lo que cree sobre él.
- Sobre el entorno: el papel que cree jugar o desempeñar ante sus compañeros, profesor, etc.
- Sobre el problema: si es capaz o no de resolverlo, así como las reglas para resolver el problema.
- Sobre la matemática: ¿como asignatura es para mí o solo para genios? ¿La Matemática es memorizar relaciones o es percibir estructuras, analizar problemas?

Podemos entonces plantear que las creencias de los alumnos se fueron formando en el transcurso de su enseñanza, en un proceso evolutivo, influyendo positiva o negativamente en su desarrollo.

Luego entre los objetivos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas se debe encontrar el "remover" las creencias inapropiadas que tenga el alumno de las matemáticas y en particular de la resolución de problemas; aprovechando de forma consciente las creencias apropiadas.

Uno de los factores motivacionales más significativos para la adquisición del Comportamiento Social Pro Activo (CSPA) (Moscoso, 1991), es la creencia de que uno intenta y desea un mayor desarrollo personal. Se considera que el inicio de la acción es un elemento esencial para obtener resultados positivos y como vía eficaz en la autorregulación de los estados emocionales y de la conducta.

Cuando un alumno conoce sus metas y cree en sus posibilidades, tiende a autoevaluar su rendimiento y a su vez a autorregularse, sirviendo esto como motivación para continuar la actividad. Uno de estos factores motivacionales es la autoeficacia, que está relacionada con la creencia del individuo en sus propios recursos y habilidades que le permiten movilizar un adecuado nivel de motivación para el inicio de un plan de acción, destinado a ejercer un adecuado control sobre su conducta.

Dentro de los factores que influyen negativamente, tenemos el afrontamiento al temor (fracaso, rechazo, éxito), al autosabotaje y al control de diferentes estados emocionales, aquí están presentes las creencias que tenga el alumno sobre sí mismo y del entorno.

Estos factores como hemos referido, están muy relacionados con las creencias, e influyen con gran fuerza en el comportamiento no solo en la conducta social, sino en la actividad de aprendizaje, en la solución de problemas..

Lo mismo que en otros campos, en el de las matemáticas las personas construyen sus creencias que pueden variar por el dominio que abarquen y por el grado de generalidad. De esta forma existen creencias que pueden referirse a la propia persona como sujeto que revisa la actividad, los medios, los objetos, las otras personas, los criterios con que se valora y una infinidad de otros elementos.

La manera en que las creencias se relacionan, en una misma área o campo, depende de un conjunto de factores, como son la magnitud de su integración en un sistema, la conciencia que tenga la persona respecto a cuáles son sus creencias y cómo se han formado, etc.

Por lo común, la persona suele no tener conciencia de sus creencias, salvo que medie una actividad especialmente dirigida a proporcionar esta conciencia que, como vemos resulta de un proceso reflexivo y autorreflexivo.

A esto es a lo que encaminamos el trabajo, creando técnicas y actividades que propicien el autoconocimiento y evolución de las creencias de los alumnos.

Después de conocer como las creencias que poseen los alumnos opera, como el elemento regulador, nos planteamos la necesidad de actuar sobre ellas. Con esta finalidad asumimos como necesario:

1. Identificar las creencias más comunes que poseen los alumnos y la forma en que ellas se manifiestan.
2. Conocer las estrategias metacognitivas que aplican y la manera en que se reflejan en el sistema de creencias.

Para incidir sobre las creencias, partimos de un modelo teórico en el cual están presentes

I. Sistemas de Creencias.
II. Pensamiento y la acción en el contexto de la Matemática
III. Metacognición
IV. Resolución de problemas como medio de transformación.

¿Qué nos proponemos con este modelo?

Influir en el sistema de creencias de los alumnos de manera que proporcione en un proceso, la formación y/o transformación de las creencias inadecuadas y aprovechamiento de las adecuadas (de forma consciente) conlleve a una autorregulación de su conducta y procesos del pensamiento, poniendo así en acción procesos metacognitivos, que a su vez se revierten en un cambio en el sistema de creencias, en su pensar y actuación.

En un primer momento, los alumnos no tienen conocimientos de sus creencias, son inestructuradas, es decir no son conscientes de ellas ni de su influencia. Después de la intervención se comienza con un reconocimiento de las creencias individuales y grupales, un autoconocimiento y conocimiento de ellas, es un comienzo en la toma de conciencia. Luego comienza la diferenciación de las creencias con una transformación de las inadecuadas y aprovechamiento de las adecuadas, todo en un proceso de fijación y exteriorización, para incidir en las creencias de los demás.

Técnicas y actividades

Estas actividades se dan a partir de un modelo teórico donde se crean las condiciones en que:

a) El sistema de creencias sea objeto de atención y acción consciente del alumno y el profesor.

b) Se genere una filosofía "Actuar sobre el sistema de creencias".

c) La resolución de problemas sea un elemento clave, por su poder desarrollador del pensamiento.

d) Se fomente la interacción entre alumnos (grupo), entre este y su profesor, de los alumnos con sus propios conocimientos y creencias.

e) Se produzca un aprendizaje significativo y con ello la estructuración de conocimientos y la manera de pensar y actuar.

f) El error tenga una función constructiva.

g) Se desarrollen procesos del pensamiento a través de los contenidos.

Las actividades constaron de dos fases, la primera durante las primeras 17 semanas del curso y la segunda las 23 restantes semanas:

La 1era Fase se caracterizó por conocer e incidir en las creencias predominantes que poseían los alumnos (dadas por los resultados de los primeros instrumentos)

- Presentación grupal. Para un conocimiento y autoconocimiento del grupo, creencias, aspiraciones, e información de la participación en la investigación
- Para las situaciones de interacción utilizamos el trabajo con grupos pequeños y otra que llamamos Pensar y Actuar.
- Trabajo con los problemas En un primer momento enfrentamos a los alumnos a diferentes situaciones para trabajar las creencias señaladas. La lógica de nuestro trabajo es la siguiente: habíamos visto què no tienen conocimiento de las creencias, luego es necesario enfrentarlos con sus creencias, que las conozcan y diferencien, mediante reflexión y autorreflexión, que trabajen con ellas para poder modificarlas o aprovecharlas, para lo cual se emplearon diversos tipos de problemas.

Se presenta el problema, se soluciona por parte de los alumnos, se analizan las estrategias empleadas correctas e incorrectas, el por qué respecto a la solución e identificando las creencias que pueden estar asociadas a los alumnos positiva o negativamente. Este fue el modo de proceder con los problemas durante todo el curso.

- Tratamiento individual. Esta técnica (Jiménez,; 2000) la utilizamos para aquellos alumnos que presentaban menos avances en la asignatura y con creencias negativas muy fuertes, sobre todo de autoeficacia inadecuada.
- Equipos para competir El objetivo fundamental de esta actividad es que comprendan la necesidad de variar algunas creencias que le impiden el buen desempeño y la utilización de recursos metacognitivos, todo esto de forma amena, mediante un juego.
- RELO

  Después del trabajo en equipos, corresponde una actividad individual la que se llamará RELO (Jiménez, 2000). Consiste en una prueba individual en breve tiempo (20min.), donde los alumnos deben aplicar sus conocimientos y estrategias metacognitivas, puestas en práctica en el juego, además permite al profesor:

  - Comprobar conocimientos.
  - Constatar cómo se pone de manifiesto los procesos reguladores.
  - Mostrar cómo la rapidez en este caso es necesaria, luego la creencia de resolver problemas en breve tiempo no siempre es inadecuada.
  - Contribuir a desarrollar la autoeficacia adecuada.
- Prueba de desarrollo (creada por la autora) con el objetivo de que no fuera contemplado dentro del sistema de evaluación, sino para que:
  - Los propios alumnos conocieran su desarrollo, obtenido hasta el momento en cuanto a la solución de problemas, teniendo en cuenta si:
  - Reconocían estructuras.
  - Analizaban diferentes vías de solución o se restringían a una sola.
  - Eran o no capaces de expresar cómo transcurrió su pensamiento.
  - Comprobaban la vía escogida.
  - Eran capaces de realizar una valoración y tomar una decisión en la selección de la pregunta.
  - Esos problemas que antes hacía con ayuda de un compañero o del profesor ahora lo realizó solo.

La 2da Fase: En ella se continúa trabajando con los problemas y se enfatiza en las creencias con respecto a la evaluación, apropiación de conocimientos por sí solos y trabajo con el error:

- Seminarios para la apropiación de procedimientos y de conocimientos. En otras asignaturas esto es muy común pero en Matemática no es así, además ayuda a romper un poco la creencia que solo el profesor es el que puede hacer asequible el conocimiento. Se utilizan técnicas para la formación de los equipos (Sánchez, 2000)
- Afrontamiento. Esta actividad (creada por la autora Sánchez, 2000) está dirigida a mostrarle a los alumnos, algunas creencias relacionadas con la autoeficacia, como el temor al fracaso o éxito, el autosabotaje y permitir así incidir en ellos .Es un afrontamiento consigo mismo y con los demás, por eso la autora le dio ese nombre.

Para ello se realiza una evaluación sistemática, donde se proponen dos problemas para escoger uno de ellos, uno de nivel de complejidad moderado y el otro con un nivel superior, pero accesible.

Lo anterior se les hizo explícito a los alumnos y se les propuso que resolvieran una de ellas quienes lo desearan podían resolver las dos, pero en el tiempo establecido (15min.) Después se analizaron los resultados y el porqué de su actuación, para analizar las creencias implicadas.

Fin de las actividades. Lo importante de ellas es que al finalizar cada una, los alumnos analicen sus errores, las estrategias adecuadas o no y las creencias que se ponen de manifiesto, identificando cuáles entorpecieron el trabajo y cuáles lo impulsaron.

Veamos un ejemplo de dichas actividades y algunos de sus resultados:

Esta evaluación se aplicó en el estudio de las ecuaciones con radicales, después de concluido el seminario 2 (Sánchez, 2000)

Hallar el conjunto solución

$$A)\ \sqrt{\frac{x+3}{5x+2}}+\sqrt{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{13}{6} \qquad B)\ \frac{1}{x}+1=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Los resultados obtenidos fueron

Grupo	a Sólo la B	b Comenzaron por B realizaron A	c Realizaron A y comenzaron B	d Sólo la A
I	3	2	20	8
II	2	3	17	10

Al analizar los resultados en los grupos se les preguntó a los alumnos del caso c el porqué de su actuación y estas fueron algunas de las respuestas:

- Si empiezo por la B y no la puedo resolver, suspendo la evaluación.
- Aseguré un resultado y como tenía tiempo comencé la otra.
- Si hubiera comenzado por la B la habría resuelto, pues no era tan difícil.

En el caso del a, las reflexiones fueron:

- Me sirvió de reto, para comprobarme a mí mismo.
- Analicé las dos y me di cuenta que podía realizar la B.

Las creencias mostradas por los diferentes alumnos regularon su actuación y su pensamiento (sistemas de creencias incidiendo en la metacognición).Los resultados obtenidos en cuanto al rendimiento son independiente de las creencias.

Pasada varias semanas, se realizó nuevamente dicha actividad, en otro contenido del grado, pero con las mismas características y grupos de análisis. Para analizar el avance o no, mostramos a modo de ejemplo uno de los grupos.

Grupo I

1ra/2da	**a**	**b**	**c**	**d**	**Total**
a	3	0	0	0	3
b	2	0	0	0	2
c	11	4	3	2	20
d	1	2	2	3	8

Para un entendimiento de la tabla, por ejemplo en el grupo I del caso c pasaron al a 11 alumnos, al b 4 alumnos, se mantuvieron 3 en la misma actuación y 2 retrocedieron.

Si observamos los del caso d, en él se mantienen algunos alumnos, sin embargo existieron cambios en otros, incluidos el paso al a; de retroceso solo hubo 7 casos que eran del c.

El resto evidencia un avance, un cambio en su actuación, después de haber transformado sus creencias inadecuadas en cuanto a la autoeficacia y la evaluación. Existe un reconocimiento por parte de ellos, de estas creencias que le permiten regular su actuación y pensamiento.

Constatación

Para la constatación de los datos se tomaron los diálogos durante todo el proceso, ya sea con el profesor o entre los alumnos. Se realizaron encuestas al inicio, después de la primera evaluación y al final, todas ellas individuamente. También se realizó una grupal, en ellas se fueron evidenciando las transformaciones de sus creencias y sobre todo el reconocimiento de ellas, diferenciando las adecuadas de las inadecuadas.

Por ejemplo en la encuesta final una de las preguntas realizadas fue:

1. ¿Consideras que ha existido desarrollo en tu enfrentamiento a la solución de problemas? Menciona algunos elementos que lo demuestre.

Analicemos los resultados tomando las coincidencias en los criterios planteados por los alumnos. Del grupo 1 fueron encuestados 31 de 33, y del grupo II 32 de 32.

El 100% de los encuestados plantean que ha existido desarrollo en ellos, aunque el 65% reconoce que aún le faltan algunos aspectos por desarrollar. En cuanto a los elementos que reconocen

tenemos:

a) No actúan mecánicamente.

b) Se enfrentan con confianza al reto.

c) Son capaces de buscar vías de solución y escoger la adecuada.

d) Dentro de la comprensión, reconocen la estructura del problema.

Grupo	a	b	c	d
I	25	15	22	31
II	29	20	18	30

Es importante destacar el gran avance en estos 4 aspectos, donde hay modificación de creencias inadecuadas y aparición de recursos metacognitivos

Toda esta transformación también se evidenció en los resultados docentes y en la descripción de su pensamiento, interiorizando sus creencias y exteriorizándolas para influir en la de los demás.

Las evaluaciones aplicadas eran diferenciadas según el rendimiento del estudiante, pero además estaban compuestas de preguntas obligatorias y dos preguntas opcionales. Esta opcionalidad consiste en que son preguntas de poco cálculo y sí de razonamiento y conocimientos, donde él escoge una que conformará el total de la prueba y de realizar la otra correctamente gana un punto adicional. A modo de ejemplo de los resultados obtenidos en ellas, tomemos dos pruebas parciales y una final.

2do Trabajo de Control Parcial

Grupo	Matricula	Aprobados	Suspensos	+85	Pregunta Opcinal	Punto Adicional
I	33	30	3	30	11	1
II	32	32	0	26	3	0

3er Trabajo de Control Parcial

Grupo	Matricula	Aprobados	Suspensos	+85	Pregunta Opcinal	Punto Adicional
I	33	30	0	32	20	3
II	32	32	2	25	10	2

Prueba Final

Grupo	Matricula	Aprobados	Suspensos	+85	Pregunta Opcinal	Punto Adicional
I	33	30	0	33	18	7
II	32	32	0	31	22	5

Se observa un avance cuantitativo en los resultados de calidad y además en la realización de las preguntas opcionales así como en la obtención del punto adicional. La prueba final ya no es diferenciada y observamos como el temor a enfrentarse a los problemas fue disminuyendo y se tornó en un mayor desempeño, obteniendo éxitos personales.

En el análisis de los resultados se propició la intervención en la creencia en que solo los "genios" son los que pueden tener mayor éxito, pues dos estudiantes considerados como tales por su colectivo, no siempre obtenían la máxima calificación (por errores de cálculo, interpretación, etc), sin embargo otros que fueron desarrollándose obtenían esos resultados, incluido el punto adicional.

Conclusiones

Como resultado de este trabajo, se puso de manifiesto que:

1. La acción sistemática sobre las creencias inestructuradas, fragmentadas de los alumnos, a partir de la reflexión, es un factor básico en la conformación de un sistema de creencias favorables hacia la Matemática y la solución de problemas.
2. La participación del alumno en el proceso, es decir, en el acto mismo de formación de las creencias, resulta vital a los efectos de la toma de conciencia y del aumento del poder de las creencias, como agente movilizador de los recursos de los alumnos para la solución de problemas
3. El mecanismo de exteriorización y fijación, es importante en la generación de un sistema de creencias hacia la solución de problemas, estructurado y con poder actuante sobre el comportamiento de los alumnos.
4. Los alumnos deben enfrentarse con sus propias creencias, para poder identificar cuáles le aportan beneficios y cuáles no, es decir, que exista un autoconocimiento y conocimiento de ellas.
5. El desarrollo del alumno es un factor a tener en cuenta por él mismo y por el profesor. Entendemos que existe desarrollo en el alumno cuando éste aprende a interactuar con sus creencias y cuando las utiliza en otros contextos.
6. El modelo de actuación sobre las creencias, puede ser aplicado en otras disciplinas y enseñanzas, teniendo presente las características de los grupos y del profesor.

Referencias bibliográficas

Campistrous, L. & Rizo, C. (2000). El *tanteo, ¿técnica de solución o adivinación?* Curso pre-reunión. III Simposio Iberoamericano de investigación y educación. ICCP. La Habana.

Delgado, J. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas.* Tesis doctoral. ISP "J. A. Echevarría". La Habana.

Jiménez, C. (2000). *La metacognición y su implicación para los procesos de resolución de problemas matemáticos en alumnos del nivel medio superior*. Tesis en su opción al grado de Master en Didáctica de la Matemática. ISPEJV. La Habana. Mayo

Labarrere, A. (1994) *Pensamiento, Análisis y Autorregulación en la actividad Cognoscitiva de los Alumnos*. Angeles Editores. México.

Labarrere, A. (2000). *Aprendizaje para el desarrollo*. Revista cubana de Psicología. No.1. La Habana.

Moscoso, N. (1991) *Hacia un análisis cognitivo del cambio conductual: El comportamiento social pro activo* Rev. Peruana de Psicología. Perú.

Sánchez, D. (2000). *Las creencias en la solución de problemas matemáticos: enfoque desde la reflexión del alumno*. Tesis en su opción al grado de Master en Didáctica de la Matemática. ISPEJV. La Habana. Mayo

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving* . New York, Academic Press.

Schoenfeld, A. (1991). *Ideas y tendencias en la Resolución de Problemas*. OMA. Argentina.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics in D. Grovws (Ed)*. Handbook of research on mathematics teaching and learning NCTM. New York: Mcmillan.

Schoenfeld, A. (1994) *Exploraciones sobre creencias y conductas matemáticas de los estudiantes*. Antología en Educación Matemática. DME-CINVESTAV. México.

¿De qué manera un modo de actuación, cuyo eje central sea la metacognición contribuye al aumento de la competencia en la resolución de problemas matemáticos?

Carlos Jiménez Tejeda
Facultad de Economía de la Universidad de la Habana. Cuba.
jose.jimenez@infomed.sld.cu

Resumen

Esta investigación fue la tesis de maestría del autor, con dos grupos de alumnos a los que les dio clases de Matemática, durante todo el curso, en la enseñanza media superior. En ella se utilizó la investigación acción, con elementos del estudio de casos. En el trabajo se destaca, con un enfoque Histórico – Cultural (con elementos del Procesamiento de la Información y del enfoque Psicogenético), las acciones que se emprendieron como parte de la estrategia seguida en post del aumento de los niveles de desempeño de los alumnos durante todo un curso escolar y los resultados con ella obtenidos. Estas acciones de intervención se basan en la puesta en práctica de una serie de técnicas, en su mayoría novedosas creadas por el autor, que le dieron vida a las clases de Matemática; entre ellas se encuentran: "Pizarra Abierta", "Tratamiento Independiente", "Primeros Problemas", "Pareja de Problemas", "RELO" y "El Seminario".

Los resultados de esta investigación, así como sus principales hallazgos, pueden, en manos de profesores de los niveles básico, medio básico y medio superior, mostrarles una vía de hacer de los métodos, destinados a desarrollar las potencialidades de los alumnos, se conviertan en motor esencial del desarrollo esperado. Con la seguridad de que la intentar poner en práctica algunas de estas técnicas, las perfeccionarán, contribuyendo con ello al desarrollo de sus alumnos.

¿De qué manera……?

Una reflexión sobre esta pregunta conduce a la construcción de una estrategia, basada en un modo de actuación, en el que interactúen pensamiento matemático, competencia matemática y metacognición

La metacognición

La causa de los pobres desempeños de los alumnos frente a la resolución de problemas en la escuela, va más allá de deficiencias en los recursos matemáticos, influyen aquí elementos afectivos, volitivos y de autorregulación. Los procesos autorreguladores son básicos en el desempeño al resolver problemas y pueden atribuirse al campo de la metacognición.

¿Qué es la metacognición?

- Es ante todo un acto de reflexión de la persona ante su actuación.
- Es la conciencia que se tiene de las estrategias de actuación y del control de estas (Labarrere, 1994).

Acciones metacognitivas son: la planificación, el monitoreo, el control, la valoración y la regulación (Delgado, 1999). Así:

- La resolución de problema requiere que el alumno desarrolle una actitud reflexiva, de planificación, y de monitoreo de sus acciones.
- Los actos metacognitivos afloran cuando quien resuelve el problema sufre una "perturbación" en su estructura cognitiva, realizando compensaciones que se manifiestan en el análisis, la ejecución y el control valorativo.
- Las acciones metacognitivas resultan cruciales para que el alumno pueda enfrentar con éxito la solución, pero también para el aprendizaje de esta compleja actividad.

¿Cómo se manifestaban estos actos en los alumnos con los que más tarde emprendimos el trabajo?

La realidad evidenció que los alumnos poseen pocas estrategias metacognitivas (Campistrous & Rizo, 2000), muestra de ello es:

- Su baja disposición al acto de resolver un problema y todo el esfuerzo que ello implica. Esto hace que no puedan manifestarse acciones metacognitivas en su actuación.
- El desconocimiento de sus procesos mentales , la ausencia de flexibilidad en el pensamiento (Labarrere, 1999). Esto hace que busquen sus errores sólo en las operaciones aritméticas o algebraicas (tendencia a las operaciones), desconociendo la forma de actuar frente al error.
- Que prefieren que sus errores los encuentre el profesor. ¿Para qué necesitan estrategias metacognitivas? Desconocen los beneficios que con acciones metacognitivas pueden producirles el análisis de sus errores.
- La ausencia de acciones metacognitivas en la comprensión del problema. Esto hace que no controlen su pensamiento y no busquen, al analizar el problema, la naturaleza de la situación planteada, aquí ni siquiera valoran si la situación a la que se enfrentan es o no contradictoria, manifestándose su tendencia a la ejecución.
- La visión retrospectiva, de hacerse presente en algún problema, no tiene toda la importancia requerida en el acto de resolución de problema. Esto hace que los niveles de aprendizaje sean bajos. Además de un desconocimiento, por parte de los alumnos, de sus procesos mentales y con ello de cómo aprender.

El modo de actuación. Su accionar.

Desde nuestro punto de vista el accionar en esta estrategia presupone:

1. Aceptar una sucesión de fases ante la resolución de problemas. Las cuatros fases de Polya.
2. La visión retrospectiva pasa tomar su justo e importante papel en la resolución de problemas.
3. El error tiene una función constructiva.
4. Lograr que las situaciones de aprendizaje estén permeadas de una reflexión del alumno sobre su actuación (actitud metacognitiva).
5. Alcanzar transformaciones en el pensamiento y en la forma de actuación de los alumnos presupone, sobre todo, lograrlo a través de **su actividad** en las situaciones de aprendizaje

6. Dirigir al pensamiento en la fase de "Comprensión del problema" hacia el alcance de la naturaleza, de la estructura del problema; al reconocimiento de la situación planteada en el problema y a su diferenciación de otros.

7. El énfasis en la metacognición permite, además de todo lo anterior, una interacción con el Sistema de Creencias (SC), esto es, no sólo "Actuar sobre el SC", sino que el alumno "Reconozca y actúe, de manera conciente, con su SC".

Las acciones que dieron vida a esta estrategia constaron de cuatro fases, 1era Propedéutica, 2da Primeros problemas, 3ra El desarrollo y 4ta El seminario; ellas se presentan, en este orden, en diferentes momentos del curso (unas 40 semanas) y se mantienen a lo largo de este. Por un problema de extensión del trabajo, no podrá darse la descripción de las acciones desarrolladas en cada técnica, sólo se darán los objetivos y sus acciones, explicando someramente algunas. Una profundización de todas las técnicas puede verse en "La metacognición y su implicación para los procesos de resolución de problemas matemáticos en alumnos del nivel medio superior" (Jiménez, 2000a).

- La 1ra fase "Propedéutica" tuvo como objetivos: 1^0 Iniciar la comunicación. 2^0 Conocer creencias, aspiraciones, expectativas. 3^0 Favorecer el autoconocimiento y la metacognición. 4^0 Dar a conocer

  a conocer la investigación y establecer las posiciones de los alumnos y la del profesor a lo largo del curso.

  Su accionar: Presentación (poco común). Llamado a reflexionar sobre la presencia del autoconocimiento. Presentación de investigación. Discusión de posturas necesarias a lo largo del curso. Breve explicación: En las primeras clases:

  Se presentan los primeros temas de forma que permitan la discusión, la asimilación de procesos, a partir de la actuación del alumno; permitiendo que la identificación, el reconocimiento pase a ser parte del análisis de la situación a la que se enfrenta.

- La 2da fase, "Primeros problemas", se presentó a partir de la segunda semana, ella tuvo como objetivos: 1^0 Conocer los procesos al resolver problemas. 2^0 Lograr con los problemas "perturbaciones" y con ello la reflexión sobre sus procesos, en particular, los relativos a la comprensión del problema.

  Su accionar: Presentación de los primeros problemas. Sugerir el trabajo en díadas y en triadas; con la siguiente condición: primero tienen ellos que haberse esforzado en la resolución del problema, y además, no deben admitir que en ese grupo de discusión algún integrante diga como superar un obstáculo, con el que hayan tropezado en el camino de la solución, sin que los demás integrantes cuestionen lo ofrecido por él. Promover la discusión sobre los proceso que se han llevado a cabo. Propiciar el espacio para que los alumnos reestructuren sus conocimientos. Breve explicación de estas últimas acciones:

En estos inicios se les pide a los alumnos que reflexionen y digan lo que hacen al resolver problemas. La reflexión del alumno a la hora de expresar lo pedido, constituye un conocimiento de sí; más aún, si se dan cuenta de que están reflexionando sobre su actuación, transcurren aquí procesos de autoconocimiento y de autorregulación, que son básicos para la metacognición.

- La 3ra fase tenía varias técnicas, "RELO", "Parejas de problemas", "Pizarra abierta" y " Tratamiento independiente".

  - El "RELO" , se presentó a partir de la tercera semana, él consta de un juego y de una prueba:

    El juego tuvo como objetivos: 1⁰ Que en la interacción del juego se produzcan regulaciones metacognitivas entre los miembros del equipo. 2⁰ Que vayan abandonado la tendencia ejecución.

    El accionar del juego: Se agrupan a los miembros de cada equipo ("Enlace", técnica para agruparlos, aprovechando los conocimientos que tienen los alumnos). Discutir reglas del juego. Aplicar las reglas. Propiciar valoraciones del juego, de las estrategias de cada equipo, de la experiencia adquirida en los éxitos y fracasos.

    La prueba tuvo como objetivos: 1⁰ Que la tendencia ejecutiva sea desterrada de su actuación. 2⁰ Comprobar la medida en que la valoración y el control se manifiestan en la solución. 3⁰ Que comprendan la relación tiempo de prueba - estrategia de resolución de la prueba.

    El accionar: Retarlos a demostrar sus conocimientos. Propiciar, a partir de dar a conocer los resultados de la prueba, el espacio de reflexión sobre sus resultados y los procesos implicados en esta actuación

  - La "**Pareja de problemas**", se presentó a partir de la cuarta semana, ella tuvo como objetivos: 1⁰ Que la pareja de problemas favorezca la presencia de las acciones metacognitivas. 2⁰ Que con la acciones metacognitivas se fortalezca el aprendizaje de toda la actividad. 3⁰ Que el alumno exprese, claramente, distintas acciones metacognitivas que él haya puesto en juego en la solución del problema.

    El accionar: Presentar el primer problema de la pareja y discutirlo pasado un tiempo prudencial Propiciar un espacio para que los alumnos expresen, con sus palabras, las acciones de análisis, ejecución y control valorativo, por las que intentaron solucionarlo. Pasado, dos o tres semanas de haber presentado el primer problema de una pareja, presentar al segundo problema de esa pareja. Propiciar en la clase espacios de reflexión donde los alumnos valoren su desarrollo en la resolución de problemas, donde hablen de su crecimiento metacognitivo.

    Al ser una de las técnicas "novedosas" se brinda una breve explicación:

    Se trata de 10 problemas (en la actualidad ya son más de 20 parejas y algunas se han ampliado a ternas) agrupados en cinco parejas (1-A, 2-A), (1-B, 2-B), (1-C, 2-C), (1-D, 2-D), (1-E, 2-E) (Jiménez, 2000a) los problemas de una pareja tienen una misma estructura y pueden ser resueltos por procesos similares; el primer problema, dentro de la pareja (problema 1) es de una dificultad menor que el problema 2; también hay una cierta graduación, con nivel de dificultad ascendente, en la medida que avanzan las parejas. La distancia, en el tiempo, con que se le presentan a los alumnos el primero y el segundo problema de una pareja es de alrededor de dos a cuatro semanas En las clases, se presentaron como parte de ella o como tarea extraclase. También se le preguntó al alumno, en cada semana, sobre las acciones que hacían en el acto de resolución de problemas; insistiendo, sobre todo, en las *acciones metacognitivas: valorar, controlar, decidir, monitorear, entre otras.*

La discusión del primero, en cada pareja, dejó bien establecido la estructura del problema y algunos procesos que pueden resolverlo; y en la discusión sobre la futura utilidad de esa vía o de esas vías, se consolidó, la certeza de intentar aplicarla a otros problemas con la misma estructura.

Baste decir que al presentar la pareja D, ya por la semana 10 del curso, en el primer problema, (1-D).- Un peatón anda a razón de 4 Km. /h y va 8 Km. delante de otro que anda a razón de 6 Km. /h. ¿En cuánto tiempo alcanzará el segundo al primero?; los alumnos determinaron, perfectamente, que lo esencial en la situación del problema era que un móvil iba detrás de otro a mayor velocidad y por tanto de continuar lo alcanzaría, así que el modelo para resolverlo puede ser hallar la diferencia entre sus velocidades, ver la distancia que los separa y determinar cuántas veces cabe en esa distancia la distancia recorrida con la velocidad de diferencia. Tres semanas después, se les presentó, como tarea para dos días después, el problema 2-D (este problema es de un nivel alto para este grado).

(2-D): Una zorra lleva 60 saltos de ventaja a un galgo (perro) que la persigue. Mientras el galgo da 4 saltos, la zorra da 5 saltos; pero 3 saltos de perro equivalen a 5 de la zorra. ¿Cuántos saltos dará el galgo para alcanzar a la zorra?

La realidad superó las expectativas que se tenía, más del 95% (60 alumnos) lo habían resuelto o habían reconocido la naturaleza del problema y habían intentado aplicarle la vía de solución, 11 de los 60 no habían llegado a la solución.

Esa eficacia en la resolución daba muestras, de cómo se habían comenzado a establecer, en los alumnos, las acciones metacognitivas que favorecen la regulación de sus conocimientos y con ello el aumento de la efectividad en el acto de solución de problemas.

- La "Pizarra abierta" (Jiménez, 1996), se presentó a partir de la décima semana, ella tuvo como objetivos: Favorecer el pensamiento reflexivo, las estrategias cognitivas y metacognitivas, y la estructuración del conocimiento.

  El accionar: Presentar el sistema de problemas. Aplicar las reglas. Llamar a la reflexión sobre lo ocurrido en la clase.

- El "Tratamiento independiente" (Jiménez, 1996), a partir de la décima semana (esta técnica y la anterior se presentaron varias veces en el curso), ella tuvo como objetivos: 1^0 "Conocer" cómo en el alumno, se manifiestan las acciones metacognitivas. 2^0 Incidir en la instauración y/o desarrollo de acciones metacognitivas.

  El accionar: Proponer una entrevista en clase o extraclase. Esclarecer su situación con respecto a la asignatura y establecer lo que se puede hacer en ese momento. Proponer un problema. Dialogar y establecer los demás elementos de la técnica. Proponer un grupo de tareas de acuerdo a las dificultades encontradas.

La 4ta fase "El seminario" (Jiménez, 2000b), se presentó a partir de la semana 16, ella tuvo como objetivo: 1^0 Contribuir a la independencia cognoscitiva, al desarrollo de estrategias metacognitivas y del pensamiento. 2^0 Que valoren sus estrategias cognitivas y metacognitivas. 3^0 Romper los esquemas que se forman en el momento de estudiar.

El accionar: Dar orientaciones para el estudio. Monitorear como transcurre el proceso de apropiación de los alumnos. Propiciar el espacio de discusión de lo aprendido. Proponer un sistema de ejercicios y retarlos a solucionarlos.

Hasta aquí todas las acciones de intervención.

Luego de constatar en un principio e intervenir durante los 10 meses del curso escolar, así como el estudio de algunos casos, se realizó una encuesta y una entrevista grupal con los objetivos de:

- *Conocer si los alumnos eran conscientes de las transformaciones que en ellos se habían efectuado.*
- *Conocer la conciencia que tenían de sus procesos mentales y en especial de las acciones metacognitivas.*

De la encuesta final

1. *¿Consideras que ha existido desarrollo en tu enfrentamiento a la solución de problemas? Menciona algunos elementos que lo demuestre.*
2. *Realiza una reflexión y describe brevemente lo que pensabas y/o piensas sobre el estudio de la Matemática y la resolución de problema (comparando al inicio del curso y ahora)*
3. *¿Cómo tú crees que te enfrentarás a la resolución de problemas y al estudio de las Matemáticas?*

De los 63 alumnos de los dos grupos (**A** y **B**) ninguno dejó de hacer la encuesta.

El análisis de la primera pregunta es el único en el que aparecen porcentaje, pues en el resto son preguntas abiertas y de ellas hacemos una síntesis.

Sobre la primera pregunta:

El total de los alumnos consideró que había tenido desarrollo al enfrentar un problema. Los elementos que tuvieron más presencia en la opinión de los alumnos y que muestran el desarrollo alcanzado por ellos fueron (en síntesis):

a) *Ahora reflexiono, valoro "suelto el lápiz".*

b) *Me esfuerzo en resolver el problema, "sé, que aunque me demore tengo posibilidades".*

c) *Reconozco la naturaleza del problema y decido de acuerdo con eso cómo actuar.*

d) *Al resolver problemas busco aprender de esa solución.*

e) *No siento miedo a errar, el puede servirme para encontrar el camino de la solución.*

Grupos	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**	**E)**
A	(31) 100%	(29) 93,5%	(27) 87,1%	(23) 74,2%	(21) 67,7%
B	(32) 100%	(29) 90,6%	(30) 93,8%	(26) 81,3%	(25) 78,1%
Total	**100%**	**92,1%**	**90,5%**	**77,8%**	**77,8%**

Los porcentajes de cada uno de los cinco elementos más mencionados hablan por sí solos; Cada uno de los elementos mencionados por los alumnos expresa la existencia de acciones metacognitivas. Y el segundo que pudiera no tomarse como tal, es el que da la posibilidad de que puedan manifestarse las acciones metacognitivas.

A la segunda pregunta manifestaron que:

Consideran que los procesos que obtuvieron en la resolución de problemas matemáticos les sirven para otras asignaturas. Al inicio y antes, cuando se viraban para otro compañero era para fijarse y copiar la respuesta, sin aprender nada, ahora, el trabajo con otros compañeros "saco experiencias y conocimientos". Antes eran muy dependientes, "ahora me siento con fuerzas para estudiar y resolver problemas solo. Antes estudiar era leer y repetir los ejercicios que ya había hecho o algunos parecidos, ahora estudiar era reflexionar sobre el contenido, resolver un problema es aprender del, "ahora tengo gusto por enfrentar nuevos retos". Si tenían errores era que no podían con el ejercicio, "que yo era malo para resolverlo"," tener un error era malo", ahora aprendo de ellos.

A la tercera pregunta la mayoría coincidió en que:

Enfrentarse a una prueba le sirve para saber cuánto había desarrollado y que había hecho bien y que debía mejorar. Además de enfrentarla calmado, ahora tenía recursos metacognitivos y podían valorar situaciones.

Hay que decir que cinco alumnos coincidieron en expresar temor a enfrentarse a las pruebas y a problemas "fuertes".

En general, tanto lo cuantificado en la primera pregunta como la síntesis de las opiniones de las otras dos se muestra la presencia de estrategias metacognitivas y la conciencia de los alumnos no sólo de la importancia de estas sino de cómo y cuando usarlas.

<u>De la entrevista final</u>

Se propuso abordar los siguientes aspectos:

I. ¿De qué modo la matemática ha influido en ellos?
II. En la resolución de problemas ¿cuánto han aprendido y cuánto les falta?
III. Sobre los procesos del pensamiento ¿cuáles poseen?
IV. El valor del error.
V. Las creencias que poseían y poseen ahora en cuanto a la resolución de problemas y las matemáticas.

Todas las intervenciones fueron recogidas, aquí se mostrará algunas de ellas de forma organizada por aspectos coincidentes para una mejor comprensión.

Nos ha servido los ejercicios para regular nuestra actuación, no mecanizar, con esta forma de pensar observamos, analizamos si existen varias vías y escoger. Las actividades como el RELO nos ayuda a racionalizar el pensamiento. La Matemática ha influido en crear un hábito en los procesos mentales necesarios para enfrentarnos a los problemas, ejercicios lo que nos hace poder simplificar.. De cada ejercicio tomar experiencias para otros, es decir aprender de él. Hemos aprendido a enfrentarnos a los problemas y a una evaluación Hemos aprendido a observar, analizar, no precipitarnos, buscar diferentes vías. Nos acostumbramos al mecanicismo, teníamos serias dificultades con los problemas, ya busco diferentes vías.

Es importante la intuición. Hacer varios ejercicios permite identificar y analizar cosas lógicas. El algoritmo para la resolución de problemas., era sacar los datos, resolverlo, etc., ahora busco vías, identifico y todo eso me sirve para la vida. Hemos comprobado que antes teníamos que la resolución de problemas era buscar el resultado y ahora vemos que lo importante son los procesos mentales, que me sirven no solo en Matemática. La identificación es importante antes de empezar a resolver, a veces pensamos que es difícil y no es así. Nos ha demostrado (el profesor) con diferentes actividades y problemas que analizando, valorando las posibles soluciones o lógica, estos pueden no tener solución, lo que permite ahorro de tiempo y energía.

Hemos aprendido a enfrentar los errores y que tener éxito siempre no es bueno, después hay un choque. De ellos hay que aprender, tomar experiencias. El error (enfrentarnos) nos sirve para la vida cotidiana. El error es importante, cuando uno se equivoca aprende. Uno siente temor ir a la pizarra y equivocarse, por el contrario de eso se aprende, siempre enseñanza. Es importante el análisis de los problemas primero nosotros, después consultando, dando y recibiendo con otros compañeros, el intercambio lleva al desarrollo. El intercambio no solo para la solución, si no diferentes vías de solución Después de agotar mis posibilidades, busco ayuda no de forma pasiva, hasta lograr entender. Estábamos acostumbrados a que la ayuda era que otro me resolviera el ejercicio, ahora esa ayuda es mutua, intercambiando y preguntando

He aprendido a no ver la Matemática por partes, ahora mi visión es mayor. Antes los problemas no los consideraba fáciles para mí, me di cuenta que no pensaba, que no sabía buscar vías diferentes. Pensaba que para resolver problemas tenía que usar variables, escribir una ecuación, ahora he aprendido que con eso no basta y que no siempre es posible. La prueba ayuda al desarrollo, debe ser un reto, lo importante no es que sea difícil o fácil. Estábamos acostumbrados a que el profesor nos daba todos los recursos, ahora tengo que estudiar, investigar, usar debidamente el libro de texto, ahora la Matemática me gusta. He aprendido a enfrentarme a los problemas y las pruebas. El logro del cambio, nos ha quitado la barrera, nos hace consciente de lo que somos capaces.

No hay mucho que decir, ya lo recogido sobre las opiniones responde los objetivos de la entrevista. Sólo manifestar que a partir de lo expresado por los alumnos muchos de ellos van a reflexionar sobre sus procesos y van hacer mayor conciencia de estos.

Es bueno aquí también decir que no todas las intervenciones fueron a favor de los cambios y los métodos utilizados,

Conclusiones

Después de un curso de trabajo con los alumnos en la construcción y puesta en práctica del modo de acción para el desarrollo de la actividad reflexiva y metacognitiva en la solución de problemas matemáticos, y como resultado de la aplicación y exploración del mismo, se hace posible arribar a las siguientes conclusiones, entre otras (Jiménez, 2000a):

- Tanto el proceso de construcción del modelo como su puesta en práctica resultaron viables. Se puso de manifiesto que al tomar la reflexión y la metacognición como eje de los procesos de construcción de estrategias y otros recursos instruccionales y educativos, el docente está en condiciones de dirigir los procesos de transformación y crecimiento de los alumnos en actividades tan complejos como es la solución de problemas matemáticos

- Por otro lado, se acrecentó el nivel de dominio en los alumnos de sus propios de manera fehaciente; evidenciamos cómo desde muy temprano estos intentaban someter a análisis y valoración no sólo el proceso de solución y los medios empleados, sino también su pensamiento.

Referencias bibliográficas

Campistrous, L. & Rizo, C. (2000). *El tanteo, ¿técnica de solución o adivinación?* Curso prerreunión. III Simposio Iberoamericano de investigación y educación. ICCP. La Habana.

Delgado, J. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*. Tesis doctoral. ISP "J. A. Echevarria". La Habana.

Jiménez, C. (1996). *Dos técnicas de trabajo en el aula para la clase de Matemática.* Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. La Habana, Noviembre.

Jiménez, C. (2000a). *La metacognición y su implicación para los procesos de resolución de problemas matemáticos en alumnos del nivel medio superior,* Tesis en su opción al grado de Master en Didáctica de la Matemática. ISPEJV. La Habana. Mayo.

Jiménez, C. (2000b). *El sistema de ejercicios. Una estrategia a considerar en la obtención de procedimientos para la solución de ecuaciones. Rev. "Desafió Escolar*". Revista Iberoamericana de pedagogía. Año 4. Vol. II. Ediciones CEIDE. México. Julio-Diciembre.

Labarrere, A. (1994). *Pensamiento, Análisis y Autorregulación en la actividad Cognoscitiva de los Alumnos.* Ángeles Editores. Méjico.

Labarrere, A. (1999) *Reflexiones sobre un cangrejo, un estudiante y algunos factores que afectan la enseñanza de las matemáticas*. Rev. Desafío Escolar. Año2, Vol. 8. Ediciones CEIDE Méjico.

Potencialidades del Cálculo Diferencial para la enseñanza de la resolución de problemas

Carmen Luisa Méndez Fabret, Caridad González Sánchez y J. Raúl Delgado Rubí
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (ISPJAE).Cuba
menlui@ind.ispjae.edu.cu

Resumen

En este trabajo se presenta el resultado de una investigación realizada a la asignatura Cálculo Diferencial (CD) que se imparte en el primer año de Ingeniería Industrial, la que abarca los contenidos Funciones, Límite, Continuidad, Derivada y Diferencial de funciones de una y varias variables, con el objetivo de identificar las potencialidades que poseen estos contenidos para implementar en esta asignatura una propuesta organización del proceso de enseñanza aprendizaje de los recursos heurísticos.

Se toma como marco teórico La Enseñanza Problémica y la Resolución de Problemas, enfoques de orientación heurística que tienen entre sus premisas epistemológicas y psicológicas; el considerar la matemática como una disciplina dinámica, no agotada y el concebir el aprendizaje como un proceso en que el desempeño del estudiante juega un papel protagónico.

Se dan algunas recomendaciones didáctico-metodológicas a través de ejemplos concretos que ilustran como se pueden abordar los contenidos para eliminar limitaciones que presenta la organización tradicional de la asignatura y poder implementar de manera efectiva una nueva organización.

Introducción

Desde que las ideas de Polya (1945) empezaron a utilizarse significativamente en la enseñanza de la Matemática, alrededor de los años ochenta, el interés en torno a la Resolución de Problemas se ha incrementado, no sólo por la inconformidad de la comunidad científica docente con los resultados que se alcanzan en la educación matemática, sino también, porque este enfoque o modo de concebir las actividades educativas es de los que exhibe mayores posibilidades para dar respuesta a las exigencias de los tiempos actuales, que demandan cada vez más, de un estudiante mejor preparado para enfrentar los cambios sociales, económicos y científico-técnicos que nos esperan en el presente milenio.

En un inicio los estudios psicopedagógicos y sus aplicaciones educativas parecían compartir la idea de que la resolución de problemas y su enseñanza estaba basada en la adquisición de estrategias generales, pero en los últimos años estos modelos generales están siendo sustituidos por otros específicos. Schoenfeld (1985) ha mostrado que las heurísticas de Polya pueden ser importantes en el aprendizaje de los estudiantes si se discuten a un nivel contextualizado y si se acompañan de heurísticas particulares.

De acuerdo con lo anterior, la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos aplicables a la Resolución de Problemas y su implementación en una asignatura, exigen explorar exhaustivamente los contenidos específicos a los cuales se refieren los problemas, para identificar y aprovechar las potencialidades que estos ofrecen a tales fines.

En este trabajo se presenta el resultado de una investigación realizada en la asignatura

Cálculo Diferencial que se imparte en el primer año de la carrera de Ingeniería Industrial, la que abarca los contenidos Funciones, Límite, Continuidad, Derivada y Diferencial de funciones de una y varias variables, con el objetivo de identificar las potencialidades que poseen estos contenidos para implementar en esta asignatura una propuesta de organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos heurísticos.

Se dan algunas recomendaciones didáctico-metodológicas a través de ejemplos concretos que ilustran como se pueden abordar los contenidos para eliminar limitaciones que presenta la organización tradicional de la asignatura y poder implementar de manera efectiva la nueva organización.

Fundamentación Teórica

Lo que aquí se identifica como recursos heurísticos y que algunos autores llaman métodos de solución de problemas, métodos heurísticos o simplemente heurísticos, son los numerosos principios, reglas, estrategias y medios, aplicables a la resolución de problemas, que aunque no garantizan con su ejecución obtener la solución de los mismos, funcionan razonablemente bien en muchos casos y con frecuencia nos llevan al resultado esperado.

Las formas de organizar las heurísticas planteadas por el profesor Horst Müller (1987) es el llamado Programa Heurístico General para la solución de problemas, que lo define como un conjunto de procedimientos heurísticos organizados y ordenados en forma de sistema. Este programa constituye una de las fuentes utilizadas en la selección y organización de los heurísticos en este estudio.

El surgimiento mismo del CD es consecuencia de la necesidad de resolver importantes problemas que se plantearon los hombres en una época pretérita del desarrollo de la humanidad, como por ejemplo determinar la pendiente de la recta tangente a una curva conocidas la función y el punto de tangencia, determinar la velocidad instantánea conocida la ley del movimiento, etc.

Los cursos tradicionales de CD en las carreras de ingeniería han incluido como contenido objeto de estudio un tema para abordar las "aplicaciones"; tema dentro del cual está contemplada la realización de tareas de diferentes tipos entre los que se encuentra la de "resolver problemas" de: velocidad o razón de cambio, cálculo aproximado y optimización.

Los problemas de razón de cambio se introducen después de estudiar la derivada de la función compuesta, los *problemas de cálculo aproximado* se introducen después de estudiar el diferencial y *los problemas de optimización* se resuelven prácticamente al finalizar la asignatura después de introducidos los contenidos sobre extremos.

Tradicionalmente, para enseñar a resolver estos problemas, en el desarrollo de las conferencias, el docente resuelve un problema tipo a modo de ejemplo, el cual el estudiante utiliza posteriormente como patrón para "atacar" a los otros, que con un orden de dificultad similar deberá realizar de manera independiente.

Como consecuencia de este tipo de enseñanza, el planteamiento y la resolución de problemas, permite tan sólo mostrarlos en su carácter de aplicación específica del contenido; objetivo que puede lograrse, sin que ello implique el aprendizaje de destrezas, técnicas y recursos heurísticos que, si bien no dan por sí solo la solución, pueden ayudar al estudiante a obtenerlas en muchos casos.

Sería de mayor trascendencia para el aprendizaje de los estudiantes presentar la resolución de problemas como un proceso mediante el cual se construya y se refuerce el contenido matemático a estudiar, de modo que se puedan aprovechar todas sus potencialidades para el entrenamiento de los estudiantes en el uso de los recursos heurísticos de manera consciente.

Con este propósito ha sido diseñada una propuesta de organización del proceso de enseñanza aprendizaje de los recursos heurísticos (Méndez, 1999). Para implementar dicha organización en la asignatura Cálculo Diferencial fue necesario realizar un análisis del contenido de cada tema, que permitiera determinar las potencialidades de los contenidos para el desarrollo de habilidades heurísticas y metacognitivas y con ello organizar el contenido en forma apropiada. Una síntesis de los principales resultados obtenidos es lo que se describe a continuación.

Potencialidades del Cálculo Diferencial para la resolución de problemas.

Las funciones

Las funciones constituyen el objeto de estudio del CD. El concepto de función está presente en múltiples procesos de la Naturaleza que representan relaciones cuantitativas entre las magnitudes que intervienen en los fenómenos que deben ser modelados por los ingenieros. De ahí la necesidad de que en carreras de Ingeniería este concepto se profundice y amplíe con el aprendizaje de nuevas funciones elementales y la introducción al estudio de las funciones de varias variables.

En investigaciones realizadas (Méndez, 1999; Delgado, 1999, Hernández et al, 1997) se ha detectado que en muchas ocasiones las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de los problemas de aplicación que se presentan en la asignatura CD están motivados por problemas de modelación de relaciones funcionales y no por el planteamiento de otros modelos matemáticos como el límite, la derivada, el diferencial, etc.

Expresar las relaciones funcionales que aparecen en los es una labor que requiere ingenio, lo cual justifica la necesidad de realizar acciones didácticas que permitan estudiar estos modelos antes de ser utilizados en la resolución de los problemas de aplicación en los temas subsiguientes.

En correspondencia con ello se indica implementar una actividad docente para estudiar de forma particular las funciones como modelo matemático.

En ella se recomienda aprovechar la presencia de las relaciones funcionales de los diferentes fenómenos y situaciones que aparecerán como problemas de aplicación, para realizar la modelación de las mismas como parte del tratamiento del tema y de manera anticipada a su uso en dichos problemas.

<u>Ejemplo 1</u>

Durante el estudio de los extremos condicionados (al finalizar prácticamente la asignatura), aparecen los llamados problemas de optimización y con ellos el uso del esquema *Función objetivo-Sistema de restricciones-Método de optimización*, esquema del cual el estudiante generalmente se apropia con rapidez. Sin embargo la dificultad mayor estriba en la modelación de la función objetivo y las ecuaciones de enlace, lo que impide que en muchos casos no se llegue a resolver exitosamente el problema.

En esta investigación se constató que esta dificultad puede ser eliminada, si en el primer tema (funciones) se le propone al estudiante, en lugar de resolver el problema de optimización, solamente modelar la función objetivo y las ecuaciones de enlace.

Problema de optimización:

Se desea construir una caja cerrada de base rectangular de doble longitud que anchura. Teniendo en cuenta que la tapa y las caras laterales deben estar hechas de un material que cuesta \$4.00 el metro cuadrado, mientras que el material de la base cuesta \$6.00 el metro cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que produce el menor costo?

Ahora la pregunta del problema se sustituye, en correspondencia con el objetivo planteado, que es solamente modelar la función.

Hallar una expresión analítica que permita calcular el costo de la caja conocidas sus dimensiones.

De esta forma el estudiante puede comenzar a resolver problemas desde las primeras actividades educativas y además le facilita el poder establecer las conexiones entre los contenidos objeto de estudio. Otras de las posibilidades que ofrece el CD es que los problemas que se abordan tradicionalmente en los temas finales de la asignatura pueden comenzar a plantearse desde los comienzos mismos de ella.

Ejemplo 2

Ejemplificando nuevamente con los problemas de optimización, pueden presentarse problemas cuyas funciones objetivo sean funciones elementales y que sus extremos puedan determinarse sin el uso de la derivada, o sea a partir del conocimiento previo que se tiene de las mismas y los puntos donde esta los puede alcanzar.

Problema de optimización

Cierta empresa ha descubierto que el ingreso anual depende del precio en dólares según la relación

$$I = -50p^2+500$$

a) ¿Qué precio debe cobrarse para que el ingreso sea máximo?

b) ¿Cuál es el máximo valor del ingreso?

Para resolver el problema (se resuelve al finalizar la clase) el alumno debe darse cuenta que la función representa una parábola y que por lo tanto sus valores extremos deben estar en el vértice de la misma. Determinar las coordenadas del vértice de una parábola forma parte de la base de conocimientos de los estudiantes desde el nivel precedente, conocimiento que se refuerza y profundiza con la identificación de las principales propiedades de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ y su representación en un sistema de coordenadas cartesianas. Este ejercicio además de potenciar la habilidad "resolver" (Delgado, 1999), puede servir para discutir estrategias como "sumar cero" y "multiplicar por uno", las cuales se utilizan cuando un problema se debe expresar en cierta forma donde es conveniente su uso.

Las heurísticas anteriores, utilizadas en el completamiento cuadrático para hallar las coordenadas del vértice de la podría utilizarse también para hallar el centro y los semiejes de una elipse, el centro de una hipérbola y el centro y el radio de una circunferencia.

En este tema también se puede introducir el principio heurístico de reducción. El tratamiento descrito anteriormente para el caso de ecuaciones de segundo grado que no están completas puede ser un ejemplo.

En resumen, el contenido del tema "Funciones" posee potencialidades para el tratamiento de reglas y estrategias heurísticas importantes como "sumar cero"; "multiplicar por uno", "sustituir", "dibujar una figura de análisis"; a la vez que sirve para introducir la interpretación del Programa Heurístico General, las fases fundamentales y tareas principales para la resolución de problemas y para desarrollar las habilidades interpretar, graficar, modelar y resolver, entre otras.

El límite

El límite es un importante concepto del Análisis Matemático, permite estudiar profundamente las cantidades variables que aparecen en los diferentes fenómenos de la naturaleza y los procesos tecnológicos. Es uno de los conceptos más difíciles de formar en el estudiante y a la vez es trascendental en el aprendizaje del Cálculo ya que otros conceptos como continuidad, derivada, integral y series recurren a él.

El límite tiene un carácter dual, pues aparece como proceso y como resultado; es modelo para los procesos de convergencia y es instrumento de cálculo para: la derivada, la comparación entre funciones, las asíntotas de un función, entre otras.

Por otra parte está íntimamente relacionado con los procesos de aproximación.

Ejemplo 3

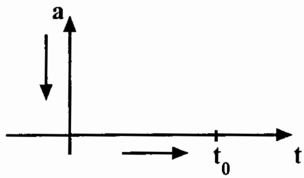
Cuando queremos representar el proceso de convergencia de una magnitud a un valor, el límite hace la función de modelo y en el proceso de modelación intervienen determinadas reglas heurísticas que pueden ser revaladas a los estudiantes.

En la siguiente situación problémica se discuten algunas de ellas.

Problema de modelación a través del límite

Un viajero observa en la pizarra electrónica de la estación, la hora y la distancia a la que se encuentra el tren que espera. Analice si existe convergencia de la relación que se establece entre el tiempo de llegada del tren y la distancia que lo separa de la estación, cuando el tiempo que indica el reloj se acerca a las 5 pm, hora de llegada del tren.

- Designar las magnitudes con variables: Sea t el tiempo, t_0 = 5 pm, es el tiempo de llegada y d la distancia del tren a la estación.
- Hacer una figura de análisis.
- Algunas preguntas pueden ser:



- ¿Qué características pueden observarse en el proceso que describe la situación problémica?
- ¿Cómo son las magnitudes que intervienen en el proceso? R/ ¡Intervienen magnitudes variables!
- ¿De qué tipo es la relación que se establece entre las magnitudes del problema? La distancia depende del tiempo $d=d(t)$ R/¡la relación es funcional! El tiempo aumenta y la distancia disminuye ¡la relación es de causa y efecto!
- ¿Hacia dónde tienden las magnitudes del proceso?
  Cuando el tiempo t esté muy próximo al tiempo t_0, la distancia estará muy próxima a 0.
  Cuando el tiempo $t \to t_0$ la distancia $d \to 0$ R/ ¡el proceso es de "convergencia"!
  Cuando el tiempo $t=t_0$ la distancia $d(t)=0$ R/ ¡la convergencia es a un valor numérico!
- ¿De cuántas formas podemos acercarnos al punto t_0?
  Esta relación sólo puede establecerse por la izquierda de t_0

Saber reconocer cuándo un problema conduce al planteamiento de un proceso de paso al límite, constituye uno de los objetivos fundamentales a lograr en este curso, ya que de ello depende la realización exitosa de la construcción del concepto de derivada, el cual se realiza a partir del planteamiento de un problema cuya solución lleva implícito un proceso de paso al límite.

El tratamiento del concepto de límite es de una riqueza incalculable. La construcción de este concepto; la formulación de su definición y el cálculo de límites donde aparecen formas indeterminadas cuya solución requiere de un proceso más bien heurístico que algorítmico; constituyen verdaderos problemas para el estudiante y como tales se deben plantear para su tratamiento.

En resumen, el estudio del límite ofrece sus mayores ventajas para sistematizar los principios heurísticos de Analogía, Reducción y Generalización; las reglas "sumar cero" y "multiplicar por uno", así como las que se introducen en el tema precedente; sirve además, para reforzar el desarrollo de habilidades como graficar, modelar y resolver y reforzar la utilidad del concepto de función en la modelación y el planteamiento de nuevos problemas.

La derivada

La derivada es otro instrumento poderoso del CD, el cual permite abordar la resolución de problemas sencillos de: cálculo aproximado, razón de cambio, máximos y mínimos y realizar análisis de curvas.

La formación del concepto de derivada de una función, su interpretación geométrica, física y económica pueden ser abordados como problemas, y en este contexto tiene sentido también, el desarrollo de habilidades en la aplicación del Programa Heurístico General, específicamente el modelo para resolver un problema. El estudio del tema es propicio para sistematizar y aplicar los recursos heurísticos introducidos en los temas precedentes.

El concepto de diferencial brinda su mayor aporte en las posibilidades que ofrece para el desarrollo de la habilidad de aproximar y resolver (Delgado, 1999) ya que muchos problemas de aplicación involucran a este concepto.

Conclusiones

El estudio realizado al contenido de los temas fundamentales del Cálculo Diferencial ha servido para determinar las principales potencialidades que estos poseen para el desarrollo de las habilidades vinculadas directamente con en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas.

El resultado de este estudio constituye un requerimiento esencial para implementar una propuesta de organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos heurísticos en el CD, ya que ellos brindan información valiosa para la organización apropiada de cada actividad docente.

Se dan algunas recomendaciones didáctico-metodológicas a través de ejemplos concretos que ilustran como se pueden abordar los contenidos para eliminar limitaciones que presenta la organización tradicional de la asignatura y poder implementar de manera efectiva la nueva organización.

Referencias bibliográficas

Colectivo de Autores (1994). *Los métodos participativos. Una nueva concepción de la enseñanza.* Dpto. Pedagogía y Psicología CEPES. Universidad de la Habana. Cuba.

Delgado, J. R. (1999). *La enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*. Tesis en opción al grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Ciudad de La Habana Cuba.

Hernández, S & Méndez, C. L. & Delgado, J. R. (1997). "Organización del tema de funciones con enfoque sistémico". *Actas de la RELME-11*. México.

Méndez, C. L. (1999). *La instrucción heurística como opción pedagógica para contribuir al aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos*. Tesis de Maestría. La Habana. Cuba.

Müller, H. (l987). Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática la E G P. L. "Frank País García". Santiago de Cuba. Cuba.

Santos, L. M. (1994). La resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas. Cuadernos de investigación *# 28 CINVESTAV- IPN. México.*

Pozo, J. I. (1994). *La solución de problemas*. Santillana S.A. Madrid. España.

Rodríguez, R. (1988). *Cálculo Diferencial e Integral*. Pueblo y Educación Ciudad de la Habana. Cuba.

Sáenz, J. (1995). Cálculo Diferencial para ciencias e ingeniería. *Barquisimeto.*

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. USA.

Las heurísticas disciplinarias y la matemática en contexto

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional, México
patypoli@prodigy.net.mx

Resumen

La investigación que se reporta en esta presentación muestra las diferentes heurísticas que emplean profesores de las disciplinas de física, química, biología y matemáticas al resolver problemas de su área de conocimiento en los que tiene que matematizar.

La matemática en el contexto de las ciencias es el marco teórico en el que se sustenta el estudio, tomando elementos referenciales de Polya y Nickerson respecto a las heurísticas. La investigación es de tipo experimental y la metodología se desarrolla en cuatro fases. Se toma una muestra 171 profesores del Sistema de Tecnológicos de México (45 de matemáticas, 45 de física, 45 de química y 36 de biología).

Se realiza el análisis de la información de acuerdo a las cuatro etapas de Polya, diferenciando las heurísticas para cada etapa y correlacionándolas con cada disciplina, de forma tal que se hace una categorización en heurísticas generales y heurísticas disciplinarias por cada una de las disciplinas. Esta investigación es una contribución al estudio de las heurísticas de la matemática en el contexto de las ciencias.

Introducción

Un grupo de investigadores en la línea de *la matemática en el contexto de las ciencias* (Camarena 2001) nos hemos dedicado a establecer la vinculación de la matemática con las ciencias que la requieren, para llevar a las clases de matemáticas la contextualización como un elemento didáctico (Camarena, 1999). Al estar inmersos en cada ciencia para establecer la vinculación se han observado características particulares de cada una de ellas, situación que llevó a pensar en un estudio que explicitara tales peculiaridades. En particular, este reporte se dedica a las heurísticas. Es un hecho que los procesos de producción de cada ciencia tienen variantes, los cuales tienen incidencia en la forma en como se abordan los problemas que tienen que ser matematizados o modelados (Camarena, 2000). Por lo antes expuesto la presente investigación se abocó a dilucidar el problema de investigación que indaga acerca de las diversas heurísticas que emplean los docentes de las disciplinas de física, química, biología y matemáticas para resolver problemas de su área de trabajo. Así, el objetivo de investigación es determinar las heurísticas características de cada disciplina que son empleadas al resolver problemas que deben ser modelados matemáticamente o "matematizados".

Marco teórico y metodológico

Para establecer la contextualización de la matemática se recurre a la teoría de la matemática en contexto, la cual muestra que es necesario transitar por las siete etapas de ésta (Camarena, 1999):

1. Planteamiento del problema.
2. Determinación de las variables y de las constantes del problema.
3. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para la modelación y la resolución matemática del problema.
4. Determinación del modelo matemático.
5. Solución matemática del problema.
6. Determinación de la solución requerida por el problema.
7. Interpretación de la solución en términos del problema.

Por otro lado, como es sabido, Polya (1976) es el padre de las heurísticas, quien a través de preguntas orienta al lector en su tránsito en la resolución de problemas, además, esta serie de preguntas las clasifica según cada una de las cuatro etapas por las que debe transitar el resolutor de problemas en la resolución de éstos.

Estas cuatro etapas abarcan a grandes rasgos todos los pasos de la resolución de un problema, por lo que las etapas de la matemática en contexto se pueden correlacionar con las etapas que marca Polya para resolver un problema, razón por la cual se empleará como hilo conductor las cuatro etapas de Polya:

1.- Comprender el problema.

2.- Idear un plan.

3.- Ejecutar el plan.

4.- Examinar la solución.

A continuación se presentan el tipo de preguntas que hace Polya para cada una de sus cuatro etapas, en donde resulta ser una guía práctica para quien se inicia como resolutor de problemas.

Comprender el problema: identificar qué se está buscando, identificar con qué se cuenta, identificar en qué área de la matemática se encuentra inmerso el problema, definir qué toma un papel variable, definir qué permanece constante, localizar si hay algún parámetro, localizar si hay alguna condición, determinar si es la condición suficiente, determinar si es la condición redundante, determinar si es la condición insuficiente, determinar si es la condición contradictoria, hacer un dibujo, tabla o gráfica.

Idear un plan: identificar un problema análogo, generalizar el problema, particularizar el problema, separar en partes el problema, determinar la relación entre constantes, parámetro y variables, usar reducción al absurdo, partir de atrás hacia adelante, reformular el problema, intuir el resultado.

Ejecutar el plan: verificar congruencias, detectar puntos de control de error (terminología acuñada por la matemática en el contexto de las ciencias), trasladar el problema real al campo de los complejos, clasificar la ecuación para identificar los posibles métodos de solución, transitar entre las distintas representaciones del objeto, simplificar el problema con las condiciones.

Examinar la solución: verificar la coherencia entre resultado y formulación del problema, elegir la solución que satisface el problema, verificar la solución analíticamente, verificar la solución algebraicamente, verificar la solución geométricamente, verificar la solución numéricamente, resolver de otra forma el problema.

Aunque quien inicia con una metodología para la resolución de un problema es Polya resulta que Nickerson (1994) identifica en las interrogantes de Polya varias categorías, la que corresponde propiamente a las heurísticas, las habilidades y la metacognición, este último elemento tratado por Ausubel (1990). Así, para la identificación de las heurísticas se empleará la clasificación que elabora Nickerson en base a las preguntas de Polya para cada una de las cuatro etapas.

La metodología para el desarrollo de la investigación está compuesta por cuatro fases:

Primera fase: correspondiente a la selección y toma de la muestra de profesores de las ciencias básicas de física, química, matemáticas y biología.

Segunda fase: aplicación de los problemas seleccionados para la detección de las heurísticas.

Tercera fase: recopilación de la información.

Cuarta fase: clasificación de las heurísticas correlacionadas con cada disciplina.

Desarrollo

Primera fase. Se contó con la oportunidad de trabajar con, aproximadamente 2000, profesores de las ciencias básicas de física, química, matemáticas y biología del Sistema de Tecnológicos Regionales de México, quienes recibieron un curso sobre la resolución de problemas como estrategia didáctica, por lo que ellos constituyeron la población en estudio. De la población mencionada se tomó una muestra 171 profesores, en donde cuarenta y cinco docentes fueron de matemáticas, cuarenta y cinco más de física y otros cuarenta y cinco de química, mientras que de biología fueron treinta y seis.

Segunda fase. Se aplicaron seis problemas en cada disciplina y los correspondientes académicos resolvieron los seis problemas, indicando para cada etapa de Polya los elementos teóricos de la resolución de problemas, entre los que se encontraban las heurísticas. Los docentes eran tanto del nivel medio superior como del nivel superior, los problemas aplicados (Bucat, Shand, 1996), (Curtis, 2001), (López, 1987) versaban sobre temas que ellos imparten en las asignaturas de los niveles educativos aludidos. Es claro que la selección y en algunos casos elaboración de los problemas se llevó a cabo de tal forma que resultaron ser problemas para la mayoría de los profesores, de hecho, como la formación de estos docentes no era de físicos, químicos, matemáticos ni biólogos, los problemas no fueron ejercicios para ellos. Cabe mencionar que se está empleando la notación que describe Santos (1997) respecto a un problema en el que interviene la relatividad del campo de conocimientos del sujeto.

Tercera fase. La recopilación de la información se llevó a cabo a través de los siguientes dos pasos: a) Verificación de la identificación correcta de cada una de las cuatro etapas de Polya en cada problema resuelto. b) Aislamiento de las heurísticas empleadas en cada una de las cuatro etapas.

a) Fueron mínimos los casos en donde la clasificación de las cuatro etapas de Polya al resolver un problema no fue precisa. Dicho de otra forma la información obtenida es confiable: aproximadamente 1026 reportes para cada etapa.

ETAPAS POLYA	DISCIPLINARIAS				GENERALES
	Físic	Quí	Mate	Biol	
1ª	0	0	1	1	11
2ª	4	4	2	3	7
3ª	4	3	2	4	1
4ª	5	3	4	1	3
Totales	13	10	9	9	22
Total	41 Heurísticas disciplinar				↓ → 63

TABLA No. 1. Número de heurísticas disciplinarias y generales.

b) Se agruparon y separaron todas las heurísticas diferentes que reportaron los docentes encuestados. Al menos una heurística para cada etapa, haciendo un aproximado de 4104 heurísticas reportadas; sin embargo, una gran cantidad de éstas estaban repetidas, por lo que solamente quedaron sesenta y tres heurísticas diferentes, véase la tabla No. 1. Para la primera etapa se tiene un total de 13 heurísticas, en la segunda 20 heurísticas, 14 heurísticas para la tercera y la cuarta etapa contiene 16 heurísticas.

Primera etapa COMPRENDER EL PROBLEMA	
* Identificar qué se está buscando * Identificar con qué se cuenta * Identificar en qué área de la disciplina se encuentra inmerso el problema * definir qué elementos varían * definir qué permanece constante	* localizar si hay alguna condición * determinar si es la condición suficiente * determinar si es la condición redundante * determinar si es la condición insuficiente * determinar si es la condición contradictoria * hacer un dibujo, tabla o gráfica

Segunda etapa IDEAR UN PLAN	
* Identificar un problema análogo * Generalizar el problema * Particularizar el problema * Separar en partes el problema	* partir de atrás hacia adelante * reformular el problema * intuir el resultado
Tercera etapa EJECUTAR EL PLAN	
Verificar congruencias (puntos de control de error)	
Cuarta etapa EXAMINAR LA SOLUCIÓN	
* verificar la coherencia entre resultado y formulación del problema * verificar la solución * resolver de otra forma el problema	

TABLA No. 2. Heurísticas generales que se emplean en las distintas disciplinas.

Cuarta fase. Para la clasificación de las heurísticas y su categorización se correlacionan las heurísticas detectadas con las heurísticas que ha separado y definido como tales Nickerson, para cada una de las cuatro etapas de Polya.

Se realiza el análisis de la información de acuerdo a las cuatro etapas de Polya, diferenciando las heurísticas para cada etapa y correlacionándolas con cada disciplina, de forma tal que se hace una categorización en heurísticas generales (véase la tabla No. 2) y heurísticas disciplinarias por cada una de las disciplinas (véanse las tablas No. 3).

Segunda etapa: Idear un plan	**Tercera etapa: Ejecutar el plan**	**Cuarta etapa: Examinar la solución**
✳ determinar la relación entre constantes, parámetro y variables ✳ verificar uniformidad de unidades revisión de las leyes, conceptos y principios ✳ relacione la información con uno o varios principios	✳ conversión de unidades ✳ las ecuaciones tienen despejada la incógnita ✳ uso de tablas de constantes ✳ simplificar el problema con las condiciones	✳ elegir la solución que satisface el problema ✳ verificar la solución con análisis dimensional ✳ verificar la solución experimentalmente ✳ verificar la solución cualitativamente ✳ buscar un contraejemplo

TABLA No. 3.a Heurísticas disciplinarias reportadas por los docentes de física.

Segunda etapa: Idear un plan	**Tercera etapa: Ejecutar el plan**	**Cuarta etapa: Examinar la solución**
✳ determinar la relación entre constantes, parámetro y variables ✳ verificar uniformidad de unidades ✳ revisión de las leyes, conceptos y principios ✳ balancear la ecuación	✳ uso de tablas de constantes ✳ simplificar el problema con las condiciones ✳ identifique los reactivos	✳ elegir la solución que satisface el problema ✳ verificar la solución con análisis dimensional ✳verificar la solución experimentalmente

TABLA No. 3.b Heurísticas disciplinarias reportadas por los docentes de química.

Primera etapa: Comprender el problema	**Segunda etapa: Idear un plan**	**Tercera etapa: Ejecutar el plan**	**Cuarta etapa: Examinar la solución**
✳ relacionar la incógnita con algún hecho de la sociedad	✳ clasifique los datos ✳ anote cualquier cosa que pueda servir	✳ formular una hipótesis ✳ compare resultados y si es necesario formule nueva hipótesis	✳ verificar la solución experimentalmente ✳ buscar un contraejemplo ✳ explique las razones que tiene para apoyar esta respuesta ✳ verificar las implicaciones sociales del resultado

TABLA No. 3.c. Heurísticas disciplinarias reportadas por los docentes de biología.

Primera etapa: Comprender el problema	Segunda etapa: Idear un plan	Tercera etapa: Ejecutar el plan	Cuarta etapa: Examinar la solución
✱ localizar si hay algún parámetro	✱ determinar la relación entre constantes, parámetro y variables usar reducción al absurdo ✱ usar inducción matemática	✱ trasladar el problema real al campo de los complejos ✱ clasificar la ecuación para identificar los posibles métodos de solución ✱ transitar entre distintas representaciones del objeto ✱ simplificar el problema con las condiciones	✱ buscar un contraejemplo

TABLA No. 3.d. Heurísticas disciplinarias reportadas por los docentes de matemáticas.

Después de analizar las heurísticas reportadas se encontró que se escribieron casi todas las que marca Nickerson. Es más, las heurísticas que marca tanto Polya como Nickerson son generales y aparecen en los reportes de los docentes enfocadas a cada disciplina, mas esas no son las que interesan, las que interesan son aquellas que son específicas de las disciplinas. De hecho, la mayoría de las heurísticas aplicadas a cada área del conocimiento son generales, aunque las reportan como heurísticas disciplinarias y por tanto, son muy pocas las heurísticas detectadas como disciplinarias, véase la tabla No. 3.

Conclusiones

Esta investigación es una contribución al estudio de las heurísticas de la matemática en el contexto de las ciencias.

Las tablas No. 2 y 3 muestran las heurísticas que se emplean en la matemática en contexto de las ciencias. La tabla No. 3 pone a la luz las diferencias buscadas en el desarrollo de la investigación y es un apoyo para la contextualización de la matemática en otras áreas del conocimiento, en particular de las ciencias básicas de física química y matemáticas, las que son el cimiento de carreras de ingeniería.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. P.& Novak, J. D. y Hanesian H. (1990). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Bucat, B. y Shand, T. (1996). *Thinking tasks in Chemestry, teaching for understanding*. Department of Chemestry, University of Western Australia.

Camarena, G. P. (1999). Hacia la integración del conocimiento: Matemáticas e ingeniería. *Memorias del 2° Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México.

Camarena, G. P. (2000). Reporte de investigación titulado: *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería*. ESIME-IPN, México.

Camarena, G. P. (2001). *La matemática en el contexto de las ciencias*. Red de Cimates, Serie antologías No. 1. Edit. CINVESTAV-IPN.

Curtis, H. (2001). *Biología*. Médica Panamericana

López, R. F. (1987). *Cómo estudiar física, guía para estudiantes*. Vicens-Vives editorial, España.

Nickerson, R. S.& Perkins, D. N. y Smith, E. E. (1994). *Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual*. Editorial Paidós M. E. C.

Polya, G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Estrategia didáctica para la resolución de problemas de la asignatura Geometría Descriptiva

María Cristina Pérez Lazo de la Vega.

Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (CUJAE). Cuba.

facosta@mecanica.cujae.edu.cu y mperez@mecanica.cujae.edu.cu

Resumen

En el presente trabajo, se brindan los resultados de una investigación desarrollada por la autora en la facultad de Ingeniería Mecánica de la CUJAE, enmarcada dentro de la tendencia la enseñanza de la resolución de problemas, en la cual se sistematizaron y generalizaron los resultados de las investigaciones realizadas en nuestro centro, acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura. Durante el proceso investigativo, se construyeron las posiciones teóricas y se obtuvieron los principales resultados teóricos que fueron introduciéndose para precisar las acciones didácticas que se requerían en la práctica.

Justificación

Este trabajo forma parte de las investigaciones que se desarrollan en nuestro país como una necesidad del proceso de perfeccionamiento continuo que se lleva a cabo dentro de la Educación Superior cubana.

Un análisis de la caracterización del proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría Descriptiva en las carreras de Ingeniería en Cuba, de las investigaciones desarrolladas dentro de este campo, de las entrevistas y encuestas realizadas a profesores de los diferentes Centros de Educación Superior (CES) donde se cursan estas especialidades, así como, el estudio de la estructuración y tratamiento metodológico dado en la bibliografía especializada a los contenidos que mayor trascendencia tienen dentro de la resolución de los problemas que en esta asignatura se presentan, nos permitió concluir que dicho proceso:

1. Se desarrollaba sobre la base de la resolución de problemas típicos[3] Estos problemas típicos en esta investigación se trabajaron de acuerdo a la clasificación de **rutinarios** empleada por Rizo, C. y Campistrous, L. (1999) en correspondencia con el procedimiento de solución. *aplicando metodologías de carácter algorítmico que priorizan la actividad reproductiva del estudiante.*
2. Se utilizaba una estructuración sistémica de los contenidos que, aunque favorecían la sistematización y generalización de los conocimientos, *continuaba sin concretarse en lo referente a los procedimientos algorítmicos básicos de la asignatura,* al tener en cuenta solamente las acciones específicas.
3. *No se habían analizado otras formas de estructuración del contenido ni otras invariantes*

[3] Estos problemas típicos en esta investigación se trabajaron de acuerdo a la clasificación de **rutinarios** empleada por Rizo. C. y Campistrous, L. (1999) en correspondencia con el procedimiento de solución.

dentro de la asignatura, de manera que se posibilitara el trabajo con los procedimientos heurísticos.

4. En la bibliografía especializada *no existe uniformidad de criterio* acerca *del orden establecido para el tratamiento de las intersecciones* de uso frecuente en la asignatura, originándose errores de precedencia en los procedimientos involucrados en su solución.
5. *No se aplicaba un procedimiento generalizado que posibilitara la resolución de la generalidad de los problemas* que en ella se presentan, *ni se contaba con una serie de herramientas* que el estudiante pudiera utilizar cuando lo estimara conveniente.
6. Los *resultados de las investigaciones* realizadas acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura *no se encontraban generalizados ni sistematizados*.

Planteamiento y características del problema.

Esta situación nos llevó a plantearnos como problema científico la siguiente interrogante: *¿Cómo contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas en la asignatura Geometría Descriptiva que se imparte en la carrera de Ingeniería Mecánica en Cuba?*, considerando el hecho de que la impartición de esta asignatura se ha sustentado sobre este tipo de actividad, y en la que históricamente han presentado deficiencias los estudiantes de estas especialidades, incluso en aquellos problemas cuya solución se obtiene como resultado de la aplicación de un proceder de tipo algorítmico.

Objetivo general.

Diseñar una estrategia didáctica que contribuya al perfeccionamiento de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas de Geometría Descriptiva que incluya la sistematización y generalización de los contenidos geométricos, un recurso metodológico para el tratamiento de sus procedimientos algorítmicos básicos, técnicas de solución y un procedimiento generalizado de resolución de problemas de esta asignatura, aplicable en la carrera de Ingeniería Mecánica en Cuba.

Metodología

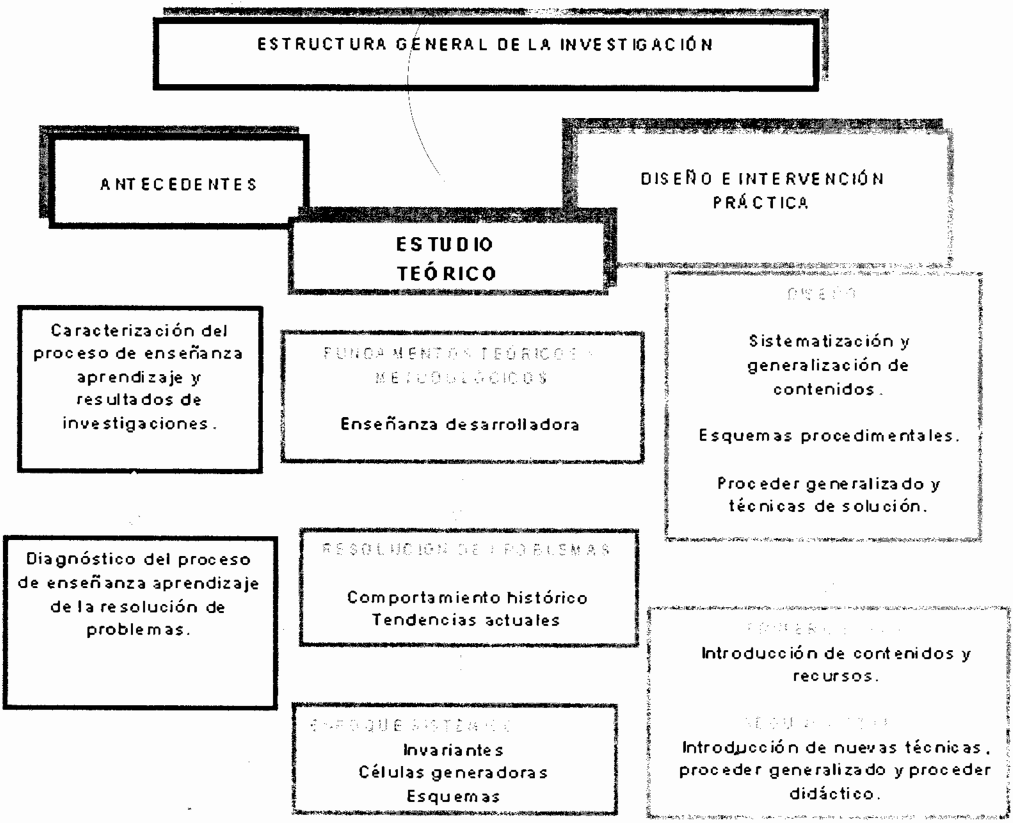


Figura 1

En un primer momento se hizo un análisis del comportamiento histórico acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura en las carreras de Ciencias Técnicas en Cuba, puntualizando lo referente al tratamiento didáctico utilizado para la resolución de los problemas que en ella se estudian, lo que nos permitió caracterizar la situación que tradicionalmente ha presentado este proceso en estas especialidades.

A su vez se analizaron los resultados de las investigaciones realizadas en diferentes departamentos de Dibujo[4] Técnico Aunque la Geometría Descriptiva pertenece a las ramas de las Matemáticas, en nuestro país esta asignatura ha sido atendida por los departamentos de Dibujo Técnico de las diferentes universidades técnicas cubanas. del país, concluyéndose que las mismas no estuvieron dirigidas de forma explícita a la resolución de problemas, a pesar de las dificultades que tradicionalmente los estudiantes manifestaban durante el desarrollo de esta

[4] Aunque la Geometría Descriptiva pertenece a las ramas de las Matemáticas, en nuestro país esta asignatura ha sido atendida por los departamentos de Dibujo Técnico de las diferentes universidades técnicas cubanas.

actividad, todo lo cual nos permitió realizar un diagnóstico inicial acerca de nuestro objeto de estudio.

Sobre la base de esta caracterización y de los resultados de estas investigaciones, se hizo una primera sistematización y generalización de estos trabajos, en la que se fueron incorporando aquellos elementos teóricos y metodológicos sobre los que se diseñó la estrategia propuesta.

Para ello se realizó un estudio teórico dirigido fundamentalmente a los aspectos relativos al término problema, a la resolución de problemas, las tendencias que acerca de este proceso como objeto de enseñanza han sido más difundidas, los fundamentos psicopedagógicos que han sustentado el desarrollo de esta actividad, así como lo relacionado con las tendencias pedagógicas actuales que pudieran servir de marco teórico para el objeto de esta investigación.

Como resultado de este estudio se asumió como fundamento teórico y metodológico el Enfoque Histórico Cultural y de la Actividad, se consideró la estructuración sistémica de los contenidos y se determinó la combinación de los enfoques genético y estructural funcional como un aspecto importante en la concepción y diseño de la estrategia. El proceso de enseñanza aprendizaje se fundamentó sobre la base de los principios de la actividad, del carácter objetal y de la enseñanza que desarrolla., considerando las exigencias didácticas planteadas por Silvestre, M. (1999) para dirigir dicho proceso con un carácter desarrollador.

- Diagnóstico integral de la preparación del alumno.
- Concebir un sistema de actividades para:
  - la búsqueda y exploración del conocimiento por el alumno desde posiciones reflexivas y con independencia en el escolar.
  - desarrollar en los alumnos los procesos de análisis, síntesis, comparación, abstracción y generalización, que posibiliten la formación de conceptos y el desarrollo de los procedimientos lógicos de pensamiento.
- Diseñar formas de participación activa de los alumnos en los tres momentos de la estructura de la actividad de aprendizaje.
- Desarrollar formas de actividad y de comunicación colectivas, que favorezcan la interacción de lo individual con lo colectivo en el proceso de aprendizaje.

La consulta bibliográfica[5] Para más información se puede consultar la tesis doctoral de la autora (Pérez, M.C; 2001), en la que se profundiza acerca de este estudio bibliográfico. desde diferentes puntos de vista acerca del término problema, de su clasificación, de la enseñanza de la resolución de problemas, y la sistematización de los conocimientos matemáticos, nos permitió:

- Asumir una conceptualización de este término que dada su relatividad y flexibilidad, posibilitara el trabajo con la mayor parte de los problemas que se presentan en la asignatura, asumiéndose la definición de Rizo, C. y Campistrous, L. (1999) acerca de que: *"...un problema es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida, y la persona*

[5] Para más información se puede consultar la tesis doctoral de la autora (Pérez, M.C; 2001), en la que se profundiza acerca de este estudio bibliográfico.

querer hacer la transformación"(7;6).

- Utilizar la clasificación de problemas **no rutinarios y rutinarios** dada por estos autores. En los rutinarios se incluyeron los que, de acuerdo al carácter sistémico de los contenidos de la asignatura, se constituyen en precedente de los problemas de tipo no rutinarios y cuya solución se lleva a cabo mediante la aplicación de procedimientos algorítmicos básicos.
- Llevar a cabo la enseñanza de los problemas rutinarios utilizando una propuesta metodológica elaborada por la autora para el tratamiento de los procedimientos algorítmicos básicos de la asignatura, que tiene como fundamento las fases del proceso de asimilación establecidas en la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales, de Galperin, P. Ya., en la que se emplean como recurso metodológico **esquemas procedimentales** (Pérez, M.,2001) para representar gráficamente la organización, estructuración y jerarquización de las acciones que se ejecutan al resolver un problema.
- Enmarcar esta investigación dentro de **la enseñanza de la resolución de problemas,** considerando como contenido de enseñanza las técnicas, procedimientos y estrategias que se utilizan durante el proceso de solución, asumiendo los resultados de las investigaciones que Celia Rizo Cabrera y Luis Campistrous Pérez han obtenido acerca de facilitar la formación de estrategias para resolver problemas aritméticos, a partir de la incorporación de técnicas de solución que constituyen herramientas de las que el estudiante puede disponer cuando lo entienda necesario. Estas técnicas se integran en un procedimiento generalizado de resolución de problemas elaborado por estos investigadores.
- Asumir la resolución de problemas como proceso y como una actividad en la cual resulta de vital importancia la orientación y el control, lo cual nos hizo explicitar y determinar aquellas acciones más generales y los procedimientos desarrolladores que debían considerarse durante este proceso.
- Trabajar fundamentalmente en tres de las dimensiones que según Schöenfeld (1993) intervienen en esta actividad: **el dominio del conocimiento o recursos, los métodos heurísticos, y las estrategias metacognitivas.**
- Valorar que los esquemas de Polya, G. (1945), Masson[6] Citado por Pérez, M.(2001), Labarrere, A.(1987) entre varios de los especialistas que han trabajado la enseñanza de la resolución de problemas, aunque consideran de forma implícita los momentos estructurales de esta actividad, en general se limitan a plantear en esos esquemas solamente una guía acerca de **¿qué hacer?** para desarrollar el proceso de solución.
- Asumir el procedimiento generalizado elaborado por Rizo, C., y Campistrous, L. (1999) para resolver problemas aritméticos por considerar que dicho proceder aporta no sólo **¿qué hacer?**, sino **¿cómo hacerlo?**, al brindar recursos que permiten no sólo profundizar en el significado de cada paso, sino en cómo hacer para lograr la meta en cada momento, incluyendo las técnicas de solución anteriormente señaladas, que posibilitan el control del proceso.

[6] Citado por Pérez, M.(2001)

- Seleccionar aquellas técnicas que por su carácter general pudieran aplicarse dentro de la resolución de problemas de Geometría Descriptiva, elaborando además nuevas técnicas dadas las características de esta asignatura. En la figura No. 2 se muestra dicho procedimiento, donde se resalta el predominio de cada momento de la actividad de resolver problemas. Las nuevas técnicas se señalan con cursiva.
- Elaborar el conjunto de acciones generales y específicas que conforman el sistema de procedimientos algorítmicos básicos de la asignatura.
- Concebir los esquemas procedimentales correspondientes a ese sistema de procedimientos.

Interrogante	Acción General	Técnica	Momento
¿QUÉ SIGNIFICA LO QUE DICE?	Leo	* LECTURA. GLOBAL. * *MODELACIÓN*	ORIENTACIÓN
	Releo	* LECTURA ANALÍTICA * MODELACIÓN Y/O *REMODELACIÓN* * *RESUMEN.*	
¿PUEDO DECIRLO DE OTRA FORMA?	Reformulo	* LECTURA ANALÍTICA Y REFORMULACIÓN * MODELACIÓN Y/O *REMODELACIÓN*	
¿CÓMO LO PUEDO RESOLVER?	Busco la vía de solución	* LECTURA ANALÍTICA Y REFORMULACIÓN * MODELACIÓN Y/O *REMODELACIÓN* * *RESUMEN.* * *DETERMINACIÓN DE PROBLEMAS AUXILIARES.* * *ANALOGÍA.* * *CONSTRUCCIÓN AUXILIAR.* * *LUGARES GEOMÉTRICOS.* * *ESQUEMAS PROCEDIMENTALES*	EJECUCIÓN
	Resuelvo	* *APLICO COMBINACIÓN DE TÉCNICAS.* * *ESQUEMAS PROCEDIMENTALES*	
¿ES CORRECTO LO QUE HICE?	Hago Consideraciones	TÉCNICAS DE COMPROBACIÓN * Resuelvo por otra vía. * Modelo ideal u otra técnica.	CONTROL

Figura 2

Una vez realizada la sistematización y generalización de las investigaciones referidas en nuestro análisis documental y del estudio teórico cuyo resumen presentamos, se diseñó la siguiente estrategia didáctica, integrada por un conjunto de acciones consistentes en:

- Sistematizar y generalizar los contenidos matemáticos objeto de estudio.
- Utilizar esquemas procedimentales como alternativa didáctica, en el trabajo con los procedimientos algorítmicos básicos de la asignatura al resolver problemas rutinarios.
- Utilizar un proceder generalizado para resolver problemas de Geometría Descriptiva.
- Incluir técnicas de solución.

Esta estrategia no se puso en práctica en su totalidad desde un inicio. Su primera intervención práctica tuvo lugar durante el primer semestre del curso 1999-2000 con un grupo de la facultad de Ingeniería Mecánica de la CUJAE y en ella sólo se desarrolló la primera etapa, en la cual algunos esquemas se construyeron utilizando al inicio una base orientadora tipo II (BOA II) a fin de mostrar el modo de actuación durante la elaboración de los algoritmos de solución y la confección de sus esquemas procedimentales. Posteriormente se empleó una BOA III, posibilitando su construcción colectiva y personal.

La observación llevada a cabo durante los talleres en los que esto se puso en práctica, y los resultados de la encuesta aplicada a los estudiantes nos permitieron concluir que:

- De los trece estudiantes del grupo, existe consenso en considerarlo como un factor que favorece la fase de orientación durante la búsqueda de la vía de solución y el éxito de la resolución. (9 en gran medida y 4 en cierta medida).
- También existe consenso en cuanto a que el empleo de estos contribuye a la comprensión de los algoritmos de solución de los problemas rutinarios y por tanto de las acciones que conforman el procedimiento algorítmico correspondiente. (9 en gran medida y 4 en cierta medida).
- De las variantes utilizadas para su confección, se expresa el criterio unánime acerca de considerar como la mejor variante aquella en la cual ellos participan de la confección, aunque los argumentos expresados para justificarse fueron variados.
- De los trece estudiantes del grupo, sólo tres no fueron capaces de aplicar correctamente a nuevas situaciones los algoritmos de solución descritos en los esquemas.

La aplicación total de la estrategia se desarrolló en un grupo de clase de la misma facultad integrado por 28 estudiantes, durante el primer semestre del curso 2000-01.

Resultados

Los controles a clase, la observación efectuada durante las actividades docentes, y el papel desempeñado por la investigadora durante el trabajo en grupo nos permiten plantear que:

- De los veintiocho estudiantes del grupo, veintitrés aprobaron el examen final, de ellos veinte utilizaron técnicas de solución en algún momento. Los suspensos no utilizaron técnicas, aunque dos de ellos manifestaron haberlo intentado sin resultado satisfactorio.
- Aun cuando en ocasiones las respuestas gráficas podían ser correctas, los argumentos esgrimidos al inicio del semestre para resolver problemas eran pobres, careciendo de fundamento la mayor parte de las veces. Al finalizar el curso, se observó una tendencia a establecer argumentos debidamente fundamentados no sólo al desarrollar esta actividad, sino también a la hora de justificar respuestas.

- Es posible aplicar la estrategia diseñada y enriquecer cualitativamente el proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas de esta asignatura.

Referencias bibliográficas

Ballester, S. (1995). La flexibilidad del pensamiento y la sistematización de los conocimientos matemáticos. Curso precongreso. Pedagogía´95. Ciudad de La Habana, Cuba.

Labarrere, A. (1987). Bases psicológicas de la enseñanza de problemas en la escuela primaria. Ciudad de La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

Pérez, Ma. (2001). Estrategia didáctica para la resolución de problemas de la asignatura Geometría Descriptiva en la carrera de Ingeniería Mecánica en Cuba. Tesis doctoral.

Polya, G. (1945). How to solve it?. Princeton University Press. New Jersey.

Rizo, C. y Campistrous, L. (1999). Didáctica y solución de problemas. Ponencia presentada en evento sobre Didáctica de la Matemática.

Schöenfeld, A. (1993). Resolución de problemas: Elementos para una propuesta en el aprendizaje de las Matemáticas. En Cuadernos de Investigación (México D.F.). Número 25, julio.

