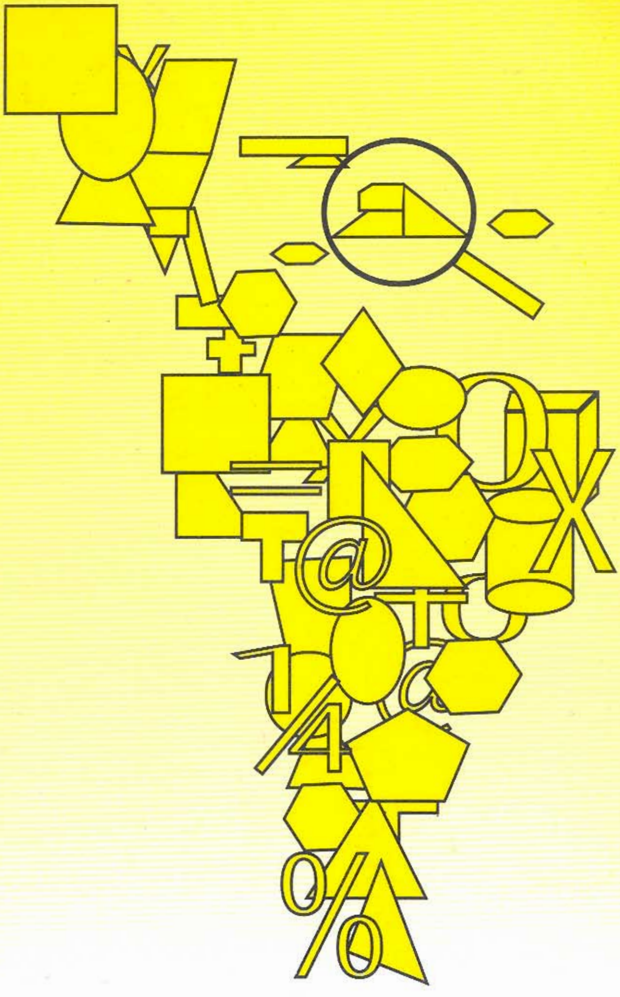


Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 13, año 2000

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Presidente

Ricardo Cantoral
México

Directores Ejecutivos

Patricia Fogliatti
Argentina

Jorge Fiallo
Colombia

Evangelina Díaz
Costa Rica

Luis Campistrous
Cuba

Germán Beitía
Panamá

Joaquín Padovani
Puerto Rico

Comité Internacional de RELME

Cecilia Crespo
Argentina

Jorge Fiallo
Colombia

Crisólogo Dolores
México

Guadalupe Tejada de Castillo
Panamá

Carmen Evarista Matías
República Dominicana

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Comité Nacional Organizador RELME 13

Evarista Matias
Coordinadfora General

Amado Reyes
Comisión Académica

Juan Payero
Comisión de Comunicaciones

Fernando Rodríguez
Comisión de Relaciones Públicas

Angela Tavares y Rosa Batista
Comisión de Publicaciones

Daniel Michel
Comisión de Apoyo Logístico

María del Pilar Domingo
Comisión Cultural

Edith Paulino
Comisión de Registro

Liduvina Cornelio
Recursos Audiovisuales

Oscar Rosario
Comisión de Transporte

Francisco Vegazo
Comisión Administrativa y Financiera

Vidalia González
Comisión de Evaluación

Alma de la Rosa
Comisión de Programas

Lidia Carbonell
Comisión de Recepción y Protocolo

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 13

Clame
Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana De Matemática Educativa, Vol. 13

Editoras:
Rosa María Farfán, Carmen E. Matias, Daysi Sánchez y Ángela Tavarez

Diseño y cuidado de la edición:
Apolo Castañeda Alonso

Diseño de portada:
Enrique Oaxaca

Primera edición: mayo de 2000

ISBN 979-625-227-4

Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.
Nebraska 199. Col. Nápoles
C. P. 03810 México, D. F.
Teléfono: 5 23 09 94. Fax: 5 43 11 73
e-mail: geimex@mpsnet.com.mx.
info@engrupo.com.mx
www.engrupo.com.mx
Reg. CANIEM 1382

Impreso en México/*Printed in Mexico*

La *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* es el resultado de trece años de esfuerzo que hoy la constituye como el foro más importante en su campo en el ámbito latinoamericano. Todos los asistentes, en exhaustivas sesiones intercambian sus experiencias, comunican sus ideas y presentan sus resultados rigurosamente, con la intención deliberada de consolidar nuestra disciplina, la **Matemática Educativa**, siempre con el ánimo de favorecer el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de los sistemas educativos de nuestro continente. En esta publicación se agrupan las ***Actas de Relme 13.***

Historia y objetivos del CLAME

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa se constituyó en la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa que se celebró en Puerto Rico en agosto de 1996. En dicha reunión se acordó también, modificar el nombre a Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa y continuar la numeración. Al mismo tiempo y con fin de atender organizadamente las demandas de la comunidad, se forma el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, junto con los proyectos académicos que perfilan y consolidan el proceso de fortalecimiento de la disciplina de América Latina. Bajo la premisa de conservar la pluralidad de los acercamientos existentes y el respecto a las tradiciones educativas propias de cada uno de los países miembros. Los proyectos que de inicio impulsa el Clame son los siguientes:

- La creación de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (**Relime**). Órgano de publicación oficial con tres números al año. El objetivo de esta iniciativa es el de promover y fomentar la escritura de artículos de investigación de alta calidad en esta región, sin la restricción de espacio y de tiempo que la Relme establece.

- La instauración del ***Premio"Simón Bolivar"*** a la mejor tesis de posgrado en Matemática Educativa" cuyo objetivo es el estimular a los recién graduados y fomentar entre los jóvenes el estudio de la disciplina. Los ganadores del Premio se dan a conocer en la Relme, junto con los miembros del Jurado en una sesión solemne "Cátedra Simón Bolivar" y ofrecen una conferencia de su trabajo de investigación.

- La generación de un "Directorio Latinoamericano de Especialistas en Matemática Educativa" que al conocer los datos de nuestros colegas y de sus áreas de especialización, nos permita establecer una red eficiente de comunicación entre países.

- La formación de un programa editorial necesario en nuestros países con varias series: Libros especializados, libros de texto y materiales de docencia, entro otros. Con la publicación de las tesis ganadoras del Premio "Simón Bolivar", iniciamos la serie de "Investigaciones en Matemática Educativa", algunos colegas de los grupos de trabajo de Relme han presentado propuestas para la elaboración de diversos "Estados de Arte..." que será otra serie. Hacemos una cordial invitación a presentar propuestas para las diversas series que conformarán nuestra biblioteca de Matemática Educativa en Latinoamérica.

- La última de las iniciativas del Clame se ha visto coronada con un éxito. Se ha fundado el Cimate – Centro de Investigación en Matemática Educativa y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Desde ahí, se podrá continuar la publicación del Relime y ofertar un programa de doctorado a distancia con cobertura continental.

Organización de la publicación

Presentamos en esta publicación el extenso de las diversas participaciones en Relme 13 que fueron presentadas por los autores en la Reunión y aprobadas para su publicación después del proceso de evaluación ya usual en nuestro evento y que sustenta sus dictámenes con base en la calidad del trabajo en comparación de los niveles internacionales de exigencia que suelen pedirse para eventos académicos de esta índole. Las líneas en las que hemos clasificado los artículos, incluyen una sección para la publicación de los extensos de los carteles ganadores:

- Pensamiento Matemático Avanzado
- Pensamiento Numérico
- Pensamiento Algebraico
- Pensamiento Geométrico
- Pensamiento de Probabilidad y Estadística
- Uso de Tecnología
- Incorporación de distintas perspectivas
- Formación de profesores
- Desarrollo de curriculum
- Teoria y Metodologia
- Documentos de los Grupos de trabajo y discusión
- Carteles

Agradecimientos

El principal reconocimiento va dirigido, naturalmente, a todos los colegas que dan vida a *Relme* haciendo posible nuestro encuentro: a todos los participantes. Empero deseamos expresar un especial reconocimiento a todos los árbitros y colaboradores editoriales que aportaron su conocimiento, tiempo, esfuerzo y sobretodo entusiasmo en beneficio de la calidad de esta publicación. Por supuesto a los miembros directivos y representantes de Clame en los distintos países por su colaboración.

Agradecemos a la Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana, por su apoyo profesional y su hospitalidad al albergarnos así como a todas las instituciones y empresas que nos apoyaron con recursos materiales y humanos.

Rosa María Farfán, Carmen E. Matias, Daysi Sánchez, Ángela Tavarez

Ciudad de México, Primavera de 2000

Contenido

J. Uso de Tecnología: Nivel Medio Superior

K. Uso de Tecnología: Nivel Superior

U. Documentos de los grupos de trabajo y discusión

V. Carteles Ganadores

Pensamiento Matemático Avanzado

La génesis de nociones básicas del Cálculo en textos de la Educación Básica

Gloria García O., Celly Serrano, Hernán Díaz
Universidad Pedagógica Nacional, Santafé de Bogotá
Colombia

Resumen

Este trabajo, basado en la propuesta de Sierpinska (1990) para identificar niveles y esquemas de pensamiento en el conocimiento, nos permite inferir implicaciones metodológicas relacionadas con el desarrollo en la Educación Básica Primaria de algunas nociones básicas del Cálculo como son: variación, aproximación y procesos infinitos, como base para el análisis de textos para este nivel.

Las variables que son analizadas en éstos son: temáticas, procesos que se proponen para la enseñanza y actividades de aprendizaje.

Nuestro interés se centra en identificar los esquemas de pensamiento que subyacen en los discursos didácticos de los textos, para tomar consciencia de ellos y poder rupturar la concepción vigente que afirma que el Cálculo es un conocimiento al cual sólo es posible acceder al término de los estudios de Secundaria o en los universitarios.

Introducción

La enseñanza del Cálculo en la Educación Básica, tradicionalmente se concibe como un conocimiento que cierra el ciclo de la formación en matemáticas en la Secundaria. Las definiciones formales de límite y derivada se realizan a través de uno o dos ejemplo de aproximaciones numéricas para el caso del límite y con el cálculo analítico de la variación de la función para el caso de la derivada. Con estas motivaciones se pretende preparar al estudiante para las presentaciones formales de las definiciones respectivas. Luego se garantiza la "comprensión" con la ejercitación de los algoritmos propios del límite y la derivada y sus propiedades. Sin embargo los aportes investigativos (Cornu, Sierpinska, Orton, Wildenberg,.....) sobre la comprensión de estos conceptos, permite concluir que ella está determinada por nociones complejas que fueron desarrolladas en un largo período de tiempo (19 siglos) por la comunidad matemática y que ellos generaron nuevos estilos de pensamiento matemático y nuevas formas de razonar.

Acogiendo los aportes investigativos citados, hemos propuesto en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, el proyecto de investigación: "*Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a las nociones básicas del Cálculo*". Asumimos el Cálculo como un campo conceptual, el cual esta formado por *nociones básicas* como son las nociones de aproximación sucesiva, procesos infinitos y variación, las cuales constituyen los mecanismos constructivos que dieron lugar a los conceptos de límite y derivada; por *objetos matemáticos* como los conceptos de límite y derivada, ya mencionados, y otros como por ejemplo la integral y por *formas específicas de razonamiento*. Fuera del campo, pero como requisitos necesarios e indispensables para el acceso a él, se encuentran nociones y conceptos como la dependencia, la función, el continuo numérico, la razón como operador y las razones de cambio promedio y de cambio instantáneo y sus relaciones con la pendiente.

También en este campo se encuentran las actividades cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos de construcción y uso de los objetos matemáticos, el campo de los fenómenos y situaciones que admiten ser analizados mediante los mismos y de los problemas que pueden ser abordados por ellos. (González. 1995)

Por tal razón, los conceptos de límite y derivada son complejos, la construcción cognitivamente efectiva que se realice de ellos, presenta necesariamente dificultades y es lenta, puesto que supone superar obstáculos para lograr el dominio y la integración de las nociones y métodos citados, con sus respectivas representaciones y símbolos, para que realmente sea integrado por los alumnos en la construcción con significado de los concepto mencionados.

Estas consideraciones precisan el objetivo del proyecto por cuanto su primer propósito es el de establecer vías de acceso didácticas, cognitivamente efectivas, a los conceptos de límite y derivada, explorando vías y estableciendo hilos conductores a través de la introducción de las nociones de aproximación, variación y procesos infinitos en la Educación Básica. La construcción didáctica se soporta en primera instancia en la revisión histórico-epistemológica de estudios realizados al respecto y el análisis de los curriculos y los textos. Este trabajo presenta el resultado del estudio realizado sobre los textos escolares.

Marco teórico

La revisión de los estudios histórico-epistemológicos tiene como referente la propuesta de Anna Sierpinska (1992) para distinguir en el conocimiento tres niveles. El primer nivel obedece a actitudes, creencias y convicciones, explícitas o implícitas, que tienen como justificación la autoridad, la tradición o el sentido común. El segundo nivel obedece esquemas de pensamiento, es un conocimiento explícito aprendido por la práctica o imitación en el transcurso de la socialización y la educación y determina formas de interpretar situaciones y de aproximarse a los problemas.

El tercer nivel corresponde al conocimiento técnico, este es validado por criterios racionales tales como la consistencia y la aplicación y por las relaciones establecidas con los sistemas de conocimiento socialmente calificado como científico, es un conocimiento explícito. Los tres niveles nos son independientes.

Las actitudes, las creencias y los esquemas de pensamiento inconscientes hacía la matemática pueden generar la selección de temas y tópicos para enseñar. De otra parte, la actividad en el nivel técnico cambia las creencias, crea puentes para tomar consciencia de esquemas de pensamiento y poder transformarlos. Pero las primeras pueden actuar a manera de obstáculos del pensamiento cuando se trabaja en el nivel técnico. Estos puede ser sobrepasados si se toma conciencia de las creencias.

El obstáculo se torna epistemológico cuando hace parte de una cultura, de una forma de pensar en una comunidad.

Estos aportes, se convierten en categorías de análisis para el estudio de los textos, en el sentido de aportar a la toma de consciencia de creencias y esquemas de pensamiento sobre la matemática, presentes en el discurso didáctico de los textos escolares. La consciencia de estos, permitirá comprender, a la comunidad de educadores en matemáticas de los últimos niveles de la Educación Básica, que el problema de la conceptualización de límite y derivada no reside en la explicación de la definición, o en la ejercitación de algoritmos relacionados. Consideramos que los obstáculos en los textos se toman epistemologicos, puesto que son compartidos por la comunidad de autores de textos.

Los esquemas de pensamiento subyacen a la presentación de la matemática en los textos escolares, estos son el resultado del conocimiento matemático aprendido y solidificado por procesos de socialización de las matemáticas escolares, que se hacen a través de los currículos tanto de formación de docentes como de la formación básica.

Su identificación, permitirá realizar la toma de consciencia necesaria para superar los obstáculos en que se convierten dichos esquemas de pensamiento.

Esquemas históricos de pensamiento

Con base en la revisión elaborada a los análisis histórico-epistemológicos, de los conceptos básicos del cálculo, identificamos a continuación los siguientes esquemas de pensamiento matemático. Cabe resaltar que la clasificación se ha realizado teniendo en cuenta el desarrollo, rechazo o tratamiento que la comunidad matemática, en distintas épocas, realizó en nociones y conceptos como: dicotomía discreto-continuo; el infinito potencial y el actual; procesos finitos e infinitos; medición, aproximación y estimación vs precisión, el estudio matemático del cambio. Consideramos que, principalmente, este último da lugar a un nuevo estilo de pensamiento y a la introducción y desarrollo sistemático del Cálculo.

La notación y la caracterización de los esquemas de pensamiento que acogemos integrados al estudio de las nociones básicas del Cálculo, son:

PD : esquema de pensamiento deductivo, relacionado con la búsqueda de la precisión, el criterio de organización deductivo, la dicotomía discreto-continuo. Este esquema está guiado por intereses teóricos.

PI : esquema de pensamiento inductivo, relacionado con criterios de organización inductiva, con argumentaciones justificadas por conocimiento procedimental con el fin de obtener leyes científicas; guiado por intereses prácticos; el foco de atención lo constituye el estudio del movimiento; en este esquema la dicotomía discreto-continuo se rompe a través de concepciones operativas de número.

PT : esquema de pensamiento técnico, relacionado con el estudio matemático del cambio; el criterio de organización sigue siendo el inductivo con la finalidad de generar métodos específicos y generalizables para obtener cambios relativos. El criterio de validez se fundamenta en la operatividad.

PF: esquema de pensamiento formal, relacionado con la construcción lógica de los conceptos propios del calculo y con los asociados (función, continuo numérico, infinito actual)

La clasificación de los esquemas descritos, es una herramienta metodológica para el análisis de los textos, en los cuales se analizarán variables como la selección de los temas, los tópicos que se proponen para ser enseñados y las actividades de aprendizaje que se proponen. Un esquema de pensamiento asociado al PD, por ejemplo, didácticamente orienta la presentación de la matemática en la Educación Primaria, diferenciando la Aritmética de la Geometría, los números que enfatiza por un largo período son los números naturales. La medición se inicia con el cálculo de medidas precisas como son las obtenidas por fórmulas geométricas. El contexto de las actividades de aprendizaje son casi siempre los contextos cuasi matemáticos, en el sentido de presentar escenarios propios del dominio aritmético o geométrico.

Por su parte un esquema de pensamiento correspondiente a PI, introduce como escenario de las actividades de aprendizaje cuestiones relacionadas con la actividad cultural. La variación y el cambio representados en pictogramas y gráficas es también motivo de estudio. La medición y en particular la estimación y el redondeo aparecen como necesidades prácticas en la solución y el cálculo de cuestiones prácticas. Números como los decimales aparecen en respuesta a necesidades de medición. El razonamiento inductivo se realiza en las posibilidades de construcción por parte de los estudiantes.

Análisis de los textos

Uno de los intereses que motivan este trabajo es el de observar el tratamiento que los textos escolares de la Educación Primaria, realizan respecto a la aproximación y construcción de las nociones básicas del Cálculo como la variación, los procesos infinitos, la aproximación y aún al acercamiento que hacen hacía el infinito actual. Consideramos que esta aproximación se puede realizar con el tratamiento que en este nivel se realice sobre dominios tradicionales como la división con resto, los decimales, la medición y el sentido estimativo de esta actividad, el estudio de la variación. Todas estos dominios pueden ser hoy dimensionados con herramientas tecnológicas como la calculadora numérica o software como Logo; con la integración al aula de la información cuantificada que aportan los medios de comunicación de los cambios que se dan en el mundo.

En consideración a este interés, se seleccionaron de tres colecciones de textos para la Básica Primaria, los correspondientes a los niveles tercero, cuarto y quinto de Primaria. La selección de la colecciones obedeció a que en el país circulan para este nivel dos tipos de texto: el correspondiente a las escuelas situadas en el campo, denominada Escuela Nueva (Cc), por las características que presenta y los textos usados en las ciudades. En estas últimas se encuentra también una división, escuela pública (CP) y privada (Cp). Esta última cuando esta dirigida a estratos sociales altos utiliza textos producidos en otros países. Nos parece que esta clasificación implícita que subyace en cuanto a los textos en Colombia, es necesaria de analizar, por cuanto el valor del texto como intermediario en el discurso didáctico no puede desconocerse.

Para la descripción de los esquemas de pensamiento presentes en los textos analizamos los temas y tópicos propuestos y el sentido de proponerlos como objetos de enseñanza; separación entre lo discreto y lo continuo y las actividades de aprendizaje. Las tablas que ha continuación se presentan describen los resultados de los análisis de cada colección:

Tabla 1

Cc - Niveles	Temas, tópicos, actividades de aprendizaje
Tercero	Separación entre lo discreto y lo continuo, énfasis en la medición exacta. Números naturales y sus propiedades. Conceptos geométricos Presentación de actividades cuasi matemáticas
Cuarto	Enfasis en las propiedades de los Números naturales. Ampliación de números al sistema de los fraccionarios, división con resto. Separación entre lo discreto y lo continuo. Ampliación de conceptos geométricos y su relación con la medición exacta. Presentación de actividades de aprendizaje cuasi matemáticas
Quinto	Ampliación de propiedades y operaciones en los naturales, potenciación, radicación. Ampliación de números a los fraccionarios decimales. Sistema Métrico Decimal. Separación entre lo discreto y lo continuo
Esquema de pensamiento	Deductivo

En esta colección, aunque dirigida a las escuelas del campo colombiano, no se incluyen escenarios asociados a fenómenos de la naturaleza. Se utilizan situaciones del campo de tipo verbal, pero de manera estática, se enfatiza las representaciones numéricas. Se podría concluir que el único objetivo de la enseñanza es la de aprender una aritmética "teórica". Resalta también el sentido con que se asume la construcción por parte de los estudiantes, pues el sentido de las preguntas con las que se quiere interactuar con los estudiantes es el de respuesta única.

Tabla 2

CP – Niveles	Temas, tópicos, actividades de aprendizaje
Tercero	Separación entre lo discreto y lo continuo, énfasis en la medición exacta. Números naturales y sus propiedades. Conceptos geométricos Presentación de actividades cuasi matemáticas
Cuarto	Separación entre lo discreto y lo continuo. Introducción de la representación decimal de los fraccionarios. Ampliación de conceptos geométricos
Quinto	Ampliación de propiedades y operaciones en los naturales, potenciación y radicación. Variación en el dominio de los geométrico. Introducción el infinito potencial a través de los procesos de división no exacta y en el dominio geométrico en el calculo de perímetro de la circunferencia y el área del círculo
Esquema de Pensamiento	Deductivo

Al igual que la colección descrita en primera instancia, ésta tiene el claro sentido de dirigir el aprendizaje exclusivamente al dominio de propiedades y hechos numéricos. La separación entre lo discreto y lo continuo se mantiene. Las dos series conservan el mismo estilo y las variaciones que puede encontrarse residen en los escenarios utilizados. En esta serie, no se incluyen situaciones referidas al campo, por ejemplo. Ambas series refuerzan la idea de satisfacer secciones de prerrequisitos para el curso siguiente, pero sin tener la prospectiva del desarrollo de hilos conductores que entrejen la red de campos conceptuales.

Tabla 3

Cp - niveles	Temas, tópicos, actividades de aprendizaje
Tercero	Relaciones entre número y magnitud Medición. Decimales. Estimación de resultados de operaciones y de mediciones Cálculo de divisiones con resto con ayuda de la calculadora.
Cuarto	Redondeo de números en la recta numérica ; redondeo a decenas y centenas. Estimación y aproximación a estimaciones. Decimales Estudio de variaciones representadas gráficamente Conteo en décimas, Encontrar decimales situados entre dos
Quinto	Comparar y ordenar decimales, Redondeo de decimales Estimación de números y de medidas. Lectura e interpretación de gráficas lineales. Redondeo en la estimación de productos Ubicación en la recta de puntos correspondientes a decimales y fracciones
Esquema de Pensamiento	Inductivo

En esta colección se puede rastrear hilos conductores que llevarían al desarrollo de las nociones básicas del Cálculo. Pues más que estar dirigida a la enseñanza de los fundamentos, coloca el acento en la paulatina construcción de atributos como el continuo, a través de tareas con y sobre los decimales. Resalta la introducción, aparentemente temprana de la variación, sus representaciones tabulares y gráficas y así mismo, la construcción de la aproximación propiciada a través de acciones como estimar, redondear, acerca al estudiante de este nivel a desarrollar ideas matemáticas partiendo de impulsar el desarrollo de intuiciones. Otro aspecto que sobresale en esta serie es el desarrollo de estos hilos conductores que se realizan a través de acciones , como visualizar en tablas y gráficas ; representar diagramas, tablas y gráficas, entre otras.

Conclusiones

Teniendo en cuenta que si bien el texto es un intermediario de gran valor entre el saber escolar y el saber aprendido, su análisis nos permite extraer consecuencias acerca de la enseñanza de las matemáticas. Entre las que se destacan las siguientes :

Los autores de las colecciones colombianas tienden a organizar secuencias de enseñanza más que de aprendizaje, orientadas desde esquemas de pensamiento deductivo, mezclando el sentido de la matemática griega con el periodo estructural. Se secuencia más en el términos de prerrequisitos, que del desarrollo de hilos conductores que subyacen en la estructuración de campos. Ello se debe a la transcripción de currículos orientados con tales fines. Aunque no hay evidencia suficiente, se puede inferir que se desconoce la sinuosa trayectoria histórica, aún de los saberes que presentan, de las matemáticas, pues aún en las tareas e interrogantes formulados no dan lugar al uso de descripciones y métodos informarles e imperfectos de solución. La precisión de las respuestas, se asocia con el rigor de la matemática.

Estas características propias de una matemática, la propia del estilo griego, no significa que son incompatible con el nuevo estilo que presupone el estudio del cambio. "Rigor y precisión son tan esenciales en la matemática como la experimentación lo es para las ciencias" afirma Ian Stewart (1998, p 1969), lo que se requiere es aceptar y desarrollar el nuevo estilo de matemáticas que presupone la matematización del cambio. Desde este punto de vista, sería necesario aceptar que tanto en su desarrollo histórico como en la actualidad, la matemática se desarrolla en estrecha conexión con sus aplicaciones en otras ciencias.

Bibliografía

BOYER,C. Historia de la Matemática. Alianza Universidad. 1986

CANTORAL, R. RESENDIZ, E. El significado y el sentido de las nociones de variable y variación en los textos. Memorias 10o.Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores y Matemática Educativa. 1996. Universidad de Puerto Rico. Universidad Interamericana de Puerto Rico. Recinto Ponce.

CORNU,B. Quelques obstacles a l´aprentissage de la notion de limite. Seminaire de Didactique et Pedagogie des Matematiques. Laboratoire de Matematiques Pures. No.34 Universite de Grenoble, 1982.

GARCÍA, G. ESPITIA,L.E. SERRANO,C. Un estudio de análisis de contenido de variación , dependencia y representación en textos escolares colombianos de la Educación Básica Secundaria. Memorias 10o.Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores y Matemática Educativa. 1996. Universidad de Puerto Rico. Universidad Interamericana de Puerto Rico. Recinto Ponce.

GARCÍA, G. ESPITIA,L.E. SERRANO,C. El concepto de función en textos escolares. Universidad Pedagógica Nacional. Colciencias. 1997

KLINE, M. El pensamiento matemático : De los antiguos hasta hoy. Alianza Universidad. 1992.

ORTON, T. Introducing calculus : ¿an accumulation of teaching ideas ? INT. J. MATH. EDUC. SCI. TECHNOL. Vol 17 No.6, 1986.

ROBINET, J . Une experience D´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol 4 No.3, 1983.

SIERPINSKA, A. Obstacles Epistemológicos relatifs a la notion de limite. Recherches en Didactiques de Matematiques. Vol 6, No. 1, 1985

.... On Understanding the Notion of Function. Dubinsky , Harel De. The concept of function . Aspects of Epistemology and Pedagogy. M.A.A.1990

Resolución de ecuaciones con Valor Absoluto. Una experiencia en nivel medio superior

Norma Rosa Cerizola, Nélida Haydée Pérez, Ruth Martínez, Dora Franzini
Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de San Luis
Argentina

Resumen

Este trabajo surge a partir de una experiencia realizada con alumnos del último año de nivel medio del sistema educativo argentino.

La temática: "resolución de ecuaciones con valor absoluto", fue elegida teniendo en cuenta la relevancia del concepto "valor absoluto" para el posterior desarrollo del Cálculo, como así también el manejo fluido de igualdades y desigualdades en donde este concepto está involucrado.

Se considera como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, privilegiándose en este caso el registro gráfico.

Utilizando la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación para guiar experimentaciones en clase, se explicita el análisis preliminar en sus componentes epistemológica, cognitiva y didáctica; el consecuente diseño de la ingeniería, el análisis de la experiencia y conclusiones.

Introducción

El valor absoluto de un número real es una noción fundamental en Cálculo. No sólo posee un valor intrínseco sino que en él se apoyan las definiciones de conceptos como distancia entre dos puntos, entorno y los sustanciales de límite y de continuidad.

La comprensión de estos dos últimos se convierte en un obstáculo epistemológico en el aprendizaje, tal como lo muestran numerosas investigaciones. [Cornu, B. 1983, Sierpinska, A. 1987, Cantoral, R y Farfán, M. 1989, Williams, S. 1991, Artigue, M. 1995].

Reflexionando sobre estos hechos, nos preguntamos ¿ no sería conveniente indagar si, una de las causas es la incomprensión de una noción básica como la de valor absoluto?. Nos parece tan simple que, en su enseñanza rara vez le otorgamos un tratamiento exhaustivo. Tampoco nos preguntamos si el enfoque es el adecuado, sobre todo teniendo en cuenta la necesidad de iniciar a los alumnos en el pensamiento variacional, necesario para captar la esencia del Cálculo.

Con respecto a lo señalado, hemos podido constatar que en la enseñanza del Precálculo no se pone suficiente énfasis en diseñar situaciones para que los alumnos comprendan este concepto. Sus propiedades son simplemente enumeradas y, sus primeras aplicaciones, como resolución de igualdades y desigualdades con valor absoluto se tratan muy someramente.

Por ello decidimos realizar una investigación, donde la población estuvo constituida por alumnos del último año de bachillerato con orientación en Ciencias Naturales, Salud y Ambiente, pertenecientes a un colegio de carácter público de la Ciudad de San Luis, Argentina. Adoptamos como enfoque cognitivo el basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de la matemática.

Este enfoque considera *que "la comprensión de un concepto matemático involucra la articulación coherente de los diferentes sistemas semióticos que entran en juego en la reso-*

lución de problemas" y, que "un conocimiento asociado a un concepto es estable en un individuo, si él puede articular las diferentes representaciones de un objeto sin contradicciones" [Guzmán, I. 1998. RELIME, México, Vol. I. Año 1, 5-21].

Desde este enfoque, el traslado de un registro a otro es una confrontación de representaciones de diferente naturaleza de un mismo objeto. Se realiza en forma natural cuando son semánticamente congruentes. Sin embargo es un obstáculo serio cuando no hay congruencia.

Una de las contradicciones suele aparecer, por ejemplo, en el caso de funciones de la forma f(x)=x+a. Muchos estudiantes, influenciados por la notación algebraica, interpretan el signo más del segundo miembro como una traslación de la gráfica de f(x)=x hacia la derecha, cuando lo correcto es trasladarla hacia la izquierda.

Además, este enfoque contempla la adquisición de estrategias de utilización de aquellos sistemas semióticos que facilitan la interpretación, la vía de solución y el control de resultados, de acuerdo a las características del problema. El objetivo de la experiencia fue, indagar y poner en evidencia los registros de representación que manejaban los alumnos y, cuáles priorizaban al resolver ecuaciones con valor absoluto.

Para su diseño, tomamos en consideración los fundamentos y metodología de la Ingeniería Didáctica como un instrumento eficaz para guiar experimentaciones en clase. Esta metodología de investigación, contempla aspectos cruciales que no se pueden ignorar para el posterior diseño de una ingeniería: el análisis preliminar en sus componentes didáctica, epistemológica y cognitiva, es decir *"el diagnóstico sobre el funcionamiento del sistema de enseñanza, de los efectos que produce en las concepciones de los estudiantes y en un aspecto sustancial: la naturaleza intrínseca del saber matemático que se pone en escena en la situación escolar"*. [Farfán R.M.1987. *Antologías Nº 2, Cinvestav, México.55-119*].

Análisis Preliminar

Estudio Didáctico

En nuestro sistema educativo, la enseñanza del concepto: valor absoluto de un número real y de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, se imparte en el último curso del nivel medio superior, poniéndose más énfasis en los bachilleratos con orientación científica o técnica, ya que la currícula de los mismos contempla un tratamiento más profundo de temas de Precálculo.

La definición que generalmente se utiliza es la siguiente: *El valor absoluto de un número real x, que se denota* |x|, *es:*

$$(*) \qquad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

A partir de esta definición se deducen las siguientes propiedades, que luego se emplean para resolver ecuaciones e inecuaciones.

a. $|x| = a$ *(con a>0), es equivalente a:* $x = a$ **ó** $x = -a$

b. $|x| < a$ *(con a>0), es equivalente a:* $x<a$ **y** $x > -a$, *es decir* $-a < x < a$

c. $|x| > a$ *es equivalente a:* $x > a$ **ó** $x < -a$

Dentro de este contexto, se proponen ejercicios como los siguientes:

Resolver, especificando el conjunto solución:

1. $|x+3| = 6$; 2. $|1-4x| = 13$; 3. $|2x-9| < 1$; 4. $|5-2x| > 3$

5. $|2x+1| = x-4$;6. $|2x+6| < 4x-1$; 7. $|5x-3| \geq 1+3x$

Para su resolución, utilizando las propiedades antes mencionadas, se emplean procedimientos algebraicos y razonamientos basados en la lógica que, según sean las características de la ecuación o inecuación, adquieren distinta complejidad. Constituyen un buen ejercicio algorítmico y de razonamiento lógico, con el cual es posible lograr un virtuosismo en los cálculos y en el uso de conectivos. En la enseñanza se jerarquizan procedimientos que corresponden al registro algebraico, dejando de lado el registro gráfico. En particular, en el caso que nos ocupa, la "acción" de la función valor absoluto sobre números negativos, recurso visual muy útil para encontrar la solución, tanto de ecuaciones como de inecuaciones del tipo señalado.

Estudio epistemológico

Esta fase debe contemplar, en uno de sus aspectos, *el contenido matemático en juego, sus diversas formulaciones y su funcionamiento, tanto en el contexto teórico como áulico.*

A continuación realizamos un análisis de diferentes definiciones de valor absoluto y de las ventajas y desventajas de cada una de ellas, especialmente en lo relativo a su aplicación en la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

a) **La definición de valor absoluto (*)**

Esta definición acarrea dificultades a la hora de su comprensión. Un aspecto a tener en cuenta es que se trata de una definición funcional "por casos" o "por partes". A la mayoría de los alumnos le resulta difícil su interpretación y, por consiguiente su aplicación.

La notación algebraica se constituye en otro factor de incomprensión, especialmente en la segunda parte de la definición (*): **"-x, si x < 0"**. El signo menos delante de la **x** los induce a asumir que se trata de un número negativo, produciendo interpretaciones erróneas **al soslayar la condición x< 0.** Como consecuencia les resulta difícil entender que el valor absoluto de un número real es siempre mayor o igual a cero.

Esta incomprensión de la definición se manifiesta en situaciones más complejas, como las que aparecen al tratar valores absolutos de funciones arbitrarias.

Ejemplificamos uno de los errores más frecuentes:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ -f(x) \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad \text{en un ejemplo} \quad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 \text{ si } x \geq 0 \\ -(2x-1) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Aún superado este obstáculo, otra dificultad de esta definición por partes radica en que, es ineludible la aplicación del método de análisis de casos para la continuación del proceso de resolución, tanto de ecuaciones como de inecuaciones.

Por este método, en cada caso se debe encontrar una solución dentro de un campo determinado por las condiciones del mismo, y para la solución global es necesario considerar aquellas que satisfacen las condiciones según sean los conectivos lógicos involucrados. Por ejemplo para resolver ecuaciones como:

• $|2x+6| = x-1$; • $|x^2-x-6| = x+2$,

o inecuaciones como:

• $|2x+6| < x-1$; • $|x^2-x-6| \geq x+2$,

Hemos podido observar que, algunos estudiantes eligen acertadamente los casos a considerar, resolviendo en forma correcta las ecuaciones según las condiciones de cada caso particular. Sin embargo, no tienen en cuenta las condiciones globales y los consecuentes conectivos lógicos. Esto los conduce a dar una respuesta fragmentada, sin arribar al conjunto solución.

Otro aspecto digno de destacar es que, el método algebraico no aporta un modo de control en cuanto a la anticipación de las características de la solución y - en problemas más complejos - una vez determinada. Priva por lo tanto al alumno, de una herramienta eficaz a utilizar en el control de la solución.

b) **El valor absoluto de un número real como distancia**.

Considerando que los números reales se representan geométricamente como puntos de una recta, podemos pensar $|x|$ como distancia en sentido geométrico, es decir como la longitud del segmento que tiene como extremos **0** y **x.**

Del mismo modo $|x-a|$ es la distancia entre x y a, siendo x y a números reales arbitrarios.

Esta definición de valor absoluto en el contexto de distancia es muy útil para la resolución de ciertas ecuaciones e inecuaciones como las siguientes:

I) $|x-1|=3$

II) $|x-1| \leq 3$

ya que provee de economía a los procesos de resolución y permite una visualización que facilita la interpretación de la misma y el control de la solución. Si en cambio se quieren hallar, las soluciones de: $|x-3| < x+5$; $|3x-1|<|2x+7|$;| $||x|-1| =2$, puede comprobarse fácilmente que este punto de vista tiene serias limitaciones.

c) $|x| = \text{máx}\{x, -x\}$.

La utilidad de esta definición, para la resolución de ecuaciones e inecuaciones tiene las mismas desventajas de la definición funcional, pues es necesario utilizar consecuencias que se desprenden de ella, idénticas a las detalladas en el ítem a).

d) Tratamiento del valor absoluto utilizando la gráfica de f(x)=|x|

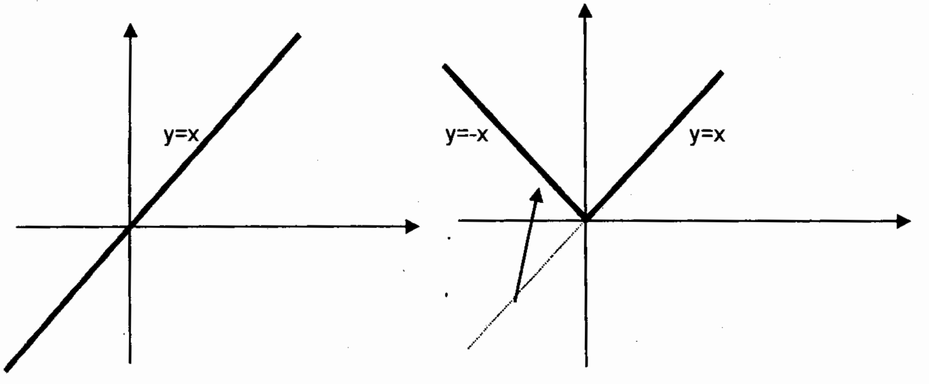
Otro modo de abordar estos problemas es utilizar como recurso las gráficas de funciones. Para el caso de ecuaciones e inecuaciones lineales, se recurrirá a los conocimientos de las funciones lineales: $y=ax+b$.

Así, para resolver: $x-1=3$ ó $x-1< 3$, utilizando las gráficas de $f(x)=x-1$ y de $f(x)=3$, bastará hallar las abscisas de los puntos de corte de ellas. En el segundo ejemplo, el conjunto solución está constituido por todos los números reales **x** tales que la recta $y=x-1$ "permanezca por debajo" de la recta $y=3$.

Este procedimiento establece una comparación entre gráficas de rectas, lo que permite una visualización clara del problema.

¿Cómo utilizar el registro gráfico para resolver ecuaciones del tipo $|x-1|=3$?. Debemos preguntarnos cuál es el "efecto gráfico" de la aplicación del valor absoluto a funciones lineales.

El valor absoluto es una función que asigna valores no negativos, por lo que, si el número es negativo, basta con multiplicarlo por –1. Este hecho, en el registro gráfico y para $g(x)=|f(x)|$, se traduce en una reflexión de las imágenes negativas de $f(x)$, respecto del eje **x**, quedando fijas las imágenes positivas. Así, por ejemplo, la gráfica de $y=|x|$ se obtiene a partir de la gráfica de la función identidad $y=x$.



Por lo tanto, para resolver $|x-1|=3$, comenzamos graficando $y=x-3$, y aplicamos una reflexión con respecto del eje x de la parte negativa de la gráfica. Una vez obtenida la gráfica de $y=|x-3|$, procedemos a hallar la abscisa del punto de intersección de ella con la gráfica de $y=3$.

En ejemplos como el dado no se vislumbra la eficacia del método, si lo comparamos con el que provee la definición (*). Sin embargo debemos poner énfasis en el estudio de métodos de resoluciones gráficas de ecuaciones aún siendo sencillas, pues él constituye la base conceptual y procedimental para avanzar en el estudio de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto más complejas.

Es aquí donde la potencia del uso del registro gráfico se pone de manifiesto al resolver ecuaciones e inecuaciones como las siguientes:

• $||x|-1|-1|=5$; • $|x+2| < 3x+4$; • $|x^2-3x+2| > 4x+7$.

El análisis de la dimensión epistemológica, en cuanto a la construcción histórica de la matemática, es una componente fundamental de la metodología de la Ingeniería Didáctica, no sólo por el aporte de elementos importantes para el diseño o análisis a priori, sino que permite detectar obstáculos epistemológicos que se encuentran en la evolución de los conceptos mismos.

En cuanto al valor absoluto de un número real, en la obra de Cauchy: "*Curso de Análisis*" publicada en el año 1821, en lo que el autor llamó *Preliminares* (donde fijó el significado de los términos y notaciones), aparece ya el germen del concepto de valor absoluto al expresar:

"*.....el signo + o el signo – puesto frente a un número modificará su significado, de manera similar a como un adjetivo modifica el de un sustantivo...*"

Cuando Weierstrass (1841-1856), en su trabajo sobre rigorización del análisis, (que recién se conoció en 1859), establece la definición - hoy aceptada - de función continua en un punto, ya utiliza el concepto de valor absoluto. También lo hace Heine, quien en sus *Elemente* (1872), escritos bajo la influencia directa de las lecciones de Weierstrass, define límite de una función f(x) en x_0 de la manera siguiente:

"Si, dado cualquier ε , existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x\pm\eta)$-L es menor en <u>valor absoluto</u> que ε ,entonces se dice que L es el limite de f(x) para x= x_0" [Boyer, C B (1986) *"Historia de la matemática"*, Ed. Alianza, Madrid, pág. 345].

Es fácil reconocer aquí la definición de límite que aparece en los textos actuales, sólo que en ella se usa la notación de valor absoluto y la η ha sido reemplazada por otra letra griega, la δ.

Si analizamos la definición "por partes" de valor absoluto, reconocemos inmediatamente que la misma, es su definición funcional. La elaboración del concepto mismo de función y el establecimiento de propiedades como continuidad, derivabilidad e integrabilidad constituyó un largo proceso, con obstáculos que, sólo se salvaron al establecer los fundamentos lógicos de los números reales hacia fines del siglo XIX.

Este proceso comenzó en el siglo XIV, afianzándose el concepto en el siglo XVII, al integrarse el álgebra y la geometría con la invención de la geometría analítica. El concepto de función cobra verdadera importancia cuando Leonard Euler en su obra "*Introductio in Analysis Infinitorum*" (1748) organiza el análisis alrededor del mismo, como relación entre dos variables mediante una expresión algebraica.

Sin embargo, los matemáticos del siglo XVIII sustentaban la concepción de que una función debía tener la misma expresión analítica en todas partes. Durante la parte final del siglo, en gran medida como consecuencia de la controversia sobre el problema de la cuerda vibrante, Euler y Lagrange permitieron las funciones con diferentes expresiones analíticas en distintos dominios. Sin embargo consideraron **continuas** a estas funciones donde se mantenía la misma expresión y, **discontinuas** en puntos donde la expresión cambiaba de forma. Hoy aceptamos que, las funciones continuas pueden estar definidas por más de una expresión, tal es el caso de la función valor absoluto.

Lo expuesto pone en evidencia el obstáculo epistemológico que, a nivel teórico, constituyó para la Ciencia Matemática la construcción del concepto de función, aceptándose tardíamente funciones definidas por más de una expresión analítica.

Esta complejidad del concepto de función se refleja también en las concepciones sustentadas por los alumnos. Los obstáculos, al igual que en el devenir de la construcción de esta noción, son mayores cuando se trata de funciones definidas por partes como lo es la función valor absoluto.

Estudio cognitivo

Para tener un panorama del nivel cognitivo de los alumnos respecto a la noción de valor absoluto, y resolución de ecuaciones en una variable en donde interviene este concepto, se realizó con ellos una actividad de carácter exploratorio, consistente en:

Resolver en forma grupal, utilizando lápiz y papel, las siguientes ecuaciones:

a) $|2x+1|=0$ b) $|2x+1|=2$ c) $|2|x|+1|=2$

y posteriormente *graficar*: y=x, y=x-1, y=x+2

Lo que surgió en primera instancia fue que, en la enseñanza recibida hasta el momento de la experiencia, el valor absoluto de un número se había introducido informalmente del siguiente modo: *"el valor absoluto de un número es: dicho número sin el signo"*. Los alumnos, por lo tanto no estaban familiarizados con ninguna definición formal del concepto.

Sus conocimientos de gráficas de funciones lineales, estaban olvidados. Sin embargo, luego utilizaron tablas de valores, valiéndose de ellas para graficar. Recordaron haber estudiado rectas y parábolas en años anteriores, pero no las diferenciaban a partir de sus expresiones analíticas. Varias pueden ser las causas del estado de estos conocimientos. Sin embargo, nos animamos a inferir que en la enseñanza de la matemática impartida a este grupo de alumnos, no se ha puesto énfasis en un tratamiento formal de valor absoluto ni en reforzar el dominio del registro gráfico.

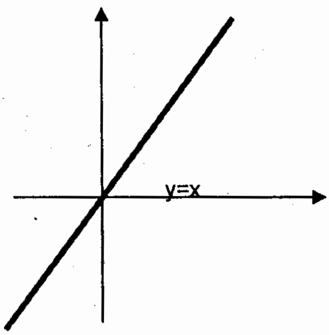
Diseño de la Ingeniería

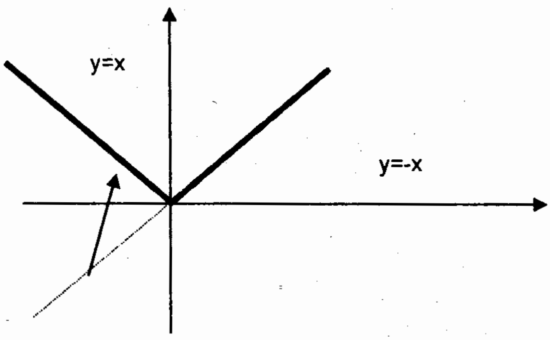
Sobre la base del esclarecimiento que logramos de la problemática, a través de los estudios didáctico, epistemológico y cognitivo, establecimos como objetivo indagar la posibilidad de que el grupo de alumnos utilizara el conocimiento de las gráficas de funciones lineales del tipo y=ax+b para resolver problemas de ecuaciones con valor absoluto, sin emplear el desdoblamiento por análisis de casos, y partiendo de problemas simples.

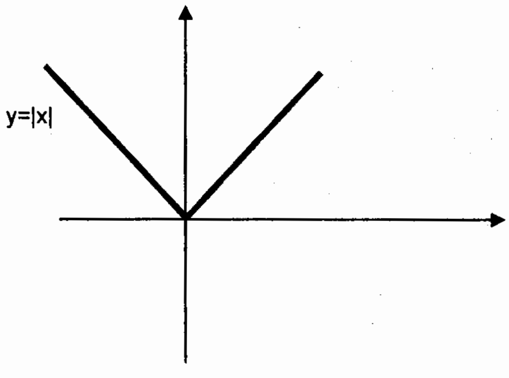
Transcribimos a continuación la ingeniería diseñada:

Actividad 1: ¿Cómo opera el valor absoluto sobre la función y=x?

Observa con detenimiento las siguientes gráficas:







¿Puedes obtener alguna conclusión?

El objetivo de esta actividad, claramente del tipo "mirar y ver", fue indagar sobre la capacidad de inferencia de los alumnos, a través de una secuencia en registro gráfico, relativa al "efecto" del valor absoluto sobre la gráfica de f(x)=x.

Actividad 2: Utilizando lo anterior, graficar $y=|x+1|$

Esta actividad tuvo como objetivo esclarecer si los estudiantes podían transferir los conocimientos adquiridos en la actividad anterior, a funciones lineales trasladadas.

Actividad 3: A partir del gráfico de la actividad (2) determinar la solución de:

a) $|x-1|=0$ b) $|x-1|=3$ c) $|x-1|=-5$

El objetivo de esta actividad fue explorar si los alumnos recurrían al método gráfico para solucionar ecuaciones sencillas con valor absoluto.

Actividad 4: Resolver:

e) $||x|-1|=1$ f) $||x|-1|=1|2$

Se incluyó esta actividad más compleja para indagar sobre la capacidad de abordaje de las mismas por parte de los estudiantes, a partir de las ya realizadas.

Ámbito de desarrollo de la experiencia

Quisimos crear un ámbito áulico tranquilo y cordial para favorecer las producciones de los alumnos tanto escritas como orales. Por ello, una de nosotras actuó como coordinadora durante el desarrollo de la experiencia.

Esto permitió que los alumnos se comportaran sin inhibiciones. A través de sus expresiones espontáneas pudimos develar concepciones y actitudes ante situaciones problemáticas nuevas para ellos, tanto por el tema abordado como por las características de su tratamiento.

Se logró un buen nivel de participación, mostraron interés en su mayoría. Sólo dos de los veinticinco alumnos permanecieron al margen durante todo el desarrollo de la experiencia.

Análisis de las producciones de los alumnos

En la primera actividad, fue notoria la actitud de casi todos los estudiantes ante una consigna de esta naturaleza. La obviaron sin tener en cuenta lo que se les pedía, pasando rápidamente a la siguiente. Se puso en evidencia la falta de entrenamiento en este tipo de actividades.

En la segunda actividad sólo ponderaron la orden "graficar", ignorando el sentido global de la consigna.

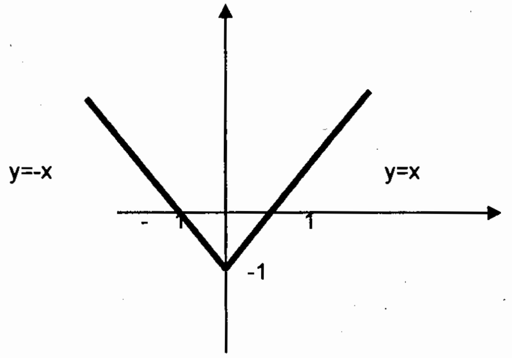
Algunas de las expresiones fueron: "Aquí no hay que hacer nada, vayamos a la otra actividad".

Sólo un grupo se detuvo en ella y, luego de unos minutos se les escuchó decir: "la gráfica rebota..."

Respecto a las siguientes actividades hemos clasificado los trabajos de los alumnos (tanto producciones escritas como discusiones grupales) según características similares para facilitar su descripción

Grupo 1

En la actividad 2, dibujaron la gráfica:



- La gráfica errónea los indujo a dar dos soluciones para el problema 3 a): x=1 y x=-1.
- Debido a la simetría de la gráfica, dieron como solución x=±4 para |x-1|=3
- No se percataron de la no existencia de solución para |x-1|=-5 y su respuesta fue x=±5.

Grupo 2

Graficaron de idéntico modo que los integrantes del Grupo 1. Sin embargo, no utilizaron la gráfica, recurriendo al registro algebraico. Volviendo a omitir el valor absoluto y dando en consecuencia una sola solución.

Es destacable cómo persistieron concepciones erróneas, pues en el ejercicio c), despejando, obtuvieron x = -4. Sin embargo respondieron: "no se puede, porque es valor absoluto".

Grupo 3

No intentaron dar soluciones a través de gráficas. Sus respuestas fueron solamente:

a) x=1.

b) x=-2, x=4.

c) no responden.

Grupo 4

A partir de una tabla de valores, graficaron correctamente y=|x-1|.Utilizando la gráfica, obtuvieron soluciones correctas para a), b) y c). Sin embargo, a partir de la justificación de c): "no tiene solución debido a que el valor absoluto actúa únicamente en los positivos", se pueden inferir dos cosas: Que, hay una concepción equivocada o que han utilizado la palabra "actúa" erróneamente, pero que el razonamiento es correcto.

Es el único grupo que resolvió los ítems d) y e). Graficaron bien y=||x|-1| y hallaron correctamente las soluciones.

Grupo 5

No escriben nada. Sin embargo se enfrascan en la discusión de cómo es la gráfica de y=x+1. Algunos opinan que, como y=x pasa por cero, al sumarle uno, la gráfica de y=x sube una unidad. Otros, en cambio dicen que la recta y=x se corre hacia la derecha. Uno de los alumnos expresa: "como la función toma el mismo valor para 1 y –1, se trata de una gráfica así", trazando en el aire una parábola. "Entonces las ecuaciones son de segundo grado porque tienen dos soluciones. Yo no las sé resolver, había que aplicar una fórmula y no la recuerdo".

Conclusiones y algunas recomendaciones

1. La introducción de la noción de valor absoluto de un número como: "es el número sin el signo", acarrea serios obstáculos, ya que el alumno debe cambiar sus esquemas ante la definición formal.

Es preferible introducirlo a través del concepto de distancia, poniendo énfasis en su significado recurriendo a la recta real, a fin de favorecer su comprensión. Posteriormente, en cursos más avanzados introducir su tratamiento como función, manteniéndose preferiblemente en el registro gráfico.