Silvestre, M. (1999). Aprendizaje, Educación y Desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.

Aportes del trabajo colaborativo en el desarrollo metacognitivo para la resolución de problemas matemáticos, en alumnos de 7° año de la enseñanza básica.

Iris Barahona Núñez, Carola Orrego Bravo, Elsi Galdames Guzmán, Delia Salazar Lara, Rina Lobos Vega, Leonardo Brunaud Vega.

Chile

legrand@tutopia.com

Resumen

Esta investigación analiza y sistematiza algunos aportes que produce el trabajo colaborativo de los alumnos en su desarrollo metacognitivo, en el contexto de la resolución de problemas matemáticos.

Diseñamos cinco instrumentos de resolución de problemas que abarcan contenidos de la primera unidad a tratar en el subsector Educación Matemática para el NB5 de la Enseñanza Básica, en dos colegios que corresponden a realidades socioculturales opuestas, incorporando preguntas que estimulan la reflexión metacognitiva de manera implícita. Todos aplicados en períodos distintos durante el mes de junio de 2002. Intercaladamente, tres de ellos fueron resueltos individualmente y el resto en forma colectiva.

La metodología utilizada corresponde a un enfoque etnográfico interpretativo.

Marco teórico

Nuestra experiencia se funda en una perspectiva constructivista. Consideramos que el aprendizaje es un proceso de construcción de conocimientos por parte del aprendiz, dependiente del conocimiento previo y determinado por el contexto y la situación en que se produce (Beas et al., 2000).

El desarrollo del funcionamiento psíquico humano "presupone una naturaleza social específica y un proceso por el cual los niños crecen dentro de la vida intelectual de aquellos que los rodean" (Wertsch, 1995). A través de procesos recíprocos de interacción social, los niños desarrollan un sistema de representaciones cognitivas como esquemas interpretativos y se comprometen con el sistema de valores culturales y los conjuntos de normas de conducta favorecidos por su contexto sociocultural. Este proceso de socialización incluye, por lo tanto, la adquisición y el uso del conocimiento, formas de representarlo y modos de pensar y razonar con él. Éstas son, junto con el lenguaje, las herramientas culturales que podría decirse que constituyen la inteligencia (Resnick, 1999).

Creemos también que los objetivos de aprendizaje se asocian con una visión de las aptitudes como algo modificable mediante el esfuerzo y que se desarrolla adoptando una actitud activa hacia el aprendizaje y el dominio de las oportunidades. Pero es necesario aplicar habilidades autorregulatorias, metacognitivas, cuando encontramos dificultades, generando y ejecutando estrategias alternativas, acumulando recursos para la resolución de problemas (Resnick. 1999). En general, los objetivos de aprendizaje llevan a patrones motivacionales adaptativos que pueden producir una calidad de involucramiento y compromiso con el aprendizaje que favorece los altos niveles de logro con el tiempo.

Uno de los aspectos metodológicos que enfatiza la Reforma Educacional vigente en el Subsector Matemática, es el planteamiento y resolución de problemas por parte del estudiante. "Orientar el currículo hacia la solución de problemas implica buscar y diseñar situaciones lo suficientemente abiertas, como para inducir en los alumnos una búsqueda y apropiación de estrategias adecuadas para encontrar respuestas a preguntas, no sólo escolares, sino también de su realidad cotidiana" (Pozo et al., 1998).

Ahora bien, es preciso hacer la distinción entre "problema" y "ejercicio". Un problema se identifica con "una situación que un individuo o grupo quiere o necesita resolver y para lo cual no dispone de un camino rápido y directo que lo lleve a la solución" (Pozo, 1998). Por otra parte, la realización de ejercicios se basa en el uso de destrezas o técnicas sobre-aprendidas, es decir, convertidas en rutinas automatizadas como consecuencia de una práctica continuada.

Luego de esta distinción, resulta evidente que la resolución de problemas matemáticos es una actividad didáctica llena de posibilidades para estimular el desarrollo metacognitivo, en la medida que seamos capaces de inducir la explicitación de los procesos del pensamiento involucrados, de parte de los propios alumnos. Siguiendo a Vigotsky, argüimos que los niños crean una zona de desarrollo próximo entre ellos cuando participan en pequeños grupos de trabajo colaborativo, en los que pueden establecer actividades matemáticamente más avanzadas de las que podrían alcanzar trabajando solos (Cobb et al., 1993), compartiendo estrategias.

El diseño de la investigación

Con el fin de demostrar la validez de estas afirmaciones teóricas en que fundamos todos los días nuestra práctica docente, decidimos enfrentar el desafío de investigar los efectos de un experimento didáctico. Hasta entonces, nuestro trabajo se había dirigido a cambiar el contrato didáctico eminentemente conductista que los alumnos reproducían, enseñando matemáticas a través de la resolución de problemas y estimulando el trabajo colaborativo. Sin embargo, los resultados evidencian la necesidad de estimular el desarrollo metacognitivo. Para ello, si diseñábamos experiencias adecuadas lograríamos comprobar que el trabajo colaborativo favorecería el proceso metacognitivo.

Por otra parte, nos enfrentábamos a nuevos grupos de niños, acostumbrados a un contrato didáctico preferentemente conductista, evaluados en una etapa diagnóstica y, aunque mostraban experiencia en trabajo grupal, ocasionalmente habían tenido contacto con un trabajo de inducción metacognitiva. Otro punto en común radica en la dificultad de la comprensión del lenguaje formal educativo.

En consecuencia, decidimos potenciar el desarrollo matemático de los cursos de alumnos utilizando la estrategia de la resolución de problemas. Dichos problemas, además, incluirían preguntas que induzcan el reconocimiento por parte del alumno de sus propios procesos del pensamiento, para que comience a "seleccionar aquellos procesos que le permitan resolver exitosamente los problemas que se le presentan y a desechar los que no le sirven" (Beas et al., 2000).

Aquí surgieron las dudas: ¿es realmente eficaz el trabajo colaborativo en el desarrollo de los procesos metacognitivos para la resolución de problemas en niños familiarizados con el trabajo en grupo, pero no en equipo? . Si se dificulta la verbalización de sus procesos de pensamiento, ¿cómo esperar que éstos sean compartidos entre ellos?; y, si logran hacerlo ¿qué códigos utilizan? ¿Cómo negocian significados para llegar a un consenso que colabore a la consecución de la meta?

Al decidir poner a prueba nuestra propuesta, apostamos a poder visualizar un incremento significativo en el aprendizaje de los alumnos al experimentar un trabajo cooperativo que induzca el reconocimiento de los propios procesos del pensamiento (metacognición). Al vivenciar una experiencia que se vincula con el intercambio de significados y procesos, más que de conocimientos, nuestra observación se definió como interpretativa, con el fin de examinar la calidad de las interacciones e intercambios que se producían entre los alumnos, analizar y sistematizar los procesos involucrados en vistas de definir posteriormente metodologías adecuadas al nivel . Por otra parte, esto nos permitiría reconocer y evaluar la injerencia o no de los contextos socioculturales en el intercambio de procesos metacognitivos relativos a la solución de problemas matemáticos.

La metodología utilizada

En atención a todas estas consideraciones, nuestra investigación apuntó a la observación y análisis de las interacciones que se producen en el contexto del trabajo colaborativo de grupos de alumnos. Aprovechando nuestra condición de profesores del subsector Educación Matemática de los alumnos a observar, optamos por una observación participante, con un enfoque directo (Taylor y Bogdan, 1994). El escenario estuvo conformado por las aulas de los séptimos años de la Educación Básica del Colegio Coyancura[7] y de la escuela D-171 "Antonio Hermida Fabres"[8].

Diseñamos cinco instrumentos de resolución de problemas que abarcan contenidos de la primera unidad a tratar en el subsector de Educación Matemática, incorporando preguntas que estimulan la reflexión metacognitiva de manera implícita. El primer instrumento busca estimular personalmente a cada alumno y fue resuelto en forma individual. El segundo y el cuarto fueron diseñados para el trabajo en equipos de alumnos. El tercero y el quinto fueron desarrollados en forma individual y persiguen evidenciar los avances que cada uno de ellos logra luego de enfrentar colectivamente la tarea de hacer conscientes sus procesos. La investigación se realizó en el transcurso del mes de junio del año 2002. Durante ésta, los profesores supervisaron activa aunque no directamente esta transformación y construcción de las estrategias, mediando para que los alumnos tomaran conocimiento de la realidad del problema y de la necesidad de organización y estructuración de una estrategia, de los procesos y remediales que les permitiesen el logro del objetivo. Esta mediación pasa por no entregar respuestas directas, sino sugerir si el camino elegido es o no correcto.

Para facilitar el análisis, las experiencias fueron grabadas en vídeo, con el propósito de "poner énfasis en los diferentes significados culturales" (Deutscher, 1973[9]) que pudieran tener las expresiones de los alumnos, utilizando además como otro recurso de la recogida de datos la entrevista personal y la "historia de vida" de algunos de ellos.

[7] Colegio particular, ubicado en la comuna de Las Condes (sector acomodado de la ciudad de Santiago, Chile)
[8] Escuela Municipalizada perteneciente a la Corporación Municipal de Peñalolén.
[9] Citado en Taylor y Bogdan (1994)

En principio, el análisis documental fue cuantitativo. Los resultados obtenidos, complementados por las observaciones, fueron objeto de análisis cualitativo. Las conclusiones obtenidas de esta investigación apuntan a definir estrategias y formas de comunicación e intercambio de heurísticas y significados acerca de los procesos mentales que utilizan los alumnos para resolver problemas matemáticos en forma colaborativa, y sus implicancias didácticas.

Análisis de la información

Elaboramos pautas de observación para medir la calidad del trabajo colaborativo, metacognitivo y el desarrollo de las habilidades involucradas de acuerdo al nivel curricular de los alumnos. De esta forma, incluimos los siguientes indicadores para la evaluación del trabajo individual: comprende las situaciones planteadas sin necesidad de consultar al profesor; comprende las situaciones planteadas sin necesidad de consultar a sus pares; reconoce grupos de contenidos asociados al problema; plantea el problema como una proposición matemática; plantea estrategias para llegar a la respuesta; encuentra estrategias adecuadas para llegar a la solución del problema; es capaz de reconocer otras estrategias; establece relaciones y/o comparaciones y/o equivalencias que le permiten solucionar el problema; aplica correctamente las relaciones, comparaciones y/o equivalencias que le permite solucionar el problema; elabora una respuesta con la solución encontrada; trabaja autónomamente, sin buscar la ayuda de sus pares.

Los mismos criterios se utilizaron para evaluar el trabajo desarrollado por los grupos de alumnos, y se agregaron los siguientes:

1. Participan todos los integrantes del grupo.
2. Los integrantes del grupo definen roles.
3. Se genera discusión al interior del grupo.
4. Se destaca uno de los integrantes del grupo por sobre los otros.
5. Los integrantes del grupo evalúan diversas estrategias antes de validar una.
6. Los integrantes del grupo utilizan un criterio de validación.

De los indicadores propuestos nos parecen relevantes los resultados individuales obtenidos luego de la primera y segunda experiencia grupal, referidos a:

El alumno o alumna:	Escuela D-171 "Antonio Hermida Fabres"		El alumno o alumna: Colegio "Coyancura"	
	Primera	Segunda	Primera	Segunda
Plantea estrategias para llegar a la respuesta.	41,5%	47,5%	25,3%	46,2%
Encuentra estrategias adecuadas para llegar a la solución del problema.	23,0%	30,7%	31,0%	71,7%
Es capaz de reconocer otras estrategias.	45,8%	54,8%	23,0%	56,0%
Trabaja autónomamente, sin buscar la ayuda de sus pares.	6,02%	11,5%	15,39%	20,33%

El número de consultas al profesor disminuyó en la medida que avanzaba la experiencia, dando paso a la comprensión de las preguntas que los alumnos debían responder. A falta de una guía explícita del docente, los alumnos fueron mediando entre ellos no entregando respuestas directas sino que repitieron aquellas estrategias que el profesor les dio a ellos, induciendo las respuestas, no dándolas.

La intervención del profesor buscó que el grupo tomara conocimiento de la realidad del problema y de la actitud que se requería para favorecer la interacción grupal y las condiciones que posibilitan el logro del objetivo común (solidaridad, comunicación, tolerancia, etc). De ello se observa un incremento en la discusión al interior de los grupos de alumnos, en la participación de los integrantes y la cantidad y calidad de las estrategias reconocidas, así como una motivación al logro independiente del contexto en que se viese sumido el grupo y una mayor estructura en los conocimientos y mayor claridad en ellas.

Respecto a la participación de los alumnos, en ningún caso responde a normas explícitamente establecidas por el docente para lograr que sea eficiente y se refiera a aspectos como la realización de tareas, llevar a cabo ciertas acciones, responder preguntas, organizar responsabilidades y objetivos que se desean alcanzar, sino que nacen desde la perspectiva personal de los niños. En el caso de las experiencias grupales, a medida que fueron internalizando un trabajo en conjunto hacia metas comunes, fueron ganando empatía. Mediante la discusión grupal, la reflexión individual o a través de la mediación entre los pares, el o los alumnos reconocían el error y descubrían el procedimiento a utilizar; de esta manera, probaban las posibles alternativas en conjunto o individualmente, en forma sistemática, mental y consciente.

Además, por parte de los alumnos se aprecia un aumento en el reconocimiento y validación de diversos criterios que apuntan a la optimización del tiempo y del cálculo, a la organización del trabajo grupal, al diálogo y al compartir diversas estrategias, validando aquella que favoreciera un criterio de eficiencia comúnmente acordado. Sin embargo, a pesar de que los alumnos fueron creciendo en la identificación de estrategias, no siempre llegaron al reconocimiento de aquellas que hacían más efectiva la resolución en términos de tiempo y efectividad del cálculo, aún cuando las reconocieron como otra forma de solucionar el problema.

Conclusiones

Volviendo a nuestras preguntas iniciales: ¿es realmente eficaz el trabajo colaborativo en el desarrollo de los procesos metacognitivos para la resolución de problemas en niños familiarizados con el trabajo en grupo, pero no en equipo? . Si se dificulta la verbalización de sus procesos de pensamiento, ¿cómo esperar que éstos sean compartidos entre ellos?; y, si logran hacerlo ¿qué códigos utilizan? ¿Cómo negocian significados para llegar a un consenso que colabore a la consecución de la meta?

Este trabajo de investigación nos ha dado una dimensión cuantitativa, que nos permite corroborar hipótesis propuestas desde nuestra práctica docente, al menos en una pequeña escala, y nos ha propuesto una serie de interrogantes ya explicitadas que requieren de estudios que esperamos poder desarrollar en el futuro con una mayor amplitud de muestra.

Los indicadores que propusimos para medir la calidad del trabajo colaborativo, basado en la obra citada de Isabel Solé, registraron un comportamiento interesante. En las dos experiencias grupales pudimos apreciar que todos los equipos de trabajo definieron roles para sus integrantes, en todos se generó discusión, y en la totalidad de los casos destacó algún alumno sobre sus pares liderando el proceso. Estos índices de calidad del trabajo colaborativo, repercuten en la calidad del resultado de la labor colectiva.

Por otra parte, de acuerdo a los resultados del análisis que dicen relación con el desarrollo metacognitivo, el rendimiento individual de los alumnos se incrementa fuertemente después de las experiencias colaborativas. Según los registros, la capacidad del equipo de trabajo para reconocer otras estrategias diferentes de las utilizadas, muestran un crecimiento.

Cuando nos enfrentamos a las experiencias, tanto individuales como grupales, entramos de inmediato a cuestionar la conciencia de los niños en cuanto al dominio de sus conocimientos, de sus estrategias y procesamiento de la información. En relación con el ritmo de trabajo de los niños de ambos establecimientos, a la hora de resolver los problemas presentaron dificultades en atención al tiempo de desarrollo, a la asimilación de los contenidos y fundamentalmente a la inadecuación de las estrategias que les permitiesen comprender el planteamiento del problema. En algunos casos, por una insuficiente motivación para aprender que podría o puede deberse a un bajo nivel en la autoestima, en relación con su capacidad para aprender, o por desconocimiento de las estrategias que poseen. Respecto a la asimilación de los contenidos, uno de los impedimentos para enfrentar el planteamiento matemático es la dificultad de comprensión lingüística, tanto en la comunicación con el profesor que propone el problema y guía al alumno hacia la inducción de la estrategia, como en la asimilación del material escrito. Estas situaciones podrían producir un pobre desarrollo de las estrategias para aprender en forma autónoma.

Al respecto podemos señalar que, en la mayoría de los casos observados, los niños poseían buenas estrategias para codificar la información, pero muy bajo nivel de conciencia de esos mecanismos. En otras palabras, los niños no se daban cuenta de esas destrezas y dificilmente podían explicitar por escrito cómo resolvieron los problemas.

En definitiva, podemos concluir que, en la ausencia de la mediación del profesor entre el alumno y el contenido matemático especifico (recordamos que en esta experiencia se anuló lo más posible la acción mediadora del docente), el aporte del trabajo colaborativo resulta altamente efectivo en cuanto los alumnos evidencian el desarrollo de experiencias metacognitivas referidas al reconocimiento, planteamiento y discriminación de estrategias diversas para solucionar problemas matemáticos.

Referencias bibliográficas

Beas, Santa Cruz y Utreras (2000). *Enseñar a pensar para aprender mejor.* Santiago, Chile. Ediciones Universidad Católica de Chile..

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa. Guía Práctica.* Barcelona, España. Ediciones CEAC.

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (1999). *Política y Plan Nacional de Investigación Educacional.* Santiago, Chile. Claudio Molina Díaz y Rodrigo De las Heras Karl.

Cobb, P.& Wood, T y Yackel, E. (1993). *Discourse, Matematical Thinking, And Classroom Practice,* en *Context of Learning.* New York., U.S.A. Universidad de Oxford..

Faúndez, J. (1999). *Planteamientos y Solución de problemas Matemáticos en Educación Básica.* Santiago, Chile. Universidad Católica Cardenal Raúl Silva Henríquez.

Ministerio de Educación, República de Chile (1999). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica.* Santiago, Chile.

Poggioli, L. (1998). *Estrategias Metacognoscitivas (Documento en línea) Disponible en* http://www.fpolar.org.ve/poggioli

Poggioli, L. (1998). *Estrategias de Resolución de Problemas (Documento en línea) Disponible en* http://www.fpolar.org.ve/poggioli

Resnick, L. (1999). *La educación y el aprendizaje del pensamiento.* Buenos Aires, Argentina. Aique Grupo Editor.

Shapiro, L. (1997). *La inteligencia emocional de los niños.* Buenos Aires, Argentina. Grupo Zeta.

Solé, I. (1994). Reforma y trabajo en grupo*, en Cuadernos de Pedagogía N°255, Febrero, página 50*, Barcelona, España

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1994). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados.* Barcelona, España. Paídos.

Vygotski, L.S. (1995). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Madrid, España. Grupo Editorial Grijalbo.

Wertsch, J. (1995). *Vygotsky y la formación social de la mente".* Barcelona, España. Editorial Paídos.

Epistemología

Una Epistemología de la matematización del movimiento: caso de predicción y variación con la serie de Taylor y diferencias finitas

Hipólito Hernández Pérez

Cimate. Universidad Autónoma de Chiapas, I. T. de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

polito_hernandez@hotmail.com

Resumen

El estudio de predicción y variación de R. Cantoral (2001), así como la evolución a través de los marcos epistémicos del movimiento de: Aristóteles, Galileo y Newton (de la predicción de un estado conociendo un estado de facto Muñoz, 2000), proporcionan la base epistemológica para una epistemología inicial de la matematización del movimiento, y la búsqueda de los mecanismos de transición del binomio de Newton a la serie de Taylor; para ello revisamos textos antiguos, artículos relacionados con la investigación y textos escolares vigentes. Lo anterior nos proporcionó referentes para analizar la construcción de significados con los estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil, así como incorporar contextos físicos donde las estrategias vertidas por los estudiantes para resolver problemas propios de la física, son de naturaleza tal que las ideas de cambio y variación están presentes (Solís, 1999). Nuestros resultados permitirán que los mecanismos de transición entre el binomio de Newton y la serie de Taylor profundicen las cuestiones teóricas y metodológicas para establecer la reorganización del discurso matemático escolar desde la matematización del movimiento y considerando como eje organizador la noción de predicción.

Introducción

En las carreras de ingeniería de diferentes instituciones de educación superior, en sus planes de estudios, están contempladas las materias de Ecuaciones Diferenciales, Métodos Numéricos y Cinemática o Dinámica. En lo que respecta al programa de ecuaciones diferenciales gran parte se resuelve con métodos analíticos sobre la base del cálculo diferencial e integral a través del concepto de límite, después se tratan los métodos aproximados para obtener las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden, métodos que están en los planes y en diferentes textos de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, Zill (1993) entre otros y en el programa y textos de Métodos Numéricos, por ejemplo Burden y Faire (1998) entre otros, así como las series infinitas y la serie de Taylor aparecen en los programas y textos también en forma separada.

Tanto las series de potencias como la serie de Taylor son métodos para resolver ecuaciones diferenciales, por lo que he observado durante mi práctica docente en los cursos de matemáticas y física en el nivel superior, estos contenidos están desvinculados entre un método matemático y otro, así como del contexto físico, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos en los planes de estudios vigentes y en los textos que circulan en el mercado y que a la vez son recomendados en los programas de los planes de estudios. En textos de Física y de Ingeniería utilizados en nuestro medio, eventualmente aparecen ideas estrechamente vinculadas a las nociones pre-cauchianas de la serie de Taylor. Así es usual encontrar argumentos como el siguiente: " Si p representa a un parámetro físico en un instante dado de tiempo t, un momento después $t+dt$, este parámetro será $p+dp$...", que requiere para su conceptualización el pensar un tanto como lo sugiere la Serie de Taylor en cuanto instrumento de predicción y no como objeto de convergencia como aparece en los textos de matemáticas.

Aunque el discurso de la matemática escolar vigente en las escuelas de las disciplinas mencionadas parece inhibir las ideas de variación y predicción de los estudiantes (ya que el cálculo escolar es visto como una estructura formal que antecede al análisis), las estrategias seguidas por los estudiantes para resolver problemas propios de la física, son de una naturaleza dinámica donde las ideas de cambio y variación están presentes, (Ver Solís, 1999). En el documento se abordarán los siguientes aspectos: ¿Cómo se matematizó el movimiento?, ¿Cuál es el origen del Binomio de Newton?, ¿Cuál es el origen de la serie de Taylor?

Consideraciones iniciales

De acuerdo con Cantoral (1996) la Matemática Educativa no es la enseñanza de las matemáticas ni la matemática escolar una simplificación de la matemática, pero si existen fuertes vínculos entre sí, aunque no constituyen los mismos cuerpos de conocimiento, puesto que la Matemática Educativa es una disciplina con ubicación en las prácticas sociales y conceptuales de enseñar y aprender matemática y de la matemática escolar. La vieja visión de que la didáctica de la matemática era sólo una colección de trucos para el "bien enseñar", se ha visto modificada por aquel espacio en el cual los estudios de investigación en el campo, están siendo usados para construir unidades de conocimiento organizado que puede ayudar las prácticas sociales de referencia.
Para ejemplificar, la matemática educativa, consideremos el siguiente caso; ¿es posible representar cualquier función real de variable real mediante una serie de potencias? Lagrange argumentó que sí se podía representar toda función como una serie de potencias, mientras que Cauchy mostró que no, en el primer tercio del siglo XIX. Matemáticamente el problema quedó resuelto por Cauchy. Sobre la base de este ejemplo, se localiza la diferencia entre matemática escolar y matemática, es decir, el resultado y los métodos que se usaron, pasaron de la disputa académica a los textos escolares, y posteriormente fueron llevados a la enseñanza, de aquí surge lo que llamamos matemática escolar.

Esta transposición de resultados de la matemática a los textos escolares del conocimiento matemático puede sufrir cambios por factores que obligan a su transformación, estos procesos han sido estudiados por epistemólogos con preocupaciones didácticas y le han llamado transposición didáctica. La matemática escolar está íntimamente relacionada con la teoría de transposición didáctica de Chevallard.

Para el caso que nos ocupa se distingue una relación entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático de tal manera que nos proporciona elementos no presentes en la matemática escolar contemporánea. En este caso por qué creyó Lagrange que toda función se podría desarrollar en serie de Taylor y por qué, aun cuando Cauchy demostró su imposibilidad, los textos y las prácticas de los científicos se siguieron usando con los acercamientos Lagrangianos. Esto nos permite abordar las prácticas sociales de enseñanza vigente en nuestra época, tomando como materia prima los hallazgos de una cierta epistemología que nos permite asumir que las razones de Lagrange para creer que toda función podría expresarse como serie de Taylor fueran más profundas que aquellas que descansan en el señalamiento de su "obsesiva" visión algebraica, como se aprecia por ejemplo en la opinión de Grattan y Guinness (Citado en Cantoral, 1996). Después de la propuesta de Lagrange y la impugnación de Cauchy sobre el acercamiento Lagrangiano puede resolverse muy bien como lo hace Grattan y Guinness, pero para la Matemática Educativa queda un problema abierto: ¿Un cambio en la epistemología del cálculo, basado en la visión Lagrangiana, puede ser beneficioso para la didáctica? ¿Podrían acaso las consideraciones de Lagrange poseer mecanismos funcionales semejantes a aquellos que sustentan, consciente o inconscientemente, nuestros estudiantes? En este caso la Matemática Educativa puede abordar estas preguntas y otras más, considerando acercamientos que consideren las dimensiones epistemológicas, cognitivas y didácticas.

En la obra de Lagrange se explica la forma en que se obtiene el desarrollo en serie de potencias de una función, tomando a la función $f(x)$ e incrementando x en $x+i$, donde i es una cantidad cualquiera indeterminada, la función devendrá en $f(x+i)$ por la teoría de series se tendría: $f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + etc.$, donde $f(x)$ es la función primitiva y p, q, r, etc., las funciones derivadas de la primitiva, en la serie se proporciona el valor exacto del residuo y sólo el número de sumandos que se quieren; en su escrito original menciona el papel que desempeña el residuo, esta observación podría arrojar información distinta sobre la evolución de las concepciones asociadas a las series de potencias. Estas argumentaciones se dieron en los textos de la época, aunque fueron impugnadas por científicos, por ejemplo el acercamiento que hace Cauchy de la serie de Taylor y de su convergencia, es decir, Cauchy se centró en el estudio de la convergencia de las series infinitas, de tal manera que la serie de Taylor pasó a ser un ejemplo mas del estudio de las series. Este acercamiento de Cauchy marcó el rumbo que habría de seguir el discurso matemático escolar.

Puesto que el cálculo construido en dos siglos anteriores se transformó en análisis matemático, sustentado sobre el concepto de límite, (es decir en el cálculo diferencial de Cauchy), las series de Taylor aparecen en los textos como un teorema, por lo que hoy en día el currículo de cálculo aparece con este discurso matemático escolar. Estos antecedentes proporcionan elementos para pensar en un cambio epistemológico del cálculo escolar a través de una visión: newtoniana, tayloriana y lagrangiana, es decir, buscar los mecanismos funcionales desde el origen del binomio de Newton y la serie de Taylor en su dimensión social desde su época, con la intención de reorganizar el cálculo escolar, siguiendo una epistemología desde la matematización del movimiento hasta el origen de la serie de Taylor.

¿Cómo se matematizó el movimiento?

Desde el punto de vista de marcos epistémicos.

Antes del siglo XVII, cuando Aristóteles estudió el movimiento de los cuerpos, el marco epistémico fue: ¿Cuáles son las causas reales del movimiento? (Piaget & García, 1994; citado en Muñoz, 2000). Este marco epistémico originó descripciones cualitativas del movimiento (fenómenos de variación), es decir no generó procedimientos para cuantificar el movimiento simplemente porque no era parte de su marco epistémico, puesto que Aristóteles y sus seguidores medievales únicamente se preguntaban acerca de la naturaleza del cuerpo que cae y la forma en que se modifican sus atributos durante la caída. En el Siglo XVII, Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída libre de los cuerpos? (Piaget

& García, 1994; citado en Muñoz, 2000), Galileo no considera las causas reales (atributos) y establece relaciones entre distancias y tiempos, estas relaciones identifican parámetros y por lo tanto su cuantificación, además Galileo también establece la relación funcional entre las variables que caracterizan el estado del movimiento de un cuerpo en momentos (tiempos) diferentes de su trayectoria. Este marco epistémico proporciona la base para cambiar un movimiento con velocidad variable por un movimiento con velocidad constante bajo ciertas condiciones, y propiciaron el resultado: $s = - at^2 / 2$.

Newton, estudiaba el movimiento de los cuerpos bajo el marco epistémico: ¿Cómo calcular la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en un lugar dado (condiciones iniciales)? (Piaget & García, 1994; citado en Muñoz, 2000), sin plantearse preguntas sobre las causas reales del movimiento, sino que la evolución del sistema de movimiento está basada sobre un sistema de transformaciones que permiten pasar de un valor inicial de la variable a otro en cualquier instante, esta transición de causas últimas a sistemas de transformación, generó un paso decisivo en la historia de la mecánica y en la revolución del siglo XVII, y significó una modificación profunda en la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos. En el marco epistémico de Aristóteles se deja entrever que está inmersa la noción de variación, en las descripciones cualitativas que en esa época cuestionaban las causas reales del movimiento. Galileo en su marco epistémico establece su primera relación funcional en la cual aparece la noción de variación, predicción y cuantificación puesto que al pasar de un estado de movimiento a otro, existe una variación de la variable independiente y de la variable dependiente (tanto discretas como continuas), de la misma manera al establecer una relación de distancia y tiempo, en esta transición entre la variable independiente y dependiente emerge la noción de variación cuando el movimiento es con velocidad constante, pero también proporciona la base de la noción de *variación de la variación* al pasar de un estado de movimiento a otro con velocidad variable, en esta parte aparece el germen de la serie de Taylor pero no de forma muy clara, posteriormente con el marco epistémico de Newton se vislumbran mucho más las nociones de: variación, predicción y cuantificación del movimiento, puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (estado inicial).

¿Cuál es el origen del Binomio de Newton?

Según Boyer (1986), a finales de 1664 y principios de 1665, Newton aportó sus propias contribuciones originales, por ejemplo de la habilidad de expresar funciones en términos de series infinitas, Gregory en las mismas fechas también lo estaba desarrollando. Newton pensó en la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que varían de forma continua o fluentes tales como longitudes, volúmenes, distancias, temperaturas, etc. Desde esta época Newton asoció de manera conjunta estos dos problemas, el de las series infinitas y el de las velocidades de cambio, bajo el nombre común de “mi método". El primer descubrimiento en ese año es el teorema del binomio que hoy en día lleva su nombre, el binomio de Newton, este teorema parece tan natural que resulta difícil ver por qué se retrasó tanto su descubrimiento. Fue a partir de Wallis cuando se hizo uso común de los exponentes fraccionarios, aunque se enfrentó con el problema de establecer un desarrollo para la raíz cuadrada de:. Newton da a conocer su desarrollo como parte de su método de series infinitas. Newton descubrió que las extracciones de raíces resultan muy abreviadas por el teorema: $(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-n}{3n} CQ + \frac{m-n}{4n} DQ + etc$ (1)

Donde $P + PQ$ representa una cantidad cuya raíz o potencia o cuya raíz de una potencia se necesita calcular, siendo el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes dividido por el primero y m/n el índice numérico de las potencias de $P + PQ$. Por último, en lugar de los términos que van apareciendo en el cociente a lo largo del proceso Newton encontró en la obra de Wallis el cálculo de áreas encerradas por curvas cuyas ordenadas eran de la forma $(1\text{-}x^2)^n$. Examinando las áreas que se obtenían para exponentes n iguales a 0, 1, 2, 3, etc., descubrió que el primer término siempre era x , el segundo término era - $0x^3 / 3$ ó - $1x^3 / 3$ ó - $2x^3 / 3$ ó - $3x^3 / 3$, según, que el exponente n fuera 0, 1, 2 ó 3, y así sucesivamente. Por lo tanto, aceptando el principio de interpolación de Wallis, supuso Newton que todos los primeros términos que aparezcan en el área para n = 1/2 debería ser $(1\text{-}x^2)^{\frac{1}{2}} = 1\text{-}x^2/2\text{-}x^4/8\text{-}x^6/16\text{-}5x^8/128\text{-}...$ por medio de interpolación análoga a la anterior, y después hallando el área por integración de la serie término a término. En otras palabras, Newton no procedió directamente a partir del triángulo de Pascal para obtener el teorema binomial, sino de una manera indirecta a partir de un problema de cuadraturas. Esto lo confirmó cuando obtuvo la misma serie infinita extrayendo la raíz cuadrada de $(1\text{-}x^2)$por medio del proceso usual, Newton descubrió que el resultado obtenido para $(1\text{-}x^2)^{-1}$ por interpolación, es decir el uso del teorema binomial para $n = -1$, coincidía exactamente con el obtenido con el resultado de la división larga.

Según, un estudio epistemológico de Cantoral (2001) en el contexto de la Matemática Educativa, todo parece indicar que desde el año 1665, Newton reflexionó sobre la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que fluyen continuamente, o fluentes, como él las llamó. Entre tales magnitudes se tienen a las longitudes, áreas, volúmenes, temperaturas, velocidad y fuerzas. El proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables y precisa el reconocimiento del praediciere en los procesos de predicción de corto alcance en el ámbito de la variación tanto discreta como continua. El vínculo entre los procesos de predicción de corto y largo alcance en ámbitos discretos y continuos, se sustenta en otro mecanismo de funcionamiento en la construcción del conocimiento: el movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen herencia, con esto queremos decir que el estado ulterior del fenómeno de variación depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto, la evolución de un sistema está completamente determinado por sus variaciones primeras. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de "el praediciere" asociada con la variación y cambio en la naturaleza. En el modelo Newtoniano del movimiento de los cuerpos en la naturaleza se tiene la siguiente pregunta ¿Es posible conocer el futuro del movimiento contando sólo con la información que provee el estado actual del fenómeno? En el caso del movimiento de un fluído, P es el estado inicial del fluente continuo y queremos predecir el estado PQ del fenómeno, entonces: $P \rightarrow P + PQ$, donde PQ es variación de la variable independiente. Si $f(P) = P^{m/n}$ es una variable dependiente, entonces el estado inicial es $P^{m/n}$ y el estado final de un fluente continuo $(P + PQ)^{m/n}$ y su diferencia $(P + PQ)^{m/n} - P^{m/n}$ es la variación. El binomio escrito como en la ecuación (1) y el binomio dado como $(a+b)^n$ son equivalentes pero conceptualmente son distintos, puesto que la epistemología que Newton usó es diferente a la que hoy enseñamos, en esa época obedeció a un programa emergente, como alternativo al campo de la ciencia, en ello buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con la matematizacón, en la métafora del flujo del agua (Cantoral, *et al*, 2000).

¿Cuál es el origen de la serie de Taylor?

Según, Edward (1980) en su texto de historia de desarrollo del cálculo, Taylor en su Methodus incrementarum publica su serie y la obtiene a partir del argumento basado en la fórmula de interpolación de Gregory-Newton. Propone entonces la interpolación:

$$y = y_0 + n\Delta y_0 + n(n-1)/2\Delta^2 y_0 + n(n-1)(n-2)/6\Delta^3 y_0 + \ldots + n\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0.$$

En esencia, Taylor quiso tomar el límite como $\Delta x \rightarrow 0$ *cuando,* $n \rightarrow \infty$ y x es fija. Sí sustituimos

$n = (x - x_0) / \Delta x, n - 1 = (x - x_1)/(\Delta x)^2, n - 2 = (x - x_2)/(\Delta x)^3, etc.$ Entonces llega a:

$y = y_0 + (x - x_0)\Delta y_0 / \Delta x_0 + (x - x_0)\Delta^2 y_0 / 2(\Delta x_0)^2 + (x - x_0)\Delta^3 y_0 / 6(\Delta x_0)^3 + \ldots$ Donde

$x(0) = x_0, x(h) = x_1, x(2h) = x_2, etc.\ \Delta x \approx x_0 h, \Delta y_i \approx y_0 h, Dy_0 / Dx_0 \gg y_0/x_0 .. etc.$ Cuando

$\Delta x \rightarrow 0, y = y_0 + (x - x_0)\, y_0/x_0 + (x - x_0)^2\, y_0/2(x)^2 + (x - x_0)^3\, y_0/6(x)^2 + \ldots,$ Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada.

Según Cantoral *et al* (2000), el binomio de Newton se presenta como un resultado que emerge del sistema de prácticas sociales compartidas, ligada a una situación que precisa de la predicción, de modo que si P evoluciona de cierta manera, la cuestión central consiste en saber cómo será B(P) si conocemos el inicio de P, el cambio que sufre P, el cambio del cambio de P, etc. El binomio de Newon fue entonces una respuesta a la cuestión y una organización de las prácticas sociales. Por ejemplo, supongamos que B ha sido dada respecto de P por la relación $B(P) = p^2$ entonces imaginemos que P evoluciona y pasa de P, hasta llegar a ser ella incrementada por una pequeña parte de PQ (la unidad Q es menor que la unidad), de modo que P deviene, y la cuestión es saber quien es B después del flujo de P. Entonces con el binomio de Newton la respuesta será:

$$(P + PQ)^2 = p^2 + 2P^2Q + P^2Q^2 = P^2(1+2Q+Q^2),$$

en forma general en nuestra época estaría escrito como:

$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h3,$ expresión según las derivadas sucesivas de la función f en el punto x es: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2 + f'''(x)h^3/6$.

El problema se presenta con mayor interés si no se dispone en forma explícita de la relación entre B y P, para este caso habrá que emerger progresivamente una nueva noción, una noción que permita de algún modo la generación de la solución óptima a una clase de situaciones propias de la predicción.

Consideraciones finales

El discurso matemático vigente en que se presentan los programas y textos de Ecuaciones Diferenciales y de Métodos Numéricos está anclada a una epistemología basada en Cauchy, es decir, el cálculo a través del concepto de límite, así como los textos de Física e ingeniería aparecen eventualmente ideas vinculadas a las nociones precauchiana de la serie de Taylor como un instrumento de predicción y no como un objeto de convergencia. En esta investigación aportamos algunos elementos en su dimensión social, propio de la Matemática Educativa con el fin de caracterizar algunos aspectos para la reorganización del discurso matemático escolar, por ejemplo, exploramos la cuestión de ¿Un cambio en la epistemología del cálculo escolar, basado en la visión de Newton – Taylor puede ser beneficioso para la didáctica y poseer mecanismos funcionales semejantes a aquellas que sustentan consciente o inconscientemente nuestros estudiantes? Los aspectos que presentamos nos muestran algunas evidencias de que los mecanismos que subyacen en la epistemología de Newton – Taylor se pueden usar para construir acercamientos didácticos.

Referencias bibliográficas

Burden, R. & Faires, D. (1998). Análisis Numéricos. Editorial Thomson, 6a edición, México.

Boyer, C. (1986). Historia de la matemática. Alianza Editorial. España.

Cantora, R. (1989). Acerca de las contribuciones actuales de una Didáctica de Antaños. Cinvestav del I.P.N., México.

Cantoral, R. (1996). Una visión de la matemática educativa. Investigación en matemática educativa. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cantoral, R. (2001). Un estudio de la formación social de la analiticidad. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. & Farfán, R. & Cordero, F. & Alanís, J. & Rodríguez, R. & Garza, A. (2000). Desarrollo del pensamiento matemático, Editorial Trillas, ITEMS.

Chevallard, Y., (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Editorial Aique.

Edward, H. (1980). The Historical Development of the Calculus. Springer–Verlag. U.S.A.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 3, Núm. 2. pp. 131-170.

Piaget, J. & García, R.(1996). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. 7a edición, editorial siglo XXI.

Solís, M. (1999). Estudio de la noción de la variación en contextos físicos: el fenómeno de la propagación del calor. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Zill, D. (1993). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica. Tercera edición. México.

Estudios Socioculturales

¿Qué hipótesis sugieren tres años de investigaciones sobre Educación Matemática en La Habana?

Paúl Torres Fernández

Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. MINED. Cuba.

paultorres2001@yahoo.com.ar

Resumen

La enseñanza de la Matemática Elemental ha seguido siendo fuente de frustración y desconcierto a causa de los bajos resultados en su aprendizaje. Las alternativas de solución que se manejan tienden a centrarse en aspectos internos de la asignatura. Rara vez se tocan otras aristas de ese complejo proceso.

Sucesivas investigaciones realizadas por espacio de tres años, en la provincia de mayor población educacional de Cuba, corroboran la posibilidad de obtener menores resultados académicos de considerarse ciertos aspectos socio-culturales.

El propósito de esta ponencia es describir los resultados principales de tres investigaciones pedagógicas que, encaminadas al mejoramiento del aprendizaje de la Matemática, se han venido realizando sucesivamente en ese territorio, y formular las hipótesis que ha generado la investigación del curso 1998-1999, como resultado de la progresiva ampliación del objeto de investigación.

Esas hipótesis sugieren el inicio de nuevas investigaciones de constatación y de transformación, más allá del estrecho marco del proceso de enseñanza-aprendizaje de una asignatura aislada.

Introducción

Si algún rasgo es común a docentes y directivos de diferentes niveles de enseñanza, de diferentes latitudes, y de diferentes áreas del conocimiento es que el aprendizaje de la Matemática en sus escuelas y universidades perturba, desconcierta o caotiza.

A juzgar por actas de congresos internacionales, pronunciamientos de destacadas personalidades en el ámbito educativo, textos especializados, y reportes de investigación de eventos científicos, esa situación parece ser tan antigua como la historia de la educación y tan global como cualquier otro fenómeno universal.

Y, por supuesto, Cuba no es una excepción. Sin embargo, si algo caracteriza a la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en Cuba es que si cuenta con una real y especial atención estatal; así lo ratifica diversos informes de evaluaciones que periódicamente se han realizado en el país, por encargo de la máxima dirección educacional. (MINED, 1970) (Campistrous et al., 1984) (MINED, 1991)

Esa atención estatal se ha hecho mayor desde hace unos años en que, como parte de la política de *Perfeccionamiento del proceso docente-educativo* se ha incrementado el control sobre la calidad del proceso de aprendizaje de la asignatura, y se han convertido los resultados de la Prueba de Ingreso de Matemática a la Educación Superior en el principal indicador de la calidad de dicho proceso.

Movidos por esa preocupación estatal, y como parte de la política de *integración* de los Institutos Superiores Pedagógicos del país con los subsistemas de enseñanza para los que forman maestros y profesores, se han venido produciendo en la provincia La Habana acciones transformadoras especialmente encaminadas al mejoramiento de la calidad del aprendizaje de la Matemática Escolar.

La elección de La Habana como centro de esa atención no debe ser subvalorada. La provincia de La Habana cuenta con la mayor población educacional del país, con más 120 000 estudiantes y más de 300 centros de la enseñanza general, lo que resulta particularmente significativo en el nivel preuniversitario, con más de 4 000 estudiantes (la mayoría de ellos provenientes de la capital) y más de 40 institutos preuniversitarios, una parte importante de ellos vocacionales (en ciencias exactas, o en la estratégica dirección de las ciencias pedagógicas).

El propósito de esta ponencia es describir los resultados principales de tres investigaciones pedagógicas que, encaminadas al mejoramiento del aprendizaje de la Matemática, se han venido realizando sucesivamente en ese territorio, y formular las hipótesis que ha generado la investigación del curso 1998-1999, como resultado de la progresiva ampliación del objeto de investigación.

Esas hipótesis sugieren el inicio de nuevas investigaciones de constatación y de transformación, más allá del estrecho marco del proceso de enseñanza-aprendizaje de una asignatura aislada.

Desarrollo

I. <u>El primer paso: una investigación exploratoria.</u>

A finales de 1995 los diagnósticos realizados por la Dirección Provincial de Educación (DPE) de La Habana mostraban una crítica situación en la preparación de los estudiantes de 12mo. grado con vistas a la Prueba de Ingreso de Matemática a la Educación Superior, amenazando seriamente con repetir los bajos resultados alcanzados en ese examen en los cursos anteriores, y que habían situado al territorio a la zaga de las provincias del país.

Se hizo evidente la colaboración del Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona" (ISPEJV), universidad pedagógica encargada entonces de la atención a las provincias habaneras. La máxima dirección del Ministerio de Educación (MINED) se ocupó directamente de la coordinación del accionar conjunto de la DPE de La Habana y el ISPEJV. A propuesta de esta última institución, quedó incluido en el *Plan de Acción* aprobado la realización de una investigación dirigida a identificar factores asociados a esa problemática.

Un equipo interinstitucional de 8 especialistas tuvo a cargo esa tarea. Se seleccionó una muestra aleatoria (por conglomerados) de cuatro Institutos Preuniversitarios en el Campo (IPUEC), y se confeccionaron y aplicaron seis instrumentos de investigación:

- una encuesta a estudiantes,
- otra a los profesores de ese nivel de enseñanza,
- una tercera a los profesores de las Secundarias Básicas de donde provenían los estudiantes de los centros seleccionados,
- una entrevista grupal a los padres de los alumnos,
- una guía de observación de clases de Matemática, y
- otra guía de observación del funcionamiento general del centro.

Apoyado en el paradigma de investigación *cualitativo*, y mediante un entrelazamiento de los resultados de los diferentes instrumentos aplicados, se pudieron identificar seis factores asociados a la problemática de los bajos resultados de los bachilleres habaneros (Torres et al., 1998). Los mismos eran:

- La actuación didáctico-metodológica de los *Profesores* de Matemática,
- La preparación y motivación de los *Estudiantes*,
- La calidad de la *Organización Escolar*,
- El funcionamiento de las *Estructuras de Dirección*, y
- Las *Condiciones Materiales* imperantes entonces.

Ese primer resultado de investigación actuó como un *diagnóstico* de gran utilidad para la materialización de la intención de revertir la situación de los bajos resultados académicos en Matemática y permitió combatir el enraizado criterio empírico, entre un número no despreciable de cuadros educacionales, de que la responsabilidad de la situación negativa era, casi absolutamente, de los docentes de la asignatura. Por el contrario, se confirmó que esos resultados son consecuencia directa de un proceso educativo que, como fenómeno social al fin, es complejo y multifactorial

II. La segunda investigación: la conformación y validación de una Estrategia Pedagógica en el curso 1997-98.

En una fase transitoria, y como parte del mismo Plan de Acción presentado al MINED, varios docentes del ISPEJV y funcionarios de la DPE, y del propio MINED, se incorporaron permanentemente a los territorios de la provincia con una situación más complicada; se conjugaron actividades de dirección y de asesoría metodológica.

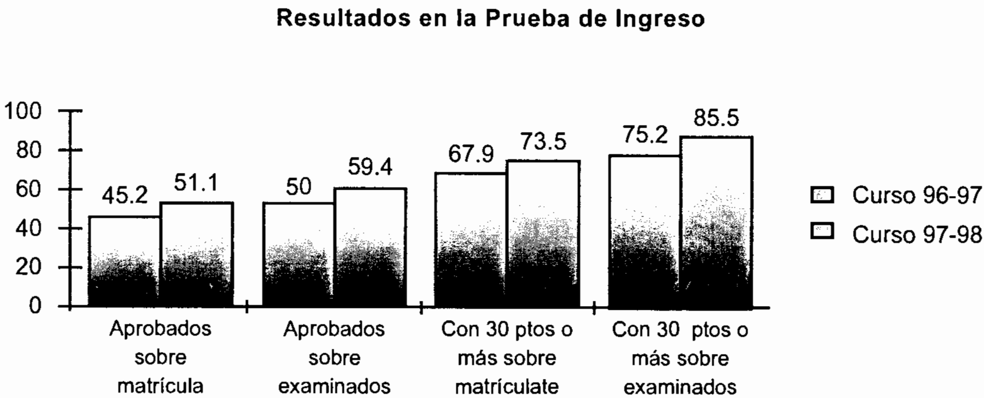
Sin embargo, los resultados de la Prueba de Ingreso de Matemática a la Educación Superior de ese curso y del siguiente volvieron a ser preocupantemente bajos. Salvo en dos municipios, las acciones emprendidas no dieron resultados de consideración. Evidentemente, no bastaba con identificar los factores que mayor vínculo mantenían con la problemática; era necesario transformarlos de manera que permitieran la elevación de los resultados del indicador elegido, y de la calidad del proceso educativo todo.

Así, a inicios del curso 1997-98 se conformó un segundo equipo de especialistas encargado de realizar una *investigación-acción*. La planeación de la misma se estructuró en, lo que se dio en llamar, una *Estrategia Pedagógica*. La misma se apoyaba, obviamente, en los resultados de la investigación exploratoria del curso 1995-96 y en las experiencias pedagógicas de los dos municipios donde la colaboración de las instituciones implicadas reportaron un saldo positivo.

La Estrategia Pedagógica constaba de cinco acciones principales:

- Realización de sesiones quincenales de Talleres Metodológicos con los profesores de los preuniversitarios de la provincia.
- Impartición de un curso de superación postgraduado a esos mismos docentes.
- Entrenamiento en el empleo de métodos y técnicas de la Metodología de la Investigación Científica a los docentes, induciéndolos a realizar pequeñas investigaciones pedagógicas en sus aulas.
- Observación de clases de la asignatura y discusión de las mismas con los docentes.
- Observación del funcionamiento general de centro y análisis con la dirección del centro de los resultados de la observación.

Una descripción detallada de la aplicación de esos instrumentos y de los resultados obtenidos puede consultarse en (Torres et al., 1999). Puede decirse que, en general, todos los indicadores de la Estrategia Pedagógica mejoraron en ese curso, con relación al anterior; la provincia alcanzó el más alto resultado histórico en las Pruebas de Ingreso de Matemática a la Educación Superior y, lo que es más importante aún, se pudo comprobar un nivel adecuado de correlación entre el puntaje de la Estrategia y los resultados de la Prueba de Ingreso.



	Trabajo Metodológico (Escala: 0-1)	Superación (Escala: 0-1)	Investigación. (Escala:0-1)	Calidad de las clases. (Escala:0-1)	Funcionamiento del centro. (Esc.0-1)	Puntaje general de la Estrategia. Escala: (0-5)
Coeficiente de correlación: r	0,25	0,24	0,48	0,60	0,65	0,61

Además del puntaje general de la Estrategia Pedagógica (con r = 0,61), alcanzan niveles aceptables de correlación con los resultados en la Prueba de Ingreso la calidad de las clases de Matemática (con r = 0,60) y del funcionamiento general de los centros (con r = 0,65), resultando este último el de mayor vínculo con la calidad de los resultados académicos.

Esta segunda investigación ratificaba así los resultados de la Investigación Exploratoria del curso 1995-96 y probaba que era posible modificar la situación negativa que se venía presentado en la preparación de los estudiantes de preuniversitario para la Prueba de Ingreso de Matemática a la Educación Superior. Sin embargo, no aportaba ninguna información sobre el comportamiento de esos indicadores generales en los niveles precedentes.

I. La tercera investigación: el aprendizaje de la Matemática y el tránsito por la enseñanza general.

Durante el curso 1998-99 el equipo de investigadores fue ampliado a 24 especialistas, de modo que se pudiera accionar sobre los 19 municipios de la provincia (a diferencia del curso anterior donde se laboró en los 11 municipios en que se dispone de preuniversitarios).

Se intensificaron las observaciones del funcionamiento general de los centros y de la calidad de las clases de Matemática; de algo más de 100 observaciones de escuelas y más 300 de clases en el curso 1997-98 se pasaron a más de 500 y de 1200 respectivamente, en el curso 1998-99. Interesa sobremanera analizar comparativamente los resultados de los diferentes niveles de la enseñanza general. Se referirán los promedios de las calificaciones obtenidas a partir de esas observaciones, considerando una escala por intervalos, que va desde 1 (muy malo) hasta 5 (muy bueno).

En las clases observadas se apreció un incremento de los valores medios de las calificaciones del "*Dominio del contenido por el Profesor*" al pasar de la enseñanza primaria a la preuniversitaria. En cambio, el "*Nivel de preparación mostrado por los alumnos*" (para la clase) muestra un comportamiento decreciente.

Clases	Primaria	Secundaria	Preuniversitario
Dominio del contenido por el Profesor	**3,98**	4.06	4.08
Nivel de preparación mostrado por los Alumnos	3,62	3,45	**3,38**

¿Cómo se explica este hecho? ¿Cómo es posible que, si los docentes parecen estar cada vez mejor preparados los alumnos aprenden menos?... Una ampliación del análisis a otros indicadores de la clase contribuye a explicar esta, aparente, paradoja:

Clases	Primaria	Secundaria	Preuniversitario
Nivel con que se abordan los Contenidos.	3,96	3,88	**3,86**
Nivel de complejidad de los Ejercicios	3,83	3,78	**3,58**
Productividad y racionalización del tiempo.	3,64	3,62	3,62
Trabajo educativo y vinculación con la vida.	3,69	3,29	**3,35**
Independencia de los alumnos.	3,66	**3,41**	3,50
Atención a las diferencias individuales	3,68	3,67	**3,62**

Cabría analizar si las dificultades se presentan sólo en el desarrollo de las clases. Los resultados de algunos ítems referidos al trabajo del Departamento Docente (de Ciencias Exactas) tienen un comportamiento similar:

Departamentos docentes	Primaria	Secundaria	Preuniversitario
Trabajo del Profesor con el diagnóstico	3,76	3,62	**3,42**
Calidad del Entrenamiento Metodológico Conjunto	3,76	3,58	**3,37**
Calidad de la Preparación Metodológica.	3,76	3,52	**3,20**

Otros indicadores, referidos al funcionamiento de los centros, también sostienen un comportamiento similar; es decir, de deterioro de su calidad al aumentar el nivel de enseñanza:

Centros	**Primaria**	**Secundaria**	**Preuniversitario**
Cumplimiento del horario de Estudio Independiente.	3,91	**3,59**	3,68
Cumplimiento del horario docente.	4,18	3,90	**3,82**
Amplitud del horizonte cultural.	3,71	3,75	**3,68**
Disciplina en el centro.	4,25	4,04	**3,95**

Conclusiones:

Las dos primeras investigaciones ratificaron la percepción empírica de que el problema de la baja calidad del aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario responde básicamente a la incidencia de varios factores, de naturaleza múltiple, así como que esa situación puede ser modificada en sentido positivo, si se trabaja tomando en consideración esos factores.

En cambio, al ampliar la investigación a los restantes niveles de enseñanza se obtienen datos que generan más interrogantes que respuestas. Esas interrogantes el autor las formula en términos de hipótesis de investigación y son, fundamentalmente, las siguientes:

- ¿Son realmente los niveles superiores de la enseñanza general menos eficientes que el nivel primario, como hacen suponer los indicadores referidos?
- ¿Se deben esos decrecimientos sucesivos a la repercusión de deficiencias educativas de niveles precedentes?
- ¿Qué barreras subjetivas deben ser modificadas con prioridad, una vez que se han contrarrestado hasta niveles aceptables casi todas las de carácter objetivo?
- ¿Qué otros paradigmas didácticos pueden mejorar sensiblemente el influyente factor de la calidad de las clases, y cómo lograr que los docentes los incorporen conscientemente a su actuación profesional?
- ¿Es imprescindible un rediseño curricular de la Matemática escolar, de modo que se atempere mejor el tratamiento de los contenidos al ritmo de aprendizaje de los escolares cubanos?

Recomendaciones:

No cabe dudas que esas hipótesis sugieren la realización de nuevas, y más detalladas, investigaciones. Esa es la convocatoria y principal sugerencia que realiza este autor.

También es importante considerar que el trabajo de investigación no debe girar sólo alrededor de una asignatura; lo correcto es proceder de manera interdisciplinaria; la compleja naturaleza del verdadero objeto de investigación (el proceso docente-educativo todo) así lo sugiere.

Referencias bibliográficas

Campistrous, L. et al. (1984) 'La importancia de la enseñanza de la Matemática'. En: MINED. *IV Seminario Nacional a dirigentes, metodólogos, inspectores y personal de los órganos administrativos de las direcciones provinciales y municipales de Educación* (4ta. parte). MINED. Ciudad Habana, pp.45-112.

MINED (1970) *Informe al Ministro de la Comisión de Expertos en enseñanza de la Matemática*. La Habana.

MINED (1991) *Informe del trabajo realizado por la Comisión de Matemática en el diagnóstico del estado de la enseñanza de la Matemática*. Ciudad Habana, abril-junio.

Torres, P. et al. (1998) *Estudio diagnóstico de las causas de los bajos resultados de los egresados de los preuniversitarios habaneros en la prueba de ingreso de Matemática a la Educación Superior*. ISPEJV. Ciudad de la Habana

Torres, P. et al. (1999). 'Estrategia Pedagógica para el mejoramiento del aprendizaje de la Matemática en los preuniversitarios habaneros'. En: MINED. *Pedagogía'99*. Ciudad de la Habana. (Ponencia)

Factores Afectivos

Distinta actitud hacia las matemáticas en género.

Campos Pérez Consuelo
Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN, México
oleusnoc54@hotmail.com

Resumen

El interés que llevó a algunos investigadores a estudiar las actitudes hacia las Matemáticas surgió a raíz de que encontraron que un número creciente de estudiantes a los que se consideraba como "intelectualmente calificados", decidían no estudiar Matemáticas más allá de los requisitos mínimos. Además se observó que esta decisión se daba más fuertemente en las mujeres que en los varones. Se afirmó que las actitudes afectan a ambos géneros al elegir estudiar Matemáticas así como a su aprendizaje

Considerando estos antecedentes realizamos en México una investigación exploratoria que tiene como propósito determinar si este fenómeno se presenta en nuestro entorno. En particular estudiamos si la actitud que tienen hacia las Matemáticas las niñas y los niños de sexto grado de primaria es igual o diferente a la que tienen los niños y las niñas de tercero de secundaria.

Consideramos importante esta investigación para la comunidad de RELME porque mientras en otros países las investigaciones que relacionan el género y las Matemáticas ya tienen historia, en América Latina están prácticamente ausentes. Al realizarlas, sus resultados nos permitirán plantear nuevas preguntas que darán paso a otras investigaciones.

Introducción

Los estudios y las investigaciones que se realizan en el área educativa tienden a centrarse más en los factores externos (errores, dificultades, contenidos, papel del profesor, etc.) que en los internos (intereses, motivos, actitudes, etc.). No hay estudios suficientes que analicen de forma sistemática la influencia de las actitudes en el aprendizaje de las Matemáticas.

Se ha encontrado que un número creciente de estudiantes a los que se consideró como "intelectualmente calificados", deciden estudiar Matemáticas sólo hasta los requisitos mínimos, y esta decisión se da más fuertemente en las mujeres que en los varones (Fennema-Sherman, 1976). Se sabe que las actitudes afectan a ambos géneros en su elección de estudiar Matemáticas y afectan también su aprendizaje. Las actitudes son difíciles de definir y poseen una importante carga emotiva, ya que van acompañadas de sentimientos agradables o desagradables (Auzmendi, 1992). Sin embargo es importante estudiarlas, en particular las actitudes hacia las Matemáticas, porque el conocerlas nos ayuda a tratar de mejorar el aprendizaje de esta asignatura (Fennema-Sherman, 1976).

Escámez y Ortega (1986) (citados en Auzmendi 1992) señalan que no se han hecho más estudios a este respecto porque: primero existe un desacuerdo entre los científicos acerca de qué es actitud; segundo, los prejuicios en torno a las actitudes ya que se asocian con las creencias, los valores, las normas sociales y la ideología personal y se considera que por ello, en determinado momento, podrían ser "manipulabais" y, tercero, por el deseo de conseguir beneficios inmediatos, porque se prefiere tratar de mejorar el rendimiento de los estudiantes, antes que mejorar sus actitudes y valores.

No es frecuente encontrar estudios sobre qué factores influyen en la formación de las actitudes hacia las diferentes áreas o materias; sin embargo, es en Matemáticas donde se han analizado las actitudes de los alumnos de forma más sistemática.

Desde 1976 Fennema y Sherman han realizado estudios sobre actitudes y reconocen el valor de los factores afectivos para la explicación de las diferencias individuales que se encuentran en la adquisición de conocimientos en este campo del saber.

En el reporte de Suydam (1984), (citado en Auzmendi 1992), leemos: "Generalmente las actitudes hacia las Matemáticas tienden a ser positivas hasta el sexto grado y luego se van haciendo menos positivas a medida que el alumno accede a cursos superiores en el colegio". Como señala Auzmendi (1992), las actitudes influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y, a su vez, la educación influye sobre ellas. Se aprende mejor aquello que concuerda o es congruente con nuestras propias actitudes o lo que produce mayor agrado y una educación adecuada puede mejorar las actitudes de los estudiantes sobre un área determinada.

Dada la importancia que tienen las actitudes hacia las Matemáticas y los puntos anteriores, consideramos necesario investigar si y cómo cambian las actitudes de los estudiantes; por lo cual este trabajo tuvo como objetivo general investigar si los niños y las niñas de sexto grado de primaria y de tercero de secundaria tienen distinta actitud hacia las Matemáticas. En particular quisimos estudiar si hay diferencias en las actitudes hacia las Matemáticas en los niños y las niñas de sexto grado de primaria; si hay diferencia entre los niños y las niñas de tercer grado de secundaria; si hay diferencia entre los niños de sexto de primaria y tercero de secundaria y si hay diferencia entre las niñas de sexto de primaria y tercero de secundaria.

Metodología

Para cumplir con el propósito de esta investigación que es de tipo exploratorio con diseño cuasi-experimental (Nisbet y Entwistle, 1980), se consideró la Escala Modificada de Actitudes de Fennema-Sherman (Doepken, Lawsky y Padwa, 1993), que ha sido validada y aplicada en varias ocasiones. Para poder usarla se tradujo al español. Dado que la escala es de origen norteamericano pensamos que podría no ajustarse a la idiosincrasia de los estudiantes mexicanos, por lo tanto elaboramos otra escala como posible alternativa. Ambas fueron aplicadas a cuatro estudiantes de sexto primaria de una escuela oficial, dos mujeres y dos varones y a dos estudiantes de tercero de secundaria (un varón y una joven). El propósito era determinar cuál de las dos escalas era más apropiada para usarse con ambos niveles de estudiantes. Una vez aplicadas, se entrevistó a cada uno de los estudiantes para conocer su punto de vista sobre la claridad de las preguntas. Ya que todos coincidieron en que la escala Modificada de Fennema-Sherman era la más clara, se decidió usar ésta para realizar el estudio.

La escala Modificada de Fennema-Sherman está compuesta de 47 afirmaciones distribuidos en cuatro subescalas que caracterizan a la actitud hacia las matemáticas, cada una mide las actitudes positivas y negativas hacia: confianza en sí mismo para aprender Matemáticas (C), indica la seguridad en la habilidad que uno tenga para aprender y realizar apropiadamente actividades matemáticas; percepción del profesor (P), corresponde a las percepciones que tienen los estudiantes sobre las actitudes del profesor hacia ellos como aprendices de Matemáticas; utilidad de las Matemáticas (U), se refiere a las creencias de los estudiantes acerca de qué tan útiles son las Matemáticas actualmente y, en lo futuro, relacionado con su vocación y otras actividades y las Matemáticas como dominio masculino (M), alude a la visión que los estudiantes tienen acerca de quién domina las Matemáticas; los hombres o las mujeres.

Es una escala descriptiva tipo Likert, está formada por un conjunto de afirmaciones referentes a actitudes, cada una de ellas con igual valor, en la que se establecen cinco rangos que indican el grado de acuerdo o desacuerdo hacia las afirmaciones que se plantean. Al contestarla se señala la categoría elegida para cada pregunta y se obtiene la puntuación global sumando los rangos otorgados a cada elemento.

Los cinco rangos a seleccionar son: A - Totalmente de acuerdo, B - de acuerdo, C - No estoy seguro/a o no sé que contestar, D - No estoy de acuerdo y E - Estoy totalmente en desacuerdo.

El escenario de campo correspondió a tres escuelas primarias oficiales y una escuela secundaria oficial. Las escuelas primarias pertenecían a una misma Zona Escolar, dos tenían turnos matutino y vespertino y una era de tiempo completo. La escuela secundaria contaba con turnos matutino y vespertino, Todas eran escuelas urbanas, ubicadas en la Ciudad de México. La mayoría de los estudiantes eran un nivel cultural, social y económico, medio bajo.

El estudio se realizó con once grupos, conformando así una muestra incidental de 294 estudiantes, seis eran de sexto de primaria, 74 mujeres y 75 varones y cinco de tercero de secundaria, 70 mujeres y 75 varones.

La escala se aplicó fuera del horario de la clase de Matemáticas en días normales de clases y se entregaron a cada alumno una hoja de lector óptico, una escala de actitudes y un lápiz de punta mediana.

Para procesar los datos y después analizarlos se recurrió a la estadística no paramétrica. Las técnicas, también llamadas distribuciones libres, pruebas de rango ó pruebas de orden; que se emplean al usar esta estadística, pueden utilizarse especialmente para tratar los datos de las ciencias de la conducta y tienen las siguientes ventajas: a) no suponen que los puntajes que se están analizando se hayan sacado de una población distribuida en manera determinada, b) permiten usar puntajes que no son exactos en sentido numérico, sino que se fijan en el orden o rango de ellos, c) los puntajes son fáciles de ser computados, d) son útiles para muestras pequeñas como la utilizada en esta investigación, e) se pueden obtener conclusiones a las que hay que hacer menos reservas y f) en casos extremos se puede utilizar con datos en los que ni siquiera es posible poner orden (Siegel, 1978).

Las hojas de lector óptico se procesaron para formar una base de datos en EXCELL 97, compatible con el programa estadístico SPSS 11.0; la presentación de la base se hizo por: grado; por género; y ambos. Esto nos permitió analizar las posibles diferencias entre niñas y niños independientemente del grado que frecuentan; entre los grados independientemente del género; entre niños y niñas considerando el grado en el que están.

El análisis de frecuencias se hizo por afirmaciones, diferenciando grado y género; se incluyeron porcentajes.

Se obtuvieron calificaciones para cada: sujeto, afirmación, aspecto o subescala positivo, aspecto o subescala negativo y para cada aspecto o subescala en general.

La puntuación de las respuestas que indican el grado de acuerdo o desacuerdo, se obtiene señalando la categoría elegida para cada afirmación y sumando los rangos otorgados a cada elemento, considerando la actitud que reflejan (positiva o negativa); el total de puntos por cada subescala es 30, las respuestas de los estudiantes que se acercan más a 30 reflejan una actitud positiva y entre más se alejan, una actitud negativa; las puntuaciones se obtuvieron así: afirmaciones que reflejan actitud positiva.- A-cinco, B-cuatro, C-tres, D-dos y E-uno y las que reflejan actitud negativa.- A-uno, B-dos, C-tres, D-cuatro y E-cinco.

La confiabilidad de la escala se calculó con el de Cronbach que tiene una correlación de 0 a100 y el valor mínimo para que haya confiabilidad es .8682 (87% aproximadamente).

Se aplicó el análisis de Varianza Univariado para determinar si existen diferencias significativas entre grados y géneros.

Ejemplos de subescalas

Se presentan dos ejemplos de subescalas; la primera corresponde al dominio masculino para medir la actitud positiva y la segunda a la utilidad de las Matemáticas para medir la la actitud negativa.

6. Los hombres no son por naturaleza mejores que las mujeres en Matemáticas	A	B	C	D	E
15. Las mujeres pueden hacer Matemáticas tan bien como los hombres.	A	B	C	D	E
28. Las mujeres son tan buenas como los varones en Matemáticas.	A	B	C	D	E
31. Estoy seguro que las mujeres son suficientemente inteligentes para hacer bien Matemáticas.	A	B	C	D	E
38. Estudiar Matemáticas es tan bueno para las mujeres como para los hombres.	A	B	C	D	E
46. Yo confiaría en una mujer, tanto como en un varón, para resolver problemas de Matemáticas importantes.	A	B	C	D	E

5. Las Matemáticas no serán importantes para mí en mi trabajo.	A	B	C	D	E
13. No creo usar mucho las Matemáticas cuando salga de la escuela.	A	B	C	D	E
21. Cursar Matemáticas es una pérdida de tiempo.	A	B	C	D	E
29 Veo las Matemáticas como algo que no usaré muy a menudo cuando salga de la escuela secundaria.	A	B	C	D	E
39. Obtener buenos resultados en Matemáticas no es tan importante para mi futuro.	A	B	C	D	E
42. Las Matemáticas no son importantes para mi vida.	A	B	C	D	E

Afirmaciones agrupadas por aspecto o subescala:

Tenemos una tabla que agrupa las afirmaciones por subescalas. Incluye aspectos positivo y negativo y cada una de las afirmaciones que pertenecen a dichas subescalas.

CONFIANZA EN SÍ MISMO PARA APRENDER MATEMÁTICAS (C)	UTILIDAD DE LAS MATEMÁTICAS (U)	LAS MATEMÁTICAS COMO DOMINIO MASCULINO (M)	PERCEPCIÓN DEL PROFESOR (P)
No. de afirmación	No. de afirmación	No. de afirmación	No. de afirmación
POSITIVAS			
1, 12, 25, 33, 37, 41	3, 10, 17, 27, 34, 44	6, 15, 28, 31, 38, 46	2, 14, 20, 35, 45, 47
NEGATIVAS			
4, 8, 19, 23, 32, 43	5, 13, 21, 29, 39, 42	9, 11, 18, 24, 36,	7, 16, 22, 26 30, 40

Resultados preliminares

Al aplicar el de Crombach, los resultados que obtuvimos muestran que siete afirmaciones resultaron bajas y son los siguientes:

AFIRMACIONES	SUBESCALA	TIPO DE ACTITUD
6, 15 Y 31	Dominio Masculino	positiva
2, 14 Y 45	Percepción del profesor	positiva
36	Dominio Masculino	negativo

A pesar de este resultado decidimos conservar esas afirmaciones y realizar una discusión del por qué conservarlas, ya que son parte importante de lo que estamos investigando.

En la aplicación del Análisis de Varianza Univariado obtuvimos, en el análisis general de los resultados, considerando cada subescala con el género y los grados, lo siguiente:

Utilidad positiva---no hay diferencias. Utilidad negativa---no hay diferencias.

Dominio positivo--si hay diferencias. Dominio negativo--si hay diferencias.

Confianza positiva--no hay diferencias. Confianza negativa--no hay diferencias.

Percepción del profesor positiva--no hay diferencias en género/hay diferencias en grado.

Percepción del profesor negativa--no hay diferencias en género/hay diferencias en grado.

La siguiente tabla presenta la media del puntaje, que obtuvo cada subescala, por grado y género.

Niños de 6° y 3°.

SUBESCALAS	6°.	MEDIA	3°.	MEDIA
Confianza +	75	25.3	72	25.3
Confianza -	72	21.3	70	21.4
Dominio m.+	70	23.6	73	25.6
Dominio m.-	72	15.8	72	17.3
Utilidad +	67	26.4	72	25.4
Utilidad -	69	24.8	71	25.4
Profesor +	74	24.9	72	22.4
Profesor -	69	21.0	72	23.2

Niñas de 6°. y 3°.

6°.	MEDIA	3°.	MEDIA
73	25.3	68	23.9
71	20.3	68	20.4
73	25.0	70	26.6
69	17.1	70	19.2
71	25.7	69	25.6
71	24.1	69	25.4
69	24.5	68	22.4
72	22.1	67	23.8

Análisis de resultados por subescala

Confianza en sí mismo para aprender Matemáticas (C).-

En este aspecto observamos que hay una tendencia general a tener bastante confianza. Las alumnas y los alumnos de 3° de secundaria tienden a tener menos confianza que los de 6° de primaria; mientras que en las alumnas se nota que hay un desliz a perder la confianza cuando se comparan las de 6° con las de 3°. Relacionando esto con la literatura revisada, nos damos cuenta que coincide con lo que allí se reporta, y que en 3° de secundaria empieza a abrirse una brecha entre los alumnos y las alumnas.

Percepción del profesor (P).-

En los alumnos y las alumnas de 3° de secundaria la actitud, en este aspecto, es muy parecida, no presentan mucho cambio y tiende a ser positiva.

En 6° de primaria la percepción positiva es bastante alta para ambos géneros y la percepción negativa es un poco más baja que en 3° de secundaria, pero se conserva positiva.

Utilidad de las Matemáticas (U).-

Los alumnos y las alumnas de 6° de primaria, así como los de 3° de secundaria consideran a las Matemáticas útiles con muy poca diferencia entre ellos.

Se observa que no hay un cambio de 6° de primaria a 3° de secundaria en las alumnas.

Los alumnos de 6° perciben a las Matemáticas un poco más útiles que los alumnos de 3° de secundaria.

Las Matemáticas como Dominio Masculino (M)

Tanto los alumnos como las alumnas creen que las Matemáticas no son un dominio masculino y esto se incrementa al pasar de 6° de primaria a 3° de secundaria.

Los datos nos indican que las alumnas consideran aun más, que los alumnos, que las Matemáticas no son dominio masculino.

Conclusiones

Considerando que la muestra que utilizamos para la investigación es significativa para un medio socio económico medio bajo, los resultados nos indican que en general la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas tiende a ser positiva y no se encontraron diferencias de género muy marcadas. Encontramos que la actitud de los alumnos es más positiva que la de las alumnas y no encontramos actitudes negativas.

Hasta el momento no podemos confirmar lo que reporta Suydam, que las actitudes hacia las Matemáticas tienden a ser positivas hasta el sexto grado y luego se van haciendo menos positivas a medida que los estudiantes acceden a cursos superiores en el colegio.

Aplicaremos otras pruebas estadísticas para encontrar qué tan significativas son, las que consideramos en este momento, pequeñas o grandes diferencias.

Si las calificaciones en esta asignatura no son altas, esto no parece deberse a una actitud negativa hacia las Matemáticas por parte de los estudiantes. Si queremos encontrar causas que nos expliquen por qué muchos estudiantes no tienen un buen desempeño en Matemáticas, no deberíamos buscar en las actitudes, sino girar nuestra atención hacia otros aspectos, los cuales podrían ser los contenidos programáticos, la didáctica, el profesor, etc.

Referencias bibliográficas

Auzmendi, E. (1992). *Las Actitudes Hacia La Matemática/ Estadística en las Enseñanzas Medias y Universitaria. Características y Medición.* Ediciones Mensajero-Bilbao. España. Editorial Paidós

Doepken, D. & Lawsky , E. & Padwa, L. (1993). *Escala Modificada de Fennema-Sherman.* The Woodrow Wilson National Fellowship Foundation. . CN 5281, Princeton NJ 08543-5281.

Fennema,E. & Sherman, J. (1976). *Fennema-Sherman Attitudes Scales. Instruments Designed To Measure Attitudes Toward The learning Of Mathematics By Females and Wisconsin-Madison Males. Wisconsin Center For Education Research School Of Education.University Of.* Reprinted March 1986. Originally published in JSAS Catalog of Selectes Documents in Psichology, 1976, 6, 31. (Ms.No. 1225)

Leder, G. (1992) Mathematics and Gender: Changing perspectives. *Handbook of Research on Mathematics. Teaching and Learning.* Ed. y Douglas A. Grows. A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Editorial Mc Millan.

Nisbet, J. & Entwistle, N.(1980). *Métodos de Investigación Educativa.* Oikos-tau, S.A.Ediciones. Versión castellana de Alicia Ramón García. Primera Edición en castellano 1980. Barcelona, España.

Siegel, S. (1978). *Estadística no paramétrica. Aplicada a las ciencias de la conducta.* Aguilar l. (traductor). Editorial Trillas. México.

Formación de Profesores

Una estrategia metodológica para la caracterización de las concepciones probabilísticas de los profesores

Pilar Azcárate Goded y José María Cardeñoso

Área de Didáctica de la Matemática. Univ. Cádiz y Univ. Granada. España.

pilar.azcarate@uca.es josem@ugr.es

Resumen

Se presenta un reporte de investigación que intenta aproximar al lector a reconocer una agenda de investigación, que intenta trabajar sobre un campo de investigación en educación matemática de enorme complejidad la formación de los profesores de matemáticas para abordar el tratamiento de la incertidumbre en las aulas. Se vinculan varias investigaciones interesadas en el análisis del conocimiento didáctico-matemático de los profesores, a través de la evolución y complementación de un instrumento común de análisis que configura un sistema de categorías elaborad desde un estudio histórico epistemológico y didáctico. Sistema de Categorías que se constituye como referente valido, para la elaboración de los diversos instrumentos utilizados la investigación empírica y que se va surtiendo de los resultados encontrados en la indagación empírica y nos va mostrando, la necesidad de afrontar nuevos estudios teóricos para afrontar los retos que los nuevos problemas plantean.

Justificación y presentación del problema

El trabajo que presentamos es un extracto de una investigación en formación de profesores mucho más amplia, enfocada al desarrollo de estrategias idóneas para el desarrollo profesional. Un elemento relevante de dicho desarrollo es la construcción de un conocimiento profesional significativo del contenido a enseñar. Dicha construcción es el resultado de la interrelación del sistema de ideas iniciales de los profesores con las distintas informaciones implicadas en el proceso. El sentido que tiene para nosotros este trabajo es acercarnos a una mayor comprensión de la realidad, en el campo de las ideas de los profesores en torno a tópicos concretos, para poder intervenir en ella y transformarla. Todo proceso de formación de profesores, comprometido con un cambio real de la escuela, debe partir de los presupuestos iniciales de los profesores, de sus concepciones para así poder promover su evolución. Por todo ello, la **finalidad principal** del estudio realizado es aumentar el conocimiento sobre qué piensan los profesores acerca de la temática objeto de estudio y cómo justifican sus interpretaciones.

En nuestro caso la temática elegida fue el análisis de las concepciones de los futuros profesores y profesores de matemáticas **en relación con el conocimiento probabilístico,** más concretamente sobre la noción de aleatoriedad y sobre la introducción y el significado de las primeras nociones probabilísticas. Para ello se diseñó una agenda de investigación que nos ha permitido ir obteniendo informaciones de diferentes rangos en relación con las ideas y conocimientos de los profesores en torno a estos tópicos y sobre cómo éstas pueden determinar sus planificaciones y actuaciones en aula. En las primeras fases de la investigación (1992-1998) la unidad de información recogida y analizada se refiere a los tipos de argumentaciones presentados por los sujetos a la hora de afrontar y tomar decisiones en las distintas situaciones afectadas por incertidumbre que les fueron propuestas. Nuestra intención es caracterizar las diferentes tendencias de pensamiento que se van presentando. Estas argumentaciones fueron categorizadas y tratadas desde diferentes tipos de análisis. En una segunda etapa la unidad de información considerada son las argumentaciones y actividades reflejadas en los libros de texto primero (Serradó, 2000) y posteriormente en las planificaciones que desde su uso hacen los profesores (1998-actualmente).

Este reporte se focaliza en la descripción de la estrategia metodológica utilizada en las primeras fases de esta agenda de investigación. Ante un problema complejo como es el de caracterizar progresivamente las concepciones de los profesores con respecto a un contenido curricular, optamos por un enfoque pluri-metodológico, que nos permita una mayor comprensión de los datos obtenidos a través de diferentes instrumentos. Estos planteamientos, defendidos por numerosos autores como Cook y Reichardt (1986), se basan en la idea de que toda estrategia metodológica puede ser útil siempre que favorezca la investigación y nos permita obtener información significativa que nos facilite el camino hacia una verdadera transformación reflexiva de la práctica. Las técnicas cualitativas nos permiten una mayor profundización en los problemas, al acercarnos a ellos desde estrategias más directas y personales, como puede representar, por ejemplo, el nivel de introspección individual que supone la realización de una entrevista. El dato cualitativo nos permite caracterizar mejor una realidad, sus propiedades o el grado en que éstas se manifiestan (Rodríguez, Gil y García, 1996). Sin embargo, las técnicas de carácter más cuantitativo que cierran una investigación completa según Ghiglione (1989), nos aportan una visión más general y amplia del problema general. Ambas pueden ser complementarias (Cohen y Manion, 1990), y su contraste nos permite una mayor comprensión de los datos obtenidos, lo cual centra el problema metodológico en la perspectiva desde la que se realiza la interpretación de los datos y no tanto en los métodos y técnicas seleccionadas. El enfoque desde el que se analizan los datos, y la perspectiva desde la que se reflexiona, es la determinante a la hora de sacar conclusiones y consecuencias de los resultados obtenidos. En nuestro caso concreto, hemos combinado varios instrumentos en función de los diferentes objetivos formulados en esta agenda de investigación del conocimiento profesional del profesor.

En el ámbito de la Educación Matemática los estudios sobre concepciones es un campo de investigación con gran desarrollo en los últimos años. Muchos de estos estudios se limitan a detectar si el sujeto conoce o utiliza correctamente el concepto que es objeto de estudio o no. Y, sin embargo, pensamos que las ideas o concepciones de los sujetos sobre un determinado objeto matemático, constituye un complejo sistema que no puede ser caracterizado simplemente por los atributos que se le atribuyen desde una perspectiva matemática. Esto hace necesario desarrollar un sistema de categorización y tratamiento de las ideas y argumentaciones de los sujetos que nos permita detectar los diferentes significados que los sujetos otorgan a los conocimientos y sus relaciones, sin caer en simplificaciones de clasificar las respuestas como adecuadas o no al modelo matemático.

Los primeros estudios han estado dirigidos a conocer las **concepciones sobre el mundo de la incertidumbre** de futuros profesores y profesores en activo, de Ed. Primaria (Azcárate, 1996; Cardeñoso, 1998). El objetivo principal era acercarnos a la percepción que tienen los sujetos del mundo de la incertidumbre y a conocer qué significados le otorgan a la azar y a la probabilidad, través de las argumentaciones que utilizaban para caracterizar la incertidumbre y para justificar su toma de decisiones ante situaciones con ella presente.

Desde la perspectiva matemática, para estudiar los fenómenos afectados por la incertidumbre consideramos su modelización matemática, **la noción de aleatoriedad**, modelo descriptivo y explicativo de una realidad que el mundo matemático ha sistematizado. Desde el punto de vista matemático, la incertidumbre presente en los fenómenos aleatorios se estudia desde una aproximación probabilística, en la idea básica es **la noción de probabilidad y su medida.** Para poder llegar a conocer las formas de pensamiento de los sujetos era necesario conocer y trabajar con los distintos argumentos, interpretaciones o significados que ellos mismos podían manifestar, analizados e interpretados desde un sistema de categorías que reflejase las posibles caracterizaciones, sistema que fue elaborado desde los datos obtenidos en los estudios previos realizadas tanto de carácter histórico-epistemológico como didáctico. El conjunto de variables consideradas en los estudios, fueron los tipos de argumentaciones presentadas por los sujetos en las distintas situaciones planteadas en los diferentes instrumentos de recogida de datos.

El objetivo no era detectar los sesgos de sus razonamientos sino explorar cómo interpretan la información disponible sobre situaciones de incertidumbre, cómo se mueven en ella, qué conocen y cuáles pueden ser los obstáculos que reflejan sus formas de concebir el conocimiento probabilístico. Cuestión prioritaria para el desarrollo de su profesión como docentes en el que necesitan disponer de un determinado conocimiento profesional sobre el tópico en cuestión (Azcárate y Cardeñoso, 2001).

Estrategia metodológica

Ante un problema complejo como el que se quería abordar como es caracterizar las concepciones de los futuros profesores y profesores de Primaria con respecto a un contenido curricular, optamos más bien por un enfoque pluri-metodológico, que nos permitiera una mayor comprensión de los datos obtenidos a través de diferentes instrumentos de recogida de datos y de procedimientos de análisis.

La estrategia metodológica desarrollada en un primer momento del proceso de investigación (Azcárate, 1996), **partió de la realización de diversas entrevistas** (6) a maestros en ejercicio, sobre diferentes aspectos relacionados con sus creencias y conocimientos sobre los fenómenos aleatorios y sus pautas de decisión ante situaciones de incertidumbre. El objetivo era recoger datos directos sobre la realidad a la que nos podíamos enfrentar y sobre qué información podía ser más significativa para nuestro objetivo. Los resultados de estas entrevistas se analizaron y contrastaron y, a partir de ello, se elaboró el cuestionario definitivo formado por un conjunto de situaciones y cuestiones en las que se solicitaban sus opiniones y tomar determinadas decisiones.

El **cuestionario** fue presentado a un grupo de futuros profesores (57), con el objetivo de obtener una información general sobre el tema. Los datos obtenidos fueron categorizados y analizados, y su estudio nos permitió detectar la presencia de ciertas tipologías entre los sujetos (Azcárate, Cardeñoso y Porlán, 1998). Para obtener una explicación más razonada de las informaciones y argumentos recogidos en el cuestionario y matizar las clasificaciones realizadas, **se entrevisto posteriormente** a una pequeña muestra de sujetos representativos de cada tendencia, previamente diferenciada (5). Las entrevistas nos permitieron explorar, más profundamente, en los razonamientos de los sujetos concretos y en los argumentos utilizados.

En cualquiera de los casos, ni el cuestionario ni los guiones de las entrevistas realizadas en nuestro estudio poseían una estructura cerrada y permitían a los sujetos expresar sus opiniones o explicaciones. Los datos obtenidos, por tanto, eran de naturaleza textual y una de las primeras actividades consistió en hacer *un análisis categorial del contenido* (Rodríguez, Gil y García, 1996). Dado el significado global de las respuestas presentadas por los sujetos a las distintas cuestiones planteadas, tanto en el cuestionario como en la entrevista, hemos establecido como criterio de separación de las unidades básicas de información las respuestas consideradas en su totalidad.

El proceso de categorización ha reflejado características mixtas, pues las categorías utilizadas han sido el resultado de un contraste entre el sistema de categorías previo, elaborado desde las diferentes opciones que en la literatura e investigaciones anteriores habíamos detectado y el conjunto de datos obtenidos (Tesch, 1990). Este Sistema de Categorías no sólo se va surtiendo de los resultados encontrados en la indagación empírica, sino que nos va mostrando la necesidad de realizar nuevos estudios, para afrontar los retos que los nuevos problemas plantean.

Las limitaciones del propio diseño de la primera investigación realizada, pese a los altos índices de sujetos bien clasificados que se alcanza en el procedimiento de clasificación en tendencias y de las aportaciones que se realizan desde el posterior análisis discriminante de las mismas, no permiten afirmar su potencialidad predictiva y generalizadora, como procedimiento de identificación de la tendencia de pensamiento de cualquier persona que cumplimentase el cuestionario. Esto nos lleva a pensar que para una utilización más ágil en los procesos formativos sería necesario un instrumento más estructurado, que facilite la codificación y que denote su eficacia como detector de concepciones iniciales en el aula de formación de profesores. Esta idea nos llevó a plantear la necesidad de poder conocer más globalmente la realidad y, por tanto, ampliar el campo de estudio. Nuestra necesidad nace de cuestionar el carácter global de las evidencias empíricas aportadas, su aplicabilidad a cualquier grupo numeroso de profesores, en activo o en formación, suponiendo que dichas argumentaciones, instrumentos y tipologías de pensamiento, son parte significativa de las categorías de respuesta y concepciones posibles. En consecuencia, asumimos que los nuevos problemas de investigación no difieren fundamentalmente de los ya enunciados, pero referidos a una gran población: el conjunto de profesores en activo, en la Comunidad Andaluza (Cardeñoso, 2001).

Para ello utilizamos el método de encuesta sobre una muestra representativa de la población considerada. La muestra se organizo considerando como unidad de referencia los centros de primaria existentes en la Comunidad Andaluza y se seleccionaron 341 centros (14% del total), a los que se les remitió por correo un conjunto de cuestionarios para que fuera cumplimentado por sus profesores. El cuestionario utilizado recogía un inventario de situaciones afectadas por incertidumbre en la que los sujetos deberían de tomar unas determinadas decisiones entre las múltiples opciones que se le presentaban. Opciones que se elaboraron desde los prototipos de respuestas detectados en el estudio previo. Se configuró definitivamente a través de un proceso de validación con un estudio piloto y juicios de expertos. Aunque se eligió la opción de proponer repuestas cerradas representativas de las diferentes tendencias de pensamiento se opto por dejar una opción abierta que permitiera expresar ideas alternativas. De esta forma pensamos que podíamos evidenciar las potenciales argumentaciones alternativas que pudieran utilizar los profesores de primaria, tipologías de pensamiento que puedan surgir y las posible sensibilidad a los contextos de la tarea que se presente en el instrumento de investigación. Se recibieron 598 cuestionarios cumplimentados, superando las 480 respuestas necesarias para la validez estadística.

Procedimiento de análisis de los datos

Dada la finalidad del estudio, el tratamiento de los datos es uno de los instrumentos fundamentales que orientan su posterior interpretación. Tanto en un caso como en otro con los datos obtenidos de los cuestionarios se realizaron dos tipos de análisis:

A) *Análisis descriptivo*: tratamiento de los datos considerando como eje organizador los ítems. Centrado en el análisis independiente de las respuestas dadas por el conjunto de sujetos a las distintas cuestiones presentadas tanto en el primer cuestionario como en el segundo, realizado desde la matriz de datos que relaciona cada sujeto con las respuestas dadas a cada ítem. Para ello utilizamos el procedimiento "FREQUENCIES", del programa SPSS/PC+ (Norusis, 1990). Este primer tipo de estudio obtuvimos una primera visión de la realidad a través del propio cuestionario, al permitirnos detectar los tipos de argumentaciones predominantes en las explicaciones de los sujetos pero también nos permitió detectar la gran diversidad de explicaciones, y las diferentes proporciones de utilización en el conjunto de sujetos.

B) *Análisis multivariante*: tratamiento de los datos considerando como eje organizador los sujetos. El objetivo de este estudio era obtener un agrupamiento de los sujetos en función de sus semejanzas en la utilización de los tipos de argumentos y caracterizar las tendencias detectadas; es decir, el estudio estaba centrado en el conjunto de respuestas dadas por cada sujeto. Para ello, transformamos la matriz original de datos en otra matriz cuyas filas representaban el porcentaje de utilización de cada argumento o categoría por cada sujeto; considerado como indicador empírico de la estructura de conocimiento del sujeto. Obteníamos así, una caracterización de cada sujeto en función de la preponderancia de los diferentes argumentos o categorías en sus razonamientos, expresada en términos de tanto por ciento, información sobre la que aplicamos un análisis multivariante. Esta nueva organización de los datos, por tanto, ya no estaba en función de los ítems sino de los sujetos y nos permitió obtener una caracterización de los argumentos utilizados pro los sujetos en su conjunto que posteriormente nosotros podríamos interpretar y asociar a determinadas tendencias.

El procedimiento utilizado fue el análisis cluster, a través del procedimiento "CLUSTER" del mismo programa SPSS/PC+ (Norusis, 1990a). Utilizamos la *Métrica Euclídea* como herramienta para obtener indicadores de similitud entre sujetos, por ajustarse sus agrupamientos al objetivo buscado, pues de esta forma dos individuos estarán más próximos cuanto más coincidan en el porcentaje de utilización de las categorías establecidas. Y, como algoritmo de caracterización de los grupos, el método de las distancias máximas: *Complete linkage.* Este es un método jerárquico aglomerativo, es decir ascendente, que toma como criterio de agrupamiento la distancia entre los puntos más alejados.

La clasificación así obtenida la sometimos, en un segundo momento, a un análisis discriminante, auxiliándonos para ello del procedimiento "DISCRIMANT" del programa SPSS/PC+ (Norusis, 1990b). Ello nos permitió discernir y caracterizar los grupos construidos de forma más detallada y sistemática, y nos proporcionó información sobre la representatividad de cada uno de los sujetos incluidos en los distintos grupos o tendencias. La posterior interpretación de los datos obtenidos en este segundo tipo de estudio nos permitió obtener una cierta clasificación de los sujetos, caracterizando las grandes tendencias de pensamiento que se detectaban en el conjunto de sujetos considerados, futuros profesores o profesores en ejercicio.

La aplicación del análisis "Discrimant" tras el primer cuestionario, nos permitió seleccionar un número reducido de sujetos para explorar más directamente las ideas predominantes en las diferentes tendencias detectadas, al facilitarnos la probabilidad de pertenencia de cada sujetos a su grupo. Se eligieron los de probabilidad cercana al 100%. A este grupo de sujetos se les entrevisto y los datos obtenidos fueron sometidos a un tercer análisis:

C) ***Análisis cualitativo*: tratamiento de los datos obtenidos en las entrevistas.** Su objetivo era matizar los resultados detectados en los estudios anteriores. Los resultados de las entrevistas, fueron tratados a través de un análisis cualitativo del contenido en la línea desarrollada por Porlán (1989). El proceso de categorización del contenido del discurso, previamente trascrito, fue el siguiente:

* Diferenciar y organizar las unidades de información con los mismos criterios que en el cuestionario, asignado a cada unidad de información un código numérico.

* Agrupar y transformarlas en formulaciones o proposiciones más estándar de significado similar, que nos permiten un trabajo de sistematización, descripción y comparación del contenido.

* Agrupar las proposiciones en función del contenido conceptual, con el objetivo de poder establecer interpretaciones de los datos ya organizados (Bardin, 1986).

De esta manera disponemos de una reorganización del discurso inicial, expresado por los sujetos de forma más o menos natural, que nos permitía obtener una imagen más estructurada de las ideas y concepciones de los sujetos reflejadas en sus manifestaciones, con independencia del orden del discurso y de las cuestiones particulares que las motivan. Esta imagen nos permitió a su vez la construcción del 2º cuestionario utilizado en el método de encuesta.

Algunos resultados

En un primer acercamiento a los resultados se reconoce la argumentación de Causalidad como aquella más ligada a posiciones deterministas que dificultan considerablemente el reconocimiento de la naturaleza aleatoria del fenómeno. Como Azcárate (1996a) afirma, estas condiciones suelen estar muy relacionados con la creencia, en la posibilidad del control de las condiciones de ocurrencia del fenómeno. Esta autora añade que dichas consideraciones deterministas también pueden provenir bien, del conocimiento del funcionamiento del fenómeno y desprecio del impacto del azar o bien, por tener posibilidades de acceder a la información que nos clarifiquen el funcionamiento de dichos fenómenos. Según dichas posiciones van perdiendo su dominio en el pensamiento de los sujetos, surgen otras argumentaciones como son las apoyadas en la simple descripción del carácter incierto del fenómeno y su funcionamiento. Estas permiten el predomino gradual, no sólo del reconocimiento global de la incertidumbre, sino del nivel de existencia de diferentes soluciones, cuya futura valoración permitiría la toma de decisiones con mayores garantías. Los resultados de Cardeñoso (2001) muestran que la tipología de argumentación más empleada es la explicación causal y en niveles muy cercanos, las apoyadas en la imprevisibilidad del fenómeno. Se han encontrado dos tipologías diferentes de fenómenos que originan tanto un nivel diferente de reconocimiento, como el uso de uno u otro criterio de discriminación, en referencia a la representatividad de los diferentes contextos Cotidiano, Juegos y Físico-natural.

En definitiva, en nuestro trabajo se refleja la posibilidad de usar diferentes procedimientos de análisis de datos para realizar un estudio de la estructura relacional de un grupo de respuestas dadas por unos determinados sujetos de acuerdo a unas tareas, el problema no debe estar focalizado en el cambio de las técnicas cualitativas o cuantitativas como en su uso e interpretación.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1996): *Estudio de las concepciones disciplinares de los futuros profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad.* Granada: Comares.

Azcárate, P. (1996a): El conocimiento profesional relativo al tratamiento del conocimiento probabilístico en la Educación Primaria. Revista: *UNO*, 7: 95-108.

Azcárate. P. & Cardeñoso, J. & Porlán, R. (1998): Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. Revista. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1): 85-97.

Azcárate, P. & Cardeñoso, J. (2001): Probabilidad, en Castro, E. (Eds): *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Bardin, L. (1986): *Análisis del Contenido*. Madrid: Akal/Universitaria.

Cohen I. & Manion, I. (1990): *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla

Cardeñoso, J. (2001): *Las creencias y conocimientos de los profesores de Primaria andaluces sobre la Matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la Aleatoriedad y Probabilidad*. Cádiz: Serv. de Publicaciones de la Univ. de Cádiz.

Cook, T. & Reichardt, CH. (1986): *Métodos Cualitativos y Cuantitativos en Educación.* Madrid: Morata.

Ghiglione, R. (1989): Encuestar. En Banchet y otros, *Técnicas de investigación en Ciencias Sociales. Datos, observación, entrevista, cuestionario*. Madrid: Narcea

Norusis, M.J. (1990): *SPSS/PC+ 4.0 Base Manual*. Chicago Il: SPSS Inc.

Norusis, M.J. (1990a): *SPSS/PC+ Statistics 4.0*. Chicago Il: SPSS Inc.

Norusis, M.J. (1990b): *SPSS/PC+ Advanced Statistics 4.0.* Chicago Il: SPSS Inc.

Porlán, R. (1989): *Teoría del Conocimiento, Teoría de la Enseñanza y Desarrollo Profesional. Las concepciones epistemológicas de los profesores*. Tesis Doctoral inédita. U. de Sevilla.

Rodriguez, G. & Gil, J. & García, E. (1996): *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Algibe

Serradó, A. (2000): *Diseño de las unidades dedicadas al "Tratamiento del Azar" en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria.* Trabajo investigación inédito. Univ. Cádiz.

Tesch, R. (1990): *Qualitative Research: Analysis Types and Software Tools.* The Falmer Press, Bristol.

Desarrollo de habilidades matemáticas y formación de profesores

Santiago Ramiro Velázquez, Carlos Flores Lozano, Gerardo García Lozano, Enrique Gómez Otero, Hermes Nolasco Hesiquio

Universidad Autónoma de Guerrero y Centro de Investigación y Desarrollo Educativo

sramiro@galeana.uagfm.mx

Resumen

En este artículo se presentan algunos resultados del proyecto de investigación denominado El desarrollo de habilidades matemáticas y la formación de profesores de educación secundaria, perteneciente al Sistema de Investigación Benito Juárez, SIBEJ-CONACYT. En especial se expresa una concepción de situaciones didácticas para promover el desarrollo de habilidades matemáticas, producto de las posiciones teóricas de la investigación y de las experiencias de la realización de diversos talleres y cursos con la participación de profesores y estudiantes del estado de Guerrero, México. Esta concepción de situaciones didácticas conformadas con series de problemas y actividades para abordarlos, considera al proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática incluido en el proceso de estudiar esta asignatura, que a su vez es un proceso estructurado y sostenido como fuente constante de tareas y problemas matemáticos, Chevallard (1998). En este sentido y considerando que una de las funciones principales del docente es el diseño e instrumentación de situaciones didácticas, el presente trabajo contribuye a fortalecer los programas de actualización y superación de profesores.

Introducción

En esta presentación se describe un taller para profesores, estructurado sobre la base de las ideas y experiencias de la realización de diversos cursos y talleres con la participación de 200 docentes de educación secundaria, del estado de Guerrero, México.

En los referidos talleres y cursos se analizan y diseñan situaciones didácticas para promover el desarrollo de habilidades matemáticas, como una forma de instrumentar el proceso de estudio de esta asignatura. En particular se promueve la habilidad de comprender, la de visualizar y la de comunicar. En tanto que el proceso de estudiar matemática, es un proceso amplio que incluye al de enseñanza aprendizaje.

En la descripción se exponen los objetivos, contenidos y productos esperados del taller. Además se hace una breve constatación del problema de investigación, se expone una concepción de situaciones didácticas y se presenta en extenso un ejemplo. Finalmente se exponen algunos resultados, donde se expresan experiencias de la realización de los talleres y cursos, como parte de los compromisos del proyecto en el marco de la actualización y superación de profesores.

Constatación del problema

El problema de investigación consiste en que los docentes de matemáticas de educación secundaria no desarrollan eficientemente su labor, porque no conocen a profundidad la disciplina que enseñan y desconocen algunos procesos que tienen lugar en el aprendizaje de esta asignatura, lo que repercute negativamente en el aprendizaje. Parte de la constatación de este problema se expone a continuación.

En educación secundaria se dispone de diversos materiales de apoyo como: el plan y programas de estudio, la organización y secuencia de contenidos, el libro para el maestro, libro del alumno y el fichero de actividades didácticas. Si estos materiales se instrumentaran adecuadamente, promoverían aprendizajes significativos en los estudiantes. No obstante se les concibe en forma aislada y se les asigna un papel externo de la actividad matemática escolar.

Por su parte algunas de las limitaciones de los docentes para el desempeño de su labor, se manifiesta en los resultados del examen de 1999 del curso nacional denominado: la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, en donde de los 15 temas abordados 10 tienen un dominio de menos del 50 %, por los profesores participantes (PRONAP, 1999). Estos 10 temas son los que tienen mayores potencialidades para la formación de conceptos y el pensamiento matemático, lo que refleja la magnitud del problema. Mismo que se acrecienta, ya que sólo un número reducido de profesores realizan el referido curso y sustentan el examen respectivo.

En lo que corresponde a los alumnos, en lo general no asumen el papel que les corresponde en el proceso de estudio de la matemática, en el sentido de plantearse metas de largo alcance y persistir en su logro. Esto trae como consecuencia una falta de orientación y expectativas, cediendo al profesor toda la responsabilidad. Estas posiciones coinciden con las de Piattelli (Piattelli, 1992, citado por Chevallard, 1998), al sostener “La falta de ganas de estudiar normalmente no es una patología ni un enfrentamiento especial y personal con los padres, los profesores y la escuela como institución. Se trata sólo de una enésima manifestación de los compromisos establecidos con la ignorancia”

En lo que a la escuela concierne, persiste una organización vertical y autoritaria que dificulta la instrumentación del enfoque para la enseñanza aprendizaje de la matemática, en esta organización se incluye la obligación de estudiar matemática desligada de las necesidades e intereses de los alumnos

Concepción del Taller

<table>
<tr>
<td>Objetivos del taller:
1. Analizar una concepción de situaciones didácticas de modo que reconozcan su estructura y el proceso para diseñarlas.
2. Explorar situaciones didácticas de manera que determinen su pertinencia y eficacia para desarrollar habilidades matemáticas.</td>
<td rowspan="2">Producto esperado: Una explicación por escrito de las características de las situaciones didácticas para promover el desarrollo de habilidades matemáticas, estudiadas en este taller.
Fin último (para su logro posterior a la realización del taller): Diseñar e instrumentar situaciones didácticas para promover el desarrollo de habilidades matemáticas, en su labor.</td>
</tr>
<tr>
<td>Contenidos del taller:
1. Situaciones didácticas y el proceso de estudiar matemática.
2. Ejemplos de situaciones didácticas.</td>
</tr>
</table>

Algunos aspectos del marco teórico

Habilidades matemáticas

Las producciones de los estudiantes en el trabajo con las tareas y problemas matemáticos son manifestaciones de lo que pueden hacer, a las formas de cómo se manifiestan esas producciones se les da el nombre de habilidades matemáticas. Como se afirma en líneas anteriores en este trabajo se estudia la habilidad de comprender, visualizar y comunicar. Comprender es tener una representación mental del objeto de estudio, de modo que el estudiante pueda expresar las características con sus propias palabras y modelar diversas situaciones de la realidad. Visualizar consiste en trasladar a imágenes visuales la información que está dada en un determinado contexto y viceversa, Guzmán (1996). Comunicar consiste en buscar información sobre contenidos matemáticos, procesarla y expresarla correctamente desde el punto de vista de la forma y el contenido.

Concepción Teórica de las Situaciones Didácticas

1.-El Proceso de Estudiar Matemática y las Situaciones Didácticas

La escuela como centro *exprofeso* para promover el desarrollo intelectual de los alumnos, es un escenario donde de manera sistemática se realiza el proceso de estudio en general y en particular de la matemática. Sobre la base de las posiciones teóricas que se vienen sustentando en este trabajo, un proceso de enseñar y aprender matemática en la escuela, requiere de la participación consciente de estudiantes y profesores en el planteamiento y solución de problemas. Donde se utilicen los diversos medios didáctico-matemáticos, en la producción de saberes que mantengan "vivo" el conocimiento matemático.

Un eje rector en este proceso, es el diseño de situaciones didácticas para promover el desarrollo de habilidades matemáticas, conformadas con series de actividades en las que los alumnos pueden resolver problemas y generar saberes a partir de los recursos cognitivos de que disponen. Las situaciones didácticas que en este trabajo se diseñan, se conciben principalmente, sobre la base de las funciones didácticas enmarcadas en la teoría de la actividad, Leontiev (1981), los 4 aspectos básicos del proceso de estudiar matemática Chevallard, (1998) y las fases de la apropiación del conocimiento matemático Brousseau, (1983).

2.-Funciones Didácticas

La actividad docente es la forma de realización de la actividad cognoscitiva en la escuela, es por tanto una actividad humana dirigida a un fin y organizada en las fases de orientación, ejecución y control. A cada una de estas fases le corresponde una cierta función en el trabajo docente como proceso didáctico, esas son las funciones didácticas. Cada actividad que se realiza en una clase o un sistema de clases, tiene entonces una función o tarea didáctica. Las funciones didácticas que se consideran son la motivación, orientación hacia el objetivo, el aseguramiento del nivel de partida, los nuevos contenidos, fijación y control. Las tres primeras corresponden a la fase de orientación, los nuevos contenidos y la fijación a la de ejecución y el control a la fase del mismo nombre. En la instrumentación de estas funciones didácticas, destaca la formación de conceptos como fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que los conceptos son la forma principal en que opera dicho pensamiento. Como se puede ver estas funciones constituyen una guía para el docente, en el diseño e instrumentación de situaciones didácticas.

3.- Los 4 Aspectos Básicos para el Estudio de la Matemática

Estos aspectos son las cuestiones a las que responde el contenido matemático que se aborda, la unidad del razonamiento deductivo y el pensamiento conjetural, las técnicas que se utilizan y el tecnológico-teórico (Chevallard, 1998).

Las cuestiones a las que responde el contenido que se aborda consideran las necesidades y problemas que dieron origen a ese conocimiento, la forma de cómo se construyó para ser un conocimiento matemático científico comunicable, así como su transformación en un conocimiento matemático enseñable. En esta transformación se responde a estas preguntas ¿Qué características tiene este contenido para ser un conocimiento enseñable?, ¿Cuáles son las razones para que forme parte del currículo escolar?, ¿Qué potencialidades tiene para desarrollar el pensamiento matemático?

La unidad del razonamiento deductivo y el pensamiento conjetural, se refleja en la búsqueda y aseguramiento del conocimiento matemático, es decir para el cumplimiento de una tarea matemática se requiere de la exploración y formulación de conjeturas hasta encontrar el conocimiento. A la vez este conocimiento se asegura a base de demostraciones, fundamentos, argumentos y justificaciones. En este proceso de búsqueda y aseguramiento, se ejecuta el trabajo con la técnica que consiste en la instrumentación de procedimientos matemáticos vinculados con el contenido, a partir de los cuales se producen nuevas técnicas y nuevos conocimientos. En este aspecto son relevantes las técnicas y estrategias eficaces en la solución de problemas. El aspecto tecnológico-teórico lo conforman los fundamentos, argumentos y explicaciones sobre la tarea que se está realizando de manera que se amplíe su comprensión y se haga eficiente el proceso de estudio. Cuando las actividades de una situación didáctica se realizan de esta manera, se descubre la naturaleza de la matemática.

4.-Las Fases de la Apropiación del Conocimiento Matemático

Otra línea de pensamiento (Brousseau, 1983) establece que las fases de la adquisición del conocimiento matemático son: la acción, formulación, validación e institucionalización. La acción consiste en el planteamiento de la tarea, su comprensión y en las acciones que realiza el alumno para cumplir con las exigencias establecidas. En la formulación se confrontan y analizan los diversos procedimientos y resultados. En la validación se fundamentan los procedimientos y resultados y finalmente, en la fase de institucionalización se expresan los saberes construidos, correctamente, desde el punto de vista de la forma y del contenido.

Situación didáctica para abordar parte de los 4 primeros temas del 3^er^ grado de educación secundaria.

Propuesta

Sobre la base de esta concepción teórica de situaciones didácticas, se construye una propuesta como se describe a continuación.

El eje rector en el diseño e instrumentación de situaciones didácticas para desarrollar habilidades matemáticas, es el proceso de estudiar matemáticas. En cada situación didáctica se incluyen variantes, con el propósito de que los alumnos realicen un trabajo independiente en el que desarrollen su ingenio y creatividad.

Cada una de las tres posiciones teóricas expuestas en esta parte, constituye una base para estructurar las referidas situaciones didácticas, considerando en lo necesario las otras dos posiciones. De esta manera se refleja una didáctica de la matemática con un enfoque sistémico, ya que las tres posiciones teóricas referidas comprenden aspectos cognitivos, epistemológicos, didácticos y socioculturales.

Temas: 1.- Proporcionalidad y funciones lineales. 2.- Ecuaciones y problemas. 3.- Regiones en el plano cartesiano y gráficas de funciones. 4.- Ecuaciones y problemas (continuación)

Sub-temas: Variación lineal, crecimiento lineal y exponencial, ejercicios de graficación de funciones, problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas.

Propósitos:

- Utilizar constantemente los diversos medios de expresión matemática, lenguaje algebraico, tablas y gráficas en el planteo y solución de problemas diversos. Desarrollar criterios para pasar de unos a otros.
- Conocer ejemplos de crecimiento geométrico o exponencial y poder comparar este modo de crecimiento con el aritmético o lineal.
- Habilidades matemáticas que se pueden desarrollar: Comprender, visualizar, comunicar.
- Relación con otros contenidos de la asignatura: Principalmente, con el contenido que se aborda en la ficha No. 7 del tercer grado, denominada ¿Qué te conviene? (Fichero de actividades didácticas. Matemáticas de educación secundaria).

Motivación:

Se motiva a los estudiantes durante todo el proceso de la actividad con el planteamiento de problemas interesantes, que tienen varias vías de solución, están en el campo de acción de los participantes y relacionan conocimientos ya dominados con los nuevos contenidos

Orientación hacia el objetivo:

Esta orientación también es permanente y se trata de que el alumno haga suyos los propósitos planteados y sea persistente en su logro. Es necesario que el alumno señale constantemente si está avanzando por la vía adecuada, qué tanto ha avanzado y que le queda pendiente. Se puede orientar con estas preguntas:

¿Voy por el camino adecuado para lograr el propósito?, ¿Qué tanto he avanzado? , ¿Qué falta por realizar?

Asegurar el nivel de partida:

Es necesario asegurar las condiciones previas para el éxito de la actividad. De modo que el estudiante haga una fijación de los contenidos y experiencias personalizadas en los grados anteriores. Principalmente en lo referente a los temas de pre-álgebra de 1er grado y de álgebra del 2º grado. Se pretende que el principal interesado en asegurar el nivel de partida sea el estudiante, al notar sus limitaciones para resolver la tarea planteada y lograr los propósitos establecidos.

En este caso se propone que el aseguramiento del nivel de partida, considere los contenidos que se abordan en las fichas: No. 13 del primer grado, 4, 8, 11 y 17 del segundo grado.

Organización del grupo y planteamiento de la tarea:

El grupo se puede integrar en equipos para resolver el siguiente problema. En un primer momento se propone que cada equipo trabaje con sus propias experiencias:

Una fábrica de yogurt produce 2500 cuartos a la semana. La ganancia neta por cada cuarto de este producto que se vende es de $ 0.40, mientras que los que no se venden se desechan con una perdida de 70 centavos por cuarto. Construye una fórmula que exprese la ganancia de la fábrica en términos del número de cuartos de yogurt vendidos. (Libro para el maestro de matemáticas de educación secundaria)

Después de un tiempo razonable, se presenta el avance de los equipos, de modo que se refleje que un recurso útil en esta tarea es la técnica de lectura analítica. Esta técnica se aplica con otras como la modelación, que asegura la construcción de una tabla análoga a la siguiente:

						Representación con variables
No. de cuartos vendidos	500	1000	1500	2000	2500	x
No. de cuartos no vendidos	2000	1500	1000	500	0	2500 – x
Ganancia	200	400	600	800	1000	-
Perdida	1400	1050	700	350	0	-
Diferencia	-1200	-650	-100	450	1000	0.4x - (2500-x) (0.7)

- Propongo a los alumnos que representen esta información en otras formas, que las confronten, analicen y formulen la respuesta al problema.

- Sobre la base de las acciones realizadas propongo que los alumnos planteen preguntas y nuevos problemas y que los resuelvan. Pueden ser preguntas sencillas como ¿Cuántos cuartos de yogurt deben venderse para que no haya pérdida? hasta la reformulación del problema original, cambiando las variables o el contexto. Si se considera necesario, los estudiantes pueden seleccionar situaciones del entorno o de diversos textos, para plantear y reformular problemas. En esta actividad el docente puede orientar a los alumnos, para que las preguntas y problemas planteados sean significativos para los contenidos que se abordan y el logro de los propósitos establecidos.

Análisis de las actividades realizadas considerando los siguientes aspectos:

-Importancia para el logro de los propósitos planteados y el desarrollo de las habilidades establecidas.

-Técnicas y estrategias utilizadas en la solución.

-Descripción de las posibilidades de aplicar las experiencias personalizadas.

-Formalización de los contenidos que se ha apropiado: conceptos, relaciones, procedimientos.

-Evaluación considerando el logro de los propósitos planteados, en la que cada uno de los participantes describa su desempeño, en términos de los aportes que hizo, la forma en que lo hizo, la forma y el momento en que solicitó ayuda y el tipo de ayuda recibida. De modo que los estudiantes sean conscientes de sus fortalezas y debilidades, así como de sus avances.

Variantes:

a) La siguiente tabla muestra la población aproximada (expresada en millones) de una colonia de bacterias. El registro se hace cada hora. (Fichero de actividades didácticas de matemáticas de educación secundaria).

Hora	0	1	2	3	4	5	....
Bacterias	6	12	24	48	96	192	....

¿Cuántas bacterias habrá después de 8 hrs? ¿De 10 hrs? ¿Cuántas bacterias habrá una hora antes de la observación?. Encuentra la función (fórmula o expresión analítica) que permita calcular el número de bacterias para cualquier hora.

b) En las esquinas de una cartulina cuadrada se hacen cortes de 5 cm. a fin de elaborar cajas sin tapa para regalos sorpresa. ¿Cuánto deben medir las cartulinas para que las cajas tengan un volumen de 200 cm3? (Waldegg et al, 1998).

c) Dos muchachos separados por una distancia de 50 m, se dirigen uno hacia el otro, uno corriendo y el otro caminando. El que va corriendo lo hace con una velocidad promedio de 2.5 m/s y el que va caminando lleva una velocidad de 1 m/s. ¿Cuántos metros habrá recorrido el compañero que va caminando cuando se encuentre con el que va corriendo?

Algunos resultados

Las experiencias de la ejecución de este taller con varios profesores de educación secundaria, en el estado de Guerrero, México, sostienen que la instrumentación de esta clase de situaciones didácticas orienta a los profesores en el desempeño del papel que les corresponde y asegura la utilización de los diferentes apoyos didácticos disponibles. A su vez los participantes consideran que el desarrollo de habilidades matemáticas, constituye un enfoque en el proceso de estudiar matemáticas.

Por su parte las aportaciones de 26 educadores de diversos países que asistieron a este taller en las actividades de RELME XVI, reflejan la pertinencia y factibilidad de instrumentar esta clase de situaciones didácticas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. Ya que promueve la problematización y producción de saberes en un ambiente de confrontación y validación de ideas. Los participantes consideran que las 3 habilidades matemáticas que se abordan, son universales y a su vez promueven el desarrollo de las denominadas actividades matemáticas universales, (Gorgorió et al, 2000), estas son: contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar. En este sentido se puede explicitar una correspondencia entre estas habilidades y actividades universales, que al ser considerada en el estudio de esta asignatura promueva la búsqueda de sentidos y significados de los contenidos que se abordan. Especial interés mostró la variante a) de la situación didáctica presentada en el taller, por su contenido y preguntas orientadoras hacia la búsqueda de conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983), *Los aspectos epistemológicos y los procesos de la enseñanza*, versión en español del Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México, D.F.

Chevallard, Y. (1998), *Estudiar matemática*, SEP, México, D.F.

Gorgorió, N. (2000), *Matemáticas y educación, retos y cambios desde un perspectiva internacional,* Graó, Barcelona.

Guzmán, M. (1993), *Enseñanza de las ciencias y la matemática*, Popular, S.A, Madrid.

Leontiev, A. (1981), *La actividad en Psicología*, Pueblo y Educación, Habana

Las Inteligencias Múltiples: de Gardner al aula de Matemáticas

Lilliam I. Samot Colón
Superintendencia de Escuelas Católicas, San Juan, Puerto Rico
lsamot@yahoo.com

Resumen

La Teoría de las inteligencias múltiples propuesta por el Dr. Howard Gardner, profesor del Departamento de Educación de la Universidad de Harvard, establece que la inteligencia no es un concepto unitario y que, por lo tanto, no puede ser medido. Establece que en cada individuo convergen al menos ocho inteligencias y que éstas interactúan unas con otras en niveles altamente complejos (Gardner, 1984). Gardner define inteligencia como la capacidad de resolver problemas y de crear productos útiles en la sociedad en la que se vive. Estas inteligencias son: verbal-lingüística, lógico-matemática, espacial, musical, corporal-cinestésica, interpersonal, intrapersonal y naturalista. En el taller diseñado los docentes tendrán la oportunidad de conocer la Teoría de las inteligencias múltiples y su aplicación en la solución de problemas, y de diseñar actividades con temas matemáticos que permitan que cada inteligencia se desarrolle y de aportar al quehacer didáctico.

Marco conceptual

Desde muy temprano en la historia de la humanidad, los grandes pensadores y filósofos hicieron parte de su quehacer el encontrar la manera en que adquirimos conocimientos, resolvemos problemas y realizamos labores de alta eficacia. La pregunta crítica se hacía en torno a qué es la inteligencia, dónde está localizada y como actúa. Desde las primeras décadas del siglo xx se iniciaron esfuerzos por cuantificar y medir la inteligencia en los seres humanos. Es en Francia donde se dan los primeros indicadores de la inteligencia. Binnet, sicólogo de la universidad de standford, desarrolló el primer instrumento para medir la inteligencia, llamado coeficiente de inteligencia (iq) a partir de ese momento se generalizó la concepción de lo que es ser inteligente. Este coeficiente de inteligencia, colocaba en grupos a los individuos. Mientras mayor es el coeficiente de inteligencia, mayor era la capacidad de pensar abstractamente, colocando el pensamiento concreto a un lado. Esto generalizó la idea de lo que es inteligencia. Se estableció que inteligencia es la capacidad de lograr llegar a usar el pensamiento y el razonamiento abstracto. El razonamiento abstracto es la capacidad de pensar en ideas y conceptos.

Más adelante, se desarrollaron múltiples investigaciones cuya finalidad era poder encontrar la localización de la inteligencia y el rol del cerebro sobre ella. Roger Sperry, psicobiólogo propuso la teoría de los hemisferios cerebrales. En ésta expuso que el cerebro esta divido en hemisferios, y que cada uno de estos hemisferios lleva a cabo funciones especializadas y que actúan separados uno del otro. Master, machado y harman establecieron que la inteligencia depende de la estimulación del cerebro en las etapas tempranas del ser humano. La estructura cerebral de la cual depende la inteligencia se forma y se refuerza desde que nacemos hasta los seis años por eso es común oír de deportistas o músicos geniales, que mostraron sus habilidades desde muy temprana edad, cuando la realidad es que gracias a que fueron estimulados conciente o inconscientemente a esta edad (master, 1977). En 1904 charles spearman, psicólogo, define inteligencia general como un tipo de inteligencia usada en todos los procesos intelectuales. En ese mismo año publicó su obra cumbre, *inteligencia general: objetivos determinados y medición.*

Comenzando la década de los ochenta, Howard Gardner, profesor de la Universidad de Harvard, propuso su teoría de las inteligencias múltiples. En la cual define inteligencia como la capacidad que poseen los individuos de resolver problemas y de crear productos que sean relevantes en la sociedad en la que viven. Establece en su teoría que la inteligencia no es estática sino que evoluciona de manera que ocurren cambios en ella. Cambios significativos que dotan al individuo de nuevas herramientas, herramientas cognitivas cada vez mejores. Y que esos cambios se dan de manera particular a cada individuo. Propuso además que cada cerebro es único y que la inteligencia se puede desarrollar si le brindamos a nuestros educandos más y mejores experiencias de aprendizaje de manera que cada uno tenga la oportunidad de avanzar en su vida cotidiana y estudiantil. En la teoría de las inteligencias múltiples no encontraremos instrumentos para medir las inteligencias porque se afirma que ésta no es cuantificable sino observable y que por lo tanto es cualitativa. Gardner además plantea que la inteligencia interacciona con los procesos biológicos que ocurren el cerebro y con las oportunidades que brinda la cultura a sus miembros. Esto nos lleva a la afirmación que la inteligencia no está en el cerebro sino distribuida en el individuo, los recursos que se tiene para crear y el medio ambiente. A través de sus investigaciones en el proyecto "zero", en la universidad de harvard y su práctica de psicólogo, gardner a identificado al menos ocho inteligencias: verbal-lingüística, lógico-matemática, espacial, musical, corporal-cinestésica, interpersonal, intrapersonal y naturalista (gardner1994) afirma también sobre la existencia de muchas inteligencias que no han sido evaluadas e identificadas.

La inteligencia musical es la capacidad de percibir, discriminar, transformar y expresar las formas musicales. Incluye la sensibilidad al ritmo, al tono y al timbre. Está presente en compositores, directores de orquesta, críticos musicales, músicos y oyentes sensibles, entre otros. Los niños que la evidencian se sienten atraídos por los sonidos de la naturaleza y por todo tipo de melodías. Disfrutan siguiendo el compás con el pie, golpeando o sacudiendo algún objeto rítmicamente. La inteligencia corporal- cinestésica es la capacidad para usar todo el cuerpo en la expresión de ideas y sentimientos, y la facilidad en el uso de las manos para transformar elementos. Incluye las habilidades de coordinación, destreza, equilibrio, flexibilidad, fuerza y velocidad, como así también la percepción de medidas y volúmenes. La observamos en atletas, bailarines, cirujanos y artesanos, entre otros. Se le observa en los niños que se destacan en actividades deportivas, danza, expresión corporal y/o en trabajos de construcciones utilizando diversos materiales concretos. La inteligencia lingüística es la capacidad de usar las palabras de manera efectiva, en forma oral o escrita. Incluye la habilidad en el uso de la sintaxis, la fonética, la semántica y los usos pragmáticos del lenguaje como la retórica, la mnemónica, la explicación y el metalenguaje. Esta inteligencia se ve en escritores, poetas, periodistas y oradores, entre otros. Está presente en los niños a los que les encanta redactar historias, leer, jugar con rimas, trabalenguas y en los que aprenden con facilidad otros idiomas. La inteligencia lógico-matemática es la capacidad para usar los números de manera efectiva y de razonar adecuadamente. Incluye la sensibilidad a los esquemas y asociaciones lógicas, las afirmaciones y las proposiciones, las funciones y otras abstracciones relacionadas. Se le observa en científicos, matemáticos, contadores, ingenieros y analistas de sistemas, entre otros. Los niños que la han desarrollado analizan con facilidad planteos y problemas. Se acercan a los cálculos numéricos y estadísticas con entusiasmo. Además de ser capaces de ejecutar niveles complejos de razonamiento matemático y de hacer decodificaciones criptográficas La inteligencia espacial es la capacidad de pensar en dos o tres dimensiones. Nos permite percibir imágenes externas e internas, recrearlas, transformarlas o modificarlas, recorrer el espacio o hacer que los objetos lo recorran y producir o decodificar información gráfica. La observamos altamente desarrollada en pilotos, marinos, escultores, pintores y arquitectos, entre otros. Está en los niños que estudian mejor con gráficos, mapas de conceptos, esquemas y cuadros. Entienden muy bien planos y croquis. La inteligencia interpersonal es la capacidad de entender a los demás e interactuar eficazmente con ellos. Incluye la sensibilidad a expresiones faciales, la voz, los gestos y posturas y la habilidad para responder. Está presente en actores, políticos, buenos vendedores y docentes exitosos, entre otros. La tienen los niños que disfrutan trabajando en grupo, que son convincentes en sus negociaciones con pares y mayores, que entienden al compañero. La inteligencia intrapersonal es la capacidad de construir una percepción precisa respecto de sí mismo y de organizar y dirigir su propia vida. Incluye la autodisciplina, la auto comprensión y la autoestima. Se encuentra muy desarrollada en teólogos, filósofos y psicólogos, entre otros. La presentan los niños que son reflexivos, de razonamiento acertado y suelen ser consejeros de sus pares.

La inteligencia naturalista es la capacidad de distinguir, clasificar y utilizar elementos del medio ambiente, objetos, animales o plantas tanto del ambiente urbano como suburbano. Incluye las habilidades de observación, experimentación, reflexión y cuestionamiento de nuestro entorno. La presentan las de campo, botánicos, cazadores, ecologistas y paisajistas, entre otros. Se observa en los niños que aman los animales, las plantas; que reconocen y les gusta investigar características del mundo natural y del hecho por el hombre. Esta diversidad de inteligencias nos plantea el axioma de que cada alumno aprende de acuerdo a la o las capacidades que tenga desarrollada y que, pueden crear objetos y productos de acuerdo a esta inteligencia.

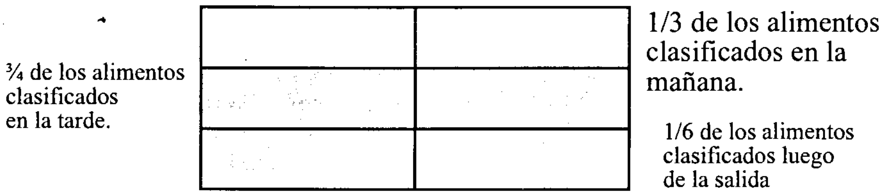
¿Qué ocurrirá en el aula de matemáticas con cada uno?

De acuerdo a la Teoría de Gardner, los currículos y modelos escolares usados en la enseñanza de matemáticas deben atemperarse a los estudiantes de manera que provean el espacio, el tiempo y las actividades necesarias para que cada alumno tenga la oportunidad de aprender matemáticas. Hoy más que nunca el aula de matemáticas debe ser para todos los estudiantes y no sólo para los que logran altos niveles de pensamiento abstracto (NCTM. 2000) Esto propone que cada alumno tiene la capacidad para aprender conceptos e ideas matemáticas de acuerdo a la inteligencia que tiene desarrollada. Esta visión propone que se aprenda matemáticas por medio de experiencias concretas, semi concretas y abstractas, que se aprenda matemáticas cantando, bailando, jugando, leyendo, dibujando, construyendo paginas en la Internet, haciendo poesía, y razonando inductiva y deductivamente. Estas actividades fomentan el desarrollo del aprendizaje de matemáticas desde una perspectiva multimodal y no unidireccional. La Teoría no propone, en ningún sentido, que se minimice el rigor académico del proceso educativo matemático ni que se eliminen los modelos de enseñanza de la misma sino que los enriquece y lo hace pertinente a cada alumno, de acuerdo a la realidad social y cultural en la que viven. La matemática escolar tiene sus axiomas, propiedades, procesos, estructuras y métodos que son esenciales para que ocurra el proceso cognitivo. La Teoría propone que cada alumno y alumna aplique dichos elementos constitutivos de la matemática de acuerdo a la capacidad que cada uno tenga. Esto garantizará que cada estudiante aprende a hacer matemáticas desde su inteligencia. Para Gardner el estudiante es el manejador de los conceptos, por esto las ideas matemáticas serán aprendidas por los estudiantes. Ellos las manejaran de manera que el proceso cognitivo sea una realidad en la vida de cada uno de ellos. Y que el aprendizaje sea autentico y quede grabado y perpetuado en la mente y la experiencia de cada uno. El Concilio Nacional de Maestros de Matemáticas propone-en sus estándares- que se enseñe Matemáticas mediante la solución de problemas y para ello Gardner propone que se le permita a cada alumno resolver problemas de acuerdo a la inteligencia que tenga más desarrollada. Que se le permita abordar los problemas de manera que ellos puedan solucionarlos y que no sea un proceso rígido y abstracto. El alumno hará su propia propuesta de trabajo. Propuesta que le permitirá llegar a la verdad única usando todo lo que este a su alcance para llegar a la finalidad ultima del proceso cognitivo: el aprendizaje real y verdadero.

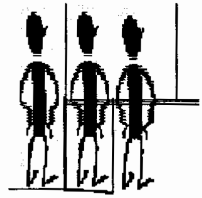
El siguiente ejemplo le fue presentado a un grupo de estudiantes de quinto grado de básico. En mi país le llamamos escuela elemental. Se les permitió resolver el problema de acuerdo a la capacidad o inteligencia mostrada por cada uno.

> *Los estudiantes de una escuela recibieron una gran cantidad de envases de alimentos para ser donados a una comunidad muy cercana a su escuela. Para organizar los alimentos ellos los clasificaron. Ellos clasificaron 1/3 de los envases de alimentos antes de la hora de almuerzo y ¾ del restante antes de salir de la escuela. Una parte de los envases se quedó para luego de la salida de la escuela. ¿Qué parte de los alimentos fueron clasificados después de la hora de salida?*

Los estudiantes cuya inteligencia espacial esta más desarrollada y que le sea fácil visualizar los objetos en un espacio determinado pensará en la totalidad de los alimentos como una figura geométrica, como por ejemplo un cuadrado o un rectángulo. Este rectángulo lo divide en tres partes iguales y asignará un de estas partes a la cantidad de alimentos clasificados en la mañana. Los restantes tercios los divide en cuatro partes y separa tres cuartas partes para la cantidad de alimentos que se clasificaron en la tarde. El restante cuarto debe ser la cantidad de alimentos que se clasificaron en la tarde. Este cuarto corresponde a 1/6 del total. 1/6 es la cantidad de alimentos clasificados en la tarde.



Un estudiante cuya capacidad corporal está muy desarrollada, podrá resolver el mismo problema usando los cuerpos de sus amigos.



Los estudiantes cuya capacidad verbal-lingüística está más desarrollada podrían resolver la situación redactando un párrafo descriptivo en el cual puedan encontrar la solución. Los musicales podrían escribir una rima o una canción basada en la situación. Hay que destacar que la finalidad es que cada uno encuentre la solución a la situación dada la inteligencia que tenga desarrollada.

Conclusión

¿Que se espera de las escuelas bajo la Teoría de las inteligencias múltiples? Las metas de las escuelas que trabajan sus currículos basados en esta teoría son:

- Las escuelas parten del supuesto de una educación configurada individualmente, y no de una uniforme.
- Toma en consideración las capacidades individuales y que reconozcan que todos pueden alcanzar metas y logros.
- Sus currículos buscan abarcar menos temas pero profundiza en los que atiende, centrados en preguntas esenciales e ideas generativas.
- Estructuren su aspecto físico de manera que puedan dar espacio para que las diversas inteligencias puedan desarrollarse.

Referencias bibliográficas

Armstrong, T. (1987). *In Their Own Way*. Los Angeles: Ca. J.P. Tarcher, Inc.

Armstrong, T. (1991). *Awakening Your Child's Natural Genius*. Los Ángeles: Ca. J. P. Tarcher, Inc.

Armstrong, T. (1993). *7 Kinds Of Smart: Identifying And Developing Your Many Intelligences*. Ny: Plume (The Penguin Group).

Barkman, r. (1989). *From Mindshift Connection.* .

Campbell, b. (1989). On *The Beam*, Vol Ix, No.2.

Campbell, L. (1999). *Teaching And Learning Through Multiple Intelligences*. Second Edition, Allyn And Bacon Publisher.

Resolución de problemas geométricos asistida por computadora: una experiencia innovadora en la formación inicial de los docentes de matemática

Martha Iglesias Inojosa y Miriam Mireles de Paz

Centro de investigación en enseñanza de la matemática utilizando nuevas tecnologías.
Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Núcleo Maracay. Venezuela.
miglesias@telcel.net.ve.

Resumen

El rescate de la enseñanza de la Geometría en el ámbito escolar, desde una perspectiva psicopedagógica adecuada, está vinculada a la formación inicial y continuada de los docentes de Matemática, ya que, para alcanzar esta meta se requiere que los docentes logren integrar el conocimiento geométrico con el conocimiento didáctico asociado a éste. Esta idea motivó la realización de una investigación del tipo proyecto factible sustentada en una investigación documental y orientada a diseñar e implementar una propuesta didáctica que integrara elementos considerados innovadores y de un comprobado potencial didáctico en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría: (a) el uso de un software de Geometría dinámica como el Cabri II, (b) la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y (c) el llamado enfoque de resolución de problemas.

Introducción

A finales de la década de los años ochenta, la comunidad de educadores matemáticos estableció entre sus principales metas las siguientes: adoptar el llamado enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática y rescatar la enseñanza de la Geometría desde una perspectiva psicológica y pedagógica adecuada. Asimismo, én la década de los años noventa, los investigadores en Educación Matemática han dirigido sus esfuerzos hacia el uso de las llamadas nuevas tecnologías en el ámbito educativo y el desarrollo de software orientado a la enseñanza de la Matemática, entre los cuales destacan los software de Geometría Dinámica.

Por otra parte, en el ámbito latinoamericano, importantes especialistas en Educación Matemática han expresado que, en el proceso de formación inicial de los profesores de Matemática, sus formadores deben brindarles oportunidades instruccionales orientadas a la adquisición del conocimiento didáctico debidamente asociado al conocimiento matemático. Al respecto, las autoras han asumido que el rescate de la enseñanza de la Geometría en el ámbito escolar venezolano está estrechamente vinculado al proceso de formación académica de los profesores de Matemática, los cuales requieren desarrollar habilidades en la elaboración de diseños instruccionales basados en la *resolución de problemas geométricos*, el *Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele* y el *uso de software de Geometría Dinámica* como el *Cabri - Géomètre II*.

Este trabajo tuvo como propósito diseñar y desarrollar una propuesta didáctica sustentada en una amplia investigación documental y orientada a integrar estos elementos innovadores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría por parte de los futuros docentes de Matemática que estudian en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL - Núcleo Maracay).

Esta propuesta se materializó mediante el diseño y la implementación de un curso de *Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora*, el cual estuvo dirigido a los estudiantes de la especialidad de Matemática de la UPEL (Núcleo Maracay) durante el período académico 99 - 2. Ha sido integrado al diseño curricular vigente de la especialidad de Matemática de la UPEL (Núcleo Maracay), previa aprobación del Consejo Departamental y la Comisión Curricular de esta institución y en él se ha logrado integrar elementos que brindan una alternativa de solución a la problemática de la enseñanza de la Geometría en el ámbito educativo y del proceso de formación inicial de los docentes de Matemática en Venezuela mediante la incorporación de tecnologías computarizadas. Este trabajo de investigación ha sido realizado en el contexto del *Centro de Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática utilizando Nuevas Tecnologías* que funciona en la UPEL (Núcleo Maracay).

Planteamiento del Problema

El *sistema tradicional de enseñanza de la Geometría* ha sido seriamente cuestionado por la comunidad internacional de educadores matemáticos.

La enseñanza de la Geometría no ha sido abordada desde una perspectiva psicopedagógica que contribuya al desarrollo de las capacidades cognitivas de los niños y jóvenes y al logro de los objetivos actitudinales asociados a ésta y, por ende, solamente ha logrado propiciar un aprendizaje memorístico y repetitivo.

Esta problemática educativa ha captado la atención de los educadores matemáticos durante los últimos cuarenta años.

En la década de los años sesenta con el advenimiento de las llamadas "matemáticas modernas", la Geometría Euclidiana fue marginada del ámbito escolar en muchos países, negándole a los estudiantes la oportunidad de establecer relaciones entre el mundo físico que los rodea y la Matemática y, además, impidiéndoles desarrollar la intuición y visualización espacial y el razonamiento lógico – deductivo.

A finales de la década de los años setenta, en el seno de la comunidad internacional de educadores matemáticos, se inició un movimiento orientado a rescatar la enseñanza de la Geometría en el ámbito escolar. A partir de la década de los años ochenta, los educadores matemáticos han reconocido la necesidad de reinsertar la enseñanza de la Geometría en el ámbito escolar desde una perspectiva matemática y psicopedagógica adecuada y, por ende, ellos han concentrado sus esfuerzos en el desarrollo de estrategias metodológicas acordes con las tendencias emergentes en la Educación Matemática.

Se reconoce que el conocimiento geométrico no debe ser presentado en forma acabada a los estudiantes y, por ende, es recomendable evitar una presentación rigurosamente sostenida de una Geometría Axiomática.

En este sentido, cabe preguntarse:

1. ¿Por qué la enseñanza de la geometría en forma tradicional no ha facilitado el aprendizaje significativo de esta área en la mayoría de los estudiantes?
2. ¿Cuáles son las repercusiones del uso de la computadora sobre la enseñanza de la Matemática y, en especial, de la geometría?
3. ¿En qué medida el uso de un programa interactivo para la enseñanza de la geometría puede propiciar el aprendizaje significativo de esta área del conocimiento matemático?

4. ¿Cómo propiciar el desarrollo de ciertas habilidades cognitivas y metacognitivas relacionadas con la resolución de problemas geométricos asistida con un programa interactivo?
5. ¿Es posible que los estudiantes de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Núcleo Maracay) aprendan a enseñar geometría haciendo uso de estrategias y programas interactivos, a la vez que profundizan sus conocimientos geométricos?

Objetivo General

Diseñar e implementar un curso de resolución de problemas geométricos asistido con un software interactivo y dirigido a los estudiantes de la especialidad de Matemática del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador durante el período académico 99-2.

Aportes Teóricos

De acuerdo a la investigación documental que sustenta esta propuesta, se establece que entre los *rasgos relevantes de las nuevas tendencias en la enseñanza de la Geometría* destacan:

1. Se valora el papel de la intuición y visualización matemática en la construcción y manipulación del conocimiento geométrico y, por ende, es recomendable que los estudiantes partan de la exploración de los cuerpos geométricos y las construcciones con regla y compás.
2. Se ha introducido el uso de los llamados software de Geometría Dinámica en las aulas de muchísimos países, debido a que estos software facilitan la realización y exploración de los cuerpos geométricos y las construcciones con regla y compás.
3. Se ha aceptado el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele como soporte conceptual y metodológico del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría.
4. Se admite la necesidad de cambiar los procedimientos de evaluación, ya que, mediante este enfoque metodológico, es necesario evaluar las habilidades geométricas asociadas a los procesos de conceptuación, axiomatización, experimentación, visualización, clasificación, demostración y resolución de problemas.

Asimismo, los educadores matemáticos consideran muy importante que los docentes de Matemática, en formación o en servicio, tengan la oportunidad de profundizar en el entendimiento del conocimiento geométrico y la comprensión del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, mediante su participación activa en proyectos orientados a:

1. Diseñar y desarrollar estrategias instruccionales basadas en el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele.
2. Diseñar y desarrollar estrategias instruccionales que propicien la manipulación dinámica de los objetos geométricos mediante el uso efectivo de los software de Geometría Dinámica.
3. Diseñar y desarrollar estrategias de evaluación que permitan evaluar en forma efectiva los procesos propios de construcción del conocimiento geométrico.
4. Crear ambientes de aprendizaje que propicien el desarrollo de las habilidades asociadas

al proceso de resolución de problemas geométricos.

5. Valorar el potencial didáctico del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría en el desarrollo de habilidades cognitivas asociadas al quehacer matemático y, por ende, en la comprensión de la naturaleza científica de la Matemática.

De esta manera, se evidencia la importancia del llamado *aprendizaje por modelaje* en el proceso de formación inicial de los futuros docentes de Matemática. Es necesario que ellos participen, en forma constante, en cursos que sigan una orientación matemática y psicopedagógica adecuada, ya que, de esta manera, se reconoce que ellos lograrán integrar esta práctica didáctica en su quehacer profesional.

Los *software de Geometría Dinámica* han logrado ocupar un lugar privilegiado en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría en diversos países, tal cual quedó demostrado en la revisión de los antecedentes de este trabajo de investigación.

Las construcciones geométricas adquieren una condición dinámica, superando así la condición estática de una construcción realizada con lápiz y papel, lo cual posibilita contar con múltiples representaciones gráficas de una misma construcción geométrica y visualizar, en forma continua y en tiempo real, cómo se produce el cambio de un estado a otro en dicha construcción. Así, se logra introducir la experimentación en las clases de Geometría y, con ello, se logra crear un ambiente donde los estudiantes aprenden a conceptuar y a conjeturar y, además, sienten la necesidad de validar o rechazar tales conjeturas.

Este proceso de construir, explorar, conjeturar, validar o rechazar conjeturas y demostrar propiedades geométricas está estrechamente vinculado al proceso de *resolución de problemas geométricos* y, por ende, los estudiantes logran desarrollar habilidades cognitivas asociadas a los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele y, además, logran configurar una visión más acertada del quehacer matemático.

Notables matemáticos y educadores matemáticos han destacado la trascendencia de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático y su valor didáctico en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática.

La investigación sobre *resolución de problemas matemáticos* es una de las áreas más importantes y activas en Educación Matemática.

En el caso particular de la *resolución de problemas geométricos utilizando el Cabri – Géomètre II*, se puede establecer que el individuo se enfrenta a una situación problémica en el ámbito de la Geometría, cuando se enfrenta a la necesidad de comprender y justificar cómo se vinculan las relaciones observadas entre objetos geométricos que configuran una construcción realizada y manipulada con el Cabri II.

La *resolución de problemas geométricos asistido por computadora* es un proceso que contempla, entre otros, los siguientes aspectos:

1. Realizar una construcción consistente con regla y compás usando el Cabri II.
2. Comprender el significado de las definiciones de cada uno de los objetos que conforman una construcción geométrica.
3. Visualizar las relaciones existentes entre los objetos que intervienen en dicha construcción.
4. Reconocer las llamadas características invariantes geométricas.
5. Formular conjeturas.

6. Introducir construcciones geométricas auxiliares (si fuese necesario).
7. Poder deducir consecuencias pertinentes a partir de la información disponible.

El proceso de resolución de problemas geométricos es ampliamente favorecido por el uso del Cabri–Géomètre II, debido a que los estudiantes disponen de una herramienta que facilita la *visualización matemática*.

Cabe decir que la visualización matemática trasciende a la simple percepción visual debido a que este proceso consiste en centrar la atención en representaciones geométricas concretas con el propósito de descubrir o develar las relaciones abstractas existentes entre los objetos.

La investigación en resolución de problemas ha demostrado que los expertos poseen imágenes visuales asociadas a los conceptos matemáticos, ellos han logrado desarrollar la intuición y la capacidad de percibir los conceptos y las relaciones existentes entre los objetos geométricos, lo cual estimula su creatividad. Los expertos son capaces de seleccionar las formas más eficaces de abordar la resolución de los problemas geométricos y su éxito está asociado a su capacidad de visualización.

En el proceso de *enseñanza de la resolución de problemas geométricos*, el seguimiento del *Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele* ha brindado a los docentes de Matemática una teoría coherente sobre la manera más efectiva de entender y orientar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría y, además, la aplicación de este modelo se ha hecho indispensable en el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje asistidos por el uso de los software de Geometría Dinámica.

El uso de nuevas tecnologías computarizadas como los software de Geometría Dinámica exige a los docentes que diseñen, desarrollen, implementen y evalúen propuestas didácticas orientadas a:

1. Instrumentar un diseño instruccional con un claro enfoque constructivista del aprendizaje y acorde a las nuevas tendencias pedagógicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.
2. Contribuir a la incorporación debidamente planificada de la tecnología computarizada en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría.
3. Propiciar el aprendizaje activo del conocimiento geométrico mediante el uso eficiente de un software interactivo.
4. Vivenciar el potencial didáctico de los software interactivos orientados a la enseñanza de la Geometría.
5. Aplicar el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele como soporte conceptual y metodológico del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría.
6. Estimular el desarrollo de destrezas asociadas a la resolución de problemas geométricos mediante el uso de tecnologías computarizadas.
7. Propiciar el estudio independiente y el trabajo cooperativo entre compañeros de estudio.
8. Respetar el ritmo y el estilo de aprendizaje de cada uno de los estudiantes.

En consecuencia, mediante el diseño y la implementación del curso de *Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora*, ha quedado demostrada la factibilidad de introducir a los futuros docentes de Matemática en el uso eficiente de las llamadas nuevas tecnologías computarizadas, representadas por un software de Geometría Dinámica como el Cabri II, en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática. Factibilidad sustentada en: (1) El diseño y desarrollo de una propuesta didáctica que contempla estrategias basadas en las fases instruccionales del modelo de Van Hiele y la elaboración de materiales y recursos instruccionales que propician, por una parte, la construcción del conocimiento geométrico a través de la participación activa de los futuros docentes en el proceso de resolución de problemas geométricos y, por otra, el desarrollo de conocimientos pedagógicos y actitudes favorables hacia el rescate de la enseñanza de la Geometría en el ámbito escolar y (2) La integración de este curso al diseño curricular vigente de la especialidad de Matemática de la UPEL (Núcleo Maracay), previa aprobación del Consejo Departamental y la Comisión Curricular de esta institución a partir del período académico 99 – 2.

Referencias bibliográficas

Allen, R. & Trilling, L. (1997). Dynamic Geometry and Declarative Geometric Programming. En *Geometry Turned on Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research.* Washington: Mathematical Association of America.

Arteaga, J. & Botero, M. (1998). *La Geometría con Cabri: un programa de capacitación para maestros*. Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes. Bogotá – Colombia.

Castelnuovo, E. (1989). Panorama de la enseñanza matemática en el tiempo y en el espacio.*Educación Matemática*, 1(3), Diciembre 1989, 24 - 29.

De Corte, E. (1996). *Aprendizaje apoyado en el computador: Una perspectiva a partir de investigación acerca del aprendizaje y de la instrucción.*

De Villiers, M. (1996). *The Future of Secondary School Geometry*. La letter de la preuve, Novembre – Décembre 1999.

Galindo, C. (1996). *Desarrollo de Habilidades Básicas para la Comprensión de la Geometría.*

González, F. (1993). Aprender a Enseñar Matemática: Elementos para configurar una estrategia. *Enseñanza de la Matemática*, 2(2), Agosto 1993, 4 - 22.

Gravina, M. (1996). *Geometria Dinâmica: Una Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria.*

Hoffer, A. (1990). La geometría es más que demostración. *Notas de Matemática*, Nº 29, 10 - 24.

Jaime, A. & Chapa, F. & Gutiérrez, A. (1992). Definiciones detriángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, Nº 23, 49 - 62.

Pérez, A. (1993). Cabri - Géomètre, un programa para trabajar en clase. *Epsilon*, Nº 26, 93 - 102.

Ponte, J. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educacao e Matemática*, Nº 34, 2º trimestre de 1995, 2 - 9.

Preface: Making Geometry Dynamic. (1997). En King, J. R. y Schattscheneider, D. *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching and Research.* Washington: Mathematical Association of America.

Santos, L. (1992). Resolución de Problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 4(2), Agosto 1992, 16 - 24.

La profesionalidad pedagógica desde la matemática en las universidades pedagógicas

Osvaldo Rodríguez Barreto, Landy Guerrier Molina y Lilia Cervantes Rodríguez
Instituto Superior Pedagógico "José Martí"de Camagüey, Cuba
gadiel@cmg.tel.etecsa.cu

Resumen

El trabajo es resultado de la investigación realizada con vistas a la obtención del grado científico de Master en Enseñanza de la Matemática por el autor, defendido satisfactoriamente. Motivado por las dificultades que durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se presentaron en relación con la formación de la "Profesionalidad Pedagógica" de los estudiantes de primer año de Licenciatura en Educación especialidad Física-Electrónica, se realizó un estudio relativo a la Matemática y su enseñanza que derivó en consideraciones hacia la resolución de problemas y el uso de técnicas de trabajo grupal en función del fortalecimiento de cualidades de la personalidad del profesional en formación, se diseño una propuesta "Didáctica-Metodológica"para cuya aplicación se requirió de un análisis de los elementos teóricos abordados para el establecimiento, mediante un tratamiento diferente de los aspectos que conforman cada actividad docente, su aplicación mostró avances cualitativos de los componentes de la personalidad estudiados.

Introducción

La época contemporánea está caracterizada por el desarrollo ininterrumpido de la revolución científico-tecnológica, lo cual trae aparejado cambios continuos en las distintas esferas de la sociedad. La Revolución educacional que se está llevando a cabo en el mundo, en particular en Cuba responde a este desarrollo.

Nuestro país, de una forma particular y con las características de que en el sistema educacional cubano responde a la necesidad de formar ciudadanos capaces de desarrollar nuestra sociedad, se ha planteado la tarea del perfeccionamiento continuo del sistema educacional, para lo cual se han realizado modificaciones en los planes y programas de estudio. Las Universidades Pedagógicas, por su encargo social están inmersas en el mismo.

Muchos son los trabajos e investigaciones encaminados al perfeccionamiento del proceso docente educativo, en particular el de enseñanza-aprendizaje desde la óptica de asignaturas en específico, la matemática tomando como centro la resolución de problemas de forma activa, dinámica e interrelacionada es objeto de ello.

En el proceso de resolución de problemas entre otros aspectos se adquieren, ejercitan y consolidan sistemas de conocimientos, se forman y desarrollan hábitos y habilidades, se desarrolla el pensamiento creativo y se fortalecen cualidades de la personalidad que deben caracterizar un profesional de la educación en su primer año de estudio.

La resolución de problemas matemáticos prácticamente es sinónimo de "estudiar matemática"; los profesores universitarios emplean gran parte del tiempo en sus clases en la resolución de problemas sobre un tema determinado. El estudiar cómo las personas resuelven problemas.

y cómo ello repercute en el ámbito formativo, es sin lugar a dudas una de las funciones esenciales de aquellos que estamos interesados en el área de la educación matemática.

En relación con lo anteriormente expresado y partiendo del análisis del diagnóstico pedagógico integral, se constataron una serie de dificultades que limitan el cumplimiento de las exigencias que en el modelo del profesional están planteadas y que son requerimiento indispensables en la formación del futuro egresado de esta especialidad en este nivel, es por ello que nos planteamos como objetivo general de este trabajo diseñar una propuesta "Didáctica-Metodológica" para la enseñanza de la Matemática que tenga como fundamento la utilización de la resolución de problemas empleando técnicas grupales en función de contribuir a la formación de la profesionalidad pedagógica de los estudiantes del primer año de la carrera de licenciatura en Educación Especialidad Física-Electrónica del ISP "José Martí" de Camagüey.

Los métodos utilizados para demostrar la hipótesis formulada estuvieron determinadas por el objetivo general y las tareas previstas, como métodos del pensamientos se emplearon; el histórico lógico, el análisis-síntesis, el inductivo-deductivo, entre otros, y dentro del nivel empírico experimental fundamentalmente, la observación, la encuesta y entrevista.

La novedad del trabajo se concreta en el diseño y utilización de una propuesta "Didáctica-Metodológica" en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática que tiene como fundamento la resolución de problemas acorde al contexto social donde se desarrolla la investigación, concebida a partir de técnicas grupales para desarrollar estrategias individuales y colectivas de trabajo incidentes en la formación de cualidades de la personalidad que caracterizan un profesor de Física en formación, la misma se fundamenta en el plano psicológico a partir del enfoque histórico cultural desarrollado por Vigotski y seguidores de la talla de Leontiev, Galperin, etc. los cuales centran sus intereses en el desarrollo integral de personalidad y que la misma está determinada por las condiciones históricas y sociales en las que se desenvuelve el individuo, lo que presupone el reconocimiento del importante papel de la actividad del hombre en la conformación de su personalidad. En el plano filosófico dicha propuesta se fundamenta en la teoría Leninista del conocimiento, cuyos pilares son el principio del reflejo y la dialéctica subjetiva y en el plano pedagógico por los principios didácticos de la escuela cubana contemporánea como son: principio del carácter científico de la enseñanza, el de la vinculación de la teoría con la práctica, el de sistematicidad, asequibilidad, etc.

Desarrollo

La resolución de problemas en función de la formación del profesional de la educación.

Fidel Castro (1981) en la graduación del V Contingente del Destacamento Pedagógico Universitario Manuel Ascunce Doménech enfatizo cual debía ser la imagen social del maestro cubano, lo que sirvió de base para establecer los indicadores a modo de valores, norma y cualidades morales de la personalidad que se resumen en los principios que integran la "*Profesionalidad Pedagógica*", concepto que asumimos en este trabajo como: "*Dominio de la ciencia que imparte y de los métodos de enseñanza, unidos a las cualidades morales de la profesión, avalados por los resultados de su desempeño profesional*" (Chacón,1999).

Como dimensiones que caracterizan este concepto se señalan:

- Conciencia de las exigencias profesionales.

- Dominio de la ciencia que imparte y de sus componentes axiológicos y humanistas.
- Dominios de los métodos de enseñanza – aprendizaje.
- Desarrollo personal de las cualidades morales de la profesión.
- Éxito profesional.

Apoyados en los principios que caracterizan a la profesionalidad pedagógica y de su concreción al contextualizar su estudio en educandos del primer año de la carrera de Licenciatura en Educación Especialidad Física Electrónica, abordamos algunas componentes específicas de las dimensiones señaladas anteriormente que tienen una importancia vital en la formación y desarrollo del valor pedagógico mencionado.

- El trabajo en colectivo.
- El carácter crítico y autocrítico del pensamiento.
- Flexibilidad del pensamiento (toma de decisiones).
- Comunicación afectiva, concretada en la expresión oral y escrita y en la explicación y argumentación de ideas.

Son las componentes mencionadas con anterioridad, y que además el trabajo incluye índices y tareas que caracterizan cada una, y los aspectos de carácter metodológicos a tener en cuenta en su ejecución. Las mismas son abordadas a partir de la puesta en práctica durante el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática de la resolución de problemas de forma activa dinámica e interrelacionada.

¿Qué es un problema? ¿Cómo resolvemos problemas? ¿Qué tipos de estrategias utilizamos cuando nos enfrentamos a un problema?, son entre otras, interrogantes objetos de análisis en el mismo.

A partir de la revisión bibliográfica realizada se asume el concepto de problema formulado por Campistrous y Rizo (Campistrous, 1996) que coincide con el expresado por Santos Trigo al referirse a las exigencias que debe poseer una situación para que se considere como tal, y que se concretan en los siguientes requerimientos:

- Ser objeto del conocimiento para un individuo o grupo de personas.
- Se esta conciente de una dificultad y se tiene interés por resolverla.
- Requiere la atención de una persona o grupo para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver la tarea.
- No existe un camino inmediato para resolverlo.

Muchos son los autores que hablan de la habilidad de resolver problemas, Rosa Vázquez (Vázquez, 1998) hace una clasificación referida a los que asumen la resolución de problemas llevadas a la enseñanza, sobre la base de métodos y estrategias generales, otros consideran problemas básicos y el desarrollo de determinadas habilidades y los terceros la metacognición, en esta investigación se asume como línea fundamental el uso de estrategias generales de tipo heurísticas, identificándose la misma por los trabajos realizados por Polya al plantear cuatro etapas para realización del proceso.

La resolución de problemas influye en el desarrollo intelectual del escolar y, específicamente sobre la formación de su pensamiento. La potencialidad que respecto al desarrollo del pensamiento del escolar representan los problemas, esta condicionada por la peculiaridad de estos, consistente en requerir o demandar de aquel que lo resuelve una intensa actividad cognoscitiva, que no es otra, que la actividad del pensamiento.

¿Qué sucede en ocasiones cuando el estudiante se enfrenta a tareas difíciles y que requiera mucha constancia?

Con regularidad abandono, desinterés, pobre motivación para enfrentar la misma.

¿Cómo resolver tal situación? Una variante de solución podría ser el trabajo en grupos.

La enseñanza grupal es una nueva concepción de aprendizaje que utiliza como vía fundamental al grupo para la construcción y sistematización del conocimiento individual y colectivo, así como para la transformación de la personalidad de cada uno de sus miembros y del grupo en su conjunto. La didáctica grupal es un método de trabajo que satisface en gran medida la motivación y el interés por el aprendizaje, la comprensión de lo que se estudia, la participación activa en el proceso y la aplicación de lo visto a situaciones de la vida real. Emma Hernández (Hernández, 1996).

El estudio sobre aspectos teóricos referidos a las técnicas grupales nos permitió comprender el uso, papel y finalidades de las mismas y responder a: ¿Cuándo? ¿Por qué? ¿Para qué? y ¿Hasta donde? deben ser utilizadas las mismas, su contribución, y como conclusión diseñar varias técnicas grupales que fueron utilizadas en la resolución de problemas al desarrollarse el proceso de enseñanza aprendizaje.

Los elementos teóricos abordados con anterioridad unidos a componentes no personales del proceso docente educativo asumidos por los autores y la concepción del *"Diagnóstico Pedagógico Integral"*, como proceso dinámico, que requiere actualización científicamente fundamentada. Victor Cortina (Cortina, 2001), nos permitió diseñar y aplicar la propuesta que en síntesis abordaremos a continuación y que es la novedad fundamental de este trabajo, la misma es una variante de la propuesto de Miguel Llivina (Llivina, 2000)

Propuesta didáctica-metodológica

1.- Planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a partir del uso de técnicas grupales para la resolución de problemas, en función de la profesionalidad pedagógica (PFPP)

1.1- *Realización del diagnóstico y formulación del problema.*

* Aproximación al problema de enseñanza-aprendizaje (PFPP).

Se realiza a partir de:

- Reunión del colectivo de año para el análisis del D.P.I inicial. Donde se caracteriza al estudiante que comienza en el primer año de la carrera.

- Intercambio con los profesores que trabajan con el grupo, fundamentalmente los de la especialidad y los que imparten las asignaturas del ciclo psicopedagógico.

- Análisis de entrevistas y encuestas hechas a estudiantes y profesores.

- Experiencia del profesor.

* Diagnóstico de las dificultades.

El mismo se realiza a partir de los resultados concretos de los instrumentos aplicados, dirigidos fundamentalmente a caracterizar el estado actual de las componentes a investigar.

*Discusión con los estudiantes de los resultados del diagnóstico.

* Establecimiento por parte de los estudiantes y del grupo de metas o propósitos con vistas a erradicar las dificultades que presentan.

* Formulación del problema de enseñanza-aprendizaje a partir de los resultados del diagnóstico.

Como resultado del análisis del D.P.I y del realizado para caracterizar los aspectos inicialmente concebidos, además del intercambio con los estudiantes en particular y el grupo en general se formulará el problema de enseñanza-aprendizaje concebido.

1.2- *Realización de acciones de preparación.* Se profundiza en aspectos teóricos relacionados con la resolución de problemas y la forma de su implementación en relación con la profesionalidad pedagógica de los estudiantes.

* Análisis del problema de enseñanza-aprendizaje.

Profundizar por parte del profesor en los aspectos teóricos concernientes al problema y en los resultados individuales de cada estudiante, en el caso específico de esta investigación los relacionados con el uso de estrategias generales de tipo heurística en la resolución de problemas, el uso de técnicas grupales y su contribución a la formación y desarrollo de cualidades profesionales durante el proceso de resolución de problemas.

* Conformación de equipos de trabajo según resultados del análisis realizado y siguiendo las normas al analizar las relaciones interpersonales.

En esta etapa el profesor conformará los equipos (parejas, tríos, cuartetos) según los resultados del diagnóstico, acorde a la técnica que se implementará en correspondencia con los objetivos específicos que deben cumplimentarse. Los alumnos podrán conformar los mismos por afinidad u otra razón que le sea de interés, siempre bajo la dirección del profesor.

1.3- *Estructuración de objetivos y del contenido.* A partir de los objetivos y los contenidos declarados en el programa se adecuarán los mismos para lograr la profesionalidad pedagógica deseada.

* El problema de enseñanza-aprendizaje formulado, que sintetiza los resultados del diagnóstico, conlleva a la formulación de los objetivos de cada actividad docente.

En correspondencia con los resultados del diagnóstico y el problema de enseñanza-aprendizaje establecido se formularán los objetivos de cada actividad docente, en correspondencia a las exigencias para esta componente declaradas con anterioridad, o sea, teniendo en cuenta el aspecto instructivo, relacionado con la formación de hábitos y habilidades, el educativo, referido a las componentes que integran la profesionalidad pedagógica y el desarrollador con la perspectiva de desarrollar los conocimientos, hábitos y habilidades que le posibilitarán enfrentarse a situaciones complejas.

* Concepción sistémica de los contenidos.

Partiendo del diagnóstico, del conocimiento de los estudiantes, y de las condiciones objetivas de trabajo se establece el sistema de conocimientos y habilidades a alcanzar por el alumnado durante el tratamiento del tema en estudio.

* Organización del contenido matemático.

Las tareas que pueden ser desarrollas son:

- Determinación de las tareas típicas a partir de los objetivos, tomando en consideración el sistema de habilidades propuesto. Situaciones a las que se enfrente el estudiante y pueda darle solución, aumentando el grado de dificultad según el rendimiento que vayan obteniendo en la marcha del proceso de aprendizaje.

- Determinar los conceptos matemáticos, reglas y propiedades correspondientes.

- Organizar el proceso de asimilación.

1.4- *Concepción de los métodos de enseñanza a utilizar.*

Acorde al sistema de conocimientos y habilidades a lograr en función de los objetivos propuestos, se propone diseñar un grupo de técnicas de trabajo grupal asumidas por el autor y que a criterio del mismo contribuyen al desarrollo de la profesionalidad pedagógica, al ser aplicadas en el marco del proceso de resolución de problemas.

1.5- *Concepción el sistema de evaluación.*

Según la concepción metodológica asumida, los pasos a seguir pueden ser resumidos en:

- Orientación de la actividad.

- Control y valoración de los trabajos de los compañeros (rol que desempeñe acorde a la técnica empleada).

-Discusión y análisis colectivo de los trabajos.

- Autocontrol y auto evaluación (referido a la metacognición)

2.-Ejecución del proceso de enseñanza-aprendizaje (PFPP).

2.1- *Realización de acciones de intervención.*

Desarrollo del programa de la asignatura (tema) teniendo en cuenta la planificación realizada. Esta etapa contempla la puesta en práctica de:

- Las tareas típicas seleccionadas.

Enfrentamiento por parte del estudiante a situaciones a las que pueda darle solución, aumentando el grado de dificultad según el rendimiento que vayan obteniendo en la marcha del proceso de aprendizaje.

- Los conceptos matemáticos, teoremas, propiedades, relaciones, procedimientos, etc. en la resolución de problemas.

- El proceso de asimilación, el mismo se ejecuta a partir de la puesta en práctica del sistema de problemas conformados de acuerdo a los objetivos, las tareas típicas en función de estos y las habilidades que se aspiran desarrollar.

* Desarrollo del proceso de resolución de problemas.

Utilización del proceso de resolución de problemas propuesto por Polya, señalando en cada etapa las heurísticas que pudiesen ser consideradas a criterio del autor, partiendo del análisis de las propuestas por otros estudiosos de la temática.

* Aplicación de las técnicas de trabajo grupal diseñadas, durante el proceso de resolución de problemas.

Diseño y aplicación de las técnicas utilizadas donde se incluyen: nombre de la técnica, objetivo, mecánica, tiempo, materiales e indicaciones generales.

3.- Control del proceso.

3.1- *Acciones de control.*

*Acciones a desarrollar por el profesor

En este momento se trata de que el alumno comprenda la importancia del control y la valoración para elevar la calidad de su trabajo, en este sentido constituye un elemento motivacional digno de tenerse en cuenta.

-Dar las orientaciones sobre las exigencias que debe cumplir el trabajo a desarrollar.

- Seguimiento y evaluación de la aplicación del programa heurístico general por etapas, que debe contemplar la utilización y eficiencia en el uso de estrategias, principios y reglas heurísticas en:

- La comprensión o representación del problema.
- Búsquedas de vías de solución.
- La solución del problema.
- Análisis de la solución y de la vía. (visión retrospectiva).

- Valoración del trabajo por equipos e individual.

- Guiar la discusión y el análisis colectivo.

Acciones a desarrollar por parte de los alumnos:

-Valoración y control del trabajo realizado por sus compañeros (en cada etapa), donde se tenga en cuenta el rol desempañado en dependencia de la técnica utilizada.

- Discusión y análisis colectivo del trabajo realizado.

-Autocontrol y autovaloración, teniendo en cuenta el rol desempeñado.

Dicha propuesta se pone en práctica en el tema "Cálculo numérico y Porcentual" correspondiente a la asignatura "Matemática Básica" en el primer semestre del primer año de la carrera de Licenciatura en Educación especialidad Física-Electrónica del I.S.P "José Martí" de Camagüey.

Para lo cual se estructuró, a partir de los objetivos del tema, del sistema de conocimientos y habilidades, de la organización del contenido matemático, de la concepción de los métodos de enseñanza y la organización del sistema de evaluación cada actividad docente, teniéndose en cuenta los aspectos mencionados con anterioridad para su puesta en práctica de una forma diferente.

Conclusiones

1.- En este trabajo se realiza una propuesta didáctica-metodológica basada en el empleo de la resolución de problemas utilizando técnicas grupales, para formar y fortalecer la profesionalidad pedagógica, a través del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática que implica:

Propiciar el análisis y la reflexión, así como la participación de los estudiantes en el proceso de enseñanza.

Usar la lógica dialéctica práctica-teoría-práctica como lógica metodológica.

Fortalecer la orientación de la actividad cognoscitiva de los estudiantes de modo que propicie un trabajo colectivo e individual más efectivo como vía para desarrollar la profesionalidad pedagógica.

Partir de la motivación real de los alumnos y tener en cuenta que esta es premisa y consecuencia de la aplicación de los métodos y procedimientos seguidos.

Implementar el trabajo en grupo y el uso de técnicas participativas.

2.- Con la implementación de nuestra propuesta didáctico-metodológica se constató un avance cualitativo en la formación y desarrollo de la profesionalidad pedagógica de los estudiantes de esta especialidad, avalado por los resultados obtenidos referidos a:

La flexibilidad del pensamiento, en particular la toma de decisiones en la aplicación de conceptos matemáticos y procedimientos heurísticos en la resolución de problemas.

El carácter crítico y autocrítico del pensamiento durante la ejecución y el control del proceso.

La comunicación afectiva, referida específicamente a la explicación y argumentación de ideas, al uso adecuado del vocabulario técnico de la asignatura y de las normas que establece la lengua materna, al expresarse de forma oral y escrita en cada paso del proceso.

Exigencia por el cumplimiento eficiente de las actividades que se les oriente, imparcialidad en la toma de decisiones y autocontrol del trabajo que realiza, al ejecutarse el trabajo en colectivo.

3.- Con la aplicación de la propuesta descrita se eleva la capacidad democratizadora de los futuros profesionales que se familiarizan con el trabajo colectivo, desarrollándose cualidades de la personalidad que deben caracterizar al profesional en formación y que son exigencias de nuestra sociedad actual.

Referencias bibliográficas

Barabtarlo, A. (1985) *La metodología participativa en la formación de profesores*. En *Perfiles Educativos,* No 27-28,pp172-184.

Campistrous, L. & Rizo, C. (1996) *Estrategias de la resolución de problemas en el aula. RELME.*

Castro, F.(1981). *Discurso pronunciado en la graduación del V contingente del* "Destacamento Pedagógico Manuel Ascunce Doménech. Editorial Política. La Habana

Chacón, N.(1999). *Formación de valores morales*. Editorial Academia. *Colección PROMET*, pp53-56.

Cortina, V.(2001) *El diagnóstico Pedagógico Integral en el perfeccionamiento del proceso formativo del profesional de la educación.* En Universidades. Año LI. Nueva época. No 21.

Fridman, L. (1990) *Metodología de la enseñanza para la resolución de problemas de matemática*. México D.F. En Revista Matemática Educativa, Vol 3-No 1,pp24-28.

González M.(2000), *V. Educación en valores y desarrollo profesional en el estudiante Universitario*. En .Revista cubana de Educación Superior, Vol. XX. No 3, pp 45-47.

Hernández, E.(1996). *Trabajo grupal con adolescentes: Una habilidad profesional*. En

Revista Varona, No 23,pp13-24.

Labarrere, A.(1987). *Bases psicopedagógicas de la resolución de problemas con texto.* Editorial Pueblo y Educación, pp 95.

Leontiev, A. (1979). *La actividad en la personalidad.* Editorial de libros para la educación.

Llivina, M.(2000). *La capacidad para resolver problemas matemáticos vista con un enfoque personológico..*-ISBN 958-33-1924-4, pp35-80.

Polya, G.(1988) La enseñanza por medio de problemas. En *Revista del Seminario de Titulación* año III Vol 13, U.N.A.M.

Polya, G. (1987). *¿Cómo plantear y resolver problemas?.* Editorial Trillas, S.A. de C.V.

Santos, L. M.(1992). *Resolución de problemas; El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las Matemáticas.*-México. En Educación Matemática, Vol 4 No 2, pp16-24.

Suárez, V.(1996). *El trabajo en equipo en un ambiente de resolución de problemas y la comprensión de los estudiantes.* RELME. ISPN 968- 29- 8134-4.

Vázquez, R.(1998). *La resolución de problemas y las tareas docentes de Matemática IV para la ingeniería* Eléctrica. Tesis de doctorado, pp 36-88.

El diseño de la unidad, la evaluación del aprendizaje y el uso de las calculadoras gráficas ejemplificado en la unidad de ecuaciones de segundo grado

Olga Lidia Pérez González
Universidad de Camaguey, Cuba
olgapg@reduc.cmw.edu.cu
olguitapg@yahoo.com

Ana Guadalupe Quiroga.
Instituto Laurens, Nuevo León, México
anagpe08@hotmail.com

Resumen

El presente trabajo asume como referente teórico la evaluación del aprendizaje desarrollado en la tesis de doctorado de la autora principal del trabajo (Pérez, 2000), en este sentido la evaluación toma un matiz diferente y está presente desde que planificamos y organizamos el proceso de enseñanza aprendizaje.

Paralelamente a esto se muestra el papel y la utilidad de las calculadoras gráficas en la enseñanza de las matemáticas, mostrándose como un recurso más en el quehacer didáctico de los maestros o de una herramienta al servicio de los maestros y alumnos.

En el trabajo se muestra cómo lograr el diseño de una unidad en las matemáticas a partir del tema de ecuaciones de segundo grado.

Esta propuesta ha sido utilizada en diversos cursos de didáctica de las matemáticas en maestrías de enseñanzas de las ciencias y en cursos independientes para la formación del personal docente, obteniéndose resultados alentadores en el trabajo de los maestros y alumnos.

Introducción

El presente trabajo asume como referente teórico la evaluación del aprendizaje vista desde la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje (Ver Pérez, 2000), en este sentido la evaluación toma un matiz diferente y está presente desde que planificamos y organizamos el proceso de enseñanza aprendizaje, lo que hace que el centro del proceso sea el alumno y el colectivo estudiantil y que la evaluación cumpla con sus funciones (Función Pedagógica, Función Innovadora y Función de Control, considerando a la pedagógica como la función rectora).

Para lograr que la evaluación cumpla estas funciones es importante tener en cuenta los principios sobre los que ella debe concebirse, los cuales tienen su base en los principios didácticos, en los principios de la teoría de la dirección y en la teoría del conocimiento.

Paralelamente a esto se muestran las potentes posibilidades que brindan las calculadoras gráficas para la enseñanza de las matemáticas y como con su utilización eficiente se perfecciona el desarrollo del proceso y por ende el de la evaluación del aprendizaje, de forma que la educación matemática responda a las cambiantes exigencias de las matemáticas basado en la resolución de problemas y a los retos de esta nueva sociedad.

En el trabajo se muestra cómo lograr la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje de una unidad, en las matemáticas, a partir del tema de ecuaciones de segundo grado.

Desarrollo

En la dirección del proceso, el profesor determina el orden de sus actividades, que incluye como sus funciones: **la planificación, la organización, gerencia y la evaluación** (Pérez, 2000), estas funciones hacen que este proceso se desarrolle cíclicamente y todas ellas están estrechamente interrelacionadas y se compenetran unas con las otras.

Por tanto, el proceso de dirección debe considerarse como un proceso único e integral y la delimitación de cada una de estas funciones sólo tiene como objetivo, el elaborar los métodos y procedimientos para la realización más efectiva en la práctica.

La planificación es la función mediante la cual se proyecta el desarrollo del proceso, por lo que implica la precisión de los objetivos, el contenido, el sistema de tareas a desarrollar, los problemas, los métodos y medios de enseñanza, para toda la asignatura y para cada uno de los temas que la componen.

En ella deben verse la combinación adecuada de las diferentes tareas para el desarrollo de habilidades y propiciar la asimilación consciente de los contenidos. Esta combinación se expresa como un conjunto particular de interrelaciones entre las diferentes tareas que dan lugar al desarrollo de la independencia cognoscitiva, sobre la base de las acciones esenciales y las habilidades generalizadoras.

La organización tiene como objetivo establecer un orden interno coherente que permita el funcionamiento del proceso como una unidad, por lo que implica la estructuración y el ordenamiento interno de los componentes personales del proceso: profesor - alumno, y de los elementos del contenido de las asignaturas: conocimiento, habilidades, hábitos y valores, con vista a lograr de la manera más eficiente los objetivos propuestos. Entonces, la organización del proceso supone dotar al mismo de una estructura que permita coordinar e integrar el sistema de tareas planificado.

En esta organización coexisten las estructuras formal e informal. La formal es la que se hace teniendo en cuenta el sistema de tareas planificadas y las clases, mientras que la relación de las tareas no planificadas, y que surgen atendiendo a las diferencias individuales de los estudiantes, constituyen una organización informal.

Estas dos estructuras están en continua interrelación, lo que hace que generalmente sea imposible establecer la separación entre ambas, por tanto ellas coexisten y entre ambas se producen continuas interdependencias. Es necesario que la estructura formal sea sometida a las modificaciones oportunas, para así adaptarlas a las condiciones cambiantes del colectivo estudiantil, de cada estudiante y su entorno y que en el proceso de adaptación se puedan incorporar a la estructura formal aquellos elementos de la informal sean considerados convenientes.

La gerencia del proceso de enseñanza aprendizaje, se da a través de la ejecución del proceso en su dinámica y consisten en tomar decisiones para que el sistema se dirija en el sentido del cumplimiento de los objetivos. De acuerdo con Álvarez de Zayas, Escuela y la Vida, 1999, la evaluación es el eslabón, ya que debe unir en forma interrelacionada dos procesos, el necesario para rectificar lo pasado de los objetivos aún no alcanzados y el nuevo que va hacia el futuro para alcanzar nuevos objetivos, la gerencia debe lograr esto ya que el proceso de enseñanza aprendizaje es irreversible en su esencia.

La evaluación, como consecuencia de la naturaleza abierta del proceso de enseñanza aprendizaje, es el complemento lógico de la planificación y sus características dependen, y a la vez influyen, en la organización. Esta función es una de las esenciales de la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje, el cual está sometido a las perturbaciones del entorno, y en consecuencia también de dicho proceso.

Su misión es lograr que el sistema se mantenga dentro de una trayectoria previamente definida, introduciendo las correcciones necesarias para evitar las desviaciones que se vayan produciendo, se trata, por tanto, lograr mantener la estructura del proceso y las interacciones entre las diferentes categorías de la didáctica de convertir en autorregulable el sistema proceso de enseñanza aprendizaje.

La evaluación debe estar dirigida al proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que supone: el conocimiento de los aspectos didácticos y psicológicos que intervienen en el proceso, y la búsqueda de sinergias entre las diferentes actividades del mismo.

Ejemplo: unidad de ecuaciones de segundo grado

Propuesta de diseño del curso y del sistema de evaluación de la unidad (se parte de considerar que la unidad dispone de 18 secciones de clases)

Primeramente debemos dirigir el trabajo a la **planificación** es la función mediante la cual se proyecta el desarrollo del proceso, para eso sugerimos concretarnos en los objetivos, habilidades y contenidos. Además, se debe precisar qué se hará en la fase informativa del proceso, así como en la fase formativa.

Objetivo general: Resolver problemas que impliquen la solución, a un nivel productivo, de ecuaciones de segundo grado en una variable utilizando los métodos de descomposición factorial, ecuación general, completamiento de cuadrados y la representación gráfica. Este objetivo define a su vez el objetivo a evaluar en la unidad.

Habilidades a desarrollar (las cuales constituyen los indicadores a evaluar):

- Identificar ecuaciones de segundo grado,
- Identificar en las ecuaciones de segundo grado si son completas o incompletas,
- Determinar la ecuación, conocidas sus raíces,
- Utilizar las propiedades de las raíces para encontrar las ecuaciones,
- Clasificar las soluciones de una ecuación de segundo grado,
- Identificar si determinados valores son raíces de una ecuación dada,
- Resolver ecuación de segundo grado por la ecuación general, por el completamiento de cuadrados, por descomposición de factores,
- Describir las características de la gráfica de una ecuación de segundo grado dadas las características de su ecuación,
- Representar gráficamente una ecuación de segundo grado.

Contenido a tratar en la unidad: Ecuaciones de segundo grado.

NOTA: Desde unidades anteriores se debe dejar orientado un trabajo extraclases donde el estudiante tenga que hacer un resumen sobre la factorización, factorizar un grupo de ecuaciones de segundo grado indicadas por el profesor. Se puede utilizar una sesión de clases para discutir y evaluar el extraclases.

Para desarrollar la evaluación se debe delimitar el diseño de la unidad en dos fases: la informativa y la formativa.

Fase informativa

Comenzar con una sesión de clases donde se modelen problemas que conduzcan a ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado, buscar problemas motivadores relacionados con la vida real, otras materias, etc.

Después una sesión (Conferencia) para tratar los siguientes temas los contenidos relacionados con:

Concepto de ecuación, Concepto de ecuación de segundo grado, Solución de una ecuación. Raíces de una ecuación, Formula general para la solución de ecuaciones de segundo grado. Utilización de la calculadora gráfica, Interpretación geométrica de la solución de una ecuación de segundo grado.

Fase formativa

Sistema de tareas (para las sesiones de clases y la auto-preparación)

1. Dado un conjunto de ecuaciones identificar:
    - Cuales son de segundo grado, identificando el grado de las restantes.
    - De las de segundo grado identificar las que son completas o incompletas y representarlas con el uso de las calculadoras como recurso didáctico.

2. Dada un conjunto de ecuaciones de segundo grado y sus soluciones clasificar sus soluciones en reales y desiguales, reales e iguales o imaginarias y desiguales. Interpretar gráficamente las soluciones de dichas ecuaciones, con el uso de las calculadoras.

3. Identificar si los siguientes valores de x, dados, son soluciones o no de las ecuaciones dadas en cada caso.

4. Dadas las siguientes ecuaciones de segundo grado investigue que ocurre con las soluciones x_1 y x_2 si:
    - multiplicamos las soluciones
    - sumamos las soluciones

NOTA: Escriba la ecuación general y haga el coeficiente del primer término uno y compare los resultados obtenidos con los coeficientes del segundo y tercer termino.

5. Determinar por las propiedades de las raíces si los valores de x1 y x2 son soluciones de las ecuaciones dadas en cada caso.

6. Determinar las ecuaciones cuyas raíces son..., represente gráficamente la ecuación encontrada, con el uso de las calculadoras.

7. Descomponga en factores las siguientes ecuaciones, represente gráficamente, con el uso de las calculadoras.

8. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones utilizando la formula general, represente gráficamente e interprete su solución, con el uso de las calculadoras.

9. Dadas las ecuaciones de segundo grado hallar sus soluciones generales por el completamiento de cuadrados.

10. Representar gráficas de ecuaciones de segundo grado y deducir sus características, con el uso de las calculadoras.

11. A partir de la tarea anterior, haga un esquema donde sintetice todas las variantes que se presentan en la gráfica de una ecuación de segundo grado. Represente las siguientes

ecuaciones **sin** la utilización de la calculadora.

12. Dadas las siguientes ecuaciones, **sin** el uso de las calculadoras:
    - Identifíquela (poner ecuaciones lineales, de segundo grado, de otros grados)
    - Resuelva las de segundo grado, por dos vías diferentes. Justifique los resultados obtenidos.
    - Represente las de segundo grado y explique las características de su gráfico.
13. Plantee la solución de los siguientes problemas.
14. Resuelva los siguientes problemas.

Después la función de organización tiene como objetivo establecer un orden interno coherente que permita el funcionamiento del proceso como una unidad, por lo que implica la programación de las actividades en la cual queda además explícita la **evaluación.**

Programación de Actividades

Sesión	Forma de enseñanza	Contenido	Evaluación
	Clase práctica	Modelar problemas	Por equipos de trabajo.
	Conferencia	Ecuación, ecuación de segundo grado, solución de una ecuación, raíces. Métodos de solución e interpretación geométrica, **con** el uso de las calculadoras.	Autopreparación
	Clase práctica	Identificar ecuaciones de segundo grado, las completas e incompletas, representación gráfica, **con** el uso de las calculadoras	Autopreparación
	Clase práctica	Propiedades de las soluciones, hallar ecuaciones. Clasificar soluciones, representación gráfica, **con** el uso de las calculadoras	Autopreparación
	Clase práctica/ taller	Resumen actividades 3,4 y 5 Recepción del extraclases En este resumen destacar las características de las gráficas estudiadas en clases y en la autopreparación de forma que alumno pueda ir sintetizando las características generales de las gráficas de estas ecuaciones.	Evaluación escrita de 15´ (incluye el contenido del extraclases y evaluación por equipos).
	Clase práctica	Método de descomposición en factores, representación gráfica, **con** el uso de las calculadoras	Autopreparación
	Clase práctica	Ecuación general, representación gráfica, **con** el uso de las calculadoras	Autopreparación
	Clase práctica	Completamiento de cuadrados, representación gráfica, **con** el uso de las calculadoras	Autopreparación
	Clase práctica	Resolver ecuaciones por todos los métodos	Autopreparación
	Clase práctica	Resolver ecuaciones por todos los métodos	Autopreparación
	Clase práctica	Resolver ecuaciones por todos los métodos	Autopreparación
	Evaluación escrita	Resolver ecuaciones, métodos, propiedades de las raíces, clasificación de soluciones	
	Laboratorio de computación	Deducir características generales de las gráficas, **con** el uso de las calculadoras.	Discusión oral
	Clase práctica	Representación gráfica, **sin** el uso de las calculadoras.	Autopreparación
	Clase práctica	Representación gráfica, **sin** el uso de las calculadoras.	Pregunta escrita 15'
	Clase práctica/taller	Resolver problemas, Representación gráfica, **sin** el uso de las calculadoras.	Autopreparación
	Clase práctica/taller	Resolver problemas, Representación gráfica, **sin** el uso de las calculadoras.	Autopreparación
	Evaluación	Resolver problemas, representación gráfica, **sin** el uso de las calculadoras.	Evaluación escrita 45'

Conclusiones

Con este trabajo se quiere mostrar que:

- La evaluación del aprendizaje el maestro debe concebirla antes de comenzar a desarrollar la unidad, es decir, la evaluación está presente desde que planifica y organiza el proceso, y ella debe lograr un efecto sinérgico en dicho proceso
- La evaluación está basada en el sistema de tareas, es decir, cada tarea es una actividad a evaluar.
- Los indicadores a medir están definidos por el sistema de habilidades de la unidad.
- El objetivo de la unidad me define el objetivo de evaluación final, observe cómo el sistema de tareas y de actividades terminan precisamente en la habilidad incluida en el objetivo.
- Las calculadoras no son introducidas espontáneamente, estas se utilizan de acuerdo a las características de las tareas que se realicen, como medio o como recurso didáctico, observe como al final de la unidad ya no se utilizan.

Esta propuesta se ha realizado sobre la base de la unidad de ecuaciones de segundo grado, pero es aplicable a cualquier contenido matemático, por lo que proponemos que el diseño de la evaluación y la utilización de las tecnologías debe hacerse desde el tema. **No queda explícito en el ejemplo la gerencia** del proceso de enseñanza aprendizaje, pues esta se da a través de la ejecución del proceso en su dinámica y consisten en tomar decisiones según el contexto en que se desarrolle el proceso.

Referencias bibliográficas

Blanco, R. (1997). *La determinación de la Efectividad del uso de los ciclos temáticos*. Cuba. Centro de Ediciones Electrónicas del MES.

Pérez, O. (2000). *La evaluación del aprendizaje como elemento del sistema de dirección del proceso de enseñanza aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas para ciencia técnicas*. Universidad de Camagüey. Cuba. Tesis de Doctorado.

Talízina, N. (1992). *La formación de la actividad cognoscitiva de los estudiantes*. México. Ángeles.

Manifestación y reestructuración de las creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la formación del profesorado

Adognis Aguilar Pérez y Miguel Cruz Ramírez

Universidad Pedagógica "José de la Luz y Caballero" Holguín. Cuba

dpto.matematica@isp.holguin.inf.cu mcruz@isp.holguin.inf.cu

Resumen

El trabajo aborda una problemática que ha alcanzado, en los últimos años un nivel considerable dentro de la formación de profesores; se refiere específicamente al estudio de las creencias de los profesores en formación y docentes en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.. Se propone, en el presente trabajo, un modelo que posibilita, a partir de un conjunto de sugerencias, el estudio e incidencia en la transformación de las creencias limitativas manifestadas por los profesores que se encuentran en formación. En el modelo se tiene en consideración un momento de Estudio que lleva implícita la Orientación y la Explicitación de las creencias, uno de Transformación, donde el objetivo central está en la Reestructuración y un momento muy importante que es el de Evaluación del cambio de las creencias. El estudio está dirigido a los estudiantes que se encuentran en formación para profesores de Matemática.

Introducción

Existen autores que han descrito la naturaleza del constructo creencias (Thompson, 1992; Pajares, 1992; Flores, 1998). Flores (1998) hace un análisis de la caracterización de creencias partiendo del significado registrado en el Diccionario de la Real Academia, del Diccionario Etimológico y el Diccionario de Términos Filosóficos de Ferratin Mora, donde, en este último caso, se le da un matiz teológico al término creencias, de manera que cuando se presenta el significado que le atribuyen algunos autores, indica en todos ellos una raíz religiosa. Thompson (1992) y Pajares (1992) consideran que no se ha descrito con precisión en la literatura de investigación el concepto de creencias, pese a la notoriedad que en los últimos años ha alcanzado esta línea de investigación.

Se asumirá que las creencias, "Son ideas u opiniones *infundadas, estables,* que poseen las personas; que *se aceptan, dependiendo de la posición filosófica, de las experiencias que ha alcanzado en el intercambio social y de la formación conceptual y cultural que posea"* (Aguilar, 2001).

Silvestre (1998) se refiere a que las creencias pueden adquirirse a través de la interacción Profesor–Alumno, Alumno–Alumno, sin embargo, la interacción Alumno–Familia, y en general, Alumno–Sociedad, también son vías que propician la interacción sujeto–sujeto, jugando un papel mediatizador al producirse el proceso "imitativo" o de "transmisión de individuo a individuo".