2. A partir del análisis de los trabajos grupales, especialmente en las actividades detalladas en el Estudio Cognitivo, podemos inferir *que la totalidad recurrió al registro algebraico para resolver las ecuaciones.*

Un 80% ignoró la notación de barras del valor absoluto y trabajó como si se tratasen de ecuaciones lineales. Es de destacar que algunos grupos interpretaron las barras como corchetes y otros como paréntesis. En la ecuación c) las barras fueron interpretadas como corchetes y paréntesis, de acuerdo a las convenciones de la notación algebraica. *Observamos que, ante ecuaciones totalmente desconocidas, intentaron igualmente resolverlas, tratando de asimilarlas a un campo conceptual conocido: resolución de ecuaciones lineales, adaptando incluso la notación propia del registro algebraico.*

Sólo el 20% utilizó el método de "ensayo y error", pero ignoraron las barras de valor absoluto obteniendo una única solución.

Sin embargo, este método fue cuestionado por otros alumnos expresando: "así no vale... eso no es matemático".

Probablemente esta concepción provenga de las prácticas docentes, pues en ellas frecuentemente se pone énfasis en un tratamiento puramente algebraico de las ecuaciones, aún en aquéllas tan simples que es posible dar la solución sin aplicar ningún procedimiento.

Aquí debemos destacar la importancia de promover el uso del método de ensayo y error. El mismo reafirma el concepto de solución de una ecuación y de control previo de ella, aspectos que con el tratamiento algebraico se diluyen. En la enseñanza de resolución de ecuaciones, es conveniente comenzar con ecuaciones sencillas, donde el estudiante use la prueba para hallar la solución. Luego se lo enfrentará a ecuaciones más complejas, donde el método de "ensayo y error" no resulte. A partir de allí se lo introducirá en los métodos algebraico y gráfico. De este modo hará significativos los nuevos conocimientos, percibiéndolos como instrumentos matemáticos útiles y poderosos.

3. En varios alumnos emergió y persistió la concepción errónea de que *"una ecuación con valor absoluto siempre tiene que tener solución no negativa, pues el valor absoluto de un número tiene esta propiedad".* Esta confusión posiblemente es atribuible a que no se ubican en el contexto de resolución de ecuaciones, primando en el pensamiento la característica primordial del valor absoluto.

Solamente, a partir de ser inducidos pudieron percatarse de la posibilidad de existencia de más de una solución. Ante este hecho algunos las asimilan al campo de las ecuaciones cuadráticas. *La aparición de dos soluciones, los lleva a obviar que la incógnita, en las ecuaciones tratadas, no está elevada al cuadrado. Evidentemente ha primado el hecho de existencia de más de una solución sobre la expresión algebraica que las diferencia. Este aspecto es remarcable, pues se da con frecuencia en el aprendizaje: recurrir a un campo conceptual más complejo y, como excusa no abordar el problema.*

4. Cuando la coordinadora, en una de sus intervenciones, indujo a graficar las rectas horizontales para encontrar los puntos de corte de la gráfica de una función con valor absoluto, para hallar las soluciones de la ecuación, varios alumnos lograron captar la "técnica del método gráfico", no así su "esencia".

No se percataron de los conceptos que dan fundamento a este método. Este hecho puso en evidencia la falta de conocimiento y adiestramiento en el registro gráfico, a pesar de que en años anteriores han estudiado sistemas lineales. *No se permiten cuestionamientos, sólo obedecen al docente.*

5. Se percibió claramente la dificultad que el enfoque semiótico remarca cuando no hay congruencia entre registros.

La confusión al tratar de graficar y=x+1 y la discusión sobre si la gráfica "subía o se trasladaba hacia la derecha" es una prueba de ello.

6. Los alumnos se sintieron atraídos ante una enseñanza no rutinaria de la matemática, asumiendo un papel activo, no siendo sólo meros espectadores. Rescatamos también el hecho significativo de que percibieron la utilidad de conceptos aprendidos en años anteriores en un contexto de uso posterior, por ejemplo: ecuación de la recta y su representación gráfica.

Recomendamos al respecto, presentar un concepto en distintos registros de representación, ya que la adquisición del mismo está profundamente ligada a la coordinación fluida entre los registros.

Debemos utilizar nuestro "poder" como docentes (en sentido benéfico) y "obligar" a nuestros alumnos a utilizar el registro más conveniente para la resolución de un problema, pues la mente persiste en remitirse a campos conceptuales conocidos que, a veces no proveen de las herramientas más efectivas para la resolución del mismo. Así, en el caso de resolución de ecuaciones e inecuaciones el registro gráfico es claramente superior.

Uno de los obstáculos, en lo que concierne a la apropiación del concepto central del Análisis: "función", es que éste debe considerarse como proceso *y como* objeto. *Aquí el registro gráfico se constituye en un instrumento muy útil para la asimilación y distinción de estos dos aspectos. Por un lado la gráfica pone de manifiesto la* variabilidad *– aspecto esencial involucrado – y, por otro permite percibir a la función* en forma completa, *como un objeto sobre el que se puede operar (por ejemplo derivar o integrar).*

Esto debe tenerse ya en cuenta y muy especialmente, en la enseñanza del Precálculo, donde es conveniente poner énfasis en el registro gráfico, ya que "... las habilidades algebraicas y lógicas que desarrolla la minoría (de los estudiantes) no contribuyen sustancialmente, a un posterior estudio del Cálculo" *[Farfán, R y Albert, A 1997, Cuadernos Didácticos, Vol. 3, pág. 1, México, Gr.Ed.Ib.]*

Recomendamos finalmente garantizar un espacio para que los alumnos puedan expresarse. El lenguaje natural y de discusión entre el profesor y los compañeros registrará la significación de lo que se estudie de una manera diferente.

Referencias Bibliográficas:

Cauchy, A. L. *"Curso de análisis"*. Selección y traducción de Jiménez, C. A. Colección MATHEMA (1994). UNAM. México.

Farfán R.M. (1997).*"Ingeniería Didáctica, un estudio de la variación y el cambio"*. México, Grupo Editorial Iberoamericana.

Farfán R.M. - Albert A. (1997). *"Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades"*. México, Grupo Editorial Iberoamericana.

Guzmán, I. (1998). *"Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes"*. RELIME, Vol. I. Año 1, 5-21. Publicación oficial del Clame, México.

Farfán R.M. (1987).*"Perspectivas y métodos de investigación en matemática educativa"*. Antologías N°2, Programa Editorial del Cinvestav, México. 55-119.

Azcárate, Carmen (1995). *"Sistemas de representación"*, UNO, Vol. 4, Año II, pp. 53-61. Barcelona, España. GRAÓ Educación.

Artigue, M *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos* (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. P. Gómez(Ed), pp 97-140, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Estudio didáctico de la resolución gráfica de Inecuaciones

María Amelia Mini, Héctor Oscar Paez

Resumen

El presente trabajo consiste en el diseño, ejecución y análisis de resultados de una serie de actividades encaminadas a que el estudiante ante la complejidad de arribar a una solución algebraica, frente a una inecuación, recurriera naturalmente a la utilización del método gráfico.

Las acciones inducidas a los estudiantes se desarrollan paso a paso, partiendo de conceptos ya conocidos y trabajados por ellos, como el de funciones y sus gráficas , resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

Se empleó a la "ingeniería didáctica" como metodología de investigación para guiar experimentaciones en clase. Teniendo en cuenta los trabajos de investigación que adhieren a esta concepción de aprendizaje, una de las rutas a seguir es el diseño de materiales *ad hoc* para observar el efecto que se produce en los alumnos.

Situación didáctica diseñada

En el diseño de la actividad se solicita a los estudiantes: la definición de valor absoluto. Se les pide que grafiquen "sin evaluar" una serie de funciones, hasta arribar a una gráfica donde aparece el valor absoluto. Finalmente se les pide que "resuelvan" dos inecuaciones donde está presente el valor absoluto. Todo esto, con la finalidad de inducir al estudiante de recurrir a lo "gráfico", cuando lo algebraico se torna dificultoso.

La intención ahora, es observar qué logros y que dificultades se presentan cuando los estudiantes abordan la resolución de inecuaciones con valor absoluto, haciendo uso de la situación didáctica diseñada. Para ello, diseñamos una secuencia didáctica en la que se le proponen ejercicios con la finalidad de que pueda emplear recursos gráficos para la resolución de inecuaciones.

La Secuencia

Objetivos

- Observar si naturalmente los alumnos utilizan el método gráfico para resolver inecuaciones o si es necesario inducirlos a ello.
- Apreciar la riqueza del método gráfico sobre el algebraico.

Presentación del diseño

El diseño se estructura en dos fases

Primera fase

Esta fase es de acción preparatoria, pues en ella se pretende que el alumno recuerde la definición de la función "valor absoluto" y su gráfica; que analice cómo lograría la gráfica de $y = |x|$ a partir de $y = x$, usando solamente recursos geométricos. Seguidamente se le pide que reactualice la habilidad de graficar "sin evaluar" funciones sencillas como $y = 3$, $y = x^2$; $y = x^2 - 4$, finalmente en esta secuencia, se le solicita que, haciendo uso de las conclusiones a las que arribó en las actividades precedentes, grafique aproximadamente $y = |x^2 - 4|$.

Comentarios

Seguidamente damos un análisis a priori de los pasos de la fase, explicitando lo que se espera que sea el desarrollo de la actividad y las posibles dificultades que deberá sortear el estudiante.

Las actividades propuestas en esta fase tienden a que los estudiantes entren en acción, dibujando las gráficas de las funciones propuestas utilizando propiedades geométricas como simetrías y traslaciones con respecto a los ejes de coordenadas, visualizando el efecto que se produce en la gráfica de la función, cuando su expresión analítica está afectada por el valor absoluto, como en el caso $y = |x^2 - 4|$.

Algunos estudiantes pueden enfrentarse con la dificultad de querer realizar "de memoria" la gráfica de algunas funciones por ellos conocidas, sin intentar algún tipo de cálculo o la confección de tablas.

Pueden también tener inconvenientes al interpretar: " como obtener la gráfica de $y = |x|$ a partir de la gráfica $y = x$", multiplicando por (-1) los valores negativos de x de esta última función.

Es posible que algunos alumnos al tener que graficar la función constante $y = 3$, tengan que recurrir a la confección de una tabla para cerciorarse de que adquiere el mismo valor para todo x.

Pueda que recurran a la confección de tablas cuando se les requiera que "grafiquen sin evaluar".

Es posible que al tener que graficar $y = x^2 - 4$ (*), no trasladen sobre el eje de las ordenadas la gráfica de la función $y = x^2$, realizada en el paso anterior, sino que recurran a la confección de una tabla.

Es probable que al tener que graficar la función (*) encerrada entre las barras de valor absoluto, no reflejen la parte negativa de la gráfica por encima del eje de las abscisas.

Segunda fase

En esta fase se aplican los conocimientos y destrezas adquiridas en la fase anterior para resolver inecuaciones.

Comentarios

Puede existir la dificultad de que los estudiantes no perciban el ejercicio presentado como una aplicación de lo que venían realizando.

Puede ser que el "salto" que hay entre la primera fase (ejercicios del 1 al 5), a la segunda (ejercicio 6), sea demasiado grande para los alumnos, ya que en las inecuaciones planteadas no aparece la y.

Pueden tener especial dificultad en resolver los ejercicios usando el método gráfico, por cuanto han sido entrenados para resolver inecuaciones en forma analítica, no permitiéndose imaginar y ni siquiera aceptar que a partir de la gráfica de una, o varias funciones, se puede llegar a resolver una inecuación más o menos complicada.

Posiblemente, si logran una solución empleando recursos gráficos, consideren que la misma carece del "rigor matemático".

Puede suceder que los estudiantes tengan dificultad de hallar las ecuaciones de las rectas que determinan los intervalos solución del ejercicio $||2x + 3| - 1| \geq \frac{1}{2}$.

Al finalizar la segunda fase se procederá a la puesta en común y discusión de la actividad por parte de los integrantes de los diferentes grupos.

Escenario

Las dos fases se llevaron a cabo en una sola sesión de dos horas, una para el trabajo de los estudiantes sobre la actividad y otra para la discusión y puesta en común.

Se formaron cuatro grupos, tres de ellos integrados por tres alumnos y uno por dos, todos ellos acompañados por uno o dos observadores. Los estudiantes pertenecían al segundo semestre del primer año de la carrera Licenciatura en Ciencias de la Computación, de la Universidad Nacional de San Luis, habiendo cursado en el semestre anterior Cálculo.

Los observadores elaboraron notas sobre la acción de los alumnos. Al finalizar la resolución de la Actividad, se les pidió a los estudiantes que expusieran su trabajo voluntariamente, para observar la argumentación de sus respuestas y la defensa de las mismas. La mayor parte de la resolución del práctico, como la totalidad de la puesta en común obra en una filmación.

Actividad desarrollada por los estudiantes

Los alumnos trazan bien las gráficas de las funciones valor absoluto e identidad.

Algunos alumnos al graficar la función constante $y = 3$, recurren a la tabla para cerciorarse de que y adquiere igual valor para todo x.

Les cuesta interpretar cómo lograr la gráfica de $y = |x|$ a partir de la gráfica $y = x$. Tratan de interpretar una parte de la gráfica $y = |x|$ a través de una función que dé únicamente resultados positivos, por ejemplo la función $y = x^2$. En un primer momento no se percatan del hecho que la función cuadrática no es una función lineal, si bien para los valores negativos de x cumple la condición que es siempre positiva. En uno de los grupos, al tener que graficar $y = x^2 - 4$, lo piensan hacer desde $y = x^2$, sin embargo hacen la tabla de valores. Dos estudiantes lo realizan a mano alzada (sin calcular los puntos), pero esperan que la tercera integrante del grupo realice la tabla de valores , para comenzar a graficar, como una forma de corroborar los resultados. En este mismo grupo, dos de las estudiantes siguen resolviendo la Actividad pensando gráficamente, mientras que la otra no se aparta de las tablas, no tiene claro el concepto de valor absoluto.

Al tener que efectuar la gráfica de: $y = |x^2 - 4|$, se pudo observar que:

- Un alumno, integrante del grupo más activo, dice: *" la panza la subimos para arriba, eso fue un parcial de Cálculo "*, como una forma de reafirmar la validez de su razonamiento.
- Algunos estudiantes grafican, partiendo correctamente de $y = x^2 - 4$, pero se olvidan de graficar el tramo positivo de la parábola de la que partieron.

La mayoría de los estudiantes tratan de resolver analíticamente las inecuaciones, buscando valores de x que satisfacen la misma, para lo cual hacen uso de factoreo, aplican raíz cuadrada a ambos miembros, transposición de términos; y algunos se ayudan con la calculadora.

No logran percibir que en ambos miembros de la inecuación tienen una función, porque expresan *" ... pero aquí nos falta la y ... "*

Algunos estudiantes, a pesar de haber obtenido una gráfica correcta, ésta fue considerada como una cosa más , sin percibir que era realmente la clave para la resolución del problema. Presentan dificultades en expresar como intervalo las soluciones. Solamente un grupo trabaja con las gráficas en la resolución de las inecuaciones, interpretando el signo menor o igual, como lo que queda "por debajo de... "

Los estudiantes que resuelven correctamente $||2x + 3| - 1| \geq \frac{1}{2}$. llegan a la solución usando recursos, como simetría en las gráficas, pero no se convencen de la validez del método usado.

Actitudes de los alumnos

Fue notable el contraste en el desempeño de los grupos y dependió fundamentalmente de la capacidad de transferir a situaciones nuevas los saberes previos. Asimismo el compromiso mostrado por la totalidad de los estudiantes fue destacado, ya que actuaron libremente.

La primera fase de la Actividad fue completada por los cuatro grupos, no así la segunda, que fue resuelta exitosamente por solo un grupo. Los tres grupos restantes, aunque intentaron arribar a una solución no lo lograron.

La puesta en común fue muy rica, ya que se generó espontáneamente una discusión entre los integrantes de dos de los grupos, en donde expusieron y defendieron cada una de las argumentaciones. Además, en esta etapa se aclararon muchos conceptos y se apreció rotundamente la ventaja de la utilización del método gráfico sobre el algebraico para resolver inecuaciones.

Conclusiones

En base a las observaciones que se describen precedentemente la serie de actividades permitió a los estudiantes, apreciar la ventaja y conveniencia del método gráfico para resolver inecuaciones, ante el método "tradicional" algebraico. Los alumnos no lograron desprenderse del método de graficar "punto a punto" cuando se les requiere que lo hagan sin evaluar la función, ni mucho menos en utilizar naturalmente el método gráfico para resolver las inecuaciones, ante la complejidad del método algebraico.

No se cumplieron totalmente nuestras expectativas, pues pese a que los estudiantes visualizaron la eficacia del método gráfico, persistió la comcepción que resolver un problema matemático "matemáticamente" equivale a utilizar solamente recursos algebraicos.

Esto nos lleva a reflexionar sobre nuestra práctica docente en los distintos niveles del sistema educativo.

Bibliografía

Rosa M. Farfán - " Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio " Grupo Editorial Iberoamérica - México 1997

Rosa M. Farfán y Armando Albert - " Un acercamiento gráfico a la resolución de inecuaciones " - Grupo Editorial Iberoamérica - México 1997

Cecilia Parra y Otros - " Didáctica de Matemáticas: Aportes y Reflexiones " Editorial Paidós - Buenos Aires 1995

Estudio didáctico de la función 2^x

Rosa María Farfán
AES-Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Carlota Andrés, Silvia Castellanos, Luz M. Mingüer, Eva Rubio
Instituto Tecnológico de Oaxaca
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
México

Justificación

En los inicios del siglo XX surgen las matemáticas modernas con la introducción de la enseñanza del cálculo, la cual partió del principio expresado por (Poincaré en 1904): *"se enseñará cálculo adaptado a las capacidades cognitivas del estudiante"*[1]; siendo su objetivo dotar al alumno de las herramientas necesarias para incorporarse al trabajo productivo, buscando un equilibrio entre las exigencias del saber matemático y las exigencias que impone el funcionamiento cognitivo del estudiante.

Se sabe que la función es un elemento fundamental del cálculo. Sin embargo, se ha constatado que al paso del tiempo, el concepto de función se ha venido enseñando de manera algorítmica y por consiguiente, limitada, como se a mencionado anteriormente.

Dentro de la gama de funciones escolares, la función exponencial reviste gran importancia en el área de la ingeniería, debido a que su campo de aplicación es muy amplio, pues describe fenómenos tales como: crecimiento demográfico, crecimiento de bacterias, desintegración radioactiva (crecimiento negativo), el aumento monetario a un interés compuesto etc. En el desarrollo de nuestra labor docente como maestras de cálculo, se han identificado serios problemas relacionados con este concepto, debido a que de manera tradicional el maestro enseña la función exponencial, como viene desarrollada en los libros de cálculo. Primero definiéndola como: "si $a > 0$ y $a \neq 1$ entonces nos referiremos a $y = a^x$ como la función exponencial de base a"[2] y en seguida dando sus características: Dominio $(-\infty, +\infty)$, recorrido $(0, +\infty)$, intersección con el eje y en $(0, 1)$, siempre creciente, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ (asíntota horizontal), reflexión de $y = a^{-x}$ en el eje y. Y por último graficando la función solo para valores enteros de x, de tal forma que el estudiante concibe la función exponencial solo para estos valores, sin tomar en cuenta que, para valores fraccionarios de x tales como 1/2, 1/3, 1/4, 3/4, ... , la función a^x requiere de consideraciones especiales para poder ser calculada en algunos de sus puntos y por consiguiente su trazo en el plano no es tan sencillo.

Al respecto, (Vergnaud 1991) considera que *el significado de un objeto matemático no puede quedar reducido a su definición al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza*[3].

Por esta razón la aplicación de la secuencia 2^x es importante como una alternativa para los estudiantes del ITO, ya que a través de ella los alumnos ampliarán o modificarán el concepto que tienen de esta función a^x pues, en cursos más avanzados de matemáticas requerirán de estos conocimientos para llegar a realizar modelación matemática, aplicable en los diferentes campos de la ingeniería.

Así, la aplicación de esta secuencia didáctica estará encaminada al desarrollo de una situación que permita a los estudiantes del ITO manipular la función 2^x con valores de x enteros y fraccionarios mediante actividades que involucren una transformación de la noción de

[1] Poincaré, H (1904) *Les définitions en mathématiques. L' Enseignement M* 6, 255-283.

[2] Larson, R.; Hostetler, R., (1986). *Calculo y Geometria Analítica*: Las funciones exponencial y logaritmo.

[3] Vernaud, G.(1991). "*La théorie des champs conceptuels* : Recherches en Didactique des Mathématiques", 10 (2..3)

función exponencial, así como la interacción y confrontación de opiniones entre estudiantes, para que logren éstos acomodar en sus estructuras cognitivas, nuevos significados del objeto de aprendizaje, en este caso la función exponencial 2^x.

Al respecto (Pozo, 1987) propone: *que es necesario realizar una combinación de la transmisión de teorías y concepciones con la realización de actividades por descubrimiento, intentando que los estudiantes hagan conciencia de sus concepciones que les genere conflictos cognitivos, ya que estos les permitirá darse cuenta de las limitaciones que tienen. Es importante mencionar también que Pozo, al igual que Piaget, considera que el conflicto en el estudiante juega un papel fundamental para que éste acceda a una nueva forma de explicación. Es así que los cambios conceptuales deben entenderse como un objetivo a largo plazo en el aprendizaje de la ciencia, requiriendo ser provocados y construidos con:*

_Un esfuerzo dirigido, que parta a su vez de la combinación adecuada de la guía del profesor.

_La autonomía por parte del alumno.

_La confrontación de opiniones, de las concepciones individuales entre iguales, de tal manera que esto le permita al estudiante generar y desarrollar un proceso para la construcción del conocimiento científico[4].

Aspectos previos de la puesta en escena

Cultura Institucional

El Instituto Tecnológico de Oaxaca, perteneciente al Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos, es una Institución, cuyo principal objetivo es la formación de profesionistas que contribuyan al desarrollo socioeconómico del estado; formando ingenieros: industriales, eléctricos, electrónicos, químicos, civiles y mecánicos; así como licenciados en administración e informática; cuenta con 4000 estudiantes y una planta docente de 300 profesores.

El nivel socioeconómico de la mayoría de los estudiantes es bajo, y el origen socioprofesional de las familias es de: agricultores, obreros, empleados y/o pequeños comerciantes, en donde el grado máximo de estudios, de gran parte de los padres de familia, es apenas de educación primaria.

Esta Institución ubicada en la capital, recibe aproximadamente 40% de alumnos provenientes de todas las regiones del estado, conformando un mosaico de culturas que definen actitudes diferentes en este grupo de estudiantes, pues, el hecho de tener que salir de su lugar de origen con recursos muy limitados, genera una problemática especial que viven la mayoría de estos jóvenes.

Por otro lado se advierte un bajo nivel académico en los alumnos que ingresan, y más tarde a lo largo de su vida escolar en el ITO, altos índices de reprobación en materias como: física química, matemáticas. Esto tiene su origen en una serie de circunstancias entre las que destacan, el crecimiento acelerado de la población escolar, y el problema magisterial que se vive en el estado desde hace 10 años y que ha afectado de manera fundamental la calidad de la enseñanza en todos los niveles educativos.

Además nuestra Institución, está inmersa en la problemática que afecta a la educación superior y que toca varios aspectos, entre ellos:

[4] Pozo, J. (1987)11. *Aprendizaje de la ciencia y pensamiento causal* .Madrid : Aprendizaje visor.

a. El problema de la formación docente

Como toda Institución de educación superior, en el ITO contamos con una planta de catedráticos formada por profesionistas en las diferentes áreas del saber, que conocen ampliamente el tema de su formación, pero que carecen de una información pedagógica mínima necesaria para desempeñar una labor educativa, dificultándose la optimización del proceso enseñanza aprendizaje.

b. El problema del "estilo de enseñanza"

En nuestra Institución, identificamos un estilo "tradicional" (expositor-receptor) que refuerza la memorización y una actitud pasiva en el alumno, de tal manera que a este último, no se le enseña a analizar y reflexionar sobre los conceptos (contenido del programa), definiéndose claramente, para las materias de ciencias exactas, un gusto por la algoritmización, es decir, un estilo de "enseñar" basado en la resolución de problemas a través de la aplicación mecánica de fórmulas, sin llegar a la comprensión cabal del concepto. Este estilo conforma estudiantes no participativos, tímidos y poco creativos a los que se les dificulta: la exposición de algún tema frente a sus compañeros, el trabajo en equipo, la adaptación a métodos innovadores de enseñanza, la lectura y consulta de textos, la investigación sobre temas específicos, etc.

Selección de los estudiantes participantes en el estudio

La selección de los estudiantes para la puesta en escena de la secuencia didáctica 2^x, se realizó con los grupos de cálculo que tenemos a nuestro cargo. Haciéndoles una invitación a participar en una actividad matemática, la cual requeriría de dos sesiones de trabajo fuera del horario de clases. Una para dar a conocer el algoritmo geométrico y otra para el desarrollo de la secuencia didáctica.

Estos estudiantes fueron de las carreras de ingeniería civil e ingeniería industrial, así como de la licenciatura en informática. Los alumnos de ingeniería se encuentran repitiendo el curso de matemáticas I.

Puede decirse que los estudiantes que participaron en este trabajo lo hicieron por decisión propia, motivados por el interés de tener nuevas experiencias y profundizar en sus conocimientos de matemáticas.

Cuestionario exploratorio y su análisis

El cuestionario exploratorio fue aplicado con el objeto de conocer las ideas generales que los alumnos tienen alrededor de la función 2^x antes de participar en la puesta en escena de la secuencia didáctica 2^x.

Este cuestionario constó de 3 preguntas tales que, con ellas fuera posible encontrar evidencias que nos permitiera conocer la concepción o idea que el estudiante tiene acerca de la expresión 2^x. Estas fueron:

a) ¿que significa 2^x ?

b) calcula expresiones para: x = 2, 3, 4, 20, 0, -1, -2, -3, 1/2, 1/4, 3/4, -1/3.

c) ¿ puede representarse gráficamente la función 2^x ?

La aplicación de este cuestionario fue de gran utilidad, ya que permitió contrastar los resultados obtenidos, con los resultados arrojados después de la aplicación de la secuencia didáctica 2^x.

Análisis del cuestionario exploratorio

Las siguientes tablas muestran los resultados del análisis del cuestionario exploratorio, aplicado a los estudiantes.

Grupo de Ingeniería Civil

Alumno	**Que significa 2^x**	**Calcula expresiones para x=2,3,4,20,0,-1,-2,-3 1/2,1/4,3/4,-1/3.**	**¿Puede representarse gráficamente la expresión? explica ampliamente la respuesta**
Alumno 1	Identifica 2^x como una expresión algebraica	Calculó sólo para valores enteros positivos.	Esbozó la gráfica, sin dar explicaciones al respecto.
Alumno 2	Identifica 2^x como una expresión algebraica y también como una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Esbozó la gráfica, sin dar explicaciones al respecto.
Alumno 3	Identifica 2^x como una expresión algebraica	No calculó correctamente (No conoce las leyes de los exponentes, interpreta 2^3 = 2x3) .	No contestó a esta pregunta.
Alumno 4	Identifica 2^x como una expresión algebraica y también como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Tabuló sólo para valores enteros de x, graficó sin dar explicaciones.
Alumno 5	Identifica 2^x como una expresión algebraica y también como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Tabuló sólo para valores enteros de x, graficó y mencionó que 2^x es una función creciente.
Alumno 6	Identifica 2^x como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos.	Esbozó la gráfica , mencionando que 2^x es una función creciente.
Alumno 7	Identifica 2^x como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos.	Tabuló para valores enteros positivos y graficó sin dar explicaciones al respecto.

CONCLUSIONES: La mayoría de los estudiantes identifica 2^x como la función.
La mayoría de los estudiantes calcularon sólo para valores de x enteros positivos, algunos de ellos con valores negativos .
La mayoría de los estudiantes asocian 2^x con una representación gráfica.

Grupo de Licenciatura en Informática

Alumno	Que significa 2^x	Calcula expresiones para x=2,3,4,20,0,-1,-2,-3 1/2,1/4,3/4,-1/3.	¿Puede representarse gráficamente la expresión? explica ampliamente la respuesta
Alumno 1	Identifica 2^x como una expresión algebraica y también como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos, para valores fraccionarios positivos y negativos los dejo expresados (aplicó la ley de los exponentes).	Esbozó la gráfica sin dar explicación al respecto.
Alumno 2	Identifica 2^x como una expresión algebraica.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios mencionó el uso de calculadora para obtener una aproximación.	Tabuló sólo para valores enteros de x, y graficó sin dar explicaciones al respecto.
Alumno 3	Identifica 2^x como una expresión algebraica.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos, ,para valores fraccionarios positivos y negativos los dejo expresados mencionando que son valores que no se pueden obtener (aplicó las leyes de los exponentes).	Tabuló sólo para valores enteros, graficó sin dar explicaciones al respecto,

CONCLUSIONES: Todo el grupo identifica 2^x como una expresión algebraica, sólo uno la identifica además como una función.

Todo el grupo calculó 2^x sólo para valores enteros positivos y negativos, conocen las leyes de los exponentes e identifican claramente un número irracional.

Todo el grupo asocia 2^x con una representación gráfica.

Grupo de Ingeniería Industrial

Alumno	Que significa 2^x	Calcula expresiones para x=2,3,4,20,0,-1,-2,-3 ½,1/4,3/4,-1/3.	¿Puede representarse gráficamente la expresión? explica ampliamente la respuesta
Alumno 1	Mencionó que 2^x es una expresión algebraica.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos los dejo expresados	Tabuló sólo para valores enteros positivos y negativos , graficó sin dar explicación.

Alumno 2	Mencionó que 2^x es una ecuación.	No calculó correctamente (No conoce las leyes de los exponentes, interpreta $2^2 = 2+2$	No graficó ni dio explicación..
Alumno 3	Mencionó que 2^x es una función exponencial.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes).	Tabuló para valores enteros positivos y negativos, graficó sin dar explicación.
Alumno 4	Mencionó que 2^x es una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Esbozo la gráfica, sin ninguna explicación.
Alumno 5	Mencionó que 2^x es una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos.	Esbozó la gráfica, sin ninguna explicación.
Alumno 6	Mencionó que 2^x es una expresión algebraica	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Tabuló para valores enteros positivos y negativos, graficó sin dar explicación.
Alumno 7	Mencionó que 2^x es una función creciente.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos y negativos los dejo expresados	Tabuló para valores enteros positivos y negativos, graficó mencionando que es una función creciente.
Alumno 8	Mencionó que 2^x es una expresión algebraica y también una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos y negativos los dejo expresados mencionando el uso de calculadora.	Tabuló para valores enteros positivos y negativos, graficó sin dar explicación.
Alumno 9	Mencionó que 2^x es una ecuación y también una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos los dejo expresados mencionando el uso de calculadora.	Esbozó la gráfica, sin ninguna explicación.
Alumno 10	Mencionó que 2^x es una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos y negativos, los dejo expresados mencionando ser valores que no se pueden calcular.	Esbozó la gráfica, sin ninguna explicación.

CONCLUSIONES : La mayoría del grupo identifica 2^x como una expresión algebraica, algunos la identifican como una expresión algebraica y también como una función, y sólo unos cuantos como una función.

La mayoría del grupo calculó 2^x sólo para valores enteros positivos y negativos; para valores fraccionarios, algunos alumnos, sólo lo dejaron expresado al identificar los números irracionales.

Todo el grupo asocia 2^x a una representación gráfica.

Puesta en escena de la secuencia didáctica

Recursos materiales

Para la realización de la secuencia didáctica, se requirió del siguiente material:

- una aula con mesas para trabajo en equipo
- una grabadora por equipo de trabajo
- un juego de escuadras sin graduación y compás por equipo
- retroproyector
- acetatos, hojas blancas, lápices, plumones para acetato y pizarrón acrílico
- cámara de video
- secuencia didáctica 2^x impresa.

Método de observación

Se contó con dos guías de observación que son:

Una para el registro del desarrollo matemático de la situación, que atendió los siguientes aspectos:

Qué dificultades enfrenta el estudiante

Qué estrategias se emplean para superar las dificultades

Otra para el registro de carácter específico como son:

Observaciones de centración-desbloqueo (profesor participativo)

Observaciones de la dinámica del equipo

Observaciones de la dinámica del grupo

En cuanto a la observación - desbloqueo (profesor participativo) la interacción con los equipos y la discusión grupal será activa, se darán sugerencias y se harán preguntas, buscando romper posibles bloqueos en el trabajo de los estudiantes, se respetarán sus tiempos, ya que el propósito fundamental será lograr que los estudiantes concluyan las dos etapas por sí mismos.

Cada intervención del profesor será reportada.

Análisis A-priori

El análisis apriori lo definimos tomando como base los resultados del cuestionario exploratorio y los contenidos de la secuencia didáctica 2^x.

- Los estudiantes cambiarán la idea que tienen de que 2^x solo tiene sentido cuando x es entero.
- Los estudiantes identificarán la naturaleza creciente de la función .
- Los estudiantes identificarán la existencia de dificultades para realizar el trazo continuo de la gráfica de 2^x.
- Los estudiantes superarán una parte de las dificultades que existen para realizar el trazo continuo de 2^x, a partir del método geométrico para encontrar segmentos iguales con la raíz cuadrada de un número.

Desarrollo de la aplicación de la secuencia didáctica 2[x]

La sesión de trabajo desarrollada en dos etapas se llevó a cabo en una sola sesión el día 9 de Mayo de 1998, de las 9.30 hrs. a las 14.30 hrs. bajo el siguiente orden:

9.30 - 10.00 hrs.	Presentación de la sesión de trabajo
10.00 - 11.00 "	Trabajo en equipo (etapa I)
11.00 - 12.00 hrs.	Discusión grupal (etapa I)
12.00 - 12.30 "	Receso
12.30 - 13.30 "	Trabajo en equipo (etapa II)
13.30 - 14.30 "	Discusión grupal (etapa II)
14.30 - 15.30 "	Reunión de los maestros participantes para comentar la actividad desarrollada.

Antes de empezar la sesión de trabajo, se les solicitó a los estudiantes formaran equipos de 3, dejando abierta la integración de los equipos, de esta forma se conformaron 4 equipos, con 3 estudiantes, acompañados de un monitor en cada mesa.

A continuación se les repartió el material de trabajo (grabadora, hojas blancas, compás, escuadras, plumones, acetatos).

Durante la presentación se les agradeció a los estudiantes su asistencia y participación, mencionándoles, que era de suma importancia el trabajo que ellos iban a realizar, ya que formaba parte de un trabajo de investigación encaminado, a mejorar el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se recordaron someramente los conocimientos geométricos para la obtención de raíces y productos de segmentos.

Así mismo se les dieron indicaciones generales, tales como la forma de trabajo, la entrega de sus reportes por equipo, así como expresar sus conclusiones en un acetato que les sirviera de apoyo en la discusión grupal, al final de cada etapa.

Los monitores llevaron registros escritos así como grabaciones de audio, sobre la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, la dinámica de trabajo en equipo, y la dinámica de trabajo del grupo.

Se filmaron, la presentación del equipo y las discusiones grupales de la primera y segunda etapa.

Las sesiones de trabajo de equipo fueron de una hora para la primera etapa y una hora para la segunda etapa.

Las discusiones grupales fueron de una hora para la primera etapa y de una hora para la segunda etapa.

Se concluyó la sesión de trabajo con los estudiantes a las 14.30 hrs.

Se finalizó la sesión a las 15.30 hrs. con una reunión de los maestros participantes, para comentar los aspectos más relevantes que se habían observado durante la sesión de trabajo. Concentrado de la guía de observación del desarrollo matemático de la secuencia.

ETAPA I

Observaciones	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
¿Se hizo la lectura de todo el documento antes de iniciar la actividad? ¿Se hicieron algún tipo de preguntas?	No	Si	Sólo del primer punto.	Sólo el primer punto.
¿Se identificaron los segmentos de magnitudes 2^0, 2^1, 2^2 en el plano?	2^0 no 2^1 y 2^2 si	Si	De principio no los identificaron, Consideraban que 2^0 es cero.	Al principio no. Después si.
¿Se marcaron los puntos $(0, 2^0)$, $(1, 2^1)$, $(2, 2^2)$ en el plano?	$(0, 2^0)$ se marco erróneamente. $(1,2^1)$ y $(2, 2^2)$ si se marco	Si	Se les tuvo que apoyar para que lo realizaran.	No, al principio.
¿Identificaron cuál era el problema de localizar pares ordenados en el plano?	No	Si	Si, después del bloqueo, identificaron los segmentos *y* luego el par ordenado (x, y).	No
¿Obtuvieron los segmentos de magnitudes $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, $2^{3/4}$, $2^{5/4}$ empleando los procedimientos geométricos indicados?	$2^{1/2}$ y $2^{1/4}$ si. $2^{3/4}$ y $2^{5/4}$ no los obtuvieron.	Si	Obtuvieron $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, $2^{3/4}$ empleando el procedimiento geométrico. $2^{5/4}$ no les dio tiempo.	Localizaron $2^{1/2}$ y después del desbloqueo $2^{1/4}$ únicamente.
¿Identificaron el segmento unidad y utilizaron siempre el mismo en la obtención de los otros segmentos?	Si	Si	Si	Si
¿Qué dificultades encontraron para obtener los segmentos $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, $2^{3/4}$, $2^{5/4}$, cómo las superaron?	El trabajar con exponentes fraccionarios	Un poco de discusión alrededor de $2^{3/4}$ para poder llegar a obtenerlo a través del producto.	Hubo necesidad de centrarlos y que retomaran el hecho de que $2^{1/4}$ es igual a $(2^{1/2})^{1/2}$	No manejan los exponentes.
¿Describieron cómo localizar el punto $(1/8, 2^{1/8})$, para ello se apoyaron en el procedimiento desarrollado para los otros segmentos?	No lo hicieron	Si	No les dio tiempo. Sólo llegaron a obtener el segmento y el punto $(3/4, 2^{3/4})$	No lo hicieron.
¿Identificaron que tipo de puntos podían localizar y cuáles no, dieron algún tipo de argumento?	No lo hicieron	Si, no dieron argumento.	No los pudieron identificar por falta de tiempo.	No lo hicieron

ETAPA II

Observaciones	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
¿Se hizo lectura de todo el documento antes de iniciar la actividad? ¿Se hicieron algún tipo de preguntas?	No	Si se hizo. No se hicieron preguntas todo pareció claro	No. Leyeron sólo la actividad No. 8 de manera individual y fueron observando las columnas. Se iban pasando el documento	No. Tampoco se hicieron ninguna pregunta
¿Se comprendió el ejemplo (tabla 1), que dificultades encontraron para comprenderlo?	No. Encontraron las regularidades	Si se comprendió, sólo fue cuestión de repetir la lectura.	Cuando lo analizaron lo encontraron de pronto muy sencillo.	Si . Se comprendió
¿Qué dificultades tuvieron para el llenado de la tabla, cómo las superaron?	Con exponentes fraccionarios. Hubo problemas en cuanto a operar con fracciones.	Ninguna	Empezaron trabajando por pares y no en forma consecutiva; hasta que volvieron a analizar el ejemplo	No tuvieron ningún problema
¿Hicieron algún comentario en relación al término razón de crecimiento?	No	No. Parece comprensible el término.	Si. Que parecía crecía a razón constante.	No
¿Pudieron identificar la razón de crecimiento para distintos incrementos de x, pudieron generalizar esta idea, escribieron distintos casos, o únicamente lo comentaron verbalmente?	No lo hicieron	Si. Si pudieron generalizar por escrito.	Si observaron sus trabajos y concluyeron que la razón de crecimiento era de 2^x	Lo comentaron verbalmente.
¿Para el caso de la columna 5 pudieron generalizar la estructura, cómo lo justificaron?	No lo hicieron	Si	Después de varios intentos concluyeron que su estructura podría ser: $2^0(2^x - 1)$ $2^x(2^x - 1)$ $2^{2x}(2^x - 1)$	No
¿Qué problemas identificaron en relación al trazo continuo de la función 2^x.?	No lo hicieron	Hay valores que no se pueden obtener por el método establecido.	No hubo comentarios al respecto.	Pensaron que no habría ningún problema

¿Afirmaron que siempre se puede obtener 2^x, o establecieron alguna distinción entre los posibles valores de x?	No lo hicieron	Si establecieron alguna distinción.	No hubo comentarios al respecto.	Si. Tomaron puros valores enteros para x.

Papel del profesor en el avance del equipo

El papel del profesor, en cuanto al avance del equipo, para el desarrollo de la secuencia, fue de la siguiente manera:

1.- Establecer las reglas para el desarrollo de la secuencia.

2.- Establecer un clima de confianza en el equipo. Dándole especial atención a este punto, debido a que los alumnos no están habituados a trabajar en equipos.

3.- Ubicación de los equipos en los temas que se estaban tratando.

4.- Desbloquear situaciones en las que el equipo se encontraba detenido.

5.- Llamar la atención del equipo en cuanto a la administración del tiempo.

Conclusiones

Después del análisis que se realizó sobre las observaciones hechas a cada equipo de trabajo y en cada sesión grupal, se concluye que, en la primera y segunda etapa de la secuencia, la mayoría de los estudiantes:

- Se apropiaron del procedimiento geométrico para hallar segmentos cuyas magnitudes son iguales con la raíz cuadrada de un número.
- Al localizar los puntos de coordenadas (x, y) señalados en la secuencia, identificaron que 2^x es una función creciente.
- Al finalizar la primera etapa de la secuencia, identificaron a la función 2^x, como una función que acepta valores enteros y fraccionarios y que estos últimos pueden ser racionales e irracionales.
- Llegaron a establecer relaciones entre cada una de las columnas del ejercicio propuesto en la segunda etapa, hasta llegar a identificar que, cuando los valores de x están espaciados una cantidad cualquiera, su razón de crecimiento es 2^x.
- A través de las regularidades observadas, lograron obtener la siguiente estructura de la columna cinco para valores de x que están espaciados una cantidad cualquiera,

•
$$\begin{array}{ll} \mathbf{2^0} & \mathbf{(2^x-1)} \\ \mathbf{2^x} & \mathbf{(2^x-1)} \\ \mathbf{2^{2x}} & \mathbf{(2^x-1)} \\ \mathbf{2^{3x}} & \mathbf{(2^x-1)} \end{array}$$

comprendiendo con esto, que la función 2^x crece de acuerdo a una razón de crecimiento.

- El trabajo en equipo permitió la interacción entre los estudiantes, así como el enriquecimiento de los conceptos de cada uno de los integrantes, logrando un mejor aprovechamiento.
- El papel que el maestro jugó durante la secuencia, como monitor guía, con un tipo de intervención limitada únicamente a desbloquear las actividades de los equipos, a través de cuestionamientos sin llegar a sugerir de manera directa la solución, fomentó el desarrollo de ideas propias.

Referencias Bibliográficas

Farfán, R. 1995. *Ingeniería didáctica.* Programa editorial. Serie: Antologías. Número 1. Área de educación superior del DME – CINVESTAV – IPN. Méx.

Albert, A. 1996. *La convergencia de series en el nivel superior. Un acercamiento sistémico .* Tesis doctoral . Departamento de matemática educativa. CINVESTAV-IPN. Mex. (capítulo 1,2,3)

A.P. Youschkevitech, 1976. *The concept of function up to the middle of the 19^{th} century*, Arch. Hist. Exact. Sci.No.16. pp. 37-85. Traducción: Dra. Rosa María Farfán.

Cantoral, R. 1990. *Matemática Educativa. Programa Editorial. Serie: Antologías. Número 1.* Area de educación superior del DME-CINVESTAV-IPN. Méx.

Donald W. Bushaw, Vera S. Pless, Nelvin Henriksen,1982. "*The concept of function",* aspects of epistemology and pedagogy. Edited by Guershon Harel & Dubinsky.

Steen, L. A. 1998. *"La enseñanza agradable de las matemáticas"* Colección de textos politecnicos, Limusa- IPN, México

Dubinsky, Harel (1992). *The concept of funtion Aspects of epistemology and pedagogy.* M. A. A. Notes and Reports Series.Editorial Studies Boord. Purdue University.

Collete, Jean Paul. (1986) *Historia de las Matemáticas*, Tomo II.Editorial Siglo XXI, México.

Academia de Ciencias de Cuba, Academia de Ciencias de la URSS. *Metodología del conocimiento científico.* Editorial Quinto Sol, S.A.México.

García, Gloria. (1997). *El concepto de función en textos escolares.* Universidad Pedagógica Nacional. Editorial Colciencias.

Zill, Denis G.(1987) *Cálculo con Geometría Analítica.* Editorial Iberoamericana. México.

Larson, R..; Hostetler, R., (1986). *Cálculo y Geometría Analítica*: Las funciones exponencial y logarítmica. Editorial McGraw - Hill.

El comportamiento variacional de la función lineal. Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato

Alfonso Catalán Adame, Crisólogo Dolores Flores
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
CIMATE / CONACYT
México

Resumen

Aunque los procesos de cambio se han venido estudiando desde los últimos dos grados de la primaria, los estudiantes del bachillerato no los usan en determinación de la ecuación de la recta a pesar de haber cursado Geometría Analítica. Por esta razón adoptamos como problema de investigación el escaso desarrollo de la habilidad de los estudiantes de bachillerato para obtener la ecuación de una recta a partir de su comportamiento variacional. En este artículo se describe una experiencia didáctica tendiente a desarrollar este tipo de pensamiento en situación escolar. Esta experiencia fue diseñada sobre la base de la formación por etapas de las acciones de Galperin.

El problema de investigación

Los proceso de cambio en la escuela elemental mexicana se estudian desde el cuarto de primaria, en especial se enfatiza la variación directamente proporcional. En la escuela secundaria se sigue estudiando este tema mediante tablas y por medio del plano cartesiano, se grafican funciones elementales del estilo: $y = mx + b$. En el bachillerato se aborda nuevamente este tema en el curso de Goemetría Analíticas con el nombre de ecuación de la recta, se incluye tópicos específicos como la ecuación de la recta dado un punto y su pendiente, la ecuación de la recta dados dos puntos, la ecuación de la recta con abscisa y ordenada al origen y la ecuación general de la recta. En realidad esta es una forma *estática* de estudiar un proceso de variación, pues hace énfasis en uno o dos puntos por donde pasa la recta y su pendiente. Sin embargo para comprender la esencia del lugar geométrico determinado por la ecuación: $y = mx + \mathrm{b}$, es necesario enfocar la atención no sólo en los puntos y en su pendiente, sino en el comportamiento de los cambios que experimenta x y y en todo el dominio de la función. Estos cambios están sintetizados precisamente en la pendiente m, $m = \Delta y/\Delta x$. Por ejemplo las gráficas de las funciones: $y = 2x + 1$ y $y = 2x + 10$, tienen exactamente el mismo comportamiento variacional: cuando x aumenta una unidad (de izquierda a derecha) y aumenta dos, o bien cuando x aumenta dos unidades, y aumenta 4, así la relación de proporcionalidad entre los cambio de y respecto de x se conserva, es pues una constante.

Sólo se diferencian una de la otra en que sus gráficas pasan por puntos distintos. El hecho de que tengan el mismo comportamiento variacional las hace paralelas. El comportamiento variacional de las recta no es sujeto de estudio sistemático tanto en los programas como en los textos usuales en la escuela.

Los resultados que hemos obtenido en el diagnóstico acerca de la obtención de la ecuación de una recta a partir de su comportamiento variacional, muestran un escaso dominio por parte de los estudiantes de bachillerato de esta habilidad. Este es precisamente nuestro problema de investigación.

El objetivo de la investigación

El objetivo principal de esta investigación consiste en desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar, especialmente el que se requiere para deducir la ecuación de la recta a partir del su comportamiento variacional y viceversa, es decir a partir de su comportamiento variacional deducir su ecuación.

La metodología utilizada

Para la realización de este trabajo adoptamos algunos elementos metodológicos de la Ingeniería Didáctica y de las Ciencias Pedagógicas. En términos generales nuestra investigación empieza por describir el estado en que se encuentran el concepto sujeto de estudio en los estudiantes de nuestra región. Después se diseñaron las actividades de aprendizaje y secuencias didáctica, se llevaron a la práctica y luego se analizaron los resultados. Las actividades que se proponen tienen el objetivo de desarrollar la habilidad del análisis visual del comportamiento de las gráficas de rectas en distintas posiciones, analizar el comportamiento de los cambios en el plano numérico mediante tablas y el análisis y deducción de la ecuación de la recta. Se diseñaron actividades en las que se necesitan realizar las siguientes acciones:

- Ubicar los puntos del plano por donde pasa la recta
- Visualizar los cambios de la variable independiente (Δx) y los de la variable dependiente (Δy) dada una gráfica en un plano cartesianos cuadriculado
- Calcular los cambio de las variables y descubrir su razón de proporcionalidad
- Predecir los cambios mediante tablas, gráficas o por medio de la ecuación de la recta
- Analizar el comportamiento variacional de la función lineal y deducir su ecuación
- Dada su ecuación obtener el comportamiento variacional y esbozar su gráfica
- Analizar el comportamiento variacional en el plano gráfico, numérico y analítico y desarrollar movilidad entre ellos

Elementos teóricos

En el plano psicológico la investigación se fundamenta en la Teoría de la Actividad de Vigotsky, Luria, Leontiev, Tallízina y otros. La acción es la piedra angular de toda actividad humana y surge de la relación entre el hombre y los objetos de su realidad. En el terreno de la enseñanza esta relación se establece entre los alumnos y el conocimiento y el profesor. No se tratan entonces de cualquier actividad, sino de la actividad cognoscitiva: la que tiene por objetivo la asimilación del conocimiento. En nuestro caso la asimilación del conocimiento matemático, el relativo a la matemática del la variación y el cambio.

La actividad en general, y la actividad cognoscitiva en particular, pasa por tres fases: la fase orientadora de la acción, la fase ejecutora y la fase de control o evaluación. En la primera juegan un papel importante los motivos por los que realiza la acción, ¿Para qué se realiza la acción? ¿Por qué se realiza la acción? La segunda fase, la de ejecución, es la forma de cómo se realiza la acción, cuanto más sistematización se adquiere en la realización de la acción se perfecciona el dominio sobre ella. En la tercera fase, la de control, se refiere a la calidad de la acción.

Estas tres fases no son consideradas de manera aislada ni suceden necesariamente en forma lineal, sino que forman una unidad dialéctica. Están íntimamente relacionadas en forma de sistema. Por eso la enseñanza de la matemática, en tanto una actividad orientada sistemáticamente al aprendizaje consciente de los conocimientos matemáticos en la escuela, puede lograr mejores resultados si es organizada y dirigida sobre estas base.

El aprendizaje es en esencia un proceso de desarrollo de acciones mentales, por tanto es necesario conocer las condiciones que deben crearse para configurar óptimamente este proceso. El aprendizaje comienza con el descubrimiento de las condiciones necesarias para el desarrollo de la acción mental. Tales condiciones son:

- El objeto de la acción. Que en el caso nuestro es la función lineal y su comportamiento variacional.
- Las propiedades del objeto de estudio. En el caso que nos ocupa: el comportamiento de los cambios las variables; la relación que guardan esos cambios, las relaciones entre cambios de las variables y el crecimiento, decrecimiento y estabilización de la función lineal.
- El objetivo de la acción. En nuestro trabajo pretendemos desarrollar pensamiento y lenguaje variacional.
- Los medios necesarios para alcanzar el objetivo. Conocimientos previos, medios didácticos y las actividades de aprendizaje diseñadas para desarrollar el pensamiento variacional.
- El desarrollo concreto de la acción. La realización de las actividades de aprendizaje diseñadas, en condiciones de enseñanza en el aula.

El contenido de la acción está constituido, por una parte, por la transformación real (orientada hacia el objetivo), de un objeto inicial o de una situación inicial en un producto deseado o en una situación deseada. A esa parte de la acción se le llama fase de realización de la acción La fase de realización de la acción se manifiesta en tres etapas:

1. Etapa de la acción material o materializada. En dicha etapa se da la manipulación de modelos, esquemas, dibujos, construcción de modelos, confección de dibujos. Par nuestro caso diseñamos esquemas de gráficos de rectas, en un sistema cartesiano cuadriculado y a escala, y tablas de valores. Teniendo como dato los cambios de *x, se trata de obtener (midiendo en el gráfico) los cambios de y,* las razones de cambio $\Delta y/\Delta x$, analizar y decidir si la función es creciente o decreciente, así como el comportamiento en general y su ecuación.

2. Etapa de la acción verbal. En esta etapa también conocida como etapa del lenguaje externo se da la solución comentada con eliminación gradual de materiales de orientación (comentarios de los pasos de la acción, su fundamentación y control): repetición en coro, exposición de un alumno, repaso de frases importantes. Para esta etapa se diseñaron actividades en las que se requiere utilizar el lenguaje numérico (sucesiones de valores, etc.), el lenguaje analítico (fórmula de las funciones lineales, desigualdades para denotar el signo de la función y para denotar crecimiento, decrecimiento, y estabilización de la variación). En esta parte el lenguaje tiene una función comunicativa pero también como un medio para reflejar la denominación de los conceptos.