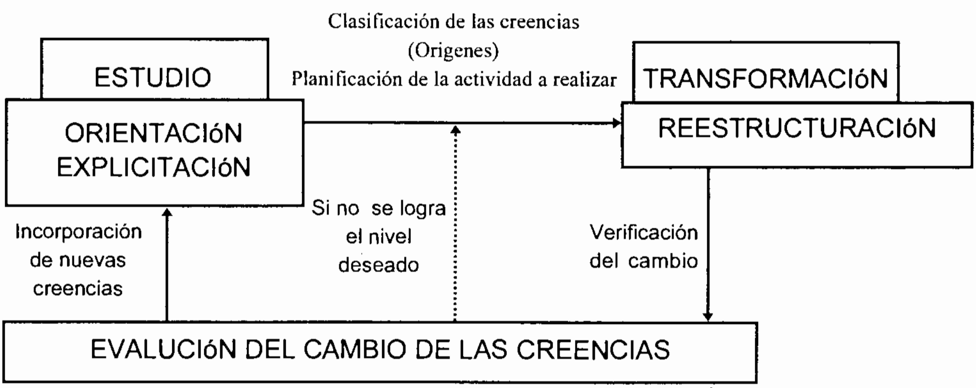
El profesor en formación y durante sus prácticas, desarrolla ideas de cómo enseñar Matemática y de cómo enseñar a resolver problemas sobre la base de procedimientos que adquiere en su propia experiencia. Las creencias de los profesores en formación y docentes sobre la naturaleza de las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, determinan la efectividad de la enseñanza al ser considerados estos, mediadores primarios entre la materia de enseñanza y el que aprende, como en la caracterización de algunos rasgos del proceso de socialización del estudiante para profesor en su período de práctica de enseñanza. Es importante ver también las creencias que los profesores van desarrollando al mismo tiempo que sus alumnos.

Clasificación de las creencias en los docentes y profesores en formación

Las creencias están clasificadas en dos direcciones, que coinciden con las propuestas por Núñez (1998), la primera relacionada con las *creencias favorables,* y la segunda, con las *creencias limitativas* sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, que es el caso de creencias que merece prestarle mayor atención. Dentro del conjunto de *creencias limitativas* obtenidas, se asume una clasificación que permitirá enmarcarla dentro de un campo más estrecho. La distinción que se realiza está relacionada con: Creencias relacionadas con la enseñanza de la Matemática. Creencias relacionadas con el aprendizaje de la Matemática. Creencias relativas al desempeño de las personas en el campo de las Matemáticas; y para los profesores en formación se asume, además, las creencias relacionadas con aspectos del contenido matemático. Es importante analizar, dentro del proceso de clasificación los orígenes de las creencias, es decir, si sus raíces son epistemológicas, didácticas, ontológicas o psicológicas.

¿Cómo incidir para la transformación de las creencias limitativas?

Para la transformación de las creencias es importante tener en consideración algunos momentos, tales como: su *estudio, transformación y evaluación* (Aguilar, 2001). Dentro del estudio, debe considerarse un momento de orientación y uno de explicitación de las creencias. La transformación sería la etapa en la cual han de reestructurarse las creencias limitativas poseídas. Es importante señalar que el proceso debe ser evaluado sistemáticamente. Cuando se conozcan cuáles son las creencias que han de transformarse, deben trazarse las estrategias necesarias para su reestructuración. Es evidente que en el proceso de transformación pueden surgir nuevas creencias, si esto sucediera, se incorporarían al estudio; de no lograr el nivel deseado, han de trazarse nuevas estrategias o enriquecer la aplicada. Es importante, además, en esta etapa, verificar si en realidad se está estudiando una creencia o si esta constituye un error.



Como estilo de trabajo, en cada Instituto de Formación de Profesores, se debe explotar la enseñanza cooperada como una de las maneras de socializar la actividad; las diferentes disciplinas deben tener un enfoque científico y pedagógico; se debe poner la tecnología en función de resolver los problemas de enseñanza y aprendizaje que existan, pues es un medio que no se explota al máximo; en el sistema de evaluación se debe explotar su función educativa y formativa, pues en un futuro tendrán éstos que hacerlo. Todo el sistema creado en el proceso de formación debe estar en función de brindar modos de actuación en los estudiantes que se forman como futuros profesores de Matemática, y de cambiar las creencias que poseen acerca de esta ciencia, su enseñanza y aprendizaje. Debe ser, la formación de pregrado el momento fundamental para incidir en el cambio de las creencias de los futuros profesores.

Para incidir en el cambio de las creencias en el primer momento "**Estudio**" se sugiere:

- **Orientación de la actividad a realizar**

Se destina para despertar el interés que poseen los profesores en formación o docentes, sobre la forma en que ven la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Fundamentalmente se utilizará el intercambio de ideas sobre el tema. Compartir situaciones en función de aclarar algunos términos como ¿qué son las creencias? ¿cómo piensan algunas personas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas? ¿Qué limitaciones traen consigo poseer determinadas creencias?, entre otras. Proponer ejemplos de algunas de las creencias que se hayan manifestado en algún momento por parte de un determinado docente.

- **Distinguir el campo sobre el que se estudiarán las creencias**

Teniendo en cuenta el diagnóstico, es importante tener total claridad en cuál sería el campo donde se estudiarán las creencias (sobre la Matemática, sobre la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, las creencias que se poseen sobre sí mismo como aprendiz, etcétera.)

- **Selección de los instrumentos**

Es importante señalar que existen un conjunto de instrumentos que pueden aplicarse para la explicitación de las creencias poseídas, tales como: La *entrevista*, donde se pueda constatar con el docente o profesor en formación de forma directa, compartir con ellos determinadas situaciones, escuchar sus justificaciones, etcétera; la *encuesta*, en este caso es importante, proponer situaciones que propicien la puesta en relieve de las creencias poseídas en los estudiantes o docentes, es un momento importante, pues mediante ésta se pueden explicitar las creencias sin necesidad de tener un contacto directo con el sujeto, lo cual daría una posibilidad de independencia. La *observación*, este es un punto importante a considerar, en particular *la observación de clases*, donde el profesor expone sus puntos de vista, aporta opiniones y sugiere cómo resolver determinadas situaciones a partir de su postura. La *grabación* de algunas actividades realizadas por el profesor, es una forma muy eficaz, pues a partir de ella se puede realizar un análisis preciso de su actividad en clases. La *revisión de documentos*, es un elemento a considerar en investigaciones de este tipo, pues los docentes exponen en éstos las ideas centrales a tratar en clases, a partir de su propia opinión; son acciones personalizadas.

Para dicha selección es importante tener en consideración las características generales y particulares del grupo de estudio; el campo sobre el que se estudiarán las creencias; los años de experiencia de los docentes o años de práctica de los estudiantes que se forman como profesores.

- **Confección de los instrumentos**

Antes de confeccionar un instrumento se considera necesario contactar con compañeros especialistas en el tema. Debe realizarse algunos ensayos pilotos para verificar si estos surten efecto; es importante señalar que deben evitarse las preguntas abiertas, si se dieran opciones, se sugiere que una de ellas debe ser “depende”, “no poseo decisión” para evitar las respuestas aleatorias, pues no darían una visión real del fenómeno. También pudieran pedirse que se dieran algunos elementos que corroboren el nivel de conformidad que poseen sobre un aspecto determinado. Se les puede proponer situaciones que contengan errores y se visualicen a partir de estas las creencias que poseen. Se puede proponer un conjunto de creencias manifestadas por un determinado grupo de personas para verificar si estas son compartidas por otras. Se debe tener en cuenta que las situaciones que se les presenten a los estudiantes para profesores o docentes, pongan en tela de juicio sus creencias, es decir, que creen dilemas en los mismos en dependencia de las posiciones adoptadas, a partir de sus creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, o el campo de estudio escogido.

- **Aplicación de los instrumentos**

Es el momento donde ha de aplicárseles a los docentes y profesores en formación los instrumentos confeccionados con el objetivo de obtener, de forma explícita, sus ideas, criterios, forma de pensar, etcétera, sobre la enseñanza de las Matemáticas o del campo escogido para el estudio de las creencias.

- **Análisis de los instrumentos aplicados**

En este aspecto debe tenerse en consideración las variables que pudieran afectar una correcta interpretación de los instrumentos aplicados, por lo que debe valorarse el grado de significatividad que ha tenido para el docente o el estudiante que se forma como profesor el instrumento aplicado.

No basta, para la obtención de una creencia, que esta se manifieste en un instrumento, por lo que se sugiere verificar su manifestación en otros momentos, por lo que debe existir una triangulación respecto a los instrumentos a aplicar y comprobar si se manifiesta con mayor frecuencia.

- **Identificación de las creencias**

Es el momento donde el profesor investigador determina de forma explícita las creencias manifestadas en el proceso investigativo. En dicho momento deben conocerse las creencias generales poseídas y las particulares, además, se debe realizar una clasificación de las creencias detectadas para incidir, con mayor facilidad, en el proceso de transformación.

En el segundo momento “**Transformación**” es importante determinar las causas que originaron las creencias poseídas

Es importante, primeramente, hacerlas consciente en cada una de las personas y hacer ver al individuo la necesidad de modificar estas creencias (se debe situar a la persona en situaciones diversas, donde existan dilemas, que demuestren que dichas creencias son erróneas y que limitan el proceso de enseñanza–aprendizaje), en este sentido se sugiere que se visiten clases y se discutan, haciendo énfasis en las creencias que se han mostrado y que existen otros puntos de vista que pueden mejorar el proceso de enseñanza sin necesidad de absolutizar. Garantizando un alto nivel de conciencia en este sentido, la tarea sería determinar las causas que han originado las creencias manifestadas (haciendo un estudio a los profesores que formaron a estos docentes o profesores en formación, realizando entrevistas que brinden estos datos, realizando encuestas donde se expongan algunos criterios manifestados por los mejores docentes que formaron a estos individuos). Es importante analizar si sus raíces son epistemológicas, didácticas, ontológicas o psicológicas, y así ir a las especificidades de las creencias en cada individuo.

- **Determinar la forma en que se realizará la actividad**

Teniendo en cuenta el tipo de creencias que se posean y de la actividad desarrollada (estudiante para profesor o docente) sería el tipo de actividad que se seleccionaría para incidir en el cambio de las creencias. Esta pudiera desarrollarse mediante (talleres, debates, trabajos en grupo, seminarios, a través de la misma actividad docente si se está en formación, etcétera). Es importante considerar el papel que juega el colectivo pedagógico en esta dirección.

- **Seleccionar el contenido a utilizar para incidir en el cambio**

La selección del contenido está en dependencia del campo en el que se ha de estudiar las creencias y del nivel de significatividad que tenga para el individuo la creencia poseída.

- **Planificación de las posibles situaciones a presentar para la reestructuración**

El profesor debe plantear situaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, que no sean compatibles con el sistema de creencias que poseen los docentes y profesores en formación. Las situaciones que se planteen deben potenciar la reelaboración de las creencias que se poseen y generar determinados conflictos en los mismos. La idea esencial es utilizar las creencias manifestadas y ponerlas en acción, en función de lograr el cambio de las mismas.

- **Ejecución de la actividad de reestructuración**

El profesor investigador debe ser un coordinador de la actividad docente que favorezca las discusiones sobre las situaciones planteadas, donde se reflejen los diferentes puntos de vista. Este no debe tomar decisiones, pues toda respuesta de su parte adquiere un valor en el mercado del intercambio docente. El profesor debe propiciar las formulaciones de conceptualizaciones de carácter personal, organizadamente, hasta alcanzar madurez en el conocimiento establecido didácticamente dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. El proceso debe continuar hasta llegar, finalmente, a tener una coincidencia aproximada del saber establecido.

Es valioso que el momento de cambio se realice de forma colectiva, dentro del proceso formativo, pero si es posible, debe tratarse de individualizar dicho cambio, así las acciones y el intercambio se realizan de forma directa.

Debe explotarse también las investigaciones que se han realizado para brindar modos de actuación en los estudiantes que se forman como profesores de Matemática–Computación; la autosuperación de cada uno de los miembros del colectivo pedagógico es una forma de asumir nuevos paradigmas y mostrarlos en un futuro, lo que es una manera de cambiar las creencias en sí mismo e incidir en el cambio de las que poseen los futuros profesores.

Y en el tercer momento "**Evaluación del cambio de las creencias**" es importante considerar:

- **Análisis del estado actual y de significatividad que tuvo el cambio**

Es el momento en el que se comparan las nuevas ideas con las que inicialmente, los docentes o profesores en formación poseían. Este análisis debe realizarse en las futuras prácticas laborales y actividades docentes, con el objetivo de verificar el cambio de las creencias de los profesores en todo un proceso, es decir, este cambio ha surtido efecto si se manifiesta en la actividad que el profesor planifica y realiza diariamente, y si este se manifiesta de forma sistemática. Para esto se recomienda que se observen clases, se realicen entrevistas, que se lleve un control de esta variable en los Entrenamientos Metodológicos Conjuntos que se les realizan a los docentes en las escuelas o a los profesores en formación que se encuentran en práctica laboral, que se revisen las planificaciones de las actividades que sistemáticamente estos realizan.

- **Verificación de la incorporación de nuevas creencias**

Como se había manifestado anteriormente, la evaluación debe ser sistemática, esto propicia que el investigador mantenga un control estricto de las creencias manifestadas y de las incorporadas en el proceso de cambio.

- **Determinar que otras estrategias pudieran aplicarse de no haber sido efectiva la ejecutada.**

De no lograrse el nivel deseado, se hace necesario planificar nuevas acciones, de manera que permitan alcanzar el objetivo trazado o escoger una nueva estrategia para incidir en el cambio de las creencias manifestadas. La idea esencial en el cambio de las creencias por un conocimiento adecuado, requiere modificar el estatus de los nuevos conocimientos, de modo que el cambio sea fructífero, inteligible y significativo. El conocimiento requerido debe basarse en las creencias y las concepciones poseídas por los estudiantes para profesores y docentes, pues es una forma de cambiar estas y aportar un conocimiento claro y significativo en su aprendizaje; es sugerente plantearles situaciones problemáticas a resolver. Como estrategia de práctica del cambio de las creencias, se sugiere aplicar la investigación acción, a través de seminarios especiales sobre temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, cursos donde se compartan situaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia, diseños de experiencias para ayudar a clarificar y diferenciar ideas, talleres, entre otras. El objetivo final de modificar las creencias limitativas poseídas, es obtener un aprendizaje significativo y eficaz, el cual sea transmisible a las nuevas generaciones. Es importante dar diversas oportunidades a los futuros profesores y a los docentes para que prueben y apliquen sus creencias reformadas.

El conocimiento de las creencias que poseen los profesores que se encuentran en formación, como parte del diagnóstico, debe poseer un alto significado para poder incidir en dicho cambio.

Conclusiones

El estudio de las creencias, en la formación de profesores, se encuentra dentro del enfoque *interpretativo* y este a su vez dentro de la *socialización del profesor,* donde ha alcanzado un desarrollo considerable en la última década.

Se considera que la propuesta brindada les posibilita a los profesores de los ISP un modelo didáctico complementado con un conjunto de sugerencias que les facilitan desarrollar eficazmente el proceso de estudio y cambio de las creencias limitativas poseídas por los profesores que se encuentran en formación.

Referencias bibliográficas

Aguilar, A. (2001). *Un Modelo Didáctico para el Estudio y Transformación de las Creencias Limitativas acerca de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la Formación de Profesores*. Tesis de Maestría en Didáctica de la Matemática. Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero", Holguín, Cuba.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza.* Tesis Doctoral Universidad de Granada.

Núñez, C. (1998). Creencias de un grupo–clase de 1° FP1 administrativo sobre la resolución de problemas. *Revista Epsilon*, Vol. 14(3), N°42, p 425–445.

Pajares, M. (1992). Teacher' beliefs and educational research: cleaning unapt a messy contruct. *Review of Educational Research,* Vol 62, n°. 3, pp.307–332.

Silvestre, M. (1998). *Aprendizaje, educación y desarrollo.* La Habana: Pueblo y Educación.

Thompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. En Grouws, D. (ed) *Handbook of Research on Mathematics Learning and teaching*, Macmillan, pp127-145.

Los primeros errores en la formación docente

Patricia Lestón y Daniela Cecilia Veiga
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina
patricialeston@uolsinectis.com.ar veigadaniela@yahoo.com.ar

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo un análisis de los conocimientos matemáticos con los que los alumnos ingresan en la carrera del Profesorado en Matemática y Astronomía del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de Buenos Aires (Argentina). Las conclusiones se apoyan en la experiencia de las autoras como Profesoras a cargo del Curso de Apoyo al Curso de Nivelación de la carrera antes mencionada. Esta investigación que se llevó a cabo a través de la observación y el dictado de las clases, lo que permitió analizar los errores más frecuentes y sus orígenes, los conceptos bien adquiridos, la concepción que los alumnos tienen de la Matemática y el perfil de los mismos. El análisis ha sido realizado sobre la base del aspecto constructivo del error. A partir del análisis realizado a lo largo de la investigación, se puede concluir que detrás de todo error hay un aprendizaje incompleto o erróneo.

Introducción

En el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de Buenos Aires (Argentina), el curso de ingreso para el Profesorado de Matemática y Astronomía, no es obligatorio y es dictado durante diez semanas con una carga horaria semanal de siete horas, y al finalizar el curso se toma a los ingresantes un examen obligatorio no eliminatorio.

La realidad de nuestro país es que el nivel de la educación es muy heterogéneo, ante lo cual se hace difícil lograr un nivel uniforme en los ingresantes al Instituto. Esta es una de las razones que hacen que la deserción durante el primer año de la carrera sea muy importante.

Las autoras de este trabajo, egresadas del Instituto y habiendo hecho el curso de ingreso en su momento, presentaron en el año 2001, con la colaboración y dirección de una docente del Instituto; un proyecto para dictar un curso de apoyo a este curso de ingreso, agregando cuatro horas –no obligatorias- por semana. Durante esas clases se intentó acercar a los ingresantes una nueva perspectiva de la Matemática; seguramente distinta a la adquirida a lo largo de sus estudios anteriores y subsanar deficiencias que estos les hubieran dejado.

Perfil de los alumnos

Si bien no era obligatoria la participación en dichos cursos, se produjo la asistencia de gran cantidad de alumnos. Es notable que se trató de grupos muy heterogéneos pero con un patrón en común: *muy buena predisposición e interés por aprender*. Quizás fue esta reacción la que llevó a pensar en el replanteo, desde la experiencia adquirida, de ciertos aspectos de la enseñanza media que se detallan más adelante.

Se utilizaron para la presente investigación dos cursos; uno dictado en el turno matutino y otro vespertino con todas las diferencias que esto conlleva. La cantidad de alumnos y edades no puede determinarse de manera exacta debido al carácter optativo del curso. El curso de la mañana estaba formado por alrededor de 30 alumnos de entre 18 y 30 años. El nivel de conocimiento era muy bueno, comparado con las expectativas, no apareciendo prácticamente ningún tema desconocido y con una labor constante por parte de los ingresantes. El trabajo en clase se reducía a la resolución de los ejercicios que generaban mayores conflictos, por ser desconocidos o complejos en su resolución, en general ejercicios algebraicos. El interés por parte de los alumnos era muy grande y su predisposición a enfrentar ejercicios desafiantes era óptima. El grupo de la noche constaba de alrededor de 20 alumnos de entre 25 y 35 años. La mayor parte había terminado el secundario regular tiempo atrás o provenía de Bachilleratos Acelerados para Adultos. La mayoría trabajaba durante el día o eran padres de con familia lo que les restaba tiempo de estudio; no obstante, aprovechaban al máximo las clases para realizar consultas. Principalmente, asistían a las clases de apoyo para repasar temas que habían olvidado; y en muchos casos, manifestaron que les hubiera gustado *"que la escuela les enseñe a pensar matemáticamente y no mecánicamente"*. El nivel del curso era acorde a lo que se esperaba (entre medio y bajo), teniendo en cuenta las características de los estudios cursados.

Marco teórico

El análisis de lo observado en el curso ha sido realizado sobre la base del aspecto constructivo del error (Panizza, 1997) que es lo que en realidad nos interesa del concepto. Panizza opina *"(los errores) ofrecen recursos para formular hipótesis acerca de las concepciones que podrían explicar las producciones erróneas y para hacer avanzar dichas concepciones hacia los conceptos correctos. Según la perspectiva tradicional, el error es interpretado sólo en términos de lo que el alumno no ha logrado en relación a un saber determinado. Según la perspectiva constructivista, el error constituye un instrumento de diagnóstico de lo que el alumno ha logrado construir en relación a ese saber"*.

En particular fue uno de los temas más observados el surgimiento de los obstáculos frente a la resolución de problemas, considerando que este tipo de actividad, cada vez más presente en las clases de matemática de todos los niveles, es primordial para el conocimiento de esta ciencia. Dice Miguel de Guzmán (1984): *"lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra la vida propia de las matemáticas"* (Corbalán, 1998).

Respecto a la resolución de problemas, Santaló (1986) opina: *"Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas debe ser lo mismo que pensar en la solución de algún problema... Naturalmente que se trata de problemas en el sentido amplio, no solamente de problemas reducibles a cálculos numéricos, sino de cuestiones muy diversas, como pueden ser la ordenación de datos, la demostración de propiedades de las figuras geométricas, la justificación de ciertas relaciones matemáticas o la demostración de propiedades de los conjuntos, de las funciones o de las estructuras* *algebraicas. Lo importante es que haya algo que buscar, o un enigma que aclarar dentro de un contexto bien planteado. Solamente hay que enseñar, como requisito previo, el lenguaje o la nomenclatura usual en matemáticas, para poder plantear los problemas correctamente y para entender la bibliografía corriente".*

Con respecto a la labor del docente frente a la enseñanza de resolución de problemas, Schoenfeld postula: *"El profesor también debe ser un entrenador en el sentido de que, al menos al principio, es la persona que hace que las habilidades y técnicas que tiene el alumno se utilicen de forma estratégica en la solución de problemas... Una de las diferencias entre los expertos matemáticos y los alumnos en la resolución de problemas estriba en que estos últimos carecen de metaconocimiento o control de sus propios recursos de solución. En ese sentido, el profesor debe ayudar mediante diversas técnicas a hacer explícitas las estrategias de las que dispone el alumno y su utilidad en la solución del problema".* (Echeverría, M. 1997).

Para concluir destacando la importancia de los problemas, Polya afirma: *"Está bien justificado que todos los textos de matemáticas empezando por el Papyrus Rhind, del siglo XVIII antes de nuestra era, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática"* (Santaló, 1986).

Errores frecuentes y dificultades

El objetivo principal de esta investigación fue no sólo detectar los errores, sino determinar con qué concepto sin adquirir o mal adquirido se relacionaban.

La realidad de la escuela es que los alumnos no tienen interés en el origen de los conceptos matemáticos, sino que sólo quieren la fórmula o receta que resuelva las situaciones que se les presentan. En muchos casos, esta dificultad se debe a que los alumnos están habituados a un tipo de trabajo esencialmente algebraico, es decir, muchos docentes no incluyen en sus clases, ejercicios o problemas que obliguen al alumno a "explorar" la situación planteada y discutir las posibles vía de solución, que es lo que permite que el aprendizaje del nuevo concepto sea verdaderamente significativo, de esta manera, los alumnos pasan toda su educación secundaria sin enfrentarse a verdaderos desafíos que los obliguen a analizar los conceptos que conocen, sus conexiones con otros y a plantearse seriamente la necesidad de buscar en sus mentes diversas maneras de resolver la situación. Ese tipo de aprendizaje hace que algunos conceptos vistos y reconocidos por todos los alumnos no hayan sido incorporados de una manera significativa.

Para trabajar como ejemplo, seleccionamos los siguientes errores puntuales, que se presentaron en gran cantidad de los casos y realizamos a partir de ellos el análisis pertinente.

- ✓ Traducción de lenguaje coloquial a lenguaje algebraico: Durante el proceso de traducción, los alumnos no identificaban a las incógnitas como variables, lo que representaba una dificultad a la hora de traducir situaciones problemáticas concretas. Es decir, veían a las incógnitas como los objetos a los que se refiere el problema y no como una cantidad o número.

- ✓ Interpretación de las soluciones de ecuaciones: Con respecto a este tema nos encontramos con varias dificultades puntuales:

  Existe una concepción errónea al reducir a las ecuaciones al mero hecho de resolverlas, sin tener en cuenta si esas soluciones son válidas o no en el contexto del problema.

Posiblemente esto se deba a que en la educación media, la mayor parte de los problemas planteados tienen solución y la solución es la correcta para el problema, por lo que no se hace necesaria la verificación, dando a los alumnos un significado parcial de la resolución de problemas..

1-En el caso de la resolución de ecuaciones de segundo grado o grado mayor, se detectó que las soluciones complejas no son reconocidas por parte de los alumnos como soluciones. Esto ocurre porque no son reconocidos como números debido a su forma de expresión y por la aparición de una *letra*. Quizás esto se pueda relacionar con otro error muy frecuente que surge al trabajar con números irracionales; la mayor parte de los alumnos no considera a $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ como un número, sino como una expresión a resolver, de la cual buscarán una forma simplificada, que en realidad no existe (Guasco, 2001). Posiblemente esto se deba también a que el conjunto de los números complejos tanto como el conjunto de los números irracionales se tratan en forma independiente al resto de los contenidos.

✓ Interpretación de enunciados: Ante ejercicios típicos presentados con distintos enunciados, los alumnos tienen mayor dificultad para resolver aquellos que no aparecen de la manera habitual. No les resulta igual resolver un ejercicio que tiene como enunciado "resolver las siguientes ecuaciones" que otro que diga "hallar los valores que verifiquen las siguientes expresiones". Seguramente esta dificultad surja de la rutina en los enunciados típicos de la enseñanza media. En particular, frente al ejercicio:

¿Cuáles son los números reales que cumplen que el cuadrado del anterior de su triple sea menor o igual que 9?

Se encontró que un grupo de alumnos había planteado y resuelto la inecuación, pero ignoraba qué debía responder a la pregunta planteada. Posiblemente, si el enunciado hubiese sido *Plantea y resuelve*, no se les hubiera presentado ningún inconveniente.

✓ Teoría de números: Esta rama de la ciencia es la que más se presta para realizar demostraciones por el conocimiento general que tienen los alumnos de las propiedades aritméticas. No obstante, es un tema apartado del programa curricular de la escuela media, situación que se contradice con la propuesta que hace Fausto I. Toranzos (1963): *"Son trabajos de mucha importancia, pues permiten aplicar la enseñanza heurística en forma muy provechosa para el objetivo formativo; merecen por lo tanto una atención especial por parte de los profesores"*. Esta ausencia genera como consecuencia que los alumnos sean incapaces de esbozar una demostración y a lo único que recurren es al tanteo, sin reconocer la necesidad de la generalización.

✓ Conceptos mal adquiridos: Se presentaron ciertos conceptos, que aunque básicos, tenían errores graves en su manejo. Particularmente, los conceptos de raíz cuadrada y de división en el caso de divisor igual a cero generaron acaloradas discusiones ya que, por el exceso de familiaridad que tienen los alumnos con dichos temas les es difícil comprender que lo que piensan es erróneo. Por ejemplo: $\sqrt{16}=\pm 4$ y $\frac{0}{0}=0$. En el primer caso el hecho de que se utilice para definir a la radicación como la operación inversa de la potenciación lleva a que se hallen los dos valores que elevados al cuadrado dan por resultado 16 y se los considere a ambos como soluciones de la operación. En el otro caso, concluimos que al ser la división una operación tan habitual, el concepto pierde su significado y se olvide la definición de la operación.

✓ Funciones: En el curso del trabajo con funciones se detectaron distintos tipos de dificultades, las que se detallan a continuación:

1- Dada una función gráficamente o a través de una tabla de valores, se les solicita a los alumnos que determinen valores intermedios aproximados; la reacción inmediata de los mismos fue intentar –sin éxito en la mayoría de los casos- encontrar la fórmula correspondiente a la función. Probablemente, esto se deba a que en sus contactos anteriores con el tema *funciones* no trabajaron suficientemente con sus distintas representaciones; con los pasajes de una a otra forma y en muchos casos sólo se les presentaron algunos tipos de representación.

   Se sabe que una función puede venir dada en cualquiera de sus representaciones: *modelo físico o simulación, descripción verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula o ecuación* (Azcárate y Deulofeu, 1996); las dos últimas de gran predominio durante la educación media, dejan de lado los otros lenguajes. Esta visión tan reducida de los procesos de traducción de una representación a otra trae como consecuencia, en muchos casos, la dependencia a una de sus representaciones; y la reducción del concepto de función al de *fórmula* o *gráfico*.

2- Se observó una tendencia generalizada a desarrollar tediosos cálculos algebraicos, cuando en realidad, en muchos casos es más sencillo realizar una lectura sobre el gráfico de la función; sobre todo cuando se trata de análisis de funciones. Posiblemente esto ocurre, debido a que la mayoría de los estudiantes no pueden establecer relación alguna entre la conclusión a la que llegan algebraicamente y el gráfico de la función.

3- Por otro lado se encontraron errores relacionados al concepto de par ordenado. El error apareció a partir de un ejercicio en el que se debía determinar el conjunto dominio de la función $f(x) = \frac{2x - 2}{x - 1}$. Un alumno llegó a la conclusión de que éste era $D = \Re - \{(1;2)\}$; la ausencia de un punto en el gráfico de la función le hace pensar que dicho punto debe ser extraído del dominio. El error surge al determinar el dominio de la función a través del análisis de su gráfica y establecer una conexión errónea entre número real y par ordenado.

✓ <u>Polinomios:</u> El manejo algebraico de polinomios, en general, fue satisfactorio. Sin embargo, aparecen errores conceptuales en la resolución de ejercicios en los que se les solicita que busquen las raíces de un polinomio factorizado, ante lo cual lo escribirán de forma polinómica $ax^n + bx^{n-1} + ... + m$ para luego factorizarlo y buscar sus raíces. Este obstáculo puede estar relacionado con la idea que los alumnos adquieren durante su paso por la escuela secundaria, en la cual la factorización de polinomios es el eje del tema, sin llegar a establecer relación entre el manejo algebraico de polinomios y el objetivo para lo cual esto se realiza. Por otro lado, esta deficiencia puede deberse a que no es reforzada la idea de equivalencia de un polinomio expresado en cualquiera de sus formas.

✓ <u>Búsqueda permanente de fórmulas y "recetas":</u> Aparece continuamente en los alumnos una necesidad imperiosa de reducir cualquier problema a una fórmula o "receta" que permita resolverlo y a todos aquellos que a él se parezcan; aunque nunca más se proponga un problema de esas características. Esta necesidad surge a partir del acostumbramiento que les genera el haber resuelto únicamente problemas de esta índole descuidando aquellos en los que se requiere un razonamiento lógico propio de la matemática. *"Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello"* (Polya, (1965) en Santaló, (1986)).

Conclusiones

El análisis del error tiene sentido cuando el sentido lo encuentra el alumno. A partir del análisis realizado a lo largo de la investigación, se puede concluir que detrás de todo error hay un aprendizaje incompleto o erróneo. Lo que se quiere remarcar es la importancia no sólo de poner de manifiesto estos errores, sino indagar las causas de su origen para poder subsanarlas. El análisis realizado con posterioridad a este curso y que se está presentando en este artículo, fue elevado a las autoridades de la institución que se encuentran a cargo de la coordinación de ingreso, con la finalidad de que se realice un trabajo constructivo en el futuro, orientado a centrar la atención en las dificultades que presentan los alumnos egresados de la escuela media, en los cursos de los años siguientes y elaborar actividades tendientes a solucionar estas dificultades.

Basado en todo lo observado y analizado durante las clases en este curso de apoyo al Curso de Ingreso, consideramos que todo error debe ser tomado como el inicio de un análisis. Es decir, el error no debe ser visto como una ausencia absoluta de conocimiento, sino como una herramienta que pone de manifiesto que existe un conocimiento, pero mal adquirido. Por lo tanto, el error constituye un instrumento que le permite al alumno la construcción de nuevos conceptos. De esta manera, consideramos que las clases deben dar un espacio a los errores para que surjan, sean discutidos y remediados. El curso de ingreso al profesorado tiene por objetivo hacer un análisis de las condiciones y conocimientos de los ingresantes y notificar a los profesores de primer año el nivel con el que los alumnos ingresan. Pero esa finalidad le sirve a los docentes, no tanto a los alumnos. No debemos olvidar que en nuestro país la realidad educativa es, lamentablemente, preocupante, y los alumnos tienen muchas veces un desconocimiento absoluto de lo que es la matemática. Pasan por la escuela secundaria realizando cálculos y repitiendo algoritmos muchas veces inútiles y siempre vacíos de significados, convirtiéndose en "sabios ignorantes" (Ball, 1997). Cabe preguntarnos si no es la tarea del Curso de Ingreso mostrarles la otra cara de la matemática, despertar en ellos el interés por el razonamiento y la deducción lógica, acercarlos a ese nuevo campo, que les es totalmente desconocido, y que será el que deban recorrer durante sus carreras.

Por otra parte, la voluntad y buena disposición al trabajo y al descubrimiento de terrenos desconocidos permiten vislumbrar en un futuro un cambio interesante en las clases de matemática. Tal vez en el caso particular de este curso sea más que importante el tratamiento con el alumno de los errores, ya que en un futuro serán ellos quienes deban realizar este análisis con sus alumnos y en sus cursos.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C., Deloufe, J. (1996). *Funciones y gráficas.* España: Editorial Síntesis.

Ball, R. (1997). "Calculadores prodigio". En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Volumen 4, pp 56-77. Barcelona, España: Editorial Grijalbo.

Corbalán, F. (1998). *Juegos Matemáticos para secundario y bachillerato*. España: Ed. Síntesis.

Echeverría, M. (1997). *La solución de problemas en matemática.* En Pozo, J., Echeverría, M. y otros. La solución de problemas. En *54-83.*Argentina: Editorial Santillana.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra.* España: Ed. Síntesis.

Guasco, M. (2001). La enseñanza de los números reales. Los contenidos interesantes, las dificultades y el error de ocultarlas. *Boletín de la Sociedad Argentina de Educación Matemática* 8 (3), 17-22.

Panizza, M. (1997). *Aproximación al análisis del error desde una concepción constructivista del aprendizaje, 151-161.* Buenos Aires, Argentina: Editorial A-Z.

Santaló, L. (1986). *La enseñanza de la matemática en la escuela media.* Argentina: Ed. Docencia.

Schoenfeld, A. (1996). "La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas". En Resnik, L., Klopfer, L., *Currículum y cognición. 141-169.* Argentina: Ed. Aique.

Toranzos, F., (1963). *Enseñanza de la matemática.* Argentina: Editorial Kapelusz.

Lenguaje Matemático

La generalización de conceptos matemáticos en la educación superior

Antonio Martínez Fonseca y Otilio B. Mederos Anoceto
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Cuba.
amfonseca@uclv.edu.cu

Resumen

En este trabajo se exponen de forma abreviada los resultados de una investigación desarrollada por los autores que parte de la determinación de las insuficiencias que se presentan en el estudio de algunos temas de la Matemática Superior como son los Dominios Numéricos y las Series Numéricas, se precisa que una de las causas que inciden en esta situación es que las operaciones conceptuales generalización – restricción que ofrece la Lógica no siempre se adecuan totalmente a lo que en Matemática se denomina como tal y a la no existencia de un procedimiento metodológico que oriente al profesor el trabajo con estas operaciones. Para resolver estas deficiencias se definen las operaciones generalización y restricción de conceptos de una forma más general y aplicable al estudio de la Matemática y se propone un procedimiento para su aplicación, se ejemplifica con el estudio de los Dominios Numéricos y las Series Numéricas y se someten los resultados a un grupo de expertos que ofrecen una valoración positiva de la investigación.

Introducción

Para la realización de este trabajo partimos de las deficiencias observadas en las clases que visitamos, como dirigente de diferentes facultades y departamentos de Matemática de la Universidad Pedagógica "Félix Varela" de Cuba durante seis cursos, en el trabajo de asesoría a la Dirección Municipal de Educación en Santa Clara, Cuba durante varios años y en las inspecciones nacionales del Ministerio de Educación a diferentes universidades pedagógicas del país en que participamos. Tuvimos en cuenta los criterios de nuestro seminario de investigación que desde el año 1996 se reúne periódicamente para debatir diferentes temas de Didáctica de la Matemática, las opiniones de un grupo de profesores de Matemática en el nivel superior que entrevistamos, la participación en más de veinte eventos científico metodológicos nacionales e internacionales y una profunda revisión de diversos materiales y normativas del trabajo de enseñanza de la Matemática en los distintos niveles de educación de nuestro país.

Como fundamento psicopedagógico se han utilizado las ideas de Vigotsky sobre los procesos de formación y desarrollo de conceptos (Vigotsky, L.S. (1999)) y las experiencias de Davidov sobre la generalización en la enseñanza (Davidov, V.V. (1988)) y otros seguidores de Vigotsky, nos guiamos por la teoría marxista leninista del conocimiento y aplicamos esas ideas a enseñanza de la Matemática en el nivel universitario donde a diferencia del nivel primario y medio (ver Ballester, S. y otros (1992)) hay vacíos didácticos importantes.

Teniendo en cuenta los resultados de las entrevistas, seminarios del grupo de investigación, el ejercicio de la profesión durante 15 años y la situación general de la Enseñanza de la Matemática, podemos afirmar la existencia del siguiente problema:

Problema: *"¿Qué procedimiento metodológico utilizar para la generalización de conceptos matemáticos que permita a los profesores resolver las insuficiencias que existen en las diferentes etapas de la elaboración de los conceptos de los temas Dominios Numéricos y Series en la Educación Superior?".*

Consideramos que el problema se puede resolver proporcionando herramientas adecuadas a los profesores en la dirección de la realización de la operación generalización y determinando procedimientos correctos que preparen el camino para la generalización y para el estudio de los conceptos después que se ha realizado esta operación, por lo que nuestro campo de acción es: *"El uso de la operación generalización de conceptos en el estudio de los Dominios Numéricos y las Series en la Educación Superior".*

Su objetivo es: *"Elaborar un procedimiento metodológico de trabajo con la operación generalización de conceptos que incluye una definición más rigurosa y con un dominio de aplicación más amplio, y la aplicación al estudio de los temas Dominios Numéricos y Series".*

Partiendo de estos elementos nos planteamos las tareas científicas siguientes:

- *Definir las operaciones generalización y restricción de conceptos y determinar un procedimiento general para su realización.*
- *Aplicar las definiciones y procedimientos propuestos al estudio de los dominios numéricos y la operación adición.*
- *Valorar mediante técnicas de trabajo con expertos la utilidad del procedimiento metodológico propuesto en el estudio de los temas Dominios Numéricos y Series.*

Como idea fundamental planteamos que:

"El procedimiento metodológico que proponemos sirve de base a la elaboración de los conceptos de los temas Dominios Numéricos y Series en la Educación Superior".

Como aporte teórico ofrecemos una estrategia de trabajo con los conceptos que incluye nuevas definiciones de las operaciones generalización y restricción de conceptos que complementan a las que tradicionalmente utiliza la lógica y se ajustan mejor al estudio de los conceptos de la Matemática y un procedimiento para su aplicación que, a diferencia de los trabajos de Davidov con los niños, tiene en cuenta el trabajo con las abstracciones matemáticas en la Educación Superior. En el orden práctico obtuvimos una estructuración lógica y metodológica de los temas dominios numéricos y series utilizando las técnicas propuestas del trabajo con conceptos, que puede ser parte de libros, folletos y otros materiales de estudio dada su novedad y que en general constituyen un aporte a la Didáctica de la Matemática y una monografía sobre este tema.

Para el cumplimiento de las tareas planteadas el método fundamental empleado es el teórico y dentro de éste el análisis y la síntesis del diagnóstico realizado, los métodos sistémico-estructural y dialéctico en la elaboración de la concepción general del procedimiento, hasta su aplicación práctica en el estudio de los temas Dominios Numéricos y Series. En la realización de este trabajo se ha aplicado la investigación empírica para la toma de opiniones y el análisis de la documentación para elaborar nuestras propuestas, así como el método matemático para procesamiento estadístico de los resultados de los instrumentos aplicados a los expertos.

Este trabajo está dirigido a los profesores de Matemática de los Centros de Educación

Superior y sus concepciones teóricas pueden ser desarrolladas fundamentalmente en el nivel de postgrado, no obstante consideramos que las ideas que se exponen sirven de guía y ayuda metodológica a todos los maestros y profesores que se dedican a la enseñanza de la Matemática.

Desarrollo

La operación generalización de conceptos:

Definido un concepto (E_1,C_1) a partir del concepto (E,C), si es posible encontrar un concepto (F,D) y un conjunto de propiedades D_1, tales que :

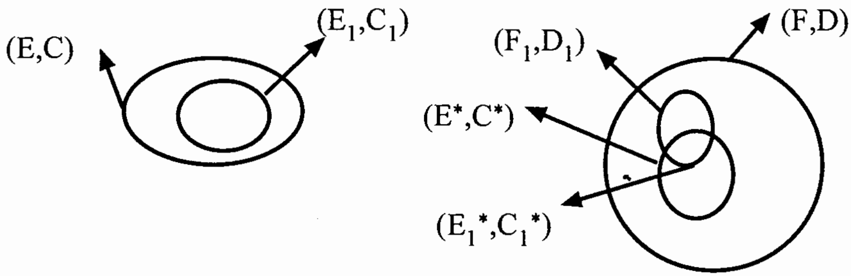
1- Existe un isomorfismo de conjuntos f entre E y un subconjunto propio E^* de F.

2- El traslado C^* de las propiedades C por f implican D; pero D no implica C^*.

3- D_1 implica a D , D no implica a D_1 y D_1 determina un subconjunto propio F_1 de F que tiene una intersección no vacía E con E^*.

4- La restricción Cde las propiedades D_1 a E^* coincide con el traslado de C_1 por f, C implica C^* y éste no implica a C

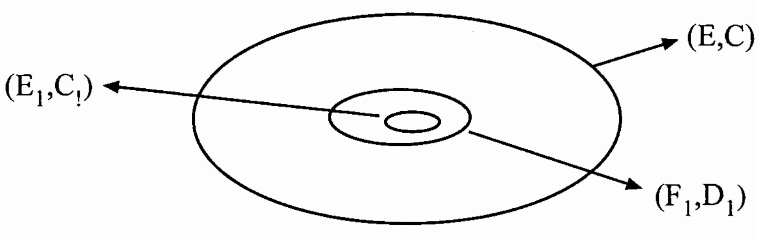
5- C_1 determina el subconjunto propio E_1 de E^* y E_1 isomorfo por f a E_1;



Entonces se dice que el concepto (F_1,D_1) es una generalización del concepto (E_1,C_1) este último se denomina concepto de partida de la generalización o concepto que se generaliza y el concepto (F_1,D_1) recibe el nombre de concepto generalizado.

Muy ligada a la operación generalización se encuentra su operación inversa, la restricción que definimos en la investigación de forma similar.

En no pocas situaciones es suficiente aplicar estas definiciones cuando (F, D) = (E, C); y consecuentemente, $(E^*,C^*) = (E, C)$, $(E_1, C_1) = (E_1, C_1)$ y f es la función identidad. En este caso, el diagrama anterior toma la forma:



y se dice que $(F_1 ; D_1)$ es una generalización que no excede los límites del concepto (E, C) que sirvió para definir (E_1, C_1). Este caso particular es el que se aplica por todos los profesores de Matemática y responde a la definición que se da en los textos de Lógica, (ver Guetmanova, A (1989))

Procedimiento para la aplicación correcta de las operaciones generalización y restricción de conceptos.

En el desarrollo de la Matemática para lograr una buena generalización de un concepto, en muchas ocasiones, es necesario realizar varias generalizaciones y restricciones para lograr el objetivo deseado. El procedimiento siguiente muestra un conjunto de pasos para realizar un proceso de generalizaciones y restricciones, y, lograr una generalización con determinadas características.

a) Realizar un correcto estudio del concepto que se generaliza. Para dar cumplimiento a este paso hay que definir científicamente el concepto de partida de la generalización, conocer la mayor cantidad posible de propiedades de dicho concepto y prepararlo para su generalización.
Este paso incluye el diagnóstico de la situación del alumno para conocer el estado real que presentan los conocimientos que sobre el concepto que se va a generalizar posee, consecuentemente es primordial comprobar si se conoce tanto su extensión como su contenido y en el caso de existir deficiencias promover acciones colectivas que favorezcan la actualización de esos contenidos. En otras palabras, se trata de la detección y creación de las zonas de desarrollo próximo para luego pasar a desarrollar la generalización.

b) Encontrar un concepto (F,D) y un conjunto de propiedades D1 que satisfagan las condiciones 1), 2), 3), 4) y 5).
Aquí es necesario promover una discusión de diferentes propuestas del concepto (F,D) y con ella elevar el desarrollo intelectual del alumno mediante el trabajo colectivo, con el profesor promoviendo el debate y llegar a la conclusión de cuál de las propuestas es la más adecuada acorde al contenido que se esté tratando.

c) Realizar un conjunto de generalizaciones y restricciones del concepto de partida. Cuando se quiere generalizar un concepto se persigue, desde el punto de vista lógico y metodológico, al menos uno de los objetivos siguientes:

   i) Lograr que el concepto generalizado mantenga un conjunto de propiedades del concepto de partida.
   ii) Ampliar lo más posible la extensión del concepto que se generaliza.

   Para el cumplimiento de estos dos objetivos se requiere de un conjunto de generalizaciones y restricciones. Cuando se hace una primera generalización es posible que el concepto generalizado no cumpla una determinada propiedad del concepto de partida. Si se quiere lograr otra generalización en la que se cumpla dicha propiedad se debe determinar la restricción más amplia de la primera generalización en la que se cumpla la mencionada propiedad y esto se logra imponiendo condiciones más fuertes a la primera generalización. Luego es necesario restringir la extensión de la primera generalización a partir de un fortalecimiento del conjunto de propiedades que la caracterizan. La determinación de una generalización con tal característica muchas veces requiere de un proceso, más o menos largo, de restricción – generalización. Para dar cumplimiento al segundo objetivo.

por lo general se requiere de un conjunto de generalizaciones.

Muchos conceptos matemáticos sirven de modelos conceptuales de conceptos de áreas no matemáticas. La generalización de un concepto matemático puede estar motivada por la necesidad de generalizar conceptos de otras áreas de las cuales él constituye un modelo. En este caso la cadena de generalizaciones – restricciones del concepto matemático está sujeta a las necesidades de áreas no matemáticas. Luego desde el punto de vista práctico, al generalizar un concepto matemático se persigue el objetivo siguiente:

iii) Obtener una generalización que sirva de modelo a una generalización de un concepto de un área no matemática.

El cumplimiento de este paso c) puede consumir mucho tiempo y puede estar permanentemente inconcluso, pues siempre cabe la posibilidad de mejorar uno de los objetivos anteriores.

Los pasos b) y c) constituyen el desarrollo de la generalización y por lo tanto el profesor debe pedir que se den varias opciones de conceptos a partir de los cuales se puede obtener una generalización del concepto con que se está trabajando, los alumnos deben proponer sus variantes y argumentar el porqué de su elección, deben debatir las propuestas y llegar a las conclusiones de cual tomar, teniendo presente el objetivo de la generalización y el contexto donde se imparta.

d) Utilizar un criterio de bondad para determinar la calidad de las generalizaciones hechas. Los criterios usuales, que se corresponden con los objetivos del paso c), son:

i) El cumplimiento por parte del concepto generalizado de un conjunto de propiedades del concepto de partida.

ii) La amplitud de la extensión del concepto generalizado. Para determinar cuál de las extensiones de dos generalizaciones de un concepto es la más amplia, es posible compararlas utilizando isomorfismos y la inclusión como orden, o utilizando la cardinalidad de las mismas.

iii) Su utilidad práctica en áreas no matemáticas.

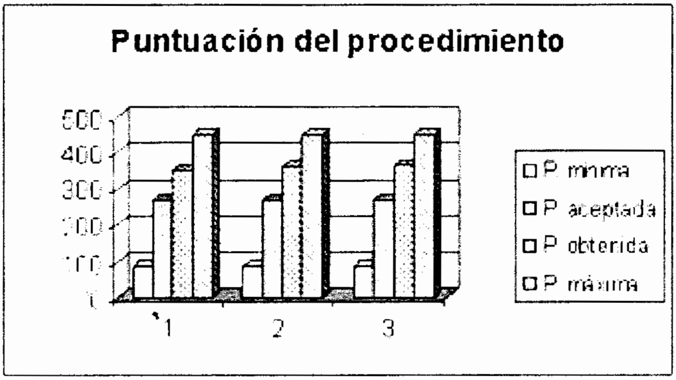
Este último paso d) constituye la evaluación del proceso realizado, aquí el profesor debe promover el debate de los resultados para que los alumnos valoren la calidad de las generalizaciones realizadas y en el caso de haberse hecho más de una resaltar la efectividad de cada una de ellas, en este paso tiene que lograrse además que los alumnos se cuestionen la conveniencia de nuevas generalizaciones o restricciones, o sea, hacer un análisis retrospectivo y perspectivo de las deducciones y valoraciones hechas, y además evaluar los resultados en el contexto de su trabajo.

Aplicación al estudio de los dominios numéricos y las series

En la investigación se expone la preparación matemática que hay que lograr en los profesores para que partiendo del estudio de los dominios numéricos puedan acometer los procesos de generalización – restricción que conducen al estudio de las series, se expone la forma de obtener las series numéricas como una generalización de las sumas finitas, así como otras generalizaciones y restricciones de estos conceptos y de los operadores suma e integración. Para ello se plantea que es necesario estudiar adecuadamente las sumas finitas, y preparar sus propiedades para su generalización.

Valoración del trabajo y conclusiones

Para la valoración del trabajo se utilizaron las ideas de Campistrous y Rizo (ver Campistrous, L. y Rizo, C. (1998)), sobre la utilización de escalas e indicadores. El análisis de los resultados demuestra que el procedimiento propuesto es superior a todo lo que los expertos conocían sobre el tema pues un simple cálculo de por ciento en cada uno de los indicadores nos ofrece que las opiniones favorables superan el 87,2%. No obstante con los resultados de los instrumentos aplicados se hizo un análisis estadístico que prueba la efectividad de nuestra propuesta como muestra el gráfico siguiente:



La realización de esta investigación nos ha permitido arribar a las siguientes conclusiones:

1) Las definiciones de las operaciones generalización y restricción de conceptos dadas, superan a las que tradicionalmente se han utilizado en la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior, según los resultados de las entrevistas a un grupo de profesores que recibieron estos contenidos y del método de expertos aplicado, e inciden favorablemente en la elaboración de los diferentes conceptos de los temas Dominios Numéricos y Series.

2) El estudio de los temas Dominios Numéricos y Series utilizando las definiciones y procedimientos propuestos supera a las formas tradicionales porque exige un profundo análisis de la preparación de las condiciones iniciales y un serio trabajo con las extensiones de los conceptos que se introducen, sin olvidar su contenido, para finalmente valorar los resultados del proceso desarrollado y sus implicaciones retrospectivas y perspectivas.

3) El procedimiento que se propone es un instrumento flexible que se puede adecuar al tema y condiciones específicas de la carrera y grupo con que se trabaje y representa una sucesión de indicaciones metodológicas que responden al modelo pedagógico histórico cultural.

Referencias bibliográficas

Ballester, S. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática I*. Ministerio de Educación. C. Habana.

Campistruos, L & Rizo, C. (1998) *Indicadores e Investigación Educativa.* (Material en elaboración). Cuba.

Davidov, V. (1981) *Tipos de generalización en la enseñanza*. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.

Guetmanova, A. (1989) *Lógica*. Editorial Progreso. Moscú.

Vigotsky , S. (1999) *Pensamiento y Lenguaje.* Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.

Visualización

La importancia de la visualización en la resolución de problemas de Cálculo Numérico

Víctor Martínez Luaces y Fernando Martínez Luaces
Universidad de la República. Montevideo. Uruguay.
victorml@fing.edu.uy   f.martnez@lycos.com

Resumen

El Cálculo Numérico, en las carreras químicas tiene diversos usos; en particular en el presente trabajo nos concentraremos en la resolución de ecuaciones algebraicas. Esta elección se fundamenta en la gran aplicabilidad del tema a la determinación del pH en ciertas soluciones de ácidos débiles y sus respectivas sales. De hecho, cuando los estudiantes intentan aplicar los métodos numéricos para la determinación de un pH en el laboratorio de Química Analítica, lo que obtienen, en general, no es correcto, y frecuentemente ni siquiera tiene sentido químico.

En este tipo de problemas, la visualización y experimentación tiene un papel fundamental en la comprensión, la resolución y principalmente, en el logro de aprendizajes significativos. Esta forma de trabajo requiere de cierto equipamiento informático y de un software apropiado.

En este artículo se analiza el problema mencionado, se presentan algunos resultados y se formulan conclusiones.

Introducción

La mayoría de los trabajos de Matemática Educativa en el nivel superior, están dirigidos a los cursos de Análisis Matemático, Álgebra, Estadística o Ecuaciones Diferenciales. Otras áreas de la Matemática, como es el caso del Cálculo Numérico, no son tan frecuentadas por los investigadores. Por ejemplo, en RELIME según el informe presentado en Julio de 2001 (Farfán, R. M., 2001), se han publicado ya 39 artículos, de los cuales ninguno trata específicamente temas de Cálculo Numérico. No obstante, se trata de una materia fundamental en diversas ramas de la Ingeniería y su aplicabilidad se ha ido incrementando a causa del desarrollo tecnológico durante las últimas décadas. En efecto, el uso generalizado de computadoras y calculadoras programables ha propiciado una utilización mucho más amplia de dicha rama de la Matemática.

El problema mencionado (la determinación del pH en ciertas soluciones) tiene interés educativo, ya que proporciona una motivación intrínseca para el dictado de ciertos temas de Cálculo Numérico (Martínez Luaces, V., 2001). En efecto, el mismo permite analizar varios temas: (a) problemas de convergencia, (b) existencia de varias raíces de las cuales sólo una es químicamente correcta, (c) problemas de redondeo, y (d) la elección de él o los puntos iniciales del proceso iterativo (Martínez Luaces, V. & Guineo, G., 2002).

En principio, la parte química no presenta mayores dificultades. En efecto: Química Analítica es una de las primeras materias de las carreras involucradas y las ecuaciones para hallar el pH son relativamente fáciles de deducir y entender para un estudiante de Química.

Los pre-requisitos matemáticos tampoco deberían ser un obstáculo grave, ya que son muy pocos, son sencillos y además conocidos por el estudiante. Por ejemplo: el método de bisección no es más que una aplicación obvia del Teorema de Bolzano (Burden, R. L. & Faire, J. D., 1985). Análogamente, el Método de la Secante y Regula Falsi, simplemente recurren a la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos del plano (Burden, R. L. & Faire, J. D., 1985). Como último ejemplo, el Método de Newton-Raphson sólo requiere conocer como hallar la tangente a una curva por determinado punto (Burden, R. L. & Faire, J. D., 1985).

No debería haber, entonces, mayores dificultades químicas ni matemáticas, sin embargo, cuando el estudiante intenta resolver solo el problema, en general no lo logra.

Para resolver esta dificultad resultan particularmente adecuadas las ideas de Vigotsky. Este autor menciona dos niveles de desarrollo: el nivel de desarrollo actual y el nivel de desarrollo potencial. Más aún, define la "Zona de Desarrollo Próximo" (ZDP) como "la distancia entre el nivel de desarrollo actual determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces" (Vygotsky, L.S., 1978). Pues bien, esta es la situación en este caso, ya que en principio los estudiantes tienen los conocimientos necesarios (químicos y matemáticos), pero por sí solos no logran el objetivo propuesto. Por tanto, para crear la ZDP, el docente debe actuar como un facilitador. Es decir, en lugar de dar instrucciones directas, debe guiar a los estudiantes en la exploración y experimentación.

En el presente trabajo, hemos escogido SCILAB (Gómez, C. et al, 1999), que permite no sólo experimentar numéricamente, sino además visualizar dentro del mismo entorno, donde están y cuáles son las dificultades.

Desarrollo

En los cursos pre-universitarios de Química se enseña a realizar cálculos de pH en base a fórmulas sencillas, pero solamente aproximadas (Day Jr. R. & Underwood, A.,1980) Más aún, en ciertos casos, esas fórmulas dan resultados muy pobres (Labandera, F. & Martínez Luaces, V, 1994) y es necesario sustituirlas por otras mejores, basadas en la regla de electroneutralidad (Day Jr. R. & Underwood, A.,1980). Por ejemplo, para un ácido débil monoprótico, la electroneutralidad se traduce en la siguiente fórmula:

$$\frac{V_b C_b}{V_a + V_b} + \left[H^+\right] = \frac{K_w}{\left[H^+\right]} + \frac{C_a V_a}{(V_a + V_b)\left(1 + \frac{\left[H^+\right]}{K_a}\right)}$$

(Labandera, F., Martínez Luaces, V, 1994)

donde la incógnita es $[H^+]$ (recuérdese que el pH es – log $[H^+]$). Realizando operaciones sencillas (común denominador, pasaje de términos; etc), esta ecuación se lleva a la forma $f([H^+]) = 0$, siendo f un polinomio de grado 3.

Como es sabido, la ecuación polinómica de 3º grado admite una solución exacta, por radicales (Rey Pastor, J. Pi Calleja, P., Trejo, 1952). Sin embargo, esa posibilidad -de resolver el problema en forma algebraica- no es generalizable. Por ejemplo, si se disuelven algunas sales (como es el caso del Na_2HPO_4, fosfato ácido disódico) en agua, la ecuación pasa a ser de mayor grado. Concretamente, para el Na_2HPO_4, la electroneutralidad conduce a la fórmula (Martínez Luaces, V. y Guineo, G., en prensa):

$$\left[H^+\right]+2.C_s=\frac{K_w}{\left[H^+\right]}+\frac{C_s.\left(3+\frac{2.\left[H^+\right]}{K_3}+\frac{\left[H^+\right]}{K_2.K_3}\right)}{1+\frac{\left[H^+\right]}{K_3}+\frac{\left[H^+\right]^2}{K_2.K_3}+\frac{\left[H^+\right]^3}{K_1.K_2.K_3}}$$

Mediante operaciones sencillas, también se lleva a la forma $f([H^+])=0$, siendo f un polinomio de grado 5. Se sabe que este tipo de ecuación no es soluble mediante radicales, resultado muy conocido, debido a N.H. Abel (Rey Pastor, J. Pi Calleja, P., Trejo, 1952)

Todo lo anterior, sugiere la búsqueda de soluciones numéricas, al menos mediante los métodos más comunes: iteración funcional, método de Newton-Raphson, bisección, secante y Regula Falsi (Burden, R. L., Faire, J. D., 1985). Desde el punto de vista educativo, las fórmulas químicas anteriormente mencionadas sólo utilizan dos conceptos muy elementales (electroneutralidad y constantes de equilibrio), que son conocidos por los estudiantes y fáciles de entender, aunque no tan fáciles de aplicar en la práctica. En cuanto a la parte matemática, el método de iteración funcional solo requiere saber despejar [H+], Newton-Raphson sólo utiliza el concepto de derivada y tangente a una curva, para bisección basta conocer el Teorema de Bolzano y para los dos últimos (secante y Regula Falsi), sólo se necesita la ecuación de la recta que pasa por dos puntos del plano (Burden, R. L., Faire, J. D., 1985). En el Uruguay, todos esos temas -tanto los de Química como los de Matemáticas- se ven en los cursos pre-universitarios de Enseñanza Media y se puede considerar que son parte del "nivel de desarrollo actual" del estudiante en los primeros años de las carreras químicas.

A pesar de que todos estos temas son bien conocidos por los estudiantes, cuando éstos intentan aplicarlos (y calcular un pH en el laboratorio), obtienen resultados erróneos. Más aún, muchas veces obtienen resultados que ni siquiera tienen sentido químico.

Estos cálculos del pH están en el nivel de desarrollo potencial, al que los alumnos pueden llegar con la ayuda de un experto y con el equipamiento adecuado (computadora o calculadora, software apropiado; etc).

Veremos entonces como crear esa ZDP que les permita llegar a resolver satisfactoriamente los problemas antes mencionados.

a) Iteración Funcional y Newton-Raphson

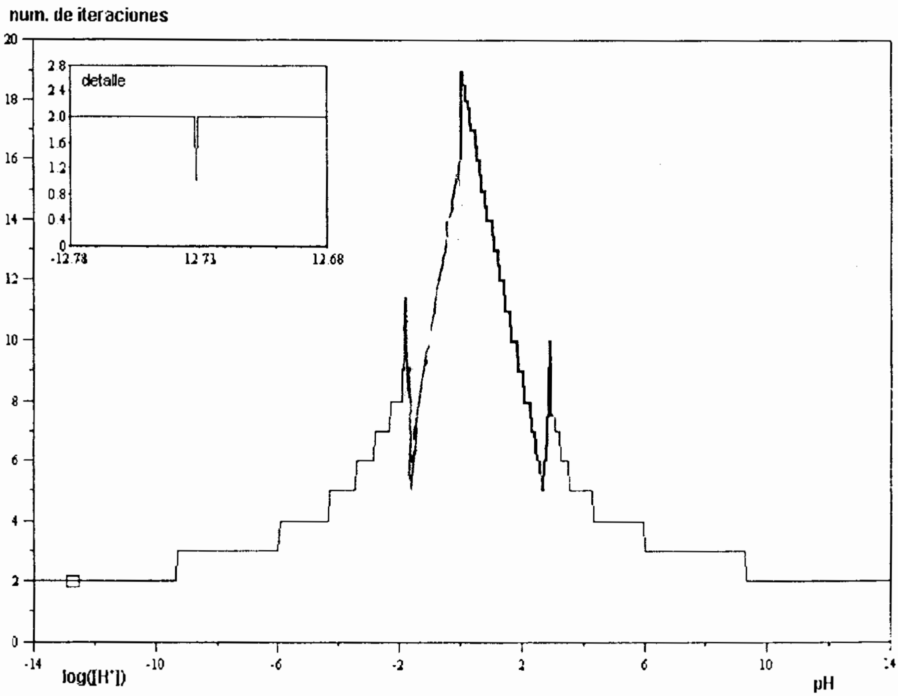
Por ejemplo, en el caso del ácido débil monoprótico, es muy fácil despejar $[H^+]$ del primer término, siendo entonces:

$$[H^+] = \frac{K_w}{[H^+]} + \frac{C_a \cdot V_a}{(V_a + V_b)\cdot\left(1 + \frac{[H^+]}{K_a}\right)} - \frac{V_b \cdot C_b}{V_a + V_b}$$

que es de la forma $[H^+] = g([H^+])$ y que es todo lo que se necesita para utilizar los métodos de punto fijo, o iteración funcional (Burden, R. L. & Faire, J. D., 1985). Cabe observar que esta operación es igualmente sencilla en el otro caso presentado (el de la ecuación de quinto grado).

Para el método de Newton-Raphson (Burden, R. L., Faire, J. D., 1985), basta trabajar con la forma polinómica de las ecuaciones, i.e . f([H+]) = 0 donde el grado de f dependerá de cuál es el problema. En cualquiera de los dos métodos se parte de una aproximación inicial [H+] , que da origen a una proceso iterativo, que puede converger en principio a distintas raíces y con distintas velocidades de convergencia (Martínez Luaces, V. & Guineo Cobs, G., 2002).

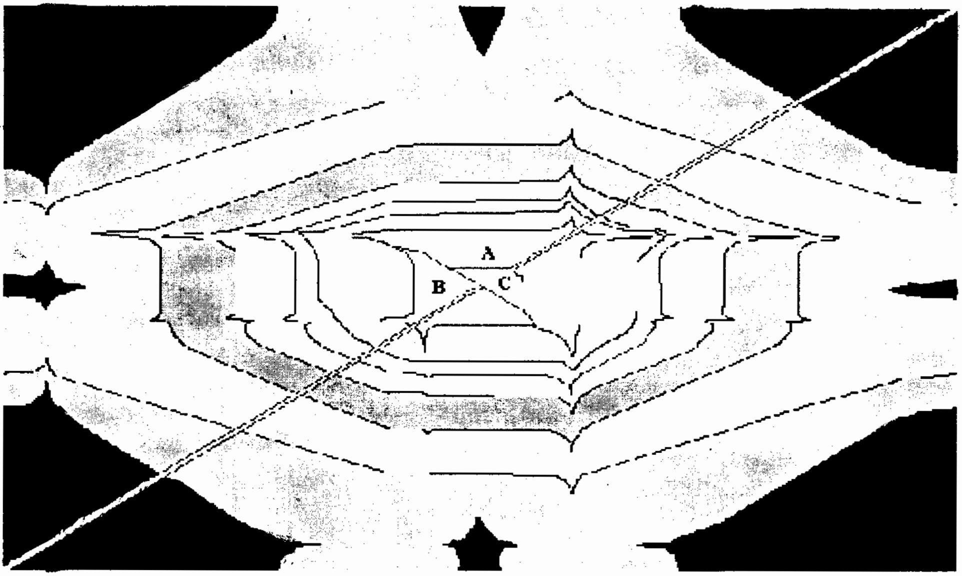
Una forma de visualizar lo anterior es mediante el gráfico siguiente:



En este gráfico pueden verse los distintos trazos correspondientes a distintas raíces (la que tiene sentido químico es la línea de mayor espesor) y *n* es el número de iteraciones hasta parar el proceso. Como criterio para parar el proceso se tomó el que dos iteraciones sucesivas difieran en 0.01 o menos, ya que eso mismo es lo que hacen en general los estudiantes (el hecho de tomar 0.01 como tolerancia en el pH es un tema químico (Kolthoff, I.; Sandell, E., 1943), no matemático).

b) Bisección, Secante y Regula Falsi

En los tres métodos se parte no de una, sino de dos aproximaciones iniciales: $[H^+]_1$ y $[H^+]_2$, a partir de los cuales se obtienen los demás iterandos (Burden, R. L. & Faire, J. D., 1985). Por lo tanto, el valor de *n* depende del par ($[H^+]_1$ y $[H^+]_2$), por lo que la visualización en este caso la realizamos con un gráfico donde se representa *n* en función de $[H^+]_1$ y $[H^+]_2$, como el siguiente:



La zona marcada con "A" corresponde a la única raíz con sentido químico, la zona "B" corresponde a otra raíz, la "C" a valores para los que no hay convergencia, y el resto del mapa converge a la tercera raíz, correspondiendo los tonos más claros a mayor cantidad de iteraciones.

Tanto el gráfico que se presentó como ejemplo (Newton – Raphson) como los gráficos correspondientes a los otros métodos se realizaron mediante programas sencillos en SCILAB (Gómez, C. et al, 1999) que realizan los cálculos y luego los grafican en el mismo entorno, por lo cual resultó muy apropiado para este fin.

Desde el punto de vista educativo, creemos que si bien es muy importante que los docentes dispongan y conozcan estos gráficos, conviene que no los presenten a priori a los estudiantes como un asunto resuelto. Por el contrario, la idea es que los propios estudiantes exploren diversos valores, prueben con los diferentes métodos propuestos, vean por sí mismos cuáles son los problemas de redondeo; etc. Toda esta exploración deberá contar con la ayuda del docente (o un compañero más avanzado) y programas sencillos para automatizar la aplicación de los algoritmos y acelerar el cálculo.

Como etapa final, se puede considerar conveniente que observen gráficos como los mencionados anteriormente, que les den una visión global del problema y las dificultades de la convergencia para ciertos valores, o la obtención de otros sin sentido químico. Esto en principio, confirmaría los resultados parciales obtenidos por los estudiantes. En efecto, para obtener una visión global, es necesario construir un programa que admita el ingreso de datos, realice los cálculos para todos los valores posibles de acuerdo al método de aproximación elegido y luego los grafique (con diferentes colores y tonalidades) y todo esto está fuera del alcance de un estudiante común de Química cuyos conocimientos de computación son más bien elementales.

Lo importante, entonces, es crear la ZDP a través de problemas reales, que conlleven una motivación intrínseca en el estudiantado.

Resultados

Estas actividades, basadas en la resolución de problemas provenientes de otras asignaturas, fueron instrumentadas en primera instancia para los cursos de segundo año: "Computación y Cálculo Numérico", "Estadística" y "Ecuaciones Diferenciales".

Los cursos de primer año ("Análisis Matemático I", "Álgebra" y "Análisis Matemático II") quedaron para una segunda etapa, que todavía no se ha empezando a implementar, por problemas internos del departamento.

Esta situación de transición nos permite obtener algunos resultados, como veremos a continuación. En efecto, las evaluaciones docentes muestran diferencias interesantes entre los docentes de primer y segundo año, en las cuales inciden notablemente las diferencias entre unos cursos y otros.

Antes de analizar las diferencias observadas, conviene describir brevemente como se realizan las mencionadas evaluaciones docentes. En primer lugar, cabe aclarar que los formularios que se utilizan contienen 25 preguntas y que los mismos se responden en forma anónima y se procesan utilizando un escáner, por funcionarios no docentes, asegurando el anonimato.

Los resultados se le comunican al docente (y al responsable del servicio) por medio de un librillo con las respuestas de la clase a cada pregunta. A su vez, esas respuestas son promediadas sobre todas la clase y de esto resulta un puntaje de cero a diez para cada una de las 25 preguntas.

En un trabajo anterior (Gómez A. & Martínez Luaces, V., 2002) se procesó toda esta información utilizando técnicas de Análisis Multivariado. En particular, se definió una variable denominada "Aplicaciones", que consistía en un vector de R^2, con los guarismos obtenidos por cada docente (en la escala mencionada de cero a diez), a dos preguntas concretas, a saber:

Pregunta 11: *Establece conexiones con los contenidos de otras asignaturas.*

Pregunta 12: *Da a la asignatura un enfoque aplicado, ofreciendo ejemplos y aplicaciones a la vida real y profesional.*

Con esa variable "Aplicaciones" y con los 12 docentes involucrados se hizo un Análisis de Clusters (Gómez A. & Martínez Luaces, V., 2002), resultando un grupo de 5 docentes claramente distanciado del resto por sus mejores resultados. De ellos, sólo uno trabaja en los cursos de primer año; los otros cuatro, son los responsables de los cursos de Ecuaciones Diferenciales, Estadística y de los módulos de Computación y de Cálculo Numérico.

Más aún, se hicieron clusters con las 25 preguntas ("cluster general") y otro con 23 preguntas, omitiendo especialmente la 11 y la 12 ("cluster sin aplicaciones"). Es interesante comprobar que los docentes que ocupan el 2° y 3° lugar en el "cluster sin aplicaciones", aparecen varios puestos más abajo en el "cluster general" e inversamente, el docente que ocupa el 2° lugar en el "cluster general" aparece varios puestos más abajo cuando no se tienen en cuenta las aplicaciones.

En otras palabras, pese a ser solamente dos preguntas en 25, su incidencia es enorme, a tal punto que docentes muy buenos pasan a un nivel medio y viceversa, por efecto de dichas preguntas (Gómez A. y Martínez Luaces, V., 2002).

Como si esto no bastara, se vio en otro trabajo la importancia que tienen los problemas de otras asignaturas y de la vida real en algo tan fundamental en el estudiante como lo es la motivación (Martínez Luaces, V., 1998).

Las motivaciones pueden ser extrínsecas o intrínsecas, es decir que pueden provenir del exterior (ej.: aprobar un examen) o del interior (el propio interés por resolver un problema). En un buen curso se debe procurar que los factores intrínsecos estén en mayoría (González, B. E., 2001) y en este sentido la modelación y resolución de los problemas reales es un elemento fundamental. Esto último ha sido comprobado y analizado in extenso en el trabajo ya mencionado (Martínez Luaces, V., 1998).

Conclusiones

El ejemplo analizado proviene de un problema real que los alumnos deben enfrentar en otra asignatura. Este hecho por si solo, ya genera una actitud favorable y provoca motivaciones intrínsecas, al no tratarse de un problema matemático, sino de un problema de sus propias carreras.

El problema anterior tiene realmente muy pocos pre-requisitos, tanto químicos como matemáticos, ya que los conocimientos requeridos están en el "nivel de desarrollo actual" de los estudiantes. Sin embargo, la imposibilidad de resolver solos el problema, lo sitúa en el "nivel de desarrollo potencial", al cual pueden acceder con la ayuda de un experto. Se crea entonces una ZDP, en la cual el experto no actúa a través de clases magistrales, sino como orientador. En todo ello, la visualización y la experimentación con la computadora juegan un papel esencial.

El estudiante no se limita a tomar apuntes, sino que él mismo va explorando y visualizando sobre la marcha las limitaciones y ventajas de los distintos algoritmos y su posible aplicación al problema químico propuesto. Como resultado final, todo esto conduce a las motivaciones intrínsecas de los estudiantes y al logro de aprendizajes significativos.

Referencias bibliográficas

Burden, R. & Faire, J. (1985). *Análisis Numérico.* México: Grupo Editorial Iberoamerica, S. A ISBN 968 - 7270 - 09 - 8.

Day , R. & Underwood, A. (1980). *Quantitative Analysis.* New Jeresey: Prentice Hall

Farfán, R. (2001). *Informe de RELIME.*

Gómez, A. & Martínez, V.(2002). *Evaluación docente utilizando Análisis Multivariado,* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 15.2

Gómez, C. (1999). *Engineering and Scientific computing with SCILAB*, USA: Birkhäuser. SCILAB 2.6 © INRIA.

González, B. (2001). *La preparación del profesor para la utilización de la modelación matemática en el proceso de enseñanza – aprendizaje* Tesis para optar por el grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas. Santa Clara – Cuba.

Kolthoff, I. & Sandell, E. (1943), *Textbook of Quantitative Inorganic Analysis*, New York: Mac Millan.

Labandera, F. & Martínez, V. (1994), *pH de ácidos débiles monopróticos como función de la concentración y del pKa: Un modelo simple y de bajo costo.* Anuario Latinoamericano de Química 7, 241 – 245. ISSN 0328 – 087X

Martínez, V. & Guineo, G.(2002). *Numerical Calculus and Analytical Chemistry: An example of interdisciplinary teaching.* CD: Proceedings ICTM2. Wiley and Sons Ed.

Martínez, V.(1998), *Matemática como asignatura de servicio: algunas conclusiones basadas en una evaluación docente*, Números. Revista de didáctica de matemáticas 36. 65 – 67.

Martínez, V.(2001), *Enseñanza de matemáticas en carreras químicas desde un enfoque aplicado y motivador.* Números. Revista de didáctica de las matemáticas 45.43-52.

Pastor, J. & Pi Calleja, P. & Trejo, (1952). *Análisis Matemático,* volumen I, Buenos Aires: Kapelusz.

Vigotsky, L. (1978). *Mind in society. The Development of Higher Psychological Processes*, USA: Harvard University Press.

Visualización y pensamiento matemático

Ricardo Cantoral y Gisela Montiel
Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
rcantor@mail.cinvestav.mx gmontiel@mail.cinvestav.mx

Resumen

La propuesta didáctica que mostramos en este curso fue desarrollada en un libro dirigido a profesores y continuada en un artículo más en profundidad (Cantoral y Montiel, 2001 y 2003) Dicha propuesta nace en una aproximación teórica de naturaleza sistémica que denominamos *socioepistemología*. En términos generales, la propuesta trata de una forma particular de entender a la visualización de las funciones, aunque en este escrito nos ocuparemos en particular y sólo como un ejemplo, de la construcción del polinomio de interpolación de Lagrange mediante estrategias de visualización. No abordamos aspectos del tratamiento curricular de los polinomios de Lagrange y de las concepciones que los alumnos desarrollan en su paso por la universidad, sino que presentamos una propuesta didáctica basada en la visualización y en el desarrollo del pensamiento matemático del concepto de función. En nuestra opinión, esta propuesta favorece la evolución de las concepciones entre los alumnos.

Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático

De inicio, señalamos que habremos de entender a la visualización no como el simple acto de ver, pues visualizar una función, por ejemplo, no significa solamente verla, mirar o contemplar su gráfica, de hecho es posible visualizarla sin verla. Así mismo, entenderemos que el pensamiento matemático no se reduce al pensar cuando se está ante una actividad matemática. En un sentido más amplio, entendemos que la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales, digamos que se requiere del ámbito de lo gestual. Los gestos, sostenemos, anteceden a la palabra y a la representación. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado, pero sobre todo, precisa de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados que incluyan lo gestual.

Habremos de decir empero, que cada vez más la visualización se ha convertido en un tópico importante de las diversas escuelas del pensamiento relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Principalmente se le ubica como componente de los procesos mentales que tienen lugar en la actividad matemática, aunque se tiene claro que al relacionarse estrechamente con la percepción se presenta también en diversas situaciones de la vida cotidiana. En este sentido, nos parece que no existe una aproximación teórica dominante en el terreno de la visualización y que las diferentes posturas coinciden en que visualizar no se reduce al acto de ver las diversas representaciones de un objeto matemático.

Para el desarrollo de la matemática misma, como un cuerpo teórico autónomo, es fundamental la visualización pues lo que hoy vemos en la obra matemática puede expresarse en formas analíticas de todos los niveles de complejidad, aunque en sus orígenes esté impregnado de abstracciones y visualizaciones. De Guzmán (1996) señala, por ejemplo, que muchas de las formas de visualización que se experimentan son un verdadero camino de codificación y descodificación que está inmerso en todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma larga historia de la matemática. Esto implica que la visualización sea un proceso que hay que aprender con las personas a nuestro alrededor y en la inmersión e inculturación en el tejido histórico y social de la matemática. La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta.

Finalmente, a partir de la perspectiva desarrollada por Piaget al explorar la concepción de espacio que los sujetos desarrollan, se describe a las actividades de visualización, como actividades representacionales del espacio cartesiano. La imagen mental del espacio cartesiano con las que los jóvenes actúan, se forma mediante una reconstrucción activa de los objetos a un nivel simbólico, donde las representaciones mentales no son solamente evocadas por la memoria. En este sentido las investigaciones que hemos desarrollado, han estado interesadas en las transformaciones mentales que van del espacio real al espacio de las representaciones del estudiante, centrando la atención en aquellos atributos de los objetos reales que son invariantes bajo esas transformaciones y cómo ellos cambian con el curso escolar. De acuerdo a esta teoría, las primeras transformaciones del sujeto son aquellas que conservan los atributos topológicos de los objetos tales como interior o exterior de un conjunto, frontera de un conjunto, conexidad o apertura y cerradura de curvas. Sólo después, el sujeto está capacitado para transferir a su espacio representacional atributos euclidianos de los objetos, tales como longitud de las líneas o tamaño de los ángulos. Es ahí donde se presentan ideas sobre la conservación de la longitud, el área o el volumen de los objetos geométricos. En consecuencia, creemos que es entonces donde se construye un verdadero escenario de visualización para las funciones reales de variable real.

Los polinomios de Lagrange: Una exploración visual

En los textos de análisis numérico se define al polinomio de interpolación de Lagrange, correspondiente a $n+1$ valores dados, como aquella función polinomial de grado a lo más n que toma sobre los $n+1$ diferentes valores numéricos $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, los $n + 1$ valores dados $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$. La explicación que suele hacerse para obtener dicho polinomio atiende naturalmente a la propia orientación teórica del autor. En algunos textos consultados se propone a un polinomio interpolador como una expresión formal $f(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2+ ...+a_nx^n$, en la que los coeficientes $a_0,...., a_n$ quedan determinados por las condiciones del problema, esto es, se pide que satisfagan al siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n=y_0$$

$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n=y_1$$

$$\ldots$$

$$a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n=y_n$$

Como se puede constatar en los libros de análisis numérico, la resolución de este problema, produce como resultado la expresión funcional siguiente, a la cual se le asigna el nombre de polinomio de interpolación de Lagrange, o simplemente polinomio de Lagrange:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

La manera en que los autores argumentan sobre el significado de esta última expresión difiere según la orientación teórica de la que partan y naturalmente de la concepción que tengan de lo que es la enseñanza. Algunos por ejemplo, inician con el estudio de casos particulares, mientras que otros tratan directamente con el teorema de existencia y unicidad del polinomio de Lagrange, en tal caso, suelen considerar a los monomios $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ como base canónica del espacio de polinomios. Algunos otros, se ocupan más bien de construir al polinomio de Lagrange a partir del estudio de un caso simple, por ejemplo, piden encontrar un polinomio de tercer grado que satisfaga un conjunto particular de cuatro puntos dados. Otros más en cambio, siguen una ruta ilustrativa, pues enuncian el teorema y diseñan un polinomio particular que cumple con las hipótesis. En esos casos, los autores no suelen utilizar representaciones gráficas ni las explicaciones basadas en la visualización.

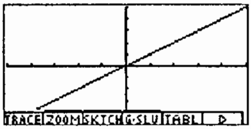
Una opción más, que desarrollaremos en este artículo, consiste en proponer un método explicativo que parta de un problema concreto, pero que use a la visualización como vehículo para construir, por ejemplo, una curva de grado conocido que pase por un conjunto dado de puntos en el plano apoyándonos principalmente en las posibilidades que ofrecen las gesticulaciones de giros, flexiones, desplazamientos, elongaciones, contracciones, traslaciones, evaluaciones a partir de gráficas elementales conocidas por los alumnos. Nuestra estrategia consistirá entonces en construir al polinomio de interpolación de Lagrange inductivamente con base en la visualización, partiremos de una serie de hechos conocidos, tanto de la teoría de ecuaciones como del álgebra básica. Además usaremos un cierto principio de continuidad de las familias de gráficas de funciones polinomiales, que consiste en afirmar que ellas cubren al plano. Por ejemplo, dado una serie de puntos con diferente abscisa sobre el plano cartesiano, existe al menos una función polinomial cuya gráfica pasa por todos ellos. Dichas gráficas son pues flexibles.

Particularmente usaremos esos principios en esta presentación y veremos cómo al apoyarnos en la visualización podremos obtener inductivamente al polinomio de interpolación Lagrange de una manera novedosa.

Una secuencia didáctica particular

Para efectos de este documento mostraremos en detalle el caso del polinomio lineal de Lagrange, destacando la posibilidad de tomar este caso para continuar con el polinomio cuadrático, posteriormente el cúbico, hasta el polinomio de grado n.

Consideremos a la función dada por $f(x)=x$ como una "función primitiva". Como sabemos, su gráfica (Pantalla 1) es una recta que pasa por el punto (0, 0).



Pantalla 1

¿Cómo podremos tener una recta que pase por el punto (4, 0) a partir de la gráfica anterior? (Figura 1).

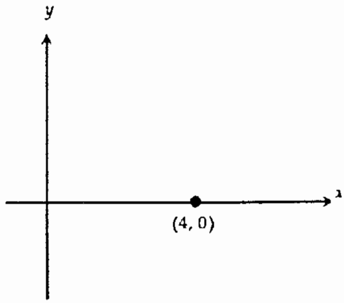
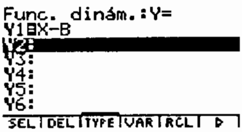
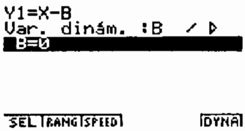


Figura 1

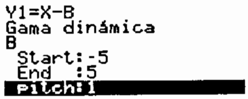
Algunas calculadoras, como la Casio modelo Algebra FX 2.0 (Plus), tienen la posibilidad de graficar funciones en forma dinámica, cambiando sus parámetros. Para el caso de nuestra secuencia, definimos en la calculadora la función Y1=x-B (Pantalla 2) para variar el valor del parámetro B (pantalla 3), cambiando de B=-5 hasta B=5, variando de uno en uno (Pantalla 4)



Pantalla 2



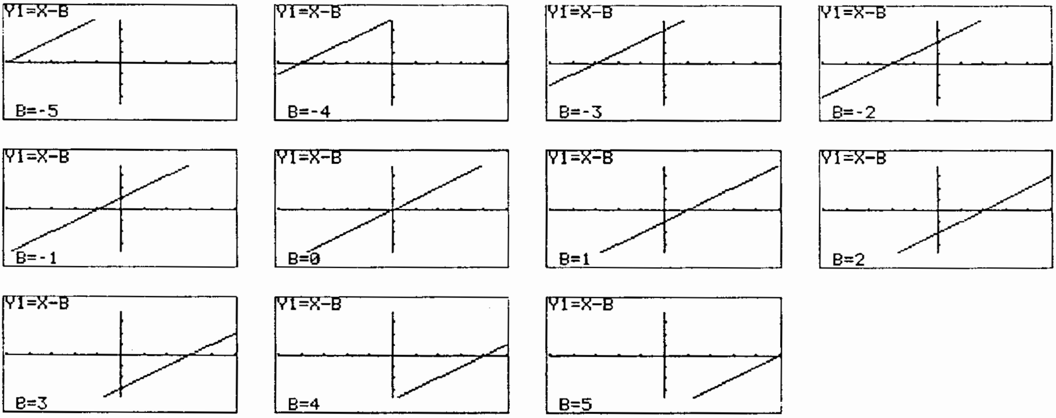
Pantalla 3



Pantalla 4

Para percibir las gráficas y sus características, definamos la siguiente ventana

La calculadora mostrará entonces, mediante una sucesión de gráficas con movimiento, el efecto del parámetro B.



Una vez que se percibe el cambio de posición de la recta, es factible contestar a la pregunta ¿cuál es la recta que pasa por el punto (4, 0)? Cabe mencionar que podemos interpretar la transformación $f(xB)=x-B$ de dos maneras: como la traslación o *movimiento* de la recta $f(x)=x$, B unidades hacia arriba o B unidades hacia la izquierda (si el parámetro B es negativo) o B unidades hacia abajo o a hacia la derecha (si el parámetro B es positivo)

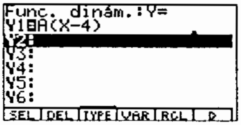
Lo importante de percibir el efecto en un movimiento de esta naturaleza[1] es la posibilidad de explicarlo con un lenguaje común utilizando movimientos corporales que permitan la apropiación de ciertas nociones (familia de funciones, transformaciones lineales, entre otras) Además, es importante reflexionar sobre las propiedades que cambian y aquellas que se mantienen en la gráfica. Por ejemplo, el punto donde la recta intersecta con el eje x cambia, no así la forma como *cruza* o *corta* dicho eje. De igual forma se hace una reflexión respecto del *cruce* o *corte* con el eje y.

Ahora bien, apoyándonos en el resultado anterior, ¿cómo obtendríamos la recta que pase por los puntos (4, 0) y (6, 4)?

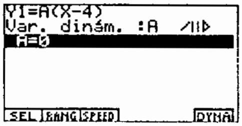
Es claro que esta pregunta se puede resolver directamente mediante la conocida fórmula para la ecuación de la recta $(y-y_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, ya que disponemos de las coordenadas de dos puntos. Sin embargo la intención de este diseño es la de utilizar sólo estrategias visuales, así que debemos emplear estrategias que permitan rotar una recta que pasa por el punto (4, 0) de manera que pase también por el punto (6, 4), debemos imaginar que "tomamos la recta con las manos y la giramos, apoyada en el punto. (4, 0), hasta que toque al punto (6, 4)". Para llevar a cabo esto mediante el control que da el instrumento tecnológico, proponemos una segunda actividad con la calculadora.

[1] El movimiento puede ser continuo o en pausas (manipulado por el alumno) para un análisis a global o puntual.

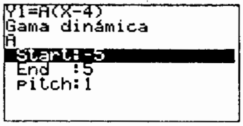
Definimos ahora la función Y1$A(x$-4) –Pantalla 6-, para variar el valor del parámetro A (Pantalla 7), cambiando de A=-5 hasta A=5, variando de uno en uno (Pantalla 8), en una ventana como la que muestra la Pantalla 9.



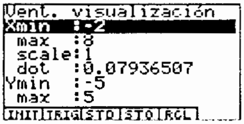
Pantalla 6



Pantalla 7

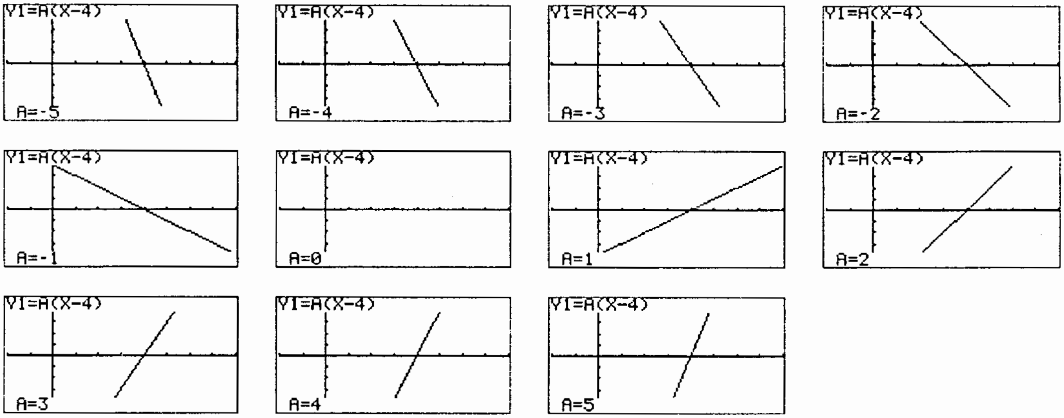


Pantalla 8



Pantalla 9

La calculadora mostrará entonces, mediante una sucesión de gráficas con movimiento, el efecto del parámetro A.



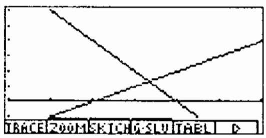
Observemos que al escribir Y1$A(x$-4) mantenemos fijo el punto (4, 0) y giramos la recta sobre ese punto como pivote. Es decir, cuando x4 el producto $A(x$-4) será cero sin importar el valor de A. Esto es, tomamos en cuenta la prioridad de operaciones Y1$A(x$-4) que nos dice: resta 4 unidades a x y luego multiplica por A, lo que gráficamente se traduce en *desplazar* o *mover* cuatro unidades a la derecha (o hacia abajo) a la recta Y1=x y después *gírala* según el valor de A. Si $-1 < A < 1$ la recta se *acerca* al eje x, mientras que si $A < -1$ o $A > 1$, la recta se *acerca* al eje y. Si definimos en cambio a la función Y1=Ax-4, estaríamos girando a la recta Y1=x según A y posteriormente desplazándola 4 unidades (el proceso inverso).

Pero aún no se contesta la pregunta ¿qué recta pasa por los puntos (4, 0) y (6, 4)?, sabemos sin embargo que la fórmula general de la recta que pasa por el (4, 0) y que tiene la forma $Y1=A(x\text{-}4)$ permite que al ser $x=6$, $y=4$ se sustituyen los valores de forma que obtenemos $4=A(6\text{-}4)$, de lo cual A deberá ser igual a 2. De este modo, la ecuación de la recta pedida es $y=2(x-4)$ o bien $y=2x-8$.

Hasta ahora hemos podido construir la fórmula de la recta utilizando argumentos de visualización, sabiendo que un punto está sobre el eje x y el otro punto fuera de él. Giramos entonces la recta sobre el pivote y usamos un resultado general, la recta toca cualquier otro punto sobre el plano. ¿Cómo obtendríamos ahora la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 8) y (6, 4)?

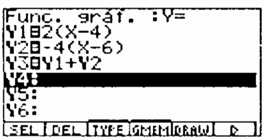
Ahora la estrategia requiere del apoyo que nos brindan los resultados obtenidos en la actividad previa, construyendo dos rectas. En un primer momento a la recta que pase por los puntos (4, 0) y (6, 4), que construimos anteriormente, y en otro a la recta que pasa por los puntos (4, 8) y (6, 0). Esto es, movemos a uno de los puntos sobre el eje de las x y dejamos al otro en su posición original, fuera del eje; invertimos los papeles para la otra recta y *voilá!*, sólo falta que sumemos a las dos funciones así obtenidas.

Tenemos entonces de este modo a la función $y_1=2(x\text{-}4)$ y la función $y_2=\text{-}4(x\text{-}6)$, cuyas rectas podemos apreciar en la Pantalla 10.

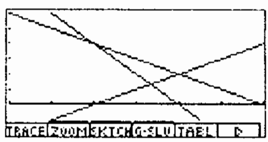


Pantalla 10

Ahora bien, el objetivo es encontrar una gráfica que pase por los puntos inicialmente planteados, para lograrlo *sumaremos las gráficas* tomado como guía los puntos donde ambas rectas cruzan el eje x. Esto es, si sumamos ambas rectas en $x=4$, la función $y_1=2(x\text{-}4)$ vale cero y la función $y_2=\text{-}4(x\text{-}6)$ vale 8, por lo que la suma de ambas es 8. En $x=6$ la función $y_1=2(x\text{-}4)$ vale 4 y la función vale 0, por lo que la suma de ambas es 4. De esta forma conseguimos que la función suma pase por los puntos (4, 8) y (6, 4). Veamos en la pantalla de la calculadora las gráficas de las funciones y_1, y_2 y y_1+y_2



Pantalla 11



Pantalla 12

Esta actividad logra, en nuestra opinión, introducir al estudiante en el proceso de visualización de tal forma que en estos momentos se puede construir la función recta con base en información numérica, algebraica y gráfica, usando gesticulaciones: "tomar un punto y bajarlo al eje, sujetar la recta y girarla hasta que toque al otro punto, y así sucesivamente". Además, otras herramientas de la calculadora (TRACE, Y-Cal, X-Cal, Y-Icpt) permiten comprobar que las rectas encontradas efectivamente pasan por los puntos indicados, o que la suma intercepta a alguna recta en uno de los puntos indicados, etc.

Posterior a la exploración del polinomio cuadrático y cúbico conviene tratar una generalización para construir el polinomio de aproximación de Lagrange en su forma escolar.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Epsilon 42, 353 – 369.

Cantoral, R. (1998): *Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: Un programma emergente*. En: B. D'Amore (ed.) Diversi Aspetti e Diversi Àmbiti della Didattica della Matematica (pp. 15–24). Pitagora Editrice, Bologna.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2003) *Una representación visual del polinomio de interpolación de Lagrange*. Números, España (aceptado).

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001): *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice Hall & Pearson Edución, México.

Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Pirámide, Madrid

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992): *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Notes 25, MAA, Washington.

Kincaid, D. & Cheney, W. (1994): *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico*. Addison Wesley Iberoamericana, México.

Gráficas y Funciones

Reconstrucción de significados que realizan los estudiantes entre f y f´, cuando interactúan en ambientes gráficos

María Antonieta Aguilar Víquez
Instituto Tecnológico de Pachuca, CICATA- IPN; México
auva5404@prodigy.net.mx

Resumen

La problemática que hemos venido atendiendo en los último años, de nuestra labor docente y como investigadores, es el que los estudiantes de nivel superior no son reflexivos, es decir no conceptualizan los teoremas, leyes, axiomas o principios de los conocimientos matemáticos particularmente en situaciones de Cálculo, ellos toman una actitud radicalmente pragmática y aprenden los procedimientos del Cálculo en un nivel puramente algorítmico que es construido sobre imágenes y gráficas escasas (Dreyfus, 1990). Esto les impide realizar abstracciones que les permitan resolver problemas cuando se enfrenten a nuevas situaciones. Por lo anteriormente planteado, es preciso, establecer el tipo de acercamientos teóricos y metodológicos con los cuales contamos para lograr abordar la solución de la problemática planteada de manera exitosa y que tanto maestros como estudiantes crezcamos en y con la adquisición de los conocimientos matemáticos tan relevantes e importantes en nuestro presente histórico para el desarrollo social y cultural de las naciones.

Introducción

Para iniciar con nuestro estudio y poder diseñar las situaciones hicimos una revisión de los diferentes marcos de referencia con los cuales los estudiantes interactúan en el medio escolar en donde se presentan de alguna manera relaciones entre F y F´, encontrando los siguientes:

a) Newton representaba a la integral como el "hallar la cantidad fluente (antiderivada) de una fluxión dada (derivada) (Cordero, 1994). Del enunciado anterior se desprende que la relación dada es **fluente y fluxión** o integral y derivada.
b) Leibnitz consideraba la integral como una suma "la integral es la **suma** de las **diferencias** entre dos estados de una cantidad" (Cordero, 1994, ibid).
c) Los Bernoulli interpretaban a la **integral** como la operación inversa de la **diferenciación** (Cordero, 1994, ibid).

Estas interpretaciones se han sintetizado en el **Teorema Tundamental del Cálculo,** pero en el medio escolar se ha favorecido alguna en particular de las tres señaladas. Nos intereso investigar las relaciones que los estudiantes establecen cuando se considera a estos tres marcos epistemológicos planteados de tal forma que se llegue a un entendimiento del teorema fundamental del cálculo a través del manejo de las gráficas de F y F´ articulándolos con los registros algebraicos que ellos realizan, pero esto se logra mediante la "reconstrucción" de lo que significa para ellos **antiderivada, derivada, suma de diferencias y diferencial.**

En los textos de Cálculo diferencial e integral que circulan en los medios escolares las relaciones que se establecen entre F y F´ son de tipo algorítmico y puntuales por ejemplo:

En la década de los 20s del siglo pasado circula una obra titulada "Le Calcul Différentiel" (Moreux, 1924) como lo sugiere el título solamente se aborda el cálculo diferencial, aparece la relación entre la derivada y su primitiva al hacer la tabulación correspondiente. Solo existe una descripción del comportamiento de la gráfica de la función primitiva e incluso la gráfica de F más no la de la derivada, esto impide que el estudiante establezca relaciones entre ambas funciones de manera global solamente lo haría a través de los puntos críticos, llegaríamos hasta F F′, es decir, hasta una expresión algorítmica. Así por el estilo abordan los diferentes autores de textos de todo el siglo XX las relaciones entre F y F′ . Nuestra propuesta es colocar a los estudiantes ante diferentes situaciones de Cálculo en donde se les cuestiona mediante entrevistas clínicas cuales son las gráficas de F y F′ , vemos las construcciones que realizan y mediante el análisis de las entrevistas verificamos los significados que los conducen a establecer relaciones entre la integral y la derivada, para diferentes funciones particularmente las funciones elementales (Guerrero, R., 1998).

Un ejemplo de este tipo de situaciones lo encontramos en (Aguilar, M. A., 2001). En donde a los estudiantes se les pide que dada la gráfica de F′ dibujen la de F, la representación algorítmica que realizan es la siguiente:

a) $F \longrightarrow F'$ b) $F' \longrightarrow F$ y   c) $F'(x) \sim a$

En a) Los estudiantes verifican, gráficamente, un cambio de estructura.

En b) existe una nueva transformación, o cambio de estructura.

El significado de c), se refiere, a la asociación que hacen de la derivada con la constante que multiplica a la función primitiva.

Ellos, establecen también un enlace entre los contextos algebraico y grafico de F y F′ ya que realizan el proceso de "calcular la antiderivada" para después trazar la grafica de la función primitiva.

Los elementos didácticos de una nueva perspectiva consisten en poner en juego relaciones entre diferentes contextos, por ejemplo el algebraico y el gráfico, es lo que ocurre en la situación del ejemplo anterior. En estas transformaciones es en donde identificamos a la categoría **comportamiento tendencial de las funciones**, la cual genera argumentos cualitativos que determinarán nuevas acciones que consisten en un intercambio permanente entre contextos algebraicos y gráficos (Cordero, 1998; Cordero & Solís, 1997a, 1997b).

Marco teórico

El marco teórico en el que nos movemos, esta compuesto fundamentalmente por la teoría constructivista de Piaget y la teoría APOE de Dubinsky (Asiala, et al. , 1996), insertadas en la aproximación socioepistemológica, que ha sido madurada y profundizada por el grupo de investigación del área de educación superior del departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV del Instituto Politécnico Nacional. La aproximación socioepistemológica, ha sido planteada por Cordero (2001) como una nueva hipótesis la cual consiste, entonces en que la **actividad humana es la fuente de la reorganización que implicará el "rediseño del discurso matemático escolar".**

Dicha línea de investigación contempla cuatro dimensiones; **Epistemológica, Cognitiva, Didáctica y Sociocultural**. A estos componentes en conjunto y en una aproximación sistémica se les llama aproximación socioepistemológica (Cantoral & Farfán, 1998), y una de sus tareas principales de investigación consiste en proporcionar evidencias para la nueva hipótesis, puesto que estas cuatro dimensiones guardan una aproximación sistémica significa que estarán estrechamente vinculadas una con las otras por tanto podríamos abordar al mismo tiempo una dimensión y las otras cuando realicemos el análisis de un aspecto del conocimiento del cálculo particularmente en las relaciones entre F y F′ . En nuestro caso particular en cuanto al marco de referencia en el que estaremos trabajando es el de **la transformación** de las funciones derivada y primitiva cuyos **procedimientos** inciden en la variación de los coeficientes de la transformación de las funciones, en cuanto a **procesos y objetos** se refiere tenemos a las instrucciones que organizan comportamientos y en lo referente a los **argumentos** tenemos como eje central al comportamiento tendencial de las funciones. Sin embargo manejamos el concepto de derivada con varios significados: el límite de una función, la variación continua de cierta cantidad que fluye y la variación de parámetros de una función para organizar comportamientos, esto debido a que estos diversos significados en un contexto interactivo son componentes de la epistemología del cálculo, como resultado de la actividad humana, que en forma sencilla podríamos decir, se refiere a las formas de construcción en la escuela y consisten en la reconstrucción de significados. El humano se somete a usar la herramientas, entenderlas y llevarlas a ciertos actos, y con ello reconstruye significados (Cordero, 1999).

Metodología

Se trata propiamente de un método y consiste en el desarrollo de seis etapas:

Etapa uno: parte de una experiencia epistemológica, estudiando el contenido matemático correspondiente al tópico del proyecto, ahí se organiza dicho contenido matemático con base a lo que significa entender el concepto y cómo el concepto puede ser construido por el que aprende (Cordero, 1998).

Etapa dos: se trabajan ejemplos de diseño e implementación de situaciones, haciendo uso de la tecnología, en la realización de actividades con estudiantes (que en nuestro caso serán entrevistados en grupos de tres), haciéndose las observaciones a través de dos vías; aprendizaje cooperativo y entrevista clínica.

Etapa tres: en ella se realizan análisis de los datos coleccionados y posteriormente se reconsidera la experiencia que fue punto de partida. Las interpretaciones de las respuestas dadas por los estudiantes ante las situaciones, estarán basadas en el marco de las construcciones mentales; y en el desarrollo de estas ante las situaciones. Aquí se estudian las bases para transformar los datos o hechos en fenómenos didácticos.

Etapa cuatro: consiste en la iteración con el resultado de la etapa tres. Es una revisión de la experiencia epistemológica de la cual se partió en la etapa uno. El resultado provee los fundamentos de la siguiente aplicación de situaciones. Se establece una reformulación de las descomposiciones genéticas y se rediseñan las situaciones o implementaciones en una base *socioepistemológica*.

Etapa cinco: en ella se aplican o implementan los rediseños y se coleccionan los datos. Se trabaja (en la investigación presente) con estudiantes en grupos de tres, ya que en los trabajos de investigación previos a este llegamos a la conclusión de que en forma grupal, los estudiantes, realizan mayor número de construcciones y con mayor rapidez (Aguilar, M y Martínez, M, 1998; Aguilar, 1999).

Etapa seis: se podría denominar "etapa del análisis de datos y actualización de las descomposiciones genéticas". En ella se pretende alcanzar un refinamiento del recorte o amplitud del entendimiento del cual se partió. Las interpretaciones continúan dentro del marco de las construcciones mentales.

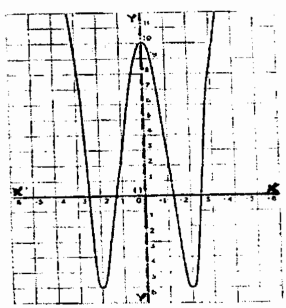
Análisis de la reconstrucción de significados

Presentamos dos ejemplos de situaciones al primero le denominamos Sa (situación antigua) y a la otra Ss (situación con significados).

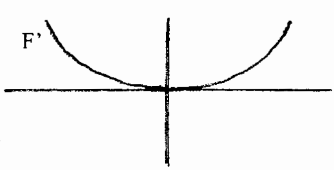
Sa dada la función $Y = x^4 + 8x^2 + 10$ construyen la tabla y la gráfica

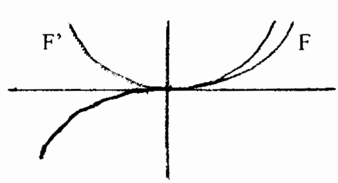
x	$-\propto$	...	-2	...	0	...	+2	...	$+\propto$
y′	...	$-$	0	+	0	-	0	+	...
y	$+\propto$	decrece	- 6	crece	+10	deccrece	-6	crecc	$+\propto$
			Min		max.		Min		

En esta situación Sa, la gráfica proporciona datos puntuales de la función primitiva, como son: existe un máximo, dos mínimos, es decreciente en (- , 2)y (0, 2) creciente en (-2, 0) y (2,). En este ejemplo que presenta el texto de Moreaux (1924) es difícil el establecimiento de la reconstrucción de significados entre la derivada y la integral porque, pensamos, no hay congruencia entre contextos, es decir, aparece la gráfica de la primitiva pero no la de la función derivada que esta implícita en la tabla (en un contexto analítico). Es lo que ocurre actualmente en las aulas a pesar de que el ejemplo que vimos es extraído de un texto que data de principios del siglo XX. Ejemplos muy similares aparecen en los textos de las décadas, 1930, 1940, 1950, 1960, 1970, 1980, 1990 (podríamos decir que es la década del esplendor de las calculadoras científicas y graficadoras).



Ejemplo 2 Situación Ss a los estudiantes se les pide que dada la gráfica de F′ tracen la de la función primitiva





Para esta situación la representación algorítmica sería:

a) $F \longrightarrow F'$

b) $F' \longrightarrow F$

c) $F'(x) \sim a$

En a) Los estudiantes verifican, gráficamente, un cambio de estructura.

En b) existe una nueva transformación, o cambio de estructura. Lo importante en estos dos cambios, es que los estudiantes, pudieron establecer que la relación entre la derivada y la primitiva es justamente el Teorema Fundamental del Cálculo, ya que parten de sus conocimientos previos para relacionar a esos con las gráficas de la primitiva y derivada, es decir dan significado a la parte algorítmica auxiliándose de las gráficas respectivas.

El significado de c), se refiere, a la asociación que hacen de la derivada con la constante que multiplica a la función primitiva, es decir en este caso, ellos, establecen "la gráfica de la función derivada es a la constante de la primitiva.

Resultados

Los estudiantes establecen un enlace entre los contextos analítico y gráfico de F y F′ cuando reconstruyen significados. Les es difícil reconstruir si existe incongruencia en los contextos.

Conclusiones

Cuando a los estudiantes se les coloca en una situación que les permita interactuar con las graficas de las funciones, ellos aprenden a:

- Identificar los efectos de los coeficientes tanto de F como de F′
- Establecer relaciones entre funciones
- Buscar **tendencias** en los comportamientos
- Reconocer patrones de comportamientos gráficos y analíticos

La noción de **transformación** se convierte en categoría del conocimiento matemático (Cordero, 1998) porque se trata de una noción medular de la reconstrucción de significados del Cálculo en la actividad humana o práctica social.

Referencias bibliográficas

Aguilar; M. (1999). *Relaciones entre la derivada y su primitiva; el papel del registro gráfico en algunas de las construcciones de los estudiantes.*. Tesis de Maestría, Dirección de estudios de posgrado, Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autonóma del Estado de Hidalgo. México.

Aguilar; M. & Martínez M. (1998). *Relaciones entre la derivada y su primitiva a la luz del comportamiento tendencial de las funciones; un estudio preliminar.* Trabajo de investigación presentado en el 2°. Seminario Nacional de Investigación de Didáctica de las Matemáticas. Monterrey, N.L. México.

Aguilar, M. (2001). *Relaciones entre la derivada y la primitiva; el papel del registro gráfico.* Actas XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. En prensa.

Asiala, M. & Brown, A. & Devries, D. & Dubinsky, E. & Matheeews, D. & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education.* CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education 2(6), 1-32.

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguage variacional en la introducción del análisis*, Épsilon 42, 353-369.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construccion de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar.* Tesis Doctoral, CINVESTAV- IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Cordero, O. & Solís, M. (1997a). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo.* Segunda Edición, Serie Cuadernos de Didáctica Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Cordero, F. & Solis, M. (1997b). *Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales.* En R. Farfán (Ed.), Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (pp 69-73). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, O. (1998). *El comportamiento tendencial de las funciones como una categoria del conocimiento del Cálculo.* Rumec, México.

Cordero, F. (1998). *Notas sobre algunos conceptos de la Matemática y Cognición a la luz de una experiencia de investigación,* Cinvestav – IPN, México.

Cordero, F. (1998). *El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: El caso del comportamiento tendencial de las funciones.* Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 1(1), 56-74.

Cordero, F. (1999). *La matemática educativa en una aproximación sociocultural de la mente..* VII Simposio Internacional en Educación Matemática ElfriedeWenzelburger UNAM-UPN (pp. 106-112). México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana,* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol 4, núm. 2, pp 103-128.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking In P. Nesher and J. Kilpatrick* (Ed.) Mathematics and cognition: A researchs synthesis by the International Group for the Psycology of Matemathics Education (pp. 113-134). Cambridge University Press.

Guerrero, R. (1998). *Propuesta Didáctica para apoyar la transferencia del registro gráfico al algebraico de funciones elementales,* Tesis de Maestría en Ciencias, Cinvestav – IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Moreux; A. (1924). *Le Calcul Différentiel*, Bibliotheque d´Education Scientifique, Paris.

Construcción de funciones con calculadoras graficadoras

Marcela Ferrari Escolá
Cinvestav-IPN, México
mferrari@mail.cinvestav.mx

Gustavo Martínez Sierra
CICATA-IPN, México
gmartinezs@ipn.mx

Resumen

Este taller surge con el propósito de profundizar y construir nuevos significados en torno a uno de los conceptos centrales del Cálculo, la noción de función. Nuestra perspectiva se basa en que, en términos de la construcción social del conocimiento, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como fórmula y con ello la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La puesta en funcionamiento, en situación escolar, de esta hipótesis epistemológica plantea retos didácticos, y por tanto metodológicos, que no son triviales. En particular el presente trabajo es el resultado de considerar a las calculadoras graficadoras como una *variable didáctica* para el diseño y puesta en escena de *ingenierías didácticas* para la construcción de funciones. Específicamente trataremos en esta ocasión la construcción de polinomios de variable real a través de operaciones gráficas.

Introducción

Este taller surge con el propósito de profundizar y construir nuevos significados en torno a uno de los conceptos centrales del Cálculo, la noción de función. Según Cantoral & Farfán (1998), el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como fórmula y con ello la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. Su desarrollo se ha producido prácticamente a la par del humano ya que se encuentra presente en las correspondencias entre cantidades trabajadas en la antigüedad hasta los debates actuales, tanto en el ámbito de la comunidad de matemáticos como en su incorporación y presencia en la currícula actual.

Para Farfán (1992), entre las causas que hacen de la función uno de los conceptos matemáticos más difíciles de dominar y enseñar en la escuela, se encuentran las diversas concepciones y múltiples representaciones de ésta, potenciadas por el hecho que la enseñanza tiende a sobrevalorar la algoritmización y los métodos analíticos por encima del desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático. Por ello, consideramos interesante incorporar al discurso matemático escolar algunos de los elementos que permitieron la génesis del concepto de función, a saber, la visualización, la predicción, el reconocimiento de patrones, la analogía entre otros, para lo cual proponemos apoyarnos en herramientas tecnológicas como las calculadoras graficadoras para trascenderlas, es decir, mediante el diseño de situaciones matemáticas que permitan "independizarse" de su uso, generando un universo gráfico rico en significados.

Algunas investigaciones (Mirón, 2000; Penglase & Arnold, 1996) dan evidencia de que la utilización de calculadoras graficadoras ayudan a desarrollar una comprensión más global del concepto de función pues permiten visualizar sus gráficas y establecer relaciones entre éstas y expresiones algebraicas de las funciones correspondientes A su vez, los registros gráfico y numérico adquieren un nuevo estatus, pues permite a los alumnos comprende que los problemas algebraicos se pueden resolver gráfica o numéricamente tan bien comc con la manipulación algebraica. En este sentido está dirigido nuestro taller, en dond resolveremos algunas situaciones matemáticas para la construcción de funciones utilizand las calculadoras graficadoras.

Encuadre teórico y justificación

Dentro de la perspectiva de investigación en que está inmerso este trabajo nos interesan do asuntos íntimamente relacionados: en primer lugar la hipótesis epistemológica que ha surgid de diversas investigaciones (Farfán, 1997), que han mostrado que para tener acceso a la ideas de Cálculo y al pensamiento variacional es necesario poseer un universo gráfico ric en significados que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuale virtualmente ajenos, a causa de la enseñanza tradicional, el lenguaje algebraico y el lenguaj gráfico. En segundo lugar nos ocupa el problema didáctico que surge como consecuenci de lo anterior y que estriba fundamentalmente en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto gráfico ya que, por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, razón entre otras por lo que en la enseñanza se acude al refugio algorítmico con facilidad.

Uno de lo primeros pasos que se han dado para tratar el problema didáctico mencionado con anterioridad es el de las *operaciones gráficas básicas* (más adelante presentamos los detalles) cuyo objetivo es el establecimiento de un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas (Farfán, 2000). Trabajos posteriores han puesto el acento en la *visualización de funciones* (Cantoral & Montiel, 2001) donde los elementos que entran en juego son predecir, bosquejar, imaginar, analizar y describir una gráfica, mismos que, en conjunto, pertenecen al proceso de visualización.

De acuerdo a lo anterior nuestro interés para este taller es, entonces, retomar y ampliar algunas de las ideas de los trabajos mencionados con anterioridad en lo que respecta a la construcción de gráficas de funciones.

Primera parte: polinomios elementales y operaciones gráficas básicas

Consideramos conveniente en este momento realizar algunas actividades tendientes a estudiar los efectos gráficos que sufre la función $f(x) = x^n$ al variar el parámetro n (= 1, 2, 3, 4...) utilizando el menú dinámico de la calculadora y su explicación desde las expresiones algebraicas. Luego investigar, de la misma manera, las funciones $f(x) = \mathrm{A}x^n$ y $f(x) = x^n + \mathrm{C}$, $y = (x + \mathrm{B})^n$ todos ellos para (n = 1, 2, 3, 4...)

Construcción de la gráfica de polinomios de primero y segundo grado a través de operaciones gráficas básicas

De las conclusiones de las actividades anteriores se desprenden algunos principios de las *operaciones gráficas básicas* con funciones que presentan la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables al dar sentido gráfico a operaciones fundamentales tales como:

gráfico y numérico adquieren un nuevo estatus, pues permite a los alumnos comprender que los problemas algebraicos se pueden resolver gráfica o numéricamente tan bien como con la manipulación algebraica. En este sentido está dirigido nuestro taller, en donde resolveremos algunas situaciones matemáticas para la construcción de funciones utilizando las calculadoras graficadoras.

Encuadre teórico y justificación

Dentro de la perspectiva de investigación en que está inmerso este trabajo nos interesan dos asuntos íntimamente relacionados: en primer lugar la hipótesis epistemológica que ha surgido de diversas investigaciones (Farfán, 1997), que han mostrado que para tener acceso a las ideas de Cálculo y al pensamiento variacional es necesario poseer un universo gráfico rico en significados que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos, a causa de la enseñanza tradicional, el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. En segundo lugar nos ocupa el problema didáctico que surge como consecuencia de lo anterior y que estriba fundamentalmente en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto gráfico ya que, por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, razón entre otras por lo que en la enseñanza se acude al refugio algorítmico con facilidad.

Uno de lo primeros pasos que se han dado para tratar el problema didáctico mencionado con anterioridad es el de las *operaciones gráficas básicas* (más adelante presentamos los detalles) cuyo objetivo es el establecimiento de un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas (Farfán, 2000). Trabajos posteriores han puesto el acento en la *visualización de funciones* (Cantoral & Montiel, 2001) donde los elementos que entran en juego son predecir, bosquejar, imaginar, analizar y describir una gráfica, mismos que, en conjunto, pertenecen al proceso de visualización.

De acuerdo a lo anterior nuestro interés para este taller es, entonces, retomar y ampliar algunas de las ideas de los trabajos mencionados con anterioridad en lo que respecta a la construcción de gráficas de funciones.

Primera parte: polinomios elementales y operaciones gráficas básicas

Consideramos conveniente en este momento realizar algunas actividades tendientes a estudiar los efectos gráficos que sufre la función $f(x) = x^n$ al variar el parámetro n (= 1, 2, 3, 4...) utilizando el menú dinámico de la calculadora y su explicación desde las expresiones algebraicas. Luego investigar, de la misma manera, las funciones $f(x) = Ax^n$ y $f(x) = x^n + C$, $y = (x + B)^n$ todos ellos para (n = 1, 2, 3, 4...)

Construcción de la gráfica de polinomios de primero y segundo grado a través de operaciones gráficas básicas

De las conclusiones de las actividades anteriores se desprenden algunos principios de las *operaciones gráficas básicas* con funciones que presentan la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables al dar sentido gráfico a operaciones fundamentales tales como:

- $-f(x)$ y $f(-x)$: Reflexión respecto al eje x y al eje y respectivamente.
- $f(x+a)$ y $f(x-a)$, con $a > 0$: Traslación en la dirección del eje x, a la "izquierda" y a la "derecha" a unidades respectivamente.
- $f(x)+a$ y $f(x)-a$, con $a > 0$: Traslación en la dirección del eje y, hacia "arriba" y hacia "abajo" a unidades respectivamente.
- $a\,f(x)$, con $a > 0$: Contracción ($a<1$) o dilatación ($a>1$) respecto al eje y.

En términos de la construcción de funciones las operaciones anteriores nos abren la posibilidad de construir una amplia gama de funciones a partir de una, considerada como prototipo.

De esta manera es posible construir las funciones lineales de la forma $f1(x) = Bx + A$ ($B0$) a partir del prototipo $g_1(x) = x$ al considerar las siguientes operaciones gráficas básicas:

a) dilatar o contraer la gráfica $g1$ por el factor $|B|$ respecto al eje x.

b) si $B<0$ reflejar respecto al eje x .

c) Trasladar la gráfica anterior en la dirección del eje y con lo que finalmente tenemos la gráfica de $f1$:"subir" (si $A>0$) o "bajar" (si $A<0$) A unidades la gráfica anterior con lo que finalmente tenemos a $f1$.

Ejemplo 1.

La construcción de la gráfica de $y = -3x - 1$ puede ser hecha a través de la siguiente secuencia de operaciones gráficas básicas (ver figura 1):

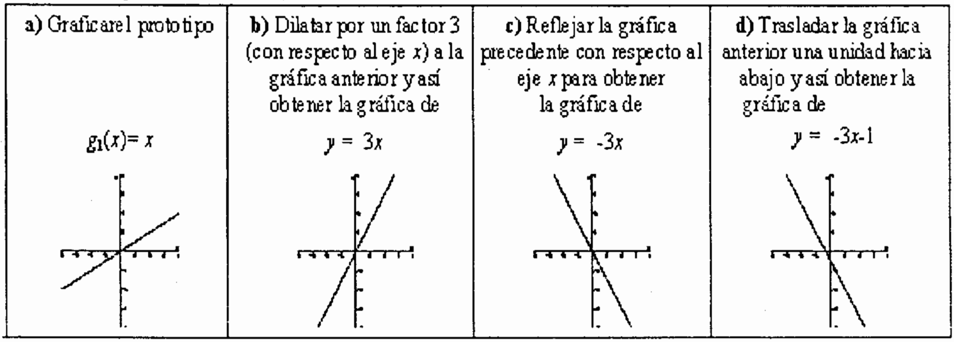


Figura 1

De manera análoga es posible construir las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma $f2(x) = Cx^2 + Bx + A$. El método se basa en la tradicional técnica de "completar el cuadrado" de la siguiente manera:

$$f_2(x) = Cx^2 + Bx + A = C(x^2 + \frac{B}{C}x + \frac{A}{C}) = C(x + \frac{B}{2C})^2 + \frac{A}{C} - \frac{B^2}{4C}$$

que puede ser escrita de la forma

$$f_2(x) = a(x-h)^2 + k$$

con

$$a = C, \quad h = -\frac{B}{2C} \quad \text{y} \quad k = \frac{A}{C} - \frac{B^2}{4C}$$

Por lo tanto es posible construir la gráfica de la función f a partir del prototipo $g^2(x)=x^2$ al considerar las siguientes operaciones gráficas básicas:

a) Trasladar la gráfica g_2 en la dirección del eje x: $|h|$ unidades a la derecha si $h > 0$ o $|h|$ unidades a la izquierda si $h < 0$.

b) dilatar o contraer la gráfica resultante por el factor $|a|$ respecto al eje x.

c) si $a<0$ reflejar respecto al eje x .

d) Trasladar la gráfica anterior en la dirección del eje y con lo que finalmente tenemos la gráfica de f_2: "subir" (si $k>0$) o "bajar" (si $k<0$) $|k|$ unidades.

Ejemplo 2.

La construcción de la gráfica de $y = -2(x - 3)^2 +1$ puede ser hecha a través de la siguiente secuencia de operaciones gráficas básicas (Ver figura 2):

a) Graficar el prototipo	**b)** Trasladar tres lugares a la derecha a $g_2(x)=x^2$ para obtener la gráfica de	**c)** Dilatar por un factor 2 (con respecto al eje x) a la gráfica anterior y así obtener la gráfica de	**d)** Reflejar la gráfica precedente con respecto al eje x para obtener la gráfica de	**e)** Trasladar la gráfica anterior una unidad hacia arriba y así obtener la gráfica de
$g_2(x)=x^2$	$y = (x-3)^2$	$y = 2(x-3)^2$	$y = -2(x-3)^2$	$y = 2(x-3)^2 +1$

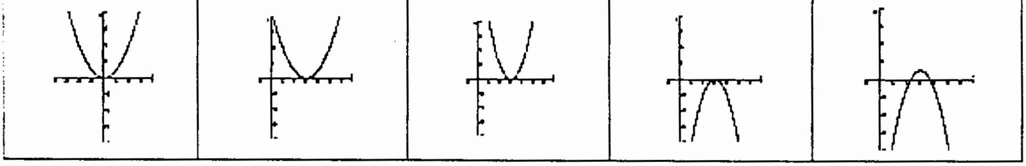


Figura 2

Segunda parte: los polinomios como suma de funciones

Construcción de la gráfica de polinomios de segundo grado

Si bien ya hemos estudiado la manera de construir las gráficas de los polinomios de segundo grado a través de operaciones gráficas básicas, la perspectiva que de aquí en adelante adoptaremos nos motiva a proponer actividades tendientes a estudiar los efectos gráficos de variar el parámetro A en la gráfica de la función $f(x) = x^2 + Ax$ utilizando el menú dinámico de la calculadora y argumentar sobre los efectos que se perciben. Estas actividades culminan solicitando que, sin utilizar la calculadora y sin evaluar, se "bosqueje" la gráfica de las siguientes funciones: $y = x^2 + 3x - 2$ y $y = x^2 - 2x + 3$.

Construcción de la gráfica de polinomios de tercer grado

En cuanto a las funciones cúbicas tenemos que es posible construir, mediante las operaciones gráficas básicas, a aquellas que tienen la forma . En este caso la secuencia de operaciones gráficas básicas es la misma que en el caso general anterior sólo que aplicada al prototipo $g_3(x)=x^3$.

El problema general que consiste en la construcción de la gráfica de una función cúbica cualquiera de la forma $f_3(x) = Dx^3 + Cx^2 + Bx + A$ no puede ser resuelto sólo utilizando las operaciones gráficas básicas al prototipo $g_3(x)=x^3$. Tal situación es el resultado, en el plano algebraico, de que no siempre es posible "completar el cubo" para transformar la expresión $Dx^3 + Cx^2 + Bx + A$ a la forma . Por ejemplo la expresión $x^3 + 3x^2 + 2x$ sólo puede ser escrita como $(x+1)^3 - x - 1$.

En el plano gráfico tal problema se presenta por la existencia de gráficas de funciones cúbicas que no son el resultado de aplicar una secuencia de operaciones gráficas básicas al prototipo $g_3(x)=x^3$ como por ejemplo la gráfica de $y = x^3 - x$ (Figura 3).

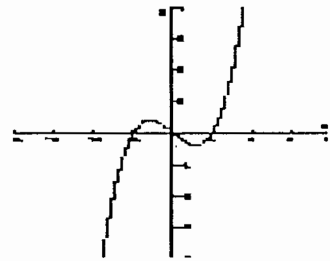


Figura 3

En vista de lo anterior resulta necesario explorar las diversas *posibilidades gráficas* de las funciones cúbicas las cuales exploraremos con la ayuda de la calculadora con capacidad de graficación.

Para ello primero hagamos algunas simplificaciones en cuanto a los parámetros en la expresión $f_3(x) = Dx^3 + Cx^2 + Bx + A$:

- Ya que $f_3(x) = Dx^3 + Cx^2 + Bx + A = D(x^3 + \frac{C}{D}x^2 + \frac{B}{D}x + \frac{A}{D})$, la gráfica de f_3 es una contracción o dilatación de una gráfica de una función de la forma $y = x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$. Entonces basta estudiar las formas gráficas de estas últimas.
- Como la gráfica de $y = x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$ es una traslación en la dirección del eje y de la gráfica de $y = x^3 + C_1x^2 + C_2x$, entonces basta con estudiar aquellas que tienen esta última forma.
- Ya que $y = x^3 + C_1x^2 + C_2x =$

$$\left(x+\frac{C_1}{3}\right)^3 + \left(C_2 - 3\left(\frac{C_1}{3}\right)^2\right)x - \left(\frac{C_1}{3}\right)^3 = \left(x+\frac{C_1}{3}\right)^3 + \left(C_2 - 3\left(\frac{C_1}{3}\right)^2\right)\left(x + \frac{C_1}{3} - \frac{C_1}{3}\right) - \left(\frac{C_1}{3}\right)^3 =$$

$$\left(x+\frac{C_1}{3}\right)^3 + \left(C_2 - 3\left(\frac{C_1}{3}\right)^2\right)\left(x + \frac{C_1}{3}\right) - \left(\frac{C_1}{3}\right)\left(C_2 - 3\left(\frac{C_1}{3}\right)^2\right) - \left(\frac{C_1}{3}\right)^3$$

entonces su gráfica es una traslación en la dirección del eje x de una de la forma $y = x^3 + D_1x + D_2$ cuya gráfica es la traslación en la dirección del eje y de la gráfica de la forma $y = x^3 + D_1x$.

De acuerdo a todo lo anterior entonces el estudio para determinar todas las formas gráficas de las funciones cúbicas puede ser reducido al estudio de aquellas de la forma $y = x^3 + D_1x$. (Que bien podemos llamar del tipo x^3 + "recta"). Ahora procedamos a una exploración con la calculadora con capacidad de graficación. Para ello, se solicita estudiar y argumentar sobre los efectos gráficos que sufre la gráfica de la función $y = x^3 + Ax$ al variar el parámetro A (utilizando el menú dinámico de la calculadora). Se hace pertinente investigar ¿Qué pasa cuando $|A|$ es pequeño? Y, sin utilizar la calculadora y sin evaluar, "bosquejar" la gráfica de funciones como las siguientes: $y = x^3 + 3x^2 + x + 2$, $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.

Construcción de la gráfica de polinomios de cuarto grado

La propuesta de este apartado es explorar la construcción de todas las *posibilidades gráficas* de los polinomios de cuarto grado de la forma $f_4(x) = Ex^4 + Dx^3 + Cx^2 + Bx + A$, ya que es posible reducir su estudio, mediante consideraciones parecidas a las hechas con las funciones cúbicas, a aquellas que son de la forma $y = x^4 + Ax^2 + Bx$ y discutir sobre el ¿por qué? de esta consideración y sobre la potencialidad de la misma para generar nuevos significados.(Que bien podemos llamar del tipo x^4 + "parábola").

Las actividades propuestas para este apartado siguen los lineamientos planteados en los parágrafos anteriores por lo que no serán desarrollados en extenso.

Tercera parte: los polinomios como producto de funciones

En este apartado se problematizará sobre la construcción de polinomios de segundo y tercer grado mediante el uso de la operación gráfica "producto". Así, se propone reflexionar sobre las formas de una parábola (polinomio de segundo grado) como el producto de dos rectas (polinomio de primer grado) así como también, estudiar las funciones cúbicas como producto de parábola y recta.

Para este estudio se hace relevante analizar el significado gráfico de las raíces o ceros de las funciones ya que éstos en un producto permanecen constantes. ¿Qué significa una raíz simple, una doble o una de multiplicidad 3? Son cuestiones que se propone investigar mediante el recurso de la calculadora graficadora. ¿Cómo obtener las distintas gráficas de las parábolas y de las cúbicas mediante el producto de funciones más simples?

Conclusiones

Este taller fue diseñado con el propósito de profundizar y construir nuevos significados en torno a uno de los conceptos centrales del Cálculo, la noción de función. En el mismo, consideramos a las calculadoras graficadoras como una *variable didáctica* para el diseño y puesta en escena de *ingenierías didácticas* para la construcción de funciones. Este acercamiento se basa en que, en términos de la construcción social del conocimiento, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como fórmula y con ello la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La puesta en funcionamiento, en situación escolar, de esta hipótesis epistemológica plantea retos didácticos, y por tanto metodológicos, que no son triviales.

Específicamente tratamos la construcción de polinomios de variable real a través de operaciones gráficas con el fin de dejar en los asistentes la inquietud de seguir investigando, realizando y profundizando en la construcción de gráficas de polinomios desde esta perspectiva.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Épsilon. Revista de la S.A.E.M. "Thales" 42, pp.353-369.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall
México: Prentice Hall

Farfán, R. & Albert, A. & Arrieta, J. (2001). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*. Cuadernos Didácticos, Casio. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (1992). *¿Matemática Educativa en el nivel superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe*. En R. Cantoral, R. M. Farfán & C. Imaz (Eds.), Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa . México. Vol 2, Sección de Plenarias. pp.236-253.

Mirón, H. & Cantoral, R. (2000). *Sobre el estatus de la noción de derivada.: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica*. Relime 3(3), pp.265- 292

Penglase, M. & Arnold, S. (1996). *The graphics calculator in Mathematics Education: A critical review of recent research*. Mathematics Education Research Journal 8(1), pp.58-90.

Análisis de funciones con calculadora graficadora en el salón de clases

René Ramírez Ruiz
Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM. México.
reneramirezr@yahoo.com.mx

Resumen

Se describe la manera en que se planeó y desarrolló un curso de Cálculo Diferencial e Integral a lo largo de un año de actividades con un grupo de alumnos de tercer año del Colegio de Ciencias y Humanidades (nivel medio superior). Se realizaron 10 prácticas, una por semana, con calculadoras graficadoras TI-92. En el artículo se informa acerca del avance y las dificultades que los estudiantes tuvieron durante el desarrollo del curso; de las actitudes observadas y de los procesos de pensamiento detectados. Se presentan, además, las prácticas que se realizaron, su concepción, adecuación y diseño.

Presentación

El significado de una función es uno de los conceptos fundamentales en la comprensión de las Matemáticas. Dado que aparece frecuentemente en cualquier tópico que se estudie, es necesario que el estudiante tenga una idea clara y precisa, en el nivel medio superior, de lo que significa. Aunque el estudiante ya ha investigado funciones lineales y cuadráticas (y algunas funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales), en cursos anteriores al curso de Cálculo, el concepto de función no alcanza todavía la profundidad e importancia que debe tener. Entre las posibles razones por las que esto ocurre, se debe a que la mayor parte de las gráficas de funciones que el estudiante ha construido, por tabulación, sólo las hace en regiones bien delimitadas del plano cartesiano y a que casi todas ellas presentan características "familiares" (no problemáticas) en el plano (como es el caso de la parábola y de la recta) (Thom, 1978). En lo que se refiere a las funciones trascendentes, no es muy común que, antes de que el alumno inicie el estudio del Cálculo, examine con detenimiento las gráficas de estas funciones, aunque sí lo haga con respecto a sus propiedades algebraicas, lo cual no implica que el estudiante las identifique como funciones. (Mueller, 1999.)

Con el propósito de reforzar la idea de función en el estudiante, se decidió elaborar, por un grupo de profesores en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), una serie de prácticas que apoyaran la enseñanza del Cálculo (Schneider, 2000), centrada en el concepto de función. Describiremos a continuación, el diseño y aplicación de cada una de las prácticas; los conceptos e ideas que se desean desarrollar en el alumno en cada una de ellas y los resultados que se dieron.

Desarrollo

Las prácticas se aplicaron a un grupo de 28 alumnos que cursaban por vez primera Cálculo. Este número de alumnos no fue seleccionado previamente, sino que, debido al Plan de Estudios del CCH (CCH, 1996), los estudiantes se inscriben optativamente a Cálculo, según la carrera profesional que desean estudiar en el nivel superior, y es muy común que seleccionen Estadística y Probabilidad, que también es optativa, en lugar de Cálculo, dado que pocos ingresan a carreras de Ingeniería o de Matemáticas. Es frecuente que los grupos de Cálculo son reducidos, porque el estudiante evita en lo posible afrontar las Matemáticas por distintas razones. Cabe anotar que en el artículo sólo se presentan las prácticas de Cálculo Diferencial.

En el CCH los semestres son de 16 semanas. En Cálculo cada semana se imparten dos clases de dos horas cada una. Esto nos llevó a programar una práctica por semana con duración de 2 horas. La otra clase semanal se empleaba para discutir conceptos o introducir temas nuevos mediante problemas, que también se incluyeron durante el curso, y que servirían para apoyar las prácticas. Las 10 prácticas que se aplicaron durante el curso son las siguientes (se describe con los incisos a) su contenido y b) su propósito):

- *Práctica 1*: Uso de la calculadora graficadora.
  a) Se mostró el uso de cada pantalla de la calculadora graficadora TI-92, la barra de herramientas y el área de funciones.
  b) Se inició el estudio de algunas gráficas de polinomios que se obtuvieron al resolver problemas. Se familiarizó al alumno con el manejo de la TI-92 mediante la realización de gráficas.
- *Práctica 2*: Gráficas de problemas.
  a) Se graficaron funciones resultantes de problemas cuya solución es una función exponencial.
  b) Los principales objetivos de esta práctica consisten en la crítica del método de tabulación para determinar la gráfica de una función y que se considere la posible no linealidad de los problemas. Si el estudiante realiza la grafica en una región pequeña del plano, es muy probable que concluya que se trata de una recta.
- *Práctica 3*: Investigar gráficas de funciones. Asíntotas verticales.
  a) Se inicia el estudio de funciones racionales y también del dominio y rango de una función. Se examina el problema de la división por cero. Construcción de tablas.
  b) Se hacen aproximaciones graduales a un punto con el cursor de la TI-92 para que se estudien límites laterales y límites en un punto. Se discute la existencia y no existencia de un límite en un punto.

Práctica 4: Investigar límites.
  a) Se calculan límites de polinomios y de funciones racionales con la calculadora graficadora y se examina y discute la razón por la que la máquina entregó tal o cual resultado.
  b) Se espera una argumentación gráfica del resultado de parte del estudiante. No sólo es importante el cálculo del límite sino también su interpretación.

Práctica 5: Área como límite de sumas.
  a) Se calculan mediante sumatorias de áreas de figuras inscritas o circunscritas, las áreas de figuras geométricas. Por ejemplo, se calcula el área de triángulos inscribiendo cuadrados; o inscribiendo círculos, etcétera.
  b) El propósito consiste en que el alumno determinará que los límites no sólo aparecen al determinar el comportamiento de una función en un punto (o al infinito), sino que también se aplican en procesos de exhaución, lo que será de importancia en el Cálculo Integral.

Práctica 6: Asíntotas horizontales.
  a) Se estudian límites al infinito, tanto en polinomios como en funciones racionales. Se

examinan los casos en los que una función racional tiene asíntotas horizontales y cuando no las tiene.

   b) Esta práctica consiste en que el estudiante calcule los límites al infinito por inspección, y los utilizará como apoyo de la gráfica de una función.

- *Práctica 7*: Rectas tangentes en un punto de una función. Límite de Fermat.
   a) Se inicia el estudio de las pendientes de las rectas tangentes a una función en un punto. Es decir, se buscarán métodos que faciliten el cálculo de puntos cuyo conocimiento facilitaría la gráfica de una función. Puntos críticos.
   b) Principalmente se propiciará que el estudiante deduzca los conceptos de función creciente y decreciente. Que deduzca el valor que tiene la pendiente de la recta tangente a la función en los puntos críticos y, en general, que intuya un procedimiento para determinar los puntos críticos de una función. El límite de Fermat es muy útil para discutir la necesidad de la derivada.
- *Práctica 8*: La derivada y reglas de derivación.
   a) Uso de la TI-92 para calcular derivadas de funciones racionales, polinomios y funciones algebraicas. Contrastación del resultado con el trazo de rectas tangentes en la pantalla de graficación de la calculadora.
   b) Aplicación de las reglas de derivación. Análisis de la derivada como una función y gráfica de la misma. Discusión de dicha gráfica.
- *Práctica 9*: Criterio de la primera derivada.
   a) Uso y justificación del criterio de la primera derivada para realizar gráficas.
   b) Realización de gráficas de funciones racionales, algebraicas y polinomios.
- *Práctica 10*: Criterio de la segunda derivada.
   a) Uso y justificación del criterio de la segunda derivada para realizar gráficas.
   b) Realización de gráficas de funciones racionales, algebraicas y polinomios.

Adicionalmente se realizaron dos prácticas de apoyo, en una se trató la obtención de raíces de funciones racionales y polinomios; en la otra se construyeron polinomios y funciones racionales dadas sus raíces y puntos de discontinuidad al infinito. Estas prácticas se realizaron únicamente por razones de manejo de comandos de la calculadora.

Entre las principales conjeturas que los estudiantes establecían, corroboraban o falsaban, y que no formaban parte de las prácticas sino que eran sugeridas e investigadas por ellos con el uso de la calculadora graficadora, están las siguientes:

- En la investigación de los límites al infinito, lograron la explicación de su significado geométrico, apoyándolo con el cambio de valores en la ventana de la TI-92, sin ninguna indicación previa.
- Se discutió el concepto de existencia de límites y se dio una definición informal de continuidad de una función en un punto.
- Construían funciones diseñadas por ellos mismos, para las cuales conjeturaban, antes de graficar, la posición de los puntos críticos.
- Establecieron que la derivada ayuda a calcular todos los puntos críticos de una función en el plano. En particular, para los polinomios, establecieron que el grado de la derivada da el número máximo de los puntos críticos.
- Dedujeron el criterio de la primera derivada como procedimiento para decidir el tipo de puntos críticos de una función.

- En casos en los que una función no tuviese puntos críticos, se apoyaron en límites y búsqueda de raíces para conjeturar la forma de la gráfica.
- La gráfica se pensaba en términos no locales, es decir, modificaban la ventana de la calculadora, para verificar si sus conjeturas en todo el plano eran válidas. Esto permitió que los conceptos de dominio y rango se adujeran como argumento a favor de la gráfica de la función.
- En los problemas de aplicación se discutía el significado de la gráfica, el dominio y rango de la función y los valores que tenían sentido como posibles soluciones del problema.

Cabe anotar que a los estudiantes se les evaluó la graficación de funciones con calculadora y sin ella. Aunque no era nuestro propósito contrastar la influencia de la calculadora en la enseñanza del Cálculo, creemos que el uso continuo de ella en el salón de clases, permite el contraste inmediato de conjeturas y la discusión de conceptos, al grado de que el estudiante puede anticipar, como ocurrió durante el curso, métodos o procedimientos de manera natural. (Lund, 1996)

Conclusión

Las prácticas descritas contemplan el Cálculo Diferencial, pero ya se tienen preparadas las relativas al Cálculo Integral. Estas se aplicarán y revisarán para su mejora en el semestre que está por iniciar. Sin embargo, creemos que el uso de la calculadora como herramienta de apoyo en el curso es de utilidad extraordinaria para corregir errores algebraicos y conjeturas falsas que distorsionan los conceptos matemáticos (Steen, 1990). No creemos que un estudiante maneje el concepto de función si no sabe que necesita especificar el dominio y el rango de ella, además de interpretar su gráfica. Nuestro propósito es que el alumno resuelva más problemas prácticos, se estudien los parámetros de una función, las sucesiones y los teoremas del valor medio y de Rolle. Esto ya ha sido investigado en un grupo de alumnos en años anteriores y esto se usará para conformar una serie de prácticas adicionales junto con las que ahora se presentan.

Referencias bibliográficas

CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades). (1996) *Programa de estudios de Cálculo Diferencial e Integral I y II.* CCH-UNAM.

Lund, C. & Andersen, E. (1996). *Introduction to the TI-92: 37 experiments in Precalculus and Calculus*. Mathware.

Mueller, U. & Forster, P. (1999). *Graphics calculator use in the public examination of Calculus: Experience of the first year*, en W. Yang et all (eds.) Proceedings of the Fourth Asian Technology Conference in Mathematics. ATCM. 86-95.

Thom, R. (1978) *Matemáticas modernas y matemáticas de siempre*, en J. Hernández. J. Piaget. G. Choquet, J. Dieudonné. La enseñanza de las matemáticas modernas. Alianza.

Schneider, M. & Gilligan, L. G. (2000). *Exploring Calculus and Differential Equations with the TI-89 and TI-92 plus*. Gilmar Publishing.

Steen, L. (1990). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy.* National Research Council.

Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal

Julia Xochilt Peralta García
Instituto Tecnológico de Sonora, México
jperalta@itson.mx

José Luis Soto Munguía
Universidad de Sonora, México
jlsoto@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Se reportan en este artículo los primeros resultados de una investigación en curso sobre algunas dificultades de aprendizaje relacionadas con el concepto de función lineal. La investigación está basada en los aportes teóricos de R. Duval sobre registros de representación semiótica y tiene dos propósitos: se trata de detectar las dificultades enfrentadas por los estudiantes para transformar una representación en otra (de una función lineal) y además diseñar una serie actividades didácticas que les ayuden a superar las dificultades detectadas. Los resultados reportados aquí provienen de la aplicación de un cuestionario a nueve estudiantes de segundo semestre de licenciatura del área económico administrativa. Se expone el cuestionario aplicado, las respuestas de los estudiantes y se analizan estas respuestas a la luz de la teoría de Duval.

1 Introducción.

Los modelos lineales son importantes en matemáticas porque permiten resolver aquellos problemas de la ciencia que se comportan linealmente y aproximar otros cuya modelación es no lineal. Las funciones reales de variable real, que tienen la forma , son uno de los modelos lineales más simples y representan para muchos estudiantes el primer contacto formal con el concepto de función. De aquí el interés mostrado por algunos investigadores, en explicar las dificultades de aprendizaje enfrentadas por los estudiantes para entender aquellas nociones relacionadas con las funciones lineales, véase por ejemplo Duval (1993), Schoenfeld (1993) y Hitt (1996).

En el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), en México, los estudiantes abordan el tema de funciones lineales en el marco de sus aplicaciones a la economía, durante el segundo semestre de su licenciatura. Sus dificultades para resolver problemas de *oferta y demanda* que se modelan linealmente son considerables y los errores que cometen al resolverlos indican que su concepto de función lineal es muy pobre.

En este artículo se reportan los primeros resultados de una investigación en curso que se llevará a cabo en dos fases:

a) En la primera se pretende establecer cuáles son las dificultades enfrentadas por los estudiantes cuando intentan pasar de una representación a otra de una función lineal, mientras realizan actividades que involucran representaciones gráficas, algebraicas y tabulares de estas funciones.
b) En la segunda, se trata de diseñar una secuencia didáctica que ayude a los estudiantes a superar las dificultades detectadas. Este diseño contempla la utilización de representaciones dinámicas construidas con el software de geometría dinámica *Cabri Géomètre II* (Laborde & Belleiman, 1994)

El marco teórico en el que se basa la investigación es la teoría de *registros de representación semiótica* desarrollada por R. Duval (1998). Este marco nos ha parecido el apropiado, no solamente porque permite explicar el nivel de conceptualización en base a los cambios entre representaciones, sino porque además los problemas de oferta y demanda exigen al estudiante la familiaridad con diversas representaciones de una función lineal.

2. Marco teórico

La teoría de Duval plantea en lo general que las representaciones semióticas utilizadas normalmente en matemáticas, no se generan de manera aislada, sino que pertenecen a sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar. Estas actividades cognitivas condicionan la estructura misma del sistema de representación. Duval (1998, pp. 177-178) caracteriza un *registro de representación semiótica* en los términos siguientes:

> "Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiósis:
>
> 1) La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado.
>
> 2) El *tratamiento* de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde esta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro...
>
> 3) La *conversión* de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial ..."

Nuestra investigación está relacionada principalmente con la tercera de estas actividades en tanto que constituye un paso indispensable para la coordinación de registros de representación y a la vez esta coordinación es "fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos [matemáticos]" (ibid, p. 176).

La actividad de conversión está íntimamente ligada al problema de distinguir un objeto matemático y su representación. Esta distinción es menos trivial en la medida en que la enseñanza se basa de manera exclusiva en un sólo registro de representación. La confusión entre el objeto y su representación conduce a una especie de aprisionamiento del objeto por el registro donde su representación se ha producido y difícilmente podrá aplicarse fuera del contexto donde ha sido generada. Las consecuencias de esta confusión son graves en una ciencia como la matemática, cuya fuerza reside precisamente en la amplia aplicabilidad de sus conocimientos. Por ello, Duval concluye que "en una fase de aprendizaje la conversión juega un papel esencial en la conceptualización". (ibid, p. 181)

Se tiene así que las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse, en el marco de esta teoría, como resultado de una conceptualización deficiente del objeto bajo estudio.

3. El Cuestionario

La primeras dificultades se detectaron con la aplicación de un cuestionario, cuyas preguntas están relacionadas con el concepto de función lineal. Para contestar estas preguntas el estudiante tenía que poner en juego el cambio entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica. En esta sección describimos el contenido de este cuestionario y un resumen de las intenciones con las que fueron elaboradas las preguntas que contiene.

La primera pregunta tiene que ver con la noción de pendiente, en ella se pretende identificar las herramientas utilizadas por el estudiante para relacionar el signo algebraico de la pendiente con la gráfica de la recta obtenida. En la segunda se trata de poner a prueba la habilidad del estudiante para identificar la linealidad en una tabla en la que aparecen los valores de la variable x contra los valores de y; esta pregunta no requiere de un cambio de registro y está relacionada más bien con la actividad cognitiva de formación en el registro tabular. La tercera está ligada a la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico de una función lineal, en ella se proporciona la gráfica de una función lineal con los datos suficientes para que la expresión algebraica pueda ser determinada. En la cuarta pregunta se presentan la función y un conjunto de cuatro gráficas que corresponden a funciones lineales, y se le pide al estudiante identificar cuál de las gráficas se corresponde con la expresión algebraica dada; en esta última pregunta se trata de verificar si el estudiante puede identificar directamente las variables visuales con los parámetros de la expresión algebraica, y si no es así, de qué herramientas se vale para convertir la expresión algebraica en la gráfica. Las preguntas del cuestionario son las siguientes:

Cuestionario

I.

a. Dibuja la recta que pasa por los puntos (2,3) y (4,5).

*b. ¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta?*____________________

*c. ¿Por qué?*____

d. ¿Qué entiendes por pendiente de una recta? ____________________

II. Analice la siguiente tabla de valores y determine cómo se relacionan las variables x e y.

x	y
0	9
2	8
4	7
6	6
8	5
10	4

Tabla 1

x	y
-4	16
-2	4
0	0
2	16
7	49
13	169

Tabla 2

x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3

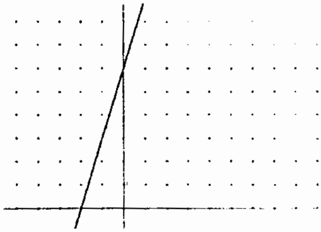
Tabla 3

Tabla 1. ¿Representa una función lineal?______¿Por qué?________________________

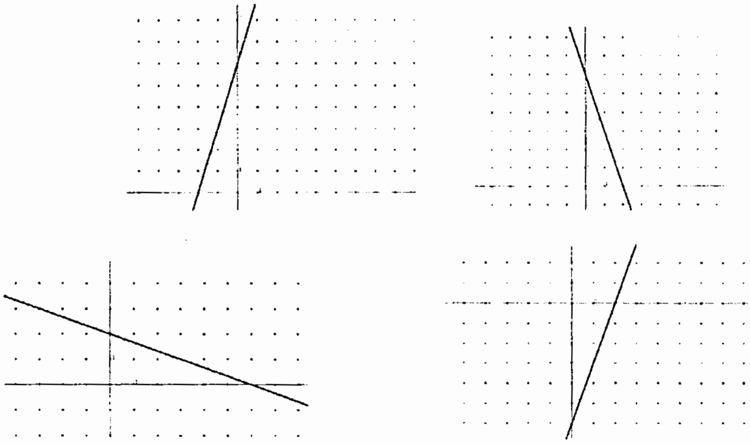
Tabla 2. ¿Representa una función lineal?______¿Por qué?________________________

Tabla 3. ¿Representa una función lineal?______¿Por qué?________________________

III. Determine la expresión algebraica cuya gráfica es la siguiente:



IV. Señale cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $y = -3x + 6$



Si considera que ninguna de las gráficas anteriores corresponde a y=-3x+6 , trace la gráfica correcta.

Este cuestionario fue aplicado a nueve estudiantes que cursaban el segundo semestre de su carrera en el ITSON. Los nueve habían mostrado, en mayor o menor grado, un bajo rendimiento al resolver problemas de oferta y demanda de mercado, en los que se requiere usar la función lineal como modelo.

4. Resultados.

Se presenta en esta sección un resumen de los resultados arrojados por el cuestionario pregunta por pregunta:

Pregunta I: Noción de pendiente.

Todos los estudiantes trazaron la recta que pasa por los puntos señalados y le asignaron a la pendiente signo positivo, las justificaciones ofrecidas son del tipo: "porque la recta se encuentra en el primer cuadrante", "porque al hacer el cálculo de la pendiente me da positivo" o bien "porque corta al eje Y en un positivo". Ninguno de los estudiantes asocia el signo de la pendiente con la inclinación de la recta. El siguiente cuadro muestra las respuestas a esta pregunta.

Pregunta I

Inciso	correctas	incorrectas	abstenciones
a)	9	0	0
b)	9	0	0
c)	0	9	0
d)	0	1	8

A pesar de que todos los estudiantes han podido calcular la pendiente solicitada, es evidente que ninguno de ellos ha intentado conectar la inclinación de la recta con el parámetro a de la expresión $y=ax+b$ y en general ninguno muestra tener un significado claro de la noción de pendiente de una recta. En estas condiciones es difícil que puedan convertir la representación gráfica de una función lineal en algebraica o viceversa.

Pregunta II. La linealidad en una representación tabular.

En esta pregunta se observó que los estudiantes recurren a graficar una por una las parejas de números mostradas en cada tabla y a partir del dibujo obtenido determinan si la relación entre las variables es lineal o no. Cuando el trazo obtenido es una recta concluyen que la relación es lineal y en caso contrario que no lo es. Esta estrategia de traducir la tabla punto por punto al registro gráfico conduce a errores, sobre todo en los casos en los que la tabla no representa una función lineal. Uno de los estudiantes, por ejemplo, después de graficar la Tabla 3 llega a la conclusión de que la gráfica corresponde a una parábola. Este caso es interesante porque ilustra muy bien el hecho de que la atención del estudiante durante la tarea, se ha centrado en la "forma" que van adquiriendo los puntos en el plano y no en la naturaleza de la relación entre las columnas. A pesar de que en las Tablas 2 y 3 las relaciones entre las columnas guardan patrones esencialmente distintos, el estudiante mencionado concluye que ambas pueden representarse gráficamente mediante una parábola. La ausencia del registro algebraico, que hubiera podido evidenciar esta inconsistencia, es notoria.

La utilización de una representación algebraica se observó apenas en un estudiante, que la estableció correctamente para la Tabla 2, una vez que percibió que los puntos no parecían configurar una recta.

Pregunta III. Determinación de la ecuación de la recta cuando se tiene su gráfica.

Al respecto de este problema, las respuestas ofrecidas por los nueve estudiantes pueden clasificarse como sigue:

- Cinco de ellos han partido de que la gráfica corresponde a una expresión algebraica de la forma $y=mx+b$ y pudieron identificar correctamente el parámetro b con la ordenada al origen, llegando a la conclusión de que $b = 6$, pero cuando trataron de extraer de la gráfica el valor de la pendiente, dos de ellos identificaron la pendiente con la abscisa al origen, llegando a la conclusión de que $m = -2$ y deduciendo por lo tanto que la ecuación de la recta es y=-2x+6. Los tres restantes recurrieron a los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados para calcular la pendiente y dos de ellos lo hicieron correctamente, pero el tercero obtuvo como puntos de intersección (-2, 0) y (6, 0) y sus cálculos obviamente resultaron incorrectos.

- Cuatro estudiantes intentaron utilizar la fórmula para determinar la ecuación de la recta, pero solo uno de ellos logró establecer la ecuación correctamente. Los tres restantes tuvieron problemas para obtener de la gráfica las coordenadas de los puntos que se requerían o bien se extraviaron en la manipulación algebraica.

En el siguiente cuadro se muestran las herramientas algebraicas que utilizaron en esta tarea y la precisión con que lo hicieron:

Herramientas empleadas	Resultado correcto	Resultado incorrecto	No usó esta herramienta
Identificación de dos puntos de la recta.	5	4	0
Cálculo de $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	5	4	0
Cálculo de m y b y sustitución en la expresión: $y = m\mathrm{x} + b$	2	3	4
Fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$	1	3	5

Pregunta IV. Conversión del registro algebraico al gráfico

Solamente uno de los nueve estudiantes identificó las variables visuales con los parámetros de la expresión y=-3+6 para llegar a la respuesta correcta. Los ocho restantes, aunque también obtuvieron una respuesta correcta, graficaron punto por punto la expresión y=-3x+6 y localizaron la respuesta correcta comparando la gráfica obtenida con las opciones propuestas.

5. Conclusiones.

Nuestro estudio revela que cuando se trata de la función lineal, la noción de pendiente representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. Esta dificultad se revela con mayor fuerza en cierto tipo de conversiones, por ejemplo cuando el registro de partida es el gráfico.

Los errores registrados no solo ponen en evidencia un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de la enseñanza, sino además una confianza excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara.

Las respuestas ofrecidas en la Pregunta IV son interesantes porque revelan que los estudiantes han encontrado en la graficación punto por punto de la función lineal, una manera de llegar a la respuesta correcta eludiendo por completo las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica.

A pesar del éxito aparente logrado por los estudiantes, el registro tabular utilizado como registro de partida ha resultado desconcertante. Las causas de este desconcierto parecieran asociadas con la utilización de la tabulación, solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma.

Puede decirse en lo general que los estudiantes, no han mostrado una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio; en el sentido de que no han mostrado una articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones. En estas condiciones es muy difícil que puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta para resolver problemas de *oferta* y *demanda*.

Referencias.

Duval, R., (1992), *Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros*. En E. Sanchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1998). Registros *de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F., (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*. (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Laborde, J. & Bellemain, F. (1994). *Cabrí-Géomètre II* (software), Dallas, Tex.: Texas Instruments.

Schoenfeld, A. (1993). The microgenetic analysis of one student´s evolving understanding of a complex subject matter domain. En R. Glaser (Ed.) *Advances in instructional psychology*, vol. IV. (pp. 55-175). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tecnología Avanzada

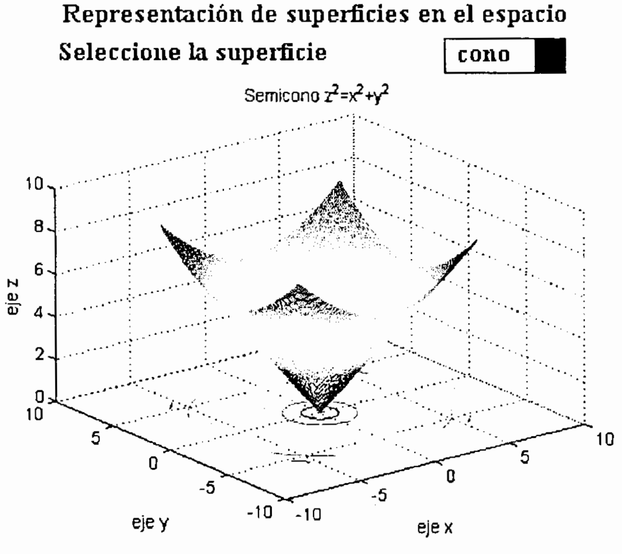


Figura 1

Algunos docentes fundamentan el no uso de este asistente matemático (básicamente en el primer año de las carreras) por no ser tan "amistoso" como otros, por ejemplo, el DERIVE. Sin embargo, esta limitación puede eliminarse utilizando las herramientas que el MATLAB ofrece para hacer rápidas GUI (*Graphical User Interface*), las cuales permiten hacer simples aplicaciones para diferentes usos en el proceso docente y cuya utilización por parte del estudiante no requiere de conocimientos de los comandos del asistente. Un ejemplo de este tipo se muestra en la Figura 1.

La misma ilustra parte de una aplicación hecha para que el estudiante seleccione una superficie, de las que le proporciona el menú, y ver su representación gráfica, incluídas las curvas de nivel. También es posible que el estudiante teclee la ecuación de una superficie que él desee obtener su representación gráfica, teniendo la posibilidad de rotarla, hacerle "zoom", etc.

Por otro lado, el MATLAB es una herramienta que los estudiantes de algunas carreras van a continuar utilizando cuando terminen de transitar por las asignaturas básicas de Matemática, e incluso en el ejercicio de su vida profesional. A modo de ejemplo, podemos citar los siguientes:

1. Los estudiantes que desde el curso pasado arriban al tercer año de la carrera de Automática están mejor preparados para cursar la asignatura Modelación y Simulación, que trabaja básicamente con el toolbox *Simulink* del MATLAB.
2. En la carrera de Ing. Informática se comenzará a impartir el MATLAB a los estudiantes de 4$^{to.}$ año como uno de los temas especiales, dada la necesidad que tienen de trabajar con el toolbox de Redes Neuronales del MATLAB aquellos que hacen proyectos y tesis en el campo de la Inteligencia Artificial.
3. Parte de los jóvenes graduados que actualmente trabajan en los centros del polo científico utilizan el MATLAB como herramienta en las investigaciones que desarrolla el centro, como es en procesamiento de imágenes y en general en la Bioinformática.

A partir de su versión 5 MATLAB permite programar aplicaciones para WEB. Esta característica permite usar este asistente para desarrollar aplicaciones de apoyo a la enseñanza de la matemática en la WEB, aplicaciones que pueden estar disponibles en una Intranet, para uso de una facultad, o en Internet (por ejemplo, para uso en cursos a distancia).

Uso de la tecnología en un contexto constructivista. El caso del cálculo de varias variables

David Warren Ruíz Márquez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, CCM. México
druiz@campus.ccm.itesm.mx

Resumen

Gran parte de las investigaciones actuales acerca del uso de tecnología (computadoras, calculadoras, Internet, etc) apuntan hacia el diseño de herramientas que ayuden a entender determinado concepto (Dibut Toledo, 2001), quien desarrolla un sitio WEB para apoyar la enseñanza de límites y continuidad, ó (Millán, Gil, 2001), quienes desarrollan guías interactivas basadas en Maple V conjuntamente con experiencias educativas tradicionales, utilizando estos talleres en forma de prácticas de laboratorio adicionales. Aquí se considera a la herramienta (la calculadora o el software) como el elemento que va a propiciar mejoras en el aprendizaje. Sin embargo, ya en (Castro, 2001) se menciona como una "metodología adicional al uso de la calculadora TI-92", a la teoría constructivista de Ausubel como una herramienta extra que puede proporcionar un ambiente propicio para el aprendizaje.

Este artículo tiene como fin exponer una experiencia dentro de esta teoría constructivista, usando la tecnología (Net Meeting y Maple V) para llevar a cabo las fases que sustentan la teoría, en el marco de un curso de Cálculo en varias variables.

Introducción

La enseñanza del cálculo en varias variables tiene como objetivo preparar a los alumnos de ingeniería para abordar los conceptos propios de sus carreras, ya sea en Ingeniería Electrónica ó en Ingeniería Mecánica, en los que el pensamiento vectorial y tridimensional son relevantes para comprender construcciones en el terreno de la fisica, basadas generalmente en una cierta forma de concebir el Cálculo Infinitesimal, como por ejemplo el gradiente, la divergencia o el rotacional. En este contexto, un alumno que ha llevado los tres cursos de Cálculo I, II y III y un curso de Ecuaciones Diferenciales (cuya estructura tradicional valdría un artículo aparte), debe integrar los contenidos de estos programas para enfrentar la tarea mencionada. Ha sido mi preocupación desde hace varios años el indagar acerca de lo que está sucediendo en el proceso de aprendizaje de los alumnos y al mismo tiempo proponer una metodología para reforzar el pensamiento visual, pero no en el sentido de apoyar la demostración razonada en un sentido formal, como señalan (Farfán, Otka, 2001), sino como una herramienta didáctica en la enseñanza y en aprendizaje desde un punto de vista constructivista del alumno.

Aspectos teóricos

El avance de la Tecnología Educativa en el mundo académico actual está apoyado en una parte importante, en el desarrollo de las teorías constructivistas del aprendizaje, y son muchos los trabajos de investigación en Matemática Educativa que apuntan en esa dirección.

Una de las teorías que están enfocadas hacia el aprendizaje en el salón de clases es la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel (1976), quien sustenta su teoría en las siguientes hipótesis:

- Un factor importante para que se dé el aprendizaje es que el alumno tenga una actitud de aprendizaje significativo (una disposición para relacionar de manera significativa el nuevo material de aprendizaje con su estructura de aprendizaje)

- Para que se dé un aprendizaje significativo, es necesario que los materiales de aprendizaje sean potencialmente significativos.

A partir de estas premisas, Ausubel desarrolla una Psicología Educativa del aprendizaje significativo que autores como (Diaz Barriga 2002) han desarrollado detalladamente para brindar al profesor una serie de estrategias de aprendizaje a través de las cuales se pueden activar los conocimientos previos llamados subsuntores por Ausubel, y que forman parte de la estructura cognitiva del alumno. Una posibilidad para activar estos conocimientos previos es hacer un diagnóstico en los alumnos a partir de problemas que se supone ya vieron, en donde a través de la discusión con cada alumno, se le motiva a buscar dentro de su estructura cognitiva, los elementos que de alguna manera permanecen latentes (aunque tal vez no muy organizados).

Aspectos metodológicos

La investigación está inmersa en el contexto de un curso normal de Cálculo en varias variables, impartido a alumnos de tercer semestre de Ingeniería en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México, en el cual se cuenta con condiciones propicias para el uso de la tecnología, tanto en el salón de clases como para el trabajo extraclase. Al principio del curso, inicié un proceso de diagnóstico para activar los conocimientos previos el cual consistió en lo siguiente:

- Escogí 12 problemas del libro de Cálculo de (Hughes, 1999), los cuales coloqué desde el inicio del semestre en un sitio WEB para que los descargaran, leyeran e incluso trataran de resolver.
- Usé NetMeeting (NM), una aplicación de Microsoft que tiene diferentes formas de comunicación (chat, voz, video, pizarra)
- Utilicé la pizarra de NM para agendar entrevistas semiestructuradas de una hora en las tardes con cada uno de los 23 alumnos, ellos en su casa y yo en la mía, durante un período de tres semanas. Algunas sesiones fueron de dos y hasta tres alumnos simultáneamente.
- Durante estas entrevistas estructuradas, escogí un problema al azar y les hice preguntas sobre lo que entendían del problema y cómo lo resolverían (de hecho, ahí mismo lo resolvieron)
- Guardé estas entrevistas en el formato de NM para su posterior análisis.

La siguiente imagen es un ejemplo de estas entrevistas:

Hola Bere

Sesión de Berenice

estaría bien que escribas en el otro color
para diferenciar

Hola P

hola Prof o.k.

En el problema te sugieren que uses un tipo de función

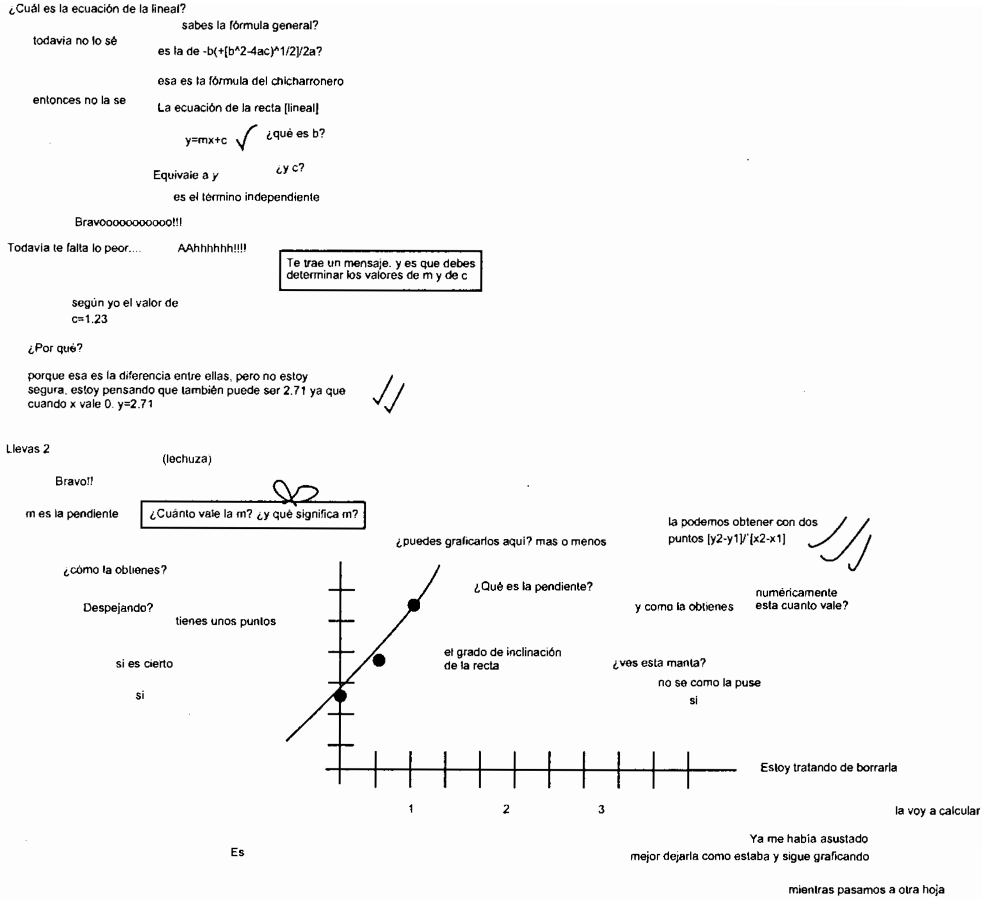
Pero comencemos. ¿Qué harías para resolverlo?

ver la diferencia que hay entre cada punto y si la diferencia entre
ellos es igual, entonces es lineal, y si la diferencia empieza a incrementar
es que es exponencial

OK. Tienes calculadora?

si ¿Cuál es lineal y cual exp?

la b es lineal y la opción a es la exponencial



El problema que se está resolviendo, parte de dos tablas de valores, una lineal y otra exponencial y el alumno tienen que decir cual es la lineal y cual la exponencial, y encontrar además la función.

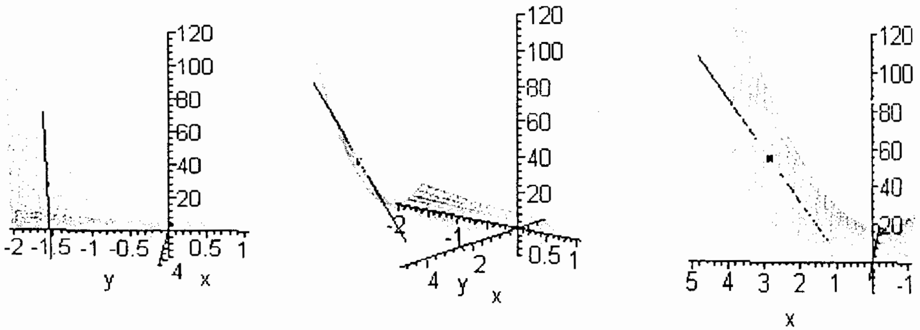
La característica de este ambiente es que, a diferencia del chat, se pueden hacer esquemas (dependiendo de la habilidad para dibujar con el ratón) o crear gráficos en otro paquete (Excel, Paint, Maple, Matemática, etc) y pegarlos en la pizarra para discutir sobre ellos. Además tiene ventajas que hacen dinámica la entrevista y se pueden reacomodar los elementos (textos, dibujos) o borrar, copiar y pegar en otro lado.

Esta herramienta me permitió indagar acerca de los conocimientos previos de los alumnos en cuanto al Cálculo de una variable, y los resultados que observé fueron que:

- Los conocimientos previos están latentes en la mayoría de los alumnos. Pocos (tres) fueron los que no pudieron contestar nada acerca de los problemas.
- Es necesario que la entrevista sea guiada para que éstos afloren.

- El ambiente virtual desinhibe la participación y es más propicio para que el alumno tenga confianza para preguntar lo que no se acuerda o no sabe.
- La entrevista permite sondear en distintas áreas de interés a medida que éstas surgen durante la misma

Los resultados forman parte de una intervención que tiene por objetivo caracterizar las condiciones en que una estrategia basada en actividades constructivistas usando Maple V potencian la habilidad de visualización de conceptos en tres dimensiones y su aprendizaje en términos lingüísticos, por lo que son hasta ahora parciales.
Después del diagnóstico, se lleva a cabo la estrategia de enseñanza usando Maple V en la mayoría de las clases, como una herramienta pedagógica, para mostrar algunos conceptos como por ejemplo, el significado geométrico de la derivada parcial

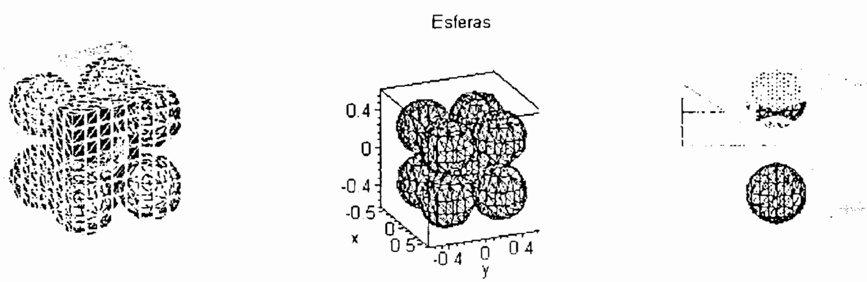


Este tipo de ejercicios se les deja de tarea, en donde tienen que calcular, dada una función, la derivad parcial respecto a alguna variable y hacer la gráfica para *comprobar visualmente* su resultado.

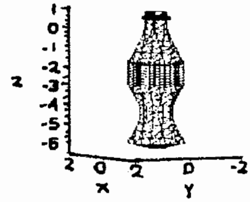
Para llevar al alumno hacia la educación visual acerca de funciones de varias variables, en este caso funciones cuadráticas (esferas, paraboloides hiperbólicos, conos, etc.) y sus propiedades dadas por su fórmula, el estudiante tiene que hacer dos trabajos, en equipo, en donde debe manipular las fórmulas y adaptarlas a la situación requerida:

1. Resolver el problema de acomodar nueve esferas de radio r (primero hay que encontrar el radio) en una caja cúbica de un metro por lado.
2. Graficar una coca-cola utilizando las funciones cuadráticas.

Estos son algunos ejemplos de las soluciones de los alumnos:



El tercer ejemplo es una construcción geométrica en 3d utilizada para encontrar el radio de la esfera.

Actualmente estoy en el segundo examen parcial, siguiendo con la estrategia y antes del tercer parcial aplicaré la segunda entrevista ya con problemas del Cálculo en varias variables, para medir el avance en la parte visual.

Los resultados obtenidos en esta fase experimental, servirán para diseñar una entrevista estructurada en que se puedan definir variables de control que puedan ser generalizables a condiciones diferentes a las que actualmente se cuenta en el ITESM.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. (1988). *Psicología Educativa*. México. Trillas.

Castro, A. (2002) *Innovaciones Tecnológicas en la enseñanza de la Matemática*; RELME 15. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 15, Buenos Aires Argentina

Díaz, F. & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. Segunda edición. McGraw-Hill.

Dibut, L. (2002*). Mathdev: Sitio web para la enseñanza del límite y continuidad de una función*; RELME 15. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 15, Buenos Aires Argentina

Farfán, R. & Okta, A. & Rivera, A. (2001). *El obstáculo del formalismo y los modos de pensamiento en el caso de transformaciones lineales*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 14. pp. 356, México.

Hughes, D. (1999). *Aplied Calculus*. John Wiley & Sons, Inc. USA

Millán, Z & Gil ,H.: *Educación Matemática con Software*. RELME 15 Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 15, Buenos Aires Argentina

Stweart, J. (1999). *Cálculo Multivariable*. Cuarta Edición.

Diseño de situaciones desde una perspectiva de la actividad humana

Jaime L. Arrieta Vera y Gabriela Buendía Abalos
CINVESTAV-IPN. México
j_arrieta@hotmail.com buendiag@hotmail.com

Resumen

El analizar las relaciones epistemológicas entre prácticas sociales y el conocimiento matemático es uno de los objetivos de una aproximación teórica denominada socioepistemología. Esto permite informar acerca de cómo se construye dicho conocimiento desde una perspectiva de la actividad que desarrollan los humanos interactivamente y tomar en cuenta no sólo la producción matemática final, sino las herramientas y los argumentos que entrar en juego. Una vez que se reconoce este origen social, podemos ver qué ocurre en sistemas didácticos por medio del diseño de secuencias cuyo origen es precisamente una socioepistemología del saber. La situación que se genera tiene pues la intención, de hacer patente la relación entre práctica y saber, en particular, entre la predicción y la periodicidad.

Introducción

Uno de los objetivos de la Matemática Educativa es formular explicaciones acerca de la construcción del conocimiento matemático. Para ello, al seno de la disciplina, han surgido diversos esquemas explicativos cuya naturaleza cognitiva analiza el *status* de los conceptos matemáticos entre los estudiantes y las construcciones mentales que deben hacer los individuos para lograr el conocimiento. Estos enfoques suelen asumir que los objetos matemáticos existen previamente y que las dificultades didácticas yacen en la distancia entre las imágenes formadas y los objetos matemáticos (Cantoral, 2000).

En la disciplina se ha acuñado el término "reificacionista"[1] para designar a aquellas aproximaciones que presentan una dialéctica proceso-objeto y giran alrededor de la construcción del objeto matemático. Este matiz en la producción matemática soslaya al propio humano como tal y a la actividad que realiza dentro del contexto social del salón de clases. Además, se está minimizando el papel de la interacción humana en la práctica matemática, se está separando al pensamiento matemático de sus orígenes en contextos y se obscurece el papel que juega el desarrollo y uso de las herramientas[2] para construir el objeto matemático (Confrey y Costa, 1996; Wertsch, 1993).

Candela (1999) afirma que para estudiar cómo se construye la ciencia en el aula, es necesario analizar no sólo las descripciones y explicaciones que se dan en el salón de clases, sino se deben indagar también "los procesos con los que se construyen estos conceptos, se legitiman

[1] Este término lo utilizamos en el mismo sentido que lo utilizan Confrey y Costa (1996) en relación a la discusión entre el "proceso" y el "objeto" al aprender matemáticas.

[2] El concepto "herramienta" lo utilizaremos según las aproximaciones socioculturales en las cuales se destaca su papel crucial como instrumentos mediadores; de esta manera la acción se considera siempre mediada por herramientas. Ver Werstch (1993).

y se organizan las teorías" (p. 32). Así, la ciencia es un campo de la cultura humana que se estructura sobre la base de grandes debates acerca de lo que son los hechos y fenómenos y la explicación de sus causas.

Argumentos y reconstrucción de significados

El carácter discursivo de la ciencia en el aula implica la producción de versiones diferentes según el contexto de las interacciones. Para entender la naturaleza y función de las distintas versiones sobre un hecho, es necesario considerar las versiones alternativas como argumentos, por eso las versiones son construcciones situacionales para el debate y no manifestaciones de ideas preconcebidas.

El carácter discursivo que le hemos conferido al conocimiento matemático escolar nos remite a actividades que desarrollan interactivamente docentes y alumnos en un salón de clases, confrontando y argumentando diferentes versiones de un fenómeno de la naturaleza. En el salón de clases podrán entonces construirse versiones alternativas tanto a partir de "evidencias empíricas" como a partir de actividades realizadas en el aula.

Desde esta perspectiva, por tanto no se estudian las representaciones que se expresan en el habla como si fueran un reflejo de la realidad o una verbalización de nociones significativas preexistentes. Esto difiere significativamente de las concepciones existentes sobre representación; por ejemplo, Vergnaud (1998) plantea el trabajo de representaciones de situaciones de la realidad mientras que, en nuestro caso planteamos que esta realidad no es preexistente ni única.

Sostenemos que para aprender ciencia no basta con la experiencia que lleva el alumno al salón de clases, pues es necesario aprender cómo se reconstruye esa experiencia en el discurso científico escolar. Para responder a las demandas del discurso científico escolar es necesario realizar reconstrucciones diversas de la experiencia física, tanto escolar como extraescolar, situadas en contextos argumentativos.

El modelo tradicional donde se presenta el proceso de cognición como la relación entre el objeto cognitivo y el sujeto cognoscente, lleva a tener una perspectiva de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica. Así por ejemplo la dimensión epistemológica es guiada por la pregunta ¿cómo se constituye el objeto de conocimiento?, la cognitiva por ¿cómo el estudiante aprende el objeto? y la didáctica por ¿cómo se enseña el objeto? El sujeto es determinado linealmente y de forma única. El profesor enseña y el alumno aprende.

En esta relación el objeto es externo al sujeto, es algo predeterminado, preexistente al proceso de enseñanza aprendizaje. Sin embargo, bajo el modelo que hemos analizado, en las prácticas escolares este objeto no está determinado, no es único y es reconstruido de acuerdo a las prácticas de los grupos sociales que participan en escenarios determinados socialmente.

En la actividad escolar, el conocimiento tiene significados propios y está conformado por versiones que se comparan y negocian; diversos significados se van redefiniendo. De esta manera se está llevando a cabo una reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares.

La nueva hipótesis consiste, entonces, en que la actividad humana es fuente de resignificaciones. Este planteamiento ha llevado a desarrollar una línea de investigación que considera necesario "dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza." (Cantoral, 2000). A esta aproximación se le llama socioepistemológica y una de sus tareas principales es dar evidencias sobre la nueva hipótesis.

Herramientas y modelos

La herramienta en esta investigación es entendida, en el sentido de una ampliación del concepto herramienta de Engels: es algo que utiliza el hombre para modificar a la naturaleza; la especialización de la mano implica la aparición de la herramienta y ésta implica actividad específicamente humana.

La manufacturación no sólo es transformación sino intencionalidad, y es esto último lo que le da el carácter social a la herramienta. Un objeto en sí mismo no es herramienta, es herramienta hasta que el hombre lo utiliza con una intención, determinada no individualmente, sino socialmente. Así, una piedra, que es un objeto, se vuelve herramienta en tanto es usada con cierta intencionalidad, por ejemplo, como martillo para golpear. Las herramientas no sólo son objetos físicos, también lo son el lenguaje y otros entes abstractos.

Así, la importancia de las herramientas no está en las herramientas en sí, sino el programa que orienta su uso. En este sentido más amplio es cuando las herramientas adquieren un sentido propio como amplificadores de las capacidades humanas e instrumentos de la actividad del hombre.

El modelo de un fenómeno es una herramienta usada para transformarlo y pretendemos mostrarlo como recurso discursivo utilizados para argumentar versiones y construir realidades.. Un modelo es algo utilizado en sustitución de lo modelado; la manipulación del modelo nos permite entender y predecir el comportamiento del fenómeno, así como validar hipótesis y elaborar estrategias para la intervención. Entonces, un modelo es una herramienta para interpretar e intervenir en una situación o en un fenómeno.

La modelación no es representación. La modelación, a diferencia de la representación, es un acto que refleja la intencionalidad humana y que no puede ser juzgado por su corrección independientemente de ella. Así, el modelo es un ente para la intervención en la naturaleza, es una herramienta, es algo utilizado para comprender e intervenir en lo modelado, la representación es de alguna forma el reflejo de una "realidad", de una situación o conocimiento preexistente. Los esquemas, al ser una articulación de dichos modelos, no son estructuras preconcebidas sino que serán el resultado de las actividades que se llevaron a cabo.

Diseños de situaciones a partir de la actividad humana

El acercamiento socioepistemológico desarrolla estrategias de investigación de naturaleza epistemológica donde ésta es entendida como el estudio de las circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento. Que la epistemología sea a través de la actividad humana permite tomar como objeto de estudio situaciones que no están definidas en una estructura matemática y que, sin embargo, están presentes. Estas situaciones se presentan cuando se estudia al hombre haciendo matemáticas y no sólo la producción matemática hecha por él. Por ello, las explicaciones que se brindan son en función de las características del humano.

Entonces, lo socioepistemológico debe significar el reflejo de cualquier individuo al hacer matemáticas y, en segundo lugar, considerar que el funcionamiento mental debe estar en correspondencia con el lenguaje de herramientas que resulta de esa actividad.

Proponemos dos secuencias diseñadas bajo una visión socioepistemológica, en las que el objetivo es evidenciar el uso de las herramientas y las actividades necesarias para construir dicho conocimiento. Estas actividades consistirán en una reflexión sobre el paso de las características físicas de los fenómenos a los símbolos (tablas, gráficas, expresiones algebraicas, etc.) y de éstos a los fenómenos.

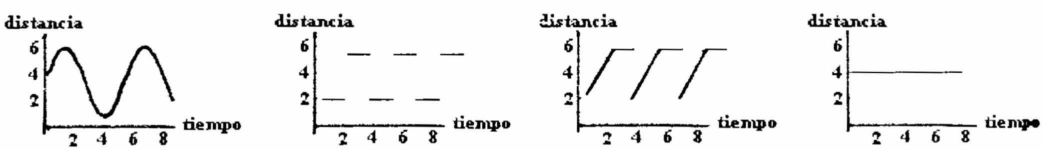
Para las primeras actividades, nos hemos apoyado en el uso de sensores de movimiento. La pregunta sobre la que se trabaja es: Un cuerpo se encuentra frente al sensor; ¿cómo debe ser el movimiento de dicho cuerpo para que la gráfica resultante sea del siguiente tipo?

Posteriormente, se pide relacionar los cambios en el movimiento con los cambios en las gráficas: cómo tendría que ser el movimiento para que la gráfica se desplazara hacia arriba o hacia abajo; cómo sería la gráfica si el movimiento es más rápido o más lento.

La última parte de las actividades tiene la intención de mostrar que la predicción es un esquema[3] argumentativo que permite construir la noción de periodicidad. El diseño realizado parte de la necesidad de describir un movimiento que se lleva a cabo en el tiempo con la finalidad de manipularlo. En la primer secuencia, se presentan ocho gráficas de movimientos, se le pide al alumno describirlas y agruparlas por semejanzas y diferencias.

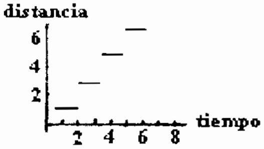
Estas gráficas son de movimientos regulares, donde el eje x representa el tiempo, y el eje y, distancia, pero con diferentes *tipos de regularidad.*

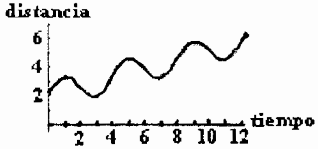
a) Eje x : se repite el mismo intervalo de tiempo
   Eje y : se repite el mismo rango durante todo el tiempo

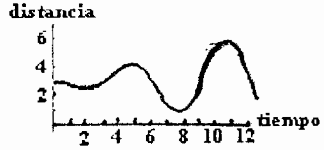


[3] Por "esquema" entendemos al resultado de una serie de actividades alrededor de la construcción del conocimiento y no a algo fijo o preestablecido.

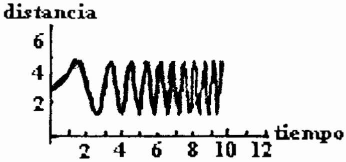
b) Eje x : se repite el mismo intervalo de tiempo
   Eje y : un cierto patrón de comportamiento dependiente del tiempo.







c) Eje x : intervalos con un cierto patrón de comportamiento dependiente del tiempo.
   Eje y : se repite el mismo rango durante todo el tiempo.



A continuación se pide que prediga cuál sería la posición del móvil en cada caso para algún tiempo dado, por ejemplo t = 231. Los significados del alumno acerca de lo que es un movimiento regular entran en juego y generarán los procedimientos que lleve a cabo para poder predecir en el tiempo pedido. De esta manera, el alumno tendrá la necesidad de distinguir el tipo de regularidad que presenta una gráfica, resignificando así sus concepciones. Lo relevante es que la práctica que motiva esta reconstrucción es la predicción.

Comentarios finales

Hemos reconocido que la fuente de reconstrucción de significados que permite generar conocimiento es la actividad humana, a través de las prácticas en las que el individuo se involucra al hacer matemáticas para fomentar el desarrollo del saber. El interés de la socioepistemología como aproximación teórica consiste en cómo desarrollar esas prácticas sociales porque como consecuencia se va a desarrollar el conocimiento.

En particular, hemos abordado las actividades que llevan al uso de la modelación como una práctica y la relación entre la predicción como práctica y la periodicidad. Nuestro interés radica entonces en las formas cómo desarrollar los objetos matemáticos más que los objetos en sí y pretendemos mostrar cómo a través de una visión socioepistemológica, una secuencia puede evidenciar la existencia de elementos alrededor de una definición. Estos elementos, junto con la propia definición, dan evidencias empíricas acerca de que es en el uso de ciertas herramientas donde aparecen, se estructuran y se movilizan como argumento ciertas nociones matemáticas.

El estudio de las prácticas y las herramientas alrededor de la construcción del saber matemático serán la base de una epistemología para reorganizar la obra matemática.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. & Buendía, G. (2001). *El diseño de situaciones desde la perspectiva de la actividad humana*. Serie: Antologías. No. 1. Programa Editorial de la Red Nacional de Cimates

Buendía, G. & Cordero, F. (2001). *Una epistemología del concepto de periodicidad a través de la actividad humana*. Artículo aceptado para su publicación en Actas de la 15 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Buenos Aires, Argentina.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula.* México: Paidós Educador

Cantoral, R. (2000). *Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa.* En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 13. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 54-62

Confrey, J. & Costa, S. (1996). *A Critique of the Selection of "Mathematical objects" as Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1(2),. 139-168.

Cordero, F. (2001) *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4(2) 103-128.

Vergnaud, G. (1999). *A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education.* The Journal of Mathematical Behavior. Vol. 17 (2).

Wertsch, J. (1993). *Voces de la Mente*. España: Visor Distribuciones, S.A

Papel de un asistente matemático en la enseñanza actual de la Matemática en Ingeniería.