3. Etapa de la acción mental. En esta etapa se da el trabajo independiente (solución independiente de ejercicios sin ayuda de ninguna indicación detallada, principalmente solo control del resultado). Formulación oral o escrita de respuestas a ejercicios y problemas sobre el comportamiento variacional de la función lineal. En esta fase los estudiantes deben ser capaces de deducir el comportamiento variacional de las función lineales con solo analizar la su ecuación; o bien dado el comportamiento variacional de la función obtener la ecuación.

Avances del trabajo

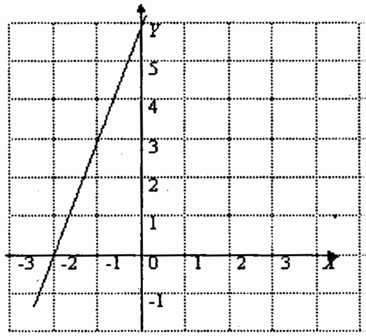
Sobre las actividades realizadas

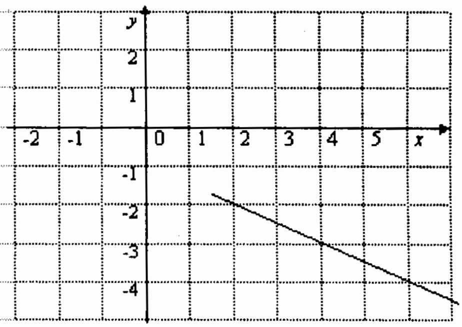
Una vez diseñadas las actividades de aprendizaje fueron llevadas al terreno de la enseñanza con un grupo de 24 estudiantes del Bachillerato en Computación en una institución de este nivel. Los participantes discutieron y resolvieron las actividades con las orientaciones del profesor, que este caso era el mismo investigador. Se utilizaron 7 sesiones de clase con una duración aproximada de 50 minutos cada una de ellas.

Al término de estas sesiones se aplicó un cuestionario con el objeto de medir algunos aspectos indicativos del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Este cuestionario incluye preguntas, problemas y ejercicios similares a los propuestos en las actividades de aprendizaje resueltos en clase. Las primeras dos preguntas están más cercanas a la primera etapa (acción materializada) pues se utilizan gráficas y tablas que brindan mucha información acerca de los cambios de las variables; las dos siguientes pueden ubicarse en la etapa verbal pues la interpretación el lenguaje simbólico (fórmulas) es el que mayor peso tiene en la realización de la actividad; y la última, la etapa mental propiamente dicha, pues para su realización no se dan descripciones detalladas del comportamiento variacional de la recta.

Cuestionario aplicado a los estudiantes

1. Analiza el comportamiento variacional de las siguientes rectas y deduce se ecuación:





(x, y)	Δx	Δy	m	Ecuación

(x, y)	Δx	Δy	m	Ecuación

2. En la tabla siguiente se muestran las temperaturas que experimenta un litro de agua en relación al tiempo. Analice los datos, obtenga los cambios, grafique y obtenga la ecuación de la recta a que dan lugar.

Tiempo (t) en seg.	0	5	10	15	20	25
Temperatura (T) en °C	95	90	85	80	75	70
¿Cuánto cambia t?						
¿Cuánto cambia T?						
$m = \frac{\Delta T}{\Delta t}$						
Ecuación						

3. Obtenga la ecuación de la recta que pase por el punto (-3, 2) y que se comporte de tal manera que siempre que: $\Delta x = 2$, $\Delta y = 3$.

4. Describa el comportamiento variacional de la recta: $y = -3x + 1$. Haga su gráfica.

5. Cuál es la ecuación de la familia de rectas que se comportan de manera que Δx y Δy, guardan la relación 3:2.

Los resultados obtenidos

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario anterior. **En la preguntas 1,** al analizar el comportamiento variacional de la primera y segunda recta, obtuvimos la siguiente resultados:

Acerca de la recta de la primera gráfica:

De 24 estudiantes a los cuales se les aplicó el cuestionario, un número considerable de ellos 15 ubicaron al punto (0, 6) como punto de la recta; un número menor de estudiantes 5, ubicaron también al punto (–1, 3) como otro punto de la recta; y un número más pequeño de ellos 2, ubicaron otro punto de la recta (– 2, 0). En las siguientes dos columnas al visualiza los cambios de la variable independiente (Δx) y los de la variable dependiente (Δy), solamente un estudiante contestó que cuando $\Delta x = 1$, $\Delta y = 3$, pero 7 contestaron que si $\Delta x = 2$, $\Delta y = 6$. Por los resultados obtenidos podemos deducir que a la mayor parte de los estudiantes se les dificultó la determinación visual de los cambios.

Respecto a las razones de proporcionalidad de los cambios, 10 estudiantes contestaron que $\Delta y/\Delta x = 3$ es decir que $m = 3$, aunque fue menor el número de estudiantes que visualizaron los cambios de las variables. Aunque fueron pocos los estudiantes que visualizaron los cambios de las variables, así como el haber descubierto la razón de proporcionalidad, 12 estudiantes contestaron correctamente que la ecuación de la recta analizada es: $y = 3x + 6$.

Acerca de la recta de la segunda gráfica:

En el análisis del comportamiento variacional de esta, al ubicar los puntos de la recta en el sistema de coordenadas cartesianas se obtuvieron los siguientes resultados: 7 estudiantes ubicaron al punto (2, – 2), 2 al punto (6, – 4), 6 al punto (4, – 3), y 3 al punto (0, 3), todos ellos como puntos de la recta. De lo anterior se deduce que, incluso para localizar puntos en el plano de coordenadas cartesianas, los estudiantes tienen dificultades. Respecto a las dos columnas, donde se pide obtener los cambios de las variable independiente (Δx) y de la variable dependiente (Δy), 11 estudiantes contestaron que si $\Delta x = 2$, $\Delta y = -1$; 3 contestaron que si $\Delta x = 4$, $\Delta y = -2$; esto indica que menos de la mitad de los participantes visualizaron correctamente los cambios de las variables. Respecto a las razón de proporcionalidad de los cambios, el 50% de los estudiantes contestaron que $\Delta y/\Delta x = -1/2$ es decir que $m = -1/2$. Casi la mitad dan respuestas aceptables sobre los cambios de las variables y sobre la razón de proporcionalidad de los cambios. Aunque hubo un buen trabajo en los procedimientos precedentes solo 2 estudiantes dieron como ecuación a: $y = -(1/2)x - 1$

En la actividad 2, al analizar los datos de la tabla, la totalidad de los estudiantes pudieron calcular los cambios de tiempo es decir $\Delta t = 5$, así mismo 22 contesta que los cambios de temperatura son de $\Delta T = -5$. Las dos respuestas anteriores se corresponden con los tiempos y temperaturas dadas como datos en la tabla. Respecto a la razón de cambio $\Delta T/\Delta t$, 19 estudiantes contestaron correctamente que $m = -1$. Sólo 3 estudiantes hicieron correctamente la gráfica, 6 determinaron correctamente a la ecuación de la recta, siendo esta la siguiente: $y = -x + 95$.

A la mayor parte de estudiantes se le facilitó el análisis del comportamiento variacional de los datos dados en de la tabla, pese a esto muy pocos hicieron la gráfica, y todavía menos estudiantes obtuvieron ecuación de la recta.

En la actividad 3, de acuerdo a la información aportada sólo 4 estudiantes obtuvieron la ecuación correcta de la recta, siendo esta la siguiente: $y = (3/2)x + 13/2$

En la actividad 4, la mayoría de estudiantes no hace la descripción del comportamiento variacional de la ecuación de la recta: $y = -3x + 1$. Un estudiante hace la descripción del comportamiento y da como respuesta: $\Delta x = 2$, $\Delta y = 6$; tres más hacen la descripción del comportamiento variacional de la recta a partir de su ecuación obteniendo que $\Delta x = 2$, si $\Delta y = -6$; esta respuesta corresponde con lo que se pide, pese a que no hace la gráfica.

En la actividad 5, la mayoría de los estudiantes contesta erróneamente acerca de la pendiente de la recta pues dicen que es de la forma: $m = \Delta x/\Delta y$, incluso escriben erróneamente los resultados que obtienen, por ejemplo fue frecuente la frase: $m = \Delta 3/\Delta 2$. Nótese las confusiones acerca de la sintaxis del Δx y Δy, aquí se considera como dos literales separadas, Δ por un lado y x por el otro. Sólo 4 estudiantes obtuvieron la ecuación correcta de la familia de rectas, siendo la siguiente: $y = (3/2)x + k$

Conclusiones preliminares

Respecto a la primera fase, la fase materializada de la acción, en donde se utilizaron las gráficas como elemento visual principal para determinar los cambios, la mitad de los participantes los logran determinar. Aunque se notaron inconsistencias, particularmente cuando las rectas decrecen y los cambios de la variable dependiente son negativos. Respecto a la fase verbal la mayoría de los estudiantes dan muestras de su escasa comprensión de las expresiones de la forma: $y = mx + b$. Sólo la cuarta parte de los participantes dan muestras de interpretar esta simbología y representarla gráficamente, aunque no estamos seguros de que en sus interpretaciones hayan utilizado la relación de variación directamente proporcional que encierra el coeficiente m. De acuerdo con los resultados, la interiorización del contenido del lenguaje variacional subyacente en la ecuación de la recta (fórmula de la función lineal) es aún incipiente en muy pocos estudiantes.

Estos resultados indican que, en situación escolar la formación de acciones mentales, es aún incompleta. Esto ese debió posiblemente a un nivel de partida deficiente, muchos elementos previos no estaban presentes en los estudiantes, muchos de los estudiantes no realizaban independientemente las tareas para la casa, se presentaron irregularidades en la puntualidad y asistencia, se notó que los estudiantes participantes no están acostumbrados a resolver problemas, los participantes mostraron escasa capacidad para visualizar y analizar gráficas, parecen más proclives a realizar operaciones. Sobre la base de estos resultados rediseñaremos las próximas actividades de investigación.

Bibliografía

Dolores C. (1997). *Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en situación escolar* (Proyecto de Investigación, registro CONACY 25640-S). Facultad de Matemáticas de la U. A. G; Chilpancingo, México.

Dolores C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis Doctoral, Instituto Superior Pedagógico "Enríque José Varona". Facultad de Ciencias; Habana, Cuba.

Dolores C. (1993). *Algunas consideraciones sobre los objetivos de la enseñanza del Cálculo Diferencial en el Bachillerato.* Publicaciones internas, Facultad de Matemáticas U. A. G. Chilpancingo, México.

Farfán R (1997). *Ingeniería Didáctica, un estudio de la variación y el cambio*; Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C. V; México.

Jungk (1979). *Conferencia sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2* (primera parte). Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana.

Nocedo/Pérez (1984). *Metodología de la investigación pedagógica y psicológica.* Editorial Pueblo y Educación. Playa, Ciudad de la Habana.

El desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia pedagógica en situación escolar en el bachillerato

Julio Cesar Solache Ramírez, Rosa Margarita Díaz Nava, Crisólogo Dolores Flores
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
CIMATE/ CONACYT
México

Resumen

El presente artículo se habla de los aspectos esenciales de un trabajo de investigación de corte experimental desarrollado en situación escolar. El trabajo tiene como objetivo desarrollar pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes del bachillerato. Se trata de la puesta en escena (es decir en condiciones de enseñanza en el aula) y la valoración de los resultados, de las principales actividades y secuencias didácticas que aparecen el cuaderno didáctico titulado: *Una introducción a la derivada a través de la variación* de Crisólogo Dolores Flores.

Introducción

La mayoría de profesores e investigadores en el campo de la matemática están convencidos de que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas representa un reto, esto se debe al alto índice de reprobación en ella y además por que se reconoce que esta es una de las causas principales de la deserción escolar. Esta situación es explicada por las autoridades educativas por medio de datos estadísticos y las soluciones que plantean es la de proporcionar cursos de actualización a sus profesores, quienes conocemos estos cursos nos hemos enterado de que difícilmente pueden resolver el problema, dado que son de corte muy teórico y tocan aspectos generales de la enseñanza.

Nuestro trabajo de investigación está motivado, en el plano general, por la problemática descrita anteriormente. Aunque nosotros creemos que la solución de estos problemas pueden ser resueltos si son estudiados en forma científica. Especialmente estamos interesados en estudiar científicamente el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática del cambio que enseña en el bachillerato.

Objeto de estudio

Nuestro trabajo toma como objeto de estudio al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática del Nivel Medio Superior, se centra en la matemática de la variación y el cambio.

La matemática del cambio implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, los conceptos de variable, función, derivada e integral, sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio. Incluye necesariamente a los procesos como el paso al limite o la articulación del pensamiento predictivo y su eventual matematización (Cantoral,1997).Un concepto básico en la formación del pensamiento variacional es el cambio, éste es modelado en la matemática mediante las diferencias.

Las diferencias dan cuenta de cuanto cambia la variable en un proceso de variación. Las diferencias ya que cuantifican el cambio, son el elemento central de todo el cálculo y el análisis matemático, por eso y con razón a esta parte de la matemática se le conoce como la matemática de la variación y el cambio. Los procesos de cambio y su entendimiento son los objetos principales de estudio en nuestro trabajo y constituyen los elementos fundamentales en los cuales se basa la formación de las nociones de variable, función y de razones de diferenciales (derivada).

El problema

El problema central de nuestra investigación es el "escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes que terminan el bachillerato y de los que principian la universidad" (Dolores,1996; Cáceres1997). El **problema especifico** de nuestra investigación es el deficiente desarrollo de estos conocimientos en estudiantes del bachillerato, especialmente el que se relaciona con los conceptos, procedimientos y relaciones relativos a las variables, funciones, derivadas, función derivada y análisis del comportamiento variacional de funciones elementales.

Objetivo

El objetivo consistió en investigar la influencia que ejercen las situaciones y secuencias didácticas diseñadas en el cuaderno didáctico titulado: Una Introducción a la derivada a través de la variación, en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes del bachillerato en situación escolar.

Elementos teóricos

El pensamiento y lenguaje variacional es una línea de investigación introducida por un grupo de investigadores mexicanos del CINVESTAV del IPN. El pensamiento variacional es parte del pensamiento matemático avanzado (Tall 1991) y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por el otro (Cantoral,.1997).

En cuanto a la naturaleza del pensamiento y lenguaje variacional asumimos la premisa vigotskiana que plantea la unidad entre ambos en el pensamiento verbal. Esta unidad se encuentra en el aspecto interno de la palabra, en su significado. Una palabra no se refiere a solo un objeto sino a un grupo o a una clase de objetos, y cada una de ellas, es por lo tanto, también una generalización (Vygotsky, 1988). El lenguaje utilizado por la matemática del cambio tiene connotaciones específicas y su interiorización en forma de pensamiento es sumamente compleja. Sin embargo en nuestro trabajo consideramos como referente del desarrollo del pensamiento a las habilidades matemáticas. Estas se definen como las formas de ejecución de una actividad, en especial cuando esta actividad es conscientemente dirigida hacia un objetivo toma el nombre de habilidad, cuando su ejecución se automatiza el papel de la conciencias queda relegado a un segundo y se convierten en hábitos. Las habilidades se manifiestan por el *poder hacer* con el *saber.* Por ejemplo un estudiante puede *saberse* de memoria la definición de tangente a una circunferencia *pero ser incapaz* de usar esta definición en la resolución de un problema de construcción de tangentes. Sabe la definición pero no puede usarla, tiene el saber pero no tiene el poder.

Las principales habilidades que nos propusimos desarrollar se refieren a los siguientes contenidos divididos en dos bloques: el primero referente a las variables y funciones, y el segundo relativo a la variación y derivada. En cuanto al primero bloque las habilidades desarrollar son: representar variables, tanto en la recta numérica como con desigualdades, resolver problemas de variación usando variables, evaluar y graficar funciones, obtener la fórmula de las funciones, pooder determinar dónde f(x) > 0, f(x) < 0 y dónde f(x) = 0, analizar el comportamiento variacional de las funciones. En el segundo bloque las habilidades propuestas son : obtener Δy y Δx, poder analizar el comportamiento de los cambios, cuantificar cambios por medio de procedimientos algebraicos, analíticos y geométricos, relacionar los cambios sucesivos y el comportamiento de funciones, poder calcular cambios relativos (rapidez y velocidad medias), obtener velocidades instantáneas por medios numéricos y analíticos, calcular la velocidad instantánea de la variación, interpretar la velocidad instantánea como la pendiente de la tangente, calcular diferenciales y derivadas, relacionar el comportamiento de f´(x) y f(x), analizar el comportamiento variacional de f(x) utilizando f´(x) y viceversa, resolver problemas de máximos y mínimos.

Metodología

En nuestro trabajo utilizamos las formas metodológicas de la investigación de las ciencias pedagógicas, particularmente algunos elementos de la experimentación pedagógica en el aula. Dadas Las condiciones en que se realizo el experimento nos fue muy difícil tener un control riguroso de todas las variables en juego, por tal motivo llevamos acabo una experiencia pedagógica en la que ejercimos cierto control de algunas variables a saber: la organización del contenido (plasmado en el material didáctico) y los métodos de enseñanza. La experiencia pedagógica se concretó en un curso ordinario de matemáticas IV, Cálculo Diferencial con dos grupos de estudiantes del bachillerato en programación del Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios No. 135 (CETis 135) ubicado en Chilpancingo Guerrero. En cuanto a los métodos de enseñanza utilizamos el método expositivo, método de elaboración conjunta, método de ejemplificación, método de dirección del trabajo independiente. Utilizamos principalmente métodos productivos pues nuestro interés principal fue el de desarrollar pensamiento variacional. Para controlar la experiencia realizamos las siguientes acciones: anotaciones, trabajos con ejercicios, y problemas en clase, tareas y exámenes. Los exámenes fueron diseñados con la finalidad de explorar los avances y obstáculos en el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes.

Resultados

A continuación se describen los resultados de la experiencia pedagógica, estos fueron valorados por medio de exámenes que para los estudiantes eran de validez oficial y por tanto obligatorios. En el primer examen se plantearon 9 preguntas, las primeras tres exploran la noción de variable, la 4, 5 y 6 exploran su representación geométrica y por medio de desigualdades; las preguntas 7, 8 y 9 el análisis del comportamiento de una gráfico de una función, la evaluación y la graficación por tabulación.

Resultados globales mostraron que el 69% de los estudiantes desarrollaron una idea de variable como la letra que puede adquirir valores sucesivos y la totalidad de ellos consideraron que las variables se representan mediante una letra, la mitad de los participantes fueron capaces de identificar las variables, dadas las fórmulas de funciones. Notamos inconsistencias en la mitad de los participantes cuando, intentan identificar a las constantes. El 34% identifican a la variable independiente el 34% en las fórmulas aunque la mitad no pudieron identificar a la variable dependiente. En la representación de intervalos de variación por medio desigualdades, alrededor del 27% en promedio pudieron hacerlo, quienes no lo lograron mostraron confusiones en la escritura de los intervalos abiertos y semiabiertos, ningún estudiante pudo escribir intervalos discontinuos con desigualdades. En la representación geométrica en la recta real de intervalos los resultados fueron mejores, ya que el 42% lograron hacerlo correctamente.

En cuanto a la graficación y al análisis de funciones, en particular cuando se les pregunta acerca de la imagen de la función casi el 11% contesta que es $f(x)$. En cuanto al crecimiento, el 26% en promedio pudieron obtener los intervalos, se observaron dificultades en la utilización de las desigualdades. Cuando se pide el decrecimiento aparecen serias dificultades. Respecto de los puntos estacionarios de la función el 21% de los estudiantes los confunden con la idea de función nula. En cuanto a los intervalos donde $f(x) > 0$, el 10% en promedio de los estudiantes pueden obtenerlos. Parece ser que la mayoría de los estudiantes no comprenden el significado de la simbología $f(x) > 0$. En los intervalos en donde la función es negativa la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades. Respecto de los puntos en donde la función es nula el 28 % de los estudiantes desarrolló una idea aceptable. El 39% de os estudiantes desarrollaron aceptablemente la habilidad de evaluar cierta función.. Respecto de la habilidad de gráficar una función elemental por medio de la tabulación y por el análisis de sus formulas. Solamente el 30 % de los estudiantes pudieron trazar y evaluar correctamente el gráfico de la función y lo realizaron solamente por medio de la tabulación.

En el segundo examen se plantearon 8 preguntas relativas a la variación y el cambio. Las preguntas 1 y 2 exploran ideas acerca de la variación y el cambio. La pregunta 3 explora los procedimientos para calcular el estado final cuando la variable independiente cambia de t_i+Δt. La pregunta 4 explora los procedimientos para la cuantificación numérica y el análisis de los cambios. La pregunta 5 explora la idea de rapidez de la variación. La pregunta 6 explora la habilidad de predecir la nueva posición de una partícula dada su posición inicial y su rapidez de variación. Con la pregunta 7 se explora si los estudiantes relacionan la expresión $\Delta y = 0$ con su equivalente: $f(x_i + \Delta x) - f(x_i) = 0$. La pregunta 8 se refiere a un problema, en el se solicita la rapidez de la variación de un cuerpo en movimiento a partir de su fórmula.

De acuerdo con los resultados globales, el 78% de los estudiantes desarrollaron una idea de variación aceptables casi todos coinciden en que son cambios. El 17 % de los estudiantes indican que los cambios se miden por medio de restas, estos estudiantes lograron desarrollar la idea correcta. El 26% de los estudiantes contestaron que los cambios se miden por medio de gráficos, casi el 35% de los estudiantes contestó que los cambios se miden por medio de intervalos, un 17% de estudiantes indica que los cambios se miden por medio de funciones.

Respecto de los procedimientos para cuantificar los cambios: $s(t_i{+}\Delta t)$- $s(t_i)$, en los procedimientos de evaluación en $s(t_i)$ y $s(t_i + \Delta t)$ el 14% de las realizaron s, la mayoría tuvieron dificultades en la evaluación, en especial en la utilización correcta de los exponentes, mayores dificultades presentan en la evaluación de $s(t_i{+}\Delta t)$ principalmente en el desarrollo de binomios al cuadrado o al cubo, otros presentaron dificultades en la obtención de los Δs, algunos estudiantes omitieron u olvidaron la evaluación de alguno de los términos de s_f - s_i. En cuanto a los procedimientos para calcular cambios por medios gráficos y analíticos se obtuvieron los siguientes resultados: respecto del aspecto gráfico el 24 % en promedio de los estudiantes calculan los cambios correctamente, la mayoría de los estudiantes confundieron los cambios de la variable independiente con los cambios de la variable dependiente. En el cálculo por medios analíticos, en particular en donde la variable dependiente no cambia, el 26% de los estudiantes lo hicieron correctamente, un 21% de los estudiantes solamente repiten la posición inicial dada.

Respecto a la determinación de mayor, menor o rapidez nula, a partir de una tabla, los resultados indican que la idea de mayor rapidez es clara para casi el 28% de los estudiantes. Respecto de la idea de menor rapidez el 30% logran reconocerla en un gráfico y la no variación el 69%. Al explorar la relación entre la expresión $dy = 0$ y sus expresiones analíticas equivalente, es decir cuando $s(t + \Delta t)$-$s(t) = 0$ o bien $s(t_i + \Delta t)$- $s(t_i) = 0$, ninguno de los estudiantes da una argumentación convincente, aunque el 78% muestran tener nociones correctas acerca de la interpretación de la notación.

En el tercer examen se plantearon seis preguntas, las primeras dos exploran la noción de velocidad instantánea, la tercera explora la habilidad de en la interpretación de la simbología utilizada en la definición de derivada sobre la base de su interpretación gráfica. En la pregunta cuatro se investiga la habilidad para operar numérica y algebraicamente con la velocidad instantánea. En la pregunta seis se investiga el desarrollo de habilidades en la obtención de diferenciales de cinco funciones mayoritariamente algebraicas

De acuerdo con los resultados el 61% de los estudiantes desarrollaron una idea de velocidad instantánea relacionándola con los *cambios infinitamente pequeños*, y *a la velocidad de una partícula en un instante*, en cuanto a la estrategia básica para calcular la velocidad instantánea la mayoría de los estudiantes se inclinaron por la que consiste en la *búsqueda del limite de* $\Delta s/\Delta t$ *cuando* Δt *es infinitamente pequeño.*

En la pregunta tres, el 26% en promedio de los estudiantes mostraron evidencias de poder relacionar e interpretar la expresión de la definición de la derivada: con la velocidad instantánea, la pendiente de la tangente, la velocidad media o pendiente de la secante; los demás estudiantes tuvieron dificultades. Al correlacionar la definición de derivada expresada mediante el límite del cociente incremental con su representación gráfica, la mitad de los estudiantes todavía señalan que la derivada se mide en dos puntos. En la mitad de los estudiantes que participaron en el curso se desarrolló la idea de que cuando $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta s/\Delta t$ es un infinitesimal. Casi la mitad de los estudiantes logran identificar correctamente la expresión que se emplea para obtener la pendiente de la secante: $m = \Delta s/\Delta t$; en la identificación de la pendiente de la tangente se observan confusiones pues seis estudiantes consideraron que $\Delta s/\Delta t = ds/dt$. Parece que la relación entre los símbolos empleados y las ideas matemáticas que representan no son consistentes, pues Δs representa cambios grandes y ds cambios infinitamente pequeños.

Las preguntas cuatro y cinco se desprenden de un problema sobre el cálculo de la velocidad instantánea, en la primera se pide obtener ésta por la vía numérica y en la segunda por la vía algebraica. En cuanto a la primera los estudiantes dieron tres tipos de respuestas: aquéllos que en general realizaron los procedimientos numéricos aproximándose a $t_i = 2$ correctamente, tanto por la derecha como por la izquierda, calculando el Δt correspondiente; pero cometieron errores al aplicar la ley de signos y hubo quien solo le faltó inferir correctamente el límite de sucesiones de cocientes. Los del segundo tipo calculan correctamente el Δt pero se equivocan al calcular el Δs y los del tercer tipo no contestaron. En el primero se ubicaron tres estudiantes, en el segundo trece y en el tercero siete. En cuanto al cálculo algebraico las dificultades fueron mayores, solamente dos estudiantes la realizan correctamente, ocho estudiantes se equivocaron y trece no contestaron; las equivocaciones frecuentes se manifestaron en las evaluaciones de $s(t_i)$ y $s(t_i + \Delta t)$, en el desarrollo del binomio al cuadrado, en la utilización de los signos y las operaciones algebraicas como la multiplicación de polinomios.

Finalmente en la obtención de diferenciales mediante formulas, el 52% de los estudiantes lograron obtener la diferencial de: $y = 10.5$, el 47% obtienen correctamente la diferencial de: $y = 8x$, el 26 % obtienen correctamente la diferencial de: $y = 2x^5$, en la diferencial de la función $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + \pi$ se observa que las complicaciones se incrementan cuando los polinomios contienen un mayor numero de términos y aún mas complicaciones surgen cuando se trata de obtener diferenciales de funciones bajo radicales.

En el **cuarto cuestionario** se plantearon siete preguntas, las dos primeras exploran la noción de diferencial y de derivada. La segunda explora la habilidad de los estudiantes en la utilización de las reglas básicas de derivación y la obtención de las derivadas por medio de diferenciales. La pregunta tres explora sobre la base de un gráfico, la idea de rapidez de crecimiento de la curva y la comprobación de la respuesta. En la pregunta cuatro, sobre la base de dos gráficos se explora dos aspectos la habilidad del estudiante para calcular la pendiente en un punto de la curva y la habilidad en la obtención de la ecuación de la tangente a la curva en un punto dado. La pregunta cinco explora por medio del análisis de la gráfica de $f(x)$, la habilidad del estudiante para representar el gráfico de $f'(x)$. En la pregunta seis se explora la habilidad del estudiante para identificar en cuál o cuáles de los gráficos propuestos se cumple que $dy/dx=0$ en $x= a$.

Respecto de la noción de diferencial el 78% de los estudiantes desarrollaron esta idea aceptablemente. En la noción de derivada se observo que el 65% de los estudiantes desarrolló ideas aceptables acerca de la derivada, un 48% aproximadamente la asocian con la razón o la división entre diferenciales y un 17% la asocian con el cambio o la velocidad instantánea.

En lo que corresponde al desarrollo de habilidades en la utilización de las reglas básicas de derivación y en la obtención de la derivada por medio de diferenciales, una revisión global a los procedimientos empleados para obtener derivadas nos muestra que, una cantidad significativa de estudiantes, pueden calcular derivadas de funciones polinómiales sencillas como es el caso de las siguientes funciones: **a)** $y= 2- 5x + 3x^2$, el 30% de los estudiantes,

b) $s(t)=1/2t^2-80t$, el 30% de los estudiantes; en cambio cuando se trata de hallar derivadas de productos, de cociente de funciones o de funciones racionales surgen las siguientes complicaciones: equivocaciones al utilizar la regla adecuada de derivación, se equivocan al emplear correctamente la regla de derivación, se equivocan al realizar procedimientos algebraicos, además muestran dificultades en las operaciones con los signos y los exponentes.

Con lo que respecta a la idea de rapidez de crecimiento de una curva, el 65% de los estudiantes contestaron correctamente y con lo que respecta a la argumentación de sus respuestas aproximadamente el 21.7 % de los estudiantes intentaron darla pero estos fueron poco convincentes.

Respecto de la habilidad para calcular la pendiente en un punto de la curva solamente un estudiante pudo calcularla, el 34.7% dieron resultados poco relevantes, la mayoría de ellos ignoraron la fórmula de la función y decidieron contestar buscando alguna relación en el gráfico dado, se observó que el 39% de los estudiantes no contestaron. En esta misma pregunta pero ahora relacionada con la habilidad del estudiante para obtener la ecuación de la tangente a la curva en un punto dado, solamente un estudiante que representa el 4.3% de los participantes obtuvo una aproximación de la ecuación de la pendiente bastante aceptable, se observó que aproximadamente el 74% de los estudiantes no contestaron la pregunta.

En la habilidad para analizar el gráfico de la función de $f(x)$, se observó que en el **crecimiento** de la función, casi el 40% de los estudiantes lo identifican correctamente. El 47.8 % de los conservan confusiones como: confunden la noción de función positiva con la noción de función creciente, tienen dificultades con el manejo de la notación de intervalos. En el **decrecimiento** de $f(x)$, se observó que el 30% de los estudiantes tienen idea clara acerca de ello. El 56% de los conservan muchas confusiones entre las que destacan las siguientes: confunden la noción de función negativa con la de función decreciente, tienen dificultades con el manejo de la notación de intervalos y además asocian el decrecimiento con el menor valor de la ordenada. Con lo que respecta al **máximo** de $f(x)$, el 34% de los estudiantes tienen idea acerca del máximo de $f(x)$. El 52% muestran confusiones como: contestan que en donde $f(x)$ es cero tiene un máximo, utilizan intervalos y otros dan como máximo a la ordenada máxima sin mencionar a que valor de x corresponde, no contestaron el 13% de los estudiantes. En el **mínimo** de la función el 56% de los estudiantes muestran tener clara esa idea. El 21.7% muestran confusiones como: la utilización de intervalos en vez de puntos.

Respecta a la habilidad para esbozar la gráfica de $f'(x)$ a partir del análisis del comportamiento de la gráfica de $f(x)$, sólo un estudiante obtuvo correctamente los intervalos en donde la derivada es **negativa**, otro determinó solamente un intervalo, se observó que la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para obtener los intervalos en donde la gráfica de la derivada es negativa. En la determinación de los intervalos en donde la derivada es **positiva**, un estudiante determina correctamente el intervalo. Acerca de los puntos en donde la derivada se **anula**, el 52% de los participantes parecen tener ideas aceptables. Se notó que algunos estudiantes obtuvieron los intervalos sin haber dibujado la gráfica de $f'(x)$, estos estudiantes no argumentan sus respuestas.

Respecto de la habilidad para identificar en una gráfica dónde se cumple que $dy/dx=0$ en $x = a$, se observó lo siguiente: el 34% de los estudiantes identificaron correctamente los tres puntos para los cuales la gráfica de la derivada se anula, el 13% de señalaron solamente dos puntos, no señalaron la gráfica en donde tiene punto de inflexión. El resto aunque señalan algunos otros que son correctos, también señalan otros que son incorrectos, estas pueden ser manifestaciones de sus inconsistencias conceptuales acerca de la noción de nulidad de $f'(x)$ en $x = a$.

Referencias bibliográficas

Cáceres, T.: 1997. *Estudio exploratorio de las ideas variacionales en estudiantes del bachillerato y principiantes universitarios.* Tesis de maestría. Inédita. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN.

Cantoral, R.: 1997. *Pensamiento y lenguaje variacional* (inédito). Seminario de investigación de área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN.

Dolores, C.: 1989. Algunos Obstáculos epistemológicos relativos a la noción de derivada. *Memorias de la 3ª. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* San José de Costa Rica, C.A.

Dolores, C.: 1996. *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis Doctoral. Inédita. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro.

Dolores, C.: 1998. *Una introducción a la derivada a través de la variación.* Libro aceptado para su publicación en la Serie Cuadernos Didácticos por el Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.

Tall, D.: 1991. The Psicology of Advanced Mathematical Thinking. Del libro *Advanced Mathematical Thinking,* Tall D. (Editor), Kluwer Academic Publishers, pp. 3-21.

Vigotsky, L.: 1988. *Pensamiento y lenguaje.* Ediciones Quinto Sol. México D. F.

Vinner, S.: 1992. The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. Del libro *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, editado por Harel & Dubinsky. MAA Notes, Volumen 25, pp. 195-213.

Una investigación educativa sobre inecuaciones lineales con alumnos del secundario

María Rosa Berraondo Marcos
Departamento de Matemática, Universidad Nacional de San Luis
Argentina

Resumen

En las escuelas secundarias argentinas existen muchos factores que inciden en la problemática de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas.

Por pertenecer al Proyecto Educativo "Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática", entendiendo que un tema poco trabajado en la escuela es inecuaciones lineales y contando con el asesoramiento de la Dra. Rosa María Farfán nos propusimos abordar el tema, llevando a cabo una investigación en el área de la Matemática Educativa usando la metodología de Ingeniería Didáctica trabajamos con un grupo de alumnos de 4º año (16 años) de Educación Secundaria del Instituto Privado Aleluya de la Ciudad de San Luis en la República Argentina.

Marco Teórico

La matemática Educativa, como dice Rosa María Farfán Marquez, podría definirse como "la ciencia que estudia para un campo particular (las matemáticas), los fenómenos de su enseñanza las condiciones de la transmisión de la "cultura" propia de una institución (la científica) y las condiciones de la adquisición de conocimientos del que aprende".

Como ya se sabe, la base, el punto inicial de esta problemática es la reflexión sobre los saberes. En este trabajo nos propusimos observar y anotar lo que sucedía en la situación aúlica con el objeto de reflexionar sobre las condiciones y la naturaleza de los aprendizajes.

El campo a teorizar de la matemática educativa parte de los problemas que surgen de la interacción entre los objetos de la matemática escolar y los sujetos partícipes del ciclo educativo. Las articulaciones disponibles determinan el universo de acción del discurso matemático escolar.

Como dice R. CANTORAL "La palabra transponer, del latín "Transponere" significa poner una cosa mas allá, en un sitio distinto del lugar que ocupaba. El término Transposición didáctica se refiere así, en lo general al proceso mediante el cual tiene lugar la acción de transponer un saber hacia un sitio didáctico digamosló así: "llevar el saber al ámbito escolar".

Ives, CHEVALLARD, es quien inició estudios en este campo de las matemáticas, y los ha llamado Transformación Didáctica. Se puede describir la transposición didáctica como un trabajo que lleva el saber erudito al saber a enseñar, que aparece en los textos escolares.

Pero la transposición no se detiene aquí, sino que impregna todos los actos de la enseñanza.

La despersonalización, es el precio que se paga para que el saber erudito abandone a su productor y se convierta en matemática escolar. Los padres cultivados, los directivos de las instituciones escolares, los desarrolladores de curriculum, las autoridades políticas, etc. que se interesan por la enseñanza, forman lo que Chevallard llama la noosfera, lugar donde se piensa el funcionamiento didáctico, la esfera de los que saben. Pero este esfuerzo no produce más que un desplazamiento de las dificultades, ya que solo el conjunto solidario de características de una situación de enseñanza puede producir efectos.

La epistemología juega un papel protagónico en el nivel teórico y metodológico de la disciplina, apartir de la consideración de la noción de obstáculo epistemológico, retomada de BACHELARD en su explicación sobre la construcción del conocimiento científico.

Los objetivos de los estudios de la didática consiste en describir y explicar las actividades ligadas a la comunicación de conocimientos y las transformaciones de los sujetos protagonistas de esta comunicación, así como las transformaciones del conocimiento mismo.

La teoria de situaciones didácticas: Fué introducida por GUY BROUSSEAU, en ella se toma como objeto de estudio todo el sistema didáctico y se desglosan las “situaciones”.

El profesor debe presentar al alumno “situaciones problemáticas” que lo hagan trabajar, hablar, reflexionar, evolucionar etc., y que una vez aceptadas como propios le permitan adquirir un nuevo conocimiento. El alumno debe construir una noción a partir de un conjunto de problemas, en donde tal noción funciona, o sea el alumno aprenderá adaptándose a un medio, factor de dificultades y desequilibrios.

La ingeniería didáctica surge en la década de los 80 en analogía con el trabajo de los Ingenieros, en el sentido que si bien se apoya en resultados científicos, involucra también toma de decisiones y control sobre diversas componentes del proceso.

La Ingeniería didáctica se sustenta en las teorías de la transposición didáctica y de las situaciones didácticas.

En nuestro caso hemos pensado en Ingeniería Didáctica como una metodología de investigación para guiar las experimentaciones en clase.

La Ingeniería Didáctica

En la primera etapa diagnóstica analizamos las tres fases, didáctica, epistemológica y cognitiva.

Estudio didáctico la concepción que de la matemática se tenga, pernea la de su enseñanza, independientemente de los estudiantes a los que se dirige.

Estudio epistemológico La naturaleza del concepto de función es un extremo complejo, su desarrollo histórico se ha hecho casi a la par del ser humano.

El concepto de desigualdad si bien pensamos es mas moderno, también plantea serias dificultades.

Estudio cognitivo La función se presenta con procesos cuyos objetos son los números.

Si los estudiantes logran incorporar elementos gráficos o visuales como parte de su actividad al enfrentar problemas, podrán manejar mejor el concepto de función y el de inecuación.

El tema inecuaciones lineales esta fuertemente influenciado por las ecuaciones lineales y por el concepto de variable.

Como en el grupo investigador hay docentes secundarios en ejercicio y en particular la Profesora del curso donde se llevaría a cabo la investigación pudimos tener una visión del grupo de alumnas (niñas de 16 años), de la escuela, una escuela privada con orientación católica apostólica romana, en la cual se respetan los programas oficiales. Respecto a las alumnas la Profesora manifestó que conocen el tema de funciones, han trabajado el año anterior con ecuaciones lineales y con sistemas de ecuaciones encontrando soluciones analíticas y gráficas.

Pasamos a realizar la segunda etapa: diseño de la ingeniería: En ella y luego de muchas discusiones pudimos elaborar un plan de actividades de acuerdo a los propósitos y objetivos planteados.

Nos propusimos una actividad que tiene que ver con una situación cotidiana en el medio, la compra de abonos escolares y, supusimos erroneamente, el conocimiento y uso del sistema de abonos escolares para transporte público por parte de las alumnas del establecimiento.

Actividad Nº 1

Para las personas que viajan normalmente en S.A.I.S.A., la empresa propone las siguientes formas de pago:

Forma A: Pagar cada viaje a $0,70

Forma B: Comprar un abono a $ 22 para 50 viajes

Designaremos con una X el número de viajes y con f(x) el costo de x viajes pagados en forma A y con el g(x) el costo de x viajes según la forma B

1.-Completar la siguiente tabla:

X	5	18	30	42	50
f(x)					
g(x)					

2.-Expresar f(x) y g(x) en función de x . Graficarlas.

3.-Determinar cuando conviene cada una de las formas

4.-Espresar analíticamente cuando conviene la forma B con respecto a la form A.

Nos preguntamos ¿estas alumnas han internalizado el concepto de función?

Supuesto que manejan ecuaciones lineales de la situación planteada ¿podrán a empezar a adquirir el concepto de desigualdad?.

También planteamos una segunda actividad:

Actividad Nº 2

Resolver:

a) $-x+3 \leq x+2$

b) $\dfrac{4x+8}{x+5} < o$

Finalmente pasamos a la tercera etapa puesta en escena y análisis de resultados. Fuimos todos al aula prevista, los alumnos se agruparon de a 2 o 3 y cada uno de nosotros (observadores docentes) acompañó a un grupo, tomando nota de lo que sucedía.

La profesora nos presentó como docentes interesados en realizar una experiencia didáctica. También planteó a los alumnos que cada grupo realizase un trabajo autónomo y que al finalizar íbamos a hacer una puesta en común a fin de comparar resultados obtenidos y procedimientos empleados. (Se estableció un contrato didáctico para la situación)

Durante el desarrollo de la Actividad 1 , se pudo notar que las alumnas no leen las consignas en su totalidad (tal vez el enunciado era largo). Asimismo vimos que las alumnas encuentran dificultades en la comprensión del problema porque no conocen el funcionamiento del sistema de abonos escolares (Las alumnas o vienen caminando a la escuela, o los padres las traen en vehículos, pero no usan transportes públicos). Este desconocimiento impide representar la función, con una explicación simple de funcionamiento del abono, (por parte de la profesora) se soluciona el inconveniente.

Al hacer la puesta común, aparece que solo en un grupo la gráfica fué usada como herramienta de solución pero solo porque el grupo no pudo arribar a la solución por otro camino. Otro grupo, en cambio logró una solución analítica muy completa, pero recién en la discusión logran la representación gráfica.

Muy pocos grupos resolvieron totalmente la actividad. Solo el grupo "graficó" arriba a la comparación sugerida en el punto 4, pero le faltan argumentos para defender su posición. Luego de la puesta en común pasaron a resolver la actividad 2.

Los estudiantes tendían a sobrevalorizar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales gráficos.

El tiempo estipulado para la clase no permitió completar totalmente esta actividad, ni realizar la puesta en común.

Luego el grupo se abocó a analizar los resultados obtenidos.

Se establecieron las distintas estrategias que usaron los alumnos tanto para pasar del lenguaje verbal a las funciones cuanto para resolver la situación planteada una vez entendida.

El curso resultó bastante heterogéneo y por lo tanto muy rico. Los alumnos no tenían internalizados todos los conocimientos que se habían supuesto en la etapa diagnóstica.

Conclusiones

1.- Hay que trabajar más la etapa diagnóstica.

2.- La modelización es un proceso clave muy poco trabajado en el aula.

3.- El concepto de variable y el de inecuación llevan mucho tiempo de trabajo para internalizarlos.

4.- La reflexión sobre el trabajo debe ser una tarea cotidiana y no debería sorprender a los alumnos.

5.- La reflexión sobre la historia puede ayudar a los profesores a comprender mejor como se construyen los conceptos.

6.- Las situaciones problemáticas clave de la enseñanza, deben permitir explotar la capacidad de generalización en todos los niveles.

Bibliografía

FARFAN, Rosa María (1997). Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio. Grupo Editorial Iberoamérica.

FARFAN, Rosa María. Perspectivas y métodos de investigación en Matemática Educativa. Número 2 de la Serie: Antologías. Programa Editorial. Área de Educación Superior. CINVES-TAV - I.P.N.. - MEXICO.

CANTORAL URIZA, Ricardo - Notas sobre los acercamientos teóricos de la escuela francesa en didáctica de las matemáticas - Serie: Cuadernos doctorales - Porgrama Editorial - Area de Educación Superior - Cinvestav - MEXICO.

BINDSTEIN, M. y HANFLING, M.. Matemática 8. Editorial Aique. - ARGENTINA

CARIONE, N.; CARRANZAS, S.; DIÑEIRO, M. ; LATORRE, M.; TRAMA, E.. Matemática 3. Editorial Santillana.- ARGENTINA

Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa

Ricardo Cantoral
AES–Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Resumen

Este artículo presenta parcialmente lo que fue discutido en la conferencia plenaria de Relme-13 en la Universidad Autónoma de Santo Domingo. En aquella ocasión, pretendimos tratar, desde una perspectiva sociocultural, la cuestión de la formación de instituciones y de organizaciones humanas entorno del conocimiento matemático escolar. Este fenómeno lo caracterizamos entonces mediante la emergencia de escuelas del pensamiento en ámbitos regionales. Centramos la atención en algunos aspectos como la diversidad de visiones teóricas, la formación de organizaciones gremiales en un sentido profesional, en el diseño de acercamientos particularmente adaptados a los contextos regionales y al nacimiento de una escuela mas amplia, digamos incluyente que hemos denominado escuela latinoamericana de matemática educativa en el sentido de un verdadero programa de investigación en marcha.

Tratamos de caracterizar en aquella presentación la evolución de algunas problemáticas de investigación al seno de nuestra escuela tomando el acercamiento de los estudios de caso según el enfoque socioepistemológico del saber. Después de la presentación, algunos colegas me preguntaron sobre el programa de desarrollo de dicha escuela y respondí que como todo proceso humano, su evolución es una *construcción social* y en consecuencia estabamos en diferentes maneras involucrados en su desarrollo. Este escrito es pues sólo un punto partida para clarificar y debatir sobre la construcción de un tal programa de investigación en matemática educativa.

Presentación

Empecemos por una revisión parcial del estado actual de la investigación en didáctica del análisis. Condiciona este escrito la visión que proporciona la investigación desarrollada actualmente por nuestro propio grupo de trabajo en Latinoamérica. Esta presentación busca entonces, como primer paso, exponer algunas observaciones previas que limitan y caracterizan a esta revisión. i) Debe ser lo suficientemente explícita como para mostrar el avance de las investigaciones en el campo incluyendo la mayor variedad de escuelas, ii) ha de atender las cuestiones anteriormente planteadas, pero también, iii) quiere ser descriptiva, en tanto que su presentación contribuya a reconocer un cierto estado del arte en distintos sitios del orbe. Además, este panorama de la investigación en el campo de la didáctica del análisis, como podrá fácilmente apreciarse, iv) no será dado en forma neutra, pues habrá que escoger evidentemente un punto de vista y asumir una postura teórica al respecto. Escogí, como es natural, los ejemplos que tratan de lo que me resulta más familiar, de aquello en lo que personalmente he estado involucrado.

Iniciemos con un recorrido de las investigaciones desarrolladas en los últimos veinte años. No seremos exhaustivos, pues sólo citaremos algunos estudios como referencia de los aspectos que pretendemos caracterizar.

Reflexiones sobre un paradigma: La investigación en didáctica del análisis

La enseñanza del análisis matemático o del cálculo según la tradición anglosajona, se concibe de múltiples formas según se trate de épocas, niveles educativos, sistemas escolares, o regiones y países. Cambia drásticamente su aspecto con el paso del tiempo (no se dispensa la misma enseñanza durante el siglo XIX que en el transcurso del siglo XX);

suele modificarse también de un ciclo escolar a otro (es notable su diferencia cuando se le introduce a la educación secundaria respecto de aquella que se utiliza en la universidad); y puede transformar su fisonomía según el sistema educativo que le cobije (el sistema de enseñanza para la formación en ciencias sociales difiere de aquel para la formación de ingenieros); también toma rasgos distintivos según el país o la región que lo abrigue (como los estilos literarios, existen también las tradiciones educativas. La variedad de modelos de enseñanza se confirma al revisar los textos, los programas, las declaraciones de los ministerios, etcétera. Su enseñanza en la metrópoli suele ser distinta que aquella dictada en las colonias). Algunos ejemplos ilustrarán mejor lo que hemos querido decir.

¿Cómo se asume la noción de curva? En el texto de L'Hôpital: *una poligonal infinita con todos sus lados infinitamente pequeños...* En el texto de Lacroix: *una sucesión infinita de puntos contiguos...* En los escritos de Newton: *la trayectoria de un punto en movimiento...* En el texto de Granville: *el lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición...* ¿Cómo se introduce la noción de límite? En la enseñanza inicial de la escuela polaca: *el límite de s_n, el límite de una sucesión numérica* En la enseñanza americana: *el límite de f(x), una función real de variable real* ¿Cómo entienden la noción de derivada? Los estudiantes de secundaria: *un procedimiento, la regla de los cuatro pasos* Los estudiantes universitarios: *un cálculo, el límite del cociente incremental* ¿Cómo se explica la noción de función? A los futuros economistas: *como una relación entre variables, consideremos la función de costos la depende de* ... A los futuros matemáticos: *como una correspondencia arbitraria, sea f una función acotada sobre los reales, ...*

Empero, a pesar de la diversidad descrita, es posible localizar elementos comunes y una clara visión dominante respecto de la concepción y estructura de las propuestas vigentes en la enseñanza del análisis matemático. Quizá la visión dominante, la más extendida entre los cursos introductorios, consista en asumir al análisis escolar como un aparato simbólico que opera sobre variables, que se ocupa de su optimización, de sus derivadas e integrales, así como de resolver problemas que involucren tasas de crecimiento, cálculos de longitud de curvas, áreas y volúmenes.

Una concepción alternativa que suele ubicarse en la enseñanza universitaria y cohabita con la anterior en algunos momentos y circunstancias, concibe al análisis matemático como un aparato formal que actúa sobre funciones reales y que antecede a su formalización, centra su atención en los procesos infinitos y en las situaciones límite. Estudia elementos de la construcción del número real, entiende a la función en el sentido de Dirichlet - Bourbuaki, mientras que a la derivada y a la integral las asume como formas particulares de límite. Se ocupa de estudiar diversas versiones de los teoremas de los medios y de iniciar el estudio de la convergencia de las series infinitas. Una tercera concepción, quizá menos extendida en la totalidad de sistemas escolares, entiende al análisis escolar como un terreno para la experimentación que puede sacar provecho de la tecnología avanzada, se trabaja sobre el reconocimiento de patrones, el empleo de estimaciones y aproximaciones y se nutre fuertemente de la visualización.

A pesar de tal diversidad de acercamientos, la estructura temática de los primeros cursos de análisis suele tener aspectos invariantes. Citamos entre ellos al ordenamiento temático. Se inicia con el estudio de los conjuntos de números, se sigue de una introducción a las funciones y sus límites, se analiza la continuidad como una propiedad puntual y global de las funciones y se termina con la derivada y la integral. En un segundo momento, ya sea en los cursos posteriores o hacia el final de los cursos introductorios, se profundiza sobre los mismos temas y se extienden hacia los números naturales o las varias variables reales (casi siempre tres), sus métodos llegan a las ecuaciones diferenciales y aparecen en forma explícita los problemas de convergencia de series infinitas y el estudio de las series de potencias. A causa de que la enseñanza del cálculo, en cualquiera de las tres vertientes descritas, se apoya en el programa de Cauchy para la fundamentación del análisis matemático, sus acercamientos se vertebran sobre dos conceptos centrales: El concepto de límite y la noción de función. En torno de ellos se entreteje el resto del cuerpo teórico.

Investigaciones sobre didáctica del análisis

Discutiremos a continuación algunos de los principales acercamiento a la investigación en el campo, procurando atender simultáneamente a las tres primeras de las preguntas planteadas en un inicio y dejaremos para el espacio de consideraciones finales la cuarta de las cuestiones. De modo que de momento procuraremos desarrollar las siguientes: ¿Cuáles son las investigaciones más relevantes sobre didáctica del análisis de los últimos años? ¿De qué manera la investigación influye en el desarrollo de la enseñanza? y ¿cuáles son las investigaciones que has realizado?

Durante las últimas dos décadas hemos visto aparecer al seno de la comunidad de educadores matemáticos, didactas de la matemática o de los matemáticos educativos (según se trate de la tradición de escuela[1] que les cobije), sectores académicos universitarios que se ocupan del estudio de los procesos del pensamiento llamados avanzados en los temas matemáticos de la educación superior. Las temáticas que abordan son posteriores al álgebra básica, digamos que suelen tratar con temáticas que van del análisis en adelante. Este vertiginoso crecimiento ha sido posible, en nuestra opinión, gracias a dos factores principales; el primero, debido al creciente interés de los matemáticos profesionales en los asuntos de la enseñanza y del aprendizaje, y el segundo, a causa de la estabilidad y madurez que han alcanzado comunidades de investigación que se organizan en torno de grupos académicos con paradigma propio, como es el caso del PME o del Clame.

Este doble proceso de desarrollo que se nutre de la reflexión matemática al seno de lo didáctico por una parte y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción social e individual del conocimiento, ha sido en nuestra opinión, una de las principales y más recientes contribuciones de nuestra disciplina: La Matemática Educativa. En esta ocasión pretendemos señalar algunos de los aspectos que caracterizan a la investigación en didáctica del análisis y a su efecto en las prácticas educativas. Incluiremos también en rubro a un programa de investigación en curso al seno de nuestro grupo de trabajo. Al programa de investigación le hemos dado en llamar, *pensamiento y lenguaje variacional*, con el cual se brinda una oportunidad de tender puentes entre la investigación y la realidad del aula.