María Gulnara Baldoquín de la Peña
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (ISPJAE), C. Habana, Cuba
mgulnabp@yahoo.com

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta de utilización del asistente matemático MATLAB en la enseñanza de las asignaturas de Matemática para carreras de Ingeniería, en particular para aquellas de perfil eléctrico, que sirva como herramienta de apoyo al sistema de conocimientos, habilidades y valores asumidos en el plan de estudio del profesional. Un último objetivo del trabajo es mostrar, en el marco de una actividad taller y con el uso de una computadora, los aspectos esenciales sobre el MATLAB que debe conocer un docente (incluyendo la construcción de interfaces gráficas con MATLAB) para que posteriormente, de forma casi autodidacta, pueda incursionar en el trabajo con este asistente. El trabajo se apoya en la fundamentación de una propuesta de impartición de la disciplina de Matemática en la carrera de Automática con el asistente matemático MATLAB (Baldoquín et. al, 20000). El mismo ha estado implementándose desde hace más de un año en las carreras de Ing. Automática y Telecomunicaciones del ISPJAE.

Introducción

El creciente desarrollo de la informática en las universidades como parte de la estrategia global de informatización de la sociedad, y la existencia de múltiples asistentes matemáticos como DERIVE, MATLAB, MATHEMATICA, MAPLE, etc. y de calculadoras gráficas programables como las HP, TI, etc, ha provocado en los últimos años la incorporación de estas herramientas, de manera progresiva, en los progresos de enseñanza y aprendizaje de las asignaturas de Matemática en las diferentes carreras de educación superior.

Algunas ventajas de la utilización de los asistentes matemáticos como herramienta de apoyo de la enseñanza son:

1. Permiten la interiorización de conceptos a partir de su "visualización". Un ejemplo está en el estudio del concepto de límite de funciones reales de variable real.
2. Facilitan la solución de problemas reales, relacionados fundamentalmente con problemas de la especialidad que cursa el estudiante, objetivo que hasta entonces era imposible en la práctica por requerir gran cantidad de cálculo y/o almacenamiento.
3. Permiten desarrollar la habilidad de algoritmizar, al confeccionar los propios estudiantes programas simples en los que se aplican conceptos y métodos estudiados en las asignaturas.
4. Contribuyen al conocimiento y a la formación de habilidades en el área de la computación.

En este trabajo se presenta una propuesta de utilización del asistente matemático MATLAB en la enseñanza de las asignaturas de Matemática para carreras de Ingeniería, en particular para aquellas de perfil eléctrico, que sirva como herramienta de apoyo al sistema de conocimientos, habilidades y valores asumidos en el plan de estudio del profesional. El trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección I se fundamenta la conveniencia del uso del asistente matemático MATLAB en la impartición de las diferentes asignaturas de Matemática en una carrera de Ingeniería (Harman, et. al, 2000). En la sección II se exponen algunos ejemplos que incorporan el uso de este asistente matemático a un proceso de enseñanza-aprendizaje donde se dan condiciones para utilizar métodos problémicos y técnicas participativas, y donde el estudiante se conciba como un sujeto activo, constructor de su propio conocimiento.

Un último objetivo del trabajo es mostrar, en el marco de una actividad taller y con el uso de una computadora, los aspectos esenciales sobre el MATLAB que debe conocer un docente para que posteriormente, de forma casi autodidacta, pueda incursionar en el trabajo con este asistente. Se mostrará cómo se resuelven problemas como los planteados en la sección II del trabajo. Igualmente se muestra, a través de ejemplos simples, cómo construir interfaces gráficas con MATLAB así como la potencialidad del mismo como lenguaje de programación.

El trabajo se apoya en la fundamentación de una propuesta de impartición de la disciplina de Matemática en la carrera de Automática con el asistente matemático MATLAB (Baldoquín et. al, 2000). El mismo ha estado implementándose desde hace más de un año en las carreras de Ing. Automática y Telecomunicaciones del ISPJAE.

I. Incorporación del MATLAB en la enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería.

De los diversos asistentes matemáticos profesionales existentes en la actualidad, MATLAB es uno de los más usados en Ingeniería. Según datos de *Mathworks*, se utiliza en más de 200 universidades en el mundo. Entre sus ventajas, muy en particular para carreras de perfil eléctrico, están la combinación de:

- Poderosa funcionalidad en la construcción de gráficos y manipulación de imágenes.
- Herramienta para el cálculo numérico y simbólico, contando con múltiples *toolboxes* como el *Simulink*, Procesamiento de imágenes, Procesamiento de señales, Optimización, Matemática Simbólica, Estadística, Bases de datos.
- Posibilidad de programación de tareas a través de un poderoso y sencillo lenguaje.
- Posibilidad de construcción de interfaces gráficas para aplicaciones basadas en MATLAB.
- Posibilidad de trabajar con problemas de grandes dimensiones.
- Poseer una extensa documentación

II. Uso del asistente matemático MATLAB en el proceso de enseñanza-aprendizaje

A continuación se muestran algunos ejemplos que corresponden a contenidos diversos de Matemática que se imparten en la carrera de Automática, y que se insertan en diferentes tipos de actividades del proceso de enseñanza aprendizaje, en todos los casos utilizando el asistente matemático MATLAB.

Ejemplo 1 (a ser resuelto por el estudiante en una actividad de laboratorio, en la asignatura Matemática II)

> Por un capacitor con carga inicial cero comienza a circular una corriente que varía con el tiempo t según una función continua $i(t)$ de la cual se conoce su representación gráfica y no su expresión analítica.
>
> Se desea obtener, de forma aproximada, la carga q del capacitor al cabo de t_1 segundos.

Modelación del problema:

Un modelo simple que establece una relación entre la carga q del capacitor y la corriente que por él circula es la siguiente: $q = \int_0^{t_1} i(t)dt$

La integral anterior no puede calcularse utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo.

Sin embargo, si el estudiante representa, usando el MATLAB, la función *i(t)* y el intervalo **[0,t$_1$]** dados en el problema y combina el uso de las escalas de los ejes de la figura y el comando grid (rejilla), al quedar una figura limitada por la gráfica de y los ejes, encerrada en una cuadrícula, el estudiante puede contar el número de cuadrados completamente contenidos dentro de la figura, por ejemplo y calcular de forma aproximada el área bajo la curva, obteniendo así una solución aproximada del problema, la cual será tanto mejor en la medida en que más fina sean las particiones realizadas por el uso de la rejilla y las escalas de los ejes.

Ejemplo 2 (a ser utilizado por el docente en un aula especializada o laboratorio como motivación del tema de problemas mal condicionados en la asignatura Matemática Numérica).

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a. $x + y = 2$
$x + 1.0001y = 2.0001$

b. $0.0001x + y = 2$
$x + y = 2.0001$

En ambos casos, resolver el nuevo sistema que resulta de modificar muy ligeramente los términos independientes del sistema, por ejemplo, el coeficiente 2.0001 por 2.0002

Otro ejercicio de este tipo es resolver la ecuación $(x-1)^6 = 0$ y posteriormente introducir una pequeña perturbación en la ecuación a resolver: $(x-1)^6 = 10^{-9}$

Discutir con los estudiantes qué piensan de los resultados obtenidos.

Ejemplo 3 (a ser desarrollado por el docente en un aula especializada, en la asignatura Matemática I)

Se plantea a los estudiantes un problema cuya modelación resulta en encontrar, si existe, un cero de la función polinomial $f(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 60x + 30$ en el intervalo [2,4].

Usando algunos de los comandos que dispone el MATLAB para la representación de funciones en R^2 se observa que en dicho intervalo existe una sola raíz de la función y que la misma puede ser un número irracional. Se discute con los estudiantes cómo podría hallarse una aproximación de esta raíz. Una vez identificada como una vía de solución la aplicación sucesiva del Teorema de Bolzano, se discute cómo hacer un simple algoritmo en pseudocódigo para implementar el método de bisección. El docente lleva programado el algoritmo, así como una aplicación donde se va ilustrando gráficamente el resultado de cada iteración, así como la aproximación obtenida.

La Figura 2 muestra en un mismo gráfico un resumen de lo obtenido desde la primera a la cuarta iteración. Debajo del eje de las x aparecen los valores que corresponden a los puntos medios de cada uno de los subintervalos analizados. Cada valor por encima del eje de las x indica la iteración en que se obtuvo cada aproximación de la raíz. Finalmente se compara la solución obtenida con aquella producto del uso del comando *solve* del MATLAB.

En la asignatura Matemática Numérica los estudiantes realizan tareas por equipos donde deben programar con el lenguaje MATLAB diversos métodos numéricos de solución de ecuaciones.

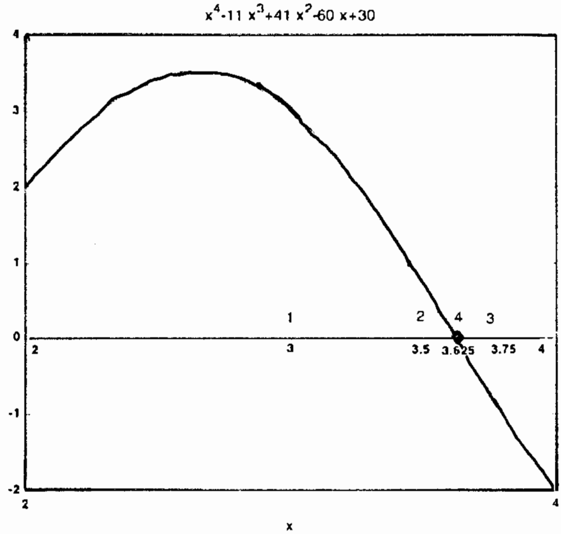


Figura 2

Conclusiones

1. El asistente matemático MATLAB ofrece ventajas al ser utilizado en la formación de ingenieros, en particular de los ingenieros de perfil eléctrico. Su uso en la impartición de asignaturas de Matemática, en los primeros años de la carrera, favorece el desarrollo de otras habilidades que deben adquirir los estudiantes en asignaturas de la especialidad.
2. La introducción del MATLAB en el proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina Matemática se concibió y se inserta dentro del modelo de enseñanza asumido de modo que los objetivos a lograr con el mismo sean distribuidos durante la impartición de las diversas asignaturas de la disciplina

3. Se muestra una parte ínfima de problemas que corresponden a contenidos diversos de Matemática que se imparten en la carrera de Automática, y que se insertan en diferentes tipos de actividades del proceso de enseñanza-aprendizaje, en todos los casos utilizando el asistente MATLAB.

Referencias bibliográficas

Baldoquín , M. & Fernández , B. (2000) *La integración de asistentes matemáticos en la disciplina de Matemática para la carrera de Automática*, ICECE 2000: International Conference on Engineering and Computer Education, Sao Paulo, Brazil.

Harman, T. & Dabney, J. & Richert, N. (2000) *Advanced Engineering Mathematics with MATLAB*, Brooks/Cole Publishing Company, February 2000.

Un curso de integrales definidas con el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación

Yolanda de J. O'Farrill Dinza, Sonia Hernández Rodríguez y Eugenio Carlos Rodríguez
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría". Cuba.
yoly_cu@yahoo.com, soniah@ind.ispjae.edu.cu, ecarlos@ind.ispjae.edu.cu

Resumen

Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones reclaman una nueva configuración del proceso didáctico y metodológico tradicionalmente usado. Es necesario la construcción de un entorno de aprendizaje con el objetivo de crear condiciones donde el conocimiento y las relaciones entre alumnos y profesores sean el factor principal.
En Cuba se realizan enormes esfuerzos para el uso masivo de estas tecnologías. En la Educación Superior se hacen sentir los impactos del progreso tecnológico y se están dando los primeros pasos en el trazado de acciones necesarias para la implementación de las TIC en la enseñanza.
El presente trabajo aborda la concepción de un modelo pedagógico y recoge además una experiencia en la impartición de un Curso de Integrales Definidas con el uso de este modelo mediante una Plataforma para la Educación a Distancia.

Introducción

La penetración de estas tecnologías en todos los sectores supone sumergirse de lleno en un mundo digital. La comunidad universitaria no está ajena a este proceso de evolución tecnológica. Estos avances han determinado la implementación de la educación a distancia en su nueva modalidad, la educación en línea (educación virtual), revolucionando todos los aspectos de organización y administración de la educación; por lo cual se hace necesario iniciar un verdadero cambio.

En 1997 en la Conferencia de Rectores de Universidades Españolas (CRUE, 1997) se hacía referencia a varios tipos de condiciones, con las cuales los autores están muy de acuerdo, para que se hiciera posible ese proceso de cambio, ellas son:

1. Acceso de estudiantes y profesores a la infraestructura apropiada.
2. Desarrollo de metodologías para el aprovechamiento docente de las TIC.
3. Desarrollo de materiales docentes basados en las TIC.
4. Formación del profesorado y los estudiantes.
5. Fomento del uso de las TIC.

Estos medios reclaman una nueva configuración del proceso didáctico y metodológico tradicionalmente usado.
Es necesaria la construcción de entornos de aprendizajes con el objetivo de crear condiciones donde el conocimiento y las relaciones entre alumnos y profesores sean el factor principal para formar la sociedad del conocimiento. En dicha construcción deben tenerse en cuenta: la tecnología necesaria para la implementación del modelo pedagógico que se propone, los contenidos, el modelo pedagógico para llevar a cabo la enseñanza aprendizaje, los profesores y los estudiantes.

Nos propusimos realizar una experiencia ofreciendo un Curso de Integrales Definidas con el uso de las TIC con el objetivo de analizar la factibilidad en las condiciones de nuestra situación concreta. Por tal motivo fue necesario analizar la secuencia y tipos de actividades de este tema en el Curso Regular Diurno (CRD). El tema consta de doce actividades en seis semanas de clases. De estas tres son conferencias tres clases práctica, tres clases mixtas (clases compuestas por contenidos teóricos y prácticos), un seminario, un laboratorio donde se trabaja con el Asistente Matemático DERIVE y la evaluación del tema. Las doce actividades se realizan en el aula con el profesor siempre presente.

Los autores son del criterio que siempre que se haga referencia a una enseñanza basada en las TIC es necesario caracterizar las condiciones en que se llevará a cabo la enseñanza, entiéndase: alumnos, curso, contenidos y materiales, profesores, el modelo que se propone y el soporte tecnológico a utilizar.

Los alumnos.

Para una enseñanza basada en las TIC, el alumno debe ser un sujeto activo y responsable de su formación; es decir tiene que estar preparado para el autoaprendizaje, tienen que poseer los conocimientos precedentes necesarios para la buena asimilación de los contenidos nuevos y para el buen desempeño con la tecnología es necesario el dominio de cualquiera de los Sistemas Operativos basados en Windows, así como el Microsoft Office, Correo Electrónico, Foro de Discusión, Charlas en Línea (Chat), navegación en Internet y de los softwares específicos de la asignatura con los cuales sea preciso trabajar .

La experiencia se llevó a cabo con un grupo de estudiantes del segundo semestre del primer año del CRD de la carrera de Ingeniería Industrial, los cuales tiene una edad promedio de 18 años de edad. Se les realizó una encuesta para conocer como ellos valoran sus conocimientos tanto en Matemática como en los temas de la disciplina Computación que interesan para llevar a cabo la experiencia. De los 24 estudiantes del grupo seleccionado para realizar la experiencia se encuestaron 20. Los resultados reflejaron la mala situación en que se encontraban los estudiantes en los temas relacionados con las TIC por lo que fue necesario impartir un pequeño curso sobre las herramientas necesarias para el aprendizaje con el uso de la tecnología, así como la familiarización con el soporte tecnológico que se utilizaría en el curso. Es bueno señalar que muchos de estos estudiantes en el primer año de la carrera no tienen desarrolladas habilidades de estudio independiente y que por ser tan jóvenes aún están por formar en ellos valores en los cuales juega un papel muy importante la relación directa con el profesor y el resto de los integrantes del grupo.

El Modelo y el Curso.

Según Keegan (1996), en la actualidad, se entiende por educación a distancia, un sistema tecnológico de comunicación bidireccional que sustituye la interacción que se produce en el aula entre alumno y profesor, como medio preferente de enseñanza por una acción sistemática y conjunto de diversos recursos didácticos y el apoyo de una organización tutorial que, propicie el aprendizaje autónomo de los estudiantes. Dentro de sus características fundamentales pueden citarse: no-coincidencia en tiempo y lugar de profesores y estudiantes, la utilización de las tecnologías informáticas para la instrucción y la comunicación.

Pero a pesar de que en nuestro país se prioriza el equipamiento con tecnología de avanzada a las instituciones de Educación Superior y se ha perfeccionado el programa de la Disciplina Computación, lo cual exige el uso de ésta en la formación de los estudiantes y la superación de los profesores, existen dificultades para que el empleo de la computación y las TIC se acerque a la altura del nivel que existe actualmente en las Universidades de excelencia. Estas dificultades no permiten pensar en una enseñanza totalmente a distancia en su nueva modalidad (enseñaza en línea o virtual) pues es necesario la creación de entornos virtuales adecuados para la enseñanza basada en la interacción y el trabajo colaborativo. Este tipo de enseñanza requiere para cada alumno y profesor soporte técnico: una computadora y una infraestructura en las comunicaciones, que permitan el acceso a la información y la comunicación tanto síncrona como asíncrona entre estudiantes, estudiantes y profesores y entre profesores a cualquier hora y desde cualquier lugar. Al no poder contar, en estos momentos, con tales exigencias implica que sean estas las principales dificultades objetivas actuales que hacen que no tenga sentido pensar en un modelo de enseñanza totalmente a distancia con el uso de las TIC.

Teniendo en cuenta lo expresado en los párrafos anteriores, el hecho que los estudiantes por ser de CRD deben vencer los contenidos en un tiempo determinado, que muchos de ellos no tienen desarrolladas habilidades de estudio independiente, así como que en ellos aún están por formar valores importantes en la relación alumno-profesor-grupo nos propusimos para la enseñanza del tema un **Modelo Mixto Flexible**.

Mixto: Porque está concebido para un programa de actividades presénciales y actividades no presénciales; es decir, los alumnos deben asistir al aula a recibir algunas clases y continúan su formación en línea con aquellos contenidos que no reciben presencialmente.

Flexible: Porque no se establece un orden en los momentos presénciales y los no presénciales. Estos momentos están en dependencia de la complejidad de la asignatura y de sus temas, de las conocimientos previos necesarios para la asignatura que poseen los estudiantes y las habilidades de estos para el aprendizaje.

Por presencial se entiende aquella actividad que se realiza en el aula, y por no presencial es aquella en la que la actividad se realiza a través de la tecnología, donde la comunicación puede ser síncrona (coincidencia en tiempo, pero no en lugar de los participantes) y asíncrona (no coincidencia en tiempo y lugar de los participantes). Aunque valga señalar que en nuestro caso, en nuestras condiciones actuales, no es exactamente así, porque necesariamente hay que acudir a una institución, para acceder a la tecnología por lo que es posible encontrar a los participantes de una actividad en el mismo lugar y a la misma hora, la diferencia radicaría en que estén quizás, en máquinas diferentes.

Una visión general de este proceso se muestra en la tabla siguiente:

Semana	Lección	Fecha de publicación	Fecha de realización	Contenido	Forma	Recursos utilizados
1			16/01/02	Integral Definida. Aplicaciones.	Presencial	Power Point, DERIVE, Pizarra y Plumones.
1	1	16/01/02		Teoremas Fundamentales del Cálculo Integral. Propiedades. (Contiene un Seminario offline)	No Presencial	Tablón de Anuncios. Foro de Discusión, Correo Electrónico, DERIVE, Escritorio Virtual
4		16/01/02	04/02/02	Seminario sobre Aplicaciones	Presencial (Retroalimentación)	DERIVE, Pizarra y Plumones.
2	2	16/01/02	23/01/02 (Consulta)	Integral Indefinida. Primitiva. Propiedades. (Contiene una Consulta online)	No presencial	Tablón de Anuncios, Correo Electrónico, DERIVE. Charla en Línea (Chat). Escritorio Virtual.
3			31/01/02	Método de Integración por Sustitución.	Presencial	Power Point, DERIVE Pizarra y Plumones.
5	3	04/02/02	11/02/02 (Seminario)	Método de Integración por Partes. (Contiene un Seminario online)	No presencial (Retroalimentación)	Tablón de Anuncios. Correo Electrónico. Charla en Línea (Chat). DERIVE, Escritorio Virtual.
5		04/02/02	14/02/02	Método de Integración por Fracciones Simples.	No Presencial	Tablón de Anuncios. Correo Electrónico, DERIVE, Escritorio Virtual.
			18/02/02	Sistematización del Tema.	Presencial (Retroalimentación)	Pizarra y Plumones.
6		16/01/02 (La información de la fecha de realización)	21/02/02	Evaluación Final del Tema (Escrita y Oral)	Presencial	DERIVE

Tabla 1. Programa de actividades del curso para la enseñanza con el uso de las TIC.

Para la forma presencial se seleccionaron aquellos contenidos que por su complejidad serían muy difíciles para que los estudiantes llegaran solos a interiorizar los mismos, así como actividades concebidas para el análisis y discusión de aspectos tanto teóricos como prácticos estudiados de forma independiente en los momentos no presénciales, lo cual sirvió de retroalimentación además de lograr la interrelación del grupo.

Para los momentos no presénciales se planificó: un Foro de Discusión (Seminario offline)sobre las Condiciones de Integrabilidad de una Función, aspecto este muy rico para el debate en tanto conecta con otros contenidos importantes de la Matemática como son la Continuidad y el Acotamiento de una Función, una Charla en Línea (Chat) (Seminario online) sobre el Método de Integración por Partes por ser, de los métodos de integración, uno de los más sencillos y prestarse para intercambiar criterios y tratar aspectos teóricos sin necesidad de utilizar símbolos matemáticos porque la herramienta de comunicación no soporta la simbología matemática. Para esta actividad se dividió el grupo en cuatro subgrupos de seis alumnos dedicándole 45 minutos a cada uno de ellos para la discusión del tema, se planificó además una Consulta en Línea (también una charla en línea) pero a diferencia de la anterior la profesora permaneció en línea durante dos horas para las aclaraciones de dudas. Las consultas a través del Correo Electrónico, estas eran realizadas en el instante en que al alumno le surgieran las mismas siempre y cuando estuviese él conectado, pero no el profesor. Fue interesante pues enviaban a la profesora documentos adjuntos con parte de la solución de un ejercicio y en el texto del mensaje electrónico las dudas. Estas por supuesto, no eran necesariamente aclaradas de inmediato, dependía de la hora en que el profesor revisara el correo para dar respuesta a los mensajes.

Para la implementación del curso se contó con dos laboratorios de 10 computadoras cada uno. Durante el período que duró la experiencia se le garantizó al grupo seis horas de tiempo de máquina semanales, lo que no quiere decir que era la única posibilidad que tenían; ellos podían lograr algunos tiempos más por medio de su gestión personal, de no lograrlo, al menos tenían seis horas garantizadas.

Los materiales.

La cantidad y calidad de la información debe estar en función del estudiante así como del tiempo que dispone para cada actividad.

Los materiales sobre los diferentes formatos son el soporte de la información del curso. Para potenciar el nivel tecnológico como sostén básico de los contenidos a tratar, se debe ser cuidadoso con el diseño de los materiales (Gisbert, M., 1996) Toda versión en papel debe poseer las cualidades de hipermedia (interacción y búsqueda). La producción de ellos debe ser realizada por o bajo la dirección de profesionales competentes, no-solo en los contenidos, sino también en el diseño para cada uno de los formatos que intervienen. Por lo que en la concepción de la enseñanza basada en las TIC se requiere de un diseñador experto en hipermedia o de un fuerte proceso de capacitación a los profesores en el diseño de materiales con tales características.

Todo el contenido del tema se preparó en formato html con animaciones realizadas en Macromedia Flash para la mejor interiorización del concepto de integral por parte del estudiante. A disposición del estudiante se encontraban además la instalación del DERIVE 5 (Asistente Matemático), enlaces a sitios Web donde está muy bien tratado este tema y las fichas de los textos a utilizar para su estudio individual. Estos aún no se encontraban en formato digital para la experiencia, pero pronto estarán pues ya se está trabajando en tal sentido.

Los profesores.

Para la utilización de las TIC en la enseñanza además de contar con profesores de experiencia en la asignatura como objetivo principal a cumplir está la necesidad de capacitarlos, actualizarlos, entrenarlos con el uso de las TIC En el caso de nuestra experiencia se contó con una profesora graduada del Pedagógico Superior en Matemática, MSc de la Educación Superior con experiencia de 20 años de trabajo en la Educación Superior en la impartición de la asignatura y con dominio de la tecnología para la Tele-Educación.

La plataforma.

Se requiere un Sistema que permita administrar los recursos y su funcionamiento. Debe permitir además que los contenidos, materiales, alumnos y profesores posean una estructura que facilite tanto el aprendizaje colaborativo como el autoaprendizaje. Nos dimos a la tarea de investigar sobre las diferentes herramientas, entre ellas MicroCampus y MundiCampus así como otras que existen en el mercado para decidirnos por una de ellas.

Se utilizó la plataforma MundiCampus elaborada por profesores investigadores del Centro de Estudios de Ingeniería de Sistemas (CEIS) de nuestro Instituto y se encuentra en nuestra institución a disposición de todos los profesores. A los efectos de la elaboración de un curso, son relevantes las capas denominadas Aula Virtual y Escritorio Virtual, ya que es en ellas en las que se incluyen los materiales y herramientas didácticas.

Aula Virtual. Para cada curso existe un Aula Virtual que es una traslación del aula física al mundo digital. En ella se incluyen todas las facilidades de comunicación del alumno con su profesor, sus compañeros, su coordinador administrativo, etc. y tiene acceso a recursos específicos del curso (centro de documentación, biblioteca, enlaces, softwares, etc.) y al Escritorio Virtual.

Escritorio Virtual. Es el "espacio" de trabajo individual del alumno. El símil en este caso es su mesa de trabajo, donde encuentra los materiales didácticos sobre los que tiene que trabajar: lecciones, ejercicios, etc.

MundiCampus le permite al profesor seguir la traza de la ruta del aprendizaje seguida por el alumno durante el curso. Esto es posible debido a que el sistema le muestra al profesor, el número de acceso a las lecciones, la cantidad de accesos a los diferentes recursos, el tiempo que demoró en ellos, etc.. Además marca el itinerario del aprendizaje, ofreciéndole así la facilidad al alumno de continuar el curso, si lo desea, en el punto en que lo abandonó en una sesión previa. Otro aspecto que funciona en paralelo a lo anteriormente planteado es el seguimiento de la realización de ejercicios, ya que si dentro de cada tema o módulo se encuentran ejercicios, el sistema guarda información sobre la realización o no de los mismos, la fecha, la hora, y en caso de haberlos realizado si el resultado ha sido positivo o negativo. Esto le permite al alumno conocer cuál es su rendimiento en cada momento, como al profesor conocer las dificultades de cada alumno en cada momento del proceso de aprendizaje.

Conclusiones.

Se vio que es posible aprender matemática siempre que estén garantizados los requerimientos necesarios. A pesar de las dificultades presentadas los estudiantes adquirieron nuevos conocimientos, hábitos y habilidades.

Se encontraban motivados por la manera diferente de recibir el contenido y muy activos en la participación.

En este curso las actividades de retroalimentación fueron más frecuentes que en un curso tradicional, pues además de la participación en el Chat, en el Foro de Discusión, en el Seminario, en las actividades de retroalimentación presénciales, el alumno fue evaluado también a través de la Plataforma al realizar los ejercicios propuestos al final de las distintas lecciones algunos de ellos eran evaluados por el profesor y otros por la plataforma.

Se incrementó el control y el autocontrol del aprendizaje.

Recomendaciones.

Los programadores deben prever la posibilidad del uso de la simbología matemática en las herramientas de comunicación.

La introducción de las TIC en la enseñanza tiene ante sí un reto importante en que se deben replantear conceptos y entre estos están los contenidos pues hoy estamos dedicando demasiado tiempo a aspectos los cuales ya no lo merecen. Esto es un problema científico de actualidad el cual debe ser abordado por la Educación Superior de forma inminente.

A pesar de las dificultades que en la actualidad presentamos; muy pronto habrá un salto, a corto plazo, en la conectividad y sin embargo tenemos un atraso en nuestros paradigmas. La realidad que hoy se vive se transformará de forma tal que nos va a sorprender. Por tal motivo es necesario ir trabajando para cuando estén todas las condiciones creadas tener los cursos preparados con todos los requerimientos metodológicos

Referencias bibliográficas

Bartolomé, A. (1995): *Algunos modelos de enseñanza para los nuevos canales*. www.ull.es/departamentos/didinv/tecnologiaeducativa/documentos.htm

CRUE. (1997) *Conferencia de Rectores de Universidades Españolas .Las tecnologías de la Información y las Comunicaciones en las Universidades Españolas*. Informe del Grupo de Nuevas tecnologías de la Información y las Comunicaciones. http://www.crue.org.

Duderstadt, J. (1997): *The Future of the University in an Age of Knowledge*. Journal of Asyncronous Learning Networks http://www.aln.org/alnweb/journal/issue2/duderstadt.htm

Durán, M. (2001). *La Introducción de Algunas Herramientas de la Tecnología Informática en Álgebra Lineal para Ingeniería Informática. Su Impacto en la Didáctica*. Tesis en Opción al Título de Master en Ciencia de la Educación Superior en la Mención Docencia e Investigación Educativa. CEPES, 2001.

Dwyer, D. & Barbieri, K. & Doerr, H.(1995). *Creating a Virtual Classroom for Interactive Education on the Web. Proceedings of the Third International World-Wide Web Conference*. Darmstadt, Germany, April 1995.

Gisbert, M. (1996): *Recursos Educativos distribuidos: INTERNET*. Power Science. Pp. 19. Nº 5.

Gisbert, M.(1996): *Training Teachers with Hypertext: using HTML and INTERNET tools as didactic resources*. The Internet: Transforming Our Society Now'. INET'96. Pp.73 (book of Abstracts). Editat en CD-ROM. Montreal. Canadá.

Gonzalez, A. & Gisbert, M. (1996): *Las Nuevas Tecnologías en la educación. Redes de comunicación, redes de aprendizaje*. pp. 409-423.

Keegan, D (1996): *Foundations of Distance Education* Routledge, Londres.

Muñoz, P. (1999) *Aprendizaje con nuevas tecnologías. Paradigma emergente*. http://investigacion.ilce.edu.mx/dice/articulos/articulo5.htm

Pelaez, O. (2001) *Colozal esfuerzo por socializar la informática y la computación*. Periódico Granma, Ciudad de La Habana Cuba, 20 de marzo de 2001.

Plataformas para el diseño y desarrollo de cursos virtuales. Cátedra UNESCO de Educación a Distancia (CUED). http://www.uned.es/catedraunesco-ead/plataformas.htm

UNESCO. (1999). *Los docentes, la enseñanza y las nuevas tecnologías en Informe Mundial sobre la Educación 1998*. Madrid, Santillana/UNESCO pp. 78-94.

Soporte electrónico en la enseñanza de la matemática ¿Snobismo o necesidad?

Mayra Solana Sagarduy, Valentina Badía Albanés, Rita Roldán Inguanzo
Universidad de La Habana, Cuba
mayra@matcom.uh.cu valia@matcom.uh.cu rroldan@matcom.uh.cu

Resumen

La última década del siglo XX se caracterizó por el avance de la tecnología computacional a pasos agigantados y su influencia en todas las esferas de la actividad humana. Especialmente el proceso de enseñanza-aprendizaje se ha visto marcado por dicha influencia y hoy se abren posibilidades para el desarrollo del proceso docente educativo.

Desaprovechar las oportunidades docentes que ofrecen los nuevos soportes electrónicos, sería como decir que todo lo que el hombre ha descubierto en el siglo pasado es innecesario para la humanidad.

Con este trabajo pretendemos presentar nuestras ideas sobre cómo y por qué elaborar clases por computadora y abrir con ello un lugar a la discusión en nuestro medio latinoamericano.

Introducción

Los cambios tecnológicos ocurridos durante el pasado siglo han influido notablemente en todas las esferas de la actividad humana y el proceso de enseñanza aprendizaje no ha estado exento de esta influencia.

El mundo desarrollado cuenta actualmente con una gran cantidad y variedad de recursos para ser usados en la educación (Tall, D.O. 1996). La aparición de Internet, que facilita el acceso a la información y la creación de softwares diseñados o no especialmente para la enseñanza, abren nuevas posibilidades para el desarrollo del proceso docente educativo.

Ya las clases presenciales no son totalmente imprescindibles. Ahora podemos llegar a cualquier ordenador en cualquier parte, lo que amplia el rango de personas que pueden acceder a la formación técnica y profesional. Así, personas incapacitadas físicamente, de manera permanente o transitoria, jóvenes que han comenzado prematuramente su vida laboral y habitantes de regiones alejadas de los centros educacionales, pueden cursar estudios sin estar en el aula, con la ayuda de cursos en soporte electrónico, que se pueden distribuir no solamente a través de la red informática, sino también por medio de discos compactos.

De modo que el diseño de cursos de Matemática en formato electrónico y la elaboración de materiales didácticos computacionales de apoyo a la docencia deja de ser un snobismo o simplemente algo que está de moda, sino que responde a necesidades reales y concretas del mundo actual. La idea de los pedagogos, de que el proceso de enseñanza aprendizaje debe ser más interactivo y con más participación, hace que la introducción de las nuevas herramientas que contribuyan a lograr este objetivo esté siendo valorada de forma importante frente a la enseñanza tradicional.

Ahora, ¿están los profesores capacitados para elaborar estos materiales? ¿son capaces de hacer un uso inteligente y fructífero de las nuevas facilidades?. En general, los propios educadores no estamos preparados para decidir cuáles son las mejores opciones, cuáles son las más apropiadas para su medio y cuáles serán las estrategias didácticas a emplear.

Desaprovechar las oportunidades docentes que ofrecen los nuevos soportes electrónicos, sería como decir que todo lo que el hombre ha descubierto en el siglo pasado es innecesario para la humanidad.

El soporte electrónico, de herramienta matemática a auxiliar pedagógico

Mucho se ha polemizado sobre el uso de la computadora en la enseñanza y casi se puede afirmar que existen tantos defensores como detractores. Un diálogo imaginario pudiera servir para ilustrar la controversia existente. Presentemos primeramente a los personajes:

> *Tradicio*: Profesor defensor de la enseñanza tradicional.
>
> *Activio*: Profesor defensor del uso de técnicas de activación de la enseñanza, que critica la realización de clases por computadora.
>
> *Computio*: Profesor que propugna el uso de la computadora en la enseñanza y defiende a su vez la enseñanza activa.

Este es el diálogo:

Tradicio: El maestro es imprescindible, pues él es quien domina la materia y sabe como debe ser explicada. La computadora sólo sería un instrumento de distracción, que al fin y al cabo no le enseña nada al estudiante y lo sustituye en las tareas que debe realizar. Se trata de un aparato frío que deshumaniza la enseñanza.

Activio: Yo no absolutizaría la posición del profesor en el aula, pues el estudiante, para aprender, necesita tanto de la interacción con el profesor, como con sus compañeros. La clase debe ser algo vivo, activo, donde todos participen. Es por ello que coincido en que la computadora no sustituye al profesor. Pienso que con ella sólo se pueden desarrollar habilidades mecánicas y no fomenta la colaboración, sino más bien la rivalidad, amen de que el profesor no puede evaluar el trabajo de los estudiantes. Por otra parte, la computadora no ha logrado aún ser un objeto al alcance de todos.

Computio: Es innegable el papel que juega la informática en el mundo actual y la computadora se ha ganado un lugar cimero en el proceso docente educativo. Es cierto que debemos encaminarnos hacia la activación de la enseñanza, pero lamentablemente ello choca en ocasiones con escollos de cierto peso como el tiempo o el tamaño de los grupos. El soporte electrónico constituye entonces una buena herramienta para salvar esos escollos, pues precisamente al desarrollar habilidades mecánicas, permite optimizar el tiempo de la clase presencial, pudiendo dedicarse esta al desarrollo de habilidades lógicas. Por otro lado, si utilizamos la computadora de manera eficiente y bien pensada, encontraremos en ella infinidad de opciones que nos permitan desarrollar otros tipos de habilidades.

¿Quién tendrá la razón?

Si miramos hacia atrás en la historia, veremos que todo método de enseñanza ha jugado su papel en cada momento. La enseñanza tradicional fue el eje organizador y centralizador de las ideas diversas de los pedagogos de una época. Diferentes tendencias pedagógicas fueron surgiendo entonces, encaminando la enseñanza a convertirse en un proceso vivo en simbiosis con el aprendizaje. El incremento de la comunicación y la actividad implica indudablemente un aumento del aprendizaje y por tanto genera un crecimiento de la independencia y la capacidad de cooperación de los estudiantes. En todo este proceso la computadora puede y debe ocupar un lugar fundamental.

Es innegable que el apoyo cognitivo que brinda una computadora está prefijado de antemano y por tanto es limitado; el lenguaje utilizado es uniforme y sin matices y se pierde la dinámica de las discusiones en torno a razonamientos matemáticos complejos que se motivan en una clase presencial. Se trata de que la computadora debe pasar de ser una herramienta de cálculo a un auxiliar pedagógico, que desarrolle no solo la independencia sino todo tipo de habilidades lógicas y matemáticas en los estudiantes.

Por otra parte, desde hace muchos años ha venido adquiriendo auge la modalidad de la enseñanza abierta o a distancia como forma de enseñanza orientada hacia el futuro y respuesta innovadora a los desafíos que plantean las nuevas exigencias en el ámbito profesional, respondiendo a los avances técnicos y a la rápida pérdida de actualidad del conocimiento práctico profesional. Esta modalidad se adapta a la mayoría de los intereses de los diferentes grupos de estudiantes y permite combinar de manera conveniente el perfeccionamiento profesional con la profesión.

La utilización de los medios electrónicos en la enseñanza abierta o a distancia posibilita la aplicación de diferentes recursos didácticos, lo que proporciona una mayor flexibilidad respecto a los contenidos de los cursos a explicar y a los métodos de aprendizaje a emplear. Además, permite que el estudiante determine su propio ritmo de aprendizaje y utilice horarios de su conveniencia.

Las clases por computadora

En la actualidad la computación se aplica de múltiples maneras en la enseñanza de la Matemática. Haciendo una clasificación sin pretensiones de globalizar todo lo existente, proponemos las siguientes categorías:

Paquetes de programas:	se trata del uso de paquetes conocidos (MATHLAB, DERIVE o MATHEMATICA) o de paquetes creados por los profesores como material de apoyo a la docencia.
Cursos individuales: *con la computadora.*	usualmente disponibles en CD, donde el estudiante interactúa solamente
Cursos interactivos:	elaborados usualmente en formato WEB para su utilización en diferentes tipos de redes. En ellos existe la posibilidad de interactuar con el profesor y con los demás participantes.

El uso de paquetes de programas como apoyo a la docencia ya no es algo tan novedoso. Existen infinidad de trabajos relativos, por ejemplo, a la enseñanza de diferentes temas matemáticos con la utilización del DERIVE, MATHLAB o MATHEMATICA. Algunos de esos trabajos han resultado verdaderamente exitosos, otros desgraciadamente han obviado los más importantes aspectos metodológicos, haciéndose así en parte responsables de la denominación de "distractor" que muchos imponen a la computadora en la enseñanza.

El desarrollo de la tecnología computacional junto a las facilidades de grabación de discos compactos y la generalización del acceso a INTERNET abren una nueva era en el campo del soporte electrónico de la docencia con la posibilidad de la realización de lo que llamamos cursos individuales e interactivos. Sin embargo, no basta que la tecnología sea más moderna o asequible para que ofrezca mejores resultados (Noss, R. y Pachler, N. 1999). No se debe olvidar que no hablamos de la tecnología "per se", sino de su papel como auxiliar pedagógico, lo cual nos obliga a situar en el primer lugar los aspectos didáctico-metodológicos, sin olvidar, por supuesto, los aspectos técnicos y artísticos del diseño (diseño funcional).

El diseño pedagógico

Tanto en los cursos de carácter individual como en los interactivos el estudiante se enfrenta a una máquina. Si pretendemos que esa máquina sea un auxiliar pedagógico, debemos acercar su imagen a la de un profesor real, o más exactamente, debemos hacer de la clase en la computadora una clase lo más viva posible. En una clase presencial el profesor parte del sistema de objetivos de la asignatura y de la clase para conformar los contenidos de forma armónica, propone actividades de aseguramiento del nivel de partida, motiva la clase, expone, pregunta, responde, evalúa. Todos esos factores tienen que estar presentes en una clase por computadora. Pero además, al no estar presente el profesor para guiar el trabajo, en la clase por computadora se debe incluir una guía metodológica, que indique al estudiante cómo moverse a través del laberinto que siempre significa el aprendizaje de un tema nuevo. Todo ello debe hacerse de modo ameno y sencillo, para que la computadora no se convierta en un obstáculo más a salvar en el proceso de aprendizaje. Si en la clase presencial el profesor debía jugar el papel de facilitador y coordinador del aprendizaje es en este caso la computadora quien debe asumirlo.

Resumiendo lo antes expuesto, la clase por computadora debe elaborarse teniendo en cuenta que:

- Debe disponerse de una guía metodológica accesible en cualquier momento;
- El estudiante debe conocer los objetivos que se persiguen;
- El diseño de la clase debe motivar al estudiante a permanecer frente a la computadora. Para ello se debe asegurar que los contenidos sean presentados de forma amena y del modo menos expositivo posible, en un contexto relevante para los estudiantes, teniendo en cuenta sus intereses y experiencias; las tareas deben ser planteadas de modo tal que los estudiantes experimenten éxito; los ejemplos deben ser motivantes y, siempre que sea posible, tomados de la vida cotidiana;
- Se deben generar situaciones problémicas, que desarrollen habilidades de lectura y comprensión de la información, exigiendo además la exploración de diferentes estrategias de resolución de los problemas propuestos;
- Además de desarrollar habilidades de cálculo, los ejercicios y problemas deben incrementar otras habilidades como la estimación, comprensión de la información cuantitativa y la determinación de la razonabilidad de los resultados;
- Existen diferencias de preparación y de desarrollo de las habilidades matemáticas en los estudiantes, por lo que se debe posibilitar la omisión individual de epígrafes o ejercicios;
- La evaluación debe ser dinámica y continua, de modo que el estudiante pueda autoevaluarse constantemente. Por ello al elaborar el software debe preverse la mayor cantidad de respuestas posibles;

El diseño funcional

Llamamos diseño funcional a la conjunción de diversos elementos computacionales con la intención de comunicar un mensaje dentro de un contexto determinado. Se trata de la "traducción" de las metas de enseñanza al soporte en el que se presentarán los materiales. La mundialización del uso de la navegación por INTERNET y sus facilidades técnicas han provocado una generalización del uso del formato WEB en la elaboración de materiales docentes en soporte electrónico. Este formato facilita la interacción usuario – PC, es de fácil manejo y permite crear un entorno de trabajo confortable. Por otra parte, se trata de un formato válido no sólo para las que llamamos clases individuales, sino también y sobre todo para las interactivas. Por todo ello nos referiremos en lo adelante al diseño en el formato WEB.

A lo largo del diseño funcional hay que tener en cuenta ante todo el dinamismo del formato, es decir, este debe permitir la revisión y actualización, así como la incorporación de ideas adicionales. Así mismo se deben atender los criterios funcionales, los niveles de interactividad y los aspectos relativos a la navegación.

Al hablar de criterios funcionales, nos referimos a los aspectos técnico-artísticos, cuyo uso indiscriminado puede disminuir la concentración del estudiante en los aspectos relativos al aprendizaje. En este sentido se recomienda:

- Utilizar los efectos de animación sólo cuando sean estrictamente necesarios, pues ellos aumentan significativamente el tiempo de recuperación;
- Utilizar los marcos o frames de modo eficiente, como estructuras dinámicas que permiten relacionar varias páginas del web en una misma pantalla;
- Es recomendable que los fondos de las páginas web contribuyan a la legibilidad de los textos;
- La inclusión de sonidos debe estar plenamente justificada;
- Las tablas son útiles para presentar sintéticamente las ideas y representar de manera esquemática los conceptos, pero tienen la desventaja de que su visualización varía en función de la resolución de los monitores, el tamaño de éstos y el programa navegador.
- Los párrafos no deben ser muy extensos, presentando una idea por párrafo. El tamaño de la letra no debe ser muy pequeño ni muy grande y el color debe contrastar con el fondo para garantizar la legibilidad.

Los niveles de interactividad se refieren tanto a la posibilidad de interacción entre varios usuarios (cursos interactivos), como a los aspectos técnicos específicos del software. Es decir, la fragmentación de la información en páginas, la definición de las relaciones entre ellas y la definición de los enlaces, nodos o hipervínculos que establecerán los recorridos potenciales del alumno por el material.

Por otra parte, en cuanto a la navegación es fundamental el contrarrestar la desorientación del usuario. Para ello el estudiante debe saber dónde se encuentra en cada momento, cómo volver a un lugar ya visitado y cómo buscar la información que necesita.

Conclusiones

El uso de los medios de cómputo en la Educación Superior es aún un campo poco trillado. Mucho queda por hacer en el sendero hacia una enseñanza cada vez mejor y la computación ha de ser un compañero en nuestro viaje.

Aún son pobres los resultados obtenidos en la enseñanza de la Matemática, en comparación con las posibilidades que brinda la nueva tecnología (Badía, V. 2000).

Los profesores de este nuevo Siglo debemos ser capaces de asimilar y utilizar todas las vías que conduzcan al mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje en nuestras universidades.

Con este trabajo hemos pretendido ofrecer las ideas surgidas de nuestra experiencia, para con ello abrir un lugar a la discusión en nuestro medio latinoamericano.

Referencias bibliográficas

Badía,V.(2000) *Algunas ideas sobre el uso de la computadora en la enseñanza delas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 13,pp. 265-269.

Noss, R. & Pachler, N. (1999) *The challenge of new technologies: doing old things in new ways, or doing new things?*. En: Mortimore P.(Ed). London.

Sarramona, J. (1994) *Presente y futuro de la tecnología educativa*. En Tecnología y Comunicación Educativa. Año 9, Número 23, Abril-Junio . México.

Tall, D.(1996) *Information technology and mathematics education: enthusiasms, possibilities and realities*. Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education. S.A.E.M. 'Thales'. Sevilla, pp. 65-82.

http://lawebdel programador.com/cursos/index.php;Internet.

Compartir significados sin esperar milagros

María del Carmen Rodríguez Ponce
Instituto Superior "José Antonio Echeverría" CUJAE. La Habana. Cuba
chacha@mecanica.ispjae.edu.cu

Resumen

En nuestro trabajo presentamos una propuesta de cómo organizar, construir y compartir el conocimiento a través de la elaboración de Mapas Conceptuales (MC) en la asignatura Matemática III que se imparte en el primer semestre del segundo año de la Carrera de Ingeniería Mecánica, les sometemos a su valoración una primera experiencia en este sentido, donde se establece una interrelación entre los diferentes temas que se imparten en esta asignatura, los vínculos internos que se pueden establecer mediante el uso las NTIC, enfocándolo como un espacio que garantice una renovación de los mecanismos con los que se construye el conocimiento.

Introducción

Con frecuencia en nuestras aulas los estudiantes aprenden conceptos poco familiares memorizándolos, una definición, por ejemplo puede ser aprendida repitiéndola una y otra vez hasta ser capaz de poner las palabras correctas en orden apropiado. Se puede elegir, en cambio, integrar la nueva información con lo que ya se sabe, dando entonces el paso más importante para el logro del aprendizaje significativo.

Elaborar mapas conceptuales mediante el uso de las NTIC, es un método que facilita un aprendizaje repleto de significado. Requiere que se realicen decisiones esenciales acerca de la importancia de las ideas, como estas ideas se relacionan unas con otras y sobre todo como estas ideas se relacionan con los conocimientos previos.

Desarrollo

El aprendizaje significativo lo definimos como un proceso que ocurre en el interior del individuo, donde la actividad perceptiva le permite incorporar nuevas ideas, hechos y circunstancias a su estructura cognoscitiva, en el aprendizaje significativo el estudiante logra relacionar la nueva tarea de aprendizaje, en forma racional y no arbitraria con sus conocimientos y experiencias previas, almacenadas en su estructura cognoscitiva. De ahí que esas ideas, hechos y circunstancias son comprendidos y asimilados significativamente durante su internalización.

El mapa conceptual (MC) es un instrumento potente para el aprendizaje para clarificar, definir y delimitar, por ejemplo, al inicio de una unidad didáctica los conceptos y sus relaciones, por lo que el alumnado sabe desde el inicio lo que ha de aprender. De esta manera se potencia el aprendizaje de manera no arbitraria y conectada.

Si bien estos potencian la asimilación de los contenidos en la medida que son elaborados con eficiencia y con gran implicación de los estudiantes, ya que en un primer nivel, son útiles para conseguir y garantizar el aprendizaje significativo en el alumnado de aprendizaje más lento o con necesidad de adaptación, a la vez se debe tener sumo cuidado por que no tiene sentido, hacerlos aprender por repetición, ya que el MC perdería su coherencia y su sentido.

Aumentar la motivación del alumnado potencia el aprendizaje significativo. Con las propuestas de actividades el profesorado debe pasar un tiempo pensando como proponer un producto significativo que haga que el alumnado esté emocionalmente implicado en el proceso de aprendizaje. Se trata de hacer del aprendizaje no un juego sin sentido sino una actividad interesante, atractiva y agradable tanto para el profesorado como para el alumnado. Tenemos que ser conscientes que el desarrollo acelerado la sociedad requiere un nuevo tipo de alumno, un estudiante preocupado por el proceso más que por el producto, preparado para la toma de decisiones y elección de su ruta de aprendizaje. En definitiva preparado para el autoaprendizaje, lo cual abre un desafío a nuestro sistema educativo, preocupado por la adquisición y memorización de información, y la reproducción de la misma en función de patrones previamente establecidos. En cierta medida los nuevos medios, reclaman la existencia de una nueva configuración del proceso didáctico y metodológico tradicionalmente usado en nuestros centros, donde el saber no tenga porque recaer en el profesor, y la función del alumno no sea la de mero receptor de informaciones.

Dar diferentes entradas de informaciones coherentes y conectadas, como por ejemplo de manera visual, sonora, escrita o táctil a través de recursos audiovisuales, escritos, recursos del medio u otros, permite integrar mejor, dentro de la peculiar estructura mental del alumnado, la coherencia y la conexión entre los conceptos, hecho que potencia el aprendizaje significativo. El uso de una estrategia adecuada de los recursos didácticos potencia por tanto el aprendizaje a largo plazo.

Crear alternativas para un mejor aprendizaje, apoyadas en las computadoras y redes de telecomunicaciones, como núcleo alrededor del cual se agrupan las NTIC, de modo que se supere la mera transmisión de contenidos en la enseñanza nos motivó a diseñar de forma diferente la asignatura de Matemática que se imparte en el 2do año de la Carrera de Ingeniería Mecánica, por lo que combinando los MC con las posibilidades que ofrece este recurso tecnológico en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se integraron coherentemente con el objetivo de lograr un aprendizaje más eficiente, teniendo como fin mejorar cada vez más la calidad del proceso.

Para lograr la confección de estos por parte de los estudiantes primeramente resulta de gran importancia que a los estudiantes les quede bien claro que es un Mapa Conceptual?

Se trata de un gráfico de conceptos unidos mediante valores de verdad. Veamos los elementos que configuran los mapas, pues no se trata de esquemas ni de croquis, para señalar después su papel en el aprendizaje y tratar de ilustrar brevemente la justificación de su uso en la enseñanza de las matemáticas.

Sus elementos básicos son:

- Los **conceptos**. Como regularidades en los acontecimientos o en los objetos que se designan mediante un término. (Novak).

- Las **proposiciones**. Es la unidad semántica más pequeña que tiene valor de verdad. Consta de conceptos y de palabras-enlace.

- Las **palabras-enlace**. Palabras que unen los conceptos y señalan los tipos de relación existente entre ambos.

En el mapa se organizan dichos elementos relacionándose gráficamente, y formando cadenas semánticas, es decir con significado.

Es fundamental considerar que no hay un sólo mapa conceptual correcto, lo importante son las relaciones entre los conceptos a través de las palabras-enlace para formar proposiciones que configuran un valor de verdad sobre el objeto estudiado. Y por tanto, entorno un concepto pueden señalarse diversidad de valores de verdad.

Desde una perspectiva del aprendizaje como procesamiento de información y más específicamente en la línea de Ausubel del aprendizaje significativo, Novak (1988) introduce el mapa conceptual como una respuesta al aprendizaje significativo.

Siguiendo a A. Ontoria , se construye como un proceso:

- Centrado en el **alumno** y no en el profesor.

-Que atiende al desarrollo de destrezas y no se conforme sólo con la repetición memorística de la información por parte de alumno.

-Que pretenda el **desarrollo armónico** de todas las dimensiones de la persona, no solamente intelectuales.

Así pues, se trata de una propuesta metodológica de carácter abierto y por tanto, lo importante es la revisión crítica y la adaptación a las necesidades curriculares de cada profesor. Como ya sabemos, no todas las experiencias didácticas tienen los mismos resultados en los distintos grupos y niveles.

Respecto las destrezas cognitivas, los mapas de conceptos desarrollan:

- Las **conexiones con ideas previas**, tanto en su confección antes del desarrollo del tema , como en su tratamiento posterior.

- **Capacidad de inclusión**, dada la jerarquización de los conceptos y el nivel de comprensión que implica su relación.

- La **diferenciación progresiva** entre conceptos, sobre todo si se elaboran en diferentes momentos del desarrollo del tema.

- La **integración** o asimilación de nuevas relaciones cruzadas entre conceptos.

Así pues, el mapa conceptual aparece como una herramienta de asociación, interrelación, discriminación, descripción y ejemplificación de contenidos, con un alto poder de visualización.

Los mapas conceptuales han ido extendiendo su dominio de acción, en un principio aplicados a niveles superiores, universitarios, pronto adaptaron su elaboración en niveles de primaria y secundaria, incluso en preescolar (mapas preconceptuales). En algunas materias, como ciencias naturales ha sucedido que el mapa es el principio y fin del tema, con lo cual, al darse como elemento acabado y objetivo, da al traste con todas nuestras intenciones constructivas. Por alguna razón en Matemáticas todavía no se ha abrazado este recurso como método del aprendizaje significativo. Y sin embargo, es un tema vertical en nuestras preocupaciones didácticas.

Efectivamente, nuestros alumnos encaran resolución de problemas como "memorización de algoritmos" (aquí hay que poner esto...), sin relacionar conceptos, (el dominio es lo de igualar a cero...); se enfrentan a conceptos como elementos aislados (por un lado van los límites y por otro las derivadas y si se trabaja la definición, se toma como dogma de fe), o asociados si se solapan en un problema (como la derivada de la función en un punto con la pendiente de la tangente, por visualización de la gráfica, aunque no con la tangente del ángulo entre la recta y el eje de abscisas). En fin, todas las "curiosas" respuestas que cotidianamente encontramos en nuestros alumnos y señalan con claridad una disgregación de conceptos y aislamiento de los procedimientos matemáticos.

La importancia de los mapas, en primer lugar como herramienta metodológica que requiere la explicitación de las relaciones entre los conceptos del alumno, y en segundo lugar como herramienta de observación del profesor las lagunas conceptuales y relacionales.

Es importante combinar correctamente en tiempo y forma el papel del profesor. En los primeros pasos prepondera un papel magistral y tratamiento expositivo. En la presentación de trabajos de campo con problemas-ejemplo, es un organizador de tareas, distribuyendo tareas y proporcionando fuentes de información. También existen exposiciones germinales (preguntas dirigidas, etc), en la confección de mapas es un asesor.

Si bien resultó de gran importancia el producto final (el Mapa Conceptual apoyado sobre las NTIC), trandisciplinarmente con este se logró potenciar el conocimiento matemático como un ámbito susceptible de discusión y debate, así como incrementar el trabajo en equipo y negociación de tomas de decisiones.

Por ejemplo en el Tema de Series Numéricas, primer tema de la asignatura, a los estudiantes les resulta uno de los más difíciles, debido a la gran cantidad de criterios a analizar y sobre todo tener muy en cuenta las característica de la Serie, para saber que criterio es el mas adecuado y poder concluir acerca de su carácter.

Ya que proponemos su utilización en el primer semestre del curso, es conveniente aclarar el proceso de construcción desde los primeros días del mismo. Para comenzar a familiarizarse con técnica se les orienta a los estudiantes durante y extraclase, que elaboren sus propios mapas sobre algo relacionado con sus experiencias y que ellos conocieran muy bien, de esta manera sus conocimientos previos los verían exteriorizados a través de los mapas, y así comenzarían a ganar confianza en su propio conocimiento, pero no se trata de hacer esquemas. Fundamentalmente han de formarse proposiciones con significado, como criterios de verdad o falsedad anexando **conceptos** a través de las palabras-enlace.

En la medida que fueron aumentando destrezas en la confección de estos, también fueron capaces de atender algunas recomendaciones que ayudaron a ir ganando en calidad en la elaboración, así como se percatarán que un mapa hay que hacerlo, hay que construirlo, hay que rectificarlo, observando sus defectos para que realmente cumpla su objetivo.

Los mapas se fueron desarrollando en la misma medida que se fue avanzando en cada tema, como instrumento eficaz para el control del proceso de construcción de significados. Ellos observaron que estos se van ampliando a medida que se va agregando más significado al concepto en cuestión, cuantas más relaciones puedan establecerse, más significado adquirirá el concepto. Así frente a un MC, docentes y alumnos pueden "negociar" significados, pero no aprendizaje, ya que esto compete exclusivamente al que aprende.

Posteriormente a la elaboración de estos, después de discusiones por equipos y en plenarias para llegar a una propuesta más elaborada, se les recomendó la inclusión en estos de aspectos no solo conceptuales y de enlace, sino de búsqueda y análisis de tutoriales, soft profesionales o no, hipertextos, sitios en Internet, simuladores, videos, grabaciones, etc. que resultara útil su empleo en los temas tratados en los MC, pero con la fundamentación de el porque se recomienda su inclusión y no el empleo de técnicas informática por el simple hecho de utilizarlas.

Esto enriqueció notablemente el trabajo realizado y finalmente, después de discusiones y defensas por diferentes colectivos estudiantiles de sus propuestas se llegó al MC que se consideró que realmente a partir de la interacción con él a través de los medios informáticos potenciaban el aprendizaje de la asignatura.

La experiencia que tuvimos alrededor del trabajo desarrollado con los estudiantes, nos permite afirmar que esta intención de gestionar el conocimiento a través de la elaboración de MC, insertándolos con las ventajas que ofrecen las NTIC, si bien no es la solución de las deficiencias que presentan los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en la medida que logremos involucrarlos en la construcción de este conocimiento y no ofrecerlo como un producto terminado, no será la solución de las deficiencias que aún tiene el complejo proceso de enseñanza-aprendizaje, pero de alguna forma estaremos contribuyendo a mejorar dicho proceso.

Referencias bibliográficas

Chrobak R. (1998) *Metodologías para lograr un aprendizaje efectivo.* Universidad Nacional del Comahue. Argentina.

Ballester, A. (1999) *Hacer realidad el aprendizaje significativo* en Cuadernos de Pedagogía núm. 277.

Ausubel, D. (1973): *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* México. Trillas

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1990): *Funciones y Gráficas. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje.* Ed. Síntesis. Madrid

Castelnouvo, E.(1970). *Didáctica de la matemática moderna* .Trillas, México

Diseño Curricular. (1989) *Base para la E.S.O*

Guarro,A. (1988). Un modelo de análisis y representación de la estructura del contenido. Enseñanza Anuario interuniversitario de Didáctica, Num. 3.(237-267).

Novak, J. & Gowin, D.: *Aprendiendo a aprender.* Ed. Martínez Roca. Barcelona .

Ontoria, A. (1992).: *Mapas Conceptuales: una técnica para aprender.* Ed. Narcea.

Puig Adam, P. (1960).: *La matemática y su enseñanza actual.* Madrid,

Resnick, L. & Ford, W. (1990): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos* .Ed. Paidós

Aprendizaje Cooperativo

Los métodos participativos y su influencia en la calidad del aprendizaje y en el desarrollo de la personalidad del estudiante.

Yolanda Hernández Rubio y Armando De Pedro Lugo
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba.
yolanda@matcom.uh.cu y armando@matcom.uh.cu

Resumen

A pesar de que los más eminentes educadores cubanos tales como Félix Varela, José de la Luz y Caballeros, José Martí, Enrique José Varona y Fidel Castro, se han pronunciado en contra de la enseñanza tradicional, pasiva y memorística, esta subsiste aún, adaptada a la época, pero manteniendo sus rasgos fundamentales. En apoyo a esta lucha surge el presente trabajo que es el resultado de un experimento realizado en la asignatura Matemática I de nivel II en las carreras de Ciencias Farmacéuticas y Microbiología; con el fin de lograr mayor conciencia e independencia en el aprendizaje.

Se desarrolló siguiendo el enfoque Histórico Cultural y se empleo en el mismo de una novedosa técnica grupal. El trabajo contiene una descripción del método así como la forma en que se utilizó.

Introducción

En este trabajo exponemos las experiencias adquiridas en varios experimentos realizados en Matemática I y II del nivel II en distintas carreras universitarias. El programa analítico de la asignatura está elaborado con el enfoque sistémico estructural funcional que se sustenta en el enfoque Histórico Cultural, desarrollado por Vigotsky y enriquecido por Leontiev, Galperin y Talizina. Con el uso adecuado de métodos participativos desarrollamos mayor grado de conciencia, solidez e independencia en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, y además estos métodos influyen en el desarrollo integral de la personalidad del estudiante en el propio proceso de aprendizaje.

Desarrollo

El mundo actual es testigo de un avance nunca visto en el desarrollo y complejidad de los conocimientos científico-técnicos, lo que impone a las ciencias nuevos retos en la búsqueda de métodos que permitan abordar la realidad desde una perspectiva de cambio y transformación.

El grado de especialización y a su vez de integración que han adquirido las ciencias, así como sus aplicaciones técnicas, determinan su enorme influencia en todos los aspectos de la sociedad y muy en particular en la esfera educativa, encargada de garantizar la formación del hombre capaz de ser protagonista y gestor de estos cambios.

Es evidente que la pedagogía tradicional, simplemente explicativa y memorística que le reservaba al estudiante un papel pasivo en su propia formación, es incapaz de enfrentar el reto que se plantea.

Por todo lo anterior, en el pensamiento pedagógico contemporáneo surgieron movimientos y tendencias alternativas que desde enfoques teóricos diferentes han tratado de superar las limitaciones e insuficiencias de la pedagogía tradicional. Entre ellas se distinguen las que defienden una concepción más integradora, no limitada únicamente a los procesos cognoscitivos o al sujeto como individuo, separado del marco de sus relaciones sociales. Estas tendencias asignan gran importancia a la esfera afectiva, a los motivos e intereses del sujeto, a sus emociones y estado de ánimo, a las relaciones afectivas entre los alumnos y el profesor, al clima emocional de las aulas y a las características del aprendizaje, destacando el papel del grupo en el aprendizaje.

Un elemento común a los diferentes modelos propuestos es centrar la atención en el proceso de aprendizaje del estudiante, concebido como sujeto activo, protagonista y gestor de su propia formación. Esto exige una nueva organización pedagógica y el establecimiento de una metodología, que responda a los requerimientos generales del proceso y posibilite el logro de los objetivos.

Consideramos que la metodología grupal de aprendizaje por sus valiosos aportes a la activación de la enseñanza es una de la más adecuada. Han surgido muchos métodos y técnicas participativas, dirigidas a propiciar la participación activa y comprometida del estudiante en su formación.

La utilización de los métodos y técnicas participativas exige del profesor un trabajo de reflexión, imaginación y creatividad para seleccionarlos, modificarlos e incluso crear sus propias técnicas si fuera necesario; no son " recetas " que se pueden aplicar mecánicamente en diferentes condiciones y circunstancias.

Una técnica grupal es un conjunto de procedimientos y recursos utilizados en un grupo de individuos con el fin de obtener un resultado determinado.Las técnicas que se utilizan en grupos de alumnos son fundamentalmente de dos tipos: técnicas relativas a los contenidos y técnicas relativas al desarrollo personal.Las primeras son aquellas específicamente dirigidas al objetivo de adquirir, consolidar o evaluar contenidos, mientras las segundas sirven más globalmente al desarrollo integral de la personalidad. Esta división que no es única está basada en cuál es el objetivo fundamental que se persigue con su uso, aún cuando se sabe que el aprendizaje de contenidos contribuye o debería contribuir al desarrollo personal.

También las técnicas grupales pueden clasificarse de acuerdo a la participación que en ellas tenga el profesor, ya que esta no es siempre la misma. En ocasiones, el profesor controla todo el proceso y sus orientaciones son muy estrictas, en este caso se habla de grupos dirigidos; en otras da ciertas orientaciones, pero deja a los grupos cierto margen de libertad, hablaremos entonces de grupos orientados; mientras que finalmente, en otros se deja a los grupos total libertad para organizar su trabajo y controlar los procesos grupales y en este caso hablaremos de grupos autónomos.

Sin embargo, cualquiera que sea el tipo de técnica que se utilice, es necesario que se tenga en cuenta que ninguna de ellas tiene sentido por sí misma. El sentido se lo da quien la utiliza. Su bondad está en que se acerque o no a dónde se quiere ir.

Utilización adecuada de una técnica grupal.

Una técnica grupal es utilizada adecuadamente cuando mediante su aplicación es posible alcanzar el objetivo propuesto. Esto exige que quien la aplique sepa: explicar, escuchar, preguntar, contestar, resumir y concluir; pero sobre todo debe realizar las funciones siguientes:

1 Planificar y organizar.

2 Realizar un seguimiento de los procesos grupales y un diagnóstico de las dificultades o problemas del grupo y de las personas que lo integran.

3 Intervenir para lograr que se alcancen los objetivos de los individuos, del grupo y los que están ligados a la tarea.

4 Evaluar tanto el proceso como los resultados.

Todo lo que se haga será inútil si la técnica no está en concordancia con los objetivos.

Como se sabe son muchas las técnicas grupales existentes nosotros hemos desarrollado nuestros experimentos utilizando la técnica Roldán-Cribeiro (6) la cual consiste en formar grupos de 4 ó 5 alumnos y responsabilizarlos con una serie de tareas. Estas tareas son de dos tipos: individuales y por grupos o equipos.

Según las tareas de carácter individual planteadas, el estudiante debe:

1) Resolver los ejercicios planteados en seminarios y clases prácticas y exponer su resolución, aclarando las propiedades y/o definiciones utilizadas en cada paso. Dicha exposición debe ser realizada inicialmente en forma totalmente desplegada, sintetizando luego y generalizando finalmente los casos comunes.
2) Evaluar de manera cualitativa al expositor respecto no sólo a la resolución del problema en sí, sino también al grado de despliegue, de síntesis y de generalización de la acción y dominio del lenguaje técnico.
3) Elaborar ejercicios y problemas que serán utilizados en la evaluación de otros compañeros del grupo (aula).
4) Resolver los ejercicios que el mismo plantea.
5) Resolver los temarios de control confeccionados por estudiantes de otro equipo.

En cuanto al trabajo por equipo se plantean como tareas:

1) Debate en el equipo de las preguntas y ejercicios propuestos y orientados por el profesor. Este tipo de tarea se realiza tanto en la clase como fuera de ella. De esta manera se ha podido lograr que los estudiantes "descubran" por sí mismos algunos conceptos importantes a través de la discusión y resolución de problemas que conducen a ello.
2) Defensa ante el grupo del debate realizado por el equipo.
3) Elaboración de temarios de control sobre un tema o bloque de temas sobre la base del "banco de problemas" creado a partir de los ejercicios y problemas confeccionados por los miembros del equipo.
4) Evaluación de los temarios confeccionados por todos los equipos de acuerdo a su calidad. Para ello se debe tener en cuenta el grado de dificultad de los ejercicios planteados, la integración de conocimientos y la amplitud de los tópicos planteados en el control.
5) Calificación cuantitativa y cualitativa de la resolución de los temarios de control presentados por el equipo, teniendo presente para ello la importancia de cada pregunta de acuerdo a los objetivos tratados en el control.
6) Evaluación del trabajo del equipo a partir tanto del trabajo conjunto como de los resultados individuales de sus miembros.

Además, valoramos que el *Enfoque Histórico Cultural* desarrollado por Vigotsky en los años 30 y posteriormente enriquecido por Leontiev, Galperin y Talizina se ajusta a nuestro contexto sociopolítico, porque es la base de una tendencia pedagógica que sustenta un proceso de enseñanza -aprendizaje que posibilita el desarrollo intelectual y afectivo del estudiante, el desarrollo de la personalidad del educando.

Por las razones antes expuestas se toma esta concepción del desarrollo psíquico y de la personalidad como fundamento teórico de este trabajo ya que la enseñanza es con carácter científico de manera integradora.

Enfoque Histórico Cultural.

Sus postulados se basan en una concepción del aprendizaje y una teoría de la enseñanza que satisface las exigencias de la teoría de la dirección actual, es una estrategia abierta a la asimilación de los logros de otras tendencias contemporáneas, en constante enriquecimiento, concibe el desarrollo de la personalidad del hombre en estrecha relación con el proceso de aprendizaje. Vigotsky tomó como marco teórico metodológico el materialismo dialéctico e histórico aplicado a la ciencia psicológica y se desarrolla desde estos principios una tendencia pedagógica.

En su concepción, Vigotsky le confiere al aprendizaje un carácter social, una actividad de producción y reproducción de conocimientos mediante el cual el niño asimila los modos sociales de actividad e interacción y después en la escuela asimila los fundamentos del conocimiento científico bajo condiciones de orientación e interacción social, teniendo en cuenta el sujeto como un ente activo consciente y orientado hacia un objetivo, tiene en cuenta además la interacción con el profesor y sus condiscípulos y las acciones con el objeto mediante la utilización de diversos medios en condiciones sociohistóricas determinadas.

Vigotsky consideró el desarrollo de los conceptos como la línea principal del desarrollo de la conciencia. Por otra parte el desarrollo de los conceptos está condicionado por la actividad del niño y el adulto que abre ante el niño la "zona de desarrollo próximo". Esto es válido para alumnos de cualquier edad.

"La zona de desarrollo próximo" se define como *la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por las capacidades de resolver un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución del mismo bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz* (4). Por lo que determina aquellas funciones psíquicas que todavía no han madurado, pero que se hallan en proceso de maduración, o sea, lo que el niño puede realizar en colaboración, bajo la dirección y con la ayuda de otro que puede ser el maestro, los compañeros o un adulto, considerando este concepto como básico para el establecimiento de sus consideraciones sobre la relación sobre enseñanza y desarrollo (12), lo cual estimamos un concepto esencial para esta investigación.

La transmisión de experiencias, de una generación a otra, los legados culturales al pasar condicionan social e históricamente la interacción y en el centro de ello hay una relación *que permite la transmisión de la experiencia histórica y social que es la comunicación entre los hombres, es por esto que queremos destacar el hecho en sí de que el hombre al establecercomunicación en su actividad ayuda a formarse una conciencia.*

Desarrollo de la personalidad mediante el uso de Técnicas Grupales.

Es sabido que la personalidad se encuentra en continuo desarrollo y que el proceso educativo contribuye al mismo ya que a medida el niño aprende desarrolla su personalidad.

Atendiendo a la interpretación científica y a la experiencia acumulada en la formación y desarrollo de la personalidad en el grupo, la Psicología y Pedagogía marxista establecen los principios que rigen este proceso durante la actividad docente. Estos principios son: el principio de la actividad, el del colectivismo y el del enfoque individual; a pesar de lo señalado, estos principios no pueden ser siempre alcanzados, dependiendo en cierta medida del tipo de enseñanza que se desarrolle.

En este trabajo queremos presentar el resultado que se obtiene con el empleo de técnicas grupales y específicamente con la técnica Roldán-Cribeiro.

Como hemos señalado en dicha técnica el alumno debe llevar ejercicios confeccionados y resueltos en algunas clases prácticas y en los seminarios que están señalados al final de cada tema, debe además exponer su solución, evaluar el trabajo de los otros equipos e inclusive preparar y exponer determinados aspectos teóricos, dejando de ser un consumidor pasivo de información, para convertirse en sujeto de su propio aprendizaje, mediante el uso de esta técnica se logra estimular la autoinformación y la autoeducación de los alumnos quienes tienen de esta forma que mantener una posición activa ante su propio desarrollo.

Es en la actividad como bien se ha planteado donde se expresa, se forma y se desarrolla la personalidad.

Por otra parte cuando en la técnica Roldán-Cribeiro los alumnos se reúnen por equipos para buscar ejercicios para las clases así como resolverlos y cuando participan como equipo en la clase, están realzando el colectivismo, combatiendo de paso todo rasgo de individualismo; por lo que mediante el uso de esta técnica es posible desarrollar valiosas características de la personalidad de los alumnos.

Finalmente mediante el uso de una técnica como la R-C que favorece el desarrollo del colectivismo se logra crear el ambiente necesario para que el alumno se desinhiba y se muestre tal cual es, el hecho de que no se evalúe su rendimiento sino su participación activa en el equipo y en la clase hace que no se vea obligado a esconder sus limitaciones, permitiéndole al profesor conocerlo mejor y este conocimiento de las particularidades de cada alumnos, de todo aquello que lo diferencia de los demás y lo hace único, es lo que lepermitirá al profesor brindarle la atención individual que cada uno requiere como exige el principio del enfoque individual.

Conclusiones

Con este trabajo quisimos exponer nuestras experiencias, no solo los resultados en el aprendizaje de los alumnos que estadísticamente fueron satisfactorios sino también la importancia de la utilización de métodos y técnicas participativas en el desarrollo de la personalidad del estudiante.

Referencias bibliográficas

Canfux, Verónica (1998). *Los métodos participativos ¿una nueva concepción de la enseñanza?* Poligráfico Evelio Rodríguez Curbelo. La Habana.

Colectivo de autores (1999). *Comunicación educativa.* CEPES. UH

Fabre, María Luisa. (1992). *Técnicas de grupo para la cooperación.* Ediciones Ceac.

Galperin, P. Y. (1982). *Sobre la formación de los conceptos y de las acciones mentales.* Lecturas de Psicología Pedagógica. Ciudad de La Habana.

González, Otmara (1996). *Tendencias pedagógicas contemporáneas.* E. Poira.Editores e impresores Ibagué. Colombia.

Roldán. Rita y Cribeiro, Josefina (1995). *Sobre la activación de la Enseñanza de la Matemática en especialidades de las Ciencias Naturales.* Facultad de Matemática y Computación, U.H. Cuba.

Talizina N. (1985) *Los fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior.* MES.

Talizina N. (1987) *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares.* CEPES, U.H..

Talizina N. (1988) *Psicología de la Enseñanza. Editorial Progreso.* Moscú.

Experiencias de cursos propedéuticos de Matemática en la preparación para los exámenes de ingreso a la Educación Superior

Marta B. Fernández Casuso e Ivonne Burguet Lago
Departamento de Matemática Facultad Ing. Industrial y Facultad de MecánicaInstituto Superior Politécnico José A. Echevarria. Cuba
martacasuso@yahoo.com iburguet@mecanica.ispjae.edu.cu

Resumen

Desde 1994 se ha realizado un proyecto de extensión universitaria para apoyar el aprendizaje de las Matemáticas en estudiantes y a trabajadores de nivel medio superior que aspiran a ingresar en este nivel.

El objetivo de este proyecto es consolidar los contenidos impartidos desarrollando un nivel superior de habilidades para resolver problemas de diversa índole y propiciar un clima de estudio en estos jóvenes.

En el trabajo se expone la forma de organización de los grupos acorde al nivel de partida y la metodología para solucionar las deficiencias detectadas en una prueba de diagnóstico inicial, que incluye los procedimientos aplicados en las diferentes clases y la dosificación de ejercicios a los grupos de estudiantes para que transiten por los diferentes niveles de asimilación y así lograr un alto grado de preparación de estos estudiantes para la prueba de ingreso.

Se hacen valoraciones en cuanto al aprendizaje de las matemáticas y al grado de aceptación de los interesados, manifestado a través de avales que se han recibido en nuestros departamentos.

Antecedentes

Durante varios cursos se plantearon en los colectivos de año de diferentes carreras de CienciasTécnicas la dificultad que presentaban en la Matemática Básica los estudiantes que cursaban el primer año de nuestro Instituto.

Desde 1989 se realizan pruebas de ingreso a la Educación Superior para lo cual los alumnos tienen que prepararse y se ha estado confrontando el problema de que muchos estudiantes, por diversas razones, no alcanzan el promedio suficiente para continuar estudios superiores.

Por ello desde el curso 1994-95 el Departamento de Matemática General tuvo la iniciativa de reunir un grupo de jóvenes, estudiantes de duodécimo grado, hijos de trabajadores de nuestra Facultad; los sábados en nuestro Instituto, con el objetivo de realizar un entrenamiento que le sirviera para prepararse para la realización de la Prueba de Ingreso y obtener resultados satisfactorios en la misma. En estos encuentros iniciales se reunieron un grupo de alrededor de 25 estudiantes, y utilizando diferentes métodos de enseñanza se logró incrementar en los participantes las habilidades de cálculo, así como el razonamiento en la solución de problemas en diferentes temas de Matemática de nivel preuniversitario.

Esta misma labor la inició el departamento de Matemática de Mecánica dos cursos después, unificándose posteriormente el trabajo de ambos Departamentos, por lo cual desde hace 4 años funcionan de manera sistemática dos aulas de estudiantes para la preparación para el ingreso a la enseñanza universitaria.Este tipo de curso se ha continuado realizando hasta la fecha y cada año se incrementa la matrícula, participando familiares, vecinos y amigos de trabajadores del centro que son estudiantes de grado terminal de la enseñanza media en cualquier modalidad. Baste señalar que solo en este curso se han incorporado a estos repasos aproximadamente 200 estudiantes de distintos centros de la capital, por lo que se pensó en actividades que respondan a la masividad de estos cursos que se imparten desde Enero hasta Mayo de forma sistemática.

Las asignaturas de Física y Química se incorporaron hace tres cursos a estos entrenamientos, dedicándose las sesiones del sábado por la mañana a Matemática y por la tarde a repasar las asignaturas señaladas. Posteriormente solo quedó Física al quedar sustituida la Química por la Historia en los exámenes de ingreso.

Al año siguiente de comenzada esta actividad se extendió a la preparación de los trabajadores del centro para que pudieran ingresar al Curso para Trabajadores en la Educación Superior, comenzando un curso paralelo al descrito para los estudiantes de diurno, en el que se repasaron cada sábado, con trabajo voluntario de los profesores del Departamento y así ayudar en su estudio y preparación.

Este curso se mantiene todos los años y ha ido extendiendo su matrícula a trabajadores de otros centros que han conocido de esta actividad y se han incorporado a dicho curso.

Además, el pasado curso se planteó la necesidad que tienen deportistas de alto rendimiento de una preparación para la realización exitosa de la Prueba de Ingreso a la Educación Superior, por lo que se concibió también como una labor de Extensión Universitaria, contenida en este Proyecto, un curso de entrenamiento para estos estudiantes que deben dedicar muchas horas al entrenamiento físico.

Los estudiantes muestran un alto grado de satisfacción en cuanto a los entrenamientos que se realizan en el Instituto, en estas asignaturas, por profesores de alta calificación.Este año dada la masividad se ha desarrollado una estrategia de trabajo usando alumnos ayudantes con el objetivo de dar una atención diferenciada a cada estudiante y así contribuir a una mejor preparación de ellos, además con esto preparamos y entrenamos nuevos profesores que podrán ser cantera del profesorado de nuestro centro.

Objetivos

El objetivo general de todas estas acciones fue el apoyo por una u otra vía, a la actividad de estudio y preparación de los jóvenes que terminan sus estudios de nivel medio y desean continuar estudios superiores en las carreras que elijan, y de esta manera se contribuye a la formación del joven integral que demanda la sociedad cubana.

1) Consolidar los contenidos impartidos en las Matemáticas del preuniversitario.

2) Desarrollar a un nivel superior de habilidades para resolver problemas matemáticos de diversa índole que requieran de los contenidos estudiados en el nivel de Preuniversitario.

3) Propiciar un clima de estudio, reforzando la formación de estas habilidades convistas a la preparación para la prueba de ingreso

4) Hacer una labor educativa integral, que incluye el trabajo en la formación y desarrollo de valores tales como la responsabilidad individual y colectiva, lavoluntad, la honestidad y la solidaridad entre otros

Profesores participantes

Marta Fernández Casuso; Ivonne Burguet Lago; Guillermo López Domínguez; Lázaro Gustavo Gálvez

Todos los profesores que participan en estas acciones son de alto nivel técnico y larga experiencia pedagógica.

Alumnos ayudantes del Dpto. de Matemática General de la Facultad de Ingeniería Industrial que han participado en este proyecto son los siguientes:
Mariano Palacios López, Kevin Castro, Raisel Calvo Margolles, Ramsés Delgado y Emilio González

Objeto de trabajo:

1) Estudiantes de 12mo grado para ingresar a la Educación Superior.

2) Estudiantes de tecnológico para ingresar a la Educación Superior.

3) Estudiantes de otras especialidades del Instituto que desean cambiar de carrera y se presentan a Exámenes de Concurso.

4) Trabajadores graduados de enseñanza media y Tecnológico que se presentan a Exámenes de Concurso.

5) Deportistas de alto rendimiento.

Tareas actuales:

1) Desarrollar un curso de repaso en las asignaturas de Matemática y Física para estudiantes de preuniversitario, u otra enseñanza de nivel medio que pretenden realizar la Prueba de Ingreso a la Educación Superior por curso regular diurno (Enero - Junio). Profesores: Marta Fernández e Ivonne Burguet.
2) Desarrollar un curso de repaso para la preparación para la Prueba de Ingreso a la Educación Superior para ingreso a Curso por Encuentro a trabajadores de diferentes centros laborales. (Enero - Junio), Profesores: Guillermo López

Metodología de trabajo

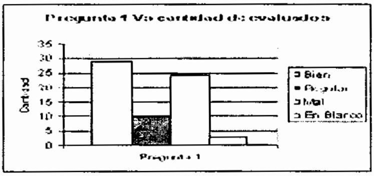
Dado los resultados que se han ido obteniendo en los cursos impartidos en años anteriores se incremento la matricula grandemente lo cual motivo que para dar respuesta a esta masividad de estos repasos, para el presente curso, se decidiera modificar la organización del repaso. Por ello se decidió que en la primera actividad con los estudiantes se hiciera una prueba de diagnóstica inicial y una encuesta donde se media el grado de aceptación de la asignatura y la necesidad de la matemática en sus estudios posteriores.

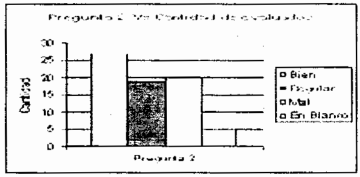
Como resultado de la encuesta se obtuvo que la mayoría de los estudiantes considerar su preparación matemática regular, casi la totalidad le gusta resolver ejercicios y problemas matemáticos y consideran que la carrera que piensan estudiar necesita conocer mucha

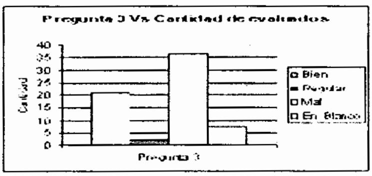
Matemática. La prueba de diagnóstico se realizó a un total de 66 alumnos que estuvieron presentes el primer día de clase y se evaluaron los conocimientos que los estudiantes traían acerca de los temas a evaluar en la prueba mediante un cuestionario de 5 preguntas que fueron evaluadas de bien regular y mal. Las preguntas eran sobre los temas siguientes:

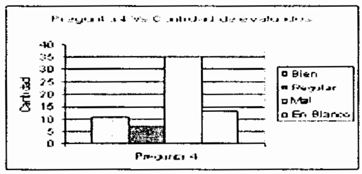
1) Trabajo con variables y expresiones algebraicas
2) Funciones
3) Resolución de problemas
4) Geometría Plana
5) Trigonometría

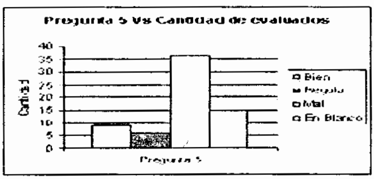
Los resultados de la prueba se muestran en las siguientes tablas.

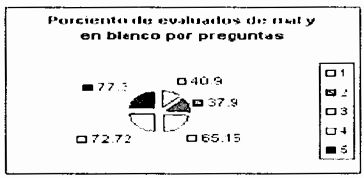












Como se puede observar, los estudiantes presentan dificultades en todas las preguntas pero las mayores dificultades se encuentran en las relacionadas con la Geometría y la Estereometría que son las de mayor por ciento de alumnos mal o que dejan la pregunta en blanco, por lo cual se decidió hacer un programa de actividades donde se le diera mayor tiempo de repaso a los contenidos de mayor grado de dificultad.

Se encontró correspondencia entre los resultados y el nivel de procedencia de los estudiantes observándose que los mejores resultados están en los estudiantes de escuelas vocacionales y los más deficientes son procedentes de técnico medio y deportistas de alto rendimiento

Se estructuraron los grupos de acuerdo a los resultados obtenidos por cada estudiante en esta prueba, por ello se decidió formar 6 grupos de 23 estudiantes cada uno, un grupo se formó con los estudiantes de alto rendimiento, otros dos con estudiantes de desarrollo medio, un grupo con estudiantes de bajo rendimiento y dos grupos de estudiantes que no hicieron la prueba.

Teniendo en cuenta los resultados arrojados en el diagnóstico inicial se organizaron los encuentros de la siguiente manera:

1 Prueba de diagnóstico inicial
2 Cálculo numérico. Trabajo con variables. Funciones.
3 Resolución de ecuaciones (todas excepto las trigonométricas) e inecuaciones
4 Prueba de diagnóstico puntual .Resolución de problemas.
5 Resolución de problemas. Trigonometría.
6 Trigonometría.
7 Prueba de diagnóstico puntual. Elementos de Geometría plana.
8 Elementos de Geometría plana. Elementos de Geometría del espacio.
9 Elementos de Geometría del espacio. Cálculo de cuerpos geométricos.
10 Resolución de pruebas de ingresos de años anteriores. Prueba de diagnóstico final.

Para lograr nuestros objetivos debíamos desarrollar una estrategia que nos permita que los estudiantes se apropien de manera significativa de los contenidos y de las habilidades matemáticas.

Según la definición de Díaz Barriga F(1998). en cuanto a "aprender a aprender" se entiende "la capacidad de reflexionar en la forma en que se aprende y actuar en consecuencia , autorregulando el propio proceso de aprendizaje mediante el uso de estrategias flexibles y apropiadas que se transfieren y adaptan a nuevas situaciones" y teniendo en cuenta los niveles de asimilación del aprendizaje nos propusimos en nuestros encuentros emplear técnicas grupales y adecuar a cada grupo de alumnos una clase dosificando las dificultades de los ejercicios ajustados según las características del grupo de manera tal que los estudiantes sean capaces de realizar algunos con el apoyo y ayuda del profesor como mediador y otros de manera independiente.

Tales ejercicios, efectuados de manera individual o en colectivo pretende dar a cada alumno la oportunidad para que profundicen sobre determinados conceptos o procedimientos (para aplicarlos, reflexionar o discutir sobre ellos etc). Todo esto ha sido como aplicación de la siguiente concepción: "La estrategia guía esta basada en que los procedimientos se aprenden progresivamente en un contexto interactivo y compartido, estructurado entre el enseñante y el aprendiz del procedimiento. En dicho contexto, el enseñante actúa como un guía y provoca situaciones de participación guiada con los alumnos" (Díaz, 1998). Las actividades planificadas duran 4 horas donde el estudiante es el centro de atención y el profesor incide sobre el a través de los ejercicios y problemas que este va resolviendo, le va aclarando dudas y transmitiendo su experiencia. Es importante señalar que después que se realicen los ejercicios se revise en colectivo con la anuencia del profesor lo que permite valorar o estimar hasta donde han llegado a comprender el ejercicio corrigiendo las deficiencias detectadas para que resulte constructivo, el profesor deberá enfatizar en los aspectos positivos y en las posibles variantes para así obtener algún tipo de beneficio para sus próximos aprendizajes. Durante el curso se realizan un seguimiento de los conocimientos de los estudiantes mediante pruebas de diagnostico puntuales así como también se detectan los cambios de actitudes que se van generando en el transcurso del curso.

Beneficios esperados e impacto social

El principal beneficio esperado es que los estudiantes que participan en estos cursos aprueben la prueba para la cual se preparan. Que además eleven su nivel matemático mediante el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas correspondientes a los temas de Matemática del grado cursado, así como el desarrollo de la creatividad, eliminando dificultades académicas que presentan.

La posibilidad de la preparación de los jóvenes por profesores universitarios que le ayudan y orientan no solo para que puedan continuar sus estudios superiores apoyando la actividad de estudio y su preparación para que continúen estudios superiores en las carreras que elijan y así contribuir a la formación del joven integral que necesita nuestra Revolución en estos tiempos.

Comunidades beneficiadas

A partir de los Objetivos y de las Tareas desarrolladas de este Proyecto de Extensión Universitaria hemos podido comprobar, en el transcurso de todos estos años, la efectividad de sus acciones comunitarias, demostrado con el nivel de satisfacción que cada año muestran los estudiantes y sus padres al ver cumplidas sus expectativas o las diferentes carreras universitarias. Debe destacarse que los beneficiados con el desarrollo de este Proyecto han sido jóvenes estudiantes de todos los municipios de nuestra provincia Ciudad de la Habana, aunque se destaca la participación de los estudiantes del Municipio Marianao entre ellos Además son beneficiados trabajadores de diversos centros de la capital que realizan repasos en nuestro centro y con esto contribuimos de manera elocuente a la batalla de ideas que libra nuestro pueblo combatiendo con esta tarea a los repasadores individuales. Se adjuntan una muestra de los avales de este año, así como una carta del vicedecano que da fe de avales del año anterior

Referencias bibliográfícas

Arriola, E. (1998). Evaluación de los conocimientos previos en matemática a los alumnos ingresantes en las carreras FRR de la UTN y su desempeño en el seminario universitario (taller).

Belgrano R. D. (2001) *Análisis del nivel académico de los ingresantes a la universidad.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 14 .

Díaz B. Frida. (1998) *Estrategias para un aprendizaje significativo. Mc Gaw- Hill*

Parra P. José L(1998). *Algunas reflexiones acerca del tratamiento de la Matemática en el primer año de la carrera Ingeniería Industrial de Holguín en correspondencia con la enseñanza del nivel medio superior.* Memorias del taller Enseñanza de las Matemática, tomo I.

Ruiz, B. & Delgado, F. (1998). *Rediseño de un curso de matemáticas remédiales.* Memorias del taller Enseñanza de las Matemática. Vol 1.

Medición y Evaluación

Valoración de la evaluación en el aprendizaje. Experiencias en la disciplina Matemática para Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica

Armando Taillacq Montalvo y Ángela Miyar Chávez
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Cuba.
taillacq@mfc.uclv.edu.cu amiyar@mfc.uclv.edu.cu

Resumen

Dentro de la concepción sistémica de la enseñanza la evaluación cumple una función insustituible de control, análisis y valoración de la calidad de los procesos. En este trabajo se realiza una valoración de la evaluación de los estudiantes (evaluación del aprendizaje), basado en las experiencias personales de los miembros del colectivo y teniendo en cuenta que la evaluación es algo más que un examen y comprobación del rendimiento académico, es parte de dicho proceso de enseñanza - aprendizaje.

Con el objetivo de contextualizar las reflexiones sobre la evaluación del aprendizaje y teniendo en cuenta que el proceso de enseñanza - aprendizaje es un sistema donde se encuentra el profesor, el alumno y los contenidos, unidos sobre la base de los objetivos, es que se propone una guía para dicho análisis que constará de cuatro aspectos: trayectoria y actividad profesional, planificación y organización de la docencia, evaluación y características del modelo de evaluación.

1-Trayectoria y actividad profesional

Como el profesor es la guía del proceso docente educativo es necesario reflejar el curriculum del mismo para analizar la formación profesional, haciendo énfasis en la pedagógica, que permita tener una valoración de sus capacidades para enseñar y evaluar.

2- Planificación y organización de la docencia.

Basado en el principio de la derivación gradual de los objetivos generales del egresado (modelo de profesional) se precisan los objetivos que deben alcanzarse en cada año, semestre, disciplina, asignatura, tema y clase en el proceso de enseñanza - aprendizaje.

Como la disciplina Matemática pertenece al ciclo de formación básica general, ésta no puede proporcionarle a los estudiantes los niveles de asimilación y profundidad que requiere el modelo del profesional, es por ello que se planifica con el objetivo de que los estudiantes adquieran los conocimientos y habilidades que les van a ser necesarios para la asimilación de las asignaturas específicas del modelo, que sí tributarán directamente a la formación del egresado.

Los objetivos generales de la asignatura, precisan a su vez los contenidos generales de dicha asignatura (conocimientos y habilidades), estos objetivos determinan las formas de enseñanza; métodos y medios de enseñanza a emplear; horas lectivas, contenidos de cada tema, la estructura de la asignatura y las evaluaciones que se van a realizar, así en el proceso docente-educativo se trata de lograr que los estudiantes integren y sistematicen los contenidos al finalizar cada clase.

En cada una de las formas organizativas de la docencia debemos garantizar que los estudiantes cumplan los objetivos educativos (que son los que logran transformaciones en la personalidad de los estudiantes tales como: convicciones, hábitos de conducta y capacidades acordes a la sociedad donde viven), que en nuestro sistema de educación son los más importantes. pero además debemos velar por los objetivos instructivos que están relacionados con el dominio por los estudiantes del contenido de la asignatura.Partiendo de los objetivos que cumple (grado de dominio de los contenidos y en el tipo de habilidad a formar), en la asignatura se organizan las siguientes actividades: Conferencia, Clase práctica, Seminario y Laboratorio

Otra actividad que ha contribuido notablemente al desarrollo del proceso docente - educativo es la **tutoría diferenciada** a los estudiantes de alto y bajo aprovechamiento mediante la orientación y supervisión en la solución de ejercicios que atiendan esas diferencias individuales, a la vez que sirve como un mecanismo más para la evaluación de algo muy difícil de evaluar, las actitudes.