Una primera observación de carácter general es posible extraer del estudio de las diversas revisiones escritas al momento (Artigue, 1998; Cantoral et al, 1991, o Tall, 1991) que las investigaciones centradas en didáctica del análisis se apoyan en distintas metáforas del aprendizaje que comparten, en algún sentido, aspectos de la tesis central que proporciona la epistemología genética relativa al desarrollo del pensamiento. Otra coincidencia que debemos apuntar consiste en el hecho de que la mayoría de las investigaciones reportadas se han centrado en problemáticas que se ocupan de la matemática relevante en la enseñanza superior, asumiendo que la matemática interviene en ese nivel casi exclusivamente como discipli-

1 El nombre de Matemática Educativa da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de Mathematics Education, mientras que en la Europa continental le han llamado Didáctica de las Matemáticas, Didactique des Mathématiques, Didaktik der Mathematik, por citar algunas de las escuelas más dinámicas. En esta época se acepta como una premisa funcional el que nuestra disciplina estudia los procesos de constitución, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. No se reduce a la búsqueda de una "buena manera" de enseñar una cierta noción fijada previamente, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber aunque este objetivo no sea alcanzado. La investigación en nuestro campo se propone afectar positivamente al sistema didáctico; mejorar los métodos y contenidos de enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos. En suma, buscamos tener una mayor gestión de las regularidades del funcionamiento de las situaciones de enseñanza, de modo que no sólo tratamos con la matemática como un tema escolar, sino también, queremos entender cómo y por qué se aprende, y cómo y por qué se estructura el conocimiento con fines didácticos.

na principal de enseñanza olvidando un hecho fundamental que caracteriza al sistema didáctico de la educación superior; también y quizá con mayor fuerza, la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación. De este modo es posible señalar una limitación metodológica a la investigación en didáctica del análisis que considera a los objetos matemáticos: número, límite, función, derivada, integral, ... con entidades con vida propia. Desligadas, parcial o totalmente de otros dominios del conocimiento y de una variedad de niveles de tratamiento. Digámoslo así, la tendencia dominante en la investigación contemporánea analiza el estatus de los conceptos entre los estudiantes sin estudiar la relación que dichos conceptos tienen con prácticas socialmente compartidas ni con sentidos y significados extra matemáticos.

La línea de investigación que desarrollamos en nuestro grupo de investigación considera, por el contrario, como necesidad básica el dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple, que en la jerga le nombramos "la cuarta dimensión", le hemos llamado formalmente el *acercamiento socioepistemológico*[2]. En este sentido, el pensamiento y el lenguaje variacional es entendido como una línea de investigación que, ubicada al seno del tal acercamiento, permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos.

En términos generales, en las distintas aproximaciones a la investigación se acepta que el desarrollo de habilidades y destrezas entre los estudiantes para acceder a los elementos del análisis, precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Pues supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico ampliamente documentado. Esa ruptura además, y esto es un punto de partida de nuestra línea de investigación, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación; sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio.

Se considera también que para acceder al estilo de pensamiento que se precisa en análisis matemático se requiere entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. Se asumen por ejemplo que el conocimiento elemental de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis. Desde el punto de vista del sistema de enseñanza, tradicionalmente el curso que antecede al análisis es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet - Bourbuaki. La enseñanza tiende a sobre valorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas.

En su inmensa mayoría, las investigaciones en didáctica se han ocupado de estudiar y documentar las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan al estudio de las ideas del análisis matemático. Se ha querido obtener toda clase de evidencia empírica susceptible de

---

2 Este acercamiento fue presentado por el autor en tres reuniones académicas, como plática inaugural del Seminario de Investigación en Matemática Educativa del Área de Educación Superior del Cinvestav en México y como conferencia plenaria en la Conference on Research in Mathematics Education en EUA, ambas durante septiembre de 1997, y en una conferencia magistral de las VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática en septiembre de 1998.

explicar el origen de las dificultades entre los alumnos. Una tendencia mayoritaria en este programa, sostiene una orientación cognoscitivista sobre los procesos del pensamiento llamados avanzados. Asumen que el pensamiento matemático avanzado se entiende en un sentido amplio, referido a los procesos del pensamiento sobre tópicos llamados avanzados en matemáticas - digamos que posteriores al álgebra básica - y respecto de procesos avanzados del pensamiento como, abstracción, generalización, prueba, visualización y razonamiento bajo hipótesis. Aunque la noción misma de concepto matemático o de objeto matemático no suele ser sometida a una revisión teórica exhaustiva.

La gran mayoría de las investigaciones que se centran en tópicos de análisis matemático, se ocupan de estudiar las nociones de número real, función, límite, continuidad, diferenciación, integración y ecuaciones diferenciales. Pues aunque se reconozca que no existen diferencias claras que separen los conceptos de la matemática avanzada de los de la llamada matemática elemental, dado que cada concepto avanzado se basa en conceptos más elementales; se asume que los conceptos de la matemática avanzada tienen una complejidad intrínseca, por ejemplo los estudiantes parece que no pueden comprender el significado de una ecuación diferencial a menos que hayan entendido los conceptos de diferenciación, ni pueden comprender las ideas detrás de los métodos de solución sin un entendimiento de integración ligado a ideas visuales y numéricas. Similarmente, la diferenciación e integración suponen un entendimiento del concepto de función, y éste supone un entendimiento de la noción de variable, la cuál presupone el concepto de número. Cada concepto tiene un alto grado de complejidad y solamente puede ser comprendido dentro de una red simultánea de otros conceptos.

En tales revisiones se suelen hacer diversas clasificaciones, unas temáticas y otras relativas respecto de los procesos involucrados. Por ejemplo, se dice que la investigación sobre pensamiento matemático avanzado se ha centrado en la abstracción, prueba y resolución de problemas, pero también se señala que la investigación trata principalmente del análisis matemático, las ecuaciones diferenciales, la inducción matemática, el tratamiento matemático del infinito y del álgebra lineal. Citaremos enseguida a algunas de las aproximaciones dominantes en la literatura. Los tres primeros comparten una fuerte inclinación cognitiva, desatendiendo aspectos culturales o sociales como pudieran ser prácticas sociales de referencia, o la vida de las instituciones escolares y científicas.

Los acercamientos estadísticos de prueba objetiva

Entres las primeras investigaciones que fueron objeto de alguna revisiones referidas anteriormente, encontramos los acercamientos estadísticos de corte operativo. Los investigadores representativos de esta aproximación son Anderson y Orton.

Sus trabajos se fundamentan en la estadística y sus muestras incluyen un gran número de estudiantes de los niveles medio y superior. El mensaje general que envían estos autores es que mediante una enseñanza más persistente, más localizada en aliviar dificultades podría remediar los problemas detectados en sus estudios, es decir si supiéramos que ciertos errores son factibles, entonces se podrían eliminar atendiéndoles con más cuidado en su enseñanza. Por ejemplo en (Anderson, 1979) se desarrolla un curso enfatizando la dimensión que condiciona la certeza de los resultados del análisis y al mismo tiempo desalienta a los estudiantes de ciertas intuiciones, conduciéndolos, según se dice, a la necesidad de la demostración. Se afirma que el método de la prueba objetiva produce información acerca de las concepciones erróneas de los estudiantes en el análisis y en esa medida se podría estar en mejores condiciones de producir aprendizajes. Orton por su parte investigó ya sobre algunos aspectos del entendimiento en el análisis elemental entre estudiantes de matemáticas, su muestra constó de 110 alumnos (55 hombres y 55 mujeres) y las tareas fueron agrupadas en 38 preguntas, tratando cada una de ellas diferentes aspectos, (Orton, 1980).

Las tareas usadas trataron con: El entendimiento del límite en el caso de sucesiones numéricas y de algunas situaciones geométricas, la idea de integración como medida del área bajo una curva usando rectángulos, la idea de tasa de cambio usando gráficas y tablas de diferencias que conducen a diferenciación, así como con ciertas de sus aplicaciones tanto para la diferenciación como para la integración. En sus escritos se concluye o se recomienda que en la enseñanza inicial del análisis matemático se requiere de un mayor vínculo con las ilustraciones apropiadas incluyendo diagramas y gráficas.

La dicotomía imagen del concepto - definición del concepto

Quizá el primer acercamiento con un cierto nivel de influencia en distintas escuelas del pensamiento fue la construcción teórica del profesor Vinner en Israel. Al inicio de los años ochenta el señala que los estudiantes no usan necesariamente la definición cuando deciden si un objeto matemático dado es o no un ejemplo del concepto en cuestión. En muchos casos deciden sobre la base de una imagen del concepto que han podido construir con su accionar sobre los objetos matemáticos; es decir, en su accionar sobre el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en sus mentes y vinculadas con el nombre del concepto, conjuntamente con todas las propiedades con que ellos las caracterizan. La imagen de los estudiantes es un resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto. El conjunto de objetos matemáticos considerado por el estudiante son ejemplos del concepto y no necesariamente son iguales al conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición. Si estos dos conjuntos no son iguales, el comportamiento de los estudiantes puede ser diferente del esperado por el profesor.

Los ejemplos de este acercamiento fueron desarrollados fuertemente por Tall y han devenido clásicos, es posible aun hoy encontrar en distintos sitios del orbe estudios en esa misma dirección. En términos generales dichos estudios tienen una estructura que proviene de la respuesta a la siguiente cuestión: ¿Cuál es la imagen del concepto *x* que tienen los estudiantes del nivel escolar *y* en el sistema educativo *z*? Este acercamiento permitió sin duda durante estos años, construir una explicación plausible de las dislexias escolares. Quizá la obra clásica al respecto lo constituya (Tall y Vinner, 1981).

Debido al reconocimiento de que la dualidad imagen del concepto - definición del concepto resultaba frágil para explicar por ejemplo la relación entre destrezas y concepciones se acuñó progresivamente la noción de procepto, como una categoría teórica de análisis que permite establecer ciertas filiaciones entre procesos y conceptos de una misma entidad matemática.

La dialéctica proceso y objeto

Unos años después, a partir de investigaciones de (Thompson, 1985) se propuso un sistema teórico un poco más elaborado que el anterior según el cual el conocimiento matemático es caracterizado en términos de procesos y objetos. Estas ideas, basadas en el trabajo de Piaget, llevaron la noción de abstracción reflexiva hacia nuevos niveles.

En este sentido, los números, las variables, las funciones y otros conceptos matemáticos pueden ser considerados como objetos. Estos objetos están conectados por relaciones, pues ellos forman parte de estructuras de objetos. Los procesos están compuestos de operaciones sobre estos objetos. Ellos por lo tanto transforman a los objetos. Las estructuras pueden o no preservarse bajo estas transformaciones.

Una razón para la complejidad del conocimiento matemático, según esta aproximación teórica, radica en que muchas nociones pueden tomar el papel de procesos o de objetos, dependiendo de la situación problema y de la concepción del estudiante. Típicamente, el aprendizaje entorno de un concepto incluye varios estados, empezando por efectuar las operaciones de un proceso en términos concretos. Cuando el estudiante se familiariza con un proceso, el proceso toma la forma de una serie de operaciones que se pueden efectuar mentalmente, el estudiante entonces ha alcanzado un *pensamiento operacional* respecto a este concepto. Un estado posterior, el bosquejo mental de este proceso cristaliza en una entidad única, un nuevo objeto. En este momento el estudiante es capaz de pensar respecto a esta noción ya sea dinámicamente como un proceso o estáticamente como un objeto. Esto le permite al estudiante pensar en términos de posibilidades: ¿Qué sucedería si efectúo o no cierta operación? En estos términos, uno de los pasos más esenciales en el aprendizaje de las matemáticas es la formación de objetos: hacer un objeto de un proceso. Uno de los objetivos es desarrollar un pensamiento operacional, pensamiento acerca de procesos en términos de operaciones sobre objetos. En esta dirección es posible encontrar estudios recientes que pretenden construir modelizaciones de los procesos del pensamiento cuando se quiere que los alumnos accedan a ideas avanzadas, como pueden ser, álgebra abstracta, matemática discreta, análisis matemático y cálculo elemental.

Obstáculos epistemológicos, el conocimiento fruto de la lucha

La noción de obstáculo epistemológico introducida por Bachelard en su libro publicado en 1938 no fue originalmente concebido como una categoría para la el análisis de la obra matemática. Sin embargo, ella fue extendida a la didáctica de la matemática por G. Brousseau en 1983, donde se asume una postura al respecto. Se entiende que un obstáculo epistemológico es una pieza del conocimiento; es parte del conocimiento del estudiante. Este conocimiento ha sido satisfactorio en general en cierto momento para resolver algunos problemas. Es precisamente este aspecto satisfactorio el que ha anclado el conocimiento en la mente y deviene en un obstáculo. El conocimiento prueba ser inadecuado cuando se enfrenta con nuevos problemas y la insuficiencia puede no ser obvia.

En diversas investigaciones en didáctica del análisis, como las desarrolladas por (Cornu, 1983) y (Sierpinska, 1984) se bosquejan algunos de los obstáculos principales para el entendimiento de la noción de límite (límite de sucesiones numéricas en el primero y noción topológica de límite en el segundo) y se busca establecer una especie de paralelismo con las dificultades encontradas en la historia. Se reportan resultados como los siguientes:

El aspecto metafísico de la idea: Las matemáticas no se reducen a cálculos y propiedades algebraicas simples. Interviene el infinito y está rodeado de misterio. El infinitamente pequeño y el infinitamente grande: Existen números reales tan pequeños pero diferentes de cero. ¿Se alcanza el límite? La expresión tiende a se reserva para el caso donde no se alcanza el límite. El paso al límite: Otro obstáculo que parece importante es el paso de finito a infinito. Sierpinska desarrolla una experiencia en la que participan cuatro jóvenes estudiantes, después de analizar sus reacciones a los problemas que ella les plantea (construir una tangente a un curva y su ecuación, si la curva es y=sen$x$ en x=0). Se reportan los obstáculos relativos a la adquisición de la noción de límite. Horror del infinito. Obstáculos restringidos a la noción de función. Obstáculos geométricos y los lógicos.

Una aproximación sistémica sociocultural. El acercamiento socioepistemológico.

Estos acercamientos se han conformado más recientemente, sus primeras publicaciones se encuentran a principios de la década de los 90's. Han desarrollado desde el punto de vista de la construcción social del conocimiento, estrategias de investigación de naturaleza epistemológica que no se reducen a la búsqueda de obstáculos epistemológicos ni a su eventual clasificación, sino mas bien, se ocupan de la epistemología en otro sentido. La entienden como el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento, incluyen entre las circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento a los aspectos sociales y culturales de manera que en esta visión, se pretende develar el origen social del conocimiento, sus diversos usos sociales y su evolución al seno de las instituciones, como la escuela, la academia o los servicios entre otros.

Para dar una mejor idea de aquello en lo que nos interesamos, describimos brevemente, los aspectos relevantes del programa de investigación con que buscamos construir una base de significaciones para procesos y conceptos del análisis matemático del nivel universitario que se nutre de la noción de predicción como una de las necesidades sociales. La línea de investigación que desarrollamos considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple le llamamos el acercamiento socioepistemológico.

Pasemos a la tesis central en nuestra aproximación. El binomio de Newton se escribe por vez primera como $(P+PQ)^{m/n}$ y no como $(a+b)^n$. Ello obedece a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología que difiere de la que hoy enseñamos en clase. Atiende a un programa en el dominio de la ciencia con el que se busca predecir el comportamiento de los fenómenos de cambio. Un programa de matematización de los fenómenos modelables mediante la metáfora del flujo de agua aplicada por igual a la evolución de otras magnitudes.

Esa noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente. El objeto matemático, binomio de Newton se presenta como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que requieren de la predicción, de donde transita hasta llegar a tomar la forma abstracta del concepto de función analítica.

Consideraciones finales

Dado el amplio abanico de acercamientos a la investigación en didáctica del análisis, tanto entre los que han devenido clásicos como los más recientes, sólo quisiera decir para terminar, que esta línea de investigación del pensamiento matemático avanzado ha ido constituyéndose paulatinamente como un campo específico del conocimiento en matemática educativa.

En nuestra opinión, aun se necesita profundizar en el desarrollo de nuevos enfoques que no se limiten a señalar y clasificar las dificultades de los alumnos ante una serie de preguntas matemáticas, pues ellas suelen asumir que los objetos matemáticos existen previamente y que las dificultades didácticas se encuentran analizando la "distancia" entre las imágenes formadas entre los estudiantes y los objetos matemáticos "deificados". Dichas aproximaciones han dado mucha luz sobre las dificultades de los estudiantes ante las ideas del análisis, pero no necesariamente nos han ayudado a tender puentes entre la investigación y la "realidad" del aula. Dichos estudios suelen centrarse en la búsqueda de la estructura conceptual de los objetos matemáticos en la mente de los que aprenden o del conjunto de concepciones espontáneas o no de los estudiantes, o bien se centran en el examen de la forma en que dichas concepciones evolucionan con una cierta enseñanza, o en la relación que puede establecerse entre el pensamiento del profesor y las concepciones de sus alumnos. Dichos enfoques suelen modelar distintos aspectos según se trate de su orientación teórica, por ejemplo buscan modelar procesos del pensamiento, aspectos del conocimiento o de las concepciones de los alumnos, los errores que ellos comenten o localizan y estudian los obstáculos asociados a la construcción incluyendo a las estructuras mentales.

En nuestro caso, así como en otras investigaciones en curso de la didáctica española (Azcárate, 1991), por el contrario, no asumimos la existencia de objetos matemáticos la derivada por ejemplo - sin un uso, sin un proceso de significación y de resignificación progresiva. En nuestro enfoque, requerimos de identificar las actividades necesarias para construir al objeto. Tanto desde el punto de vista del alumno individual como del alumno al seno de grupo de trabajo y de su relación con el maestro. Ha sido necesario estudiar detenidamente los momentos de intervención de los alumnos y del maestro en el diseño de las actividades didácticas. Es fundamental recordar que el fenómeno de la enseñanza del análisis se proyecta hacia futuros usuarios del tema, no hacia futuros expertos del mismo y bien puede suceder, que un usuario muy eficiente pueda ser totalmente ignorante del discurso matemático escolar que se ha caracterizado por su aspecto teórico y que impera actualmente en la enseñanza.

Anderson, J. (1979). Objetive Testing in Elementary Analysis, *Educational Studies in Mathematics* 10: 227-243.

Artigue, M. (1998). L'Evolution d'une problematique en didactique de l'analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. En prensa

Azcárate, C. (1991). Instantaneous speed: concept images at college students level, and its evolution in a learning experiencie, *Fifteenth PME Conference*. Assisi: 96-103.

Brousseau, G. (1983). Les obtacles épistémologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques* 4(2): 165-198.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la Serie de Taylor. *Mathesis* 11(1), 55-101.

Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R. e Imaz, C. (Eds.). (1991). *Cálculo - Análisis*. México: Ediciones de la Universidad Autónoma del Estado de México.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conception et Obstacles*. Tesis Doctoral. Francia: Universidad de Grenoble.

Dubinsky, E. (1992). A Learning Theory Approach to Calculus. In Z.A. Karian (Editor) Simbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education, MAA Notes 24: 43-55.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Tesis doctoral. UK: Universidad de Leeds.

Sierpinska, A. (1984). Obstacles Epistemologiques Relatifs a la Notion de Limite, *Recherches en Didactique des Mathematique*, 6: 5-67.

Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking. Kluwer, Dordrecht.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Special Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12: 151-169.

Thompson, P. (1985). Experience, problem solving and learning mathematics: considerations in developing mathematics curricula, en E. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*, Earlbaum, Hillsdale N.J.: 189-236.

Un estudio epistemológico de la Delta de Dirac

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional
México

Introducción

La delta de Dirac es una función que tiene gran utilidad en las ingenierías, principalmente como un modelo de situaciones puntuales e instantáneas [Camarena, 1993]. Esta singular función presenta una serie de problemas en los estudiantes de ingeniería, desde la forma en cómo se le define: una expresión con dos reglas de comportamiento y una condición, ésta contradice conocimientos previamente establecidos en el alumno, creando confusión en él [Camarena 1997].

La función delta de Dirac tiene fundamentación teórica a través de la teoría de distribuciones [Schwartz, 1945], así como a través de la teoría de infinitesimales [Imaz 1996], luego, el problema no es la delta de Dirac, el problema es cómo llevarla a los estudiantes de ingeniería, sin que se contradiga la teoría del análisis matemático que ya poseen y sin presentar la teoría de distribuciones, ya que para ello requerirían de conocimientos matemáticos previos que no poseen [Camarena 1998].

La Metodología

Para poder abordar esta problemática, se ha llevado a cabo una investigación en el área de la Matemática Educativa. Ésta se enmarca dentro de la teoría francesa de las situaciones didácticas y la transposición didáctica, de donde se deriva la metodología denominada ingeniería didáctica.

La ingeniería didáctica contempla tres fases, la primera que es diagnóstica, la segunda en donde se lleva a cabo el diseño de la actividad formulada en los objetivos de la investigación y la tercera cuando se aplica la actividad diseñada y en consecuencia se analizan los resultados. La primera fase está formada por tres componentes: la didáctica (lo que compete al profesor), la epistemológica (lo referente al material a enseñar) y la cognitiva (lo que compete al alumno). El presente trabajo solamente aborda la componente epistemológica.

Estudio Epistemológico

Para iniciar se mencionará que los primeros investigadores[1] que usaron la delta de Dirac, lo hicieron de manera oculta. Es decir, subyacía el concepto de la función delta, sin que ellos supieran de qué se trataba o sin darse cuenta de que era algo diferente al concepto de función; pero cuando se usa esta función por primera vez de forma declarada y extensa, es en los trabajos de Heaviside. Por lo que se considera en la presente investigación, que los trabajo de Heaviside son la génesis de la función delta de Dirac.

Oliver Heaviside[2] fue un gran científico, una de sus más importantes contribuciones fue el estricto análisis matemático de los problemas físicos que estudiaba y el desarrollo de méto-

[1] Entre ellos se encuentran: Fourier en 1822, Maxwell en 1873 y Kirchhoff en 1882.

[2] Oliver Heaviside (1850-1925), nació en Londres, el 13 de mayo de 1850. Su primer artículo sobre electricidad fue sobre el método comparativo de fuerzas electromotrices, el cual se publicó en la página 411 de "English Mechanic" el 5 de julio de 1872 [Heaviside, 1949, (23 de diciembre de 1949. Oliver Heaviside Biography), p. XV]. Después de haber tenido varios obstáculos para la publicación de sus artículos, decide hacer la recopilación de sus trabajos para publicar libros. De hecho, sus trabajos de 1872 a 1891, se publican en 1892 (la segunda edición es de 1970) en los volúmenes I y II de

dos matemáticos directos para su solución, esto lo clasificó como un destacado matemático aplicado; y al mismo tiempo hizo que su contribución al campo teórico de la ingeniería eléctrica fuera más profunda, como menciona Ernest Weber, Director del Instituto de Investigación en Microondas del Instituto Politécnico de Brooklyn, en la página XVIII de la sección titulada: Heaviside´s Contributions, de la introducción del libro de Heaviside titulado: Electromagnetic Theory, con fecha 23 de diciembre de 1949.

De hecho, a fines del siglo XIX Oliver Heaviside desarrolla un cálculo de operadores diferenciales, tratando de resolver varios problemas físicos. Los matemáticos "puros" de esa época no estuvieron de acuerdo con esta teoría sin fundamento, pero en el siglo XX se hicieron muchos intentos para formalizar el cálculo operacional de Heaviside.

La delta de Dirac hace aparición en el volumen II del tratado sobre Teoría Electromagnética de Heaviside. Es claro que para mostrar cómo surge la función delta, se debe iniciar en algún punto de la teoría electromagnética, no es objetivo de este trabajo presentar toda esta teoría. Se ha elegido partir de las relaciones que se deben satisfacer entre voltaje y corriente, en un tiempo dado t, para una distancia x en un cable. La razón de esto estriba en el hecho de que para analizar un circuito eléctrico, es necesario alimentarlo, esto se hace con voltajes los cuales producen necesariamente corrientes. Es decir, el voltaje y la corriente eléctrica son los elementos que siempre están presentes en un circuito, independientemente de qué componentes eléctricas[3] existan en el circuito eléctrico.

I) Antecedentes matemáticos de la Teoría Electromagnética

Para las relaciones mencionadas Heaviside escribe:

> *.... I put the theory into such a form that it may be applied to various other cases of auxiliary arrangements. Let V and C be the transverse voltage and the corrent, at distance x, at time t. Let their connections be*
>
> $-\frac{dV}{dx} = ZC, \quad -\frac{dC}{dx} = YV, \ldots$ *(5) where Z is a resistance operator, and Y a conductance operator, as described in § 219, only now belonging to unit length of circuit. In the simplest case Z reduces to a resistance, and Y to a conductance, per unit length. But in general Z and Y may have various forms, in unlimited number, being then functions of electrical constants and of the time differentiator p. When there are no auxiliary devices, and the natural resistance R, inductance L, leakance K, and permittance S (all per unit length) are constants, then we have Z=R+Lp, Y=K+Sp, . . . (6) ..... [Heaviside, 1949, § 221, p. 113]*

Es decir, Heaviside describe en teoría, las relaciones que en un circuito eléctrico se deben de satisfacer entre un voltaje V y una corriente C, para una distancia x en un tiempo dado t, las cuales son:

$$-\frac{dV}{dx} = ZC \quad \ldots\ldots (i1) \qquad\qquad -\frac{dC}{dx} = YV \quad \ldots\ldots (i2)$$

su "Electrical Papers", posteriormente se recolectan sus trabajos de 1991 a 1912 en su "Electromagnetic Theory", en tres volúmenes, editados cada uno en 1893, 1899 y 1912 respectivamente, y en 1949 se publica una edición que abarca los tres volúmenes.

[3] Estas componentes eléctricas pueden ser resistores, capacitores o condensadores, inductores o bobinas [Camarena, 1987, p. 10].

en donde Z y Y son operadores que en general pueden tener diversas formas, siendo funciones que dependen de constantes eléctricas y de la derivada p respecto al tiempo. Para el caso en que R, L, K y S sean constantes, entonces toman la forma:

Z=R+Lp ..... (i3) Y=K+Sp ..... (i4)

Luego menciona:

> ..... *From equations (5) we see that the characteristic equation of V is* $\frac{d^2V}{dx^2}$ = *YZV* = q^2V, *say, . . . (7), provided Y and Z are independent of x. This restriction is not a necessary one, but, of course, it makes an important practical simplification to have uniformity along the circuit. In (7)* q^2 *represents the operator YZ, and in passing we may notice an interesting matter connected with partial differential equations of type (7), or of the more general type* $\nabla^2V=q^2V$, *. . . (8), appropiate to three dimensions in space.*
>
> ..... *[Heaviside, 1949, § 221, p. 114]*

De hecho, con la nueva numeración que se le está dando en este trabajo a las relaciones de Heaviside, tenemos que la ecuación (7) de Heaviside, la cual proviene de (5), se obtener derivando a (i1):

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{dV}{dx}=ZC\right] \Rightarrow -\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{d(ZC)}{dx}$$

y tomando en cuenta que Z=R+Lp, en donde R y L son constantes y p es el operador derivada respecto al tiempo, así como, el hecho de que cuando deriva a Z respecto a la variable x, la considera como constante, ya que no depende de la variable x, y por tanto:

$\frac{d(ZC)}{dx}=Z\frac{dC}{dx}=Z(-YV)$, por la ecuación (i2). Concluyendo y haciendo uso de la conmutatividad de los operadores, se obtiene la relación (7) de Heaviside, a saber: $\frac{d^2V}{dx^2}=YZV$, en donde al operador producto de los operadores Y y Z le denomina q^2. Luego se tiene la ecuación:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=q^2V \quad ..... \text{(i5)}$$

Posteriormente, en el rubro § 238 de la página 127, titulado: *Analogy between the diffusion of heat in a rod and the diffusion of charge in the cable*, declara que trabajará con las relaciones:

..... $-\frac{dC}{dx}=SpV,\quad -\frac{dV}{dx}=RC,$ (1) ..... [Heaviside, 1949, § 238, p. 127]

De hecho, para el problema que va a abordar, ignora la inductancia, luego, lo que hace es considerar que la inductancia y la inductancia mutua, son cero, es decir L=0 y K=0, por lo que las relaciones (i3) y (i4) para los operadores Z y Y, se reducen a las expresiones:

Z=R ..... (i6) Y=Sp ..... (i7)

las cuales sustituyéndolas en (i1) y (i2):

$$-\frac{dV}{dx} = ZC = RC \quad ..... (i8) \qquad\qquad -\frac{dC}{dx} = YV = SpV \quad ..... (i9)$$

originan las relaciones de Heaviside.

Es claro que (i8) y (i9) generan la misma ecuación diferencial que generaron las relaciones (i1) y (i2), es decir la ecuación (i5): $\frac{d^2V}{dx^2} = q^2V$, en donde ahora, por las relaciones (i6) y (i7), se tiene que el operador q^2 es:

$$q^2=YZ=ZY=RSp \quad .....(i10)$$

Inmediatamente después, Heaviside da la solución de esta ecuación diferencial, solamente sosteniendo que:

> ..... *If q were a constant, its solution would obviously be* $V=e^{qx}A+e^{-qx}B$
> ..... *[Heaviside, 1949, § 240, p. 127]*

Lo que hace es considerar que su operador q es constante[4] y resuelve la ecuación lineal homogénea de segundo orden para la variable V. Es decir, $\frac{d^2V}{dx^2} = q^2V$, la cual es equivalente a $\frac{d^2V}{dx^2} - q^2V = 0$, luego, su ecuación característica es: $r^2 - q^2 = 0 \Rightarrow r^2 = q^2 \Rightarrow r = \pm q$, por lo que la solución general será: $V= Ae^{qx} + Be^{-qx}$, como la escribe Heaviside.

Después indica [Heaviside, 1949, § 240, p. 128] que para las condiciones iniciales $V=V_0$ en $x=0$ y el caso particular de $A=0$, se tiene: $V = e^{-qx}V_0$. De hecho, sustituyendo las condiciones iniciales en su solución general se tiene: $V= Ae^{q(0)} + Be^{-q(0)} = V_0 \Rightarrow A+B = B = V_0$, luego:

$$V = V_0e^{-qx} \quad ..... (i11)$$

Después especifica que:

> ..... *We also have* $C=e^{-qx}C_0$, *if* C_0 *is the current at* $x=0$; *and also* $C_0=\frac{q}{R}V_0$ *(7)*
>
> ..... *[Heaviside, 1949, § 240, p. 128]*

Es claro que se debe proceder de manera análoga a como procedió para obtener la relación (i11) para V. Es decir, ahora debe derivar respecto a la variable x a la ecuación (i9) y sustituir la derivada de V de la ecuación (i8), para obtener la ecuación diferencial lineal homogénea en la variable C: $\frac{d^2C}{dx^2} = RSpC$. Sustituyendo la relación (i10) para $q^2=RSp$ en esta última ecuación, se observa que la ecuación diferencial es completamente análoga a la

[4] Heaviside a los operadores les atribuye un carácter de cantidad algebraica, por lo que los puede hacer igual a constante.

ecuación (i5): $\frac{d^2V}{dx^2}$ = q^2V. Por tanto su solución general será: $C = A_1e^{qx} + B_1e^{-qx}$, la cual para las condiciones iniciales $C=C_0$ en $x=0$ y el caso particular de $A_1=0$, da la solución particular:

$$C=e^{-qx}C_0 \qquad \text{..... (i12)}$$

Por otro lado, de la relación (i8) despejando a C, se tiene: $C=\frac{1}{R}\left(-\frac{dV}{dx}\right)$, y sustituyendo la solución particular (i11) para el voltaje, se obtiene: $\frac{1}{R}\left(-\frac{d}{dx}\left(e^{-qx}V_0\right)\right) = \frac{q}{R}e^{-qx}V_0$, por lo que: $C = \frac{q}{R}e^{-qx}V_0=e^{-qx}C_0$, por (i12). De la segunda igualdad se tiene que: $C_0=\frac{q}{R}V_0$, o equivalentemente:

$$V_0=\frac{R}{q}C_0 \qquad \text{..... (i13)}$$

II) Nacimiento de la Delta de Dirac

Con estos antecedentes Heaviside entra a su sección § 249 de la página 133, titulada: *Theory of an impulsive current produced by continued impressed force*, y publicada por primera vez el 15 de marzo de 1895, en donde surge de manera más explícita la función delta de Dirac, en ésta él esgrime que:

> *..... § 249. An exceedingly interesting and instructive case arises when the impressed force at the beginning of the cable, inserted between it and earth, is variable with the time in a certain way. For a purpose to be seen presently, let the impressed force be given by*
>
> $$e=Q\left(\frac{R}{S\pi t}\right)^{1/2} \qquad (14)$$
>
> *where Q is a constant. Before t=0 the cable is to be understood to be uncharged. The potential V_0 is raised to the value e, of course. It is the same as*
>
> *$V_0=qQ/S$, (15) ..... [Heaviside, 1949, § 249, p. 133]*

Heaviside está considerando que en un cable aplica una fuerza electromotriz e, en donde S es la permitancia y R la resistencia, en el tiempo t=0, la cual produce una diferencia de potencial inicial V_0, con una carga constante Q, tomando en cuenta que el cable antes de aplicar la fuerza estaba totalmente descargado. El voltaje inicial V_0 lo debe obtener de la relación (i13): $V_0=\frac{R}{q}C_0$, sustituyendo q^2 de la relación (i10), es decir:

$$V_0=\frac{R}{q}C_0 = \frac{Rq}{q^2}C_0 = q\frac{R}{RSp}C_0 = \frac{q}{S}\left(\frac{C_0}{p}\right) = \frac{q}{S}Q \qquad \text{..... (i14)}$$

La última igualdad se cumple ya que se sabe que la derivada de la carga respecto al tiempo es la corriente, en notación moderna: $q'(t) = i(t)$, donde $q(t)$ representa la función carga e $i(t)$ la función corriente eléctrica [Camarena, 1987, p. 23]. En notación de Heaviside, ésta sería $pQ=C_0$, en donde obviamente C_0 es la corriente, Q es la carga y p es su operador derivada; como se ha mencionado, a este último lo maneja como una cantidad algebraica, por lo que: $Q=C_0/p$.

Cuando Heaviside menciona que Q es constante y que antes de t=0, el cable estaba descargado, es claro que está pensando en que la función carga $Q=Q(t)$ es una función escalón, o sea la función de Heaviside multiplicada por una constante, o sea $Q=Q(t)H(t)$.

Después formula que:

..... Now find the current entering the cable due to the impressed force. By (5), § 240, it is $C_0 = \frac{q}{R} V_0 = \frac{q^2}{RS} Q = pQ,$ *(16)*

where the second equation arises by (15), and the third by the definition of q^2. *..... [Heaviside, 1949, § 249, p. 133]*

Es decir, despejando C_0 de la relación (i13) y sustituyendo la relación (i14) para V_0, se tiene:

$$C_0 = \frac{q}{R} V_0 = \frac{q^2}{RS} Q,$$

finalmente sustituyendo la relación (i10) para $q^2=RSp$, se obtiene la expresión: $C_0 = pQ$, en donde Q[5] es constante para t>0 y es cero para t<0, de lo cual Heaviside deduce que pQ debe ser cero[6] y que esto significa que no hay corriente en el cable, lo cual no es posible cuando se ha aplicado una fuerza electromotriz, que es un resultado absurdo que indica la naturaleza indigna de confianza de las matemáticas operacionales, en palabras típicas de Heaviside:

..... Since Q is constant for any finite value of time, the result is zero. That is, there is no current entering the cable under the action of the continuously present impressed force at any finite value of the time.

Is this nonsense? Is it an absurd result indicating the untrustworthy nature of the operational mathematics, or at least indicative of some modification of treatment being desirable?. ..... [Heaviside, 1949, § 249, p. 133]

Menciona que como Q es cero antes de t=0 y constante después de t=0, entonces la expresión pQ es una función impulsiva, la cual representa su razón de cambio creciente, y es igual a cero, excepto en t=0, en donde ésta es infinito[7], y con valor total igual a Q[8]. Él la pien-

[5] Generalmente, Heaviside no pone se manera explícita a la función H, como en este caso que $Q=Q(t)H(t)$.

[6] Para Heaviside *p* es el operador derivada, luego, *p*Q significa la derivada respecto al tiempo de la función carga $Q=Q(t)$, como en este caso Q es una función escalón, entonces, *p*Q es la derivada de la función de Heaviside, $pQH(t)=QpH(t)$.

[7] Se sabe que Heaviside conocía perfectamente los trabajos de Maxwell, quien de manera oculta, maneja a la función delta de Dirac en la expresión para el potencial $V=A_0/r$. Expresión que tiende a infinito cuando el valor de r se aproxima a cero, es decir, cuando la carga se aplica puntualmente.

[8] Desde el punto de vista de la física, en el punto t=0 debe estar concentrada la carga, porque ésta no desaparece.

sa como una función p1, que está totalmente concentrada en t=0 y su valor total es 1. Por la importancia del tema, a continuación se reproduce el párrafo.

> *..... We have to note that if Q is any function of the time, then pQ is its rate of increase. If, then, as in the present case, Q is zero before and constant after t=0, pQ is zero except when t=0. It is then infinite. But its total amount is Q. That is to say, p1 means a function of t which is wholly concentrated at the moment t=0, of total amount 1. ..... [Heaviside, 1949, § 249, p. 133]*

En este momento[9] hace su aparición la función delta de Dirac, en el área de la electrónica, considerando a la electricidad como la base de la electrónica. Nace la delta, como la derivada de la función de Heaviside. Cabe mencionar que cuando habla de que su valor total es Q o 1, o de tomar el espacio total, se refiere, a tomar la integral en los límites en que tiene sentido el problema físico que está abordando, esto se detecta de lo siguiente:

> *..... But if we take the space total of the product uf(y), the resut is f(x). For u only exists at x, and its total is 1. Thus,*
>
> $$\int uf(y)dy = f(x) \qquad (24)$$ *..... [Heaviside, 1949, § 267, p. 142]*

Por tanto, la función delta la define como cero, excepto en t=0, en donde es infinita y su valor total es uno. Es decir, tiene la definición que se usa hasta estos días, en donde la función es cero en todo t, excepto en cero en donde es infinita y además su integral en el intervalo de interés es uno, lo cual se puede extender a todos los reales, y decir que la integral de menos infinito a infinito es uno.

Luego, se tiene la expresión con dos reglas de correspondencia y la condición respecto a la integración, que definen de manera estándar a la función delta de Dirac.

Conclusiones alrededor de la génesis de la Delta de Dirac.

En el área de la electrónica, específicamente en el contexto de la electricidad, nace la delta de Dirac física y matemáticamente. Matemáticamente[10] como la derivada de la función de Heaviside, p1, la cual proporciona la expresión con sus dos reglas de correspondencia de la definición estándar de la función delta, y físicamente ofrece la condición respecto a la integración, cuando declara que posee un valor total de 1. Más, la forma de describir la definición estándar completa es verbal, pues detalla que es cero en $t \neq 0$ y en t=0 es infinito, con un valor total de uno. Es decir, con notación actual se tiene:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{cases} \qquad \& \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

la definición estándar de la función delta de Dirac, la cual conlleva una expresión analítica con dos reglas de correspondencia y una condición respecto a la integración.

---

[9] 15 de marzo de 1895.

[10] Independientemente de que tuviera o no un sustento matemático teórico.

Heaviside, en general no dibuja la gráfica de sus funciones, por lo que geométricamente, para Heaviside, no tiene representación la función delta.

Físicamente, es una función totalmente concentrada en un instante de tiempo, por lo que representa o modela situaciones instantáneas. En el siguiente cuadro se resume la concepción de la delta de Dirac en manos de Heaviside, en el momento de su surgimiento en el área de la electrónica.

MARCO DE REFERENCIA	FORMA DE EXPRESIÓN EN 1895	FORMA DE EXPRESIÓN EN LA ÉPOCA ACTUAL
CONTEXTO	Electricidad	Electricidad
MATEMÁTICO ANALÍTICO	p1	$\delta(t) = \mu'(t)$
MATEMÁTICO VERBAL	Es cero en $t \neq 0$ y en $t=0$ es infinito, con un valor total de 1.	$\delta(t) = \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{cases}$ & $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
GEOMÉTRICO	Ninguno	Ninguno
FÍSICO	Totalmente concentrada en un instante de tiempo.	Modela situaciones puntuales.
NOMEN-CLATURA	Función impulsiva	Delta de Dirac, Función delta o impulso

SURGE LA DELTA DE DIRAC EN LA ELECTRÓNICA.

Bibliografía

Camarena G. P. (1993). Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas. Edit. ESIME-IPN.

Camarena, G. P. (1987). Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos. Tesis de Maestría en ciencias con especialidad en Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México.

Camarena G. P. (1997). Las funciones generalizadas en ingeniería. Memorias RELME 11.

Camarena G. P. (1998). Situaciones didácticas de la delta de Dirac. Memorias RELME 12.

Imaz J. C. (1996). Una alternativa teórica del cálculo. CINVESTAV -IPN.

Heaviside O. (1892). Electrical Papers, Vol I y II, Edit. Chelsea Publishing Company Bronx, New York, 1970.

Heaviside O. (1949). Electromagnetic Theory.

Dirac, P. A. M. (1926). The principles of quantum mechanics. Oxford, 1930.

Schwartz L. (1945). Théorie des distributions, Volumes 1 and 2, Actualités Scientifiques et Industrielles, París: Hermann et Cie., 1950.

Estrategias de cálculo de series infinitas

Berta Martini
Grupo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Departamento de Matemáticas, Universidad de Bologna
Italia

Summary

This article studies the behaviour of evolved students (students attending the last years of High School) toward infinite series. The renowned demonstration by Nicola d'Oresme to demonstrate the divergence of the harmonic series is uselessly applied to convergent series. Discussions about incorrect calculus of oscillating series values, effectuated by mathematicians of the Renaissance, turn out to be an occasion for students to reveal the idea they have of mathematics.

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo económico del CNR (contrato No.97.00875.CT01) y del MURST. El trabajo completo en cada detaille está en prensa in ingles, español y italiano (1999).

1. Premisa

Lo relevante en la cuestión de la didáctica del infinito en un curriculum escolar ha sido testimoniado bajo diversas circunstancias.

Primera circunstancia: son los ya innumerables trabajos dedicados al tema [en D'Amore,1996, hay una bibliografía de algo más de 300 títulos].

Segunda circunstancia: en ocasión de ICME 8 (Sevilla, julio 1996) uno de los tópicos estuvo dedicado, precisamente, a *Infinite processes throught the curriculum.*

Tercera cincunstancia: Este tema en los últimos veinte años ha ejercido una fuerte atracción entre los psicólogos del aprendizaje matemático; un ejemplo pionero fue sin duda alguna el de Fischbein, Tirosh y Hess (1979); además Nuñez (1990) quien llegó a proponer considerar el infinito matemático como *objeto científico específico de la psicología cognitiva.*

La investigación presente retoma los señalamientos de Moreno y Waldegg (1991) relativos a las actitudes "ingenuas" adoptadas por los estudiantes más avanzados (los últimos grados escolares de la preparatoria) para calcular el valor de suma con sumandos infinitos.

En efecto, estas sumas tienen, desde el punto de vista de la investigación didáctica, interesantes peculiaridades.

Es notable como el *significado formal* de suma entra en conflicto, algunas veces, con el *significado intuitivo* que sobre ella se adopta durante el período inicial del aprendizaje, tal como hace notar Fischbein (1985) en citas y discusiones sobre un célebre trabajo de Vergnaud (1982); aunque tambien es cierto que los estudiantes más avanzados deberían tener, ya, plena conciencia de ello, por lo menos de forma implícita, al adueñarse de los variados y múltiples significados de tal operación considerada universalmente la más simple de comprender y realizar. Por otra parte, la presencia de los infinitos sumandos representa una novedad no contemplada en los niveles escolares precedentes; el modelo según el cual "cada suma tiene un resultado" parece ser bastante fuerte. Este modelo, por cierto, condiciona la expectativa llevando al estudiante a creer que no obstante ser la suma una operación binaria, una suma de sea cual fuere el número de sumandos, tiene sentido existe y es determinable *aún si este número no es finito.*

Las tres series objeto de la investigacion son:

1+ (1/2)+ (1/3)+ (1/4)+ (1/5)+ .... (serie de Nicola d'Oresme)

1+ (1/2)+ (1/4)+ (1/8)+ (1/16)+.... (serie de Zenon de Elea)

1-1+1-1+1-1+1-1+... (serie de Guido Grandi).

2. Notas historicas sobre las tres series objeto de la investigacion. (omissis)

3. Problemas y relativas hipótesis de la presente investigación.

El presente trabajo se halla dentro de la línea de investigación que el NRD de Bologna ha abierto desde hace algunos años sobre el estudio de la didáctica del infinito (D'Amore, 1996-1997; Arrigo, D'Amore, cds; Bagni 1998; Bagni, cds, D'Amore, Martini, 1998;....) y que involucra sólo a estudiantes avanzados (es decir, aquellos de los últimos grados de bachillerato, correspondientes al grupo de edad entre los 17 y los 19 años) aunque no lo repetiremos frecuentemente. Dividiremos a los estudiantes sometidos a la prueba, en dos categorías:

1. aquellos que en sus programas de estudio han ya recibido algunos elementos de Análisis (estudiantes A); **2.** aquellos que en sus programas de estudio no han recibido ningún elemento de Análisis (estudiantes B). Describimos a continuación, de modo específico, los problemas y las relativas hipótesis formuladas en este trabajo, indicándolos, respectivamente, con **P*i*.** y **H*i*.** ($1 \leq i \leq 8$)

Supongamos que les mostramos a los estudiantes las series *n* y *z* y les pedimos los valores de las respectivas sumas.

P1. ¿Qué valores serán atribuidos a las series ***n*** y ***z***? ¿Habrá estudiantes que dirán que tales sumas son infinitas porque poseen infinitos sumandos? ¿Esta respuesta está reservada sólo para los estudiantes B, o también se abre paso entre los estudiantes A? Entre las respuestas nos esperamos que aparezca la respuesta «∞» dado que, como ha sido observado por Shama, Movshovitz, Hadar, (1994) y en D'Amore, Martini (1998), los estudiantes consideran esta entidad como un verdadero y propio número natural. ¿Qué tan difuso es este tipo de respuesta? ¿Aparece sobre todo en estudiantes A? Finalmente, ¿habrá estudiantes que duden del hecho de que tales sumas existan? Si es así, ¿por qué?

H1. Hicimos la hipótesis que los estudiantes A se habrían basado en criterios de convergencia y que por lo menos una parte de ellos habría dado una respuesta correcta. También nos colocamos bajo la hipótesis de la presencia de una respuesta típica ... de matemático griego, exclusivamente entre los estudiantes B, es decir, que las sumas son infinitas, sencillamente en base al hecho de que contienen infinitos sumandos, es decir, que no existe distinción entre las dos series. Una tercera hipótesis se refiere, también, a una cierta presencia de la respuesta «∞», especialmente entre los estudiantes A. Supusimos, finalmente, que la mayoría de los estudiantes (en particular los del tipo B) habrían expresado seguridad en admitir que las sumas de las series *n* y *z* existen, basándose, mas o menos, explícitamente, en el hecho intuitivo de que cada adición *debe* llevar a una suma. La duda sobre la existencia de las sumas debería ser, por el contrario, mas bien rara.

Supongamos ahora de mostrar la serie *n* y, con el método de Nicolás d'Oresme, verificar que su suma es mayor a cualquiera M, elegida al gusto. Mostramos sucesivamente a los mismos estudiantes la serie *z* y les pedimos expresar un parecer sobre el valor de la suma.

P2. ¿Cuántos estudiantes dirán, sin efectuar ninguna prueba, que tal suma es infinita? ¿Cuántos que tal suma es finita? De estos, ¿cuántos reconocerán la convergencia a 2?

H2. A nuestro juicio, los únicos estudiantes dudosos acerca del hecho de que la suma de la serie *z* pueda ser infinita estarán entre los estudiantes A; pero algunos de ellos y, tal vez muchos estudiantes B, vista la prueba de d'Oresme sobre *n,* seguramente admitirán que la suma de z es infinita. A ello contribuirá sea la evidencia intuitiva (la presencia de infinitos sumandos) sea la simplicidad de la prueba de d´Oresme sobre n, muy inmediata, pensada como generalizable a todas las series infinitas. Sólo los estudiantes A reconocerán, quizá mediante criterios de convergencia, que la suma de z es finita; estos (por lo menos una parte de ellos) deberían también saber verificar que ella converge a 2.

P3. ¿Cuántos intentarán aplicar el método de d´Oresme para mostrar que también z es divergente? En tal caso, ¿qué es lo que empuja a los estudiantes a esta verificación?

H.3. Planteamos la hipótesis de que gran parte de los estudiantes B y, tal vez algunos de los estudiantes A, habrían intentado aplicar el método de d'Oresme para verificar que z diverge, ¿por qué? La hipótesis al respecto se basa sobre la aplicación, por parte de algunos estudiantes, de una especie de *transferencia analógica* del *problema base* (demostración de la divergencia de n) al *problema objetivo* (cálculo de la suma de z) del cual las modalidades de presentación constituyen una sugerencia explícita. Lo que parece interesante hacer notar es que, en este caso, la analogía a la que los estudiantes parecen inclinarse con relación a los dos problemas y, que les sugiere repetir en ambos casos la aplicación del mismo procedimiento, no parece una analogía de tipo “estructural” sino mas bien una analogía formal de las dos series que, de hecho, formalmente tienen muchas semejanzas: se trata de sumas infinitas de sumandos, de los cuales los dos primeros (1 y 1/2) coinciden; y después, tratan, igualmente, de fracciones... En otras palabras, los dos problemas comparten los mismos objetos (la suma de fracciones) y el mismo dominio semántico (ambos exigen calcular una suma). En nuestra opinión, en esta analogía de forma podría estar, bajo muchas facetas distintas, la justificación básica.

Supongamos que existen estudiantes que intentan aplicar el método de d´Oresme a z; obviamente, luego de ciertos intentos, se darán cuenta que esta vez la cosa no funciona. Supongamos que les mostramos que z tiene como suma 2; en tal caso.

P4. ¿Cuál será la actitud asumida por los estudiantes?

H4. Nuestra hipótesis era que algunos estudiantes tendrían reacciones del tipo “pero esto es un truco”, “entonces, se puede demostrar cualquier cosa”, de ello se encuentran antecedentes en las investigaciones del NRD de Bologna [precisamente el tema de la línea, recordado en **1.**, alude, precisamente, a la difusión de respuestas de este tipo: véase Arrigo y D'Amore (cds)]. Tal género de reacciones da indicaciones interesantísimas sobre la imagen de la Matemática que tienen algunos estudiantes. Según ellos, la matemática es una disciplina rica en trucos, que sólo el profesor conoce y a los cuáles sólo pocos pueden acceder (Zan, 1998), (D'Amore, Sandri, 1994). Alcanzar buenos resultados en matemática, coincide, por lo menos en parte, en conocer los trucos y en lograr adivinar cuando aplicarlos. En nuestra opinión, una situación en la frontera del curriculum, debería potenciar esta imagen, haciéndola aparecer de manera tan explícita.

Continuamos con la serie g. Suponemos de mostrar g a los estudiantes y pedirles, sin comentario alguno, el valor g de la suma

P5. ¿Cuántos de ellos declararían que dicha serie no tiene un valor (o afirmaciones del tipo)? Si hubiera estudiantes que quisieran asignar un valor a la serie, ¿qué valor elegirían? ¿Con qué tipo de “prueba”?

H5. En este caso, la serie no tiene la forma de las precedentes y por lo tanto se requiere distinguir dos situaciones.

Situación 1: g es expuesta sin premisa alguna a estudiantes que no tienen antecedentes de trabajo ni con n ni con z.

Situación 2: g es expuesta a estudiantes que ya han trabajado con n y con z.

En la situación 1, elaboramos la hipótesis de que tal vez algún estudiante A habría reconocido la situación y habría dado la respuesta correcta; también la hipótesis de que muchos de los estudiantes B se habrían quedado perplejos. Entre estos, a nuestro juicio, la respuesta más difusa sería aquella del valor "0", porque es lo más evidente e inmediato de obtener en base a consideraciones puramente aritméticas.

En la situación 2, tomando en cuenta la hipótesis sobre la presencia de estudiantes A que habrían reconocido la situación, tal vez los estudiantes B, advertidos ya de la posible "extrañeza" de las series infinitas, habrían tenido esta vez, más dudas sobre la existencia misma de la suma.

Supongamos ahora de proponer a los estudiantes, como curiosidad histórica, las diferentes posibles "igualdades" evidenciadas al final de **2.**

P6. ¿Cuántos estudiantes declararán que aquella serie no tiene un valor (o una afirmación del tipo)?

Si existen estudiantes que querrán asignar un valor a la serie, ¿cuál de las igualdades señaladas será espontáneamente la más aceptada? ¿Con qué tipo de justificaciones? En general, ¿qué tipo de actitud acompañará el intento de evaluar la suma de la *g*?