Casi todas las actividades desarrolladas han contado con un número adecuado de estudiantes, que en clases prácticas y seminarios han sido menor de 25, lo que permite conocer cada individualidad y desarrollar el proceso lo más factible posible (evaluación, tutoría, etc.) solamente en conferencias el número de estudiantes ha sido elevado, pero por el método de enseñanza empleado y el objetivo de esa forma de enseñanza no se afecta el proceso.

3-Evaluación.

El proceso docente educativo se desarrolla en cada clase siguiendo la lógica de cada asignatura y debe cumplir los objetivos establecidos para cada clase, tema, asignatura, disciplina y programa siendo un proceso de sistematizaciones sucesivas.

En correspondencia con el nivel de sistematicidad de los objetivos y como criterio de retroalimentación del proceso se desarrolla la evaluación del aprendizaje. Con el propósito de guiar dicho proceso en nuestra asignatura se confecciona el sistema de evaluación, cuyo objetivo es enjuiciar críticamente, desde elaboraciones personales y basado en las experiencias individuales y los criterios del colectivo de la asignatura, el proceso docente educativo, no sólo con la identificación de las dificultades, sino tratando de responder el por qué y el cómo se presentan y sobre todo cómo poder eliminarlas.

En nuestro caso el sistema de evaluación tiene tres tipos de evaluaciones, las frecuentes, las parciales y las finales.

3.1 Evaluaciones frecuentes.

En este tipo de evaluación se evalúa el cumplimiento de los **objetivos específicos** de la asignatura prevista para cada clase es fundamentalmente de modalidad formativa donde se evalúa el dominio de los conocimientos procedimentales (siendo las demandas fundamentales las de identificar, demostrar, reproducir y discutir) y el dominio de los conocimientos actitudinales (cumplimiento de los objetivos educativos, es decir, la formación de valores, normas y actitudes).

La finalidad de las evaluaciones frecuentes es fundamentalmente de control, aunque con el objetivo de dar una valoración final del rendimiento académico de los estudiantes éstas van dando una información para la evaluación final (es por ello que también tiene, aunque poca, finalidad acreditativa) se desarrolla en clases prácticas y seminarios utilizando fundamentalmente la técnica de observación, evaluación participativa, donde el profesor es un elemento más dentro del aula observando todo lo que ocurre, previendo lo que puede suceder y así mediante un examen atento y exhaustivo que se hace sobre todos los estudiantes del aula, puede llegarse al conocimiento de los mismos.

Como cualquier tipo de evaluación, pasa por la etapa de planificación donde se realiza el diseño de los criterios de medidas para el cumplimiento de los objetivos educativos e instructivos de la clase, pero la dinámica de cada actividad hace que la implementación de la evaluación sea bastante flexible, sin orientación previa a los estudiantes, previéndose la utilización de distintos tipos de preguntas (de ensayo restringido, de respuesta breve o de opción múltiple).

Luego se diseñan los principales instrumentos de evaluación que van a ser utilizados, en este caso: guías de evaluación, análisis de contenidos (métodos elaborados, documentos, etc.), análisis de trabajo (detección de errores o satisfacciones en definiciones, proposiciones, problemas etc.), análisis de tareas (valoración del trabajo independiente de los estudiantes, actitudes ante el estudio, etc.), entrevistas (aunque este tipo de instrumento es típico de la técnica interrogativa es utilizado en las evaluaciones frecuentes, pues una vez establecido un clima de confianza entre los profesores y alumnos permite conocer más acerca de estos últimos).

Después corresponde interpretar los datos obtenidos para la toma de decisiones. En esta etapa, que también es muy cambiante (por no ser previsible) se debe subsanar dentro del marco de la clase todos los errores detectados ya sean de conocimiento procedimental o actitudinal, tomando las decisiones más adecuadas a criterio del profesor, que puede ser: explicación de contenidos, corrección de actividades en trabajo independiente para que de esta forma y con la tutoría futura controlar el cumplimiento de los objetivos de la clase.

La dificultad fundamental que tiene este tipo de evaluación está dada en que al ser tan flexible y dinámica, la planificación y ejecución de la misma depende de la experiencia y condiciones subjetivas de cada profesor, lo que dificulta la evaluación de la evaluación por un agente externo (solamente es posible hacerlo cuando se controlan la clases y esto ocurre una o dos veces en el semestre). Este tipo de evaluación solo aparece, quizás, en el plan de clases.

Entre las ventajas más importantes permiten que se tenga: una corrección informada, un constante banco de pruebas, un marco donde los estudiantes manifiesten públicamente sus conocimientos, una evaluación de actitudes, un diálogo con los estudiantes y una información puntual de la situación docente de los alumnos.

3.2- Evaluación parcial.

Evalúa el cumplimiento de los **objetivos particulares** que deben alcanzarse al culminar cada tema de la asignatura.

Aunque el sistema de evaluación que se propone es fundamentalmente formativo, aquí esta presente mucho más la modalidad sumativa, por el papel clásico que tienen los exámenes como instrumento de evaluación, que están diseñados para definir entre fracaso y el éxito, pero este tipo de evaluación permite valorar también el dominio de conocimientos procedimentales y aunque en menor medida los actitudinales; siendo las demandas cognitivas principales las de demostrar, argumentar, producir, justificar y calcular.

La finalidad principal de la evaluación parcial es la de acreditación, aunque mediante la retroinformación, le permite al estudiante informarse sobre la marcha del aprendizaje (es por ello que decimos que esta presente la modalidad formativa) y al profesor además de la información, control y regulación del proceso enseñanza - aprendizaje, le aporta juicios muy importantes sobre las técnicas de enseñanza utilizadas, la calidad de la evaluación, etc.

La técnica utilizada es interrogativa, pues mediante la utilización de instrumentos nos permite recopilar información sobre la marcha de la adquisición de conocimientos por los estudiantes.

La planificación de este tipo de evaluación se realiza antes de comenzar a impartirse la asignatura, aparecen recogidos en el programa de la misma los objetivos que se deben alcanzar y los criterios de medida para medir el cumplimiento de éstos, esta información es del conocimiento de todos los participantes en el proceso docente- educativo: los estudiantes (como guía de los contenidos a vencer para tener una acreditación final), los profesores (para diseñar sus clases, medios y métodos de enseñanza para alcanzar dichos objetivos), los jefes de colectivo de años, jefe de departamento (para la evaluación de la evaluación).

El diseño e los instrumentos de evaluación es un examen escrito, el cual generalmente consta de problemas de un tema determinado que el estudiante debe resolver demostrando para ello su capacidad para enjuiciar, diferenciar y sintetizar, comprobando los profesores, no solo la captación de conceptos sino la compresión de éstos. En la confección, valoración del diseño que cada profesor hace del examen y los criterios de evaluación intervienen todos los miembros del colectivo de asignatura. Luego se realiza la calificación de los exámenes utilizando los criterios de evaluación, ya discutidos, donde se comprobará el cumplimiento de cada objetivo, mediante el grado de satisfacción en las respuestas a cada uno de las preguntas formuladas, como representación del dominio de contenidos.

En la última etapa se interpretan los datos obtenidos a través de esa calificación, tomando las decisiones que se deriven de este análisis que pueden ser la orientación de trabajo independiente, repetición del examen, etc.

Como deficiencias de este tipo de evaluación se tiene: es competitivo, se realiza para controlar, es calificación más que evaluación y se realiza principalmente de la vertiente negativa, patologías estas que se pueden aliviar algo en el proceso de retroinformación, permitiéndole a los estudiantes la posibilidad de apelar la calificación y dialogar con ellos, convierte la evaluación en un proceso de negociación, diálogo, y mejora que permite a su vez corregir el proceso de aprendizaje. Además como el diseño y realización de este tipo de evaluación está reflejado en el programa de la asignatura, es posible controlarlo y evaluar al evaluado por la evaluación que realice.

3.3 Evaluación final.

Se evalúa el cumplimiento de los **objetivos generales** de la asignatura, por lo que debe ser realizado en un momento tal que el grado de sistematización de los contenidos asimilados les permita a los estudiantes integrar dichos contenidos, demostrando las habilidades esenciales de la asignatura.

La modalidad de la evaluación es fundamentalmente sumativo, valorándose en un examen final el cumplimiento de cada uno de esos objetivos generales, siendo la finalidad de la evaluación la acreditación.

Se utiliza una técnica interrogativa que mediante un examen final, nos permita recoger la información de cómo fueron asimilados por los estudiantes los contenidos impartidos, así como la creación en ellos los hábitos de conducta que estaban previstos para la asignatura.

En la selección del instrumento de medición se toma un examen escrito, el cual debe estar diseñado basado en preguntas de ensayo y/o problemas que integren los contenidos impartidos durante el semestre y permita valorar la comprensión de aquellos aspectos esenciales que deben dominar los estudiantes en la asignatura (invariantes del conocimiento) sin los cuales no es posible obtener una acreditación. El examen y los criterios de evaluación deben ser discutidos en el colectivo de la asignatura y sin su aprobación no puede ser aplicado.

Después, mediante la calificación de esos exámenes podemos recoger la información del grado de cumplimiento de cada objetivo.

Por ese tipo de evaluación eminentemente acreditativo, de la interpretación de los datos obtenidos sólo se puede tomar la decisión de darle la oportunidad mediante entrevistas personales discutir la calificación del examen, así como su presencia en la revalorización para mejorar la calificación obtenida.

En este tipo de evaluación, aunque imprescindible para la conformación de la propuesta de sistema de evaluación, por su carácter integrador, se agudizan aún más las patologías del proceso de evaluación del aprendizaje referidos a calificación más que valoración y evaluación competitiva ya que prácticamente no tiene retroinformación dentro de la misma asignatura (sólo permite controlar y tomar decisiones para el mejoramiento de la asignatura cuando se vuelva a impartir la misma, por lo que será con otros estudiantes, o la adecuación de las otras asignaturas que le den continuidad en el orden lógico de la ciencia a las cuales tributa la asignatura impartida).

4- Características metodológicas del modelo propuesto.

Del análisis de estos tres aspectos, se puede determinar las características del proceso de evaluación e identificar con cual modelo se corresponde.

Las características fundamentales son:

- Tiene un diseño estructurado (se conocen de antemano las técnicas a utilizar en la evaluación, instrumentos e interpretación de los datos).
- La muestra admite un procesamiento estadístico.
- Utiliza instrumentos válidos y fiables para la recogida de datos.
- Permite un análisis de interpretación de los datos mediante técnicas estadísticas.
- La validez interna y externa así como la fiabilidad nos permiten valorar la investigación.
- Las decisiones que se toman acerca de los programas vigentes están basadas en la coincidencia entre los objetivos del programa (definidos por el modelo del profesional) y los resultados alcanzados.
- En el sistema de evaluación se especifican y delimitan los objetivos que se deben alcanzar en cada examen como criterio de medida del cumplimiento de los objetivos del programa, estos objetivos así como los criterios de medida son planificados y conocidos de antemano.
- Aunque en la práctica no se concibe la evaluación como un proceso terminal (por la retroinformación que existe) ésta está centrada en el cumplimiento de los objetivos previamente definidos.

Limitaciones:

1) se debe especificar y delimitar los objetivos medibles, este trabajo es muy difícil (es por ello que se elaboran en colectivo para aliviar un poco esta situación).

2) el rendimiento de los alumnos es un criterio básico.

3) es una evaluación sumativa, centrada en resultados.

Ahora bien, en el modelo de evaluación propuesto están presentes las evaluaciones frecuentes que aportan elementos formativos y cuyas características fundamentales son las siguientes:

- El problema de investigación es basado en las vivencias.
- Un diseño abierto y flexible (el diseño y aplicación de la evaluación depende de la clase específica).
- Utiliza técnicas cualitativas (de observación) en la recogida de datos.
- Realiza un análisis e interpretación de los datos mediante reducción, exposición y conclusión.
- propósito es el perfeccionamiento, promoción y desarrollo de los programas y ayudar a educadores a obtener información continua y sistemática.
- Análisis de la discrepancia-incongruencia entre lo querido-buscado-intenciones y las observaciones realizadas en la planificación, desarrollo e impacto del programa para llegar a valoraciones del tipo causa - efecto.

Conclusiones

- El proceso de evaluación, en la disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica, se planifica y controla mediante los diseños de los instrumentos que se utilizan en las **evaluaciones frecuentes**, **evaluaciones parciales** y **evaluación final,** descritas en el cuerpo del trabajo. Esta metodología es generalizable a cualquier disciplina.
- Es posible incluir evaluaciones orales tanto en controles parciales como finales ya que a experiencia en los encuentros ha sido positiva pues permite intercambiar, orientar, guiar el estudio no solo a los estudiantes con dificultades sino también a los aventajados. En esta modalidad pudiera haber una parte escrita que permite tener conocimiento del dominio de los procedimientos y la oral sería para aquellos conceptos matemáticos de imprescindibles en la asignatura.

- Estos tres momentos del proceso son discutidos y aprobados en los diferentes niveles de dirección de la organización del proceso docente - educativo, conformando nuestro sistema de evaluación y teniendo en cuenta que el mismo no puede considerarse como una intromisión en el proceso aprendizaje, sino como parte de él, es por lo que se aprueba en el colectivo de año, tratando de que el número de evaluaciones sea lo menor posible y distribuidas adecuadamente, de modo que no dificulte dicho proceso.

- Como todo el aprendizaje no puede medirse completa y exhaustivamente se escogen aquellos aspectos que se desea evaluar en el tiempo que se dispone para ello.

- Teniendo en cuenta que la evaluación del proceso de aprendizaje es más cualitativa que cuantitativa, para la acreditación de la asignatura se valoran estos tres tipos de evaluaciones, conformando una calificación final que si bien tiene más en cuenta el examen final por su carácter integrador, analiza los resultados de las evaluaciones frecuentes y parciales, donde además de los objetivos instructivos se evalúan los educativos.

- Esta calificación final puede ser apelable donde los estudiantes tienen la posibilidad de la negociación de esa calificación final, además de poder presentarse a otras evaluaciones con el objetivo de mejorar notas.

- En el sistema de evaluación esta previsto un examen de premio, que con un rigor más elevado que el del examen final, se presentaría a los estudiantes que hayan obtenido la máxima calificación en la asignatura que les da la posibilidad de aumentar el índice académico general, que es nuestro indicador de rendimiento académico.

Referencias Bibliográficas:

Alvarez, M. (1997) *Evaluación formativo-participativa en los centros abiertos a la comunidad*. Educación y Medio. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo. España.

Castro, V. (1990) *Capacitación. Diseño tecnológico de cursos*. México.

Corral, R. (1991). *La psicología cognitiva contemporánea y la educación*. Universidad de La Habana. Cuba

Estévez, E. (1997) *El polémico campo de la evaluación educativa*. México.

Llanos, R. (1997) *La evaluación como elemento orientador y dinamizador del aprendizaje*. España.

Miyar, A. (2000) *La evaluación como agente activo en el aprendizaje. Experiencias en la disciplina matemática para ingeniería Eléctrica*. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Cuba.

Los portafolios como formas escritas de evaluación del aprendizaje matemático

Ligia Arrieta
Universidad Nacional Experimental de Guayana.
Venezuelaligarrieta@yahoo.com

Resumen

Se reporta parte de un estudio acerca de evaluación de los aprendizaje en el área de matemática, en el cual se plantearon, entre otros, los siguientes objetivos: (a) describir e interpretar el proceso de construcción de portafolios elaborados por estudiantes de Ing. Industrial de la U.N.E.G. como parte de su práctica evaluativa y (b) orientar el proceso de elaboración, manejo y uso del portafolios en el aula, para ser utilizados como formas escritas de evaluación del aprendizaje matemático. El fundamento teórico es: (a) la concepción de evaluación de Díaz y Hernández (1998) y Salcedo (1995); (b) una visión de la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget según González (1994); (c) la teoría constructivista del aprendizaje significativo de Ausubel (1980) y (d) una adaptación de los elementos: *estructura de la actividad y segmentos de actividad* de Stodolsky (1991). La metodología de investigación utilizada se inscribe en el paradigma fenomenológico y cualitativo (Pérez Serrano, 1994), con un diseño etnográfico (Martínez, 1994) para la descripción detallada de los hechos y su interpretación. Las conclusiones más sobresalientes se refieren a que la construcción de portafolios permite ver la evaluación como parte de un proceso y no de forma aislada; en particular, permite reconocer en los estudiantes, procesos de pensamiento más profundos, relacionados con el conocimiento matemático procedimental y con el desarrollo de su poder matemático.

El problema

Contexto. Se ha debatido con frecuencia acerca de la evaluación en cuanto a su naturaleza de ser continua, formativa y de procesos, sin embargo, en la realidad de la acción pedagógica, la evaluación sigue más con su carácter seleccionador y de clasificación que de visión retroalimentadora para los protagonistas de cualquier hecho educativo. En el caso de las matemáticas, Giménez J., (1997), señala que la evaluación pasa a ser un eje importante del proceso educativo cuando se retoma el análisis de procesos de pensamiento y se reflexiona y se reporta acerca de lo que acontece en el aula, para lo cual el propio currículo es referencia obligada en estos intentos de actualización de la evaluación matemática. (pp.16-18).

Delimitación y Enunciado del Problema. La Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG) es una institución pública de educación superior. Este estudio se realiza con un grupo de cuarenta (40) estudiantes que cursaron la asignatura Matemática II en la carrera de Ing. Industrial, una de las que ofrece la Institución, durante el lapso 98-I. En ese momento estaba vigente, según el Reglamento de Estudios Profesionales, un modelo de evaluación centrado en el dominio de objetivos conductuales y como principios fundamentales de la metodología de enseñanza, el desarrollo de habilidades de naturaleza cognoscitiva. Lo anterior revelaba una contradicción entre una metodologia de enseñanza y su evaluación, que sería una de varias que podrían encontrarse en el campo de la evaluación en general y de la evaluación matemática en particular. En este estudio se proponía una evaluación del estudiante con distintas formas, instrumentos y técnicas. Se reporta específicamente una parte de una investigación más amplia, referida a la construcción del portafolio, como herramienta de evaluación centrada en lo que el estudiante puede hacer, en el desarrollo de

su poder matemático, de la comprensión, habilidades y actitudes, con lo cuál se abordaría los aspectos referidos al conocimiento matemático procedimental. La técnica se inserta en la teoría constructivista del aprendizaje significativo.(Ausubel,1980).
Objetivos. El presente estudio se propone en términos generales ofrecer y orientar técnicas de evaluación constructivistas que permitan evidenciar las distintas capacidades y conocimientos matemáticos aprendidos por los estudiantes. Se presentan a continuación dos de los objetivos específicos que se plantearon en la investigación:

1) Describir e interpretar el proceso de construcción del Portafolio en estudiantes de Matemática II de Ing. Industrial de la UNEG durante el semestre 98-I, como parte de su práctica evaluativa

2) Orientar el proceso de construcción, manejo y uso del portafolio para ser utilizado como forma escrita de evaluación del aprendizaje matemático procedimental y del poder matemático del estudiante.

Justificación. Pueden señalarse los siguientes aspectos:
a) La evaluación, como elemento fundamental de toda práctica educativa, refleja el proceso de enseñanza y aprendizaje y en una nueva perspectiva, debe considerarse junto con las interacciones sociales que suceden en el aula. En consecuencia, las investigaciones actuales descubren una evaluación que no tiene un carácter puntual, sino procesal y continuo. Desde este punto de vista, y acorde con los fundamentos teóricos que sustentan esta investigación, es necesario establecer criterios e instrumentos alternativos de evaluación acordes con un carácter flexible y abierto de un modelo curricular de naturaleza constructivista. En el caso de la UNEG y específicamente del caso de la matemática, se justifica el orientar los esfuerzos para conseguir la coherencia necesaria entre las teorías que sustentan el proceso institucional de enseñanza y aprendizaje y las técnicas acordes con esa teoría.
b) Otro aspecto que justifica este estudio lo constituye el hecho de que en la evaluación bajo un enfoque cognitivo, el aprendizaje se entiende como un proceso fundamentalmente interno y los criterios para las tareas evaluativas no pueden limitarse exclusivamente a comportamientos observables. En concordancia con lo anterior, los instrumentos de evaluación que exigen una única respuesta correcta no son suficientes. Díaz y Hernández (1998), identifican la técnica *construcción de portafolios* dentro de las tendencias recientes en la evaluación del aprendizaje y como una transición a una evaluación auténtica, de problemas contextualizados, con relevancia y significatividad para los estudiantes. (p. 202).
Limitaciones.
1) Enfrentar a los estudiantes a técnicas diferentes como herramientas de evaluación en alguna de sus actividades, provoca en ellos una resistencia natural a lo desconocido. Mucho de los esfuerzos se orientaron entonces a promover a través de mucha información previa y diseño de materiales instruccionales adecuados, las técnicas a utilizar.

2) Es costumbre tradicional que los estudiantes sean evaluados casi exclusivamente con pruebas escritas. Mumme (Mosquera y Quintero comp., 1996) señala que los estudiantes perciben que lo que no es evaluado a través de una prueba escrita, no es importante. En relación a reducir estas expectativas y como elemento propio de un proceso educativo basado en la negociación, se acordó incluir una prueba escrita de conocimiento como parte de las actividades de elaboración del portafolio. La intención no era promover la idea de que la prueba escrita no tuviera utilidad, sino que por sí sola no ofrecía la posibilidad de observar otros elementos que no fueran la memorización de conocimientos; complementada con otras técnicas, sin embargo, pudiera ofrecer la posibilidad de percibir a la evaluación como una actividad investigadora que los mismos estudiantes pudieran ayudar a construir.

1) Marco teórico

Los fundamentos teóricos que sustentan esta parte de la investigación son: Concepción alternativa de Evaluación. El primer componente teórico de este estudio es un concepto alterno de evaluación que permitiera incorporar una forma no usual de evaluación. El concepto de evaluación formulado por Salcedo (1995), se adapta por su naturaleza holística, a este estudio:

> *Evaluación es el proceso mediante el cual se delimita y describe un programa, se juzga su mérito o valor desde una visión integral, atendiendo a las necesidades, intereses y expectativas expresadas por las personas o grupos involucrados en el proceso. (p.71)*

Por otra parte, en el marco teórico-conceptual constructivista, es ineludible para este estudio la caracterización de la evaluación propuesta por Díaz y Hernández (1998), quienes señalan:

1. Debe redimensionarse el uso que se le ha dado a los productos observables del aprendizaje

2. Enfocar la actividad evaluativa durante todo el proceso de construcción de los estudiantes, en su sentido más amplio, desde las acciones docentes y desde los factorescontextuales y desituaciones de aula.

3. Reconocer a través de las tareas evaluativas, el significado funcional que los estudiantes le atribuyen a lo aprendido.

4. Reconocer a la evaluación como una reflexión constante de la situación de enseñanza.

5. La evaluación de los aprendizajes requiere de distintas técnicas puesto que el contexto escolar provee contenidos curriculares de naturaleza variada

6. Finalmente, la evaluación debe orientar una función retroalimentadora para el alumno y para eldocente.

Teoría del Desarrollo Cognitivo. Revisar el proceso dentro del cual un estudiante se apropia de algún conocimiento con significado para él, identificando las representaciones mentales que utilizó para esa construcción, constituye un centro de gran importancia en la práctica evaluativa. De las teorías que han intentado dar explicación al desarrollo cognoscitivo, en este estudio se consideran las visiones de la teoría de Piaget y de la teoría de Vygotsky, señaladas en Woolfolk (1996), y algunas aproximaciones a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de González (1994).

Teoría Constructivista sobre el Aprendizaje Significativo. Las corrientes constructivistas sustentan buena parte de las investigaciones actuales en enseñanza y pedagogía de los conocimientos. Las concepciones constructivistas actuales están influenciadas por las elaboraciones teóricas de Ausubel y sus más importantes seguidores, Novak y Hanesian. (Ausubel, Novak y Hanesian, 1987). Este estudio se fundamenta en el concepto principal de la Teoría del Aprendizaje: el aprendizaje significativo. Las estrategias de enseñanza y de aprendizaje bajo un enfoque teórico de esta naturaleza admiten la incorporación de un instrumento que facilita el aprendizaje significativo, que a su vez constituiría la actividad evaluativa a través de la cuál se observarían elementos de comprensión y habilidad matemática. A continuación se detalla tal instrumento:

El Portafolio: Se toma en cuenta la caracterización del instrumento señalada por Mumme (Mosquera y Quintero, (comp.),1996): "es una colección del trabajo del estudiante y en la educación matemática puede usarse para documentar el desarrollo del poder matemático de un estudiante". (p.41). De esta forma, los portafolios proporcionan información acerca de aspectos relacionados con el crecimiento del pensamiento matemático, comprensión, habilidades, actitudes y construcciones matemáticas. Siendo el portafolio un compendio de elaboraciones, lo que se incluyó en él fue producto de un proceso de negociación con los estudiantes, y se lista a continuación: trabajo escrito del estudiante, individual y por equipos; borradores y/o trabajos terminados; explicaciones, extractos de sus diarios, reflexiones; proyectos e investigaciones, diagramas, gráficos, examen escrito, fotografías, disquetes, cassettes, impresos en computadora, y todos aquellos documentos que identifiquen el trabajo y la persona que lo realizó. Respecto del poder matemático de un estudiante, se consideraron los siguientes aspectos que lo identifican, según Mumme: trabaja cooperativamente e independientemente; toma decisiones matemáticas (analiza, aclara, conjetura, explora, representa, visualiza), utiliza según el caso, comprensiones matemáticas que involucran geometría, álgebra, número, probabilidad, lógica; usa herramientas y técnicas, se comunica de acuerdo al propósito y la audiencia, posee actitudes de apreciación, confianza, curiosidad, inventiva, persistencia, reflexión, voluntad.

La Importancia del Contenido en la Enseñanza. Aportes de la experiencia de Stodolsky.(1991)

De la experiencia de esta autora se hace una adaptación para este estudio, de los elementos que ella considera como *estructura de la actividad* (forma en que se organizan las tareas en el aula), y segmentos de actividad (unidad básica de la actividad). El propósito es el mismo, describir la conexión entre las actividades que tienen lugar en el aula y la asignatura. Los segmentos escogidos fueron: ambiente de la tarea, comportamiento de los estudiantes, formato instruccional, participación de los estudiantes, retroalimentación, comportamiento del docente, nivel cognitivo (desde la perspectiva del conocimiento matemático y del poder matemático de los estudiantes), y por último, el segmento interacción. Todo lo anterior durante las actividades de construcción del portafolio.

Método

Desde el punto de vista metodológico, esta investigación adopta un enfoque naturalista y cualitativo (Pérez Serrano, 1994). Se trata de un estudio de casos por la observación intensa y profunda de un grupo social con algunas explicaciones teóricas sobre regularidades susceptibles a ser categorizadas, analizadas y estimadas cualitativamente. (Martínez, 1994).

Lo anterior se llevó a cabo desde el punto de vista de la observación externa o no participante y de la observación interna o participante, junto con otros tipos de registros observacionales: filmaciones, entrevistas y cuestionarios.

La unidad de análisis de esta investigación la constituyó la sección n° 02 de estudiantes de Ing. Industrial en la asignatura Matemática II, lapso, 98-I, durante el desarrollo de la Unidad II del Programa Instruccional de la asignatura. En estos alumnos se estudiaron los aspectos referidos al conocimiento matemático procedimental, la adquisición y manejo de una estrategia cognitiva bajo el enfoque constructivista y la utilización de esta estrategia como actividad de evaluación del conocimiento matemático y de algunas nociones del poder matemático de los estudiantes. Se realizaron las siguientes actividades: (a) Se desarrollaron los contenidos de la asignatura según el programa, bajo un enfoque constructivista de enseñanza-aprendizaje. (b) Previamente se llevó a cabo un programa de entrenamiento en la técnica de construcción por equipos, de un portafolio. (c) Se controló, según cronograma, el progreso en la conformación del portafolio. En cada control se reportaba la evaluación del mismo en un instrumento diseñado para tal fin. (d) Se preparó y negoció con los estudiantes la presentación final del portafolio. Como actividades adicionales, los estudiantes respondieron a una autoevaluación, a una coevaluación, a un cuestionario y a una entrevista. Para el análisis e interpretación de los datos recogidos en la etapa de trabajo de campo, se procedió de la siguiente forma: (a) descripción de cada una de las sesiones de clases desarrolladas en las cuales se trabajó con los estudiantes para la construcción, por equipos, de los portafolios. Un portafolio por cada equipo de cinco estudiantes cada uno. Posteriormente, las observaciones se transcribieron a objeto de interpretar según la aparición de regularidades y su posterior categorización. (b) De la misma forma que se señaló anteriormente, se trabajaron los resultados de la observación no participante, realizada por un observador clave. (c) Los registros fílmicos de las clases se observaron, se analizaron en repetidas oportunidades y se contrastaron estas observaciones según instrumento elaborado para tal fin, con otros investigadores a objeto de garantizar la triangulación. Producto de lo anterior se ratificaron o emergieron categorías. (d) Las entrevistas realizadas se transcribieron e igualmente se analizaron las regularidades para la detección de categorías. (e) Los resultados del cuestionario aplicado a los estudiantes también se revisaron según escala Likert. Las respuestas validaron las categorías existentes. Finalmente, para el producto final presentado por los estudiantes, sus portafolios, al tratarse de una recopilación muy densa en contenido y en profundidad, se estructuró un instrumento para organizar su revisión y reportar así una calificación tanto cualitativa como cuantitativa a la institución. Representa esto quizá el aporte acerca de las orientaciones propuestas en el segundo objetivo de esta investigación. En consecuencia, el reporte final constituye los resultados de las tareas evaluativas desarrolladas durante toda la actividad dentro del mismo proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura.

1. El ambiente en el cual se desarrollan las actividades, es un elemento que interviene en el proceso de construcción del portafolio. Puede incidir desfavorablemente si no cumple con los requerimientos mínimos.

2. El comportamiento de los estudiantes refleja confusión e indisciplina cuando no manejan suficiente información.

3. Los aspectos referidos a la negociación de la forma o modalidades para desarrollar las actividades o para evaluarlas, en ocasiones genera dudas y hasta confusión, debido fundamentalmente a que los estudiantes no están formados en estos aspectos.

4. Los estudiantes condicionan su participación durante el desarrollo de actividades propias de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, a hechos concretos tales como desconocimiento de técnicas e instrumentos, y grado de familiaridad con quien dirige las actividades.

5. Las actividades de intercambio, retroalimentación y control son importantes durante todo el proceso, tanto para el docente como para el estudiante.

6. Durante el proceso de construcción de portafolios, el nivel cognitivo de los estudiantes va adquiriendo niveles más altos a medida que se avanza en la colección del trabajo, no así en un principio. Respecto del poder matemático de los estudiantes, sólo al final de las actividades se superan los más bajos niveles.

7. Los estudiantes al principio, perciben la estrategia construcción de un portafolio como un exceso de trabajo. Algunos estudiantes opinan que es mejor seguir evaluando con una prueba escrita de dominio de conocimiento y no relacionan la matemática con una
8. asignatura en la que, aparte de resolver problemas y ejercicios, puedan desarrollarse proyectos o puedan discutirse elementos históricos.

9. La aceptación de material instruccional preparado especialmente para el grupo, es alta, y hacen uso frecuente de él.

10. La técnica utilizada, con una concepción matemática de nuevas estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación, incrementa el aprendizaje, favorece la adquisición de conocimiento matemático y resulta útil para reconocer los aspectos referidos a procesos de pensamiento profundos, relacionados con el conocimiento matemático procedimental.l

11. Desde el punto de vista del marco legal de la UNEG, pudo lograrse una coherencia significativa entre estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación, tal y como se planteó en este estudio.

12. Los instrumentos reportados en este estudio para las revisiones de control en la construcción de portafolios y para recoger información acerca del poder matemático de los estudiantes durante esa construcción, resultaron útiles para reconocer las apreciaciones acerca del aprendizaje logrado y su posterior transformación a una escala numérica. Se reconoce sin embargo, que los instrumentos admiten mejoras para su aplicabilidad en otras áreas o ámbitos de la educación.

Referencias bibliográficas

Ausubel D., (1980). *Psicología Educativa*. México: Trillas.

Ausubel, D. y otros (1987). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Díaz F. y Hernández G. (1998). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. México*: Mc Graw-Hill.

Giménez J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una Integración de Perspectivas*. España: Síntesis.

González F. (1994). *La Enseñanza de la Matemática*. Venezuela: Copiher.

Martínez M. (1994). *La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación.* México: Trillas.

Mosquera, J. y Quintero, I. (1996). *Evaluación de los Aprendizajes*. Selección de Lecturas. Caracas: U.N.A.

Pérez S. G. (1994*). Investigación Cualitativa I y II*. España: La Muralla.

Salcedo H. (1995). *La Evaluación Integro-Adaptativa: Fundamentos y Métodos*. Cuadernos de Postgrado N° 10. Caracas, Venezuela. Fac. de Humanidades y Educ. U.C.V.

Stodolsky S. (1991). *La Importancia del Contenido en la Enseñanza*. España: Paidos.

Woolfolk A. (1996). *Psicología Educativa*. México: Prentice-Hall.

Varios

Investigación - Acción: Una experiencia en Aula - Taller.

Gladys Elisa Guineo Cobs
Facultad de Ciencias Económicas -
Universidad de la República. Montevideo. Uruguay
gladysgc@bilbo.edu.uy

Resumen

Este trabajo relata una experiencia de Investigación - Acción de 3 años de duración que coordinó a docentes de diversas asignaturas (Química, Física, Matemática e Instrucción Cívica), de 5° año (secundaria - alumnos de 17 años) del polimodal N° 23 República de Guatemala entre los años 1997-1999, en torno a un problema curricular. Este proyecto de trabajo estaba abocado a subsanar un déficit de los programas de estudio, puesto que los alumnos que tenían que cursar 5º año en ese período jamás habían tenido formación básica en Estadística y Probabilidad, debido a la implementación de diversas reformas educativas en la provincia y el país.Se presentan aquí algunos resultados y conclusiones obtenidas de esta enriquecedora experiencia, que involucró a unos 180 alumnos por año.

Introducción

El establecimiento "República de Guatemala", sito en la ciudad de Río Gallegos, Santa Cruz, Argentina, desde su creación hasta 1992 fue "Escuela Nacional Normal Superior", a partir de 1993 pasó a ser "Colegio Secundario Provincial N° 23" y actualmente es "Polimodal N°23". Aunque en apariencias esto podría ser un simple cambio de nombre en los hechos implica importantes cambios, tal vez el más notorio sea el de los planes de estudio. Cuando se regía por las normativas nacionales los alumnos tenían Estadística y Probabilidades en 1° año (secundaria - alumnos de aproximadamente 13 años), al pasar a depender de la Provincia, tuvo que adecuarse a los programas vigentes, por lo cual estos temas pasaron a formar parte de matemática de 5° año. Para no perjudicar a los alumnos la dirección del establecimiento decidió implementar paulatinamente el nuevo régimen, es decir en 1993 funcionó solo en 1° año, en 1994 en 1° y 2° y así sucesivamente.

En 1996 se implementó la reforma educativa nacional en la provincia, esta reforma implicaba incorporar los temas de Estadística y Probabilidades en todos los años, pero en los hechos comenzaría a regir a partir de 1998, durante 1996 y 1997 se transferían esos temas exclusivamente a primer año, pues los docentes tenían que ser incorporados previamente a los planes de reconversión.

En esta oportunidad el establecimiento no tuvo la opción de una reforma paulatina y los docentes de matemática y ciencias experimentales (física y química, principalmente) mostramos nuestra preocupación porque los futuros egresados no tenían ni siquiera los conocimientos mínimos en estadística. Preocupación a la cual la institución respondió dándonos el espacio para desarrollar un proyecto de trabajo en forma de aula taller, destinado exclusivamente a los alumnos de 5º año.

La primera experiencia tuvo lugar en 1997 e involucró solo a dos asignaturas, Matemática y Química. En esa oportunidad las actividades se desarrollaban en el laboratorio de Química, la sala de computación y el salón de clases. En el laboratorio los alumnos recogían los datos experimentales y debían elaborar un informe que contenía una introducción de la teoría química (no rigurosa pero sí fundamentada) que sustentaba el experimento y un análisis estadístico de los datos obtenidos.

En 1998 el proyecto involucraba ya a tres asignaturas y las actividades se desarrollaban en los laboratorios de química, física y computación además del salón de clases. Para 1999, la incorporación de Instrucción Cívica provocó cambios significativos en el curso, uno de los principales cambios fue el hecho de entrar en contacto con otras instituciones no necesariamente educativas.

Es importante remarcar que en el citado establecimiento funcionaban cuatro quintos años de alrededor de 45 alumnos cada uno; por lo cual estuvieron involucrados en la experiencia más de 500 alumnos a lo largo de los tres años.

Nuestras concepciones

Analizando nuestras experiencias como ex - alumnos y como actuales docentes, queríamos lograr en nuestros alumnos aprendizajes significativos. Pretendíamos que aprendiesen los temas de Estadística y Probabilidad desde un punto de vista aplicado, que se sintiesen realmente motivados a trabajar en esta nueva actividad. En consecuencia buscamos esa motivación dentro de la modalidad de resolución de problemas (Schoenfeld, A. H., 1987). Como además, no queríamos generar una estructura rígida, más bien lo que buscábamos era una metodología que nos permitiese hacer modificaciones continuas, decidimos enmarcar el proyecto dentro de la teoría de Investigación - Acción (Elliot, J., 1993), en la modalidad Aula - Taller.

Partimos de la base que la investigación en la Acción es un proceso cíclico de exploración, actuación y valoración de resultados, en consecuencia es una forma de entender la Enseñanza, no se trata tan solo de una forma de investigación, debe ser un proceso de investigación social, en el cual todos los integrantes estén implicados en la toma de decisiones. [(Lewin, K., Kemmis, S., McTaggart, R., 1988, a), (Lewin, K., Kemmis, S., McTaggart, R., 1988, b), (Stenhouese, 1984) y (Elliott, J., 1993)]

Creíamos firmemente en que las decisiones debían ser tomadas por todos en conjunto, aunque siguiendo a Cascante y Braga (Cascante, Braga, 1995) se podría decir que las decisiones metateóricas en cuanto a la relación sociedad - educación y conocimiento científico - educación, fueron tomadas por los docentes y los directivos del establecimiento, al analizar críticamente la importancia que tienen los temas de Estadística y Probabilidad en la sociedad actualmente, y su relevancia en el ámbito científico. Las decisiones teóricas fueron tomadas por los docentes y el gabinete psicopedagógico del establecimiento, el cual recomendó la puesta en práctica del proyecto curricular en forma de aula taller.

Consistentemente con la idea de que todos los implicados deben tomar parte en las decisiones, se optó por introducir una encuesta por trimestre que se distribuía a los alumnos. Con la misma se buscaba no solo detectar posibles problemas sino también evaluar al proyecto y a los docentes.

Con respecto a la organización del proceso de enseñanza aprendizaje, la coordinación general del proyecto estaba en manos de un docente de matemática, pero la preparación de material y la estructuración del curso se realizaba semanalmente por todos los docentes implicados, favoreciendo de este modo que todos los integrantes del grupo se compenetraran con el proceso de investigación - acción ((Lewin, K., Kemmis, S., McTaggart, R., 1988, a), (Lewin, K., Kemmis, S., McTaggart, R., 1988, b), (Stenhouse, 1984) y (Elliott, J., 1993)]

En este proyecto se buscó desde un principio involucrar a la institución, porque es muy difícil llevar a cabo cambios significativos si no se cuenta con el apoyo de la estructura institucional ((Stenhouse, 1984) y (Elliott, J., 1993)). Desde esa perspectiva la institución puso dos condiciones, la primera de ellas fue que el curso se debía limitar a trabajar exclusivamente con los 5º años, bajo ningún concepto aceptaba un proyecto que involucrase a cursos inferiores, alegando que una situación así le provocaba graves trastornos organizativos. La segunda condición tenía más relación con las exigencias universitarias, ya que no quería que se dejasen de dar los temas propios del curso.

La primera experiencia

En el año 1997, los alumnos se encontraron ya el primer día de clases con que tenían una hora menos (hora académica de 40 minutos) de clases de matemática y una menos de química, y en su lugar tenían una clase en modalidad aula taller de dos horas de duración (80 minutos).

Los alumnos y los padres tenían el preconcepto que esas horas iban a ser "horas libres", es decir, creían que no se iba a hacer nada, pero se encontraron con un curso en el cual tenían que prestar atención en las clases de química y recordar los conocimientos que ya tenían de la misma para poder hacer los experimentos y explicar por qué los hacían así y no de otro modo. Además tenían que hacer un análisis estadístico de los datos, de lo cuál lo único que sabían era obtener un promedio, no sabían que significaba moda o mediana, y menos aún un desvío estándar o un test de hipótesis.

En la primera clase se les enseñó a calibrar pipetas de 5 y 10 ml. El alumnado ya sabía utilizar pipetas de los cursos de química anteriores pero todos los análisis que habían realizado eran del tipo cualitativo, nunca habían hecho un análisis cuantitativo y no tenían idea de lo que significaba "error de medición", más bien, consideraban inaceptable cometer errores de medición.

Con este primer trabajo aprendieron a obtener medias, medianas y modas, además que como cada uno tenía distinto número de mediciones se encontraron con la necesidad de tener algún dato más que el informe del valor central para poder comparar entre ellos, y de ese modo se introdujeron los conceptos de desvío estándar y varianza, construyéndose posteriormente los intervalos de confianza.En este primer trabajo se manipulaba con todos los datos obtenidos, en los trabajos inmediatamente posteriores se trabajó con datos agrupados en intervalos de igual y distinta longitud. Se realizaban además gráficos de barras, diagramas de torta, histogramas, etc., de modo tal que también aprendieron a utilizar un software adecuado, e interpretar lo que obtenían.

Al finalizar el primer trimestre de clases (finales del mes de mayo) se realizó una de las encuesta de opinión a los alumnos, la cual al ser anónima les brindaba la seguridad de libre expresión.

En base a las respuestas obtenidas, se analizó la posibilidad de realizar algunas de las modificaciones propuestas por los alumnos, ya que como dice Lewin ((Lewin, K., Kemmis, S., McTaggart, R., 1988, a), (Lewin, K., Kemmis, S., McTaggart, R., 1988, b)), los cambios son más efectivos cuando los miembros del grupo se implican en el proceso y toman parte en las decisiones de cambios. En principio para ese año lo que se modificó fue el horario de clases y paralelamente se les propuso a los docentes de física incorporarse al trabajo. Por motivos estrictamente administrativos, ese año no se pudo concretar la incorporación de los docentes de física, pero si se inició el trabajo en conjunto, diseñando las actividades a desarrollar en el año siguiente (1998).

Las últimas dos experiencias

En un principio, cuando se inició el diseño de actividades de las tres materias en conjunto (mediados de 1997) no era claro el modo de lograr la integración pero después de encontrar temas en común como espectrofotometría y estudio de ondas, electroquímica y corriente eléctrica, generadores eléctricos, etc., el trabajo se convirtió en un verdadero trabajo de equipo. Lo cual se pudo comprobar ya en la encuesta del primer trimestre de ese año, donde los alumnos expresaban su interés por continuar con el aula taller y extenderla a más materias.

Tanto los alumnos como los docentes se sentían comprometidos con el desarrollo de las actividades ([(Lewin, K., Kemmis, S., McTaggart, R., 1988, a) y (Lewin, K., Kemmis, S., McTaggart, R., 1988, b)), y eso generaba un ambiente de trabajo muy favorable, en el cual los alumnos no tenían miedo a equivocarse ya que sabían que podían recurrir a cualquiera de los docentes o a sus propios compañeros para resolver sus dudas. Generándose lo que Vygotsky denomina Zona de Desarrollo Próximo. (Vygotsky, L.S., 1978)

En esta nueva etapa del trabajo, se continuó con las actividades en la sala de informática, el salón de clases y principalmente, "el laboratorio", aunque ahora se trabajaba en dos laboratorios, el de física y el de química.

En función del análisis de las encuestas y de reiteradas solicitudes de los alumnos, se buscó la posibilidad de integrar más asignaturas al proyecto. A fines de 1998, un docente de Instrucción Cívica fue el único que se mostró interesado.

Luego de producirse esta nueva incorporación se comenzó a trabajar paralelamente con el informe anual y la nueva propuesta de actividades (para 1999) del proyecto. Propuesta en la que se explicitaban contenidos conceptuales, actitudinales y metodológicos a desarrollarse en el transcurso de 1999 (Rico, 1998).

En esta nueva propuesta no era factible continuar con el viejo sistema de los experimentos y análisis de datos, porque de ese modo no se le daba cabida a Instrucción Cívica, por lo cual se optó por cambiar la forma de encarar el aula taller. Ahora los alumnos se dividían en grupos y cada grupo tenía una empresa: Cosmetología, Productos de Limpieza, Industria Alimentaria, Industria Automotriz, etc., de modo tal que debían investigar sobre la legislatura existente, qué modificaciones propondrían a la legislación, además de qué maquinarias necesitan para instalar la empresa, qué productos químicos requerían, etc.

Ahora, se desarrollaba el aula taller en dos días, en clases de dos horas académicas de duración (80 minutos). Una de las clases era en "el laboratorio" (el de física o el de química) y otra en el salón de clases o en la sala de computación, además de las actividades dE investigación que debían realizar fuera del horario normal de clases.

Algunos resultados

En la primera encuesta realizada en el marco de este proyecto, figuraban entre otras las siguientes preguntas, de las cuales se citan algunas de las respuestas obtenidas:

7) ¿Qué opinión le merecía el aula taller al iniciar el año?

- Hora libre
- Una estupidez, en un aula taller nunca se hace nada, nos hacen hablar y hablar y nada.

- ¿Qué engendro es esto? ¿Con qué nos van a salir?. De seguro aparenta ser fácil pero va a ser complicado.
- A quién se le ocurre hacernos perder el tiempo, para eso que nos dejen ir antes.
- ¡Que bueno! No creí que tuviéramos que hacer algo

8) ¿Cambió tu opinión con respecto al curso? ¿Por qué?

- Sí. Creí que era solo hablar y no faltar.
- Sí. Pensé que no había que estudiar, al principio era redifícil hacer los informes, por suerte no se enojaban y siempre nos ayudaban. Pero lo malo es que muchas veces nos hacían hacer el informe de nuevo un montón de veces.
- No sé, siempre me sonó difícil, pero no porque fuese difícil el curso sino porque pensé que nos iban a querer joder. Ahora se que es difícil pero no porque nos quieran joder sino porque tenemos que acordarnos de todo lo que hicimos en el secundario. Mi vieja me dice que es mejor así porque así me va a costar menos en la Facu.

9) ¿Qué opinas actualmente del curso?

- Está rebueno. Junta todo lo que vimos, además nos dejan trabajar en el laboratorio. Lo que está difícil es que nos hagan hacer tantos informes.
- Jamás pensé que Matemática tuviera algo que ver con otra cosa que no sea matemática. Creo que el tallercito está bueno.
- Pensé que era una boludez ahora creo que no. Ya me parezco a Einstein, y ahora no sé que voy a estudiar.

10) ¿Qué cambiaría o qué agregaría?

- Quizá debería estar también Lengua así nos ayudan con la redacción que nos cuesta un montón.
- Lo único que cambiaría es la hora porque cada tanto nos toca dejar los experimentos a la mitad.
- Debería estar en la última hora así no tenemos que salir para ir a otra clase
- Quisiera que esté física también, supongo que allí también se deben de hacer experimentos. Nunca tuvimos laboratorio de física.

11) ¿Cree que se debe continuar con esta modalidad el resto del año

- Y más.
- Desde 3° año que tenemos química, desde allí tendría que ser así. Se aprende más.
- Sí. Ya me acostumbre a ir al laboratorio y parecer un científico.
- El curso está bueno, pero a mí me gusta la medicina, esto se parece en algo pero no mucho.
- Es primera vez que le encuentro utilidad a la matemática y es la primera vez que nos dejan usar una máquina para hacer las cuentas. Tendría que ser siempre así. Tiene que continuar. (Díganle a la viejita de Contabilidad que nos deje usar la calculadora).

Para los años 1998 y 1999, como la actividad ya tenía algo de historia, se decidió empezar con una encuesta diagnóstico en la cual no se buscaban los conocimientos previos de las áreas específicas sino que se indagó en las ideas previas con respecto al curso, con lo cual se pudo comprobar que un 75% de los alumnos tenía una idea bastante clara de lo que se desarrollaba en el curso y tenían mayor predisposición que los alumnos de 1997.

Conclusiones

Como dice J. Contreras Domingo (Contreras Domingo, J., 1995) refiriéndose a la puesta en práctica de un proyecto, "la actuación debe analizarse en su calidad educativa, en relación al valor educativo que tienen por sí mismas como experiencia y no por su valor instrumental". En este caso la experiencia fue planificada para llevarse a cabo durante tres años consecutivos y destinada a dictar de forma aplicada temas de Estadística y Probabilidad, qué se sabía, qué los alumnos desconocían y les iban a resultar muy necesarios en un futuro. Pero más allá de haber cumplido con su objetivo original, sirvió para que los alumnos vieran con otra cara a la Matemática, para que los docentes implicados se comprometieran más con la institución, para generar un ámbito con mayor predisposición a los cambios y a las modificaciones continuas y principalmente dio confianza a los docentes de que un trabajo en conjunto, hecho con mucha voluntad da buenos frutos.

Para lograr un aprendizaje significativo en los alumnos, es necesario que se sientan motivados a trabajar, y una forma de conseguir esa motivación es hacer que ellos mismos aporten los problemas, desde las áreas en que a ellos les interesa trabajar.

Este tipo de trabajo necesita de docentes que sepan reconocer que no son dueños de la verdad y que entre todos se pueden encontrar soluciones adecuadas, para lo cual es fundamental un trabajo multidisciplinario.

Referencias bibliográficas

Dubinsky, E. & Noss, R. (1996). *Some kinds of computers for some kinds or learning: A reply to Koblitz*. Mathematical Intelligences. 18.1.

Schöenfeld, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education. New Jersey*: Lawrence Erlbaum Associates.

Lewin, K. & Kemmis, S. & McTaggart, R. (1988, a). *Action research and minority problems*. Ed. Op. Cit.

Lewin, K. & Kemmis, S. & McTaggart, R. (1988, b). *Group decision and social change*. Ed. Op. Cit.

Contreras D. (1995). *Investigación-Acción*. Cuadernos de Pedagogía 224. pp. 8 - 19

Cascante , B. (1995). *Una guía práctica*. Cuadernos de Pedagogía 224.

Stenhouse, (1984). *Investigación y desarrollo del curriculum*. Madrid: Morata.

Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación acción*. Barcelona: Martínez Roca.

Vigotsky, L. (1978). *Mind in society. The Development of Higher Psychological Processes*, USA: Harvard University Press.

Rico, (1998). *Complejidad del currículo de Matemáticas como herramienta profesional*. RELIME. 1. pp. 22 - 39.

El contrato didáctico en el escenario virtual

Gisela Montiel y Rosa Ma. Farfán
Cinvestav IPN, México
gmontiel@mail.cinvestav.mx, rfarfan@mail.cinvestav.mx

Resumen

La educación a distancia es una modalidad educativa que ha tomado fuerza en los últimos años debido a circunstancias diversas, el adelanto tecnológico que lo permite, la exigencia social por educar a mas gente, la necesidad de comunicar, discutir y debatir con individuos físicamente distantes. En particular, la matemática educativa, en su propósito de formar a mas y mejores docentes ha encontrado en la educación a distancia la posibilidad de interactuar con expertos de distintas partes del mundo y así afectar positivamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en espacios geográficos diversos (Castañeda, A., et al., 2001). Pero al trabajar en escenarios diferentes surge una pregunta inevitable, ¿qué pasa con el cuerpo teórico construído hasta hoy en la matemática educativa? El presente reporte de investigación pretende mostrar la parte final del trabajo de investigación (Montiel, 2002) donde nos planteamos observar las interacciones entre el profesor, el alumno y el saber, cuando éstas se llevan a cabo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático particular en un escenario de educación a distancia.

Antecedentes teóricos

Una vasta revisión de la literatura en Educación a Distancia (Farfán y Montiel, 2002) nos reveló que el trabajo de investigación en ese campo ha sido desarrollado, básicamente, en dos vertientes: la descriptiva y la teórica. La investigación descriptiva centra su atención en lo referente al diseño instruccional, es decir, al análisis, diseño, implementación, evaluación y costo de proyectos a distancia, en donde un eje principal ha sido el uso de tecnología y la tecnología misma. Con los diseños instruccionales se propone una infraestructura y un proceso de planeación sistemática para el desarrollo y adaptación de sus programas basados en las necesidades del alumno y los requerimientos del contenido. Por su parte, la investigación teórica ha integrado elementos constitutivos de la práctica educativa a distancia, de forma que se organicen para explicar los fenómenos que se presentan. Tal es el caso, por ejemplo, de la teoría de la Distancia Transaccional de Moore (1990, 1991) Al hablar de distancia, esta teoría se refiere a algo más que una simple separación física entre instructor y estudiante. Se refiere a una distancia de percepción y entendimiento, causada en parte por la separación física entre los actores. La Teoría de la Distancia Transaccional habla de la transacción llamada educación a distancia que ocurre en un ambiente cuya característica especial es la separación física entre instructor y estudiante, entendiendo transacción como la interacción entre éstos, el ambiente y los consecuentes comportamientos de enseñanza y aprendizaje. Con esta separación se da un desfase de comunicación y una brecha psicológica, un espacio de "malentendidos potenciales" entre lo que percibe el profesor y lo que percibe el estudiante. Este espacio es lo que se define como "distancia transaccional". Lo que determina la cantidad de distancia en un programa es una función de dos variables, el diálogo y la estructura (Farfán y Montiel, 2002)

En la disciplina de la matemática educativa contamos con aproximaciones teóricas que explican la construcción de conocimiento matemático desde posturas didácticas, cognitivas, sociales, lingüísticas o antropológicas, entre otras. La aproximación teórica donde nace nuestra investigación se ha denominado socioepistemología y se ocupa específicamente del problema que plantea la constitución del saber matemático y de su incorporación al sistema escolar. Asumimos que dado que el saber matemático se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su introducción al sistema le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento; de manera que afectan también, las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. Al momento de introducir el saber al aula se producen discursos intencionales con la intención de facilitar la comunicación de ideas matemáticas y en consecuencia favorecer la formación de consensos. Estos discursos reciben el nombre genérico de Discurso Matemático Escolar (Cantoral, 1999) y son vistos como el medio para lograr una participación de la cultura en el ámbito didáctico.

El grupo de investigación que trabaja bajo esta aproximación se ha propuesto el rediseño del discurso matemático escolar de forma que enfrente los problemas socioculturales que rodean a la actividad escolar en el campo de las matemáticas. Por ejemplo, la masificación de los sistemas de enseñanza, la traducción de obras educativas de una cultura o de una lengua a otra, los fenómenos de subordinación metrópoli - colonia, las prácticas de exclusión por género, etnia o condición laboral, son todos asuntos de índole sociocultural que habrían de ser explicitados por las investigaciones de la aproximación socioepistemológica.

Esta aproximación teórica articula las cuatro componentes de la construcción social del conocimiento, a saber, su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2000), lo que hace posible utilizar elementos teóricos de otras escuelas del pensamiento, y hacer extensiones de índole sociocultural. En este sentido, tomamos como primera base teórica a la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) y como variable de análisis a la noción de Contrato Didáctico.

Teoría de situaciones didácticas

Desde los años 60's Guy Brousseau plantea la estructura de lo que hoy día conocemos como Teoría de Situaciones Didácticas. Brousseau pretende que las secuencias didácticas, con objetos de enseñanza específicos, provoquen en el alumno una génesis artificial de los conceptos. Para provocar tal efecto es necesario conocer la génesis real, a fin de que los saberes adquieran nuevos significados o recuperen sus significantes iniciales, desde la visión en la cual se les adopta como entes culturalmente aceptados. Esto es, estudiar la naturaleza epistemológica de los saberes en juego. Desde sus inicios, Brousseau identifica la falla electiva en la clase de matemáticas (provocada por la propia naturaleza epistemológica del conocimiento en juego) y observa como el fracaso matemático en un momento se supera para producir conocimiento, lo que lo lleva a establecer que el aprendizaje no sólo trata con asuntos mentales, sino que se trata de la decodificación de lenguajes, actitudes y comportamientos entre profesor y alumno estudiando un contenido matemático específico. Entonces, para dar una explicación científica de las condiciones que propician el aprendizaje se estructura la noción de contrato didáctico como aquello que condiciona la situación didáctica, los significados del problema y los conceptos, y la negociación del sentido de las actividades. Sin contrato didáctico lo que se tiene es, solamente una situación problema.

La idea básica que sigue Brousseau consiste en suponer que el proceso para adquirir un conocimiento matemático consta de diversas facetas y se basa en juegos específicos, donde el actor interactúa con un ambiente a distintos niveles, evolucionando sus nociones y su lenguaje. La interacción de un alumno con su medio (organizado, por el profesor, con los fundamentos cognitivos, epistemológicos y didácticos de la construcción del conocimiento en juego) se da a tres niveles Fig. 1.

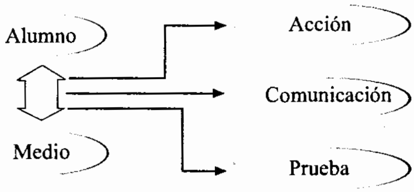


Fig. I
Interacciones del Alumno con su Medio

En la interacción del tipo de ***acción***, el actor fija un estado del medio o determina o limita las acciones de otros actores. La interacción del tipo de ***comunicación*** consiste en modificar los conocimientos de otro actor por medio de mensajes portadores de información, y por último, la interacción del tipo de ***prueba*** tiende a la justificación o validación cultural de los actos o declaraciones establecidas explícita o implícitamente. Estas interacciones no pueden ocurrir de manera simultánea, de hecho ocurren en situaciones con características propias y donde el actor juega papeles distintos, utiliza diversas herramientas y produce distintos mecanismos de comunicación; estas situaciones son justamente las diseñadas por el profesor.

Sin embargo, Brousseau construye su teoría con base en observaciones en un aula presencial, con niños aprendiendo conceptos matemáticos elementales, mientras que en nuestra investigación tratamos con escenarios a distancia, específicamente en la modalidad en línea, y con profesores interactuando con objetos matemáticos de nivel superior. Pero estos objetos matemáticos de nivel superior se tratan no para construir un concepto aceptado por la cultura matemática (donde tendría cabida una situación de institucionalización, en términos de Brousseau), sino que se trabajan para la construcción de argumentos de variación para lograr una articulación de las derivadas sucesivas que provea de significado a la noción de derivada que ya tienen. Es aquí donde tienen lugar las extensiones de aplicación a la teoría de situaciones, así como una extensión sociocultural en la forma de analizar las interacciones.

Estructura del programa en línea

El fenómeno educativo observado forma parte del Programa de postgrado en línea de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional en México. Esta oferta de formación se estructura a partir de la investigación básica y aplicada sobre los procesos de enseñanza, aprendizaje y construcción social del conocimiento matemático avanzado (Castañeda, A., 2001)

El programa se apoya en un modelo basado en redes de Internet, sistemas de telecomunicaciones, tecnologías de información y comunicación, así como modelos de enseñanza y aprendizaje a distancia en la que colaboran investigadores en diversos campos de la especialidad ubicados en centros de investigación y universidades del país. Cada asesor colabora con el programa al impartir algún curso o con la dirección de algunas de las tesis de grado. Se ofrece en una modalidad combinada de uso de Internet el cual permite la comunicación entre personas de manera directa y en forma diferida, en forma escrita y verbal; se posibilita compartir aplicaciones e información entre los miembros de la red académica; así como la organización de equipos de trabajo con o sin importar el lugar de residencia de los miembros; creación de grupos de alumnos con intereses comunes y capaces de aprender de manera colaborativa a pesar de la distancia (García, 2001), así como de las asesorías y prácticas de investigación, efectuadas preferentemente en el sitio de residencia de los profesores y profesoras participantes.

Se hizo uso del sistema de trabajo compartido llamado BSCW (Basic Support for Cooperative Work) que facilita el trabajo a través de Internet. Este sistema ha permitido organizar los cursos, administrarlos e integrarlos mediante la digitalización de diversas formas de información (texto, cifras, sonidos, imágenes fijas, imágenes en movimiento, entre otras), y aporta principalmente apoyo para la creación de zonas donde poder realizar trabajo compartido con otros usuarios a través de la Red.

Contenido del curso

Las observaciones a las que haremos referencia, fueron tomadas de un Curso Especializado del postgrado, titulado Seminario de Investigación en Matemática Educativa II, SIME - II por sus siglas, el cual tuvo una duración de cuatro semanas intensivas y cuyo objetivo fue profundizar en algunos de los aspectos teóricos y metodológicos, a partir de ejemplos concretos, necesarios para el desarrollo de las diversas investigaciones en el campo de la matemática educativa. Pues se pretendía que el participante, pudiera mirar una investigación en curso, el problema de investigación de origen, en una etapa en que ellos y ellas se encuentran en fase de definición de sus temas de investigación. El proyecto de investigación que sirvió como eje del seminario fue el que se desarrolla en la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional, del cual se han derivado importantes investigaciones que hoy tienen producciones para el aula de matemáticas (Cantoral y Farfán (2000); Dolores (1999); Mirón (2000); Cantoral y Ferrari (2001))

Problema de Investigación Origen

El concepto de derivada no puede reducirse a su sola definición, dado que estamos interesados en su aprendizaje. Es decir, la presentación de la derivada en la clase de matemáticas suele hacerse con base en dos elementos: la definición de límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene tangente. Desde la perspectiva socioepistemológica, el concepto habrá de ser aprendido, o compartido, sólo en la medida en que sea usado en situaciones pertinentes. La centración se hace sobre la actividad más que en el objeto. Así el problema de investigación origen consiste en asumir que la noción de derivada sólo será adquirida hasta que esta sea vista como una organización de las derivadas sucesivas, para lo que se requiere construir argumentos de variación. Era necesario que el alumno encontrara que su noción de derivada le era insuficiente para resolver problemas de cierta naturaleza, y se viera en la necesidad de construir argumentos de variación, provocados por las intervenciones y negociaciones con su profesor.

Las interacciones del sistema didáctico

La mecánica de trabajo fue bastante flexible, se podía hacer uso de cualquier recurso tecnológico accesible al profesor, pero básicamente se trabajo dentro de la plataforma BSCW, es decir en forma asincrónica manejando todos los registros en línea. Los equipos de trabajo respondían a los problemas, los colocaban en la plataforma, el profesor intervenía con observaciones de naturaleza diversa (dependiendo de las respuestas) y se modificaban los argumentos de respuesta.

Es claro que existen diversas variables que afectan los comportamientos del alumno, por ejemplo en el caso de nuestra investigación encontramos un cambio de contextos en los argumentos (de contexto analítico a contexto gráfico), y las posibles causas son:

- La estructura o diseño de las preguntas (Demuestre, pruebe, explique, entre otras)
- Su formación (la familiaridad con el cálculo, principalmente desde una perspectiva tradicional analítico-algorítmica)
- El tiempo de reflexión y consulta bibliográfica que permite la educación a distancia, en modalidad asincrónica.
- El contrato pedagógico que se presenta en la práctica educativa sin importar escenarios, en el sentido de responder de acuerdo a lo que parece correcto según el profesor
- Si el profesor quiere que se construyan argumentos de variación (que no se construyen en escenarios escolares tradicionales) es necesario que las respuestas de los alumnos participantes vayan más allá de una solución extraída de libros, por lo tanto, sus intervenciones deben generar el cambio de argumentos.
- Influencia de seminarios, lecturas, conferencias, y otras actividades previas, que giran alrededor de la aproximación socioepistemológica.

Sin embargo, continuamente el alumno trata de adivinar la intencionalidad del profesor, por lo que modifica sus argumentos con base a las intervenciones del profesor, comenzando así una negociación de significados, de la cual el alumno puede no hacer conciencia. Para analizar estos momentos de negociación, donde debe haber rupturas y evolución que provoquen aprendizaje usamos la categoría contrato didáctico.

Analizar todas las interacciones que se llevaron a cabo en la problemática de este seminario SIME II nos llevó a una categorización de las mismas. Encontramos que el alumno puede quedarse a un nivel de adhesión al discurso, es decir, no construir conocimiento y seguir las reglas escolares y pedagógicas impuestas por el propio escenario educativo. Se puede dar una ruptura de la tradición escolar, en el sentido de construir conocimiento utilizando estrategias o argumentos que difieren de los usados tradicionalmente en la clase de matemáticas.

Sin embargo, los momentos más importantes en nuestra investigación fueron aquellos que dieran luz de aprendizaje en el alumno. Siguiendo la postura de la teoría de Situaciones Didácticas, es necesaria la ruptura continua del contrato didáctico y la devolución de la situación (renegociación y evolución del contrato) para que se produzca una situación de aprendizaje. Estas situaciones se caracterizaron como Situación de Ruptura de Contrato Didáctico, Situación de Devolución de la Situación y Situación de Aprendizaje (Montiel, 2002)

Conclusiones

Cuando iniciamos nuestro trabajo de investigación, era común escuchar preguntas del tipo ¿qué es una situación didáctica? y ¿cómo es a distancia?, ¿qué es contrato didáctico en un escenario virtual?, ¿qué sucede con la interacción si ahora el profesor y el alumno no se escuchan, no se ven, ...? Muchas de nuestras respuestas entonces giraban en torno a la búsqueda de comparaciones entre escenarios escolares y con respecto a las ventajas tecnológicas actuales. Pero la pregunta más profunda que impulsó esta investigación fue más bien otra, ¿cómo tratar con los fundamentos teóricos de la matemática educativa en este nuevo escenario? Gracias a este cambio de enfoque es que hemos respondido a las preguntas anteriores.

El tomar a la noción de Contrato Didáctico, como variable central para nuestro análisis mostró, a la luz de una reflexión teórica, un cambio de la noción misma de interacción en los escenarios de educación a distancia. Es decir, dado que el contrato didáctico no se reduce a las interacciones entendidas al nivel del contacto entre alumno y profesor, pues es el instrumento que nos permite ver cómo actúa el alumno en el milleu, y en ese sentido cómo es que se enfrenta a una situación problema negociando continuamente significados con su profesor. Es claro que estas interacciones toman características propias de cada escenario, pero no constituyen diferencias entre ellos, sino variables de control de cada uno.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. En Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V. (Eds). Kluwer Academic Publishers.

Cantoral, R. & Ferrari, M. (2002) La predicción y la regla de los signos de Descartes. Enseñanza de las Ciencias, Barcelona España. Aceptado.

Cantoral, R. (2001). Sobre la construcción social del pensamiento matemático avanzado. Actas de la Semana de las Matemáticas: Tendencias Actuales de las Matemáticas, su Historia y su Enseñanza en Domínguez, J. A. y Sierra, M. (Eds.). Salamanca, España.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2000). Pensamiento y Lenguaje variacional en la introducción al análisis. El Futuro del Cálculo Infinitesimal, en R. Cantoral (Ed.), pp. 69 - 91. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1997). Matemática Educativa: ¿Será posible el sur? En R., Farfán (Eds.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Relme 11. Morelia, México. Vol 11, pp 28-32. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Castañeda, A. & Farfán. R. & Lezama, F. & Martínez, G. (2001). Educación a Distancia: Una experiencia en Matemática Educativa. En F. Cordero (Ed.) Serie: Antologías No. 1, pp. 293-312. Programa Editorial Red Nacional de cimates.

Dolores, C. (1999). Una introducción a la derivada a través de la variación. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. & Montiel, G. (2002). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Relme 15. Buenos Aires, Argentina. Vol. 15, Tomo 2, pp. 1287 - 1292. Grupo Editorial Iberoamérica.

García, L. (2001). La Educación a Distancia. De la Teoría a la práctica. Ariel Educación, España.

Mirón, H. (2000). Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: Una exploración de las relaciones f <-> f' en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav - IPN.

Montiel, G. (2002). Una Caracterización del contrato didáctico en escenario virtual. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav - IPN. México

Moore, M. (1990). Recent Contributions to the Theory of Distance Education. Open Learning, 5(3), 10-15.

Moore, M. (1991). The American Journal of Distance Education. Editorial: Distance Education Theory., 5(3), 1-6.

Proyecto de estructuración de la disciplina matemática para el nivel medio superior de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

Luis Alberto Kittrell Guzmán y Virginia Alvarez Suárez

Universidad Autónoma de Nuevo León, México y Universidad de La Habana.

kittrell_a@yahoo.com.mx virginia@matcom.uh.cu virginia_as@yahoo.es

Resumen

En las preparatorias de la U.A.N.L., a diferencia de las preparatorias del resto de las universidades mexicanas, desde el año 1993 se modificaron los cursos de Matemática utilizándose un sistema modular en el cual la disciplina Matemática se imparte en cuatro módulos de 9 semanas cada uno separados por 9 semanas en las cuales no se enseña Matemática. La enseñanza fragmentada de esta disciplina provoca discontinuidad y falta de sistematicidad y vinculación entre los temas y poca asimilación de los contenidos que se traduce en olvido de muchos aspectos importantes por parte de los estudiantes. Es nuestro propósito diseñar un programa para la disciplina Matemática, con el que se logre una enseñanza didáctica y metodológica adecuada, basado en los fundamentos del enfoque histórico cultural y la teoría de la actividad.

Introducción

EL desarrollo social y científico alcanzado en las últimas décadas del siglo XX, en particular la expansión cada vez mayor de los métodos matemáticos y su utilización en casi todas las ciencias, en lo que se ha llamado "matematización de las ciencias", demanda al proceso educativo, en especial a la enseñanza de la Matemática, que encuentre los contenidos específicos y estrategias de aprendizaje que permita formar individuos que puedan establecer una relación eficiente con el medio natural, la vida social y en particular con la ciencia y tecnología. Para lograr esto es necesario que desde los niveles secundarios y preuniversitarios se determinen los objetivos y contenidos matemáticos necesarios para que los estudiantes arriben a la universidad con la preparación adecuada para poder asimilar eficientemente las disciplinas matemáticas de las diferentes carreras.

En las preparatorias de la U.A.N.L., a diferencia de las preparatorias del resto de las universidades mexicanas, desde el año 1993 se modificaron los cursos de Matemática utilizándose un sistema modular en el cual la disciplina Matemática se imparte en cuatro módulos de 9 semanas cada uno separados por 9 semanas en las cuales no se enseña Matemática. La enseñanza fragmentada de esta disciplina provoca en los estudiantes discontinuidad y falta de sistematicidad en la asimilación de los contenidos que se traduce en olvido de muchos aspectos importantes.

Desarrollo

La situación anteriormente planteada nos motivó a acometer una investigación cuyo diseño exponemos a continuación.

Las principales dificultades que observamos fueron las siguientes:

- Insuficiencia en los programas de la disciplina: contenido y tiempo.
- Falta de sistematicidad en la aplicación de las herramientas matemáticas.
- Deficiencias en la vinculación entre los temas de las distintas asignaturas.

Estas dificultades nos hicieron inferir el siguiente ***problema científico***: El diseño del programa de la disciplina de Matemática en las preparatorias de la U.A.N.L. no propicia una secuencia lógica de sus contenidos lo que provoca falta de sistematicidad y vinculación entre los temas y poca asimilación por parte de los estudiantes.

Por lo tanto el ***objetivo general*** de nuestro trabajo ha sido:

Diseñar un programa de la disciplina Matemática para las preparatorias de la U.A.N.L. que posibilite una enseñanza didáctica y metodológica adecuada.

Nuestros ***objetivos específicos*** han sido:

1. Determinar los objetivos, contenidos y horas de los programas de la disciplina.
2. Distribuir los contenidos en 6 semestres (3 años).

La ***hipótesis*** del trabajo fue:

Con un programa de la disciplina Matemática que contemple los objetivos, contenidos y las horas adecuadas y que tenga como fundamento los principios didácticos del enfoque histórico cultural y de la teoría de la actividad se puede lograr vinculación entre los temas, sistematicidad en el aprendizaje y una solidez mayor de los conocimientos por parte de los estudiantes.

El objeto de estudio ha sido el contenido de Matemática que se imparte en el nivel medio superior de la U.A.N.L

Partiendo de estos elementos nos plateamos realizar las siguientes ***tareas***:

1. Análisis de la evolución histórica de la enseñanza de la Matemática en las preparatorias de la U.A.N.L
2. Análisis de los principios didácticos desde el punto de vista del enfoque histórico cultural y de la metodología de la teoría de la actividad presentada por N. Talizina con relación al tema de objetivos y contenidos de los programas de estudio.
3. Determinación de las necesidades de integración y sistematicidad entre los programas de las diferentes asignaturas de Matemática de la disciplina para lograr que se cumplan los principios didácticos planteados.
4. Determinación de objetivos y contenidos de las diferentes asignaturas matemáticas.
5. Distribución del tiempo para cada asignatura tomando como base 6 semestres (3 años) para toda la disciplina.

Para desarrollar estas tareas utilizamos diferentes métodos y técnicas en la búsqueda y procesamiento de la información:

Métodos teóricos:

- Análisis histórico - lógico de la literatura y en la determinación de la esencia y tendencia en el desarrollo y evolución de la enseñanza de la Matemática en el nivel medio superior.
- El análisis - síntesis, inducción-deducción que nos permitieron el estudio como totalidad del diseño del programa de la disciplina Matemática.

Métodos empíricos:

- Sondeo de opinión de maestros con experiencia en la enseñanza de la Matemática en el nivel medio superior de las preparatorias de la U.A.N.L
- Resultados históricos de las evaluaciones de estudiantes en ese nivel.

Definición de variables:

Variables independientes:

- Objetivos y contenidos de los programas de las asignaturas de Matemática.
- Distribución del tiempo asignado a las asignaturas y el tiempo total de la disciplina.

Variable dependiente:

- Programa general de la disciplina matemática.

La *novedad científica* del trabajo radica en la intención de lograr que con una mejor distribución de contenido y horas de los programas se logre una mejor integración y sistematicidad en la enseñanza de la Matemática en el nivel medio superior de las preparatorias de la U.A.N.L que propicie a una mayor solidez en la asimilación de los conocimientos matemáticos en los estudiantes.

El *aporte teórico* radica en el diseño del programa de Matemática para ese nivel y la importancia práctica en el hecho de contar con el mismo para mejorar la calidad de la enseñanza de la Matemática en la U.A.N.L, el cual además es de gran actualidad dada la necesidad de elevar el nivel de utilización de la Matemática en las diferentes carreras universitarias.

Conclusiones.

Utilizando los métodos teóricos y prácticos que habíamos previsto con anterioridad realizamos todas las tareas planteadas las que concluyeron con la elaboración del programa de la disciplina de Matemática para las preparatorias de la U.A.N.L. Este programa está estructurado en seis asignaturas, dos por cada año y en ellas aparecen los objetivos y contenidos, la distribución del tiempo para cada una, así como orientaciones metodológicas que pueden ayudar al profesor a lograr la solidez en la asimilación de los conocimientos tan deseados. Por lo tanto pensamos que hemos cumplido con el objetivo que nos habíamos propuesto con nuestro trabajo.

Referencias bibliográficas

Combray, N. (1994). *Antología en Educación Matemática*. CINVESTAV, IPN. México.
González, C. (1993). *Medios de Enseñanza*. Pueblo y Educación. La Habana.
González, O. (1992). *Diseño Curricular*. CEPES La Habana.
Kilpatriek, J. (1995). *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
Talizina, N. (1986). *Conferencias sobre los Fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior*. Editorial del MES, La Habana.

Torres, P. (2001). *Tendencias Iberoamericanas en la Educación Matemática*. Imprenta Universidad Autónoma de Sinaloa. México.

ANEXO.

Programas.

Primer semestre. Álgebra I

Objetivos:

El alumno efectuará las operaciones fundamentales con expresiones algebraicas y desarrollará técnicas adecuadas en la resolución de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones con dos variables. Identificará si las relaciones son o no funciones aplicándolo al caso de las funciones lineales, trazando las gráficas y realizará el análisis para aplicaciones en el mundo real.

Contenido:

Capitulo 1	Operaciones con polinomios.
Capitulo 2	Productos notables y factorización.
Capitulo 3	Funciones y relaciones.
Capitulo 4	Funciones y ecuaciones lineales.
Capitulo 5	Sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas.

Segundo semestre. Álgebra II

Objetivos:

El alumno desarrollará técnicas matemáticas en la resolución de ecuaciones cuadráticas, efectuará operaciones fundamentales y simplificará expresiones algebraicas racionales, expresiones algebraicas con radicales que involucren raíces cuadradas y resolverá ecuaciones con radicales; identificará, graficará y analizará funciones algebraicas (cuadráticas, racionales e irracionales) y trascendentes (exponenciales y logarítmicas). Determinará el dominio de las mismas, aplicará sus conocimientos sobre todos estos elementos a la resolución de problemas del mundo real.

Contenido:

Capitulo 1	Funciones y ecuaciones cuadráticas.
Capitulo 2	Expresiones algebraicas racionales.
Capitulo 3	Expresiones cuadráticas con radicales.
Capitulo 4	Funciones algebraicas racionales e irracionales.
Capitulo 5	Funciones exponenciales y logarítmicas.

Tercer semestre. Geometría plana y trigonometría

Objetivos:

El alumno será capaz de utilizar los postulados y teoremas de la geometría plana en la resolución de problemas; además aplicará los criterios de semejanza de triángulos, el teorema fundamental de semejanza de triángulos, las propiedades de los polígonos y las de la circunferencia.

El alumno será capaz de utilizar las definiciones de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo en la resolución de problemas, y también de determinar el valor de las funciones trigonométricas para ángulos en general, resolver triángulos oblicuángulos y calcular el área de triángulos.

Contenido:

Capitulo 1 Geometría Plana.

Capitulo 2 Trigonometría

Cuarto semestre. Geometría analítica

Objetivos:

El alumno será capaz de utilizar los métodos de la geometría analítica mediante el uso e integración de los conocimientos adquiridos en aritmética, álgebra, geometría y trigonometría; al mismo tiempo logrará un desarrollo de sus habilidades para el análisis, el razonamiento y comunicación de su pensamiento, a través de la resolución de problemas que le permitan percibir e interpretar su entorno espacial desde un enfoque geométrico analítico y a su vez facilite en el futuro la asimilación de aprendizajes más complejos y la resolución de problemas del mundo real.

Contenido:

Capitulo 1 Geometría analítica en el plano. La recta.

Capítulo 2. Estudio de la circunferencia y de las cónicas.

Quinto semestre. Calculo diferencial e integral

Objetivos:

El alumno será capaz de utilizar sus conocimientos sobre los procedimientos y técnicas del Cálculo Diferencial e Integral en la resolución de problemas muy diversos, lo cual contribuirá al desarrollo de sus habilidades, al análisis, razonamiento y comunicación de sus pensamientos, a interpretar su entorno espacial y a resolver problemas del mundo real.

Contenido:

Capitulo 1 Límites de funciones.

Capitulo 2 Continuidad.

Capitulo 3 Derivadas.

Capitulo 4 Aplicaciones de la derivada.

Capitulo 5 Integrales. Aplicaciones.

Sexto semestre. Probabilidad y Estadística

Objetivos:

El alumno será capaz de introducirse al estudio de fenómenos aleatorios, su interpretación, importancia, tratamiento y aplicación; al conocimiento y aplicación a diversos problemas de diferentes técnicas de recopilación y presentación, análisis e interpretación de datos numéricos; al uso y apropiación de las reglas para el cálculo de probabilidades y la importancia y uso del método estadístico en la toma de decisiones; al desarrollo de habilidades para el análisis, razonamiento y comunicación de su pensamiento proporcionando la asimilación de aprendizajes más complejos y la resolución de problemas del mundo real.

Contenido:

Orientaciones metodológicas generales.

El eje conductor para el desarrollo de este programa está dado a partir del planteamiento y la resolución de problemas; de ahí que lo fundamental a lograr en el mismo sea que los alumnos consoliden y sistematicen los conocimientos aritméticos, algebraicos, y geométricos de niveles precedentes.

Los contenidos a desarrollar deberán ser tratados con un enfoque integrador y generalizador, en que se consoliden y sistematicen todo el contenido del programa como un sistema de recursos que le sirva al estudiante para resolver problemas prácticos y no como objetos matemáticos independientes entre sí.

Se deberá insistir en los significados de las aplicaciones, operaciones y de los procedimientos de aquellas temáticas en las cuales los alumnos hayan reflejado mediante el diagnóstico las mayores dificultades.

La sistematización no debe realizarse repasando conceptos y teoremas, sino mediante la resolución de problemas. Como resultado de ésta, los estudiantes deben tener un cuadro integrado del saber aprendido.

Para concluir estas consideraciones sobre la ejercitación se ofrecen, a modo de resumen, algunas orientaciones generales para los profesores, que pueden contribuir a la solidez de la asimilación en la clase de ejercitación.

- Use un material interesante y variado.
- Intercambie los elementos de un ejercicio: lo dado, la vía de solución y lo buscado.
- Proponga ejercicios con solución única, sin solución, con datos insuficientes o superfluos.
- Seleccione los ejercicios atendiendo a las dificultades que se pueden presentar según el objetivo de la enseñanza, desde ejercicios muy sencillos hasta llegar al nivel deseado, y preste atención al grado de complejidad, actualidad y el desarrollo alcanzado por los alumnos.
- Utilice distintas formas de representación para los ejercicios, distintas notaciones, diferentes posiciones.
- Deje a los alumnos trabajar solos, buscar regularidades o propiedades de una serie de ejercicios.

- Permita que los alumnos piensen, reflexionen, expongan sus ideas, planteen ejercicios.
- Evalúe los errores; sobre todo, enseñe a descubrirlos y a remediarlos.
- Controle los resultados en el sentido de qué se logra y qué falta por lograr.
- Atienda a todos los alumnos, ya sean de rendimiento bajo, medio o alto.
- Enseñe cómo proceder en la resolución de ejercicios, cómo encontrar ideas de solución y permítales exponer sus criterios al respecto. Se trata de enseñar a encontrar la solución y no enseñar la solución.

Disciplina Matemática en la carrera de Ingeniería Eléctrica: objeto de estudio

Ángela Miyar Chávez, Armando Taillacq Montalvo
Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas.Cuba.
Amiyar@mfc.uclv.edu.cu taillacq@mfc.uclv.edu.cu

Resumen

En este trabajo se resume la investigación pedagógica realizada para llegar al diseño de un Programa de la disciplina Matemática para Ingeniería Eléctrica. Se hace referencia a los pasos seguidos en la investigación pedagógica, así como los resultados obtenidos en cuanto a la determinación del objeto de estudio de la Matemática en la carrera en cuestión y la obtención de los objetivos generales instructivos acordes con la derivación de los mismos a partir del modelo del profesional.

También se incluyen algunos problemas con los cuales se obtienen los modelos matemáticos que dan lugar a la determinación del objeto de la Matemática en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas. El programa confeccionado se está aplicando desde el curso 97-98 con buenos resultados.

Tareas parciales de la investigación pedagógica realizada.

En lo que sigue se describirá cada una de las tareas parciales realizadas y los resultados obtenidos. Simultáneamente se realizaron las tareas de revisión de literatura docente y científica, entrevistas-encuestas a profesores principales de las diferentes disciplinas, investigadores relacionados con la carrera, así como a profesionales de la producción y a estudiantes de la maestría relativa a la carrera, análisis de los programas del Plan de Estudio C y del documento Modelo del Profesional elaborados por la Comisión de Carrera.

El problema que le plantea la sociedad a la educación, en este caso a la Educación Superior, relacionado con la necesidad que debe ser satisfecha por la carrera de Ingeniería Eléctrica es el siguiente:

- Necesidad de satisfacer la demanda creciente del uso racional de la energía eléctrica.

El **objeto** de estudio de la carrera que brinda medios para la solución de dicho problema es:

- Conjunto de medios electrotécnicos empleados en la generación, transmisión, distribución y utilización de la energía eléctrica.

Los **objetivos** que debe satisfacer el profesional egresado de dicha carrera son:

- Proyectar sistemas eléctricos sencillos.
- Explotar eficientemente el equipamiento eléctrico, utilizando racionalmente los recursos humanos asignados.

De acuerdo al análisis con las disciplinas se arribó a los siguientes resultados:

- En el caso de las disciplinas **Química, Dibujo, Idiomas y Computación** se analizaron los vínculos existentes y las posibilidades de intercambio con las mismas, principalmente con la última, Computación, puesto que al añadir una asignatura a la disciplina, Simulación, se estrecha el nexo por las posibilidades que brinda al estar en segundo año, segundo semestre; al relacionarse con Circuitos Eléctricos II y Métodos Numéricos.

- Los temas de Matemática son usados directamente por la propia Matemática y por la Física. También algunos tópicos como números complejos, álgebra matricial, aproximación de funciones, entre otros, son usados por disciplinas como Circuitos Eléctricos, Máquinas Eléctricas y Sistemas Electroenergéticos.
- En la disciplina **Máquinas Eléctricas** se manifiesta al utilizar conceptos como derivada, integral y ecuación diferencial, entre otros, para describir la potencia máxima, la intensidad de campo en el diente de una máquina de ranura rectangular, comportamiento de los motores de corriente directa, serie y compuesto.
- **Sistemas Electroenergéticos** emplea la Matemática para representar el flujo interno en el conductor, línea asimétrica no transpuesta, líneas de transmisión, por medio de una integral, una matriz o un sistema de ecuaciones diferenciales respectivamente.
- Para **Circuitos Eléctricos** los conceptos matemáticos de integral, derivada, series sirven para la descripción de magnitudes tales como: corriente eficaz, intensidad de la corriente y análisis de circuitos rectificadores.
- La **Física**, disciplina que utiliza los diferentes conceptos matemáticos para describir magnitudes que le son inherentes. Por ejemplo trabajo, flujo, velocidad, definidas a partir de integrales de línea, de superficie, derivada.
- **Computación**, en este caso tiene dos vertientes: la utilización de programas para la resolución numérica de una ecuación no algebraica, o diferencial, un sistema de ecuaciones o aproximar una función real y por otro lado la utilización de los conocimientos de computación para programar los algoritmos de cálculo estudiados en Matemática numérica.

Por último, la lógica de la ciencia determina que haya temas que deben ser desarrollados con antelación a otros y por tanto la Matemática misma es la disciplina usuario en este caso. Por ejemplo las series numéricas y series funcionales.

Sobre fundamentación y objeto de estudio de la disciplina

A partir de las premisas obtenidas del análisis con los especialistas: problema, objeto y objetivos de la carrera se determinan aquellos contenidos que deben ser desarrollados agrupándolos en disciplinas, una de las cuales es la disciplina Matemática. Estos contenidos en las disciplinas responden a los objetivos de la carrera y en particular en la disciplina Matemática se determinan los objetivos derivados de los de la carrera, acorde con el problema que debe resolver la disciplina dentro de la misma, teniendo en cuenta las relaciones entre las diferentes disciplinas y las existentes entre las asignaturas de la Matemática. Atendiendo a lo anterior se tomó como una primera versión del problema para la disciplina Matemática en la carrera de Ingeniería Eléctrica el siguiente:

Necesidad de caracterizar cuantitativa y geométricamente los fenómenos presentes en los medios electrotécnicos.

Sobre los objetivos.

En el análisis de los objetivos generales realizado se tuvo en cuenta que para proceder a formular los objetivos el profesor debe:

1. Partir de una caracterización de la estructura de acciones generales componentes de la actividad del profesional a cuya formación tributa su asignatura
2. Analizar y delimitar la función que tiene su asignatura en la formación de dicho profesional
3. Analizar y determinar la función que tiene su asignatura con otras del plan de estudio de las cuales es precedente

4. Tomar en consideración el nivel de entrada de los estudiantes
5. Tener en cuenta las restricciones del sistema (limitantes de tiempo, de base material de estudio, etc.)
6. Determinar las tareas o acciones más generales que se aspira que el estudiante realice aplicando los conocimientos que su asignatura le brinda
7. Partiendo de los dos tipos posibles de salida de su asignatura, del nivel de entrada, así como de las restricciones del sistema, formular estos resultados a lograr en términos de acciones, con las características y componentes de un objetivo docente.

Sobre los contenidos

Los conocimientos de Matemática que aparecen en los programas de este Plan de Estudio son utilizados en su totalidad ya sea por alguna disciplina de la carrera o directamente en la resolución de alguna tarea profesional.

Se llegó a la conclusión, en el colectivo de carrera, que si bien es posible incluir algunos temas que ahora no aparecen, esto se puede hacer en forma de cursos opcionales para los estudiantes que lo necesiten por el tema de investigación al que estén vinculados.

El Plan C fue concebido teniendo en cuenta que la Enseñanza Media Superior se encargaba de introducir conceptos como derivada e integral además de ejercitar su cálculo y algunas aplicaciones, pero la situación actual es diferente pues no se tiene como fin de la enseñanza precedente el cálculo de derivadas e integrales y por tanto tampoco su interpretación geométrica.

Como se sabe el éxito del aprendizaje depende fuertemente de las condiciones previas que traen los estudiantes (estado inicial). Estas condiciones comprenden los conocimientos, habilidades, procedimientos, estrategias, modos de pensamiento; todo lo cual se denomina nivel de partida. Este nivel de partida es decisivo para el proceso y resultado del aprendizaje. El profesor debe conocerlo y debe lograr el nivel de partida necesario para el logro del objetivo.

La diferencia en cuanto al nivel de partida señalada anteriormente hizo necesario un análisis del contenido (conocimiento + habilidades) a incluir, teniendo en cuenta que de acuerdo a la derivación de objetivos a partir del Modelo del Profesional lo principal es la interpretación de los conceptos estudiados, su aplicación en problemas puesto que las habilidades en cálculo pueden ser logradas mediante el uso de software o tablas.

Con relación a las habilidades consignadas en dichos programas se observa lo siguiente:

- No aparece la posibilidad de la utilización de tablas para el cálculo de derivadas, cuestión ésta que cobra interés en el nuevo contexto por no estudiarse en la enseñanza precedente.
- No se hacen diferenciaciones entre las funciones elementales de modo de destacar las más usuales en la carrera.
- La habilidad modelar no está declarada en forma clara y precisa, falta señalar en el sentido que se quiere en cada caso, si seleccionar, utilizar o elaborar el modelo correspondiente. Esto es muy importante puesto que esta habilidad requiere del dominio de las restantes y puede ser considerada una habilidad profesional.
- No aparece como habilidad, en alguna asignatura, el hecho de identificar el método matemático (analítico o numérico) a utilizar en la solución del modelo. Esto fundamentalmente es debido a que aparecen separados los métodos analíticos y los numéricos a lo largo de la disciplina.

Con los elementos anteriormente descritos y los restantes analizados: actividades, evaluaciones, medios, metodología; se concibe establecer un proceso de investigación donde cada paso sea valorado con el fin de modificar la idea que le antecede, pero también para crear las condiciones previas para pasar al siguiente. Con este proceso de reciclaje se logra mejorar las estrategias y por tanto el curriculum desde la clase hasta disciplina y carrera pasando por los temas y asignaturas.

Cada estrategia establecida debe ser sometida a evaluación de modo de obtener resultados que permitan generalizar la propuesta o hacerle las adecuaciones que se deriven de la investigación. En este sentido cabe hacer uso de las técnicas de la metodología cualitativa. Es de destacar las posibilidades de esta metodología en la que el "usuario" de la enseñanza, el estudiante, tiene su parte protagónica, con derecho a opinar sobre el trabajo de modo que se convierte en un aliado del profesor en busca de las mejores vías de lograr los objetivos, con la eliminación de la brecha entre las aspiraciones del enseñante y la del aprendiz.

Problemas y Modelos

La aplicación de la Matemática para conocer las leyes del mundo real y aprovecharlas en la práctica es posible a través de la elaboración de los modelos matemáticos, los que permiten reducir la investigación de un objeto real, a la solución de un problema matemático dando así la posibilidad de emplear para su estudio todas las herramientas de esta ciencia, conjuntamente con la potente maquinaria de cómputo.

No se puede pensar en la aplicación de métodos matemáticos sin la formalización del objeto de estudio, a través de la descripción de los rasgos y propiedades más importantes con ayuda de relaciones matemáticas. Hing, R. (1993)

El modelo matemático no se determina unívocamente por el objeto a investigar, la elección de uno u otro modelo se determina por los requisitos de precisión. Al aumentar ésta, hay que complicar el modelo tomando en consideración nuevas singularidades del objeto a estudiar.

A continuación se presentan algunos tipos de problemas que pueden ser y han sido utilizados para introducir los conceptos básicos, ya que, además de tener relación con la carrera, pueden resolverse con las herramientas matemáticas que proporcionan estos programas. Por otro lado estos problemas sirven para que los estudiantes sientan la necesidad del estudio de la Matemática como instrumento para resolver problemas de su profesión y motivarlos por éstos. De cada grupo de ellos se extrajo el concepto matemático que los une, es decir, lo que constituye el **modelo matemático** que es la invariante de cada grupo de problemas. De igual manera se procedió en la determinación de los **procedimientos** (métodos numéricos y transformadas de Laplace y Z) a incluir en el sistema de conocimientos.

Modelo: Número Complejo

Problemas

Cálculo de la suma de dos corrientes desfasadas, de la impedancia equivalente en un circuito serie-paralelo, de la ganancia en tensión de un amplificador de n etapas.

Modelo: Función

Problemas

Comportamiento de una fuente de voltaje constante (no varía con el tiempo). En particular la función de Heaviside y de la corriente en el tiempo, variación de carga en función de la longitud de la línea y con capacitor.

Modelo: Derivada
Problemas
Cálculo de la intensidad de la corriente, del voltaje, de la potencia.