H6. En esta prueba elaboramos la hipótesis de que reacciones de tipo escéptico, antes mencionadas, heredadas de una idea de la matemática como disciplina no controlable, deberían estar presentes en forma masiva a grado tal de llevar a afirmaciones del tipo "En Matemática se puede demostrar cualquier cosa basta saber que truco aplicar" o cosas parecidas. Sólo estudiantes A habrían podido reconocer, frente a los tres "valores" de g, la inexistencia de la suma de la serie *g*, mientras que en los demás debería ser difusa la idea de que de cualquier manera la suma debe existir. Con respecto a las igualdades precedentes, vistas al final del apartado **2.**, a nuestro juicio, la primera debería ser la de mayor aceptación, luego la segunda. Un primer motivo banal de rechazo de la tercera, habría podido residir en el hecho de que la "demostración" que g=1/2, es un poco artificiosa. Un segundo motivo de rechazo de esta última, mucho más significativo e interesante, habría podido residir en el hecho de que en la escritura g=1-g, las necesidades de g son diversas: la *segunda* g tiene un sumando menos que la primera g (como, por otra parte, hacía notar Bolzano). Si se hallase esta observación, más bien aguda, estaríamos, una vez más, frente al caso en el cual el error de un estudiante coincide con un error históricamente testimoniado, cometido por personalidades de primer plano científico. En cuanto a las justificaciones, probablemente la justificación de la elección de la escritura (1-1)+(1-1)+(1-1)+... se halla en su inmediatez: se requiere solamente escribir la g de manera diversa pero inmediata, sin utilizar reglas particulares; la de la 1-(1-1+1-1+...) se halla en la aplicación bastante sencilla de una doble regla (asociativa y cambio de signo) y que en consecuencia requiere de un paso formal más; mientras que la aceptación de la g=1-g, requiere sin duda alguna la capacidad de aceptación del infinito actual. En efecto, el hecho de comprender que si de una sucesión infinita se elimina un término, se obtiene la misma sucesión, comporta un esfuerzo filosófico nada trivial (hecho confirmado por la historia del debate entre infinito actual y potencial, que ha durado 2000 años). En general, construimos la hipótesis que podía ser difusa, sobre todo en el grupo de estudiantes más "débiles", una actitud de la cual emergiera una imagen de la Matemática como la mencionada antes, como una disciplina que se revela sin gran dominio, de la cual se desdibujan los contornos y el sentido preciso de aquello que se hace cuando se aplica.

Por otra parte, como se halla bien señalado en la literatura internacional, cuando un estudiante se halla frente a situaciones que causan incoherencias, parece tener frecuentemente reacciones de indiferencia. Al respecto, véase Stavy y Berkovitz (1980), Hart (1981), Schoenfeld (1985), Tirosh (1990), Tsamir y Tirosh (1997) y D'Amore y Martini (1998). Ahora, en el caso de la suma de la serie *g*, las tres propuestas sugeridas (0, 1 y 1/2) parecen todas legítimas. Pero, entre ellas entran en contradicción.

P7. En este caso, ¿cuál será la reacción del estudiante? ¿Será aún de indiferencia?

H7. Nuestra hipótesis era que, a causa del fácil dominio de la cuestión específicamente propuesta que involucra la escritura y el uso de reglas formales de bajo perfil cognitivo y por lo tanto del dominio de todos los estudiantes, no deberíamos haber encontrado indiferencia frente a esta situación de incoherencia. Elaboramos, por lo tanto, la hipótesis de una reacción intensa y emotiva con toma de posición personal a favor de una de las "tres hipótesis de solución" o contra todas. Pero, contrariamente a cuanto se señala en la literatura sobre el tema, no nos esperábamos una difusa indiferencia: esto habría significado la aceptación de las tres "soluciones", lo cual nos parecía imposible.

Además de todos los problemas precedentes, se nos presentaba otro de carácter más general, ligado a la comprensión de las expresiones formales utilizadas para escribir las series infinitas. El maestro da por descontado que la escritura en la cual se expresan las series, sea comprensible a todos los estudiantes. Algunas veces tales escrituras formales consisten en escribir los primeros sumandos, para luego terminar poniendo al final algunos puntos suspensivos con los cuales se entiende que la suma prosigue; el hecho que tal prosecución no tenga límites es explicitado por escrito (con el adjetivo *infinito* que generalmente precede a la expresión formal) o a voz, durante la práctica didáctica. Pues bien,

P.8. ¿Estamos totalmente seguros de que el estudiante comprende esta escritura en el sentido maduro y adulto en el cual viene propuesta? ¿No la considerará como finita? ¿Cuál es la interpretación matemática que el estudiante atribuye a tal escritura?

H8. Nuestra hipótesis, si bien no era excluir del todo cualquier incomprensión, era que la mayor parte de los estudiantes habría comprendido el sentido de la escritura, tal como aparece formulada por el maestro, gracias al hecho de que, como veremos, aparece explícitamente el adjetivo *infinitos* referido al sustantivo *sumandos*. (omissis)

4. Metodología de la presente investigación

La prueba fue aplicada a estudiantes de bachillerato, de IV y V año en Bologna y su provincia, en Mantova y en Treviso (a estudiantes entre los 17 y los 19 años de edad); y con estudiantes de III y IV año en Lugano (República y Cantón del Ticino en la Federación Suiza) y en Querétaro, capital del estado de Querétaro en la Federación Mexicana (a estudiantes entre los 17 y los 19 años de edad). [En Ticino las escuelas secundaria y preparatoria tienen una duración de cuatro años, mientras que en México tienen una duración de tres años. El NRD de Bologna desde hace muchos años colabora activamente en el estudio, formación e investigación, con varios entes de la República y Cantón Ticino. Desde 1997 se inició una relación de estudio, formación e investigación entre el NRD de Bologna y un grupo de investigadores en Didáctica de la Matemática de la Universidad Autónoma del estado de Querétaro. En 1998 tal relación fue institucionalizada, llevando a un Convenio entre dicha Universidad y la Facultad de Ciencias de la Universidad de Bologna].

Fueron utilizadas como modalidades de investigación: un test escrito y entrevistas individuales. (omissis)

5. Resultados de las Pruebas. (omissis)

6. Discusión sobre los resultados y análisis de la confirmación de las Hipótesis formuladas en 3.

Como puede observarse en los resultados, que n y z existan y que a ellas pueda atribuirse explícitamente un valor, es algo afirmado por muchos estudiantes: claramente más de la mitad del grupo A, y casi la mitad de los estudiantes del grupo B. El hecho de que los estudiantes del grupo A hayan tenido más seguridad, deriva de dos factores: el primero se debe a que ellos ya cuentan con el antecedente de haber encontrado ejemplos de situaciones matemáticas en las cuales se daba por buena la respuesta "infinito"; el segundo factor se debe a que ellos pueden hacer uso de la respuesta «∞» considerada a todos los efectos como un número (Shama, Movshovitz, Hadar, 1994).

La no existencia de n y z fue propuesta por un porcentaje mínimo de estudiantes, ligada sobre todo a una de las posibles formas de rechazo de la respuesta; el hecho que la suma no existe porque la adición es una operación binaria, o porque se define en el finito, no se encuentra en ningún caso.

Es notable la gran cantidad de respuestas sin sentido, así como la ausencia de respuestas: en el primer caso los estudiantes entran en maquinaciones que son intentos explicativos de los cuales no se alcanza a entender cuál es su motivo inspirador; en el segundo caso, cuando hay respuesta se trata de intentos que asemejan tesis orientadas a individuar el término general de una sucesión más que a calcular la suma de la serie.

La respuesta que n y z son infinitos porque poseen sumados infinitos está muy presente (24.3% y 31%, respectivamente en el caso A y 29.6% y 29.3% respectivamente en el caso B). Es de hecho mínimo el porcentaje de estudiantes (sólo pocas unidades del total de la muestra) que se limita a responder que n y z son infinitos sin ligar explícitamente tal respuesta al número de sumandos. Es el caso, p.ej., de Silvia (B) que habiendo respondido en la prueba «$n \to \infty$, $z \to \infty$», en la entrevista comenta "No tiene importancia cuanto valen los solos sumandos, lo importante es saber que son infinitos".

No solo. El hecho que *n* y *z* tengan sumandos infinitos parece ser una buena justificación incluso para las respuestas "n no existe" y "z no existe". Es decir, nos parece que, para muchos estudiantes la inexistencia de las sumas n y z no depende tanto de las sumas sino del hecho de que ellas son infinitas: lo que vuelve incontrolable y por lo tanto indeterminable el resultado. Más que explícita fue en tal sentido la respuesta de Simona (B) que ya sea para n que para z, responde: "n (z) no tiene un valor preciso porque los sumandos son infinitos". También para Ilaria (B), la presencia de sumandos infinitos es suficiente para justificar... posibles resultados infinitos: "Porque infinitas son las posibilidades numéricas que yo puedo sumar". Es interesante notar que, sin embargo, la respuesta de Ilaria no fue la esperada "no existe" o algo similar, sino la de "infinito" con lo cual denuncia una interpretación del término que le hace entenderlo como "indefinido", [por otra parte, entre las posibles interpretaciones semánticas ingenuas del término "infinito", la que se refiere al sentido de "indefinido" conduce al debate, históricamente documentado, del término *apeiron*...] es decir, indeterminable. También Miriam (B) hace referencia explícita a la misma ambigüedad semántica: "n (la respuesta es idéntica para z) no tiene un valor definido = es infinito".

Nótese la presencia, mas bien mínima, de respuestas "z=2", ó "z tiende a 2", ó "z se acerca a 2", que señalan el hecho de que alguno ha probado hacer algún ingenuo ensayo de cálculo dándose cuenta que 2 es un valor particular para aquella suma. Pero tales respuestas, en muchos casos, carecen de una justificación correcta: frecuentemente los estudiantes hacen referencia, genéricamente, al hecho de que los sumandos "se vuelven cada vez más pequeños"...

Finalmente, la presencia del símbolo ∞ es masiva en el caso de los estudiantes A, pero no siempre deliberadamente. Por ejemplo, es común entre los estudiantes del grupo A, encontrar respuestas del tipo "n vale $\frac{\infty}{\infty}$" o bien varios usos análogos pero con el signo menos. En cambio entre los estudiantes del grupo B el símbolo al que se alude aparece muy esporádicamente siendo irrelevante en términos porcentuales.

A propósito nuestra hipótesis según la cual los estudiantes del grupo A habrían quizá utilizado criterios de convergencia o semejantes, para dar una respuesta a las preguntas sobre z, se reveló completamente errónea. Incluso los que parecen hacerlo, en realidad, se situan frecuentemente en el grupo al que hemos clasificado como "respuestas sin sentido"...

Veamos ahora al intento de aplicar el criterio de Nicolás d´Oresme al cálculo de z. Es ya muy evidente en los textos escritos: casi la mitad de los estudiantes B y una quinta parte de los estudiantes A, realizan los cálculos a la manera de d´Oresme de forma explícita; en verdad, los A, intentan utilizar incluso diversas fórmulas pero que, en general, no dominan con seguridad. Sin embargo, son muchos los estudiantes que a pesar de no haber intentado ninguna demostración, se remiten al procedimiento oresmiano del que aceptan acríticamente el resultado incluso para z. Es el caso, por ejemplo, de Sandra (A): "Para mi, la argumentación apenas hecha para n es similar a z, por lo que z vale un número infinito". También Enrico (B), sin efectuar cálculos, dice que "Para z funcionará como para n, cambiará solo el número de sumandos". En tal sentido, remitirse al procedimiento oresmiano, sea que se haya tratado de reproducirlo con intentos más o menos significativos de cálculo, sea que se utilice acríticamente el resultado, parece ser una actitud relacionada con el contrato didáctico en razón de lo cual, y a falta de estrategias alternativas matemáticamente eficaces, el reproponer la demostración oresmiana será advertida por muchos estudiantes como una necesidad. La hipótesis acerca de que todo esto dependa de una *analogía de forma* entre las series n y z, tal como habíamos planteado (ver **H3.** en **3.**), nos parece de cualquier modo confirmada. En efecto, algunas declaraciones de los estudiantes, surgidas durante las entrevistas posteriores a las pruebas, dejan entrever que en muchos casos se ha procedido por *analogía de forma,* tal es el caso de Greta (B) que luego de haber intentado, en la prueba escrita, aplicar el procedimiento de d´Oresme a z y después de haber estado presente en la demostración de la convergencia de z a 2, en la entrevista comenta: "Las dos demostraciones no son coherentes; se la primera es infinito, por fuerza que la segunda debe ser infinito y si lo es, no da 2"; Manuela (B) en cambio, ante la pregunta del entrevistador sobre por qué había utilizado el procedimiento oresmiano, responde con un vago, pero significativo "Porque se parecen..."; igual que Lorenzo (B): "Pensé inmediatamente de hacer lo mismo porque se parecen. Pensé que el método de d´Oresme sólo vale con términos de ese tipo pero que no es un método general...". Es, en conclusión, la *forma* la que parece condicionar de manera relevante el estímulo espontáneo a la analogía.

En lo que se refiere al comportamiento asumido por quienes intentaron, vanamente, aplicar el método oresmiano, muchos inicialmente expresaron sorpresa y después se comportaron de manera distinta:

Anónimo (B): "Intenté hacerlo como d´Oresme pero no funcionó. A lo mejor me equivoqué en algo. De todos modos preferí no escribir tonterías " (de hecho, él dejó en blanco esta parte)

Leonardo (B): "Inicié con d´Oresme, pero después me guié por la intuición"

Anónimo (A): "Esta vez la técnica de d´Oresme conduce a un resultado opuesto. Comprendo que no es la misma cosa".

En la atribución espontánea de un valor a g **(P5)** se dieron una que otra sorpresa.

Comencemos con aquellos estudiantes que no tienen el antecedente de haber trabajado con n y z, y a quienes hemos ubicado en la Situación 1.

La respuesta 0 es la más seleccionada, sea por los estudiantes del grupo A que por los del grupo B, pero con cierta prevalencia en los de A. Hay varios estudiantes que aceptan que la respuesta puede ser 0 ó 1, mientras que pocos están dispuestos a dar una respuesta del tipo "no se puede decir". Es curioso que la mayoría de estos últimos sean del grupo B.

Sometimos al análisis los resultados de los estudiantes ubicados en la Situación 2, y que por lo tanto ya se habían encontrado con las pruebas precedentes. En tal caso, los estudiantes A, siempre de forma contundente, eligieron decir que g tenía valor y la mitad de ellos aceptó que tenía dos valores o sólo uno, pero de manera tal que no se logra saber cual de los dos. Numerosos, en este sentido, las referencias "al último término" de la serie: Marina (A), por ejemplo, dice que el valor g "Depende de muchos factores: si los sumandos son siempre los mismos y de cuántos sumandos son"; otros expresaron la necesidad de saber si el número de sumandos era par o impar. Los estudiantes B confirman el porcentaje, un poco superior a la mitad, de aceptación de la respuesta 0. Lo que significa que, al menos para ellos, la propuesta sobre el valor de g no se halla sustancialmente influenciada por el antecedente de haber trabajado ya o no con series infinitas. Un caso interesante resultó de los estudiantes A dentro de la situación 2, quienes en un porcentaje alto (36%), declaran que estamos frente a una serie indeterminada y que por consiguiente no se puede calcular el supuesto valor de g. Sin embargo, a veces, la "indeterminabilidad" del valor g, así como sucedió con *n* y *z*, es atribuida por los estudiantes al hecho de que la suma es infinita. Ingrid (A) escribe:"(g) valdría cero, pero dado que es infinita no tiene valor". También un anónimo (B) parece seguir la misma idea: "(g) puede ser cualquier número que no se puede determinar porque la suma algebraica es infinita".

Continuemos con **P6.** y **P7.**; en este caso, la propuesta de g ya no es espontánea, en el sentido de que habíamos propuesto muy claramente a los estudiantes tres posibles respuestas entre las cuales hicieran su elección. Pues bien, ningún estudiante responde que la serie no tiene ningún valor (a menos que no se note como el 8% de los A y el 4.2% de los B no da una respuesta: ¿podría, esta ausencia de respuesta, entenderse como un indicador de falta de certeza?). Lo que es evidente, en cambio, es que la gran mayoría tiende a dar un valor como respuesta, y que entre los A, mientras el 45.2% admite que no pueden ser correctas las tres, un 46.8% admite que pueden serlo. Es curioso como, entre los estudiantes B, son muchos más aquellos que admiten que no puede haber tres resultados correctos entre ellos contradictorios a la misma pregunta: en efecto, el 63.2% se niega a aceptar, no obstante la aparente evidencia, que los tres cálculos sean correctos, mientras que casi una tercera parte está dispuesta a aceptarlo. ¿De qué depende esta actitud? Pareciera ser que el hecho de haber conocido matemática más sofisticada coloque a los estudiantes A en la posición de sostener que, entonces, todo es posible. El estudiante ve soluciones alternativas en distintas ocasiones, pero tal vez no comprende que, si ellas son incompatibles, en su globalidad no son aceptables. Greta (B), para quien son correctos los tres valores, dice que "Basta escoger el propio método de adición y explicarlo. Tal vez los matemáticos han logrado resolverlo de tres maneras diferentes de acuerdo a sus conocimientos". Destaca lo de ¡"resolver"!. Un anónimo (A), para quien g tiene dos valores, 0 y 1, en la entrevista se justifica de la siguiente manera: "g puede tener dos valores: 0 y 1, como por ejemplo en $x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7$". En este caso las dos soluciones se interpretan como dos respuestas distintas al problema de resolver una ecuación de segundo grado, lo que parece volver plausible una tal interpretación también en otros contextos".

En relación con la hipótesis **H7**. observamos que, si interpretamos los valores porcentuales de las respuestas de los estudiantes que juzgan correcto los tres valores de g, como una demostración unívoca de indiferencia con respecto a situaciones de incoherencia, entonces nuestra hipótesis no puede ser confirmada (pero en la línea de los resultados obtenidos por otros estudiosos del tema; ver por ejemplo, Tsamir y Tirosh, 1997). En efecto, los valores porcentuales de tales respuestas (46.8% en el caso A y 32.6% en el B) son más altos que los esperados. Sin embargo es útil señalar que son muchos los comentarios espontáneos de los estudiantes (recabados de entre las pruebas escritas y de las entrevistas) que dan a conocer una toma de posición personal frente a las situaciones de incoherencia. Por ejemplo, Melissa (A) dice: "No comprendo por qué si las tres son sumas den resultados.

diferentes"; también el comentario de Selene expresa perplejidad: "Sí, formalmente, es decir como procedimiento no son equivocados, pero no comprendo como una misma secuencia de números puede tener tres resultados"; así mismo, Rogelio dice: "Nunca había experimentado obtener distintos resultados para una operación mediante diferentes procedimientos". En síntesis, no obstante que los resultados porcentuales nos llevan a suponer una implícita aceptación de la situación de incoherencia por parte de los alumnos, el comportamiento de muchos estudiantes no es para nada ni resignado ni pasivo, incluso en el caso en el que la consideración de la situación de incoherencia no tiene la fuerza para inducir una respuesta correcta.

El punto sorpresivamente más inesperado fue precisamente el relacionado con **P8.**, tan es así que nuestra misma hipótesis **H8.** no queda ilesa. (omissis)

Más allá de cumplir con los análisis específicos, como señalamos en el último párrafo de **3.**, quisimos, además, destacar los eventuales y espontáneos comentarios de los alumnos sobre los temas:

- infinito matemático, especialmente el debate entre potencial y actual;
- la imagen que los estudiantes tienen de la matemática cuando entran en juego cuestiones concernientes al infinito.

Esto solo con el propósito de contribuir, mas allá de los temas específicos de la investigación, al debate en curso sobre temas tan amplios y fascinantes.

En esta dirección, la contribución más destacada no llega de los protocolos escritos, sino de las entrevistas; de cuyos registros hemos seleccionado a voluntad aquellas que nos parecieron las más interesantes y singulares.

Con respecto a la concepción del infinito actual, es fuerte y difusa la tendencia a creer que una suma de sumandos infinitos (positivos) da siempre un "resultado infinito". Tal convicción depende de una especie de simplificación ingenua a la cual acuden los estudiantes recurren para intentar el dominio de un problema matemático que de otra forma resulta difícilmente manejable; incluso cuando los estudiantes (como es el caso de aquellos del grupo A) ya habían afrontado el estudio de los criterios de convergencia de las series. En todo esto tal vez influye aún un modelo ingenuo de adición como operación que acrecenta el resultado... En efecto, muchísimos, especialmente entre quienes responden que n y z valen "infinito" hacen comentarios de este tipo: "Porque continuamente se añade algo, no importa que tan poco sea" o bien "Continuando a añadir, antes o después, esta sucesión puede superar cualquier número". Sin embargo, hay algunos estudiantes que advierten la necesidad de deber considerar el infinito en sentido actual para poder resolver el problema. Para responder a **P5.**, por ejemplo, un estudiante (A) dice: "g, vale 0 si suponemos que sea "visible" toda la sucesión de los números 1"; Alessandra (B), respondiendo a cual método entiende como correcto para el cálculo de g, dice: "No sé exactamente por qué, pero pienso que sea el tercero (g=½) el que analiza integralmente todo el problema"; también Anna (B) siempre a propósito del tercer método propuesto para el cálculo de g, dice: "Es el único que considera la suma como infinita, mientras que el primero y el segundo operan como si la suma debiera finalizar".

En lo que respecta a la imagen que los estudiantes tienen de la matemática cuando entran en juego cuestiones concernientes al infinito, parece que su presencia refuerza la convicción de que la Matemática es una disciplina inmanejable, a menos que se conozcan sus misterios... o sus trucos, y de la que por lo tanto es posible esperarse todo. Esta es, probablemente, la convicción de Adele (B) quien, desarmada frente a los tres métodos propuestos para el cálculo de g, comenta que: "La matemática es aquello que uno quiere que sea". Otros hacen más o menos referencia explícita al infinito matemático para expresar, sustancialmente, la misma convicción. Diana (A), después de haber respondido correctamente a **P5.** y **P6.** dice: "Creo que es muy difícil estudiar operaciones infinitas, por lo menos, con los instrumentos que tenemos. Estoy segura de que no se puede jugar con la matemática aunque pareciera que los maestros lo hacen". Finalmente, nos parece significativo el comentario de Elisa (B): "El infinito no puede ser reducido a una solución única. El resultado de una operación con infinitos términos puede ser sólo intuido y no debe ser considerado correcto al 100%, de hecho ningún método se halla en grado de verificar su exactitud".

7. Respuestas a las preguntas formuladas en 3. (omissis)

Referencias bibliográficas

(omissis: hay trabajos de: Arrigo G. & D'Amore; B. Bagni G.T.; Bolzano B.; Boyer C.B.; D'Amore B.; D'Amore B. & Martini B.; D'Amore B. & Sandri P.; Fischbein E. (1985); Fischbein E., Tirosh D. & Hess P.; Hart K.; Kline M.; Lucangeli D. & Passolunghi M. C.; Moreno L.E. & Waldegg G.; Nuñez Errazuriz R.; Schoenfeld A. H.; Shama G. & Movshovitz Hadar N.; Silov G. E.; Stavy R. & Berkovitz B.; Tirosh D.; Tsamir P. & Tirosh D.; Vergnaud G.; Zan R. (1998))

Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje del las matemáticas [1]

Bruno D'Amore

NRD de Bologna, Departamento de Matemáticas
Universidad de Bologna
Italia

Facultad de Ciencias de la Formación Primaria
Libre Universidad de Bolzano
Italia

Summary

Some examples are given, derived from recent research, of the missing transference, that is of the student's non acceptance of personal responsibility for their own behaviour. It is hypothesised that this depends on various factors connected with the student's refusal to choose for himself how to learn, leaving the responsibility of choosing to the scholastic institution and to the teacher.

Resumen

Se dan varios ejemplos que provienen de investigaciones recientes, de la transferencia faltante, es decir, de la incapacidad de los estudiantes para asumir sus responsabilidades respecto su propio comportamiento. Se conjetura que esto depende de varios factores vinculados con el rechazo del estudiante a la elección de su manera de aprender, dejando la responsabilidad de dicha elección a la institución escolar y al maestro.

El marco teórico.

La investigación en didáctica de las matemáticas de los últimos 20 años insistido de modo particular, en el análisis de las múltiples y variadas posibilidades que subyacen en el "triángulo" que tiene como vértices a los *maestros*, al *saber* y a los *alumnos* (Chevallard & Joshua, 1982). Se trata de un modelo sistémico que sirve sobre todo para ubicar y analizar la naturaleza de las múltiples relaciones que se instauran entre los tres "sujetos" que se hallan en los vértices, en el sentido de lo que, al interior de la didáctica de las matemáticas, se ha terminado con denominar *didáctica fundamental* (Henry, 1991).[2]

En este sentido, el saber representa el polo ontológico o epistemológico, el alumno representa el polo genético o psicológico, el maestro el polo funcional o pedagógico. En un primer momento, el "lado" saber-alumno de tal "triángulo" se podría resolver en el verbo "aprender", el "lado" saber-maestro en el verbo "enseñar" [que porta consigo toda la problemática de la "transposición didáctica" (Chevallard, 1985) y de la ingeniería didáctica (Artigue, 1992)]; el "lado" maestro–alumno a veces se resume en el verbo "animar" (pero esto, me parece, porque en tal relación asimétrica, se tienden a ver las cosas desde la parte del maestro hacia el alumno...).

Pero este modo de interpretar las cosas, se ha revelado reductora, dado que no se trata solo de establecer o evidenciar relaciones entre alumno y saber, entre maestro y saber y entre alumno y maestro; en este último caso, se trata también de relaciones, en situación de fuerte asimetría desde tantos puntos de vista, entre seres humanos, a uno de los cuales, por así decirlo, se le reconoce como el depositario del saber, mientras que al otro sujeto se le

[1] Trabajo seguido en el ámbito del Contrato di Investigación CNR 98.01000.CT01 y de los Contratos de Investigación MURST. El trabajo completo està en prensa (1999) en: Relime, Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, Mexico DF. Mexico

[2] La didáctica fundamental se define como «una ciencia que se interesa en la producción y en la comunicación de conocimientos (...) en lo que esta producción y esta comunicación tienen de especifico de los conocimientos» (Brousseau, 1988, pag. 18).

obliga a una escolarización forzada, cuyo objetivo social declarado es, precisamente, el acceso al saber.

En este tipo de estudios, adquiere gran relevancia la problemática de la *devolución*:[3] el alumno construye conocimiento solo si asume personalmente, si se hace cargo personalmente, si se interesa personalmente de lo que se le ha propuesto a través de la situación didáctica (Perrin-Glorian, 1994). Y es evidente la profunda relación que existe entre *devolución* e *institucionalización*: «la institucionalización de la entrega es el acto social a través del cual el maestro y el alumno reconocen la devolución» (Brousseau, cit. en Perrin-Glorian, 1994, pag. 128).[4]

Naturalmente, se debe hacer una profunda diferencia en este punto, entre el saber personal y el institucional: el primer saber es aquel que constituye un «objeto [que] *existe para cada uno de nosotros*» (Chevallard, 1992, pag. 87: el cursivo es del A.) pero no necesariamente perteneciente a una institución (lo que implica que podría no tener un nombre propio institucionalmente reconocido) mientras el segundo es aquel objeto del que las instituciones se han ocupado, dándole un nombre específico.

Es a partir de estas consideraciones (o, mejor, en el ámbito de estas consideraciones) que se pone la rica problemática de la "relación al saber" (Chevallard, 1996), tan bien ilustrado en una situación concreta por Maria Luisa Schubauer Leoni (1997).

El problema

Con el término "escolarización del saber" me refiero aquí a aquel acto, en gran medida inconsciente, a través del cual el alumno, en un cierto punto de su vida social y escolar (pero casi siempre en el curso de la Escuela Primaria), delega a la Escuela (como institución) y al maestro de escuela (como representante de la institución) la tarea de *seleccionar para él los saberes significativos* (aquellos que lo son socialmente, que tienen un estatuto reconocido y legitimado de la noosfera), renunciando a hacerse cargo directamente de su elección en base a cualquier forma de criterio personal (gusto, interés, motivación,...). Dado que esta escolarización implica el reconocimiento del maestro como depositario de los saberes que socialmente cuentan, es también obvio que existe, más o menos contemporáneamente, una escolarización de las relaciones interpersonales (entre estudiante y maestro y entre estudiante y compañeros) y de la relación entre el estudiante y el saber: es aquello que en el título se llama "escolarización de las relaciones".

Nos podemos preguntar que papel juega la escolarización no solo en la eficacia de los aprendizajes sino también en la actitud que el estudiante asume en el salón de clases, con respecto a las matemáticas en general. Creo que es oportuna cualquier aportación con ejemplos significativos en este campo, para conocer mejor el fenómeno y para estudiar los aspectos que se presentan multiformes y variados. Se trata, en un cierto sentido, de constituir una especie de banco de datos al cual hacer referencia en el momento en que se tenga necesidad de ejemplos.

Para contribuir a realizar este "banco", estoy recientemente retomando en consideración algunas de las investigaciones conducidas por mí mismo o por mis colaboradores en los últimos años, para filtrar e interpretar, a partir de las respuestas de los alumnos, informaciones en el sentido precisado líneas arriba. Pero, antes de llegar a los ejemplos y a la consideración final, son necesarias dos premisas que constituyen los orígenes de mis reflexiones. Tomaré tales premisas de textos de dos queridos amigos y colegas, el mexicano Luis Moreno Armella y el francés Bernard Sarrazy.

---

[3] En italiano, el término se traslada de un uso que se da en Derecho: «Transmitir a alguien un bien o un derecho», de fácil interpretación metafórica.

[4] Se recomienda la lectura de Sarrazy (1995).

Primera premisa: el conocimiento situado.

En Moreno Armella (1999) se pone con fuerza el problema de la contextualización del conocimiento: por un lado, se afirma (y se sostiene con varios ejemplos) que la cognición es intrínsecamente contextual; pero por el otro, que las matemáticas son abstractas, dado que sus enunciados no se refieren a nada real. Como estas afirmaciones son irreconciliables, ¿qué se puede hacer? «Es necesario afrontar el problema; de cara a la naturaleza contextual, situada, del conocimiento el problema del profesor es el siguiente: ayudar con el propósito de que el conocimiento contextual del alumno alcance un nivel de articulación que le permita trasladarlo como instrumento de conocimiento, a nuevos contextos para generar allí nuevo conocimiento» (Moreno Armella, 1999).

Pero: ¿cómo lograr este objetivo?

Diferentes investigadores han señalado las dificultades que las personas encuentran en el intento de generar procesos de decontextualización. En los estudios de algunos psicólogos, por ejemplo en J. Lave a finales de los 80's, se sostiene incluso que todo acto cognitivo debe verse ni más ni menos que como una respuesta específica a circunstancias específicas. En particular, para las matemáticas, Noss & Hoyles (1996) señalan como esta afirmación pone un reto formidable: las matemáticas consideran inaceptable que sus propios enunciados queden ligados a referentes fijos, es decir, que queden dependientes de las casualidades del contexto. Pero entonces, como tratar contemporáneamente por un lado con la naturaleza contextual de lo aprendido (por ejemplo en la escuela) y por el otro con una concepción de las matemáticas que promueva la decontextualización?

Entre los muchos ejemplos que se pueden dar, recordamos los estudios sobre la así llamada "matemática de la calle", desarrollados sobre todo en Brasil por parte del grupo de Teresinha Nuñes. Ellos han explorado las diferentes estrategias que siguen los estudiantes en la escuela para resolver problemas aritméticos, y aquellas que ponen en práctica los vendedores ambulantes (a veces adultos y a veces niños en edad escolar). Los resultados de estos estudios ponen en evidencia que una de las mayores diferencias entre las matemáticas escolares y las de la calle consiste en el hecho que las matemáticas escolares ponen en juego y se expresan a través de manipulaciones casi exclusivamente sintácticas, mientras que las matemáticas de los vendedores ambulantes parten precisamente del significado específico del contexto en el cual los problemas surgen.

Por ejemplo, las manipulaciones sintácticas de la escuela vuelven sensato, en una ausencia de contexto real, que se puedan realizar operaciones del tipo «el valor de una manzana multiplicado por el número de manzanas", mientras que esta es una operación inadmisible para las estrategias numéricas de los vendedores de manzanas (!que jamás contarían las manzanas contenidas en una caja!).

Y no hay que olvidar los estudios de Saxe (1985, 1988, 1991) sobre los efectos de la escolarización en los niños vendedores ambulantes: niños obligados a ver por sí mismos, puestos en situaciones institucionales, no parecen ya que estar en posibilidades de efectuar aquellas mismas operaciones aritméticas que, en la calle, dominaban con evidente maestría. La devolución no se desarrolla y el ser puesto en una institución es considerado como algo innatural y forzado: en este caso la escolarización es inmediata y tal vez violenta.[5]

«Aunque de modo general -concluye Moreno Armella (1999)- se podrá usar el conocimiento contextual de una persona como un soporte para la expresión de relaciones más

[5] Para quedar siempre en el tema de la necesidad de destrezas matemáticas reales, fuera del contexto artificial de la escuela y sobre el hecho que las habilidades alcanzadas en la escuela no parecen proporcionar ayuda (es más, a veces parecen inhibir el uso de las habilidades mismas), se puede ver Noss (1998).

generales y de la cual se puede extraer una reflexión sobre su actividad (lo que se presenta en la teoría piagetiana como *abstracción reflexiva*)».

Segunda premisa: el conocimiento filtrado por un vínculo relacional.

En Sarrazy (1995) se buscan las raíces históricas de la idea y de las investigaciones sobre el contrato didáctico y se da un amplio panorama de las diversas formas (!increíblemente diferentes!) en las cuales se usa hoy tal término. En el ámbito del párrafo sobre el "contexto empírico", el autor afirma que el concepto de contrato didáctico fue introducido por G. Brousseau en 1978 como una posible causa del fracaso "electivo" en matemáticas («se trata de aquellos niños que presentan un déficit de adquisición, dificultades de aprendizaje o una falta de gusto pronunciados en el campo de las matemáticas, pero que tienen éxito en otras materias», IREM Bordeaux, 1978, pag. 172). En seguida, en 1981, G. Brousseau y J. Péres juntaron sus observaciones relativas al estudio de un caso emblemático que se volvió famoso en el ámbito de la didáctica de las matemáticas: *el caso Gaël.*

¿De qué se trata? Sigamos la descripción que hace Sarrazy (1998, páginas 134-135). Gaël es un alumno de ocho años y medio que está repitiendo el primer año de la escuela primaria: «Ya en el primer encuentro, los investigadores constatan su incapacidad para empeñarse en un proceso en el que el conocimiento sería el producto de una construcción resultado de la interacción con el ambiente didáctico». Para Gaël el conocimiento no tiene ningún sentido, si no aquel de una «actividad ritual en la que se repiten modelos». En este comportamiento existe un continuo llamado en causa a la autoridad pedagógica de la maestra: «lo que me enseñaron», «lo que la maestra dice que se necesita hacer»..., son las respuestas unívocas que Gaël da a las preguntas de explicación de lo que hace o de lo que sabe. «A partir de este momento, el objetivo de las sesiones sucesivas consiste en provocar en Gaël una ruptura en su concepción de situación didáctica. Progresivamente el entra en el juego y llega a modificar su relación con la situación didáctica, aceptando de empeñarse en el problema que se le pone.[[6]] Este empeño se manifiesta a través de anticipaciones, apuestas con el investigador, verificación de las propias previsiones [...]. Él intenta dominar la incertidumbre de las situaciones propuestas sin "refugiarse" detrás de algoritmos o procedimientos que serían útiles aplicar, como hacía antes, pero adaptando sus conocimientos a las necesidades de la situación a-didáctica".[7]

«Que el concepto de contrato didáctico aparezca a propósito de una investigación que tiene que ver con los fracasos electivos no es una simple coincidencia. Reconducido en el contexto de las investigaciones en sociología de la educación de este período, el contrato didáctico señala, al mismo tiempo, la afirmación de las especificidades y de la pertinencia de la didáctica naciente, además de una ruptura respecto a los modelos explicativos dominantes en sociología de la educación» (Sarrazy, 1998, pag. 135).

No puede no impactar el hecho, reconocible en cualquier contexto de un salón de clases, y !no cierto solo en Francia!, que el alumno débil no accede directamente al conocimiento, al saber; si no que lo hace solo para satisfacer cláusulas de un contrato y solo mediante un "puente" relacional, mediante la mediación del maestro. Esto puede valer para fracasos electivos o, más en general, en situaciones de dificultades incluso menos específicas.

---

[6] Se trata de evaluar el número de objetos que quedan en un saco, conociendo el número total de objetos y el número de objetos sacados del saco.

[7] Recordamos solo que este es el contexto interactivo característico de la situación didáctica (definido sobre la base di tres elementos: el maestro, el alumno y el conocimiento) y que es precisamente a partir de aquí que G. Brousseau definirá sucesivamente el contrato didáctico.

Una rápida consideración.

Más allá de las increíbles diferencias de situaciones de investigación en las que los dos Autores precedentes trabajan, se puede obtener una reflexión común: el saber vuelto institucional condiciona las normas no solo del acceso a él, sino también las normas de su uso. Por lo que no solo debe interesarnos la cuestión de la escolarización del saber, sino también que actitudes de los estudiantes se derivan como consecuencia.

Otra consideración aún.

Con el pasar de los años, sobre todo gracias al notable y continuo intercambio de ideas y experiencias con los maestros y con los alumnos de todos los niveles escolares, a causa de un estudio siempre más específico, me convencí que muchos (aunque, obviamente, no todos) de los aspectos relativos a *contratos*, *devoluciones* y *situaciones*, muchas de las problemáticas relativas al cognitivo y su meta, a imágenes de las matemáticas, a problemas afectivos y cognitivos, se pueden al menos en parte resumir en una sola consideración, relativa a la doble motivación de "oficio": *oficio de alumno*, *oficio de maestro*. Es decir que, una de las mayores dificultades de la relación enseñanza-aprendizaje es que: el maestro debería convencer al alumno y a sí mismo que lo que se aprende, se aprende de por vida y no sólo para el breve espacio de tiempo ligado a un examen, a una prueba, a una forma cualquiera de evaluación.

Ciertamente, el problema es antiguo y por lo tanto lo hemos escuchado siempre, y abre viejas y jamás cerradas heridas. ¡Y aquí no se trata de intentar siquiera el dar posibles soluciones estratégicas nuevas! Por otra parte, ¿cómo convencer a un adolescente a implicarse en un cognitivo del que no ve, del que no puede ver, utilización futura? Y, por otra parte, ¿cuáles usos de la trigonometría, de los logaritmos y del álgebra se podrían, razonablemente proponer?

Es obvio que ningún maestro propone aprendizajes destinados solo a pruebas de verificación; el maestro actúa de buena fe y sabe bien que lo que está dando es material cognitivo para la vida; pero el hecho es que a veces el estudiante, que no tiene instrumentos críticos proyectados hacia el futuro, valora como finalizada en sí misma la propuesta cognitiva del maestro, devaluándola... Sobre el cambio de los contenidos, por otra parte, el maestro puede poco; mientras sobre el cambio de la metodología, podría más, pero se necesitaría entonces intervenir con fuerza en el momento de la formación, obligando también al maestro a repensar su misma función (y no se excluye entonces que, al final, podría reemerger una visión jamás superada de educador fruto de una elección consciente, fuertemente deseada). Esto implicaría profundas revisiones metodológicas y una radical redefinición en la elección de los contenidos: se vería influenciada una gran parte de la elección del saber a ser enseñado, la elección de las modalidades y de los contenidos de la devolución, la puesta en acción de estrategias, y como consecuencia se vería influenciado el contrato didáctico.

Además, pero no menos urgente, el maestro debería convencer al alumno que está aprendiendo para la vida: su empeño en la escuela cesaría de ser solo el de intentar mostrar al maestro de saber reproducir modos, lenguajes y actitudes y se convertiría en cambio en la explicitación de un interés genuino a asumir en primera persona la responsabilidad de una voluntad cognitiva explícita, regulada por una demanda constante de nociones y relaciones estructurales; en primera persona: es decir directamente y no solo a través de la escolarización del saber, rechazando de aceptar como único criterio de selección de los saberes la elección por parte de la institución, y por lo tanto, como consecuencia, de la mediación y la aprobación del maestro que tal institución representa.

Si se pide a un adulto de expresar una opinión sobre la importancia del aprendizaje de las matemáticas en la escuela, se tienen respuestas mediamente orientadas a un parecer de nivel alto: es decir, las matemáticas se consideran *muy importantes*. Pero si se profundizan las motivaciones de estas opiniones, tienen por lo general raíces vacías o triviales, poco escolares, ligadas a hechos de bajísima calidad en lo que concierne al nivel cognitivo. Este modo de pensar explica en modo explícito las respuestas de los alumnos a las mismas preguntas: la importancia del aprendizaje de las matemáticas se hallaría, en efecto, en el «no dejarse engañar en las tiendas», en el «poder controlar el cambio en el supermercado», etcétera; la posición de los alumnos refleja entonces la de la noosfera (sobre todo la familia y el ambiente social). Cuando se materializa en algo de nivel más alto, entonces aparecen referencias tecnológicas o informáticas, muchas veces vagas e impropias. ¡Y todo esto no cambia con las edades de los alumnos!

Por otra parte, efectivamente, ¿porqué emplear meses del propio tiempo intelectual para aprender a usar complicados *instrumentos algorítmicos* para resolver problemas de interés concreto nulo y sin ninguna relación con la realidad externa (la verdadera)?; y después ¿a aprender la teoría misma de tales instrumentos? (convertidos mientras tanto misteriosamente en *objetos*), si en la vida social este aumento cognitivo no implica igual aumento de capacidades y potencialidades expresables en campos concretos, verificables. ¿Qué cosa, si no el condicionamiento social o la escolarización total de los saberes, la confianza en el maestro, convencen al estudiante a hacer su "oficio"? Pero si las bases del "oficio" son estas, las justificaciones del aprendizaje vacilan y se torna al "caso Gaël", emblemático: todo aprendizaje es entonces fruto de una mediación: no existe aprendizaje por sí mismo, para la propia vida, para el propio futuro, si no solo por motivos relacionales e institucionales; el aprendizaje es siempre un aprendizaje "situado", pero situado en sentido totalmente institucional.

Para romper este diafragma, para superar este obstáculo metadidáctico, el maestro debe jugar todas sus cartas en el "arte de la seducción", de la comunicación, del modelo humano...

Pero precisamente en esta actitud se esconde una metáfora que quisiera llamar *la metáfora del entrenador*: más el maestro convence usando a sí mismo como argumentación, más se implica en el proceso didáctico, más lo objetivo y la justificación del aprendizaje se radicalizan en una situación institucionalizada; el aprendizaje se funda en circunstancias relacionales, situadas, institucionales, con objetivos extra-cognitivos, afectivos. Por otra parte, una no participación en la acción o una participación humana débil, basada sobre el reenvío a lo externo de la escuela, implica una *paradoja*, la *de la competencia externa*: el lugar de la competencia problemática se halla en otro lado, fuera de los muros escolares; el profesor es entonces un instructor cuya función es la de preparar a actividades externas, a una actividad futura que, por ahora, es otra cosa, respecto a la escuela; la función institucional de la escuela sería entonces la de una gimnasio de entrenamiento para pruebas futuras, externas, por venir. El profesor es un entrenador, pero la verdadera vida se halla en otro lado.

Prosigamos con esta metáfora. Cuando un joven viene atraído por una disciplina deportiva y pide ayuda a una sociedad o a un entrenador para ser activo en ella, no existe peor entrenamiento que intentar convencerlo a prepararse largamente antes de competir. Un largo, repetitivo y muchas veces tedioso entrenamiento termina con cansar, desalentar y desmotivar al joven, mortificando sus lícitas ambiciones y aspiraciones, las raíces mismas de su primitivo deseo. Un entrenador sabio alterna entrenamientos y pruebas: los entrenamientos en su ambiente, las competencias en el exterior, pruebas verdaderas... Ni solo entrenamientos, ni solo competencias, por obvios motivos: el futuro atleta, novicio, aún no bastante preparado, podría desalentarse como resultado de la confrontación con atletas expertos. Esta metáfora, la del atleta, por lo que vale, nos puede ser de ayuda y podría tenerse presente, aún en las evidentes debilidades de la comparación. La primera de tales debilidades, quizá la más macroscópica, es que el joven atleta busca por su propia voluntad al entrenador, mientras al joven estudiante se le obliga a entrar en una institución, a veces con reglas vagas y misteriosas, muchas veces sin ningún deseo o estímulo individual, de frente a personas adultas que pretenden de él habilidades que no condivide y no pide, sus argumentos son desconocidos y por lo tanto no deseados. ¡Más "situado" que esto, no puede ser el aprendizaje!

Referencias bibliográficas.

(Omissis; hay trabajos de: Aglì F., D'Amore B., Martini A. & Sandri P.; Arrigo G. & D'Amore B.; Artigue M.; Balacheff N.; Baldisseri F., D'Amore B., Fascinelli E., Fiori M., Gastaldelli B. & Golinelli P.; Brousseau G.; Brousseau G. & Perez J.; Cassani A., D'Amore B., Deleonardi C. & Girotti G.; Chevallard Y.; Chevallard Y. & Joshua M.A.; D'Amore B.; D'Amore B., Franchini D., Gabellini G., Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N. & Sandri P.; D'Amore B. & Giovannoni L.; D'Amore B. & Martini B.; D'Amore B. & Sandri P.; Henry M.; IREM de Bordeaux I; Moreno Armella L.; Noss R.; Noss R. & Hoyles C.; Perrin-Glorian M.-J.; Sarrazy B.; Saxe G.B.; Schoenfeld A.H.; Schubauer Leoni M. L.).

Algunos elementos acerca de la Variación

Crisólogo Dolores Flores
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
CIMATE/CONACYT
México

Resumen

En este artículo se analizan algunos elementos teóricos acerca de la naturaleza de la variación y su relación con los principales conceptos de la matemáticas del cambio. La enseñanza y el aprendizaje de la matemática del cambio en los niveles medio básico y medio superior, ha sido nuestro principal objeto de estudio en el plano de la investigación científica, por eso la necesidad de esclarecer su naturaleza y su relación con la matemática escolar.

1. La Variación y la Medición

Desde el punto de vista etimológico el término variación contiene el prefijo *vari*, éste elemento prefijal forma parte de las palabras con significado de *vara*, este término su vez, es indicativo de medición. Una vara es una medida de longitud equivalente a 853.9 mm. De acuerdo con el Diccionario General Ilustrado de la Lengua Española el término variación indica acción y efecto de *variar*, éste último término proviene del latín *variare* y significa hacer que una cosa sea diferente de lo que antes era, el término implica dar variedad o cambiar una cosa de forma, de propiedad o de estado. El término variación está pues asociado a la medición y al cambio.

La medición es un procedimiento creado por el hombre para estudiar y entender la realidad, el cambio por otro lado, es el componente básico del movimiento. El movimiento es una modalidad o propiedad inherente de la materia y no existe sin ella. El movimiento comprende todos los cambios que se operan en el universo, desde un simple desplazamiento de lugar hasta el del pensamiento. La materia y sus manifestaciones son la parte consustancial de la realidad y ésta es siempre cambiante. En un sentido genérico la medición es un proceso de relación conscientemente dirigido por el hombre hacia su realidad, desde el punto de vista físico consiste en encontrar la razón de la magnitud que se mide con la de alguna unidad. De acuerdo con Campbell[1] para que una propiedad sea medible debe ser tal que:

1°. Dos objetos que respecto de esa propiedad sean lo mismo que un tercer objeto, sean lo mismo el uno que el otro.

2°. Por la adición sucesiva de objetos podamos construir una serie normal, un miembro de la cual sea lo mismo respecto de la propiedad, que cualquier otro objeto que deseemos medir.

3°. Iguales añadidos a iguales produzcan sumas iguales

Aclaremos esto tomando un ejemplo de propiedad medible, el caso de la altura o longitud de los árboles. Dos árboles que sean iguales en longitud que un tercero son iguales entres sí. Sumando sucesivamente las alturas de los árboles unas a otras puede formarse una altura igual a una altura prefijada. Alturas de árboles iguales sumadas a alturas iguales dan alturas también iguales. La altura por tanto es una propiedad mensurable.

La medición en el plano científico es una cuestión de suma importancia. No existe disciplina científica que no utilice el recurso de la medición. En las disciplinas científicas común-

[1] Campbell, N. (1968). Forma del Pensamiento matemático. Contenido en *SIGMA el Mundo de las Matemáticas* de J. R. Newman. Editorial Grijalbo, 144-237.

mente llamadas ciencias exactas la medición es fundamental. La Física, por ejemplo, ha sido llamada como la ciencia de la medida. A este respecto Lord Kelvin (1824-1907) señalaba que: "Suelo decir con frecuencia que cuando se puede medir aquello de que se habla y expresarlo en números, se sabe algo acerca de ello, pero nuestro saber es deficiente e insatisfactorio mientras no somos capaces de expresarlo en números, lo demás puede significar el comienzo del conocimiento, pero nuestros conceptos apenas habrán avanzado en el camino de la ciencia, y esto cualquiera que sea la materia que se trate"[2]. En efecto, un procedimiento imprescindible de la labor científica es la medición del fenómeno sujeto a estudio, esta medición se expresa por medio de números.

El problema de la medición jugó un papel importante en el desarrollo de la matemática, pues propició la interconexión entre la aritmética y la geometría, entre lo discreto y lo continuo, entre el número y la magnitud. Las magnitudes son caracterizadas, como "las abstracciones representadas geométricamente de las cosas medibles continuas"[3]. El número, por otro lado, está asociado a la cantidad de veces que cabe la unidad de medida en lo que se mide, aquí se entrecruzan dos de los elementos contrastantes abstraídos de la realidad: lo discreto y lo continuo. Para cuantificar lo discreto conmensurable basta con los números enteros, lo segundo históricamente estuvo relacionado con la divisibilidad de la materia y sus implicaciones en la matemática dieron lugar a la creación de los números racionales, los infinitesimales y los números reales. Lo discreto es característico de algunos objetos de la realidad que son indivisibles en el sentido que cuando se dividen dejan de ser lo que eran (medio de hombre, dos tercios de manzana, etc.), por otro lado, los objetos continuos y homogéneos son susceptibles de sér divididos ilimitadamente y agrupados sin perder su carácter esencial. De estos últimos objetos se pueden abstraer sus longitudes, áreas, volúmenes, o relacionarlos con el tiempo en ciertos fenómenos, éstas magnitudes como representan alguna característica de objetos o fenómenos continuos son también continuas.

2. Las Variables y Funciones: Conceptos Básicos de la Matemática del Cambio

Para ubicar históricamente a la matemática de las variables recurrimos a la peridozación de Kolmogorov[4], ésta es la más consistente pues se fundamenta no sólo en las fechas o personajes sino que enfatiza los métodos, las ideas y los resultados que posibilitaron el desarrollo objetivo de la matemática. El primer periodo lo denomina el Nacimiento de las Matemáticas, comprende desde las épocas remotas hasta los siglos VI-V A. de C.; el periodo de la Matemáticas Elementales o de las Magnitudes Constantes, desde el siglo VI-V, A. de C. hasta el siglo XVI; el periodo de las Matemáticas de la Magnitudes Variables que comprende desde el siglo XVI hasta la primera mitad del siglo XIX; y el periodo de las Matemáticas Contemporáneas que comprende el siglo XIX y XX.

Engels, en su Dialéctica de la Naturaleza, plantea claramente la diferencia cualitativa entre la Matemática de las Constantes y la Matemática de las variables, en este sentido señalaba que el punto de viraje de las matemáticas fue la magnitud variable de Descartes, esto introdujo en las matemáticas el movimiento y, con él la dialéctica y también, por tanto, el Cálculo Diferencial e Integral. La introducción de las magnitudes variables a la matemática respondió a la necesidad de resolver problemas que planteaba el desarrollo socioeconómico alcanzado en el siglo XVI[5]. Del estudio de estos problemas se descubrieron leyes generales de la naturaleza y por primera vez se planteó su modelación por medio de fórmulas matemáticas.

---

[2] Citado en la *Física General* de Sears/Semasky. Editorial Aguilar, pp. 3. Quinta Edición.1977

[3] Moreno A. L.; (1991). *En torno del número y la variación*; Mathesis, Vol 7, Núm. 2; pp. 289-204

[4] Aleksandrov, A. N.; Kolmogorov A. N.; Laurentiev y otros. (1985). *La matemática; su contenido su método y su significado.* Alianza Universidad, séptima Edición. Madrid, España

[5] Hessen, B.: (1985). *Las raíces socioeconómicas de la mecánica de Newton.* Editorial Academia. La Habana, Cuba.

Los conceptos básicos sobre los cuales está montada la matemática de las variables son, sin duda, el de variable y función. Sobre estos conceptos, a su vez, se crearon otros, como el de límite, continuidad, diferencial, derivada e integral. Descartes en su *Geometría* introduce la variación a la matemática en forma de *magnitudes variables* y plantea una definición de muy usual en el bachillerato actual, la concibe en forma dual: como coordenada variable de un punto que se mueve a lo largo de una curva y en la forma de un elemento variable del conjunto de números. Las *magnitudes* son abstracciones representadas geométricamente y lo *continuo* proviene del continuo físico, las magnitudes variables son abstracciones que representan a *algo* que cambia continuamente. La condición de continuidad de las variables fue necesaria para el establecimiento de las bases del cálculo. Newton consideraba a las magnitudes matemáticas no como compuestas de partículas extremadamente pequeñas sino como descritas por movimientos continuos[6], continuos en el sentido de que no presentaban interrupciones.

El desarrollo ulterior del análisis requería de mayor precisión en la teoría de las magnitudes variables y sobre todo en la definición de número real como valor posible de una magnitud variable, en este empeño la teoría rigurosa de los límites posibilitó el surgimiento de la teoría de los números reales. Con ello las magnitudes variables son llevadas a un nivel de abstracción mayor, pues son despojadas de su ropaje geométrico. Ahora un intervalo es un conjunto de puntos y el rango de variación de una variable un conjunto de números reales, por lo que una variable numérica, digamos *x*, "es *cualquier cosa* que puede tomar distintos valores numéricos"[7]. Aunado al desarrollo del concepto de variable, el concepto de continuidad pasó, de una concepción geométrica e intuitiva de una variación ininterrumpida generada por movimientos físicos continuos, a un concepto matemático abstracto definido en términos del límite.

Los fenómenos de la naturaleza están relacionados de alguna manera; las variables que son abstracciones obtenidas de la variación concreta, también lo están. En la búsqueda de las leyes generales que rigen el movimiento de los cuerpos en la naturaleza cobraron una importancia vital estas relaciones. Lo esencial de ellas radica en que algunas variables quedan completamente determinadas por los valores que adquieren las demás, un tipo particular de relación de correspondencia dio origen a las *funciones*. Las funciones poseen dos aspectos esenciales, son relaciones especiales de correspondencia entre variables y sus expresiones simbólicos. Sin embargo la posibilidad de *operar* con las funciones, tal como lo señala Ríbnikov[8], se relaciona con sus expresiones concretas: con los medios de la geometría y sus expresiones analíticas simbólicas. En efecto, las gráficas y las fórmulas de las funciones permiten realizar operaciones y manipular los procesos variación, esta conexión entre gráficas y fórmulas fue desarrollada exitosamente con la introducción del sistema de coordenadas rectangulares en la Geometría Analítica.

Gracias al desarrollo alcanzado por el análisis, y en particular el impulso dado por la teoría de los limites y la teoría de conjuntos, el concepto de función ha adquirido un alto nivel de abstracción. Este concepto tiene como marco general la relación de correspondencia entre conjuntos, incluso ahora se acepta que una función es tal, aunque no necesariamente esté representada por una expresión analítica o fórmula matemática, pues es condición necesaria y suficiente que, en el conjunto de pares ordenados a que den lugar las correspondencias no aparezcan en más de una vez alguno de los primeros elementos de ésos pares. De este modo las variables y funciones pasaron, de ser modelos matemáticos que reflejan la variación concreta y las relaciones entre las variables, a conceptos matemáticos abstractos distantes de los fenómenos del movimiento que le que les dieron origen.

---

6 Wuissing H.(1990). *Conferencias sobre historia de las Matemáticas*; Editorial Pueblo y Educación; La Habana; Cuba.

7 Ibídem, Ob. Cit. 4, pp. 65-66.

8 Ríbnikov K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Editorial Mir Moscú., pp. 220

3. La medición de la variación

En las páginas precedentes se ha planteado que la variación está asociada a la medición del cambio y que los conceptos básicos abstraídos de la realidad para estudiar a la variación son las variables y las funciones. En esta parte de nuestro escrito se analizará cómo se mide la variación. Se iniciará esta discusión con el análisis de un ejemplo de variación elemental.

La caída libre de los cuerpos cerca de la superficie terrestre en *t* segundos está determinada por la fórmula $S(t) = 4.9t^2$ y cerca de la superficie lunar por la fórmula $s(t) = 0.8t^2$. Si se supone que dos cuerpos se dejan caer simultáneamente tanto en la Tierra como en la Luna. ¿Cuál de ellos cae con más rapidez?.

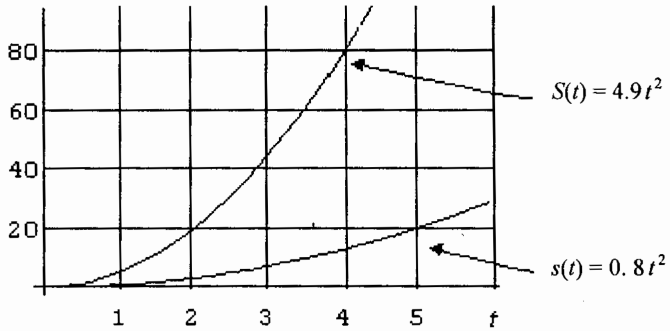


figura 1

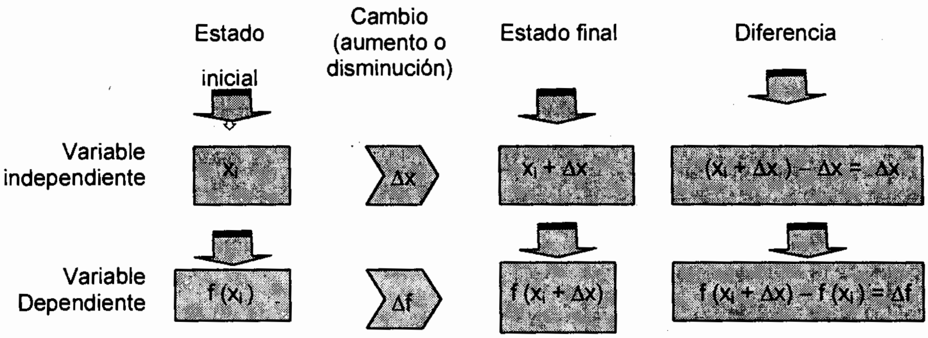
Si se comparan las gráficas de Figura 1 se puede apreciar que $S(t) > s(t)$ para $t > 0$. Las dos funciones son crecientes, pero lo hacen de manera distintas, la primera crece más rápido que la segunda. Por tanto los cuerpos caen con mayor rapidez en la Tierra que en la Luna

Para entender el proceso de la variación de las funciones es importante precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Los primeros indican cómo cambia una función y los segundos indican cuánto cambian. En el ejemplo anterior las dos funciones son crecientes, pero cada una de ellas cambia de un segundo a otro de manera distinta. Mientras que en la Luna un cuerpo apenas recorre 0.8 m entre 0 y 1 segundos en la Tierra en ese mismo intervalo recorre 4.9 m; entre 1 y 2 segundos en la Luna un cuerpo recorre 2.4 m y en cambio en la Tierra en ese mismo intervalo, recorre 14.7 m. Las funciones pueden cambiar de maneras muy distintas, unas pueden ser crecientes, otras decrecientes, otras no crecen ni decrecen, unas crecen uniformemente, otras lo hacen en forma variada, etc., pero estas cualidades por sí solas poco dicen sobre su comportamiento, hacen falta los aspectos cuantitativos.

Se ha llegado a un punto muy importante sobre la variación: su medición. En primer lugar los cambios pueden ser apreciados mediante *comparaciones*. Se sabe que un cuerpo en su caída libre en superficie terrestre avanzó 14.7 m. entre 1 y 2 segundos porque, en $t = 1$ había recorrido 4.9 m y $t = 2$ había recorrido 19.6, por tanto, $S(2) - S(1) = 19.6 - 14.7 = 4.9$. No se puede saber si aumenta o disminuye una magnitud si no se comparan al menos dos de sus medidas. Ya que los procesos de variación, poseen la categoría de procesos entonces están compuestos de estados sucesivos. Entre un estado y el que le sigue, o cualquier otro, suceden cambios. Este incremento (o incluso disminución) de la distancia se obtiene con una simple diferencia, del estado final menos el estado inicial.

Estado Inicial (E_I) $S(1) = 14.7$	⇨	Estado Final (E_f) $S(2) = 19.6$	$E_f - E_I = S(2) - S(1) = 4.9$
	Cambio		¿Cuánto cambio?

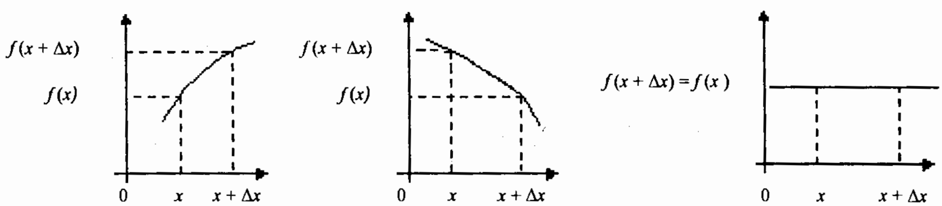
El modelo matemático básico para medir la variación es por lo tanto la *diferencia*. Las fórmulas de las funciones permiten determinar con precisión los valores de correspondencia de las variables y las diferencias entre ellos permiten cuantificar lo que cambian. En términos generales, si y es una función de x, es decir $y = f(x)$, para medir lo que cambia $f(x)$, se requiere primero considerar un *estado inicial* x_i, a este valor de x le corresponde $f(x_i)$. Después de un cambio que experimente x_i, de x_i a $x_i + \Delta x$ (un *estado final*), $f(x)$ experimentará también un cambio a un *estado final*, y éste quedará como $f(x_i + \Delta x)$. A un cambio de la variable independiente corresponde un cambio de la variable dependiente. Estos cambios se obtienen por medio de diferencias.



La diferencia es el modelo fundamental para medir la variación y el cambio. Con las diferencias se puede predecir una enorme variedad de las cualidades del comportamiento variacional de las funciones. Por ejemplo:

- Si $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ (para todo x perteneciente al intervalo $(x, x + \Delta x)$, y $\Delta x > 0$ preferentemente pequeño) entonces $f(x)$ es creciente.
- Si $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$ (bajo las mismas condiciones anteriores) entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalos $(x, x + \Delta x)$.
- Si $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ (con las condiciones anteriores) entonces $f(x)$ no crece ni decrece en el intervalo $(x, x + \Delta x)$, es decir se mantiene constante, no cambia.

Estas desigualdades, que en el fondo representan las comparaciones entre las ordenadas, nos permiten determinar cómo cambia $f(x)$. La respuesta es más evidente si se utilizan representaciones geométricas:



$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$; $f(x)$ crece $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$; $f(x)$ decrece $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$; $f(x)$ es constante

Como se ha podido mostrar, las fórmulas de las funciones permiten determinar con precisión los valores de correspondencia de las variables y las diferencias entre esos valores permiten cuantificar lo que cambian. Una cosa son los valores de correspondencia y otra la forma de cómo cambia una función. Pero esto último es posible gracias a que se cuenta con las fórmulas, y a la posibilidad de ser representadas geométricamente en plano cartesiano.

En esto radica el poder de las fórmulas y las gráficas de las funciones pues permiten realizar operaciones y con ello modelar la variación.

4. Los cambios relativos y la variación

Cuando se estudian procesos de variación, no sólo interesan los cambios por sí mismos, interesan por ejemplo su dirección y sentido cuando se trata de magnitudes vectoriales, interesan su rapidez o la velocidad con que se comportan. Por ejemplo, en el fenómeno de la caída libre citado en anteriormente, para determinar la rapidez fue necesario relacionar el cambio de la distancia recorrida en un intervalo de tiempo. Es decir, un cambio de distancia respecto de un cambio de tiempo. Los casos particulares de cambio relativos cercanamente relacionados con nuestra experiencia diaria son la rapidez de cambio y la velocidad de un objeto móvil. Ambas son manifestaciones particulares de los cambios relativos, pues para su determinación se requiere relacionar unos cambios con otros. Pero esta no es una relación cualquiera, es una *razón entre cambios*, un *cociente entre números*. La rapidez es el módulo de la razón del cambio de distancia entre el cambio del tiempo.

$$rapidez = \frac{cambio \text{ de distancia}}{cambio \text{ del tiempo}} = \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$$

Este tipo de razones son llamadas razones de cambio promedio y mediante ellas se comparan cambios *grandes*. No miden con precisión la rapidez o la velocidad, solo dan una especie de promedio. Por esta razón proporcionan una información gruesa acerca de los procesos de variación.

La obtención de la velocidad precisa del cambio en un instante o en un punto, sólo fue posible introduciendo a la matemática los *cambios infinitamente pequeños*. Y esto no fue fortuito, pues los cambios en los movimientos continuos que ocurren en la naturaleza tienen esta propiedad. Estos cambios se modelan con los *diferenciales*. Las razones entre las diferenciales permiten medir con precisión la velocidad o la rapidez del cambio en un punto o en un instante en un proceso de variación continua. Existen muchas razones de cambio que toman nombres específicos como la *aceleración*, que es la razón de cambio de la velocidad respecto del tiempo; la *intensidad de la corriente* eléctrica que es la razón de cambio entre la cantidad de electricidad que pasa por una sección transversal de un conductor respecto del tiempo, el *gasto* que es la razón entre el volumen de un líquido que fluye en un conducto con relación al tiempo, etc. En todos estos casos subyace una idea general: las razones o cocientes entre cambios. Aquí aparece un n nuevo concepto matemático: razones de cambio, creado de la abstracción de otros más simples: las diferenciales. Una abstracción más compleja creada de otras abstracciones simples. A esta abstracción se le conoce con el nombre de *derivada*. Este es por tanto un concepto matemático creado para medir la variación relativa, en concreto mide lo que cambia una variable respecto de otra en un instante. Dada la trayectoria de un cuerpo o si quiere la relación funcional que lo que lo rige, la determinación de su velocidad en cualquier punto es posible por medio de las razones de cambio instantáneas, por el contrario, el otro problema, dada la velocidad del cuerpo obtener su trayectoria o la fórmula de su relación funcional dio origen a la *integral*. La derivación y la integración por tanto son procesos inversos y ambos describen aspectos esenciales de la variación.

5. La Variación en los Programas de Estudio

Los contenidos de la asignatura matemática en los planes y programas vigentes de la Escuela Primaria Mexicana, se articulan sobre la base de seis ejes: Los números, sus Relaciones y Operaciones; Medición; Geometría; Proceso de Cambio; Tratamiento de la Información y Predicción y Azar. Como es de pensarse el eje Procesos de Cambio aborda el estudio de la variación. El desarrollo de este eje se inicia en el cuarto grado y se profundiza en los dos restantes. Se estudian los fenómenos de variación directamente proporcional y no proporcional y se leen, elaboran y analizan gráficas que representan a estos procesos. Se culmina con las nociones de razón y proporción y la resolución de problemas de la vida diaria que incluyen a estos conceptos. En la escuela secundaria los programas están organizados en cinco áreas: Aritmética, Algebra, Geometría, Presentación y Tratamiento y Nociones de Probabilidad. Como se puede ver, el eje procesos de cambio iniciado en la escuela primaria ya no parece. No obstante se incluyen varios temas de variación en las áreas de Aritmética, Preálgebra y Presentación y Tratamiento de la Información. En el primer grado se estudia la variación directamente proporcional mediante tablas y gráficas; también se aborda la variación no proporcional utilizando diferentes fórmulas algebraicas y sus tablas. En el segundo grado se estudia explícitamente el plano cartesiano, la representación de intervalos de variación y gráficas de funciones del estilo, $y = x$, $x + y = 10$; se incluye el estudio de tablas y gráficas de datos de que varían con el tiempo, se introduce la noción de función como relación entre dos cantidades y se estudian casos sencillos de funciones de la forma: $y = mx + b$ y $xy = k$. Incluso, mediante el análisis de gráficas de funciones sencillas de la forma $xy = k$, se intuye de manera superficial la noción de límite. En el tercer grado se hace énfasis en las razones de cambio o tasas de variación, especialmente la variación con tasa constante y al crecimiento geométrico o exponencial.

En los programas del Bachillerato, (programas que siguen aquellos estudiantes que se preparan para una carrera universitaria relacionada con las ciencias o la ingeniería), están organizados por semestres. En el primer semestre se estudia Aritmética y Algebra, en el segundo Geometría Euclidiana y Trigonometría, en el tercero Geometría Analítica, en el cuarto Cálculo Diferencial y en el quinto Cálculo Integral. Hay algunas variantes, por ejemplo en los últimos años algunos planes suelen dedicarle un curso a la Estadística y Probabilidad y omiten el Cálculo Integral. Como puede verse la variación se estudia después de un año de haber ingresado a este nivel, se empieza con la Geometría Analítica. En ella se incluye el plano de cartesiano, los lugares geométricos, la ecuación de la recta y de las cónicas. El Cálculo Diferencial incluye el estudio de las funciones, sus límites, la continuidad, derivada y sus aplicaciones; en el Cálculo Integral se incluye el estudio del concepto de integral, técnicas de integración, la integral definida y sus aplicaciones.

6. Las perspectivas de nuestros trabajos de investigación

Nuestros trabajos de investigación en matemática educativa han tomado como *objeto* de investigación en al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática de las Variables, principalmente del Nivel Medio Básico (secundaria) y Medio Superior (Bachillerato). Varios trabajos de investigación (Dolores 1996[9], Dolores 1997[10], Cáceres 1997[11]) han mostrado que en los estudiantes, tanto del bachillerato como los que principian la universidad, existe un escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y por consiguiente su comprensión acerca de los conceptos, procedimientos y relaciones acerca de conceptos como el límite, derivada e integral es deficientes. Este es el *problema* central de nuestras investigaciones. El *objetivo* principal de nuestros trabajos consiste en, desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes de la escuela media a fin de favorecer la comprensión de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas de la matemática del cambio.

Para la realización de nuestros trabajos de investigación utilizamos las *formas metodológicas* de investigación de la Ingeniería Didáctica y algunos elementos de las Ciencias Pedagógicas. Esencialmente diseñamos actividades de enseñanza y aprendizaje utilizando dife-

[9] Dolores, C. 1996. *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis Doctoral. Inédita. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro

[10] Dolores, C. 1997. Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. *Investigación en Matemática Educativa.* 2°. Volumen. Artículo aceptado para su publicación. Libro conmemorativo al 35 Aniversario del CINVESTAV del IPN

[11] Cáceres T. (1997). *Estudio exploratorio de las ideas variacionales en estudiantes del bachillerato y principiantes universitarios.* Tesis de maestría. Inédita. Depto. de Mat. Educ/ CINVESTAV, IPN

rentes sistemas de representación como el gráfico, numérico, analítico, algebraico y pictórico. Nuestros trabajos empiezan con un diagnóstico del estado del pensamiento y lenguaje variacional relativo a una noción, concepto, procedimiento o relación especifica de la matemática de las variables que se pretende desarrollar. Después se diseñan actividades consistentes en una serie de preguntas, problemas, ejercicios, y tareas, interrelacionados entre sí, que hacen pensar a los estudiantes y le dan oportunidad a que se *pueda mover* en los distinto sistemas de representación. Después de validar las actividades diseñadas son llevadas a la situación escolar, es decir son sometidas a un tratamiento de enseñanza en condiciones escolares. Finalmente se hace una valoración de las actividades desarrolladas en clase, o incluso fueran de ella, atendiendo básicamente el efecto que tienen en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Tomando en cuenta los resultados de la valoración se rediseñan y adecúan las actividades inicialmente planteadas hasta lograr resultados aceptables en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Actualmente se están llevando a cabo varias investigaciones ejecutadas por 10 estudiantes (tanto de licenciatura como de maestría), derivadas del proyecto denominado: Desarrollo del Pensamiento y lenguaje Variacional en situación Escolar. Este proyecto fue aprobado y está siendo financiado por el CONACYT, está registrado con la clave 25640-S.

Referencias Bibliográficas

Campbell, N. (1968). Forma del Pensamiento matemático. Contenido en *SIGMA el Mundo de las Matemáticas* de J. R. Newman. Editorial Grijalbo, 144-237. Citado en la *Física General* de Sears/Semasky. Editorial Aguilar, pp. 3. Quinta Edición.1977.

Moreno A. L.; (1991). *En torno del número y la variación*; Mathesis, Vol 7, Núm. 2; pp. 289

Aleksandrov, A. N.; Kolmogorov A. N.; Laurentiev y otros. (1985). *La matemática; su contenido su método y su significado.* Alianza Universidad, séptima Edición. Madrid, España.

Hessen, B.: (1985). *Las raíces socioeconómicas de la mecánica de Newton.* Editorial Academia. La Habana, Cuba.

Wuissing H.(1990). *Conferencias sobre historia de las Matemáticas*; Editorial Pueblo y Educación; La Habana; Cuba.

Ríbnikov K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Editorial Mir Moscú., pp. 220

Dolores, C. 1996. *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis Doctoral. Inédita. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro.

Dolores, C. 1997. Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. *Investigación en Matemática Educativa.* 2°. Volumen. Artículo aceptado para su publicación. Libro conmemorativo al 35 Aniversario del CINVESTAV del IPN

Cáceres T. (1997). *Estudio exploratorio de las ideas variacionales en estudiantes del bachillerato y principiantes universitarios.* Tesis de maestría. Inédita. Depto. de Mat. Educ/ CINVESTAV, IPN

Análisis de la relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico en el aprendizaje y la enseñanza de la integración

Germán Muñoz Ortega (gmunoz@mail.cinvestav.mx)
ÁES-Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

a. Consideraciones Iniciales

Una problemática fundamental en la Matemática Educativa consiste en caracterizar cuáles son las causas de la separación entre lo conceptual y los algoritmos propios del Cálculo integral, en el funcionamiento del sistema didáctico (estudiantes, profesor, saber matemático). Por ejemplo, a los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración sólo a través de ejercicios repetitivos y de una manera separada de la parte conceptual; es hasta que se abordan las llamadas *aplicaciones* cuando se estudian algunos aspectos de las nociones asociadas a la integración. Sin embargo, en algunos casos, se reduce la parte conceptual a la definición de integral de Cauchy o a la definición de Riemann; no obstante, se realiza el cálculo de las integrales usando, en cierto modo, el teorema fundamental del cálculo.

"Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. Estos estudios también muestran de manera clara que, frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, aun si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este fenómeno se convierte en un círculo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial ya que es lo que se evalúa." (Artigue, 1995, p. 97).

Además, los tiempos dedicados a la enseñanza de lo conceptual y a la enseñanza de lo algorítmico son diferentes. Por ejemplo, en nuestro sistema educativo se llega a utilizar casi la totalidad de un semestre escolar para ejercitar el cálculo de primitivas, y sólo en lo que resta del semestre se abordan algunas aplicaciones. La problemática anterior se ha convertido en un motor potente para el desarrollo de investigaciones didácticas en el campo conceptual del cálculo. También ha motivado numerosos proyectos de innovación de la enseñanza, en especial en los niveles de la educación media y el ciclo básico universitario. Se pueden citar casos como la renovación global del currículo en Francia y Australia, o como las innovaciones y experimentaciones de cada vez mayor amplitud en los Estados Unidos (Artigue & Ervynck, 1992; citado en Artigue, 1995, p. 98).

De manera que este proyecto surge motivado por la problemática común en diversos países, incluyendo el nuestro, la cual se caracteriza por su importancia capital en la disciplina que desarrollamos. El desarrollo de la problemática en Matemática Educativa la hemos caracterizado como sigue:

a. Primacía de lo algorítmico sobre lo conceptual, por ejemplo, se han centrado en las dificultades algebraicas del cálculo de primitivas (Quezada, 1986).
b. Primacía de lo conceptual sobre lo algorítmico, por ejemplo, el proyecto Cálculo en contexto (Tucker, 1991) o también, por ejemplo, se puede apreciar en Artigue (1995).

c. Una especie de relación dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico, lo cual intentará sostener esta investigación.

Para abordar la problemática ha sido necesario matizarla en dos posibles preguntas: ¿La separación es originada por ciertos factores del funcionamiento del sistema didáctico?; o ¿Existe esa separación en el desarrollo sociogenético de la integración?. Al analizar el trabajo de Cantoral (1990) se puede observar que, en cierto modo, recurre al análisis histórico-crítico para caracterizar algunos aspectos del desarrollo sociogenético del Cálculo infinitesimal, en donde encontramos una evidencia de la imposibilidad de esa separación en el desarrollo sociogenético de la integración, debido a que existe una relación muy estrecha entre la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor*. Entonces, cuáles son las condiciones para propiciar que el funcionamiento del sistema didáctico permita garantizar la relación entre lo conceptual y los algoritmos propios del Cálculo integral.

A partir de los trabajos de Cantoral (1990) y Cordero (1994), hemos encontrado evidencias que nos muestran que en el desarrollo sociogenético de la integración han jugado un papel crucial las nociones de *predicción, acumulación y constantificación de lo variable*. Identificamos teóricamente un aspecto que tienen en común lo conceptual y lo algorítmico, el cual se refiere a que existen situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento) a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados a la integración. Este aspecto en común es una condición necesaria para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, aunque no suficiente para los fines de la Matemática Educativa.

La identificación de la condición anterior nos permitió mirar otra perspectiva, en lugar de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra) y enseguida buscar condiciones de relación entre los dos objetos. Nuestras investigaciones nos han conducido a buscar las relaciones a partir de precisar, en lo más posible, las características del objeto de conocimiento común a lo conceptual y a lo algorítmico (Muñoz, 1998c; Muñoz, 1999a). El objeto de conocimiento común lo caracterizamos tomando en cuenta los cambios de marco epistémico (Piaget y García, 1994) y teniendo como referencia las investigaciones de Cantoral (1990) y Cordero (1994), además por la naturaleza de la problemática nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990); lo cual nos permitió realizar el análisis y la clasificación de las diversas situaciones problema que implican pensar en la integración, en tanto objeto de conocimiento común derivado del marco epistémico de Newton. Es necesario aclarar que la investigación está matizada por la perspectiva llamada *rediseño del discurso matemático escolar*, en la cual se ubica esta investigación.

b. Lo Conceptual y lo Algorítmico en el aprendizaje de la integración

Con base en las consideraciones anteriores estamos intentando caracterizar cómo se coordina el desarrollo de las nociones con el desarrollo de los procedimientos cuando los estudiantes interactúan con una secuencia de situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento común derivado del marco epistémico de Newton), lo cual nos permitiría saber cómo se articulan las nociones para que un procedimiento alcance el nivel de algoritmo.

La cuestión anterior nos condujo a analizar el desarrollo psicogenético[1] de la integración, es decir, de las nociones anteriores (*predicción, acumulación, constantificación de lo variable*)

[1] De acuerdo a la Epistemología Genética, el conocimiento se construye: no es un estado, sino un proceso. Si todo conocimiento está siempre en devenir y consiste en pasar de un estado de menor conocimiento a un estado más completo y más eficaz será claro que se trata de conocer ese devenir y de analizarlo lo más exactamente posible. Este devenir no se desarrolla al azar, constituye una evolución y como no existe en ningún dominio cognoscitivo un comienzo absoluto en un desarrollo, éste debe examinarse desde los estadios llamados de formación; es verdad que como esta formación consiste entonces en un desarrollo a partir de condiciones anteriores (conocidas o desconocidas) se correría el

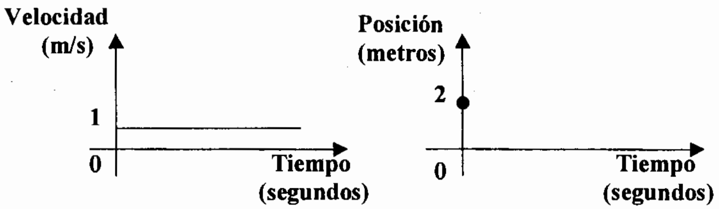
se tratará de identificar su génesis cuando los estudiantes se enfrentan a una secuencia de situaciones problema; así como los procedimientos generados por los estudiantes para llegar a la solución de una determinada situación problema. Y clasificaremos los procedimientos en algorítmicos, no algorítmicos y algoritmos. Nuestro sector de desarrollo considerado toma al movimiento uniforme como *un estado de conocimiento de partida* y al movimiento no uniforme como *un estado de conocimiento posterior* para analizar el desarrollo psicogenético de la integración. Debido a que en el proyecto están jugando un papel importante los estados de conocimiento, nos preguntamos, cómo caracterizar los estados de conocimiento.

Algunos aspectos son los siguientes, si partimos de un nivel de conocimiento de un sujeto, en un momento dado t_0, en el cual, desde el punto de vista de un observador externo (es decir, de un sujeto de otro nivel), no es capaz de resolver ciertos problemas, o contestar ciertas cuestiones, o manejar adecuadamente ciertas situaciones. Después de cierto intervalo de tiempo, llega un momento, t_1, en el cual ese mismo sujeto resuelve fácilmente aquello que antes no podía. El estudio de los mecanismos en juego que permiten el pasaje del "no poder" al "poder hacer" constituye, la cuestión básica que Piaget (1991) se planteó.

Hay, sin embargo, una aclaración importante que formular con respecto a lo enunciado anteriormente: cuando hablamos del pasaje de un "no poder" a un "poder hacer" estamos aceptando el punto de vista de un observador externo. Pero si adoptamos el punto de vista del sujeto, ese "no poder" se transforma en un modo particular de "poder hacer", ese "no comprender" se transforma en un modo particular de comprender. Estos aspectos los mencionamos porque con estas consideraciones estamos intentando caracterizar, en lo más posible, los estados de conocimiento de la integral (Muñoz, 1998b; Muñoz, 1999b).

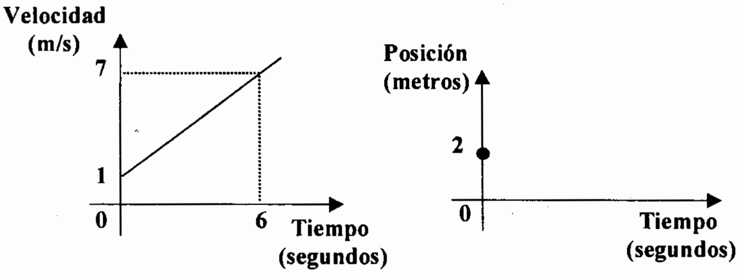
Por otra parte, ya que la complejidad de los problemas no se debe sólo a su pertenencia a una u otra de las clases de problemas que caracterizamos (ver Muñoz, 1996a; Muñoz, 1996b; Muñoz, 1997) sino que intervienen otros factores como: el orden y la presentación de las informaciones; lo cual juega un papel importante en la complejidad de los problemas (Vergnaud, 1991). A diferencia de experimentos anteriores en donde proporcionábamos de manera numérica a la velocidad y a la aceleración (ver Muñoz, 1998b), en esta ocasión realizamos un diseño en donde proporcionamos la gráfica de la velocidad y la gráfica de la aceleración. Por ejemplo, cada una de las tres situaciones siguientes empiezan con el enunciado: *De una partícula que se está moviendo sobre una línea recta se obtuvo la siguiente información*

Situación 1

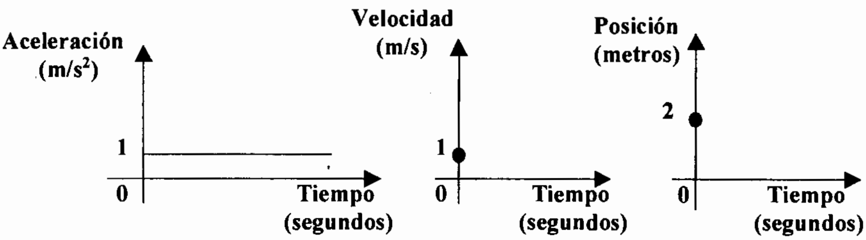


riesgo de una regresión sin fin (es decir, volcarse a la biología) sólo que el problema es el de la ley del proceso y como los estadios finales (es decir "actualmente finales") son tan importantes, desde este punto de vista, como los primeros, el sector de desarrollo considerado puede permitir acercamientos parciales a dicho proceso (Piaget, J., 1972. "Psicología y Epistemología". Emecé, Buenos Aires, Argentina).

Situación 2



Situación 3



Para cada una de las tres situaciones se pedía lo siguiente:

a) Calcular la posición de la partícula cuando el tiempo sea igual a 6 segundos.

b) Calcular la posición de la partícula para cualquier tiempo.

c) Calcular la distancia que recorrería la partícula desde el tiempo 6 (segundos) hasta el tiempo 12 (segundos).

Este diseño lo experimentamos en un curso que impartimos en Diciembre de 1998 en la Escuela de Invierno en Didáctica de las Matemáticas en el ITESM Campus Monterrey, México. Participaron 7 profesores-estudiantes de Maestría en Matemática Educativa distribuidos en 3 equipos, en una sesión de tres horas. A partir de las producciones escritas de los participantes en el curso y de las observaciones que realice a través de sus preguntas realizamos el siguiente análisis:

El equipo A para la Situación 1 construyó la expresión de la distancia (*d=vt metros o d=t metros*) a partir de un análisis dimensional, éste análisis lo representaron en la gráfica velocidad *vs* tiempo como el área de un rectángulo de base el tiempo y de altura la velocidad. Enseguida para poder hacer la predicción le suman a la distancia la posición inicial (*t+2=posición*). Con dicha expresión algebraica pueden calcular la acumulación de distancias a través de la diferencia de posiciones (procedimiento algorítmico[2] en este caso).

Cuando el equipo A interactúa con la Situación 2, construye un procedimiento algorítmico vía el análisis dimensional y su correspondiente representación en la gráfica velocidad *vs* tiempo como el área de un triángulo más el área de un rectángulo de base el tiempo y de altura la velocidad, y después agregan la posición inicial para poder hacer la predicción de la posición, quedando ($1/2t^2+t+2$). Con dicha expresión algebraica pueden calcular la acumula-

[2] Procedimiento que conduce necesariamente a la solución del problema (Vergnaud, 1991).

ción de distancias a través de la diferencia de posiciones (procedimiento algorítmico en este caso).

Hasta la Situación 3 el equipo A entra en conflicto por el hecho de que la información proporcionada es la variación de la velocidad, es decir, la aceleración y la velocidad inicial. Para salir del conflicto recurren al análisis dimensional y se apoyan en la noción de área que han usado en las situaciones anteriores, lo cual les permite considerar a la velocidad como *(t+1)m/s* y enseguida realizan otro análisis dimensional para encontrar que la distancia es igual a *(t+1)m/s* multiplicado por *(t)seg.*, es decir, *d=(t+1)t metros*. Después para hacer la predicción de la posición le suman a la distancia la posición inicial, quedando *d=(t+1)t+2 metros* (procedimiento no algorítmico[3] en este caso). La pregunta un tanto obligada es por qué después de que construyeron la expresión para la velocidad no observaron que era la misma expresión que en la Situación 2. Pensamos que fue debido a que no graficaron la expresión algebraica de la velocidad ya que en la Situación 2 lo que les permitió articular el análisis dimensional con una noción de área fue precisamente la gráfica de la velocidad y esto los condujo a la construcción de un procedimiento algorítmico.

El equipo B, en la Situación 1, a través de la noción de acumulación calcula la distancia recorrida y enseguida para poder predecir la posición de la partícula centran su atención en el origen de un sistema de referencia que desprenden de la información proporcionada en el eje cartesiano de posición *vs* tiempo, lo cual les permite expresar la posición como x=t+2 a pesar de que al eje posición lo designaron como *y* y al eje tiempo como x. Pensamos que esto ocurrió por haber insinuado el sistema de referencia por parte del equipo.

El equipo B, en la Situación 2, construye la expresión *v=t+1* a partir de la gráfica velocidad *vs* tiempo y después construyen una tabulación que involucra el tiempo, la velocidad promedio en intervalos de un segundo y la posición; la posición la calcularon a través de la noción de constantificación de lo variable y de un procedimiento de suma acumulada (procedimiento algorítmico en este caso). Sin embargo, alguno de los integrantes del equipo uso el procedimiento de antiderivación ya que escribió la expresión para la posición de la partícula que resuelve el inciso b) de la Situación 2. La posición de la partícula que calculan usando velocidades promedio la expresan como una aproximación y la posición que calculan usando el procedimiento de antiderivación no la expresan como aproximación, sin embargo, se sorprenden cuando el valor es el mismo.

En la Situación 3 el equipo B construye la gráfica de la velocidad y su correspondiente expresión algebraica, enseguida reconocen que la Situación 3 es la misma que la Situación 2 y ya ni siquiera escriben los resultados. Pensamos que esto es debido a que, en cierto sentido, han organizado la variación de la posición con la variación de la variación de posición a través de un *esquema* (en el sentido de Vergnaud, 1990) para estas situaciones.

Por otra parte, el equipo C, en la Situación 1 construye un procedimiento algorítmico a través de considerar que si la velocidad está representada por una recta es velocidad constante, entonces la posición está representada por una recta y la expresaron como *f(x)=x+2*. Cuando abordan la Situación 2 uno de los integrantes del equipo entra en conflicto al observar que la gráfica de la velocidad como es una recta entonces la velocidad es constante como había ocurrido en la Situación 1; otro integrante menciona que la velocidad no es constante y que podría ser igual a *g(x)=x+1*. Discutieron bastante al respecto, sin embargo, al seguir avanzando construyeron un procedimiento no algorítmico a través de considerar de nuevo que si la velocidad está representada por una recta entonces la posición está representada por una recta, y expresaron a la posición como *f(x)=g(x)+2* donde *g(x)* es la expresión de la velocidad.

---

[3] Procedimiento que no conduce necesariamente a la solución del problema (Vergnaud, 1991).

Para finalizar, este tipo de experimentos tienen el objetivo de caracterizar la *génesis contemporánea* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral como consecuencia de intentar transponer el marco epistémico de Newton.

Algunas implicaciones de este tipo de investigación empírica consisten en que: entre más conozcamos *la ley del proceso* que caracteriza al desarrollo psicogenético de la integración con énfasis en la coordinación de lo conceptual y lo algorítmico, más estaremos en condiciones de tener control sobre *la génesis artificial* que necesariamente exige el funcionamiento del sistema didáctico (Brousseau, 1986), lo cual permitiría clarificar ciertos aspectos de la relación entre el desarrollo psicogenético y el aprendizaje escolar.

c. Lo conceptual y lo Algorítmico en la enseñanza de la integración

En forma breve el recorrido que estamos siguiendo para producir secuencias de actividades didácticas consiste en:

a. Del marco epistémico de Newton: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget & García, 1994), constituido en un contexto sociocultural específico del siglo XVII, se puede apreciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, por ejemplo, existe una relación muy estrecha entre la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor*, en la cual subyace un procedimiento de derivación sucesiva (Cantoral, 1990). En breve, en la *génesis histórica* encontramos una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico.

b. Construimos un campo conceptual del cálculo (ver Muñoz, 1996a, Muñoz, 1996b), es decir, un conjunto de situaciones que le dan sentido al Cálculo integral y que implican la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, con base en el marco epistémico de Newton y en la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud,1990) así como en la perspectiva de la integral vía la noción de *acumulación* (Cordero, 1994). En suma, necesitamos ir caracterizando cada vez más este campo conceptual del Cálculo e insinuar otros campos conceptuales del Cálculo o del Análisis matemático derivados de otros marcos epistémicos, por ejemplo, el de Leibniz, Cauchy o Riemann (ver Muñoz, 1998c).

c. Enseguida realizamos algunos experimentos con estudiantes contemporáneos, inmersos obviamente en un contexto sociocultural contemporáneo específico, para estudiar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico (Muñoz & Cordero, 1998a; Muñoz, 1998b; Muñoz, 1999b). Las situaciones específicas a tratar con los estudiantes son desprendidas del campo conceptual previamente construido. En pocas palabras, caracterizar la *génesis contemporánea* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico.

d. Después intentaremos controlar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en la institución escolar vía un diseño adecuado de secuencias de actividades didácticas, es decir, el *control de la génesis artificial*. Todo lo anterior siempre estará matizado por la perspectiva del rediseño del discurso matemático escolar.

A partir de la caracterización de un campo conceptual del Cálculo se pueden desprender experimentos del tipo que se han mencionado en el inciso c), por ejemplo, lo descrito en el apartado B de este documento, que nos ayuden a precisar cada vez más las condiciones que permitan el control de la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico que exige necesariamente el funcionamiento del sistema didáctico (Brousseau, 1986). Lo anterior es un punto muy importante en tanto el sistema didáctico es un sistema abierto, es decir, está inmerso en un entorno social con el cual busca, en cierto modo, ser compatible (Chevallard, 1991).

Sin duda que los experimentos del tipo d) son de importancia capital, sin embargo, sostenemos que no debe darse primacía a los experimentos en situación escolar ni tampoco primacía a los experimentos en situaciones no escolares, lo cual nos permitiría propiciar dicha compatibilidad.

En todo el recorrido anterior nos estamos guiando por las siguientes hipótesis:

a) La relación entre lo conceptual y lo algorítmico que se presenta en la *génesis histórica* se conservará en lo que hemos llamado la *génesis contemporánea*, pero su naturaleza será distinta.

b) El caracterizar, en lo más posible, la *génesis contemporánea* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico permitirá identificar las condiciones para propiciar y controlar la *génesis artificial* de dicha relación, en el funcionamiento del sistema didáctico en tanto sistema abierto.

Referencias

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.* Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 97-140. México.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques.* Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 7, No. 2, pp. 33-115.

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas.* Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, Sección de Matemática Educativa.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Ed. Aique. Argentina.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar.* Tesis Doctoral, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Muñoz, G. (1996a). *Elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en el Cálculo Integral.* Tesis de Maestría en Ciencias, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Muñoz, G. (1996b). *Algunos elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en el Cálculo Integral.* Memoria de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. pp.109-114. Puerto Rico.

Muñoz, G. (1997). *Un aspecto del enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral: Un ejemplo en la Cinemática.* Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame. Grupo Editorial Iberoamérica. pp.64-68. *México.*

Muñoz, G. & Cordero, F. (1998a). *Epistemological and cognitive aspects of the link between the conceptual and the algorithmic in the teaching integral calculus.* Proceedings of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. North Carolina State University Raleigh, North Carolina, USA. October 31-November 3, 1998. Vol. 1. pp. 157.

Muñoz, G. (1998b). *Lo conceptual y lo algorítmico en la integración: algunos aspectos cognitivos.* Actas de la Decimosegunda *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame.* Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 34-37. *México.*

Muñoz, G. (1998c). *Las Relaciones entre lo Conceptual y lo Algorítmico: el caso de la integración.* Antología Número 3 del Programa Editorial del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Serie Antologías. pp. 185-222. México.

Muñoz, G. (1999a). *Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración.* Ponencia aceptada en la modalidad de análisis teórico e impresión de un resumen en el Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo. Tema central del Congreso: Desarrollo del Conocimiento, espejismos reduccionistas. Antiguo Colegio de San Ildefonso, Ciudad de México, sede del Congreso. Se realizó del 2 al 5 de Junio de 1999.

Muñoz, G. (1999b). *Relación entre lo conceptual y lo algorítmico desde la perspectiva de la psicogénesis de la integral.* Poster aceptado en el Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo. Tema central del Congreso: Desarrollo del Conocimiento, espejismos reduccionistas. Antiguo Colegio de San Ildefonso, Ciudad de México, sede del Congreso. Se realizó del 2 al 5 de Junio de 1999.

Piaget, J. & García R. (1994). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* Siglo XXI, México, 6a. ed.

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo.* Siglo XXI, México, segunda edición.

Piaget, J. (1991). *Introducción a la Epistemología Genética.* Tres Volúmenes. Paidós. 2ª Reimpresión en México.

Quezada, Ma. (1986). *Cálculo de Primitivas en el Bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial.* Tesis de Maestría. Cinvestav-IPN, México.

Tucker, T.W. (1991). *Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources.* MAA Series Notes No. 17.

Vergnaud, G. (1990). *La Théorie des Champs Conceptuels.* Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 10, No. 13, pp.133-170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas, y la realidad.* Ed. Trillas, México.

Localización de nociones que poseen una función central para los actos de aprendizaje que precisan de un Pensamiento Variacional

Ramón Flores Hernández
Universidad Autónoma de Coahuila
México

Introducción

Una primera intención en esta ponencia es mostrar, mediante 3 ejemplos, cómo se hace presente la variación en 3 áreas de la física: Resistencia de Materiales, Estática y Dinámica. Aunque seré puntual, es decir, sólo planteare los ejemplos para un tema de cada área, no significando esto, que haya otros temas de las mismas áreas que no posean un carácter variacional.

Así pues, el acercamiento a estos ejemplos se hace; primero, para localizar la variación y además para identificar y dar reconocimiento a las nociones centrales que intervienen: entendiendo una "noción" tal como lo dice L. Euler en [Cohen, 1977], por otra parte, el término "central" se deriva del papel protagonico que juega la "noción" en un contexto específico. Segundo, para observar su representación matemática: ahondando aquí sobre conceptos fundamentales que permitan localizar nociones centrales. Tercero, para estudiar el aspecto cognitivo relacionado con la variación y con su apropiación.

Este reporte conforma una primera etapa de una investigación más amplia proveniente de la interrogante: ¿la utilización de nociones intrínsecas a fenómenos variacionales, otorgándoles una función central o de pivote, permite apropiarse de un pensamiento variacional? Aquí sólo se aborda las dos primeras fases antes mencionadas.

Los Ejemplos

Un Ejemplo en Resistencia de Materiales

El ejemplo se refiere a la "Flexión de Vigas", tema ubicado dentro de la materia de Resistencia de Materiales cursada en carreras tales como: Ingeniería Civil, Arquitectura, Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica.

En la Flexión de Vigas está presente la variación, a pesar de que los actores principales donde tiene lugar el fenómeno son cuerpos rígidos en reposo, pero también considerados como cuerpos elásticos. Característica esencial de este fenómeno ya que pudiera pensarse que sólo los cuerpos que se encuentran en movimiento, en la naturaleza, poseen la característica del cambio; sin embargo, en el caso estudiado el cambio es provocado por la aplicación de fuerzas externas a él, por tal situación este fenómeno requiere un tratamiento especial para localizar la variación; es decir, de una cuantificación directa a través de las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dv}{dx} = q(x), \quad \frac{dM}{dx} = v(x) \quad \text{y} \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x);$$

pero también de una cuantificación indirecta en donde se presentan situaciones intrínsecas al fenómeno de variación, tales como: la curvatura del eje neutro, la deformación de las fibras longitudinales, la resultante de las fuerzas internas que actúan en una sección de la viga, el momento interno de una sección cualquiera, el momento de inercia, la longitud de curva, etc.

Un estudio epistemológico llevado a cabo [Flores, 1998] sobre la Flexión de Vigas, indica que inicialmente no se hace evidente la variación. Galileo (1567-1672), precursor de este fenómeno, no lo pudo ver hasta que aparecen otros científicos como Robert Hooke (1635-1703) y Navier (1785-1836), principalmente, quienes localizan la variación al estudiar el comportamiento que sufren las fibras longitudinales de una viga bajo la acción de un peso, lo cual origina un conflicto importante para el desarrollo de esta ciencia, tocante a tener claridad sobre el límite entre la distribución de esfuerzos a compresión y a tensión. Esto permite a Navier, posteriormente, la localización del eje neutro; noción que funge como un parte aguas en este fenómeno, ya que antes de él sólo había procesos elementales para predecirlo y después de él procesos bien elaboradas. Así pues, lo anterior trajo como consecuencia la gestación de nuevas ideas basadas en conceptos del cálculo, lo que permitió cuantificar la variación a través del estudio de la deflexión o estudio de la curva elástica, concepto basado en la noción de eje neutro y donde trabajaron científicos tales como: R. Hooke, Navier, Jacob Bernoulli (1654-1705), Daniel Bernoulli (1700-1782) y L. Euler (1707-1783), todos logrando diferentes alcances en este estudio.

Desde un punto de vista cognitivo, se pude decir que el concepto de variación se presenta en este fenómeno cuando identificamos; primero, el movimiento que sufre la viga bajo la acción de un peso, presentándose enseguida la abstracción de este movimiento, lo cual conlleva a generar la noción de cambio. Siendo más explícito, se puede indicar que al observar el movimiento de la viga y en particular al estudiar los sucesivos desplazamientos, se abstrae el movimiento; esto es, al analizar el movimiento de la viga en cada punto de su desplazamiento se gesta el cambio. Bajo la necesidad de cuantificar el cambio y de describir sus cualidades, éste se abstrae, surgiendo así el concepto de variación; abstracción última mediante la cual los cambios son medidos [Cantoral, 1996]. Por todo lo anterior, el tratamiento que se da al fenómeno lleva consigo un pensamiento variacional y que por el proceso que sigue para su matematización y por los entes matemáticos utilizados para su cuantificación le podríamos llamar un pensamiento variacional avanzado.

Así pues, aquí la variación es interpretada, principalmente, a través de la ecuación diferencial no-homogenea de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI},$$

misma que nos permite predecir la curva elástica de la viga, producto final de la Flexión de Vigas.

En suma, podemos ver que hay un elemento fundamental que ocupa una posición central y que surge al tratar de cuantificar el cambio: la noción de eje neutro; de hecho, el estado final de la viga bajo carga está dado por la forma que adquiere aquí el eje neutro, llamándose entonces curva elástica, la cual mide las deflexiones de la viga; además, históricamente [Flores, 1998] la noción de eje neutro conllevó a una formalización matemática.

Un ejemplo donde hay movimiento pero no hay variación

Un Ejemplo en la Estática

Este ejemplo se obtiene de un área del conocimiento que sirve de base para el estudio de la Resistencia de Materiales, me refiero a la Estática, tomando el tema "Momento de una Fuerza Respecto a un Punto" o "Momento de una Fuerza Respecto a un Eje". En principio, un momento es provocado por la aplicación de una fuerza a un cuerpo rígido o bien, por la aplicación de un par de fuerzas; si este es el caso, las fuerzas poseen la característica de que deben ser iguales y opuestas separadas entre sí una distancia d perpendicular a cada línea de acción de ambas fuerzas. Físicamente d representa el brazo de palanca de la fuerza F. Así mismo, el efecto que produce esta fuerza al aplicarse en el cuerpo rígido es el de imprimirle un movimiento de rotación y es aquí donde pudiera pensarse que está involucrada la variación.

Este fenómeno es estudiado en dos y tres dimensiones, utilizando el álgebra vectorial como herramienta, de tal manera que el momento que produce una fuerza F respecto a un punto "O" se define como el vector: $M_0 = r \times F$, o de acuerdo a su significado escalar como $M = Fd$.

Apareciendo en la parte vectorial el vector de posición r, cuya función es la de definir el punto de aplicación de F, lo que conlleva a tomar en cuenta, para el efecto que produce la fuerza F aplicada en el punto A, la distancia del punto "O" (donde se solicita el momento) al punto "A" (donde se aplica la fuerza F).

Así pues, lo que interesa en este problema es conocer la magnitud de M_0, midiendo ésta la tendencia de la fuerza F a imprimir un movimiento de rotación al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido según el vector M_0, lo que significa que aquí no se estudia el movimiento bajo sus cualidades intrínsecas. Sin embargo, este fenómeno provoca un movimiento de rotación que si lo abstraemos lograremos percibir los sucesivos estados del movimiento, para así localizar el cambio y cuantificarlo a través de la variación. Pero el significado de M_0 y su definición rompen con este proceso, ya que no indican que se pretenda predecir el movimiento, sino sólo encontrar la tendencia de la fuerza F a imprimir un movimiento de rotación a través de $M_0 = r \times F$; es decir, en este problema no se pretende examinar cuáles son las etapas del movimiento, sino sólo decir que se genera un movimiento de rotación, además de su intensidad y en qué dirección gira el cuerpo rígido, y por tanto, queda fuera de ser una situación de variación.

También podemos observar que la variable tiempo queda fuera del fenómeno. Esto último se puede ver en el vector de posición r, ya que aquí sólo define distancias (está en función de distancias); sin embargo, vemos que r es un elemento fundamental debido a la función que asume en este problema, permitiendo localizar el punto donde tiene lugar la aplicación de la fuerza que provoca el giro y además permitiendo unir el punto o bien el eje de giro con el punto donde se aplica la fuerza, logrando de esta manera entrelazar los dos elementos claves del problema: el punto de aplicación de la fuerza y el punto o eje de giro, fungiendo entonces, como un brazo de palanca.

El ejemplo de la estática convertido en un fenómeno Variacional

Por otra parte, en el fenómeno anterior podemos considerar a la variación como incluyente del mismo: como ya se dijo antes, si consideramos las características intrínsecas del giro del cuerpo rígido alrededor de un eje, tal como su movimiento angular, podemos llegar a abstraer el movimiento, generándose en nuestro pensamiento la noción de cambio que conlleva al análisis del giro en infinitésimos desplazamientos $\Delta\theta$ en un intervalo de tiempo Δt pudiendo obtener así, la velocidad angular media: $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Una segunda abstracción viene cuando se pretende conocer la velocidad angular instantánea en el instante t obteniéndose a partir de la velocidad angular media, escogiendo intervalos de tiempo Δt y desplazamientos angulares $\Delta\theta$ cada vez más y más pequeños, surgiendo así: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$, de igual forma sucede con la aceleración. Así pues, la variación en este fenómeno se cuantifica a través de la posición angular ($\theta = \theta(t)$), velocidad angular ($\omega = \frac{d\theta}{dt}$) y aceleración angular ($\alpha = \frac{d\omega}{dt}$); ecuaciones diferenciales representadas a través de las ideas del cálculo. Es importante decir que se dan los mismos resultados si se introducen vectores: logrando esta idea al considerar un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo, tomándose un punto P del cuerpo para el análisis y su vector de posición r. Pero además se involucra un ángulo θ localizado en la circunferencia que describe P con centro en el eje de giro. También la posición de P y del cuerpo entero está definida por el ángulo θ, a este ángulo se le conoce como la coordenada angular del cuerpo. De acuerdo a esto, al dibujar sobre el eje de giro un vector ω y formar el producto vectorial $\omega \times r$, obtenemos el vector velocidad tangente a la trayectoria de P y perpendicular al plano formado por ω y r tal como sucede en el movimiento curvilíneo, donde se genera la relación $v = \frac{dr}{dt}$; por lo que $v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r$, donde ω es el vector velocidad angular. El vector aceleración surge de esta última relación, al derivarse:

$$a = \frac{dv}{dt} = \omega \times \frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r = \omega \times v + \alpha \times r = \omega \times (\omega \times r) + \alpha \times r$$

donde α es la aceleración angular. Así pues estas relaciones permiten predecir el fenómeno, donde aparece de nueva cuenta el vector de posición teniendo una función protagonica, ya que a través de éste se pudo cuantificar la velocidad y la aceleración angular.