Modelo: Ecuaciones Diferenciales
Problemas

Análisis de una red RL serie. Aplicando ley de Kirchoff voltaje. Movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza elástica. Corriente de la armadura de un motor durante la conducción. Ecuación de la corriente de energización de un transformador. Determinación de la corriente en un circuito con resistores en cascada. Determinación de voltaje y corriente en una línea de transmisión con constantes distribuidas.

Resultados derivados de las tareas parciales realizadas: determinación del objeto, los objetivos y contenidos del programa de la disciplina Matemática

Como consecuencia del análisis anteriormente expuesto, en la elaboración de los nuevos programas se tuvo en cuenta lo siguiente:

- La determinación de los modelos básicos matemáticos fundamentales presentes en los medios electrotécnicos, lo que conllevó a que el **objeto de estudio** esté constituido por: **Los modelos matemáticos y los procedimientos presentes en la descripción de propiedades cuantitativas y geométricas de los medios Electrotécnicos** lo que permite precisar el sistema de objetivos-contenidos correspondientes a la Matemática para la carrera.
- Los objetivos como categoría rectora determinados en función de los objetivos de la carrera, acordes con el uso, como instrumento, de la Matemática en la carrera.
- La selección de los conocimientos organizados en forma de sistema y ordenados de acuerdo a la lógica de la ciencia (Lógica) y a la lógica del proceso docente (Pedagogía), se hace atendiendo al objeto de trabajo de la carrera, a la actividad del profesional o que sirve de base para asimilar estos y se vincule parcial o totalmente con una o varias ramas del saber humano.
- Las habilidades relacionada con el cálculo, no se eliminan, pero son en parte desarrolladas por medio de tablas y programas para computadoras por lo que el tiempo empleado en desarrollarlas resulta ser menor, además de basarse en la habilidad de recodificar en vez de ser memorizadas. Se enfatiza en las habilidades relativas a la selección del modelo que caracterice el fenómeno, en la utilización de modelos en la resolución de problemas y en menor medida la construcción del modelo, cuestión esta que se reduce a los casos sencillos relacionados con la interpretación geométrica de los conceptos de derivada e integral, así como la interpretación física de ambos, es decir, aquellos modelos donde la habilidad interpretar resulta fundamental.
- La importancia de la toma de decisiones en cuanto a la selección del método a emplear en la resolución de un problema. En este caso se contempla no sólo la selección del método analítico idóneo sino también el método numérico que le corresponde de acuerdo a los medios de que se disponga y al grado de precisión que se requiera.
- El hecho de que la carrera de Ingeniería Eléctrica trabaja, fundamentalmente, sobre un

cierto tipo de funciones que son las más usadas, como por ejemplo, las exponenciales, algunas trigonométricas, las racionales.

La propuesta de estructuración resulta ventajosa porque en primer lugar conduce a los estudiantes a ir de lo general a lo particular, lo cual debe influir en una mayor solidez en la asimilación de los conocimientos. "La asimilación de lo general esencial sirve de base a todo el siguiente proceso asimilativo de sus diversas manifestaciones particulares". (Davidov, V. 1981)

Por otro lado se contribuye a objetivizar la enseñanza por medio del uso de problemas relacionados con la carrera mediante los cuales son presentados los diferentes conceptos a estudiar.

En el programa propuesto se muestran distintas vías para lograr desarrollar los contenidos, por medio de determinados órdenes y estructuras y alcanzar el propósito de una mejor y mayor consolidación de los conocimientos. En particular lo referente a la transformada de Laplace.

Conclusiones

Como resultado de este trabajo se tiene un esquema del proceso seguido en el perfeccionamiento de los programas de la disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería Eléctrica, en la determinación del objeto de estudio de una carrera y que puede ser usado en cualquier otro caso.

Al considerar las diferentes acepciones de la habilidad modelar, se puede concluir que el objetivo central de la disciplina Matemática en la carrera de Ingeniería Eléctrica se reduce a:

Modelar fenómenos relacionados con los medios electrotécnicos.

La metodología descrita ha sido utilizada para la obtención del objeto de estudio de la disciplina Matemática en diferentes carreras en la Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, en las que también se ha diseñado el programa director para la Matemática.

Los programas confeccionados para las asignaturas de la disciplina en la carrera de Ingeniería Eléctrica, han sido puestos en práctica desde el curso 96 - 97 y se han perfeccionado las actividades atendiendo a cambios en la distribución de horas por año y en la bibliografía básica.

Los resultados docentes tanto en la disciplina de Matemática como en aquellas usuarias de la misma han sido satisfactorios y en correspondencia con lo esperado.

Referencias bibliográficas

Davydov, V. (1981). *Tipo de generalización en la enseñanza.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Diaz-Barriga, A. (1999). *Metodología del diseño curricular para la educación superior.* México.

Hing, R. (1993).*Programa para el desarrollo de la Matemática aplicada en la Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.* Documento Consejo de Dirección. Cuba.

Miyar, A. (1996). *Perfeccionamiento de los programas de la disciplina Matemática para Ingeniería Eléctrica.* Trabajo Investigativo. Cuba.

Pérez, R. (1994) *El curriculum y sus componentes. Colección Práctica Educación.* Industria Gráfica. Editorial Monserrat. Barcelona. España.

Ruíz, M. (2000). *El enfoque integral del curriculum para la formación de profesionales competentes.* México.

Zabalza, M. A. (1997). *Diseño y desarrollo curricular.* Editorial Madrid. Séptima edición.

La integración y sistematización de las matemáticas en la formación básica de profesionales de la ingeniería

Milagros Gutiérrez Álvarez Rosa Vázquez Cedeño Olga Pérez González
Facultad de Informática de la Universidad de Camagüey. Cuba
milagu@inf.reduc.edu.cu rosav@inf.reduc.edu.cu olgapg@inf.reduc.edu.cu

Resumen

En el presente trabajo se resumen algunas tendencias en la formación de profesionales de la ingeniería, las cuales han repercutido en el proceso de perfeccionamiento de los planes y programas, especialmente en la enseñanza de las ciencias básicas. Se refleja el trabajo desarrollado por el colectivo de la disciplina Matemática de ingeniería Eléctrica de la Universidad de Camagüey, para lograr una integración y sistematización de los contenidos dentro de la disciplina, de manera que se garantice cierto equilibrio entre el rigor de la fundamentación propia de la Matemática y el carácter aplicable para el futuro ingeniero.

Introducción

La naturaleza de la formación profesional ha variado considerablemente a lo largo de los años en estrecha relación con el cambio social, el papel del trabajo en la sociedad y la percepción y diferenciación de los diferentes tipos de trabajos.

Al abordar la formación del profesional de ingeniería, entre los elementos valorativos más fuerte, está lo relacionado con lo curricular, donde al analizar en los planes y programas de estudios de dichas carreras hay que tener en cuenta los problemas sociales con rasgos nacionales e internacionales, para los cuales se preparan dichos profesionales. En este aspecto se señala cuales han sido las tendencias en la formación básica de estos profesionales, así como algunos comentarios acerca de insuficiencias que aún existen y el trabajo de perfeccionamiento en la disciplina Matemática de ingeniería eléctrica.

Desarrollo

Desde la década de los 80, en el proceso de perfeccionamiento de planes y programas de estudio de las carreras de ingeniería desarrollados en Cuba se han introducido cambios sustanciales, en la definición del Modelo del profesional, en la estructura curricular de los planes, fortaleciendo la formación teórica de los estudiantes, el logro de habilidades profesionales y la integración de las disciplinas básicas y de formación general con las disciplinas específicas de formación profesional, en la búsqueda de un egresado más creativo, que se adapten a las exigencias y necesidades de la sociedad y a un proceso de educación permanente.

Los rasgos esenciales prevalecientes internacionalmente en las tendencias actuales están caracterizado por Torres H. M. (1994):

- ✓ Lograr una formación sólida y un conocimiento profundo de las ciencias básicas y los fundamentos de las ciencias de la ingeniería, de los futuros profesionales para afrontar los cambios de la ciencia y la tecnología que caracterizan nuestra sociedad.
- ✓ Formar un profesional en estrecha vinculación con la industria, que adquiera las habilidades profesionales básicas que le permitan resolver una vez graduado los problemas de la producción y los servicios, destacar el vinculo universidad - producción

- sociedad.

✓ Formar un profesional versátil, integral y flexible, con capacidad de autopreparación y adaptación, es decir un profesional de perfil amplio.

La tarea de lograr mediante un diseño curricular materializar estos 3 rasgos esenciales es compleja, es por ello que pretendemos realizar algunas reflexiones al respecto.
Para realizar exitosamente un programa de perfeccionamiento curricular de una carrera con vistas a alcanzar una formación de profesionales de ingeniería a la altura de los requerimientos de esta época, es necesario un enfoque sistémico e integrador de la misma, que responda a los intereses y necesidades de la sociedad para un período dado, logrando significativamente la calidad de la producción y mejora de la vida en general.
A través de estos años se ha trabajado para estructurar la enseñanza de la ingeniería de tal forma que el futuro profesional que se forme sea el deseado por las exigencias de la sociedad en general.
Refiriéndonos especialmente a la enseñanza de las matemáticas en la ingeniería, en los primeros años del proceso de perfeccionamiento de planes y programas en Cuba, coincidimos con lo planteado por Letelier M. (1994). "...La Matemática es un fundamento del currículo y, como tal, condiciona al resto de este. Cumple un papel de principio selectivo al someter a dura prueba a los que inician los estudios de ingeniería y es un fundamento, habitualmente aportado por docentes que no son ingenieros y que naturalmente, conciben la Matemática dentro de los estilos de pensamientos de su propia disciplina...".
En todos estos años se ha tratado de tener presente lo planteado por Torres M. (1994), en su artículo Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Ingeniería, " ... hemos convertido en dirección fundamental de trabajo la búsqueda de la excelencia de la ingeniería basada en su integración con el entorno social y de modo que se enfatice en los conocimientos y habilidades que satisfagan por una parte, la necesidad y versatilidad en su desempeño profesional, y por otra parte, los niveles científicos que permitan asimilar y aplicar los logros científicos, técnicos, así como generar nuevos conocimientos...". No obstante a esto coincidimos con lo planteado por Castañeda E (1996).... que la formación de profesionales de ingeniería hoy en día requiere desarrollar en el hombre los principios básicos, la lógica y la metodología de trabajo del científico, del técnico y del profesional y que para lograrse esto tiene que estar, ante todo, expresado en el contenido del plan de estudio.
Referente al proceso de perfeccionamiento de planes y programas en estos últimos años, han estado vigente algunas ideas planteadas por Gallegos H (1994) "...la ingeniería es arte y realidad, mientras que la ciencia es rigor...".
"...El ingeniero debe apoyarse en el conocimiento científico que han definido las matemáticas, la física, la química. Sin embargo, en la práctica profesional del ingeniero, las ciencias son solamente el sustento de sus análisis, decisiones y comprobaciones...".
"... el ingeniero no es ni un científico ni un técnico. Aunque por la cercanía con la realidad social y con la obra construida sea más fácil relacionado con el quehacer técnico que con la aureola del quehacer científico...".
Por esta razón es necesario una integración entre la ciencia, la técnica y la profesión, esto debe lograrse en el proceso de formación de los ingenieros, a través del reflejo de estos elementos en los programas curriculares, debiéndose lograr una sólida formación científica, desarrollar capacidades y habilidades del pensamiento científico, así como habilidades y

destreza técnica que le permitan enfrentar el quehacer profesional, de igual forma contribuir a la formación humanista, ecológica, .. etc. que se persigue.

En el proceso de enseñanza está planteada la tarea de la formación de tipos determinados de actividad, ante todo la cognoscitiva, en vez de - trasmitir los conocimientos y formar las habilidades y los hábitos de su aplicación - la enseñanza ha ido tendiendo un poco más a formar conocimientos y la aplicación de los mismos.

Hay que ver la actividad del profesional, desde sus tres componentes: práctica, cognoscitiva y valorativa, sin embargo las tendencias han ido en algunos de los casos o bien a reforzar la actividad cognoscitiva y en otros como en estos últimos tiempos la práctica.

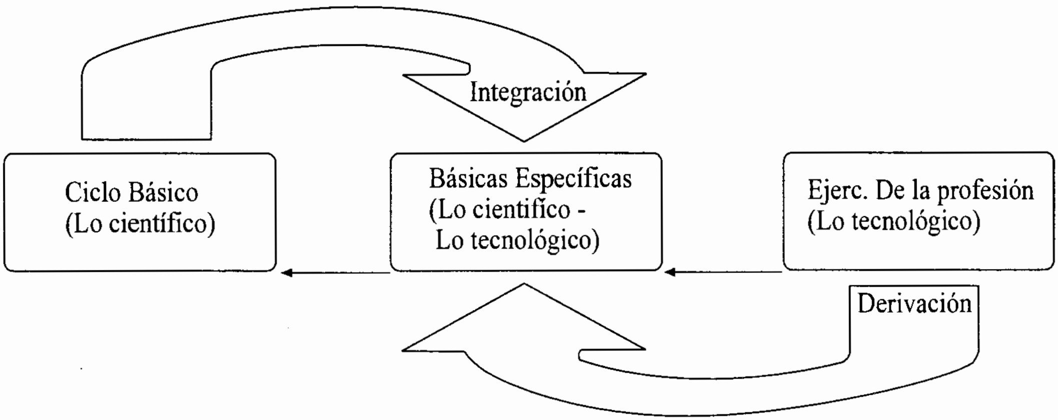
La actividad cognoscitiva y valorativa depende en gran medida de la concepción que posea el alumno de la ciencia en general y de los cuadros particulares de las ciencias que el estudia. Las ciencias básicas debido a las insuficiencias que presentan en su impartición no logran determinar un sistema y por lo tanto, la apropiación del cuadro particular de dicha ciencia es deficiente.

En Matemática prácticamente se imparten herramientas de la misma y no se logra una concepción matemática en el alumno.

Esto es de gran importancia, sobre todo cuando los objetos de la profesión, se han dado estáticamente y confundido con los campos de acción. Así por ejemplo, el objeto de una carrera no es el objeto del profesional, ya que el objeto de este último es un proceso y no un objeto real, mientras que para el obrero su objeto es un objeto real, para técnico son las relaciones de esos objetos reales y para el profesional son procesos con dichos objetos, su objetivo de acción, que es el campo de acción de la carrera.

Uno de los rasgos más significativos de este proceso de perfeccionamiento, ha sido el de fortalecer el papel de las ciencias básicas y en particular de la Matemática y la Física en tanto son materias fundamentales del sustento del pensamiento ingenieril.

Teniendo en cuenta lo planteado anteriormente, el colectivo de disciplina de Matemática para la carrera de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Camagüey, propuso la interrelación de los contenidos como una condición necesaria para lograr un trabajo mayor de interdisciplinariedad en la carrera. Para esto se siguió la lógica del siguiente esquema.



Este trabajo se caracterizó por dos acciones fundamentales: la integración y la sistematización. La sistematización se caracterizó por el uso de invariantes, incrementando el papel activo del estudiante, utilizando como base la estructuración del tránsito por las etapas de asimilación de la teoría de Galperin.
El enfoque integrador requiere de la visión de sistema de la disciplina y su quehacer en el año en relación con las otras asignaturas, así como en la carrera en relación con las disciplinas que integran el plan de estudio.
La Matemática por su propia naturaleza posee una interrelación estrecha entre sus entes, ya que puede verse desde las que pueden considerarse como fundamentales (límite, funciones, derivadas, integrales, etc.) o aquellas que son derivada de las primeras (series, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales etc.) y donde por lo general se requiere de la utilización y aplicación de más de un aspecto matemático fundamental para su desarrollo. Sin el diseño de esta interrelación el control del proceso de asimilación, no puede influir en que el estudiante tenga una visión sistémica de su disciplina y dificultaría el realizar evaluaciones dirigidas a este fin.
Esta interrelación fue dirigida en tres vertientes fundamentales.

1. Hacia tareas del contenido actual puestas en función de propiciar la preparación para el estudio de temas posteriores.
2. Introduciendo conceptos que son aplicación directa del tema actual y que corresponden a otros temas.
3. Desarrollando actividades que permitan interrelacionar conceptos y que logren integrar conocimientos.

Para realizar esta organización de la disciplina se desarrollaron las siguientes acciones:

- Análisis de la interrelación en la disciplina por niveles o sea:

1) Análisis entre los diferentes temas de cada asignatura de la disciplina.
2) Análisis entre las asignaturas de un mismo año.
3) Análisis entre asignaturas de diferentes años de la propia y de otras disciplinas.

- Agrupar los diferentes temas de la disciplina en tres grandes grupos: básicos fundamentales, básicos aplicados y básicos generalizados.
  Los básicos fundamentales son aquellos que tienen una función formadora inicial y para los cuales en general el estudiante tiene conocimiento de la enseñanza precedente.
  Los básicos aplicados: aquellos donde de manera general para realizar cualquier tipo de actividad se requiere de la aplicación de contenidos de los temas fundamentales ya que el estudiante no posee información de la enseñanza precedente.
  Los básicos generalizados: son aquellos temas en el se retoman aspectos ya estudiados pero con un nivel mayor de generalización y donde lo estudiado anteriormente puede constituir un caso particular.
  Para la disciplina Matemática en la carrera de Eléctrica la agrupación de los temas resultó ser:

Básicas fundamentales: Funciones, límites, derivadas, integrales, matrices, determinantes, sistema de ecuaciones lineales.

Básicas aplicadas: Series, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales y espacios vectoriales.

Básicas generalizadoras: Teoría de funciones de una variable compleja, transformada de Laplace y zeta, métodos numéricos.

- La tercera acción la constituye el definir el carácter funcional del tema para la disciplina y la carrera.

- La cuarta acción la constituye el diseño de las tareas y actividades que posibiliten el desarrollo de estas interrelaciones debiendo tener presente:
  -el nivel de asimilación que queremos alcanzar
  -las etapas de asimilación por las que debe transitar.
  Especialmente se tienen muy buenos resultados del desarrollo de actividades programadas por las autoras, llamadas actividades integradoras. (Gutiérrez 2000).Se logra en estas actividades un nivel de creatividad, integración y aplicabilidad de los conocimientos en los estudiantes a tareas de cierta complejidad vinculadas a la especialidad, haciendo uso además de herramientas de cómputos (Matlab) y defendidas ante un tribunal formado por profesores de las diferentes asignaturas.

Este trabajo realizado por el colectivo de autores se ha desarrollado por varios años en la carrera de ingeniería Eléctrica, con muy buenos resultados tanto por la parte estudiantil como por parte de los profesores de otras disciplinas propias de la carrera, lo cual está reflejado con mayor amplitud en otros trabajos ya presentados (Vázquez R y Gutiérrez 1996).

Conclusiones

De manera general hemos realizado un análisis de las tendencias en el perfeccionamiento de planes y programas en las carreras ingenieriles en estos últimos tiempos, en las cuales se ha manifestado una lucha entre la profesionalización y la profundización en el diseño curricular, aspecto reflejado también en la enseñanza de las ciencias básicas. Dentro de los objetivos de este trabajo estuvo muy marcado buscar cierto equilibrio entre la fundamentalización de nuestra ciencia y su aplicabilidad a los problemas y ejercicios de la profesión.

Referencias bibliográficas

Álvarez, C. (1994). *Epistemología*. La Habana; /s.n/.

Castañeda, A. (1996). *La formación de profesionales de la ingeniería*. El ingeniero Civil · No 100.Lima. Perú.

Gallegos, H. (1994). *Ingeniería Civil y Desarrollo*. El ingeniero Civil. Año 16,No 94. Lima. Perú.

Gutiérrez, M. (1997).*Regularidades del ciclo básico en la formación del ingeniero de la UC*. Tesis de maestría.

Gutiérrez, A. & Vázquez, C. & Pérez, O. (2000). *Una experiencia de actividades integradoras*. I encuentro internacional de enseñanza de la Matemática. UC .Cuba.

Letetelier, M. (1994). *La enseñanza de las matemáticas en carreras de ingeniería*. El ingeniero civil. Año 16 No.91.Lima. Perú.
Torres, M. (1994). *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Ingeniería*. El ingeniero civil. Año 16. No. 91. Lima. Perú.
Vázquez, R. & Gutiérrez, M. & Pérez, O. (1996). *La interrelación de contenidos una vía para la integración y sistematización en la disciplina Matemática en carrera no Matemáticas*. Primer taller Internacional de enseñanza de la Matemáticas. UH. Cuba.

Estructuración de contenidos de las asignaturas de segundo año de la disciplina Matemática en la carrera de Ingeniería Industrial

Caridad González Sánchez Esther Anzola Hasday

Dpto. de Matemática General. Facultad de Industrial. ISPJAE. Cuba.

caryg@ind.cujae.edu.cu esther@ind.cujae.edu.cu

Resumen

La estructuración adecuada de los contenidos de Matemática permite que los alumnos se apropien de estos de una forma más eficiente y que sientan una mayor motivación por aprenderlos. Para ello se debe tener en cuenta la articulación tanto horizontal como vertical de las asignaturas analizadas con las restantes asignaturas de la propia disciplina y con las restantes del año en que estas asignaturas se imparten. En este trabajo se expone una estructura metodológica para los contenidos de 2do. año de la carrera de Ingeniería Industrial y los principales resultados obtenidos en la aplicación de la misma.

Introducción

Uno de los problemas fundamentales que confronta la enseñanza de la Matemática en Ingeniería es la falta de motivación de los estudiantes para apropiarse de las técnicas y de los modelos matemáticos. Suele ser una pregunta de los estudiantes que cursan las asignaturas de esta disciplina "cual es la aplicación" que tienen los métodos y técnicas estudiados y a pesar de que se les exponen todos los problemas y tareas que pueden resolverse con el uso de estos métodos y técnicas, estos no llegan a ser correctamente comprendidos y utilizados por los estudiantes, además el desarrollo acelerado de asistentes matemáticos y de calculadoras potentes les hace creer que con estos pueden resolver todos los problemas que se les presentan.

Lo anteriormente expuesto, hace que adquiera una importancia fundamental buscar vías que propicien que los estudiantes traten de apropiarse de estas técnicas mostrándole las posibilidades que estas tienen para ayudarlos a resolver problemas que se les presentan a diario y de que si no disponen por alguna cuestión muy especifica de los medios de calculo para darles solución constituyen herramientas importantes que puede ser utilizadas de una forma relativamente sencilla.

En la preparación metodológica de la disciplina y de la asignatura no pueden olvidarse las tres dimensiones del proceso de formación: instructiva, educativa y desarrolladora. Para ello no solo es importante la adquisición de conocimientos, sino el desarrollo de las habilidades propias de la disciplina así como el desarrollo de las habilidades del profesional. Entre los aspectos fundamentales a considerar se encuentran:

- Articulación horizontal
- Articulación vertical
- Uso de asistentes matemáticos
- Objetivos del año
- Objetivos del modelo de profesional

La articulación debe permitir la relación con las diferentes asignaturas que pueden tener vínculos temáticos entre sí (Castañeda, 1998). Esta articulación horizontal describe la correlación o la integración del contenido enseñado de forma simultanea. (Posner, 1998). La articulación vertical permite describir el orden secuencial del contenido. Entre los objetivos del año está ser capaz de brindar una sólida formación teórica de las ciencias básicas y los aspectos básicos de la actividad profesional, ligados al desarrollo de un pensamiento lógico bien desarrollado. (Castañeda, 2000).

El programa de una asignatura o disciplina constituye la descripción sistemática y jerárquica de los objetivos instructivos profesionales, educativos y de formación de valores, que se deben alcanzar en ella a partir y dentro de las definiciones dadas en el Modelo del Profesional y el Plan de Estudio, de los contenidos esenciales que la misma debe enseñar a los estudiantes, de los métodos y medios de enseñanza fundamentales, así como de los aspectos de organización en que se debe estructurar dicha disciplina para dar respuesta a los objetivos asignados a ella en el Modelo del Profesional y en el Plan de Estudio. (Castañeda, 1998) La integración de estos aspectos trae consigo la definición de las tareas principales a desarrollar para confeccionar la estructura del plan temático de la asignatura:

- Definición de los nodos de articulación horizontal teniendo en cuenta las asignaturas semestre.
- Definición de los nodos de articulación con las asignaturas precedentes dentro de la propia disciplina o de otras disciplinas.
- Características de los asistentes matemáticos y posibilidades de uso teniendo en cuenta la formación en Computación adquirida por los estudiantes.
- Definición de las diferentes formas de enseñanza de la asignatura.
- Desarrollo de las capacidades de trabajo independiente de los estudiantes.
- Desarrollo de la capacidad de autoaprendizaje.
- Desarrollo de tareas, modelos y problemas que pueden resolverse utilizando estas técnicas y métodos.

Este análisis se llevó a cabo en las asignaturas Matemática III y Matemática IV de la carrera de Ingeniería Industrial. Los contenidos de estas asignaturas se muestran a continuación así como lo experimentado a partir de estas definiciones

En la asignatura Matemática III:

Matemática III

Ecuaciones diferenciales de primer orden. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Resolución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales utilizando métodos operacionales. Series de potencias. Series de Fourier. Aproximación de funciones utilizando series.

En la asignatura Matemática III se tomaron como nodos de articulación fundamentales las asignaturas Física I y II donde se estudian las leyes de la Mecánica, Termodinámica y Electricidad. Las dos primeras se estudian en Física I que los alumnos la cursan el semestre anterior y las leyes eléctricas se estudian en el mismo semestre. Como el curso de Matemática comienza con las Ecuaciones Diferenciales en estas se utilizan como aplicaciones fundamentalmente las que se derivan de las leyes de la Mecánica y la Termodinámica, pues la teoría de los circuitos eléctricos se estudia paralelamente y esto permite la consolidación primero en la Física antes de su aplicación matemática. En este tema se hace énfasis también en las aplicaciones geométricas utilizando fundamentalmente las que se obtienen a partir del concepto de derivada de una función. En el tema de Transformada de Laplace, ya se hace uso de las aplicaciones a la teoría de los circuitos eléctricos utilizando ejemplos sencillos y mostrando las ventajas de algunos de estos métodos en la solución de problemas que involucran funciones de tipo pulso e impulso y su método de solución más general. Aquí se les comunica el uso posterior de esta técnica para disciplinas posteriores en particular Gestión de Procesos pero de forma muy elemental.

El tema de series se aplica en aproximaciones sencillas de funciones, que pueden realizarse sin medios de cálculo potente, solo realizando operaciones aritméticas. Se refuerzan los conocimientos sobre límites de funciones y se muestran diferentes problemas de sumas infinitas que pueden ser resueltos utilizando series. Uno de los problemas esenciales que se muestra es como puede obtenerse la media y varianza de algunas distribuciones de probabilidad mediante el uso de series.

En la asignatura se desarrollan dos laboratorios utilizando un asistente matemático, para aprovechar las posibilidades gráficas, simbólicas y para resolver algunos problemas de determinada complejidad en su resolución debido a las operaciones aritméticas, esto permite analizar los tipos de soluciones, la estabilidad de las mismas tanto en el tema de Ecuaciones Diferenciales como en el de Series. Como asistente matemático se utiliza el asistente DERIVE, aunque se esta valorando el uso del programa MATLAB debido a la potencia de este y las posibilidades que brinda de programación.

El Plan calendario de la asignatura se muestra en el Anexo 1.

Conclusiones

En la preparación docente de la asignatura se tiene en cuenta:

- El desarrollo de la capacidad de aprender haciendo a través de seminarios tanto de exposición de nuevos contenidos como de resolución de problemas.
- La articulación con las asignaturas del nivel precedente y con las asignaturas a las que la matemática III tributa.
- El uso de asistentes matemáticos mostrando las posibilidades de estos en la solución de problemas prácticos.

Referencias bibliográficas

Angulo, F. & Blanco, N. (1994). *Teoría y Desarrollo del Curriculum*. Aljibe, Málaga..

Castañeda, A. *Enfoque Sistémico de Diseño Curricular. Síntesis Metodológica*. Conferencia sobre Diseño Curricular del II Taller IGLU-Caribe. Universidad Simón Bolívar. Venezuela.

Castañeda, A. (2000). *Aspectos Conceptuales Básicos Vinculados al Currículum y al Diseño Curricular.* Curso de Diseño Curricular y Nuevas Tecnologías al Comienzo del Nuevo milenio. ISPJAE.
Fernández, B. (2000). *La interdisciplinaridad como base de una estrategia para el perfeccionamiento del diseño curricular de una carrera de Ciencias Técnicas y su aplicación a la Ingeniería Automática en la República de Cuba.* Tesis doctoral.
Hernández, H. (2000). *Nodos cognitivos: Currículos y evaluación.* Tercer Taller de Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior. Universidad de la Habana.
Posner, G. (1998). *Análisis del Currículo.* Segunda Edición, Mc Graw Hill.

Anexo 1
Plan calendario de matemática iii
Carrera: industrial

Semana	Actividad	Tipo	Contenido
1	1	C	Generalidades de EDO. Aplicaciones
	2	CP	Ecuaciones de Variables Separables y Exactas
2	1	S	Ecuaciones Lineales y de Bernoulli
	2	CP	Ejercitación de ED de 1er. Orden
3	1	C	EDL de orden n. EDLH
	2	S	EDLNH
4	1	S	Aplicaciones
	2	L	Uso de DERIVE para resolver
5	1	C	ED Ejercitación de EDLNH
	2	PP1	Evaluación de ED
6	1	CP	Transformada de Laplace directa e inversa
	2	CP	Ejercitación de Transformada de Laplace
7	1	C	Propiedades Operacionales
	2	CP	Ejercitación de Propiedades Operacionales
8	1	CP	Propiedades operacionales
	2	S	Transfomada de Laplace
9	1	C	Series Numéricas
	2	CP	Series Numéricas
10	1	CP	Ejercitación de series numéricas
	2	CP	Series de potencias
11	1	C	Series de potencias
	2	CP	Ejercitación de series de potencias
12	1	PP2	Evaluación de series
	2	CP	Series de Fourier
13	1	C	Series de Fourier
	2	CP	Series de Fourier
14	1	L	Uso del DERIVE para análisis de series

Resumen por tema:

TEMA	HORAS POR TEMA			
	CTP	CP	S	L
I (ED)	6	6	6	2
II (T de Laplace)	6	4	2	0
III (Series)	12	8	2	2
TOTAL	24	18	10	4

C Conferencia CP: Clase Práctica S: Seminario L: Laboratorio PP: Prueba Parcial. EDO: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias ED: Ecuaciones Diferenciales. EDLH: Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas.
EDLNH: Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas.

Diseño de una estrategia didáctica para la integración de la matemática en la formación del licenciado en Ciencias Farmacéuticas

Elsa Ramírez García, Norma Santos Marín y Magalys Ruiz Iglesias
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Cuba.
elsar@mfc.uclv.edu.cu o elsarcu@yahoo.com

Resumen

Una de las direcciones del trabajo metodológico en la Educación Superior Cubana es la integración de las componentes docente, laboral e investigativa y de las disciplinas en la carrera como vía para dar respuesta a las exigencias del modelo del profesional, por lo que se pone en evidencia la necesidad de un enfoque sistémico en la carrera para lograr la formación de profesionales competentes.

En este trabajo se concibe el diseño teórico - metodológico de una estrategia que, a partir de los conceptos y relaciones de la Teoría General de Sistemas, establece una dirección de las acciones a ejecutar en el proceso docente educativo para la formación matemática del Licenciado en Ciencias Farmacéuticas. El objetivo es integrar con el resto de las disciplinas, los conocimientos y habilidades que proporciona la disciplina Matemática para la solución de problemas vinculados a la profesión.

Introducción

El desarrollo científico actual conduce a una acumulación de conocimientos diversos cuya apropiación resulta muy difícil en forma aislada; lo que da lugar a la necesidad de entrelazar las diferentes disciplinas científicas y pasar de la diversidad a la unificación de saberes. En este proceso de integración de las ciencias, se produce la expansión cada vez mayor de los métodos matemáticos en éstas, lo que se ha denominado "matematización del conocimiento científico".

Para enfrentar estos retos se introducen propuestas de cambio en la Educación Superior; una de estas propuestas es el perfeccionamiento de estructuras académicas que tiendan a sustituir la cátedra tradicional fomentadora de la fragmentación y la atomización. En este trabajo se muestra el diseño teórico - metodológico de una estrategia didáctica dirigida a lograr la integración de la disciplina Matemática para la formación del Licenciado en Ciencias Farmacéuticas.

Esta temática posee una gran importancia en la actualidad, puesto que la integración es en estos momentos una de las direcciones del trabajo metodológico en la Educación Superior, para dar respuesta a: las exigencias del modelo curricular de la Educación Superior Cubana en cuanto a su enfoque globalizador, la necesidad creciente de introducir las herramientas matemáticas y computacionales en la obtención y análisis de los resultados científicos y la necesidad de un enfoque sistémico de las relaciones interdisciplinarias que posibiliten el estudio del objeto de la carrera.

Desarrollo

El objetivo fundamental de la enseñanza de la Matemática en esta carrera es la obtención y el desarrollo de conocimientos, habilidades, hábitos, valores y actitudes en los estudiantes, que les permitan resolver los problemas profesionales. Este objetivo debe lograrse no sólo a través de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina, sino también mediante las múltiples relaciones que pueden establecerse en la complejidad del proceso docente educativo en la carrera.

En la carrera de Licenciatura en Ciencias Farmacéuticas el objeto de estudio es el medicamento, sus componentes, su elaboración, su acción farmacológica y su dispensación. Cada disciplina tiene su propio objeto de estudio, el cual está vinculado con este objeto, de él se derivan las funciones de la disciplina en la carrera. El objeto de estudio de la disciplina Matemática está constituido por los modelos y procedimientos matemáticos relacionados con el diseño, elaboración, estabilidad, control de calidad y biodisponibilidad del medicamento [Ramírez, 1996].

Los Problemas Fundamentales, se definen como aquellos que aparecen en la actividad sistemática profesional y que por su grado de complejidad, la modelación matemática se lleva a cabo sin la colaboración de especialistas matemáticos. La determinación de los Problemas Fundamentales permite analizar cuáles son los conocimientos y habilidades que deben garantizar la aplicación de los métodos matemáticos necesarios para lograr un nivel científico actualizado en la investigación, en la docencia y en la actividad profesional.

La estrategia didáctica concibe las principales acciones que se van a realizar a través de la toma de decisiones que permita brindar el tipo de ayuda pedagógica que el estudiante requiere para enfrentar la solución de tareas, a partir de un eje integrador: la modelación matemática.

El diseño de la estrategia para la enseñanza - aprendizaje de la Matemática parte del diagnóstico de necesidades y da respuesta al "por qué", "dónde", "cuándo" y "cómo" e imprime un enfoque sistémico al proceso de integración de la Matemática, para la solución de problemas relacionados directa o indirectamente con el objeto de estudio de la profesión. Se ofrecen principios metodológicos, componentes y niveles para guiar la elaboración y puesta en práctica de los sistemas de tareas, que constituyen el elemento fundamental de este diseño.

En el diagnóstico de necesidades se utilizan técnicas directas como: encuestas, entrevistas, observación participante, estudio de casos y discusión grupal y técnicas indirectas como: la revisión de documentos y el análisis de contenido. También se utiliza la triangulación como método para evaluar los resultados de la investigación, para recoger y analizar datos desde distintos ángulos a fin de contrastarlos e interpretarlos, lo que da valor a la credibilidad y neutralidad de la investigación realizada.

En la planeación de las acciones a realizar, se tienen en cuenta las etapas de: planificación, ejecución y control, en correspondencia con las entradas, el estado deseado de acuerdo a los objetivos y el estado inicial. El control permite reorientar las acciones (acciones reguladoras) para optimizar el proceso de integración y medir la calidad del mismo a través de la evaluación de los diferentes parámetros establecidos en el diagnóstico de necesidades.

I. Planificación

En esta etapa las acciones deben estar encaminadas: al logro de la motivación de los profesores, análisis de los contenidos a integrar y de sus prioridades, coordinación y programación de las tareas a realizar. Las acciones fundamentales son:

1) Identificación de las necesidades matemáticas.

2) Identificación de los Problemas Fundamentales y del aporte de las diferentes disciplinas en la solución de ellos.

3) Derivación de sistemas de tareas típicas correspondientes a los Problemas Fundamentales por niveles y el sistema de contenidos matemáticos que requieren.

⇒ En la disciplina Matemática:

A partir de los contenidos matemáticos necesarios, los nexos y relaciones entre ellos y entre estos contenidos y los contenidos de otras disciplinas:

- Estructuración de los programas de las asignaturas con el fin de facilitar el aprendizaje del alumno. Se trata de seleccionar los contenidos fundamentales, los núcleos privilegiados de cada área temática. Estos contenidos deben actuar como eje organizador de todos los demás, los conceptos básicos que van a permitir adquirir otros nuevos, con un valor instrumental. El estudio de la disciplina debe tener una función integradora.
- Proyección de tareas de acuerdo a los principios metodológicos de la integración en el proceso docente educativo de las asignaturas.
- Diseño de ejercicios integradores vinculados a los problemas y a los modelos abordados por otras asignaturas.

⇒ En el trabajo interdisciplinario.

A partir de las necesidades de cada disciplina, con la perspectiva de un análisis global que permita ir preparando condiciones para la introducción gradual de los métodos matemáticos en las tareas típicas de cada una de las asignaturas:

- Análisis del tipo de tareas de acuerdo a los Problemas Fundamentales y su derivación por niveles en el año.
- Diseño de tareas en el ámbito de la asignatura o vinculando diferentes asignaturas.
- Selección de actividades docentes donde se abordarán las tareas.

Coordinación del trabajo interdisciplinario a realizar que siga el esquema metodológico operativo siguiente:

- Esclarecer aspectos o problemas que requieren del trabajo conjunto, teniendo en cuenta el eje integrador.
- Explicitar programa de actividades a realizar. Debe incluir la descripción de los objetivos y actividades docentes e investigativas que permiten alcanzar un mejor conocimiento del tema y la decisión de qué se debe hacer para mejorar o cambiar la situación.
- Análisis del cumplimiento de las tareas planteadas. Esta actividad depende de la complejidad de las tareas desarrolladas por los estudiantes; puede realizarse a partir de la elaboración de trabajos que sean expuestos por los estudiantes y donde muestren habilidades para expresar sus ideas, fundamentar y argumentar las decisiones adoptadas.

En este esquema se sigue como guía el elaborado por Ander - Egg (Ander, 1994) adaptado a las estructuras organizativas en la carrera.

II. Ejecución

Realización de tareas docentes planificadas, a corto y largo plazo, que posibiliten la apropiación de las diferentes formas del saber: conceptual, procedimental y actitudinal y donde se tengan en cuenta: la orientación de las tareas a desarrollar, el aseguramiento de las condiciones previas (estado inicial), la aplicación de los métodos matemáticos e instrumentos de cálculo y la retroalimentación que garantice la calidad del proceso.

En la orientación deben darse a conocer los objetivos, los contenidos a integrar y las vías de que dispondrá el estudiante para hacerlo, así como la importancia de esa tarea en su preparación para otras más complejas y su vínculo con los problemas profesionales. El aseguramiento de las condiciones previas debe atender a los conocimientos, habilidades, procedimientos, estrategias, modos de pensamiento; todo lo cual se denomina nivel de partida. Este nivel de partida es decisivo para la realización de las tareas, sobre todo para las disciplinas cuya secuencialidad no es cercana a la impartición de las asignaturas de la disciplina Matemática. También debe tenerse en cuenta si, de acuerdo a la estructura curricular de la Matemática, se alcanzó el nivel necesario del conocimiento o de la habilidad vinculada a la tarea a realizar.

A partir de las dificultades encontradas en el diagnóstico de necesidades de integración, la estrategia precisa de un conjunto de acciones reguladoras para la Estadística, encaminadas a resolver los problemas curriculares existentes actualmente en su impartición. El trabajo de investigación realizado propició la participación destacada de los expertos y la ejecución coordinada de acciones reguladoras. Las fundamentales son: conferencias de ampliación, profundización en determinados contenidos estadísticos desde otras disciplinas y cursos optativos.

La retroalimentación permite adecuar las acciones a realizar y corregir posibles errores en las estrategias seguidas para la modelación matemática, en la solución, en la interpretación de los resultados o en la elección de los procedimientos de solución.

III. Control.

6. Control de las acciones realizadas y propuesta de ajustes para perfeccionar las tareas. El control está dirigido a valorar si la estrategia didáctica contribuye a la integración de la Matemática en la formación del egresado. O sea, evaluar si las acciones realizadas han propiciado: una mejor comprensión y preparación de los profesores, el tratamiento didáctico necesario para el diseño de los sistemas de tareas, la ejecución de tareas para la integración y un mejor desempeño de los estudiantes para la realización de las tareas

El estado de la integración se evalúa en diferentes momentos, a partir del control de las tareas introducidas en cada año de la carrera, sobre la base de la estimación de las variables de estado, por los criterios que aportan profesores y estudiantes y el análisis de la contribución de la estrategia a la preparación de los estudiantes para la solución de los Problemas Fundamentales.

Esta estrategia se viene implementando desde hace dos cursos en la carrera de Licenciatura en Ciencias Farmacéuticas. En los colectivos de cada año, acorde con el análisis realizado a nivel de carrera, se han analizado y coordinado las tareas a realizar y las disciplinas que participan en ellas. Se proyectaron las tareas integradoras y los tipos de actividad docente donde se realizarían: conferencias, clases prácticas, laboratorios o práctica laboral, en cada caso.

Los resultados alcanzados han sido muy positivos, puesto que se ha logrado: una mayor motivación para la integración, una mejor preparación de los docentes en función del diseño de las tareas a partir de los Problemas Fundamentales y un incremento considerable en el diseño y realización de tareas docentes que requieren de la modelación matemática y de la computación.

CONCLUSIONES

1. El proceso de integración de la Matemática en la formación del Licenciado en Ciencias Farmacéuticas es un proceso coordinado, de acuerdo a las necesidades y desarrollo científico de las disciplinas y con enfoque global, o sea, a partir de la
2. Se utilizan como fundamentos teóricos y metodológicos los conceptos y relaciones de la Teoría General de Sistemas, aplicados al proceso docente educativo de la disciplina Matemática; ello ofrece la posibilidad de estudiar el papel que le corresponde a ésta como subsistema dentro de la carrera, atender a las múltiples relaciones estructurales y funcionales que se establecen internamente dentro del sistema y a las demandas e incidencias del medio, o sea, a las exigencias de la sociedad de acuerdo al nivel científico alcanzado por la profesión en Cuba y a escala mundial.
3. El análisis del diagnóstico de necesidades permite establecer las bases teóricas necesarias para imprimir un enfoque sistémico a las relaciones interdisciplinarias y elaborar una tipología de Problemas Fundamentales, desde la cual se propone abordar el proceso de integración de la disciplina Matemática en la formación del Licenciado en Ciencias Farmacéuticas.
4. La tipología de Problemas Fundamentales permite el diseño y estructuración de sistemas
de tareas que aseguren la preparación gradual y sistemática de los estudiantes, en las disciplinas y años, atendiendo a los componentes contextual, funcional, didáctico, instrumental, y temporal.
5. La integración de la Matemática en la formación del Licenciado en Ciencias Farmacéuticas requiere del trabajo de vinculación con las restantes disciplinas de la carrera a nivel de año, donde se asegure: la comprensión por parte de los profesores, la identificación de los Problemas Fundamentales y el aporte de cada disciplina en su solución, el diseño de las tareas y su ejecución y control.
6. La inserción de la estrategia didáctica diseñada, en el proceso docente educativo de la carrera, contribuye a perfeccionar el proceso de integración de la Matemática para la formación del Licenciado en Ciencias Farmacéuticas.

Recomendaciones

- Llevar a cabo la estrategia didáctica para la integración, a través de los colectivos de año y Llevar a cabo la estrategia didáctica para la integración, a través de los colectivos de año yde carrera, de manera que actualice y fortalezca el enfoque sistémico en el diseño del sistema de tareas de cada disciplina, con un adecuado tratamiento de las relaciones interdisciplinarias.

- Promover la realización de cursos de postgrado dirigidos a este profesional en temáticas como: Teoría de Grafos, Estadística Multivariada, Tópicos de Álgebra Lineal y Simulación.
- Sugerir la aplicación de la estrategia didáctica para la integración de la Matemática en la formación del Licenciado en Ciencias Farmacéuticas en otros centros, así como su divulgación para que sirva de experiencia para realizar trabajos similares en otras carreras.
- Realizar otros trabajos de investigación que profundicen en las directrices curriculares que sustentan el enfoque de sistema en la Educación Superior, sobre la base de las prioridades de integración.

Referencias bibliográficas

Álvarez de Z., C. (1999) "*Didáctica la Escuela en la Vida. Editorial Pueblo y Educación.*

Ander, E. E. (1994) *Interdisciplinariedad en Educación*. Editorial Magisterio del Río de la Plata. Buenos Aires. Argentina.

Hernández, D. A. (2000) "*Una propuesta alternativa en la Universidad Cubana para enfrentar las exigencias del mundo de hoy*". Revista de Educación Superior Cubana. Volumen XX, No 2.

Hernández F. H. (1993) "*Sistema Básico de Habilidades Matemáticas*" en Didáctica de la Matemática. Artículos para el Debate. EPN. Quito, Ecuador.

Pérez, P. R. (1994). "*El curriculum y sus componentes*". Hacia un enfoque integrador. Colección Práctica en Educación. Barcelona. España.

Ramírez, G. E. (1996). "*Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Carrera de Ciencias Farmacéuticas*". Tesis de maestría.

Ruiz I. M. (2000) "*El enfoque integral del curriculum para la formación de profesionales competentes*" Instituto Politécnico Nacional. México.

La matriz normal de Jordan y los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en forma norma

Raúl de la Cruz Cordovés
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", Cuba
rcruzc@ind.ispjae.edu.cu,rccordoves@yahoo.com

Resumen

El objetivo esencial del trabajo es emitir una propuesta metodológica, como vía alternativa, para abordar la resolución de ciertos Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales (SEDL) expresables en forma normal, usando métodos matriciales, a partir del empleo de la diagonalización y normalización de matrices a través de la MATRIZ NORMAL DE JORDAN y usando para ello un procedimiento único, basado en el método analítico que es empleado para resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden dada en su forma característica, sin soslayar, la obligada extensión a este contexto.

Desde el punto de vista didáctico, la metodología general que se propone, para la resolución de estos SEDL es una de sus mayores ventajas metodológicas, ya que, precisamente, proporciona una vía operacional única y fija, con las obligadas transferencias contextuales que fueron señaladas, esperándose lograr una estructuración sistémica de los contenidos asociados al tema, en aras de alcanzar mayores niveles de asequibilidad dentro del proceso de asimilación.

Introducción

A manera de introducción valga mencionar que entre los métodos que tradicionalmente se estudian en Matemática, para resolver SEDL pueden citarse entre otros : los métodos operacionales con operadores D (Colectivo de Autores ISPJAE, 1979), el método ventajoso y eficiente haciendo uso de la Transformada de Laplace (Céspedes,1989), el método de variación de parámetros en analogía al estudiado para resolver una EDL (Kaplan, 1968), el método de eliminación consiste en transformar el SEDL en una EDL de orden superior (Piskunov, 1969), y con énfasis especial aquellos métodos que tiene un basamento operacional tipo matricial (Noriega, 19) y que precisamente pretendemos analizar en este trabajo. La impartición del tema **SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES** en cualquiera de sus posibles y bien conocidas formas de solución ha sido motivo de constante preocupación por los docentes de los diferentes niveles de la enseñanza superior en que este tema es tratado, debido a las complejidades que en el orden operacional, están sometidos los mismos, todo lo cual trae aparejado un creciente número de dificultades dentro del proceso de asimilación, algunas de ellas inherentes a la naturaleza propia del material objeto de estudio y otras, que obedecen más bien, al tratamiento metodológico que tradicionalmente se da a tales contenidos.

Por tal razón, el objetivo fundamental de la propuesta es brindar una vía alternativa para resolver ciertos SEDL con el propósito expreso de lograr un aprendizaje más eficiente y de mayor solidez, es decir, un aprendizaje que goce de mayor perdurabilidad en la memoria de los estudiantes.

Tras la impartición de tales contenidos durante varios años y después de numerosos análisis y reflexiones, encaminados hacia la búsqueda de un procedimiento unificador para resolver estos sistemas matricialmente, llegamos a concluir que la vía de solución a proponer podría estar basada en el procedimiento seguido para resolver una EDL de primer orden expresada en su forma característica :

$$\dot{y} + p(x)\, y = q(x)$$

aunque lógicamente es imperativa la adecuación correspondiente y requerida por la transferencia hacia el contexto matricial.

Es menester señalar que el objetivo de este trabajo es arribar a una metodología general para resolver matricialmente SEDL en forma normal, basada en los procesos de DIAGONALIZACION y NORMALIZACION de matrices, a través de un procedimiento único, al que hicimos alusión anteriormente, y que es empleado en la literatura especializada al tratar el tema de las ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO, los que surgen en la modelación de muchísimos problemas del perfil ingenieril eléctrico. (Timothy, 1968).

Desarrollo

Como quiera que en la actividad científica suelen presentarse problemas cuya modelación matemática conduce al planteamiento de un SEDL de orden "n" sujeto a "n" condiciones iniciales (problema de Cauchy), o conducente al planteo de una EDL de orden "n" sujeta a "n" condiciones iniciales, a fin de cuentas, transformable en un SEDL en forma normal, la vía matricial para resolverlos, es la frecuentemente utilizada, debido a su eficacia desde el punto de vista operacional, por tanto, no es un equívoco señalar que en tales condiciones esta vía de resolución, revista de una importancia especial meritoria de un análisis minucioso. Partiremos de considerar el caso más general, un SEDL NO HOMOGENEO, con representación matricial denotada por:

donde :

$$X = AX + BU \quad (I)$$

X : es la matriz de orden n x 1, relativa a las derivadas de primer orden de todas las incógnitas.

A : es la matriz cuadrada del sistema de orden n , que contiene todos los coeficientes de las incógnitas.

X : es la matriz columna de las incógnitas del sistema, de orden n x 1.

BU : es la matriz de orden n x 1, que contiene todas las combinaciones lineales de funciones de la variable independiente.

Para una mejor comprensión de la metodología que proponemos, es necesario llevar a cabo un adecuado aseguramiento del nivel de partida de los alumnos, siendo prerrequisitos indispensables, entre otros, los siguientes :

- Procedimiento de solución de la EDL de primer orden en forma característica.
- La determinación de una matriz diagonal, D, o matriz normal de Jordán, J, semejante a la matriz A del sistema.
- Concepto de matriz semejante a una matriz dada.

- Producto de matrices.
- Inversión de matrices.
- Determinación de la matriz exponencial, derivada e integral de una matriz.

En la explicación del procedimiento matricial que expondremos distinguiremos varios casos:

Casos particulares :

a) Cuando A es una matriz diagonal.

Un caso muy particular dentro de este procedimiento tiene lugar cuando A es una matriz diagonal, el cual introduce una notable simplificación, en el procedimiento.

Si $A = D$ entonces en (I) $\dot{X} = AX + BU$ tendremos que :

$\dot{X} - AX = BU$ de donde se tiene que : $\dot{X} - DX = BU$ (II)

y esta última ecuación matricial tiene factor integrante la matriz exponencial , de simple determinación.

Tras realizar el proceso de integración correspondiente se obtiene : e^{-Dt} ,de simple determinación.

Tras realizar el proceso de integración correspondiente se obtiene :

$$X = e^{Dt}\int e^{-Dt}\boldsymbol{BU}dt + e^{Dt}\boldsymbol{C}$$

que es la solución general del sistema planteado.

b) <u>Cuando A no es una matriz diagonal, pero es diagonalizable.</u>

Para la determinación de una matriz semejante con A emplearemos el cambio de variable siguiente :

$$\mathbf{X = PZ} \qquad \mathbf{(III)}$$

donde P es cierta matriz inversible, a determinar, que relaciona la matriz de las incógnitas del sistema, X, con la nueva variable introducida, representada por la matriz Z.

Por tanto, es fácil ver que si $X = PZ$ según (III entonces $\dot{X} = P\dot{Z}$ y luego de sustituir en (I) queda :

$$P\dot{Z} = APZ + BU \quad \text{de donde se tiene que :} \quad P\dot{Z} - APZ = BU$$

Premultiplicando por la inversa de P, P-1 , ambos miembros de la última ecuación obtenida tenemos :

$$P^{-1}P\dot{Z} - P^{-1}APZ = P^{-1}BU$$

la cual después de simplificar queda reducida a :

$$\dot{Z} - P^{-1}APZ = P^{-1}BU$$

La matriz $P^{-1}AP$ se reemplazará por D ya que A es una matriz diagonalizable. Por tanto, tendremos:

$$\mathbf{Z} - \mathbf{DZ} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BU} \qquad \text{(IV)}$$

De la cuidadosa observancia de esta última ecuación matricial, se concluye que tiene forma de una EDL de primer orden en forma característica, similar a la expresión (II), que resuelta por el método clásico , al que anteriormente hicimos alusión tenemos : si el factor integrante es la matriz e^{-Dt}, después de integrar la ecuación queda :

$$\mathbf{Z} = e^{Dt}\int e^{-Dt}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BUdt} + e^{Dt}\boldsymbol{C} \qquad \text{(V)}$$

donde C es una matriz columna de constantes arbitrarias esenciales.

Para restituir la variable X original, basta con premultiplicar (V) por P, según (III), y obtener así la expresión que da la solución general del sistema :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}e^{Dt}\int e^{-Dt}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BUdt} + \boldsymbol{P}e^{Dt}\boldsymbol{C}$$

Si se tratara de un **PROBLEMA DE CAUCHY**, bastará ajustar las condiciones iniciales para determinar el valor particular de las constantes arbitrarias de la matriz C, obteniéndose la solución particular del problema de Cauchy.

Caso general: Si A no es diagonalizable, pero es normalizable

Siguiendo un procedimiento análogo al descrito en b) a partir de III hasta llegar a IV, bastará con sustituir D por J, matriz en la forma normal de Jordán, en las expresiones (V) y posteriormente en (VI). A saber:

$$\boldsymbol{Z} = e^{Jt}\int e^{-Jt}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BUdt} + e^{Jt}\boldsymbol{C} \qquad \text{(V')}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}e^{Jt}\int e^{-Jt}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BUdt} + \boldsymbol{P}e^{Jt}\boldsymbol{C} \qquad \text{(VI')}$$

Didácticamente hablando, consideramos no es conveniente, que el alumno haga una memorización mecánica de estas expresiones finales que representan la solución general del SEDL a revolver, sino que, es meritorio que ante cada nuevo sistema, se repitan de manera desplegada todos los pasos que exige la metodología de trabajo, con el fin de lograr una mejor interiorización del procedimiento, a menos que se tratara una tarea docente consistente en resolver varios sistemas similares, en cuyo caso, creemos que las fórmulas finales podrían usarse directamente.

Análisis cualitativo de la estrategia metodológica

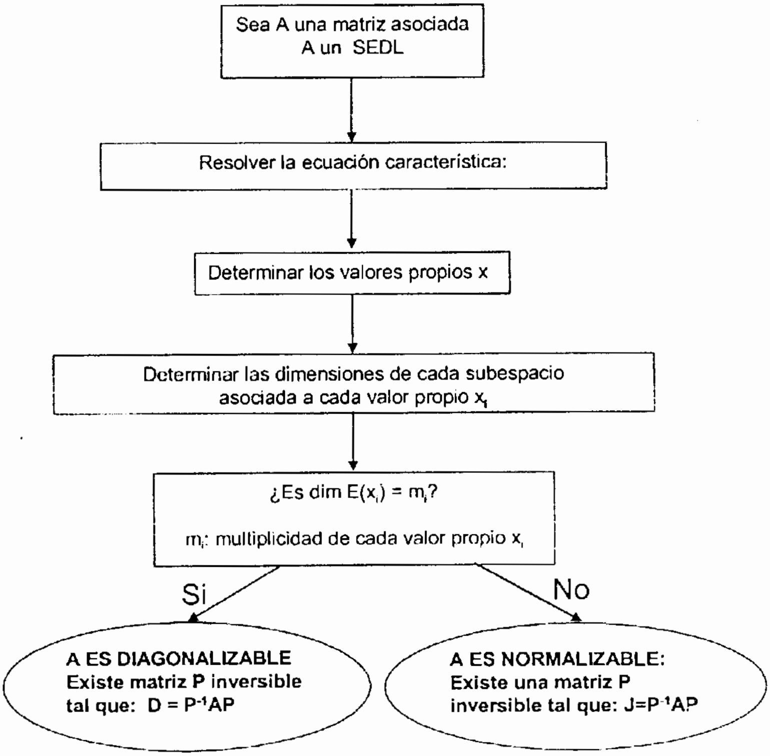
- El principal valor metodológico de este procedimiento reside en que constituye una extensión, al contexto matricial, del procedimiento antes estudiado para resolver EDL de primer orden en forma característica, teniendo en cuenta desde luego, las especificidades propias del contexto de trabajo.
- De acuerdo a lo anterior, el procedimiento **UNICO** de solución, permite evidenciar que esta forma de proceder no constituye un conocimiento completamente nuevo

para el alumno, sino que es una nueva modalidad en la que éste procedimiento puede presentarse, o lo que es lo mismo, una transferencia de un conocimiento ya adquirido contextualizado a un nuevo campo operacional de trabajo, manifestándose así una generalización procedual y un tratamiento sistémico dentro del estudio de los métodos matriciales para resolver ciertos SED en forma normal.

- La diagonalización de matrices es empleada como un caso particular de la normalización, con empleo de la MATRIZ NORMAL DE JORDAN, para el caso en que la dimensión de los subespacios asociados a los valores propios coincida con el orden de multiplicidad del mismo.
- Por otra parte, el procedimiento descrito tiene carácter generalizador, puesto que hemos discutido el caso más general, el de un **SEDL NO HOMOGENEO**, siendo el **HOMOGENEO**, un caso particular, beneficiado con la introducción de su representación matricial.

La **METODOLOGIA GENERAL** que a continuación exponemos puede ser usado como material de apoyo en las primeras etapas del aprendizaje (etapa materializada), debiendo obviarse en futuras etapas.

Metodología general



Conclusiones

La forma tradicional no matricial de resolución de SEDL muchas veces empleada para resolverlos, evidencia en alguna medida:

- El carácter NO SISTEMICO de esta organización temática de contenidos, porque se presenta el tema como un nuevo conocimiento sin analizar las interrelaciones con otros ya adquiridos.
- No aborda el problema desde el punto de vista general, sino que, se van tratando separadamente los diferentes casos. Los sistemas **NO HOMOGENEOS** se estudian separadamente de los **HOMOGENEOS**.
- No se le brinda una metodología general de trabajo al estudiante para resolverlos, sólo en algunos casos se dan algunas secuencias de pasos.

En contraposición, la **PROPUESTA** descrita tiene entre sus méritos metodológicos, los siguientes :

- Su carácter **SISTEMATICO**, evidenciada por la aplicación de una METODOLOGIA GENERAL.
- Su carácter **SISTEMICO** dentro del tema SED por cuanto el procedimiento de resolución matricial expuesto es aplicable a cualquiera sea el tipo de matriz A de dicho sistema.
- Su carácter **GENERALIZADOR**, porque se aborda el caso más general desde sus inicios.
- Su **ASEQUIBILIDAD** para los estudiantes, a partir de la introducción de los asistentes matemáticos.

Todo lo anteriormente señalado tiene como dividendo positivo la optimización real del tiempo docente, pues permite prestarle una mayor atención a la modelación de problemas que conducen a SEDL en forma normal.

La PROPUESTA METODOLOGICA fue objeto de experimentación por parte del autor, durante varios cursos académicos, a partir del año lectivo : 95-96 en grupos de 2do. Año de la Carrera de Automática del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, (ISPJAE), tanto en Curso Regular Diurno como en Curso para Trabajadores por Encuentros, evidenciándose los aspectos arriba señalados como méritos metodológicos de la misma.

Referencias bibliográficas

Colectivo de autores del ISPJAE, (1979). *Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral y Ecuaciones Diferenciales*.

Céspedes, MA., (1989). *Transformada de Laplace con aplicaciones*.

Kaplan, W. (1968). *Ordinary Differential Equations*. Edición Revolucionaria. La Habana.

Piskunov, N. (1969). *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Mir. Moscú.

Timothy, L.K (1968). *State Space* Analysis : An Introduction. Editorial USA.

Noriega, T. (19). *Álgebra Lineal*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.

De la Cruz, R. (1995). *Proceeding I Encuentro Internacional sobre Enseñanza de la Matemática*. Universidad de la Habana. La Habana.

Algunas reflexiones sobre la aproximación racional y su inclusión en los programas de estudio

Abel Fernández Infante
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría". Ciudad de la Habana-CUBA
afdezi@yahoo.com

Resumen
El desarrollo acelerado de la ciencia y la técnica en los últimos cincuenta años, la incorporación de la computadora a la enseñanza de la Matemática y su uso creciente en esta dirección, nos exige revisar los programas de las diferentes asignaturas que comprende la Matemática con el objetivo de perfeccionarlos y actualizarlos, pues muchos de los contenidos que aparecen en dichos programas se convierten en obsoletos. El propósito de este trabajo es mostrar las bondades de la aproximación racional o más precisamente la aproximación según Padé, que con ayuda de algún asistente matemático nos sugiere su tratamiento en los cursos de pregrado y así complementar la aproximación según Taylor.

Introducción.

Este trabajo esta relacionado con la teoría de aproximación o interpolación para algunas clases de funciones analíticas y meromorfas usando como aproximante fracciones racionales de interpolación con polos libres que en cierta medida generalizan los polinomios de Taylor. Estos aproximantes se denominan también aproximantes de Padé en honor al matemático francés Henri Padé (1863-1953) que fue uno de los fundadores de esta teoría (Padé, 1892). Estos aproximantes hace alrededor de 120 años se abrieron paso en la teoría de aproximación, estando en sus inicios relacionados con la teoría general de las fracciones continuas cuya historia data de varios siglos. Pero, no fue hasta varios años mas tarde que los aproximantes de Padé atrajeron la atención de los investigadores, puesto que tales aproximantes encontraron múltiples aplicaciones en la solución numérica de problemas de la Física Teórica y la Física-Matemática. Esto además, hizo que aumentara el interés por el estudio de la teoría de estos aproximantes, lo cual se refleja en los resultados alcanzados en los últimos años por varios investigadores, por ejemplo, en los:

- Aproximantes simultáneos de Padé o aproximantes de Hermite-Padé (Gonchar & Rakhmanov, 1981; Mahler, 1968; Piñeiro, 1985)
- Aproximantes de tipo Padé (Ambroladze & Wallin, 1994; Brezinski, 1980; Gonchar, 1975; Kalberg & Wallin, 1991)
- Aproximantes parciales de Padé (Brezinski, 1988; Cala, 1991)

En nuestro criterio uno de los temas candidatos a incluir en los actuales programas de ingeniería es el relativo a los denominados aproximantes de Padé. Pues, estos constituyen en la actualidad una de las líneas fundamentales de trabajo en la teoría de aproximación y como señalamos antes no solo han encontrado un espacio en esta teoría, sino que han ayudado a la solución de problemas de la Mecánica y la Física-Matemática sobre todo con el desarrollo de los métodos computacionales.
Para determinar los "aproximantes de Padé" (funciones racionales de aproximación) se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales partiendo del conocimiento de los

coeficientes de una serie de potencias que representa a cierta función dada o de una serie formal de potencias. Como sabemos los temas de sistemas de ecuaciones lineales, polinomios y series de Taylor, están incluidos en los programas de ingeniería. Además, algunos asistentes matemáticos disponen de instrucciones para calcular el aproximante de Padé de una función dada. Por citar un ejemplo, la función PADE(y,x,xo,n,d) del DERIVE nos proporciona dichos aproximantes, esto, nos sugiere su tratamiento en los cursos de pregrado y así complementar la aproximación según Taylor. Pero se puede agregar que ya algunos libros de Cálculo comienzan a utilizar el lenguaje de los aproximantes de Padé, por ejemplo, se puede consultar el ejercicio 45 de la página 226 de los autores Smith & Minton, 2000. Por otra parte, este tema ya se utiliza en la especialidad de Control Automático (consultar a Smith & Corripio), y también aparece en la asignatura de Control e Instrumentación de Procesos Químicos para la titulación de Ingeniero Químico (curso 2000-2001), Dpto. de Ing. de Sistemas y Automática de la Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid: http://www.isa.cie.uva.es/~prada/control.html

El propósito de este trabajo es mostrar las bondades de la aproximación racional o más precisamente, la aproximación según Padé, la cual se ilustra mediante un ejemplo con ayuda del asistente matemático DERIVE.

Aproximación según Padé.

Cuando se estudia la aproximación según Taylor se insiste en la facilidad con que se calculan los polinomios aproximantes y se resalta la dificultad que se presenta cuando se intenta evaluar en un punto dado, una función trascendente. El alumno comprende así la conveniencia de expresar, la función trascendente como polinomios, aunque sea en forma aproximada. También el estudiante logra comprender que la aproximación según Taylor, es una aproximación local y con ella resuelve una variedad de problemas. Sin embargo, podemos hacernos algunas preguntas: ¿Las funciones racionales serán descartadas como funciones aproximantes, porque en principio entrañan una dificultad el cálculo de los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador? ¿Se obtendrá alguna ventaja si bajo ciertas condiciones aproximamos una función por una función racional? Por supuesto, las respuestas son, negativa a la primera pregunta y positiva a la segunda. A continuación veremos, a través de un ejemplo la aproximación según Padé y su comparación con la aproximación de Taylor.

Suponemos que al abordar el tema que nos ocupa, el estudiante se ha enfrentado a diferentes situaciones en relación a los polinomios y series de Taylor. Para la aproximación según Padé se puede consultar las páginas 278-279 del libro de Ralston, 1965. Otras bibliografías especializadas en el tema son: Baker & Graves-Morris, 1981; Montessus, 1902; Padé, 1892; Walsh, 1965.

Sea

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,\ (z \in D_0=\{z\in C: |z|< R_0\}) \tag{1}$$

una serie de potencias (formal o convergente), donde $R_0 > 0$ es el radio de convergencia de la serie (1).

Dados n y m enteros no negativos, se desean encontrar polinomios $P_{n,m}$ y $Q_{n,m}$ tales que

- $\text{grad}\, P_{n,m} \leq n$, $\text{grad}\, Q_{n,m} \leq n$, $Q_{n,m} \equiv 0$
- $(Q_{n,m}\, f - P_{n,m})(z) = r_{n,m}\, z^{n+m+1} + \cdots$

A la función racional

$$F_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$$

se le denomina aproximante de Padé de f de tipo n, m.
Se debe destacar lo siguiente:

1. Cuando el polinomio del denominador $Q_{n,m}$ es de grado 0, entonces el polinomio del numerador $P_{n,m}$ de la función aproximante coincide con el polinomio de Taylor de la función dada f en un entorno del punto $z_0 = 0$.

2. Los coeficientes del polinomio $Q_{n,m}(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0$ se obtienen de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo (S. E. L. H.) que tiene infinitas soluciones (m ecuaciones con m + 1 incógnitas), de donde se elige una solución no trivial:

$$f_{n-m+2} b_m \quad + \quad f_{n-m+3} b_{m-1} \quad + \cdots \quad f_{n+1} b_0 = 0$$

$$f_{n-m+1} b_m \quad + \quad f_{n-m+2} b_{m-1} \quad + \cdots \quad f_{n+2} b_0 = 0$$

3. Los coeficientes del polinomio $P_{n,m}(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, se obtienen de los primeros n+1 términos del desarrollo de la función $Q_{n,m} f$ en un entorno del punto $z_0 = 0$.

4. A pesar de que el polinomio se obtiene $Q_{n,m}$ de un S. E. L. H. con infinitas soluciones, el aproximante de Padé de f de tipo n, m expresado por

$$F_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$$

es único.

Consideremos la función siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}\ln(1 - \frac{z}{2}), |z| < 1$$

Entonces, como

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$$

y

$$-\ln(1 - \frac{z}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n}, |z| < 2.$$

La función se puede escribir así,

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n2^n})z^n, |z| < 1.$$

Ahora se pueden considerar varios polinomios de Taylor y varias aproximaciones según Padé y realizar la comparación correspondiente. Por ejemplo: Aproximar la función f:

a) Mediante los polinomios P_3 y $F_{1,1}(z) = \dfrac{P_{1,1}(z)}{Q_{1,1}(z)}$

b) Mediante los aproximantes de Padé P_5 y $F_{2,2}(z) = \dfrac{P_{2,2}(z)}{Q_{2,2}(z)}$

c) Represente gráficamente la función y las funciones aproximantes.

d) Qué conclusión obtiene?

Con ayuda del Derive sobre Windows se pueden obtener las funciones aproximantes, así como sus gráficas. De esta forma usando las funciones.

TAYLOR(y,x,x0,n) y PADE(y,x,x0,n,d).

Obtenemos:

- $P_3(z) = \dfrac{25}{24}x^3 + \dfrac{9}{8}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$

- $F_{1,1}(x) = \dfrac{3x+4}{4-3x}$

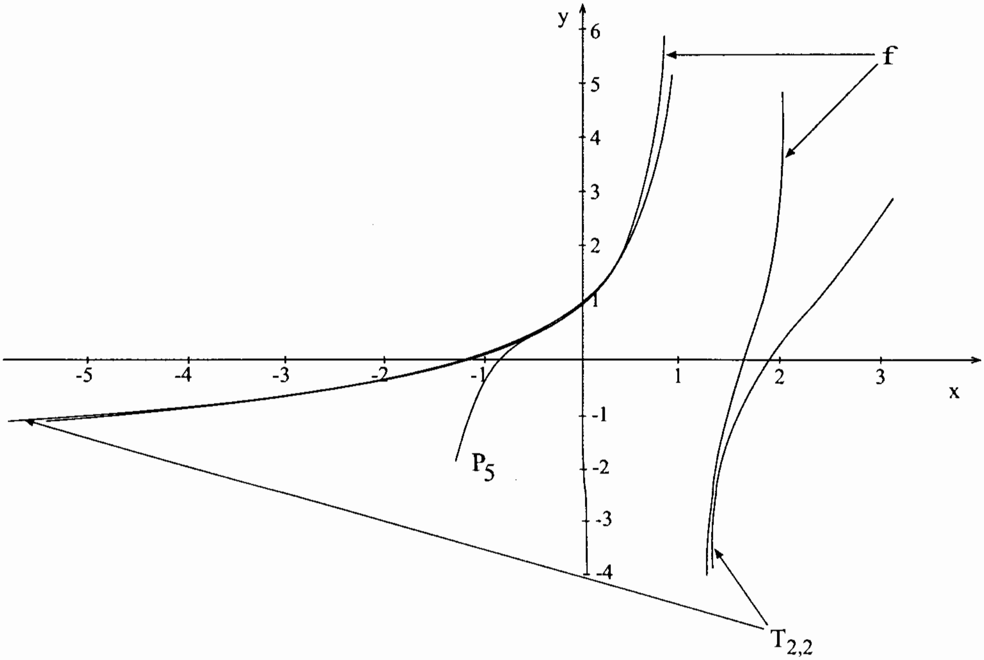
- $P_5(x) = \dfrac{161}{160}x^5 + \dfrac{65}{64}x^4 + \dfrac{25}{24}x^3 + \dfrac{9}{8}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$

- $F_{2,2}(x) = \dfrac{2(313x^2 - 216x - 684)}{265x^2 - 1620x + 1368}$

y las gráficas de f, P_3 y $F_{1,1}$ así como las gráficas de f, P_5 y $F_{2,2}$ nos permiten obtener algunas conclusiones sobre la aproximación de la función respecto de las aproximaciones según Taylor y según Padé.

En la figura 1 se aprecia cómo en el intervalo]-1,1[, la aproximación de f mediante P5 es buena, pero mejor es mediante F2,2 donde prácticamente la gráfica de esta se superpone a la de f. Obsérvese que fuera del intervalo de convergencia según Taylor (dentro de cierto rango) tanto a la izquierda como a la derecha de dicho intervalo, la función aproximante F2,2 continúa siendo una "buena" aproximación de f.

O sea, la aproximación de Padé Amplía la "región de aproximación" de Taylor. A continuación se muestran las gráficas de las funciones f, P5 y F2,2, las cuales aparecen indicadas con flechas.



Conclusiones.

Como se observa las razones de la sugerencia están dadas por:

- La aproximación según Padé que nos ocupa en este trabajo, incluye a la de Taylor (caso m=0).
- Las "dificultades del cálculo" de los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador de la función racional aproximante, no constituyen un obstáculo con el uso de la computadora y los asistentes matemáticos.
- Otra razón no menos importante es que la aproximación que proponemos tiene la ventaja en comparación con la Taylor de que la "región de aproximación" es más amplia.
- En general de los aproximantes de Padé convergen con mayor rapidez que los polinomios de Taylor.
- Uso de la aproximación de Padé en la resolución de problemas (por ejemplo, consultar Smith & Corripio, página 263-304.

Desde nuestro punto de vista, con el desarrollo vertiginoso de la computación y los resultados alcanzados por los investigadores en la teoría de los aproximantes de Padé, se impone una adecuación de los programas de Matemática, pues en los inicios del nuevo siglo muchos de los temas que se abordan en clases necesitan una revisión.

Referencias bibliográficas

Ambroladze A. and Wallin H. (1994), *Padé type approximants of Markov and meromorphic functions, Dept. of Math.*, Univ. of Umeå, No. 14, 1994.

A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 1965.

Baker G. A. and Graves- Morris P. R., *Padé Approximants Part I*: Basic Theory Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 13, Addison Wesley, 1981.

Brezinski C. (1980), *Padé-Type approximation and General Orthogonal Polynomials*, ISNM50, Birkhäser Verlag, Basel.

Brezinski C. (1988), *Partial Padé approximation*, J. Approx. Th. 54 (1988), 210-233.

Cala Rodríguez F. (1991), *An Introduction to the Convergence Theory of Partial Padé Approximants*, Dept. of Math., Univ. of Umeå, No. 6, 1991.

Gonchar A. A. (1975), *On the Convergence of Generalized Padé Approximants of Meromorphic Functions*, Math. Sb. 98, English transl. Math., 19 (1968), 95-166.

Gonchar A. A. and Rakhmanov E. A., (1981), *On the Convergence of Simultaneous Padé Approximants for Systems of Functions of Markov type*, Trudy Math., Inst. Steklov 157 (1981), 31-48, English transl. In Proc. Steklov Inst. Math. 1983, No. 3 (157).

Montessus de Ballore, *Sur les Fractions Continues Algebrique Bull.* Soc. Math. Francais 30 (1902), 28-36.

Mahler K. (1968), *Perfect Systems*, Compositio Math.., 19 (1968), 95-166.

Padé H., *Sur la representation approcheé d'une fonction par des fractions rationaelles*, Ann. Ec. Norm. Sup. 9, 1892.

Piñeiro L. R., (1985), *Simultaneous Padé approximants for a class of Markov functions*, Author´s Abstract, Candidate´s Dissertation, Moscow State University, 1985 (en ruso).

Smith C. A. y Corripio A. B., *Control Automático de Procesos, Teoría y Práctica*, Editorial Limusa Noriega.
Smith R. T. and Minton R. B., *Cálculo, Tomo I*, Mc Graw Hill, Impreso en Colombia, Julio/2000.
Kalberg L. and Wallin H. (1991), *Padé type approximants of functions of Markov-Stieltjes type*, Rooley Mountain J. Of Math. 21, 437-449.
Walsh J. L. (1965), *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, 4th Ed. Colloq. Publ. 20 Math. Soc., Providence.

Las disciplinas Matemáticas en las carreras de Ingeniería: ¿Su estructuración contribuye a la formación del pensamiento matemático?

Lourdes Tarifa Lozano, Rosa del C. González Romero y Raisa Rodríguez Alvarez

Universidad de Matanzas. Cuba

rosa.gonzalez@umcc.cu lourdes.tarifa@umcc.cu raisa.rodriguez@umcc.cu

Resumen

En el trabajo se aborda cómo el diseño de la disciplina Matemática en las carreras de Ingeniería, puede contribuir a la formación y desarrollo del pensamiento matemático, impartiendo los métodos numéricos en el momento en que se estudia cada tema, resolviendo problemas vinculados con la especialidad y con un enfoque computacional de los mismos, logrando que los estudiantes se apropien del algoritmo de estos métodos y que además conozcan algunos de los software más difundidos por su eficiencia y puedan decidir cuál de ellos escoger.

Este diseño se puso en práctica experimentalmente en el curso 1995-1996 en tres de las asignaturas de la disciplina lográndose buenos resultados, el que se validó en tres cursos siguientes y se generalizó a partir del curso 2000-2001.

Introducción

En su conferencia magistral, Philip A. Griffiths (2000), decía:

> *El siglo XX ha sido un verdadero Siglo de Oro de las Matemáticas. Muchos problemas importantes, planteados hace mucho tiempo, y a la espera de solución, se han resuelto gracias, en gran medida, a la creciente comprensión de las complejas relaciones que existen entre las distintas áreas de las Matemáticas. La continua expansión y la profundización en estas relaciones están permitiendo que las Matemáticas se aventuren en la exploración de interacciones con otras áreas del conocimiento científico. Estas interacciones de distintas áreas de las Matemáticas entre sí y, al mismo tiempo, entre las Matemáticas y otros campos científicos, han conducido a novedosas y poderosas intuiciones que han impulsado el avance del conocimiento matemático.*

El presente trabajo aborda cómo el diseño de la disciplina Matemática en las carreras de Ingeniería, puede contribuir a la formación y desarrollo del pensamiento matemático, impartiendo los métodos numéricos en el momento en que se estudia cada tema, resolviendo problemas vinculados con la especialidad y con un enfoque computacional de los mismos.

Desarrollo

A lo largo de los siglos, a la educación se le ha atribuido un papel decisivo en el desarrollo de la sociedad y en particular en la formación del ser humano, pues ella permite la transmisión cultural de generación en generación, así como la formación de valores humanos que garanticen la adecuada incorporación de hombres y mujeres a la vida social (Llivina, M., 1999).

En los últimos años se han producido cambios muy profundos en la enseñanza de las Matemáticas y aún hoy se vive una situación de experimentación y cambio, la que ha transitado por un proceso de perfeccionamiento, constituyendo objeto de estudio e investigación de profesores universitarios.

El vertiginoso desarrollo de la ciencia y el avance de la Revolución Científico Técnica necesita cada vez más de la formación de profesionales capaces de vencer los retos que enfrenta el hombre en la construcción de la nueva sociedad y por lo tanto los problemas que se modelan llevan frecuentemente el uso de los métodos numéricos para su solución, los cuales requieren realizar un gran volumen de cálculos aritméticos por lo que se hace necesario el uso de medios de cómputo que ayuden a optimizar el tiempo de solución y obtener con mayor exactitud los resultados.

Los planes A, B y C de la Educación Superior Cubana plantearon elementos en el perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática Superior, pero aún no lo suficiente, ya que la presentación de los contenidos es en alguna medida fragmentada y no como un sistema único con interrelaciones entre los temas que la componen, aunque se reciben los contenidos como un conjunto de partes no suficientemente vinculadas entre sí. Con la aplicación de los planes C′ en la Enseñanza Superior Cubana se logró un estadío superior en la vinculación de cada asignatura o disciplina de la carrera de que se trata. Sin embargo, los resultados obtenidos en los primeros años en las asignaturas que conforman la disciplina Matemática no son buenos por lo que nos dedicamos a investigar cuáles serían las causas fundamentales de los mismos

Existe una importante discusión en muchos países del mundo, acerca de cómo estructurar el conocimiento y en particular el conocimiento matemático, y los métodos numéricos no están ajenos a ellos, pues el futuro de las disciplinas para carreras de Ciencias Técnicas dependen del mejoramiento de su enseñanza ya que la activación del proceso docente constituye en el mundo entero uno de los temas de mayor actualidad tanto en los círculos de investigación pedagógica como en los centros de educación a todos los niveles. Específicamente en la Matemática en la Educación Superior, se precisa de métodos que amplíen el universo de conocimientos de los estudiantes, enseñándoles a pensar y por tanto a aprender, a la vez que les motiven hacia el estudio de esta ciencia. Se necesita encontrar vías y técnicas de trabajo que posibiliten al profesor disminuir al máximo el rechazo natural de los alumnos hacia el aprendizaje de lo nuevo, lo cual no existe en la enseñanza tradicional.

Por otra parte el enfoque moderno de la Ingeniería, en cuanto a la formación del profesional en esta rama, tiende al desarrollo de las habilidades que permitan expresar los problemas de ésta en términos cuantitativos precisos para poder formular científica y correctamente el problema, así como interpretar los experimentos, utilizando los principios propios de cada ciencia y los procedimientos para su solución.

Por lo que la tarea es doble: proveer a los futuros ingenieros de las herramientas Matemáticas útiles y fijar las bases para su estudio posterior, es decir, el objetivo principal de la disciplina Matemática en las carreras de Ingeniería es dotar al estudiante de los conceptos y técnicas matemáticas que le permitan identificar, conceptualizar y resolver problemas reales, los cuales en su mayoría necesitan de métodos numéricos para su solución. El tema de los Métodos Numéricos, es un ejemplo de lo planteado anteriormente, el cual en las disciplinas de Matemática de las diferentes carreras, aparece al final del ciclo de asignaturas, lo que rompe la generalidad del contenido y hace que los alumnos no se apropien de estos métodos como la consecución de otros tópicos matemáticos estudiados y que por distintas causas no deben o no pueden ser utilizados.

Por estas razones se ha realizado un estudio de los contenidos de forma tal que se superen estas debilidades, teniendo en cuenta que el objetivo principal es la formación y desarrollo del pensamiento matemático.

Se ha demostrado que el pensamiento surge de una situación problémica y se dirige a su solución. En el proceso del pensamiento se aplican; pero también se forman nuevos conocimientos y procedimientos de la actividad mental (Majmutov, M.I., 1983). Así pues S.L. Rubistein: "Define el pensamiento, proceso que carecería de contenido si no concretáramos en qué consiste dicho proceso. El proceso de pensar es ante todo un análisis y una síntesis de lo que éste nos proporciona, es además, una abstracción y una generalización" (Rubinstein, S.L, 1959).

Mejorar los propios procesos de pensamiento transcurre, naturalmente, por la práctica a fondo del mismo. Como bien afirman G. Polya y G. Szego, dos grandes maestros en el arte de pensar matemáticamente, "en el aprendizaje del pensar sólo la práctica del pensar es verdaderamente útil".

Las clases de Matemática contribuyen al desarrollo fundamentalmente del pensamiento lógico; pero para esto el profesor debe prestar principal atención en el proceso de enseñanza-aprendizaje a las operaciones o acciones mentales o habilidades lógicas. Las definiciones del concepto de problema matemático son diferentes en varios textos (Polya, G. 1969, A., 1980, Schoenfeld, A., 1991) pero conceptualmente parecidas. En todas ellas está más o menos expresada la idea de que, en un problema matemático se debe dar respuesta a alguna interrogante, y la forma de encontrar esa respuesta, es desconocida inicialmente por el sujeto que pretende encontrarla.

En una célebre conferencia el famoso matemático David Hilbert expresó: "Es por medio de la solución de problemas que se templa la fuerza del investigador, descubriendo nuevos métodos y nuevos enfoques y ganando un horizonte más vasto y más libre." (Ortiz, J., 1994).

La solución de problemas puede significar para muchos un placer y para otros una tragedia, pero lo cierto es que el ser humano no siempre puede evadir el enfrentamiento con ellos, por lo que es necesario desarrollar habilidades para resolverlos.

En cuanto al trabajo que corresponde desarrollar a los profesores con los estudiantes Calderón, R., (1995) plantea: "...no sólo prepararlos para resolver los problemas actuales, sino formar y desarrollar las particularidades que le permitan resolver, creadoramente, otros problemas, en situaciones nuevas."

Para la solución de un problema matemático, Labarrere, A.,(1987), y muchos otros autores, tienen opiniones muy similares a las de Polya, G. (1969.), el que considera que las principales fases son las siguientes:

1) Comprender el problema.
2) Captar las relaciones que existen entre los diversos elementos. Ver lo que liga la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan.
3) Poner en ejecución el plan.
4) Volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla."

En el tránsito de los estudiantes por la Disciplina Matemática, se enfrentan sistemáticamente a ejercicios y problemas que deben aprender a resolver con un mínimo de esfuerzo y la máxima probabilidad de éxito, con un uso racional de su labor intelectual, de ahí la importancia que tiene en el desarrollo intelectual de los alumnos y la asimilación de los contenidos. El presente trabajo tiene sus antecedentes en la investigación que se realiza sobre esta temática en el Departamento de Matemática de la Universidad de Matanzas cuyos resultados han sido presentados en los eventos COMAT'95, COMAT 97, COMAT 99, III Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, el 2do y 3er Evento Científico Metodológico de Enseñanza de la Matemática del Instituto Superior Pedagógico "Juan Marinello", RELME 11, 13, y 14, en el 2do , 3er y 4to Taller de Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura en el ISPJAE y Pedagogía 99, Tesis de Maestría en Matemática Numérica, defendida en julio de 1997. Los resultados que aquí se muestran fueron validados a través del experimento pedagógico realizado entre los cursos 1995-2000.

En el Plan C' de las Disciplinas Matemáticas, el último tema o asignatura aborda los Métodos Numéricos, entre los cuales se encuentran los destinados a:

- Solución de sistemas de ecuaciones lineales
- Determinación de raíces
- Integración numérica
- Aproximación de funciones
- Solución de Ecuaciones Diferenciales.

La metodología que tradicionalmente se ha empleado en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, no es adecuada para que los estudiantes desarrollen habilidades en la aplicación del Cálculo a la solución de problemas. Las definiciones y los conceptos de estas operaciones matemáticas, son analizadas casi siempre, sólo en las primeras clases dedicadas a cada uno de estos temas; y en ocasiones, atendiendo exclusivamente al aspecto formal y al rigor matemático extremo, sin que exista mucha preocupación porque los conceptos sean interpretados y asimilados intuitivamente.

En las clases siguientes la atención del profesor y la de los estudiantes, se centra en lograr el desarrollo de habilidades en la aplicación de las reglas, las tablas y los métodos existentes para el cálculo de estas operaciones matemáticas.

En las últimas clases de cada uno de estos temas, se suelen resolver algunos problemas, en la solución de los cuales se utilizan estas operaciones matemáticas, y se piensa erróneamente que eso es suficiente para que los estudiantes adquieran una interpretación general de cuándo deben aplicar cada una de estas operaciones en la solución de problemas. Lo cierto es que los estudiantes universitarios, en su gran mayoría, presentan dificultades para aplicar los conocimientos que han adquirido en la solución de problemas nuevos para ellos y con este diseño se trata de resolver esta problemática.

A partir del diseño elaborado para la disciplina Matemática, en el que se redistribuyeron los contenidos atendiendo a un enfoque estructural funcional en la Matemática I y a un enfoque genético en la Matemática II, se analizó que los métodos numéricos debían impartirse en diferentes momentos de acuerdo al tema que se estuviera abordando y que en la primera asignatura que se trataran se impartiría el tema relacionado con la teoría de errores, siguiendo el criterio que la Matemática es una, ya sea Analítica o Numérica, y que de esta manera se contribuía a la formación del pensamiento matemático, logrando el enfrentamiento de los estudiantes a la resolución de problemas de forma íntegra. Así los métodos numéricos serían tratados de forma tal que:

- Cuando se imparten los Sistemas de Ecuaciones Lineales, después del estudio y análisis de los métodos analíticos, se desarrollan los métodos numéricos: Gauss, Jacobi, y Gauss Seidel para la solución de los mismos, pudiendo así comparar con problemas prácticos concretos de modelos ingenieriles qué tipos de sistemas requieren del uso de uno u otro método y por qué, y analizar cómo se pueden llegar a obtener soluciones erróneas si no se tienen en cuenta los aspectos teóricos de nuestra ciencia, educándolos así en la importancia de estos conceptos y su valoración y utilización práctica, es decir, el cómo, qué y para qué se estudiaron estos contenidos.
- Cuando se tratan los temas sobre funciones continuas, se estudian y analizan los métodos numéricos de determinación de raíces: Bisección, Regula Falsi y Newton Raphson, valorando la utilización práctica de estos teoremas y la necesidad de su uso en la utilización de muchos problemas prácticos.
- Al trabajar las Integrales Definidas, se analizan los métodos numéricos Trapecios y Simpson, valorando la necesidad de utilización de los mismos en los casos en que no es posible obtener la solución exacta del problema.
- En el estudio del tema de Ecuaciones Diferenciales, se trabajan seguidamente de los analíticos los métodos numéricos para la solución de este tipo de ecuaciones, haciendo que al igual que en todos los casos anteriores, el tratamiento del tema sea desde todo punto de vista lo más general posible, pues se van abordando todos los casos permisibles cuya solución se resuelve aplicando este contenido.
- La aproximación de funciones a través de métodos numéricos se estudia después del tema de Series, para que los estudiantes no los vean como algo aislado, sino como otra forma de aproximar funciones.

Esta distribución hace que los estudiantes desarrollen un pensamiento lógico y creador pues se apropian mucho mejor de cuándo la solución de un problema debe ser resuelta por un método analítico o numérico y permite lograr una mayor interrelación entre las disciplinas de la carrera desde el primer año, pues muchos problemas ingenieriles necesitan del uso de los métodos numéricos.

Por otra parte con la aplicación desde hace más de 30 años de la computación en la docencia, la enseñanza de los métodos numéricos cobra mayor fuerza, siendo necesario un conocimiento sólido de los métodos matemáticos para su solución, sin perder de vista que las microcomputadoras son una herramienta del trabajo.

Por estas razones se ha diseñado la enseñanza de los métodos numéricos en la disciplina Matemática de forma tal que los estudiantes adquieran en conferencias los requerimientos teóricos y prácticos del algoritmo de estos métodos, en clases prácticas, se desarrollen habilidades en el desarrollo de estos métodos y posteriormente se realizan clases prácticas en laboratorios de computación, utilizando los software más difundidos en el mundo y cuyo uso en asignaturas de la carrera es amplio (especialmente DERIVE y TK-Solver), además son muy útiles en el trabajo ingenieril del futuro profesional y que requiere del equipamiento mínimo, teniendo en cuenta las condiciones actuales del país.

Para las clases prácticas en el laboratorio de computación se preparan y se entregan con antelación, diferentes ejercicios, los que se encuentran en los materiales didácticos de la disciplina que se han confeccionado teniendo en los requerimientos de M.P. Bujanda Jáuregui (1981), en los cuales se deberá analizar primeramente la condición necesaria y suficiente para la solubilidad y en muchos tendrán que modelar el problema antes de introducir los datos en la computadora.

Dentro de esta experiencia debemos señalar que la modelación de problemas de Química, Física, Resistencia de los materiales, Transferencia de calor y masa, etc., ocupan un lugar importante en la vinculación con estas disciplinas y en aras de elevar la motivación de los estudiantes por la carrera que cursan, aunque en algunos casos es necesario impartir consultas adicionales sobre algunos aspectos de estas disciplinas como por ejemplo: Leyes de Kirchoff., Sistemas hiperestáticos, entre otros.

Con la puesta en práctica de esta experiencia, desde el curso 1995-96 se han obtenido resultados como:

- Formación del pensamiento matemático en los estudiantes, que los hace utilizar nuestras técnicas de trabajo en la modelación y solución de problemas en otras asignaturas de la carrera.
- Profesionales mejor preparados para el enfrentamiento con el desarrollo de la ciencia y la tecnología.
- Resultados cualitativos y cuantitativamente superiores en la asimilación de los contenidos.
- Amplia vinculación interdisciplinaria.

  Una mayor integración de los contenidos.

Referencias bibliográficas

Blanco, S. R. (1994). La orientación de las acciones del estudiante en el proceso de asimilación. *Revista Cubana de Educación Superior*, Vol.14, No. 2.

De Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*, Pirámide, Madrid.

Galperin, P. (1982). *Introducción a la Psicología*. Editorial Pueblo y Educación.

García,O. (1999). *Contribución de las habilidades lógicas en el pensamiento matemático*, Memorias COMAT¨99.

González, O. (1989). *Aplicación del enfoque de la actividad al perfeccionamiento de la Educación Superior*. U.H. CEPES.

Hernández, H. (1993). *Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate*. Escuela Politécnica Nacional de Quito. Ecuador.

Labarrere, A. F. (1987). Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Llivina, M. J., (1999). Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos. Tesis presentada en opción al grado de Dr. en Ciencias Pedagógicas.

Bujanda, M. P. (1981). Tendencias actuales en la enseñanza de la matemática. Ed. S.M. Madrid.

Majmutov, M. I. (1983). La Enseñanza Problémica. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Ortiz, J. (1994), Conferencia de Hilbert: Los Futuros Problemas de la Matemática. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 1(1), Caracas.

Griffiths, P. A (2000). Las Matemáticas ante el cambio de milenio Institute for Advanced Study Princeton, N.J.,USA La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española Vol.3, nº1, Enero-Abril 2000, pp. 23-41

Polea, G. (1978). Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México..

Rubinstein, S. L. (1959). El pensamiento y los caminos de su investigación. Publicación Montevideo, Urugüay.

Schoenfeld, (1991). Ideas y tendencias en la resolución de problemas, EDIPUBLI, S.A., Buenos Aires.

Talizina; N. F. (1985). Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior. Universidad de La Habana. Ciudad de La Habana.

Talizina; N. F. (1987). Procedimientos iniciales del pensamiento lógico. DEPES-MES, Universidad de Camagüey. Camagüey.

VOLUMEN 16

AÑO 2003

TOMO 2

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

16 RELME

Diseños: Dís. Marcos Díaz Cedeño
17 de Junio de 2002