Un ejemplo en la dinámica

Movimiento Curvilíneo en el Espacio

Aquí nos centraremos en un ejemplo ubicado en la cinemática, específicamente en el movimiento de una partícula en el espacio (su trayectoria), cuya posición es descrita a través de un vector de posición $r(t)$, siendo $t =$ tiempo. Y cuya trayectoria es definida por la función r. Si representamos esta variación por una curva tridimensional, donde el movimiento es representado a la vez por la función vectorial r y en particular cada punto de la trayectoria o movimiento es representado por el vector de posición $r(t)$; entonces, los estados sucesivos del movimiento, un vez abstraídos, los podemos analizar por el vector Δr, formado por dos vectores: $r(t)$ y $r(t+\Delta t)$, que definen las posiciones extremas de cada estado sucesivo o cambio, generándose la velocidad vectorial media: $\frac{\Delta r}{\Delta t}$. Estos sucesivos cambios podemos aún abstraerlos para así pensar en la variación del fenómeno, lo cual permitiría medirlos, representándose por la velocidad vectorial instantánea:

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$. Ídem con la aceleración ($a = \frac{dv}{dt}$).

Vemos que aquí la variación permite medir los cambios que experimenta una partícula, en cuanto a: su posición ($r = r(t)$), su velocidad ($v = \frac{dr}{dt}$) y su aceleración ($a = \frac{dv}{dt}$). En este ejemplo es más notorio el papel protagonico del vector de posición ya que el movimiento es representado directamente por la función $r(t)$.

Conclusión

Nuestro entorno físico está inmerso en fenómenos que involucran la variación y el cambio, provocados bajo la influencia de agentes de diferente índole: fuerzas, velocidad, aceleración, calor, frío, etc. En donde uno de los objetivos principales es el de predecirlos, para lo cual pretendemos apoyándonos en nociones que juegan un papel protagonico. En esta ocasión localizamos dos nociones importantes o fundamentales para los casos estudiados aquí: la noción de eje neutro y la noción de vector de posición. La noción de eje neutro fue localizada con base a un estudio epistemológico del tema "Flexión de Vigas", y a través del mismo identificamos que permite el estudio de la curva de las deflexiones, motivo por el cual la consideramos una noción central en este fenómeno variacional. Respecto a la noción de vector de posición, ésta es otra noción que la consideramos "central" para dos fenómenos de variación, localizados en la estática (que en realidad sólo se origino en la estática, para finalmente caer en la dinámica) y en la dinámica. Su importancia radica en el papel que juega en estos problemas, permitiendo en un caso encontrar ω y α; y en otro caso $r = r(t), v$ y a. En lo futuro, el camino que se trazó para localizar esta noción, será el mismo para otros casos; esto es, el de hacer varios estudios comparativos de fenómenos distintos (o de casos distintos dentro del mismo fenómeno), centrados en los conceptos fundamentales, con la característica de que en cada uno de ellos aparezca la misma noción, y donde se examine su comportamiento y papel que juega. Si este camino no nos da luz para la identificación de la noción central, se procederá a efectuar un estudio epistemológico del tema de interés con el objetivo de localizarla.

Así mismo, este trabajo está ubicado dentro de la línea de investigación denominada "pensamiento y lenguaje variacional" que por un lado estudia la matemática de la variación y el cambio, y por el otro los procesos complejos del pensamiento [Cantoral, 1996], por lo mismo, posteriormente iniciaremos el estudio del aspecto cognitivo, teniendo como marco teórico la Teoría de la Equilibración de Piaget. En esta parte se indagará cómo piensa el estudiante un fenómeno variacional bajo la influencia de las nociones centrales, y en consecuencia, observar si se ha apropiado de un pensamiento variacional. Con base en esta perspectiva, podemos decir que en estos fenómenos se esperaría que el estudiante asimilara-acomodara el movimiento bajo las nociones centrales, pudiendo abstraerlo y como consecuencia pudiendo ahora observar los sucesivos cambios inherentes al fenómeno. Cambios que al asimilarlos-acomodarlos permitirían abstraerlos bajo un interés especial: el de poder cuantificar el cambio y conocer sus cualidades, lo que conllevaría a una equilibración en sus esquemas presentes y en consecuencia a visualizar la variación a través de representaciones, tales como ecuaciones y gráficas. Estas hipótesis permiten plantear las preguntas: ¿la utilización de nociones centrales, en forma protagonica, facilita la apropiación de los diferentes fenómenos variacionales de la ciencia y la ingeniería? o dicho de otra forma, ¿ la utilización protagonica de nociones centrales ayuda al estudiante a la formación de un pensamiento variacional ? Antes deberíamos responder a la interrogante: ¿Qué situaciones de enseñanza se deben plantear que incorporen nociones en forma protagonica?

El siguiente paso en esta investigación es continuar en la presente etapa examinando algunos otros ejemplos donde se localice la variación para identificar y dar reconocimiento a las nociones centrales. En forma inmediata nos ubicaremos en las ecuaciones diferenciales utilizando el tema: "crecimiento y decrecimiento" de diversos fenómenos.

Bibliografía

Beer, F. y Johnston, R. 1972. *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Estática y Dinámica*. México: Editorial McGraw-Hill.

Cantoral, R. 1993. Hacia una Didáctica del Cálculo Basada en la Cognición. *Mem. Centroam. y Caribe Form. Prof. e Inv. en Mat. Educ.* 7 (1) (pp. 397-410)

Cantoral, R. 1996. Proyecto: *Pensamiento y lenguaje variacional.* Documento interno, Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.

Cohen, J. 1977. *Procesos del Pensamiento.* México: Editorial Trillas.

De Vega, M. 1984. *Introducción a la Psicología Cognitiva.* México: Alianza Editorial Mexicana.

Flores, R. 1998. *Sobre el Pensamiento Variacional: Una Exploración en Contexto.* México: CINVESTAV del IPN, (tesis de maestría).

Galileo. 1987. *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas Sobre Dos Nuevas Ciencias.* Madrid: Ed. Nacional. (Galileo. *Two New Sciences.* New York: The Mac Millan Company 1993).

Timoshenko, S. 1993. *History of Strength of Materials.* New York: Dover Publications.

Comportamientos gráficos y analíticos en las explicaciones de los estudiantes: situaciones con ecuaciones diferenciales

Miguel Solís Esquinca (solise@montebello.unach.mx)
Universidad Autónoma de Chiapas
México
AES-Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Resumen

En este escrito reportamos resultados de un análisis de entrevistas con estudiantes universitarios. La descripción de las acciones de los estudiantes en estas entrevistas fueron presentados en las actas de Relme 12(Solís & Cordero 1999). En esta ocasión presentamos los resultados del análisis de estas acciones. Éstos muestran la interdependencia de actos visuales y analíticos en la solución de un problema matemático. Otro resultado importante es el papel que juega en las explicaciones de los estudiantes el reconocimiento de patrones algebraicos y comportamientos gráficos como argumentos de sus respuestas. Estas argumentaciones surgen de un marco funcional y dotan de sentido a los conceptos del calculo. A todo el conjunto de conceptos y nociones involucradas en estas situaciones de argumentación a través de observar comportamientos y reconocer patrones es lo que hemos dado en llamar: Noción de Comportamiento Tendencial de las Funciones.

Introducción al problema de Investigación

El problema de investigación es estudiar entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales a través de observar actos visuales y actos analíticos que se presentan en las estrategias de los estudiantes al resolver un problema. Para este estudio se crea un ambiente gráfico específico, donde es posible encontrase con los argumentos gráficos usados en el precálculo y donde estaremos usando el recurso de las calculadoras que grafican. Observando estrategias de estudiantes identificaremos los actos visuales y analíticos que surgen de éstas y determinar el papel que éstos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales. Estaremos usando un argumento gráfico, favorecido por el uso de calculadoras que grafican funciones, y que hemos llamado "comportamiento tendencial" (Cordero & Solís 1997).

Visualización y análisis

Observando que un estudiante por momentos utiliza un pensamiento de tipo visual y por momentos uno de tipo analítico, asumimos ambos tipos de pensamiento como mutuamente dependientes. Existe un modelo que describe esta dependencia como la síntesis final de dichos actos (Zazkis et al. 1996). Aunque nuestras observaciones se refieran al modelo, las mismas evidencias permiten la flexibilidad de éste.

Un acto visual es un acto en el cual un individuo establece una fuerte conexión entre un constructo interno y algo al cual se accede a través de los sentidos. Un acto visual puede consistir de cualquier construcción mental de objetos y procesos los cuales un individuo asocia con objetos o eventos percibidos por él como externos. Por otro lado, puede consistir de la construcción, sobre algún medio externo de objetos o eventos los cuales el individuo identifica con objeto(s) o proceso(s) en su mente. Un acto analítico es cualquier manipulación mental de objetos o procesos con o sin la ayuda de símbolos.

Perspectiva Teórica

Trabajamos dentro de la perspectiva teórica de las construcciones mentales. Éstas son invariantes en la construcción del conocimiento matemático y se conocen como acciones, procesos, objetos y esquemas (Asiala et al 1996). Encontramos en el ámbito escolar un argumento en las gráficas de las funciones que por su naturaleza le hemos llamado comportamiento tendencial. Éste tiene un *statu quo* espistemológico y puede ser tratado como una categoría del conocimiento del Cálculo que tiene que ver con la construcción de un marco funcional en el sentido de establecer relaciones entre procesos y objetos a través de significados (Cordero 1997).

Metodología

La metodología general del proyecto es reportada en las actas de Relme 12 y básicamente consiste en los siguientes pasos:

- Transformar un hecho a un fenómeno didáctico.
- Describir las dificultades específicas de las situaciones de enseñanza.
- Establecer un marco teórico que explique las dificultades.
- Usar el marco teórico para diseñar situaciones.
- Considerar los resultados de 3 y 4 en la implementación e iteración.

Descripción de la Experiencia

Diez estudiantes se enfrentaron a las situaciones diseñadas, cinco entrevistas individuales se llevaron a cabo con cinco de cada uno de ellos, una entrevista colectiva se llevó a cabo con un grupo formado por los cinco restantes. Tres entrevistadores tomaron parte en la experiencia.

Para las entrevistas se dispuso de un espació físico permanente (un aula acondicionada) en una institución de educación superior de México. Más de una cámara de vídeo, generalmente dos, filmaron la entrevista, además, la entrevista fue audiograbada por más de una grabadora. Las entrevistas individuales tuvieron una duración de aproximadamente una hora mientras que la entrevista colectiva duró una hora y media.

Las Situaciones

El protocolo de la entrevista individual consistía de tres partes: en la primera se le pedía al estudiante que bosquejara la gráfica de una parábola y luego contestaba preguntas acerca de las operaciones sobre los coeficientes y su relación con los efectos en la gráfica (cambio de pendiente, traslación), la intención de esta parte era que el estudiante se familiarizara con una "aritmética gráfica"; en la segunda parte de la entrevista, se presentaba la ecuación diferencial $y' + y = 0$ y se preguntaba sobre su solución, algebraica y gráfica, lo mismo para la ecuación $y' + y = F(x)$ cuando $F(x) = k$, $F(x) = x$ y $F(x) = x^2$; en la tercera parte se trabajó la generalización $F(x) = x^n$.

Para la entrevista colectiva la situación consistió en lo siguiente: primero se presentaba en una hoja dos columnas, la de la izquierda mostraba cuatro ecuaciones las cuatro ecuaciones diferenciales del párrafo anterior, en la columna de la derecha se mostraban ocho gráficas que eran dos de las soluciones para cada ecuación, aquí se les pedía relacionaran las dos columnas; enseguida se presentaba una hoja similar a la primera pero ahora mostrando en la columna de la derecha ocho expresiones algebraicas que correspondían a dos de las soluciones de cada ecuación; en una tercera hoja se presentaba tres columnas, la de la izquierda mostraba las ecuaciones, la del centro las ocho gráficas y la de la derecha las ocho expresiones algebraicas. En la tercera y segunda hoja también se les pedía relacionar las columnas. La última parte de la situación también se preguntaba por la ecuación $y' + y = x^n$.

Descripción de las acciones de los estudiantes

1 Estrategias observadas

a) Estrategias de tipo local. Los estudiantes suman ordenadas, evalúan las funciones en un punto para graficar. En este tipo de estrategia el estudiante tuvo que repetir sus procedimientos cuando se enfrenta a la situación (suma varias ordenadas, evalúa en varios puntos.

b) Estrategias de tipo global. Los estudiantes reconocen comportamientos de las gráficas. La variación de los coeficientes y su efecto de trasladar y cambiar la pendiente de la gráfica afectada entra en este tipo de estrategias. Estas estrategias involucran aspectos cualitativos de las gráficas, el estudiante encuentra dificultades en diferenciar dos gráficas con comportamientos similares.

c) Síntesis de estrategias. Encontramos también estrategias combinadas, esto es, al enfrentarse a una situación el estudiante recurre por momentos a ambos tipos de estrategias.

2 Reconocimientos de patrones.

a) Ecuación $\leftrightarrow$ Expresión Algebraica de la Solución. Los estudiantes reconocen el término F(x) de la ecuación como parte fundamental de la solución. En esta situación intenta comprobar (sustituyendo en la ecuación la solución) sus conjeturas, favorece la dirección de ir de la solución a la ecuación. Los procedimientos analíticos de derivar y sumar permitieron reconocer los términos de la solución en términos de las derivadas sucesivas del término F.

b) Ecuación $\leftrightarrow$ Gráfica de la Solución. Los estudiantes reconocen la gráfica de la solución a partir de observar los comportamientos gráficos de la solución y relacionarlo con el comportamiento gráfico del término F(x). Si el estudiante, en el registro geométrico, no atiende los comportamientos gráficos puede establecer esta relación.

c) Ecuación $\leftrightarrow$ Gráfica de la Solución $\leftrightarrow$ Expresión Algebraica de la solución $\leftrightarrow$ Ecuación. Ante esta situación los estudiantes establecen una dirección que va de la ecuación a la solución algebraica y luego a la gráfica de ésta.

3 Operaciones gráficas.

a) Traslación y cambio de pendiente de una curva prototipo. Operando una sola función a partir de la variación de los coeficientes, los estudiantes identifican los efectos en la gráfica.

b) Operaciones binarias entre gráficas. Comparación de gráficas, suma de gráficas. El estudiante describe la gráfica de una función en referencia a otra, obtiene la gráfica de una función a través de las gráficas de los sumandos. Reconocen una gráfica la como compuesta por al menos dos funciones (por medio de la suma de éstas, por ejemplo)

Análisis de las entrevistas

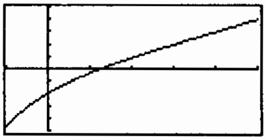
Sobre las estrategias de tipo local y global, la situación, requirió que los estudiantes tuvieran que interactuar entre estos dos tipos de estrategias para poder resolver el problema que se les pedía. Un ejemplo de estrategia local es cuando los estudiantes suman ordenadas en algún punto determinado, las estrategias de tipo local son, por ejemplo, cuando los estudiantes atienden mas a los comportamientos de las gráficas, cuestiones como función creciente, decreciente son atendidas en este tipo de estrategias. Los estudiantes pudieron reconocer patrones, sobre todo algebraicos. Aún cuando en la primera parte de la entrevista los aspectos gráficos fueron favorecidos, cuando el estudiante se enfrenta a encontrar relaciones entre la ecuación diferencial y su solución, la mayoría de los estudiantes no tienen dificultad para encontrar el patrón analítico. En la entrevista colectiva, la situación se diseña para favorecer los aspectos gráficos de esta relación. Los datos obtenidos de esta experiencia nos dicen que a partir de una expresión analítica (la ecuación diferencial) es difícil reconocer la gráfica de su solución. Sin embargo, el grupo logra hacer algunas relaciones correctamente, en esta situación exitosa se puede ver la síntesis entre pensamiento visual y analítico. Presentamos el siguiente extracto de entrevista que ilustra lo dicho:

Estudiante:	Creo que esta va con esta (señala la ecuación y la gráfica).
Entrevistador:	¿Si? ¿Por qué?
Estudiante:	Aquí este es *x* (señalando el término *f*(*x*)) ... y la gráfica de *x* es una recta ... y la que más se parece a una recta es esta. Aquí *y* se está sumando con su derivada, si no estuviera la derivada la solución sería una recta, pero... algo debe hacerle la derivada para que se curve un poco la gráfica ...

Como se puede observar, el estudiante en un tiempo relativamente corto involucra varias operaciones mentales para justificar su decisión. Aunque todo su argumento pareciera estar en el terreno puramente gráfico, se está al mismo tiempo manifestando un pensamiento de tipo analítico, lo podemos identificar cuando el estudiante opera funciones como objetos (suma de la derivada con la función), en este sentido, la gráfica de la función deja de ser un constructo mental percibido como externo para ser un símbolo de la función misma. Podemos decir que los dos tipos de pensamiento se han sintetizados y eso ha permitido la identificación solicitada.

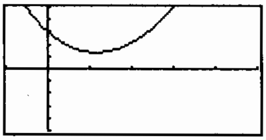
La ecuación y la gráfica en cuestión son las siguientes:

$$y'(x) + y(x) = x$$

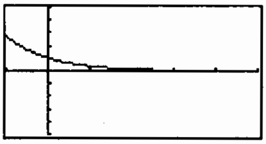


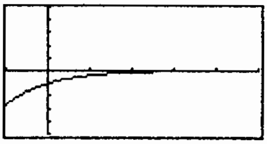
Con esa misma estrategia logran después relacionar las ecuaciones con término $F(x) = x^2$ con la gráfica que parece una parábola y la ecuación $y' + y = 0$ con las gráficas que tienen asíntota horizontal igual a cero, esto es:

$$y'(x) + y(x) = x^2$$

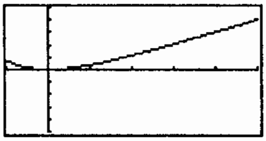


$$y'(x) + y(x) = 0$$





Otras gráficas de las soluciones de las ecuaciones no fueron identificadas, esto es debido al desconocimiento de la expresión analítica de la solución, por ejemplo, la gráfica



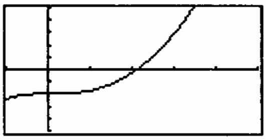
no fue reconocida en esta instancia como la gráfica de $y'(x) + y(x) = x$ ya que su "forma" se parece mas a una parábola que a una recta, argumento que funcionó en otro caso. Sin embargo, cuando los estudiantes tienen las expresiones analíticas de las soluciones pueden establecer las relaciones correctamente, reconociendo el patrón gráfico y analítico.

Las situaciones que se presentaron favorecieron una concepción global del concepto d función, esto es, la gráfica es vista como un objeto completo limitado por ventanas, en este sentido adquiere importancia el análisis de los comportamientos gráficos de las funciones. Los estudiantes operan las gráficas (sumándolas) y obtienen como resultado de esta operación una nueva gráfica que no es la serie de nuevos puntos producto de una operación sobre las ordenadas sino una que "hereda" de alguna manera los comportamientos de las gráficas a operar. El siguiente extracto de entrevista ejemplifica esto:

Estudiante: La gráfica debe ser esta ... porque aquí, ... de este lado se parece a la *e* a la *x* ... o a la menos *e* a la menos *x* quiero decir y luego aquí ... de este lado .:. es como una parábola.

La gráfica en cuestión era y la expresión analítica con la que se pretendía relacionarla eran

$y'(x) + y(x) = x^2$



$y(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$

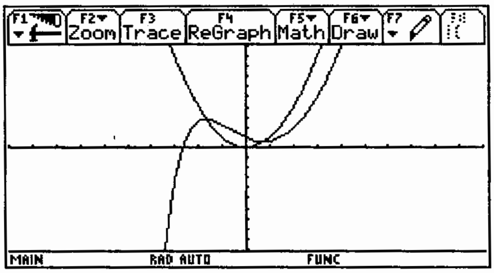
Aunque la gráfica es una solución de la ecuación, ésta no es la gráfica de $y(x)$ y de eso se percata uno de los estudiantes empleando una estrategia de tipo local. Ésta consiste en sustituir la x por cero y darse cuenta que la ordenada en $x = 0$ es positiva y no –2 como aparece en la gráfica. Puede decirse que la identificación positiva de la gráfica, en esta situación, necesitó, por un lado, de ver a la expresión algebraica completa de la solución de la ecuación diferencial como una expresión compuesta de expresiones más simples (en este caso la suma de dos funciones), de ahí el análisis de los comportamientos de estas funciones sumandos, determinará el comportamiento de la función suma; esta estrategia permite visualizar la forma de la gráfica buscada, sin embargo, por otro lado, es necesario un análisis de tipo local para poder discriminar gráficas de la misma forma para hallar la correcta.

Comportamiento tendencial de la solución

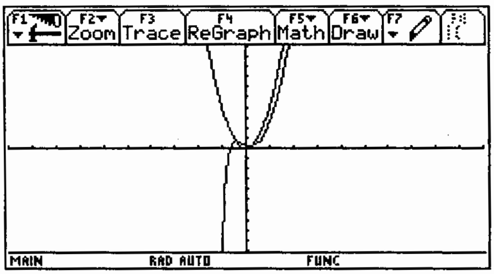
En las explicaciones de los estudiantes es posible encontrase frases como "la gráfica se parece a una parábola", o bien, ver que relacionan la gráfica de $y(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$ con la ecuación $y'(x) + y(x) = x^2$ porque la gráfica de $y(x)$ se "parece" a la gráfica del término $F(x)$ de la ecuación. Sin embargo, esto no quiere decir que una de las parábolas se aproxime a la otra, esto último, en términos matemáticos quiere decir que $\lim_{x \to \infty} y(x) = F(x)$ o $y(x) \to F(x)$; por el contrario, un análisis elemental sobre $y(x)$ y $F(x)$ (para este ejemplo) nos muestra que a medida que x aumenta, el valor $|y(x) - F(x)|$ aumenta indefinidamente, esto es la diferencia entre $y(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$ y $F(x) = x^2$ aumenta a medida que x tiende a infinito.

Si $x \to \infty$, entonces $|y(x) - F(x)| \to \infty$

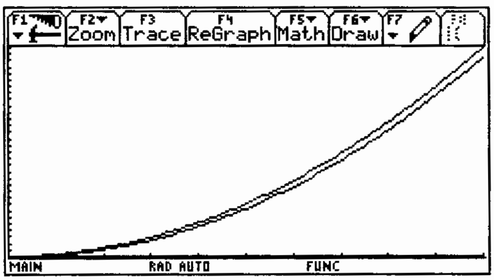
¡Y sin embargo se parecen! La siguiente figura muestra las gráficas de las dos funciones e una ventana de calculadora con $x \in [-10, 10]$ y $y \in [-10, 10]$



Pero para ver sus comportamientos al infinito es necesario establecer otros parámetros de la ventana. La siguiente figura nos muestra las mismas gráficas para un tamaño de ventana de $x \in [-40, 40]$ y $y \in [-40, 40]$.



y la siguiente para una ventana de $x \in [0, 40]$ y $y \in [0, 1600]$



Esta es noción de tendencia global, es decir, globalmente las gráficas se confunden aún cuando localmente difieren cada vez mas a medida que x crece. Nociones como estas aparecen en los estudiantes y son las que permiten argumentar sobre las relaciones entre solución y ecuación diferencial. Esta noción en particular la hemos llamado "comportamiento tendencial de la funciones" y surge en un marco funcional y es favorecido por el uso de calculadoras y programas informáticos que grafican funciones. La noción de comportamiento tendencial es en si un argumento que establece relaciones entre funciones y está compuesto por una colección coordinada de conceptos y vive en situaciones del cálculo donde se discuten aspectos globales de variación. Los comportamientos asintóticos, como argumentos de relación entre gráfica serían también comportamientos tendenciales. La noción discutida es una categoría más amplia que incluye a aquellos comportarnientos gráficos y analíticos que permiten explicar la relación entre gráficas.

Resultados

En las explicaciones de los estudiantes los comportamientos gráficos y los patrones analíticos juegan un papel importante como argumentos a sus respuestas. Dentro de la categoría de la noción de comportamiento tendencial incluimos los comportamientos gráficos descritos en la sección anterior, surgidos de la experiencia que se reporta, pero además incluimos otros tipos de comportamientos como los asintóticos (los que se aproximan a una curva por abajo o por arriba e ella como también los que se enredan en ella) así como los patrones algebraicos. De este análisis podemos decir que en la noción de comportamiento tendencial están involucradas conceptos y nociones del cálculo, en ese sentido, esta noción adquiere un estatus epistemológico y puede ser pensado como un programa que organice contenidos del cálculo escolar.

Este estudio exploratorio, además de darnos información sobre las estrategias de los estudiantes, también permitió que éstos adquirieran habilidades como: reconocer patrones, construir comportamientos, simular situaciones de variación con los coeficientes entre otras. Nociones paramatemáticas como variación, variación de la variable, variación de los coeficientes, comportamientos gráficos en general, reconocimiento de patrones, relaciones entre gráficas, relaciones entre gráfica y expresión analítica y viceversa, relaciones entre la primitiva y derivada fueron, también, manejadas por los estudiantes. Las nociones y las habilidades descritas no son objeto explícito de la enseñanza de la matemática (de ahí el calificativo paramatemático) pero son herramientas importantes en este marco funcional descrito. Si se piensa que la matemática escolar tiene una naturaleza dual, ya que, por un lado se costituye en intrumento para el usuario de un conocimiento matemático, por otro, es objeto de estudio para un especialista de algún tópico matemático en particilar (Cantoral & Farfán 1998). En este sentido, la enseñanza de la matemático no puede redicirse a la enseñanza de los conceptos via su definición. Aquí que los significados de los objetos matemáticos adquieran importancia.

Comentarios Finales

El diseño de la entrevista respondía más la posibilidad de observar las relaciones que se establecieran entre la expresión algebraica de una ecuación diferencial y la gráfica de su solución, en ese contexto, la noción de comportamiento tendencial jugó un papel fundamental. Aunque es posible caracterizar algunos actos como visuales y analíticos, y observar su interdependencia, el diseño de la situación no permitió observar de forma clara forma en que esta interdependencia entre los dos tipos de pensamiento durante todo el proceso de solución. Una nueva situación se está diseñando y tiene como finalidad ver cómo los actos visuales y analíticos se vas sucediendo a través de un proceso de solución de problemas, la relación que guardan y el papel que juegan en este proceso.

Referencias

Asiala, M., Brown A., DeVries, D, Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. 1996. A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education. II* (6), 1-32.

Cantoral, R. y Farfán, R. 1998. Investigación en didáctica de las matemáticas y la profesionalización docente: Retos de la educación superior.

Cordero, F. & Solís, M. 1997. Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. *Cuadernos Didácticos No. 2.* Segunda Edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Cordero, F. 1997. El comportamiento tendencial como una categoría de conocimiento del cálculo. Publicaciones del Area de Educación Superior. Serie: Antologías No. 2. Cinvestav IPN.

Solís, M. & Cordero, F. 1998. Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales. En R. Farfán Ed. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Pp 69-73. Bogotá, Colombia: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica.

Solís, M. & Cordero, F. 1999. Comportamientos gráficos en la visualización de las ecuaciones diferenciales lineales. *Actas de la Décima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* En prensa: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. 1996. Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education.* (27)4, 435-457.

Fenómenos físicos implicados a través de las condiciones de frontera en las ecuaciones diferenciales parciales gobernantes

Leticia Corral, Roberto Rodríguez
Instituto Tecnológico de Cd. Cuauhtémoc
México

Antonino Pérez Hernández[1]
Centro de Investigación en Materiales Avanzados CIMAV
México

Objetivo de la Investigación

Concentración de *Modelos Matemáticos* que representan algunos *fenómenos físicos* que se presentan en la física e ingeniería, a partir de una misma *Ecuación Diferencial Parcial (**EDP**)*, diferenciados por sus Condiciones de Frontera con la finalidad de contribuir con material didáctico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en el aula.

Justificación

Ejemplificar clara y brevemente la importancia que presentan las Condiciones de Frontera y las Condiciones Iniciales en el comportamiento o respuesta de un sistema gobernado por una misma Ecuación Diferencial Parcial[2].

Marco Teórico 4

Las ecuaciones diferenciales son la piedra angular para representar conceptos matemáticos en diferentes disciplinas, por ejemplo, al hablar de fenómenos de transferencia de calor, Myers, 1971, muestra como representar las fronteras de un sistema físico el cual involucra términos energéticos y la formulación de la correspondiente **EDP** a partir de un balance de energía. Los métodos de solución son variados, y pueden ser clasificados en *numéricos y analíticos.* Se eligió en éste trabajo el analítico, ya que éste muestra explícitamente la solución buscada.

Metodología

Se tomó material contenido en el curso de *Matemáticas Aplicadas a los Materiales* que se imparte en el CIMAV, el cual tiene como fin que el estudiante adquiera y domine la herramienta matemática base, que auxilie en la construcción de los modelos matemáticos que se presentan en las áreas de las ciencias e ingeniería, y le permita llegar a una solución por métodos analíticos o numéricos así como sus implicaciones. En el presente estudio nos limitaremos a casos unidimensionales por simplicidad.

Métodos implicados en la Solución de EDP

Los métodos más comunes, usados para la solución de **EDP**, son, entre otros: *Separación de Variables (Soluciones Parciales), Duhamel (Superposición), Variación de Parámetros, Transformada de Laplace y Transformada de Fourier.*

Hipótesis de la Investigación

Las representaciones mentales que presentan los estudiantes acerca de las **EDP** implican un proceso mecanizado de métodos para obtener soluciones que deja de lado el signifi-

[1] Autor: (52 + 14) 39 11 01, Fax: 39 11 12; Email: antonino@yakko.cimav.edu.mx
[2] Utilizaremos las iniciales **EDP, C.F. y C.I.** para expresar: Ecuación(es) Diferencial(es) Parcial(es), Condición(es) de Frontera y Condición(es) Inicial(es), respectivamente.

cado físico que ellas contienen, más aún, difícilmente podrán abstraer de la realidad y plasmar en un modelo matemático.

Modelos Matemáticos

Las expresiones matemáticas que involucran las ecuaciones diferenciales parciales, **EDP**, son el pilar sobre el cual se representan los fenómenos físicos. El primer paso para representar una situación física particular, es mediante la formulación del problema que deseamos describir o ecuación gobernante.

Como consecuencia de nuestro análisis, debemos buscar la simbología adecuada que represente al sistema en cuestión a través por ejemplo, de un balance de materia, o un balance de energía, según sea el caso. En particular al representar una situación física a través de un balance de energía debemos considerar la transferencia de calor por tres medios: conducción, convección y radiación, según sea el caso, de tal manera que encontremos las ecuaciones que la simbolicen.

En el segundo paso, se observa, que un balance no es suficiente para definir un fenómeno físico, ya que éste siempre tendrá fronteras que lo limitan, es por ello que se consideran las **Condiciones de Contorno o C.F.** para que nuestro sistema quede totalmente definido en forma particular. Es claro que en la ingeniería se presentan fenómenos físicos que son gobernados por una misma **EDP,** y la respuesta está supeditada al como se presentan las **C.F** y las **C.I.** en dicho fenómeno según el método de solución usado. La solución explícita obtenida puede ser un poco diferente, en su expresión o extensión, sin embargo, debe ser equivalente.

Con este antecedente resulta claro que si a la **EDP** se le realiza algún cambio a las **C.F**., la respuesta o solución que se obtiene implica una situación totalmente distinta.

En esta investigación el modelo matemático que gobierna al fenómeno de transferencia de energía es nuestro punto de partida para, que a través de una misma **EDP** podamos representar distintos comportamientos de objetos o sistemas de estudio cambiando las **C.F.**

En la Tabla 1 se muestran algunos modelos matemáticos que definen situaciones físicas que ocurren en nuestro entorno y que representan nuestro objetivo primordial de contribuir con material didáctico a través del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el aula contemporánea.

Básicamente se muestran dos modelos que definen tres fenómenos físicos, los primeros cuatro casos (A, B, C y D) se asocian a un fenómeno de transferencia de calor o masa y los últimos dos (E y F), a la vibración mecánica de una cuerda.

Anteriormente se listaron técnicas de solución, éstas presentan ventajas, según el tipo de **EDP, C.F**. y **C.I.** a resolver. En muchos casos dos o más técnicas permiten resolver un mismo problema, la forma de la solución puede ser diferente pero equivalente. En la Tabla 1 se muestra, para 6 casos, la **EDP** gobernante y la diferencia substancial a su comportamiento lo establecen las **C.F** y **C.I.** Antes de explicar el fenómeno físico implicado en cada uno de los ejemplos, es conveniente explicar qué son y qué definen las **C.F**. y las **C.I.**

Las condiciones frontera (C.F.).

Como su nombre lo indica, se asocian a la situación o relación que establece el sistema de estudio con el medio que lo rodea, de ahí su gran influencia en el comportamiento del sistema de estudio, ya que implica el como la energía o materia contenida en el sistema (primer set de la Tabla 1) se transfiere.

Las **C.F.** caracterizan el (los) valor(es) que toma la variable dependiente en cualquier momento dado un valor fijo en su coordenada espacial, *x,* en los extremos del sistema, que para el caso de un problema normalizado varía de *0* a *1.*

Es decir, si $x=0$, nos indica que la variable dependiente, $U(x=0;\ t) = U(0;\ t)$, adopta cierto comportamiento en el extremo izquierdo del sistema. En tanto que, si $x=1$, señalará el comportamiento de la variable dependiente, $U(x=1;\ t) = U(1;\ t)$, en el extremo derecho del sistema.

La **C.F.** puede estar dada por un valor constante o variable o por el gradiente (constante o variable) de la variable dependiente (o dimensión de estudio) que expresa la temperatura, concentración de materia y vibración mecánica. A continuación se expresa el significado físico de cada una de las condiciones frontera de la Tabla 1.

C.F.	Significado
$U(0;\theta) = 0$ $U(1;\theta) = 0$ $V(0;\theta) = 0$ $V(1;\theta) = 0$	*C.F. fija o constante,* sin importar que ocurra en el interior del sistema. En cada caso expresa que la temperatura o concentración *(U)*, tiene el valor de referencia y *(V)*, análogamente, sólo que es referido a la vibración en los extremos $x = 0$ y $x = 1$ del sistema.
$V(0;\theta) = A_0 \sin(w\theta)$	*C.F. variable.* Aquí supone la variación de la variable dependiente: vibración en el extremo $x = 0$, en forma armónica y de amplitud máxima A_0 y el cambio con el cual se realiza ésta variación es con una frecuencia $w/2\pi$.
$U_x(0;\theta) = -1$	*C.F. gradiente constante (flujo).* En éste caso supone que la razón de cambio en la frontera, observada punto a punto es, constante negativa *(-1)*, por lo que implica que a la izquierda de $x = 0$ la temperatura o concentración de masa es mayor que a la derecha de x = 0, por lo tanto el medio cede energía o materia, al interior del sistema.
$U_x(1;\theta) = 0$	En éste caso implica que la razón de cambio no existe en la frontera $x = 1$, se dice que el sistema se encuentra aislado. No existe intercambio de energía a materia en esta fontera.
$U_x(0;\theta) = hU$ $U_x(1;\theta) = -hU$	*C.F. gradiente variable.* Supone que la razón de cambio en la(s) frontera(s) flujo del sistema-medio, está sujeta o es proporcional a la temperatura o concentración de materia presente en dicha frontera. El signo *(+), (-)* en las fronteras $x = 0$ y $x = 1$, respectivamente, implica que el sistema cede al medio. El caso contrario, *(-), (+)* en las fronteras $x = 0$ y $x = 1$, respectivamente, implica que el sistema absorbe del medio

La condición inicial (C.I.)

Como lo indica el nombre, el estado que guarda la variable dependiente en el sistema, al inicio o arranque de nuestra observación o estudio, es decir, establece cual es la distribución de la temperatura, concentración o en el caso de vibración mecánica la forma de la cuerda al iniciar la observación.

Su importancia radica, dadas las **C.F.**, en el tiempo de respuesta del sistema, por ejemplo, si un material se desea secar, el tiempo para realizarlo dependerá de los coeficientes de transferencia de masa en la frontera (**C.F.**), y propiedades del material, pero también, de la cantidad inicial de humedad (**C.I.**), en el cuerpo o sistema. A diferencia de las **C.F.**, ésta condición, en todo problema de interés, cambia. A continuación se expresa el significado físico de cada una de las condiciones iniciales de la Tabla 1.

C.I.	Significado
$U(x; 0) = 0$ $U(x; 0) = 1$ $V(x; 0) = 0$	*C.I. constante.* Implica que el valor de la variable dependiente en cualquier punto al interior del sistema es el mismo.
$V(x; 0) = f(x)$	*C.I. una función.* En éste caso supone que la variable dependiente posee valores diferentes y éstos están sujetos a su posición interna del sistema *(x):* puede expresar la forma de la cuerda en el caso de una cuerda vibrante al inicio del experimento o la distribución de temperatura o masa en el sistema.
$V_\theta(x; 0) = 0$ $V_\theta(x; 0) = 1$	*C.I. una velocidad.* Supone que en la velocidad con la cual se desplaza o cambia la variable dependiente, en el caso de la cuerda será la velocidad con la que se desplaza un punto cualesquiera. Si es una constante, esto implica que la velocidad es la misma en todo punto. El cero implica que en el sistema se parte del reposo.
$V_\theta(x; 0) = g(x)$	Supone que existe una distribución o perfil de velocidad inicial según su posición al interior del material.

A continuación se da una breve descripción del fenómeno físico y el nombre del método usado para obtener la solución de la **EDP** en cada caso de la Tabla 1.

Caso A

El sistema o pared plana, inicialmente, (**C.I.**), su temperatura o concentración de masa normalizada es nula (no contiene o es el valor de referencia), se encuentra aislada en su extremo derecho, x = 1, y sujeta a un flujo de calor en su extremo izquierdo, x = 0, del cual sugiere el ingreso de energía o materia a la pared o sistema. Un ejemplo en ingeniería a tal problema puede ser una obstrucción de flujo en un reactor nuclear: **"el accidente de Chernobyl"**, en éste caso, el flujo de energía proviene del reactor y el aislamiento es en la práctica, por la baja transferencia de energía disipada en x = 1.

El tránsito térmico se calcula mediante el método de variación de parámetros En la Figura 1 del Anexo 1 podemos observar la ilustración de la pared plana aquí descrita.

Caso B

Considere una pared plana, inicialmente (**C.I.**) a una temperatura uniforme o concentración de masa = 1 (supone que ésta es máxima, problema normalizado), la cual en sus caras extremas se sujeta repentinamente a una temperatura nula (**C.F.**). Ejemplo: ésta situación se presenta cuando la pared en cuestión se somete al transito de un fluido en estado laminar, beneficiando el proceso de transferencia de calor, así podemos considerar que la resistencia térmica es nula o que el coeficiente de transferencia de calor es infinito. La condición anterior garantiza que la temperatura en la superficie del sólido esta en equilibrio con el fluido, la cual es la temperatura mínima o de referencia en el sistema (el cero). El método empleado fue el de separación de variables. El comportamiento de las isocronas de temperatura normalizada podemos observarlas en la Figura 2 de Anexo 1, observe que el valor de u en los extremos $x = 0$ y $x = 1$ es nulo en todo momento.

Caso C

Intercambiador de calor, Q representa la fuente de energía, bajo esta situación se dan dos casos.

a) El caso explícitamente detallado en la Tabla 1, si Q es positiva, presenta la situación en la cual se genera energía en el interior del intercambiador, por lo tanto este emite calor al exterior. Ejemplo de esto son las reacciones exotérmicas o el caso de un radiador. El método utilizado para la solución fue el de variación de parámetros.

b) Realizando cambios de signo en Q y h (en **C.F.**), Q (-) representa una fuente de absorción de energía (retira energía del medio), situación que se presenta cuando en el interior se realiza una reacción química endotérmica obteniendo energía para su realización retirándola del medio exterior del sistema o en procesos de recuperación de energía (cambio de signo en **C.F.**, para indicar que entra energía al sistema, precalentamiento de gases a partir de los gases de combustión.

Caso D

En éste caso, se muestra la situación de una fuente de energía interna constante, patiendo de una temperatura nula, **C.I.**, y se fija las **C.F.** en cero, observe que la solución no diverge a pesar de que existe una fuente de energía y esto se debe a las **C.F**. que obligan al sistema a retirar cuanta energía llegue a las paredes, transfiriéndola al medio. Ejemplo: considere un elemento de un reactor nuclear el cual está en la forma de una placa plana. Antes de iniciar nuestro análisis, la generación de energía ha estado creciendo lo suficiente, tal que una distribución de temperatura de estado estable ha sido alcanzada en cada cara de la placa. La generación es detenida repentinamente, exactamente al inicio de nuestro experimento (iniciamos en *tiempo* $= 0$ *o* $\theta = 0$), por lo cual, la placa se enfría. Durante el proceso de enfriamiento la temperatura en cada cara es constante. El método de solución empleado fue el de separación de variables.

Los casos E y F se asocian al fenómeno de vibración, en particular al fenómeno de una cuerda.

Caso E

Considere una cuerda muy larga,[3] sujetando su extremo en $x=0$ a un estímulo mecánico armónico simple de amplitud A_0, generando una oscilación viajera en la cuerda. Aquí las **C.F.** en $x = 0$ es claro que cambian con el tiempo y está ligada al estímulo extremo que efectúa el trabajo de realizar la oscilación (ver **C.F.** en Tabla 1), pero se observa que no existe **C.F.** en el otro extremo, esto debido a que la cuerda es suficientemente larga que no se vera afectada por la fuente, se indica esta situación bajo el supuesto de que $x \to \infty$, por lo que la vibración es nula $(V = 0)$. El método que se utilizó para solucionar este problema fue el de la transformada de Laplace.

Caso F

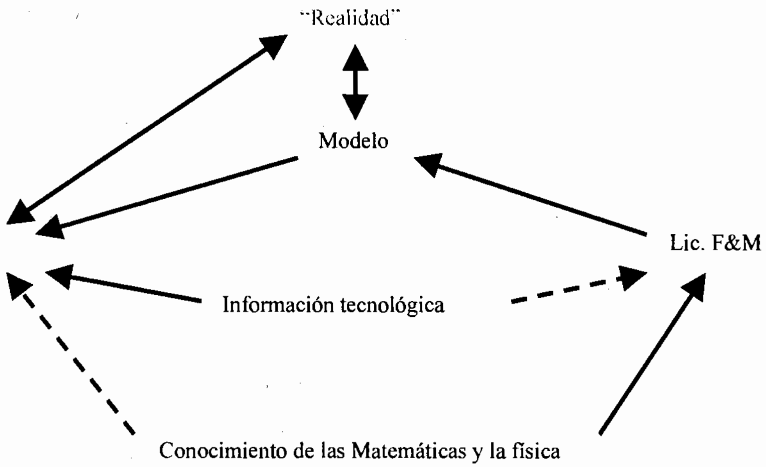
Los extremos de una cuerda sujeta y fija con libertad de movimiento en su interior. Ejemplo: cuando se rasga una cuerda de guitarra o un cable. Método empleado: separación de variables.

Resultados

Se ha observado en los estudiantes que ingresan al Postgrado, los cuales provienen de distintas carreras, entre las que destacan: *ingeniería y licenciatura en física y matemáticas,* que, los estudiantes provenientes de escuelas de ingeniería, por lo general, poseen valiosa información tecnológica, pero, muestran deficiencia en conocimientos de las matemáticas y la física, por lo

[3] **0**

cual, dado un modelo determinado, el cual no construyeron ellos a partir de una realidad, sin embargo, aterrizan en ella. Por otra parte, los estudiantes provenientes de una carrera de licenciatura en física y matemáticas poseen escasa información tecnológica, a diferencia de los estudiantes de ingeniería, sin embargo, tienen un conocimiento de las matemáticas y la física de muy buen nivel, lo cual les permite construir un modelo sin dificultad , el cual difícilmente aterrizan en una realidad, como se muestra en el siguiente esquema.



Bibliografía

Zill, D. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, 1988, México.

Myers, G. Analytical Methods in Conduction Heat Transfer. McGraw-Hill, Inc., 1971, United States of America.

Kreyszig, E. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I, Limusa, 1985.

Kreyszig, E. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. II, Limusa, 1991.

Wylie, R. Matemáticas Superiores para Ingeniería, McGraw Hill, 1982.

James, J.F. "A Students Guide to Fourier Transforms", Cambridge University Press, 1995.

Arfken G. B. And Weber, H. J., Mathematical Methods for Physicists, Fourth Edition, Diana, 1981.

Hsu, H. P., Análisis de Fourier, Fondo Educativo Interamericano, 1973.

Jaeger, J. C., Introduction to the Laplace Transformation, Chapman and Hall Ltd., Methuen & F. N. Spoon, 1966.

Para más información sobre el accidente de Chernobyl consultar en Internet: http://www*bcf.usc.edu/~meshkati/chernobyl.htm/

Organismo Internacional de Energía Atómica. IAEA, International Atomic Energy. //www.iaea.org/world atom/. IAEA Books. INIS Home Page Nuclear information. //www.iaea.org/programmes/inis/inis.htm

The Virtual Nuclear Tourist. //www.cannon.net/~gonyeau/nuclear/index.htm Significant Nuclear Power Plant Events.

La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería

Patricia Camarena Gallardo, Virginia Suárez Bueno
Instituto Politécnico Nacional
México

Introducción

La transformada de Laplace es un tema que se inserta dentro de lo que se ha llamado la nueva matemática [Camarena, 1999], por lo que su forma de manejo es especial, posee elementos que no son fácilmente manipulados a través de la matemática tradicional. Esto mismo conduce a tratar con alternativas para presentar la transformada de Laplace a estudiantes de ingeniería, una de estas formas es la que se presenta en este trabajo, es decir, la matemática en el contexto de la ingeniería, de hecho, en el marco que le dio origen, a saber: en la solución de circuitos eléctricos.

Como se ha mencionado en diversos trabajos [Camarena, 1987] la matemática en contexto aborda una gran cantidad de factores que intervienen en la problemática de la enseñanza de las matemáticas en escuelas de ingeniería; entre los que se encuentra el contar con una didáctica específica para impartir clases para futuros ingenieros, lo cual favorece el proceso enseñanza-aprendizaje [Camarena, 1984].

La transformada de Laplace en Ingeniería

En la historia de las matemáticas se encuentra la transformada de Laplace en el marco de los circuitos eléctricos dentro de los trabajos de Oliver Heaviside [1949], con una representación no igual a la que se maneja en los días presentes. Después de constituirse como una herramienta de trabajo para resolver ecuaciones diferenciales, se vincula con otras áreas de la ingeniería.

La ingeniería en electrónica es una de las ingenierías de más auge a fines del siglo XX, razón por la cual las que suscriben centran su atención en esta rama de la ingeniería. Dentro de la ingeniería en electrónica y sus ramas afines, se cuenta con al menos tres diferentes usos de la transformada de Laplace.

La primera es en la solución de ecuaciones diferenciales que representan un circuito eléctrico cuando la señal de entrada al circuito es una función generalizada [Camarena, 1999]. La segunda cuando se trabaja con la llamada función de transferencia de un sistema eléctrico, la cual se define como el cociente de la transformada de Laplace de la señal de salida (o respuesta del sistema) entre la transformada de Laplace de la señal de entrada al sistema, con esta relación se puede determinar la estabilidad o inestabilidad del sistema, entre otros. El tercer uso que se le da a la transformada de Laplace es para describir los elementos que constituyen un circuito eléctrico en el dominio de la variable s de la transformada de Laplace, con lo cual se logra que los elementos del circuito se puedan ver como resistores, cuyas resistencias son su representación en el dominio de la variable s de la transformada de Laplace.

Como es frecuente encontrar en los textos de ecuaciones diferenciales la solución de ecuaciones diferenciales lineales con término independiente una función generalizada, las que suscriben consideraron que era más pertinente el mostrar el contexto de la transformada de L para el caso de la función de transferencia y representación de los elementos de un circuito eléctrico en términos de la variable s de la trasformada de Laplace.

La transformada de Laplace y la función de transferencia

Existen diversas formas de aplicación de la transformada de Laplace en ingeniería electrónica, una es la determinación de la *Función de Transferencia* de un sistema. Ésta se define como la razón entre la transformada de Laplace de la respuesta del sistema y la transformada de Laplace de la señal de entrada, considerando todas las condiciones iniciales igual a cero.

Para tratar esta aplicación se mencionarán algunas propiedades de la transformada de Laplace.

Nota. La expresión $F(s) = L\{f(t)\}$ denota la transformada de Laplace de la función $f(t)$.

a) La transformada de la derivada de la función $f(t)$ está en términos de la transformada de la función sin derivar como $L\{f'(t)\} = s\,F(S) - f(0)$.

b) La transformada de la integral de la función $f(t)$ está en términos de la transformada de la función $f(t)$ como:

$$L\left\{\int_0^t f(\lambda)d\lambda\right\} = \frac{F(s)}{s} - \frac{f^{-1}(0)}{s},$$ donde $f^{-1}(0)$ es el valor de la integral en 0.

c) La propiedad de linealidad, es decir, $L\{a\,f(t) + b\,g(t)\} = a\,L\{f(t)\} + b\,L\{g(t)\}$ donde a y b son constantes.

Supongamos que se desea calcular la función de transferencia $\left(\frac{V_0}{V_i}\right)$ de un circuito RLC, como el que se muestra en la Figura 1, al cual se le aplica un voltaje de entrada V_i y el voltaje de salida es V_0.

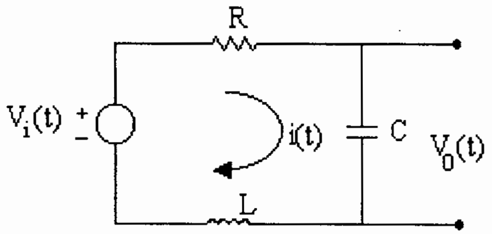


***Figura 1**. Circuito RLC en el dominio del tiempo*

Por la segunda ley de Kirchoff.

$V_0(t) = V_C(t)$ y *(1)*

$V_i(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$ *(2)*

donde $V_R(t)$ es el voltaje en la resistencia, $V_L(t)$ es el voltaje en la bobina y $V_C(t)$ el voltaje en el condensador.

Debido a que los elementos del circuito están conectados en serie, la corriente i(t) es la misma en cada elemento del circuito. Por la ley de Ohm, se tiene:

$V_R(t) = R\, i\,(t)$ $\qquad V_L(t) = L\dfrac{d\,i(t)}{dt}$ $\qquad V_C(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(\lambda)d\lambda$

así las ecuaciones (1) y (2) quedan como:

$$V_0(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\lambda)d\lambda \quad \text{y} \tag{3}$$

$$V_i(t) = R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\lambda)\,d\lambda + L\frac{d\,i(t)}{dt} \tag{4}$$

donde R, L y C son constantes. Las unidades utilizadas en las ecuaciones dadas por (3) y (4) son: R en Ohms, L en Henrys, C en Farads; $V_i(t)$ y $V_0(t)$ en volts e i(t) en Ampers.

Para obtener la función de transferencia del circuito en términos de los voltajes de salida y de entrada, se necesita aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones (3) y (4), considerando condiciones iniciales igual a cero. En este caso:

L{i(t)} = I(s) denotará la transformada de Laplace de la corriente i(t)

L{V_i (t)} = V_i (s) la transformada de Laplace del voltaje de entrada, y

L{V_0 (t)} = V_0 (s) la transformada de Laplace del voltaje de salida

Por las propiedades (a) y (b) de la transformada de Laplace, se tiene que:

$$L\{V_0(t)\} = L\,s\,I(s), \quad \text{ya que } y(0) = 0 \quad \text{y} \tag{5}$$

$$L\left\{\frac{1}{C}\int_0^t i(\lambda)\,d\lambda\right\} = \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{V_C(0)}{s} = \frac{1}{Cs}I(s) \qquad \text{ya que } V_C(0) = \frac{q(0)}{C} = 0 \tag{6}$$

Aplicando la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace a las ecuaciones (3) y (4), y tomando en cuenta los resultados de (5) y (6) se obtiene:

$$V_0(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \tag{7}$$

$$V_i(s) = R\,I(s) + \frac{1}{Cs}I(s) + L\,s\,I(s) = \left(R + \frac{1}{Cs} + Ls\right)I(s) \tag{8}$$

La relación del voltaje de salida al de entrada es:

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{Cs\left[R + \frac{1}{Cs} + Ls\right]} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Por lo tanto la función de transferencia es:

$$F(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Se puede observar que:

a) La función de transferencia es independiente de una entrada particular y es una propiedad que depende solamente de los elementos del circuito.

b) La función de transferencia es obtenida para el caso en que las condiciones iniciales sean cero.

c) La función de transferencia del circuito es una función racional de s.

Aunque no es propósito de este trabajo ahondar en las aplicaciones que tiene la función de transferencia de un sistema, vale la pena mencionar que es muy útil en el estudio de la estabilidad de sistemas.

Otra aplicación importante de la Transformada de Laplace, es la posibilidad de describir un circuito eléctrico en el dominio de la variable s de la transformada de Laplace, que por simplicidad se llamará dominio de Laplace, en donde los elementos pasivos pueden considerarse como resistencias complejas (llamadas impedancias) y pueden ser manejados con los mismos principios que rigen el comportamiento de las resistencias puras. Para ello se analizan las relaciones voltaje-corriente en el tiempo y en el dominio de Laplace para cada una de las componentes de un circuito.

Para una resistencia, aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$V(t) = R\,i(t) \qquad\qquad V(s) = R\,I(s) \qquad (9)$$

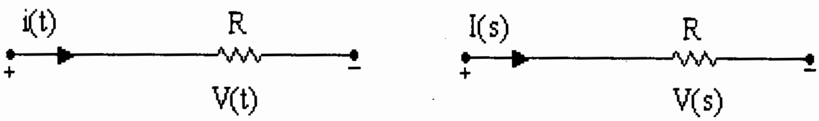


Figura 2. *Equivalencia entre el dominio del tiempo y el dominio de Laplace de una resistencia*

Para una bobina, aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$V(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt} \qquad\qquad V(s) = L\,s\,I(s) - y(0) \qquad (10)$$

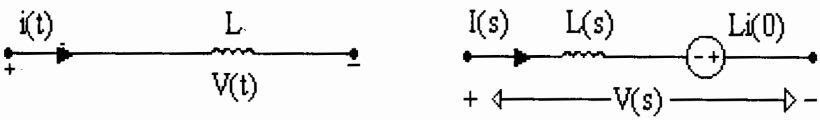


Figura 3. *Equivalencia entre el dominio del tiempo y el dominio de Laplace para una bobina*

Para un condensador, aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$V(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\lambda)\,d\lambda \qquad V(s)=\frac{1}{Cs}I(s)+\frac{V(0)}{s} \qquad (11)$$

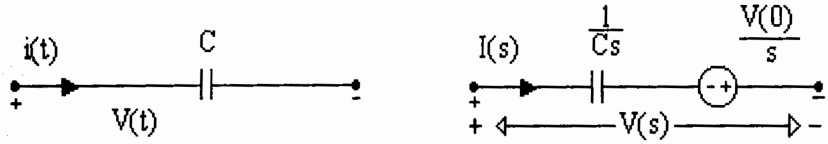


***Figura 4**. Equivalencia entre el dominio del tiempo y el dominio de Laplace para un condensador*

Se puede observar que las relaciones voltaje-corriente para cada elemento analizado en el dominio de la variable s de Laplace, son lineales.

Si en las ecuaciones anteriores se consideran condiciones iniciales igual a cero se obtienen de (9), (10) y (11), respectivamente, las siguientes relaciones:

$$\frac{V(s)}{I(s)}=R \qquad \frac{V(s)}{I(s)}=Ls \qquad \frac{V(s)}{I(s)}=\frac{1}{Cs}$$

Las relaciones anteriores tiene unidades en ohms. Así, en el dominio de Laplace, los elementos pasivos se pueden considerar como resistencias complejas (llamadas impedancias) y pueden ser manejadas con los mismos principios que rigen el comportamiento de la resistencias puras.

El circuito de la Figura 1, se pude describir en el dominio de Laplace, como:

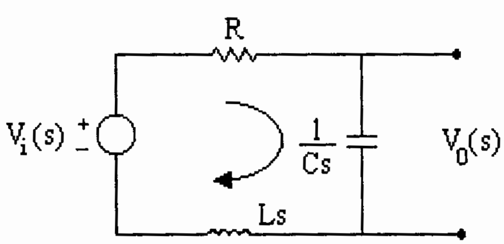


***Figura 5.** Circuito RLC en el dominio de Laplace*

Por otro lado, las leyes de Kirchoff de corrientes y voltajes establecen que: Ley de corrientes:

"La suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un nodo es igual a cero", es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} i_j(t)=0 \qquad (12)$$

Ley de voltajes: "La suma algebraica de los voltajes alrededor de una malla completa, recorriendo la malla en un solo sentido es igual a cero"; es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} V_j(t) = 0 \qquad (13)$$

Las expresiones correspondientes de las ecuaciones (12) y (13) en el dominio de Laplace son:

$$\sum_{j=1}^{n} I_j(s) = 0 \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} V_j(s) = 0$$

Regresando al circuito de la fig. 2, en el dominio de Laplace cada elemento del circuito se considera como una resistencia pura, como estas "resistencias" están conectadas en serie, la resistencia total es la suma de ellas, y aplicando la ley de Kirchoff de voltajes en el dominio de Laplace se obtiene que:

$$V_i(s) = \left(R + \frac{1}{Cs} + Ls\right) I(s) \quad \text{y} \quad V_0(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

que son las mismas ecuaciones (7) y (8) que se obtuvieron al aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones (5) y (6) en el dominio del tiempo.

El término $\left(R + \frac{1}{Cs} + Ls\right)$ es llamada impedancia compleja y se denota como Z(s).

Conclusiones

1. Los alumnos al saber para qué les van a servir las matemáticas que estudian se ven motivados hacia el curso de matemáticas, incidiendo en su buen desempeño escolar [Camarena, 1995, 1996].
2. El caso de la transformada de Laplace por sí misma cobra interés en los estudiantes de ingeniería, después de haber recibido un curso contextualizado en la ingeniería que es de su interés.
3. La matemática en contexto **INTEGRA** el conocimiento.

Bibliografía

Camarena G. P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

Camarena G. P. (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación 1984 en el IPN.

Camarena G. P. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería*. Resúmenes del XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Colima.

Camarena G. P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

Camarena G. P. (1996). *El contexto y las ecuaciones diferenciales lineales*. Memorias del 6º Coloquio Académico de la ESIME-IPN.

Heaviside O. (1949). Electromagnetic Theory.

Los logaritmos Neperianos, los logaritmos naturales y la integral $\int_1^x \frac{dt}{t}$

Juan Manuel Torres Jazo (jmtorres@zeus.ccu.umich.mx)
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Instituto Tecnológico de Morelia, Michoacán México

Resumen

Cuando a mis estudiantes de primer año de Licenciatura en Ingeniería o del curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias les preguntaba sobrel el número e la mayoría no sabía de qué se trataba, así que me preocupé por encontrar una manera de que ellos lo conocieran, por su importancia innegable en los cursos que tomaban. A continuación presento una forma de acercamiento que me ha arrojado resultados cualitativos favorables.

La idea fundamental de este artículo es la de compartir una visión panorámica sobre uno de los números más importantes de la Matemática y que al mismo tiempo es casi completamente desconocido por la mayoría de los estudiantes, a pesar de que lo usarán desde sus primeros cursos de cálculo y al cual sus profesores se referirán, invariablemente y, salvo excepciones, como si los alumnos supieran de que se trata. Al mismo tiempo se trata de contribuir a la idea de que es necesario recurrir a la historia para presentar la matemática como algo dinámico, de avances y retrocesos y no como un producto estático, acabado, que es lo que generalmente hacemos en nuestras clases

Introducción

En la obra *"Arithmetica Integra"*(1544), del matemático Alemán Michael Stifel, aparece por primera vez, la correspondencia entre los términos de la progresión geométrica

$$1, q, q^2, q^3, q^4, \dots$$

y los términos de la progresión aritmética formada por los exponentes:

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

ésta correspondencia es tal que si multiplicamos dos términos de la primera da como resultado otro término de la misma, cuyo exponente es la suma de los términos correspondientes en la segunda. O sea

$$q^n q^m = q^{n+m}$$

En lenguaje moderno, de tal forma que aquí podemos definir una función f(x) tal que:

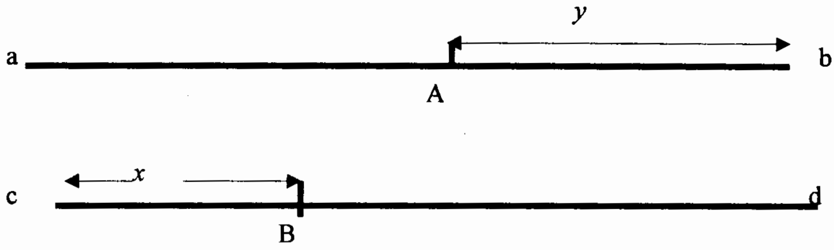
$$f(x) = q^x \quad f: \aleph \cup \{0\} \to \Re$$

con la condición obvia de que $f(0)=1$

Guiado por esta correspondencia, alrededor de 1594, el matemático escocés John Napier desarrolla los logaritmos y los explica en 1614 en su obra *"Una descripción de la maravillosa ley de los logaritmos"*.

Su idea central fue construir dos sucesiones de números relacionadas de tal manera que cuando una se incrementa en progresión aritmética, la otra decrece en progresión geométrica. Esta idea la introduce en términos dinámicos como sigue:

Sea un punto A que se mueve en la línea recta ab con velocidad decreciente, de tal manera que la velocidad sea igual a la distancia que le falta por recorrer {y},(movimiento geométricamente decreciente). Sobre una línea paralela cd un punto B {x} se mueve uniformemente, (movimiento aritméticamente creciente).



a un mismo tiempo t se miden la distancias x e y, entonces x es el

logaritmo de y.

$$x = LogNap(y)$$

A fin de poder construir sus tablas, Napier hace un procedimiento semejante al siguiente, sólo que mucho más complicado por la carencia de un concepto y una definición de función.

Napier dividió *ab* en 10^7 etapas de recorrido a hacer en 10^7 "*instantes*". Con el fin de simplificar, hagamos *ab*=1

La velocidad en el primer "*instante*" {*a*} es 1, por lo que:

$$am_1 = \frac{1}{10^7}$$

$$bm_1 = ab - am_1 = 1 - \frac{1}{10^7}$$

que es también la velocidad en el segundo "*instante*", y la distancia recorrida hasta el siguiente es:

$$m_1m_2 = \frac{1}{10^7}\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$$

$$m_2b = m_1b - m_1m_2 = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) - \frac{1}{10^7}\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2, \ldots etc$$

Con estos cálculos formó dos sucesiones de valores

$$1,\ \left(1-\frac{1}{10^7}\right)\ \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2,\ \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3,\ \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^4,\ \cdots$$

$$0,\quad \frac{1}{10^7},\quad \frac{2}{10^7},\quad \frac{3}{10^7},\quad \frac{4}{10^7},\quad \cdots$$

Eludió facilmente las fracciones tomando $ab=10^7$, con lo que la tabla anterior la transformó en la siguiente:

$$1,\ \left(1-\frac{1}{ab}\right)\ \left(1-\frac{1}{ab}\right)^2,\ \left(1-\frac{1}{ab}\right)^3,\ \left(1-\frac{1}{ab}\right)^4,\ \cdots$$

$$0,\quad \frac{1}{10^7},\quad \frac{2}{10^7},\quad \frac{3}{10^7},\quad \frac{4}{10^7},\quad \cdots$$

$$0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \cdots$$

A los número inferiores de la tabla los denominó logaritmos de los superiores, lo que literalmente significa números de relación (de las palabras griegas $\lambda o\gamma o\zeta$=relación, $\alpha\rho\iota\upsilon\mu o\xi$= número).

Durante 20 años Napier calculó logaritmos usando como base al número 0.9999999, ya que parece ser no le hizo caso a Henry Briggs, quien en 1615 le sugirió usar como base el número 10, lo que actualmente conocemos por medio de la definición.

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10} y$$

Desarrollo

Las ecuaciones que se deducen de la afirmación anterior son:

$$\frac{dy}{dx} = -y \qquad \frac{dx}{dt} = \alpha$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\alpha} \quad \Rightarrow -\frac{x}{a} = \int_{b}^{y} \frac{dy}{y}$$

la cual al tomar como unidad de medida *ab*, esto es haciendo *ab*=1 obtenemos finalmente:

$$-\frac{x}{\alpha} = \int_{1}^{y} \frac{dy}{y}$$

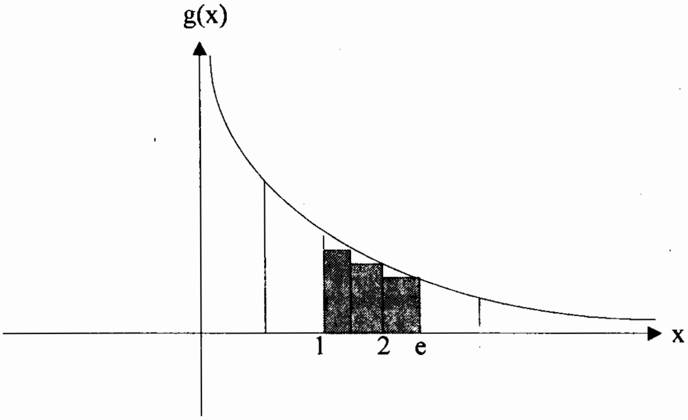
Esta integral de aspecto tan sencillo no puede ser calculada por medio de ninguna de las funciones conocidas, por lo que de acuerdo al párrafo de Napier se llegó a la definición:

$$\int_1^y \frac{dy}{y} = \log y$$

La cual al cambiarle de variable nos da la forma más familiar

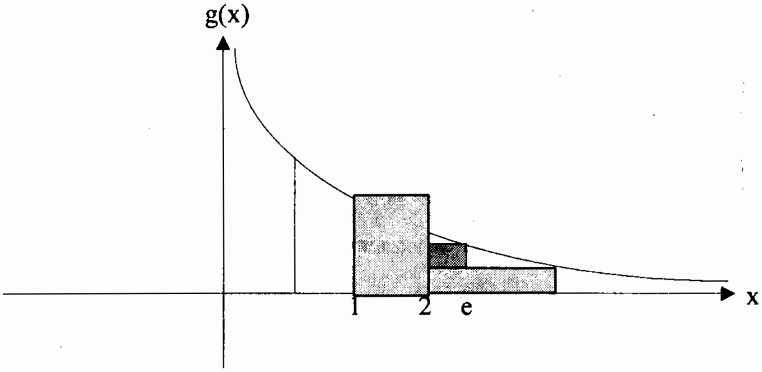
$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x$$

Pero como el valor de esta integral es el área bajo la curva $g(x) = \dfrac{1}{x}$, observemos la siguiente figura



Ésta nos da un único valor para cada $x>0$ de la integral anterior, así entonces podemos pensar en que habrá un número e tal que:

$$1 = \int_1^e \frac{dx}{x} = \log e$$



Además obtenemos de la figura anterior que:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \langle 1$$

puesto que el área de rectángulo de base y altura 1,entre 1 y 2 es una suma superior entre 1 y 2 para $g(x) = \frac{1}{x}$, de manera similar, observamos que:

$$\int_1^4 \frac{dx}{x} \rangle 1$$

puesto que la suma de las áreas de los rectángulos inscritos entre 1 y 2; y 2 y 4 es $\frac{1}{2}(2-1)+\frac{1}{4}(4-2)=1$ lo que es una suma inferior para $g(x) = \frac{1}{x}$ entre 1 y 4. Así pues:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} < \int_1^e \frac{dx}{x} < \int_1^4 \frac{dx}{x}$$

lo cual demuestra que: $2 < e < 4$

Extensión hacia los reales

La función de la definición primera tiene la siguiente propiedad

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad f(0)=1, \quad f^{-1}(x) = \log x$$

además de que está definida para {1, 2, 3, ...}. Pero, ¿cómo serán tales funciones definidas en $\Re$?, sobre todo en los irracionales, ¿existirán?. El siguiente paso en la búsqueda de *e* fue sugerido tratando de resolver un problema de apariencia difícil.

Hallar una función derivable *f*, tal que:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad f(0)=1$$

Suponiendo que tal función existe, hallemos su derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}$$

$$f'(0) = f(0) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}$$

Así que la solución depende de encontrar este límite, supongamos, por el momento que existe y sea α, entonces resultaría que:

$$f'(x) = \alpha f(x)$$

Lo que quiere decir que la derivada de tal función sería un múltiplo de la misma, pero una está en función de la otra, sin embargo tomemos la derivada de su inversa:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\alpha f\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\alpha x}$$

de nueva cuenta:

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{\alpha}\int\frac{dx}{x}$$

Por lo tanto se llega a la siguiente definición:

$$f^{-1}(x)=\int_1^x\frac{dt}{t}=\log x \qquad f(x)=\exp(x)=e^x$$

Y confiar en que exista tal número *e*. Fue Euler quien le dio nombre a tal constante y además, en 1728 dio como base para estos logaritmos a la *e* y calculó su valor con 23 decimales y además legó varias expresiones para *e*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad e=2.71828182845904523536028\cdots$$

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ddots}}}}}}}} \qquad e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cfrac{5}{6+\cfrac{6}{7+\cfrac{7}{8+\ddots}}}}}}}}$$

Sin embargo el saber si era racional o irracional tal número, aún no se establecía, sino hasta 1767 cuando, Lambert demostró que es un número irracional, basándose en el aparato de las fracciones continuas de Euler. Y la demostración de la trascendencia de *e* fue dada a conocer en 1873 por Hermite. No deja de ser paradójico que sólo 9 años después de ésto, Lindemann diera la demostración de la trascendencia de π el más antiguo de los trascendentes.

Conclusiones

Este acercamiento, ha permitido que los estudiantes de Cálculo o Ecuaciones Diferenciales a quienes hemos enseñado durante los últimos dos semestres, hayan mejorado cualitativamente en su comprensión de los problemas de crecimiento de poblaciones o de decaimiento radiactivo, asi como le han tomado sentido a la definición de la integral, evidentemente falta hacer una comparación con algún grupo control, lo que en este semestre escolar estamos haciendo.

Referencias

Edwards, jr. C.H. (1979). The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag

Rivera, A. (1980). Cálculo. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV

Economía Matemática y Enseñanza de la Matemática

Uldarico Malaspina Jurado (umalasp@pucp.edu.pe)
Pontificia Universidad Católica del Perú

Introducción

La tarea de los docentes de matemáticas, de brindar a los estudiantes experiencias y orientaciones adecuadas para su mejor aprendizaje, requiere prepararse para hacer uso de los avances en la matemática misma y en las diversas ciencias naturales y sociales. Los cambios rápidos que van caracterizando a los últimos años y que próximamente ocurrirán seguramente a mayor velocidad, van determinando la exclusión de algunos temas matemáticos y la inclusión de otros en los currículos de estudios de diversos niveles educativos. Hay temas que pueden presentarse de manera sencilla e intuitiva aun en la secundaria y no simplemente por ser "modernos" sino por contribuir a tener enfoques matemáticos diferentes a los "típicos", en los que destacan la cuantificación y la exactitud. Tal es el caso de los sistemas dinámicos no lineales - y de la teoría del caos en particular (desarrollada en los últimos 25 años) - que en lugar de buscar con exactitud el comportamiento futuro de ciertas variables de un modelo, se plantea el comportamiento cualitativo y el comportamiento probable y es capaz de predecir comportamientos caóticos.

Las situaciones problemáticas que presenta la economía y el estudio de ellas mediante modelos matemáticos, permiten visualizar análisis cuantitativos y cualitativos. El concepto de equilibrio es fundamental y con él debe tenerse en cuenta tanto la presencia de variables exógenas cuyos cambios lo modifican, como la afectación de las variables endógenas por el transcurso del tiempo. Se hacen entonces análisis de estática comparativa y análisis dinámicos que son fácilmente visualizables y permiten no sólo mostrar a los estudiantes aspectos esenciales en el estudio, la explicación y la predicción de la realidad, sino también entusiasmar su curiosidad y ponerlos en contacto con temas y enfoques matemáticos actuales, con el gran valor educativo que todo esto conlleva. Más aún, en el marco de los sistemas dinámicos discretos, se puede hacer un estudio más enriquecedor de las progresiones y de los algoritmos iterativos para el cálculo aproximado de raíces.

Con esta perspectiva y continuando la línea de trabajo iniciada en la RELME 12 con el tema *"Visualización de conceptos matemáticos empleando conceptos económicos"*, en este artículo se presenta un resumen de formas intuitivas, con fuerte apoyo en la visualización, de iniciar el estudio de la estática comparativa, la estabilidad de los equilibrios en modelos dinámicos y los sistemas caóticos.

1. *Análisis de estática comparativa.*

A) Caso lineal:

Es claro que dado el sistema lineal

$5x - 6y = 18$ (a)
$x + 2y = 10$, (b)

al resolverlo obtenemos $x = 6$, $y = 2$. Una representación gráfica la tenemos en la Figura 1.

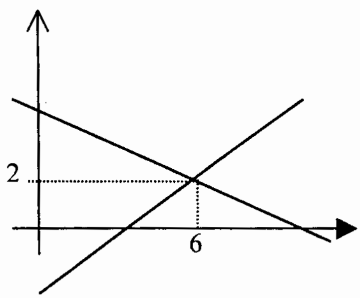


Figura 1

Una interpretación económica puede ser la siguiente: Consideremos que se tiene un mercado de un cierto bien. x representa el precio unitario de tal bien; y la cantidad de tal bien; la ecuación (a) representa la ecuación de oferta; la ecuación (b) representa la ecuación de demanda; y el par (6,2) el punto de equilibrio. Así 6 es el valor de equilibrio del precio y 2 es el valor de equilibrio de la cantidad del bien; es decir, cuando el precio del bien es 2, la cantidad demandada y la cantidad ofrecida es la misma, e igual a 6.

Al analizar cómo se afectan estos valores de equilibrio cuando se modifica alguno de los valores independientes en las ecuaciones del sistema, estaremos iniciando un análisis de estática comparativa. Veamos:

¿Cómo se modifica el equilibrio si el término independiente en la ecuación de demanda no es 10 sino 11?

Entonces tenemos

$$5x - 6y = 18$$
$$x + 2y = 11$$

y al resolver obtenemos

$$x = \frac{51}{8} \qquad (= 6 + \frac{3}{8})$$
$$y = \frac{37}{16} \qquad (= 2 + \frac{5}{16})$$

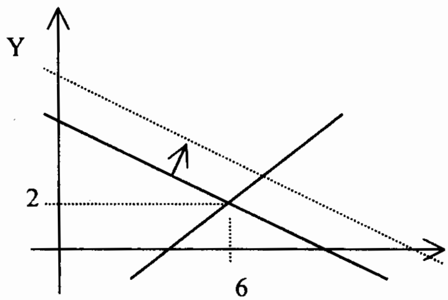


Figura 2

En la Figura 2 podemos observar que el incremento del término independiente en la ecuación (b), ha ocasionado una traslación hacia arriba (o hacia la derecha) de la recta correspondiente y en consecuencia el punto de equilibrio tiene nuevas coordenadas: la abscisa se ha incrementado en 3/8 y la ordenada se ha incrementado en 5/16.

¿Cómo se modifica el equilibrio si el término independiente en la ecuación de demanda no es 10 sino 8?

Ahora tenemos

$$5x - 6y = 18$$
$$x + 2y = 8$$

y las coordenadas del nuevo punto de equilibrio son

$$x = \frac{42}{8} \qquad (= 6 - 2(\frac{3}{8}))$$
$$y = \frac{37}{16} \qquad (= 2 - 2(\frac{5}{16}))$$

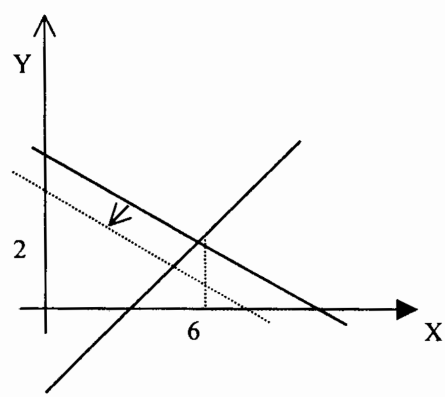


Figura 3

En la Figura 3 podemos observar ahora que la disminución del término independiente en la ecuación (b), ha ocasionado una traslación hacia abajo (o hacia la izquierda) de la recta correspondiente y en consecuencia el punto de equilibrio tiene nuevas coordenadas: tanto la abscisa como la ordenada han disminuido, y como en el caso anterior, están presentes los factores 3/8 y 5/16; y esta vez acompañados del coeficiente -2.

Hagamos una generalización para relacionar formalmente estas observaciones:

¿Cómo se modifica el equilibrio si el término independiente en la ecuación de demanda no es 10 sino k?

Nuestro sistema es ahora

$$5x - 6y = 18$$
$$x + 2y = k$$

y las coordenadas del nuevo punto de equilibrio son $x = \dfrac{18+3k}{8}$, $y = \dfrac{5k-18}{16}$.

Observemos que:

i) $x = x(k) = \dfrac{18}{8} + \dfrac{3}{8}k$, entonces

$$x(k+\Delta k) = \frac{18}{8} + \frac{3}{8}k + \frac{3}{8}\Delta k = x(k) + \frac{3}{8}\Delta k$$

$y = y(k) = \dfrac{-18}{16} + \dfrac{5}{16}k$, entonces $y(k+\Delta k) = \dfrac{-18}{16} + \dfrac{5}{16}k + \dfrac{5}{16}\Delta k = y(k) + \dfrac{5}{16}\Delta k$.

Vemos así que en este sistema las coordenadas del punto de equilibrio dependen funcionalmente del valor del término independiente de la ecuación (b) y entonces las coordenadas de los nuevos puntos de equilibrio se pueden obtener añadiendo a los valores de equilibrio iniciales el producto del incremento del término independiente (Δk) por 3/8 en el caso de la abscisa y por 5/16 en el caso de la ordenada. En el primer caso tuvimos k=10 y Δk = 1 y en el segundo caso k=10 y Δk = –2.

ii) Derivando respecto de k las funciones $x(k)$ y $y(k)$ obtenidas, tenemos

$$\frac{dx}{dk} = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \Delta x \approx \frac{3}{8}\Delta k$$
$$\frac{dy}{dk} = \frac{5}{16} \quad \Rightarrow \quad \Delta y \approx \frac{5}{16}\Delta k$$

Hemos puesto el símbolo de aproximación para Δx y Δy como es en general, pero es claro que teniendo en este caso funciones lineales, $\Delta x = \dfrac{3}{8}\Delta k$, $\Delta y = \dfrac{5}{16}\Delta k$. Ahora se ve más claramente el efecto que tiene en los valores de equilibrio de las variables una modificación del término independiente de la ecuación (b).

iii) Notar que podríamos hacer análisis similar considerando variaciones del término independiente de la ecuación (a) y llegaríamos a conclusiones similares. Gráficamente esto significaría movimientos paralelos de la recta creciente, correspondiente a la oferta. También podemos analizar los efectos en los valores de equilibrio cuando ambos términos cambian simultáneamente. Gráficamente tendríamos traslaciones de ambas rectas y analíticamente tendríamos funciones de dos variables.

B) Caso no lineal

Hagamos análisis similar al desarrollado en (*A*) considerando un sistema no lineal de ecuaciones:

$x - y^2 - 4y = 1$ (c)
$x + y^2 + y = 4$ (d)

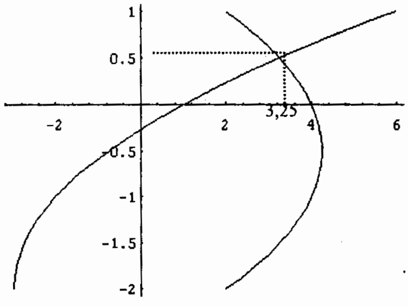


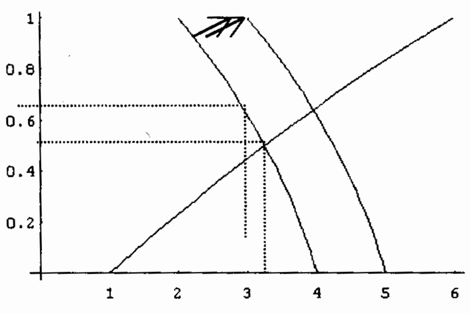
Figura 4

a La solución de componentes positivas es $x = 3{,}25$; $y = 0{,}5$. En la Figura 4 se tiene una ilustración gráfica y siendo en el primer cuadrante la gráfica de (c) una curva creciente y la gráfica de (d) decreciente, podemos interpretar el sistema también como un modelo económico en el que las variables x , y representan – como en el caso lineal – precio y cantidad de un bien; (c) es la ecuación de oferta; (d) la de demanda; y la solución es el punto de equilibrio.

Al examinar cómo se modifica el equilibrio si el término independiente en la ecuación de demanda (d) no es 4 sino 5, obtendremos, luego de resolver el sistema, escoger la solución de coordenadas positivas y compararla con la obtenida antes, que

$\Delta y \approx 0{,}14 \qquad \Delta x \approx 0{,}72$

Figura 5



En la Figura 5 se ilustra la traslación que produce en la curva de demanda un incremento, de 4 a 5, del término independiente de su ecuación. Se ve también que las coordenadas del nuevo punto de equilibrio son mayores que las anteriores: la abscisa creció aproximadamente 0,72 unidades y la ordenada creció aproximadamente 0,14.

Al hacer un análisis más general, examinando cómo se modifica el equilibrio si el término independiente en la ecuación de demanda (d) no es 4 sino *k*, y considerando sólo valores positivos, se encuentran funciones $y = y(k)$, $x = x(k)$. Las derivadas de estas funciones respecto a *k*, cuando $k = 4$, son, aproximadamente, 0,14 y 0,72 respectivamente. En verdad no es necesario obtener explícitamente las funciones $y = y(k)$, $x = x(k)$, pues asumiéndolas implícitamente y empleando derivación implícita se obtiene un sistema lineal en las variables $\frac{dx}{dk}, \frac{dy}{dk}$ que al resolverlo da resultados similares a los obtenidos anteriormente. (En rigor, habría que verificar previamente las hipótesis del teorema de la función implícita). Es un ejercicio interesante y sencillo proceder de esta manera también para el sistema lineal del caso *A* y verificar que se obtienen los mismos resultados que encontramos con las funciones explícitas.

C) Una aplicación en economía

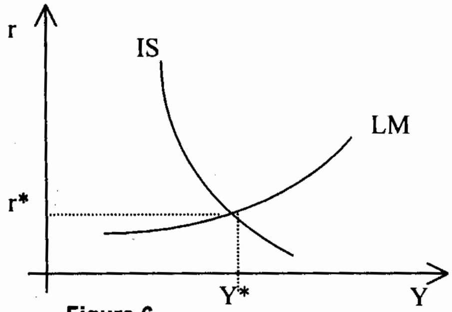


Figura 6

Un modelo macroeconómico, conocido como modelo IS-LM, considera dos mercados en la economía: el de bienes y el de dinero. La curva IS es el conjunto de posibles combinaciones entre niveles de ingreso (*Y*) y tasas de interés (*r*) que equilibran el mercado de bienes, y la curva LM es el conjunto de combinaciones de estas mismas variables, que equilibran el mercado de dinero. Así, las ecuaciones de IS y de LM tienen como variables (endógenas) a *Y* y a *r*. Los términos independientes corresponden a valores de otras variables (exógenas), que representan, por ejemplo, a los gastos del gobierno y a la oferta monetaria. Al hacer análisis similar al que hemos hecho en los casos A y B se obtiene información sobre el efecto de medidas de política fiscal y/o monetaria en los niveles de equilibrio del ingreso y de la tasa de interés. En la Figura 6 se muestra una situación inicial y en las Figuras 7 y 8 se ilustran las traslaciones y los nuevos puntos de equilibrio que resultan de aplicar una política fiscal expansiva y una política monetaria, también expansiva, respectivamente. Cuando no son lineales las funciones de consumo, de inversión y de demanda monetaria que intervienen en las ecuaciones de IS y LM resulta indispensable emplear la derivación implícita y apoyarse fuertemente en el teorema de la función implícita. En teoría económica es muy importante hacer este tipo de análisis, llamado de *estática comparativa*, que consiste en examinar en un modelo los efectos, en los valores de equilibrio de las variables endógenas, de algunos cambios en las variables exógenas.

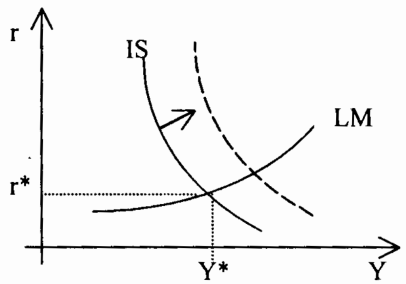


Figura 7

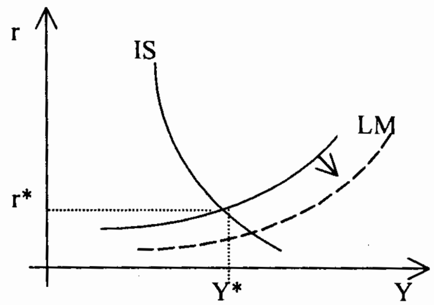


Figura 8

Ciertamente, este tipo de análisis es muy importante no sólo por sus aplicaciones prácticas sino porque muestra una manera de relacionar variables y constantes que habitualmente no se hace y que, como hemos visto, es fácilmente visualizable y permite llegar al concepto de función, incluso de más de una variable, de manera muy natural.

Bibliografía:

Gandolfo, Giancarlo: Economic Dynamics. Springer. Heidelberg. 1997.

Guzmán, Miguel de: Aventuras matemáticas. Pirámide. Madrid. 1996.

Malaspina, Uldarico: Matemáticas para el Análisis Económico. Fondo Editorial PUCP. Lima. 1994.

Martín, Miguel; Morán, M.; Reyes, M.: Iniciación al caos. Síntesis. Madrid. 1995.

Aplicaciones del cálculo fraccionario a la solución de Ecuaciones Diferenciales

José Adalid Gutiérrez
Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Honduras

Resumen

Tomando como base la Definición Unificada del Operador $\dfrac{d^q}{[d(x-a)]^q}, \qquad q \in \mathbb{C}$

y de algunas Reglas del Cálculo Fraccionario (Fundamentalmente la "Regla de la Cadena") se presentará un método alternativo para resolver Ecuaciones Diferenciales del tipo:

I). $x^2 \dfrac{d^2 w}{dx^2} + x \dfrac{dw}{dx} + \left[x - \dfrac{v^2}{4} \right] w = 0$ (Ecuación de Bessel).

II). $p_3(x) \dfrac{d^3 w}{dx^3} + p_2(x) \dfrac{d^2 w}{dx^2} + p_1(x) \dfrac{dw}{dx} + p_0 w = 0,\ donde\ p_n(x)$

es un polinomio en x de grado no mayor que n.

Desarrollo

I. La ecuación de Bessel:

(1) $$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + x \frac{dw}{dx} + \left[x - \frac{v^3}{4} \right] w = 0,$$

que modela diferentes fenómenos físicos, se resuelva tradicionalmente en los cursos de Ecuaciones Diferenciales mediante el uso de las Series Infinitas. En este trabajo presentamos las técnicas del Cálculo Fraccionario para encontrar las dos soluciones linealmente independientes en términos de funciones elementales.

Primero hagamos el cambio

$$w = x^{\pm \frac{1}{2} v} u\,,$$

donde v es la raíz cuadrada no negativa de v^2. Por tanto la ecuación (1) se transforma en

(2) $$x \frac{d^2 u}{dx^2} + [1 \pm v] \frac{du}{dx} + u = 0$$

Luego asumamos que para cada función u que satisface (2) existe otra función f, relacionada con u por medio de:

(3) $$u = \frac{d^{\frac{1}{2} \pm v} f}{dx^{\frac{1}{2} \pm v}},$$

Recuerde del Cálculo Fraccionario:

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d^{q-n} f}{[d(x-a)]^{q-n}}\right],$$

La cual nos permite combinar las ecuaciones (2) y (3) para obtener:

(4) $$x\frac{d^{5/2\pm v} f}{dx^{5/2\pm v}} + [1\pm v]\frac{d^{3/2\pm v} f}{dx^{3/2\pm v}} + \frac{d^{1/2\pm v} f}{dx^{1/2\pm v}} = 0$$

De la Regla de Leibniz aplicada a (4) se tiene:

(5) $$\frac{d^{\frac{5}{2}\pm v}\{xf\}}{dx^{\frac{5}{2}\pm v}} - \frac{3}{2}\frac{d^{\frac{3}{2}\pm v} f}{dx^{\frac{3}{2}\pm v}} + \frac{d^{\frac{1}{2}\pm v} f}{dx^{\frac{1}{2}\pm v}} = 0,$$

donde v ya no aparece en los coeficientes.
Planeamos descomponer los operadores que aparecen en (5):

(6) $$\frac{d^{\frac{1}{2}\pm v}}{dx^{\frac{1}{2}\pm v}}\frac{d^2\{xf\}}{dx^2} - \frac{3}{2}\frac{d^{\frac{1}{2}\pm v}}{dx^{\frac{1}{2}\pm v}}\frac{df}{dx} + \frac{d^{\frac{1}{2}\pm v} f}{dx^{\frac{1}{2}\pm v}} = 0$$

la cual se convierte en:

(7) $$\frac{d^2\{xf\}}{dx^2} - \frac{3}{2}\frac{df}{dx} + f = 0,$$

por la acción del operador

$$\frac{d^{\frac{-1}{2}\mp v}}{dx^{\frac{-1}{2}\mp v}}$$

Las ecuaciones (6) y (5) son equivalentes entre si, si y solamente si:

(8) $$[xf]_{x=0} = 0 \qquad y \qquad \left[\frac{d\{xf\}}{dx}\right]_{x=0} = 0$$

y

(9) f(0) = 0

Mientras que (7) y (6) son equivalentes si:

10) $$\frac{d^{\frac{-1}{2}\mp v}}{dx^{\frac{-1}{2}\mp v}}\frac{d^{\frac{1}{2}\pm v} g}{dx^{\frac{1}{2}\pm v}} = g, \quad \text{con} \qquad g = f,\ \frac{df}{dx},\ y\ \frac{d^2\{xf\}}{dx^2}$$

La ecuación (7) se puede convertir en la forma canónica:

$$\frac{d^2 f}{\left[d\left(2\sqrt{x}\right)\right]^2} + f = 0,$$

de donde se sigue que las dos posibles soluciones son:

$$f_1 = \operatorname{sen}\left(2\sqrt{x}\right) \quad y$$
$$f_2 = \cos\left(2\sqrt{x}\right)$$

Debemos ahora verificar si estas posibles soluciones satisfacen los requerimientos (8), (9) y (10) que asumimos deben satisfacerse en este desarrollo, debido a que $Cos\left(2\sqrt{x}\right) = 1 - 2x + \frac{2}{3}x^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots,$ es evidente que f_2 no satisface (8) o (9) y por tanto debe descartarse. Sin embargo f_1 si satisface todos los requisitos :

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}+v}}{dx^{-\frac{1}{2}+v}} \frac{d^{\frac{1}{2}-v}}{dx^{\frac{1}{2}-v}} g = g\,, con \;\; g = f,\; \frac{df}{dx}\,,\; y \;\; \frac{d^2\{x f\}}{dx^2}$$

Una parte de (10) se satisface por la función:

$\operatorname{sen}\left(2\sqrt{x}\right) = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} - \ldots\ldots\ldots\ldots$, para todos los valores de $v \geq 0$, mientras que la otra parte

$$\frac{d^{\frac{1}{2}-v}}{dx^{\frac{1}{2}-v}} \frac{d^{\frac{1}{2}+v}}{dx^{\frac{1}{2}+v}} = g\,, con \;\; g = f,\; \frac{df}{dx},\; y \;\; \frac{d^2\{xf\}}{dx^2},$$

se satisface por f_1 para todos los valores, excepto para $v \in N$

Regresando a la ecuación (3), concluimos que la función

$$u_1 = \frac{d^{\frac{1}{2}-v}}{dx^{\frac{1}{2}-v}} \operatorname{sen}\left(2\sqrt{x}\right)$$

es una solución de la ecuación (2) para todos los valores v, y que

$$u_2 = \frac{d^{\frac{1}{2}+v}}{dx^{\frac{1}{2}+v}} \operatorname{sen}\left(2\sqrt{x}\right)$$

en otra solución, cuando v no es un entero. Por tanto las soluciones de la ecuación original de Bessel son:

$$w_1(v,x)=x^{-\frac{1}{2}v}\,u_1=x^{-\frac{1}{2}-v}\frac{d^{\frac{-1}{2}v}\,\mathrm{sen}(2\sqrt{x})}{dx^{\frac{1}{2}-v}},\ v\geq 0$$

y

$$w_2(v,x)=x^{\frac{1}{2}v}\,u_2=x^{\frac{1}{2}v}\frac{d^{\frac{1}{2}+v}\,\mathrm{sen}(2\sqrt{x})}{dx^{\frac{1}{2}+v}},\ 0\leq v\notin \mathrm{N}$$

El problema está completamente resuelto, excepto que se necesita una segunda solución para $v\in N$; la técnica presentada no nos permite resolver este caso. La relación de w_1 y w_2, a la notación covencional a las funciones de Bessel es :

$$w_1(v,x)=\sqrt{\pi}\,J_{-v}(2\sqrt{x}) \qquad \text{y} \qquad w_2(v,x)=\sqrt{\pi}\,J_{v}(2\sqrt{x})$$

II. Tratamos ahora la ecuación :

$$(1)\qquad P_3\frac{d^3w}{dx^3}+P_2\frac{d^2w}{dx^2}+P_1\frac{dw}{dx}+P_0w=0,$$

donde P_n es un polinomio de grado no mayor a n, así P_3 es cúbico, P_2 cuadrático, P_1 lineal y P_0 es una constante. En nuestra búsqueda por soluciones de la ecuación (1) asumimos la existencia de una función f que satisface.

$$(2)\qquad w=\frac{d^{-1-q}f}{dx^{-1-q}},$$

donde q es hasta ahora una incógnita.

De la Regla de la Cadena y combinando las ecuaciones (1) , (2) y aplicando el operador $\frac{d^q}{dx^q}$ a cada término obtenemos:

$$(3)\qquad \frac{d^q}{dx^q}\left\{P_3\frac{d^{2-q}f}{dx^{2-q}}\right\}+\frac{d^q}{dx^q}\left\{P_2\frac{d^{1-q}f}{dx^{1-q}}\right\}+\frac{d^q}{dx^q}\left\{P_1\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right\}+\frac{d^q}{dx^q}\left\{P_0\frac{d^{-q-1}f}{dx^{-q-1}}\right\}=0$$

Consideremos el primer término de la ecuación anterior y recordando que

$$P_3(x)=C_3x^3+C_2x^2+C_1x+C_o,$$

y aplicándole la Regla del Producto tenemos

$$[C_3x^3+C_2x\ +C_1x+C_o]\frac{d^2f}{dx^2}+q\left[3C_3x^2+2C_2+C_1\right]\frac{df}{dx}+q[q-1][3C_3x+2C_2]f+$$
$$q[q-1][q-2]C_3\frac{d^{-1}f}{dx^{-1}}.$$

Expresiones similares se obtienen de los restantes 4 términos de (3), de tal forma que el resultado es:

$$(4)\quad \pi_3 \frac{d^2 f}{dx^2} + \pi_2 \frac{df}{dx} + \pi_1 f + \pi_0 \frac{d^{-1} f}{dx^{-1}} = 0,$$

donde π_3, π_2, π_1 y π_o son polinomios de grados 3,2,1 y 0 respectivamente. Como hasta el momento q no ha tenido un valor determinado, podemos asignarle un valor de tal manera que $\pi_0 = 0$. Esta escogencia de q transforma la ecuación (4) en una ecuación de segundo orden, y continuando de esa manera (Liouville) se puede transformar en una de primer orden. Para ilustrar el método, trabajemos con la Ecuación de Legendre.

$$(5)\quad \left[x^2-1\right]\frac{d^2 w}{dx^2} + 2x\frac{dw}{dx} - v[v+1]w = 0.$$

Reescribiéndola y cuando la regla de Leibniz.

$$\frac{d^q}{dx^q}\left\{\left[x^2-1\right]\frac{d^{1-q} f}{dx^{1-q}}\right\} + \frac{d^q}{dx^q}\left\{2x\frac{d^{-q} f}{dx^{-q}}\right\} - \frac{d^q}{dx^q}\left\{v[v+1]\frac{d^{-q-1} f}{dx^{-q-1}}\right\} = 0$$

Asumiendo de nuevo la Regla de la Cadena:

$$\left[x^2-1\right]\frac{df}{dx} + 2[q+1]xf + \left[q^2+q-v^2-v\right]\frac{d^{-1} f}{dx^{-1}} = 0$$

Seleccionando

(6) $q = v$ o
$q = -v-1$

el último término de la última ecuación se anula, obteniéndose una ecuación de variable separables, por tanto:

$$\int \frac{df}{f} = 2[q+1]\int \frac{xdx}{1-x^2},$$

lo cual implica:

$f = C[x^2 - 1]^{-1-q}$

De (2) y (6) encontramos:

$$w_1(v,x) = \frac{d^{-1-v}\left[x^2-1\right]^{-1-v}}{dx^{-1-v}}, \quad \text{y} \quad w_2(v,x) = \frac{d^{v}\left[x^2-1\right]^{v}}{dx^{v}},$$

son candidatos a ser soluciones de la Ecuación de Legendre.

Observe que en la ecuación (5) al reemplazar v por –v – 1, la ecuación no cambia; por tanto las soluciones w_1 y w_2 que se obtienen al intercambiar en el reemplazo a v por – v – 1 son idénticas. Por tanto en este caso la técnica expuesta nos produce una única solución.

$$(7)\quad w_2(v,x) = \frac{d^{v}\left[x^2-1\right]^{v}}{dx^{v}} = 2^{v}\,\Gamma(v+1)\,P_v(x)$$

Observemos que $P_v(x)$ que aparece en la ecuación anterior es una generalización de la Fórmula de RODRIGUEZ:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left[x^2-1\right]^n}{dx^n}$$

que se obtiene con enteros para generar los polinomios de Legendre.

Bibliografía

Gutiérres José Adalid "Definición Unificada de Derivadas e Integrales Definidas". Memoria de la RELME – 12 (Décima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa). Bogotá, Colombia 6 – 10 de julio de 1998.

Oldham Keith B,; Spanier Jerome. "The Fractional Calculus". Academic Press 19974.

La Transformada de Laplace en Química: sus aplicaciones y sus posibilidades educativas

Víctor Martínez Luaces (victor@bilbo.edu.uy)
Facultad de Química. Universidad de la República,
Montevideo
Uruguay

Carmen Alfonso (carmenalf@hotmail.com)
Hospital "Colonia Dr. Santín Carlos Rossi"
Ministerio de Salud Pública. San José
Uruguay

Introducción

La Facultad de Química de la Universidad de la República, en Montevideo, Uruguay, atiende las necesidades de cursos básicos de varias carreras muy diferentes. Concretamente, los cursos de Matemática que allí se dictan sirven a estudiantes de Ingeniería Química, Química Farmacéutica, Ingeniería de los Alimentos y Química (académica).

En otros países es más común que Ingeniería Química e Ingeniería de los Alimentos compartan los cursos de Matemática con otras ramas de la Ingeniería en lugar de hacerlo por ejemplo con Química Farmacéutica. La situación inusual que se da en Uruguay ya ha sido tratada por diversos motivos, por ejemplo Martínez y Casella [1], hacen un relevamiento de la Educación Matemática en las diversas ramas de la Ingeniería en Uruguay y naturalmente analizan todos los cursos universitarios de Matemática para Ingeniería, incluyendo los que dicta la Facultad de Química.

> Más allá de las razones históricas que llevaron a esa situación poco común, lo que importa es tratar de resolver los problemas que origina del punto de vista de la Matemática Educativa. Es decir, se deben dictar cursos de Matemática que resulten formativos, informativos y motivadores para estudiantes de carreras disímiles, con intereses y expectativas bastante diferentes.

A priori, daría la impresión que la "intersección" en cuanto a los intereses matemáticos de Ingeniería Química y Química Farmacéutica (por mencionar las dos carreras que parecen más distanciadas), se reduce a los temas más básicos como Cálculo Diferencial en una y varias variables reales, Integrales Simples, ciertos elementos de Algebra Lineal (Espacios Vectoriales, Matrices y Determinantes) y por supuesto los temas más habituales de Probabilidad y Estadística, particularmente de esta última, que es muy utilizada por los profesionales químicos (ver [2]), cualquiera sea su orientación.

Sin embargo, un análisis más profundo muestra que una herramienta matemática más sofisticada como la Transformada de Laplace también resulta de suma utilidad para ambas carreras. En efecto, la Transformada de Laplace es utilizada tanto en el Diseño de Reactores [3] como en la resolución de problemas de Farmacocinética [4], a modo de ejemplo. Sin embargo su aplicabilidad es aún mayor, dando lugar a variadas posibilidades de interacción entre la Química y la Matemática [5].

Además de lo anterior, la Transformada de Laplace permite resolver ciertos problemas didáctico – pedagógicos que se plantean en el dictado de los cursos de ecuaciones diferenciales. En general los inconvenientes provienen de los pre – requisitos para poder abordar ciertos temas y de la articulación con otras materias que se dictan en la misma facultad y que tienen fuertes requerimientos matemáticos. Estas dificultades también pueden ser resueltas haciendo uso de la Transformada de Laplace [6].

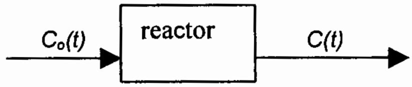
Como si esto fuera poco, también se la utiliza en los cursos de posgrado [7] y además da la posibilidad de establecer puntos de contacto con otras ramas de la Ingeniería y de la Economía [8].

Todo lo anterior justifica un estudio más profundo de la Transformada de Laplace, sus aplicaciones y sus posibilidades educativas en las carreras que se dictan total o parcialmente en la Facultad de Química.

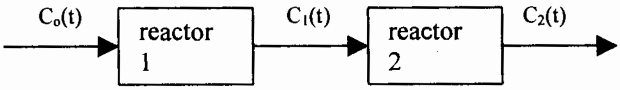
Aplicaciones a la Ingeniería Química y algunas consideraciones adicionales

La Transformada de Laplace se utiliza en el Diseño de Reactores. En efecto, la Función de Transferencia de un reactor, se define como:

$$G(s) = \frac{\mathbf{L}\{C(t)\}}{L\{C_o(t)\}} \qquad (1)$$



siendo $C_o(t)$ el perfil de concentración a la entrada y C(t) lo mismo para la salida. Dichas concentraciones dependerán del tiempo t. Si se conectan varios reactores en serie, la salida del primero será la entrada del segundo:



por lo que, al multiplicar $G_1(s)$ por $G_2(s)$ tal como se definieron en la fórmula (1) (es decir, las funciones de transferencia de ambos reactores), el término $L\ \{C_1(t)\}$ se cancela y resulta que:

$$G(s) = G_1(s)\ .\ G_2(s) \qquad \mathbf{(2)}$$

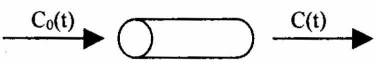
En general, n reactores en serie darán como resultado que la función de transferencia de todo el sistema será igual al producto de todas las $G_i(s)$ (i = 1, 2, ..., n).

Se pueden considerar distintos tipos de reactores ideales, como el Reactor Tubular Flujo Pistón (RTFP) en el que la salida C(t) es como la entrada, con un cierto retardo τ, es decir $C(t) = C_0(t - \tau)$, entonces transformando se tiene:

$$G(s) = \frac{L\ \{C_0(t - \tau)\}}{L\ \{C_0(t)\}} = e^{-\tau s}\frac{L\ \{C_0(t)\}}{L\ \{C_0(t)\}} = e^{-\tau s} \Longrightarrow G(s) = e^{-\tau s}$$

Esquemáticamente:

RTFP



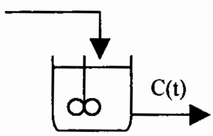
$$G(s) = e^{-\tau s} \qquad \mathbf{(3)}$$

Otro ejemplo es el Reactor Continuo Agitado Ideal (RCAI), en que el perfil de salida C(t) se obtiene de una ecuación diferencial que describe su funcionamiento, y que, al transformarla da

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

O sea: $C_0(t)$

RCAI



$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \qquad \mathbf{(4)}$$

En ambos casos, el tiempo τ se denomina Tiempo de Residencia del reactor. En Diseño de Reactores se utilizan entonces la Transformada de Laplace y su Antitransformada, así como varias de sus importantes propiedades: linealidad, transformada de derivadas, convolución, transformadas de pulsos, escalones, rampas, etc.

Es posible además plantear problemas interesantes vinculados a otras áreas de la Matemática. Por ejemplo, n reactores de tipo RCAI, en serie, dan por una generalización de la fórmula (2) y utilizando la fórmula (4):

$$G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\tau_i s} \qquad (5)$$

Si todos ellos son iguales y el tiempo total de residencia es τ, entonces $\tau = n\tau_i$ y resulta que la fórmula (5) se puede poner como:

$$G(s) = \frac{1}{\left[1 + \frac{\tau}{n} s\right]^n} \qquad \textbf{(6)}$$

Si se hace tender n a $+\infty$, para un Matemático es fácil ver que

$$\lim_{n \to \infty} G(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{\tau}{n} s\right]^n} = e^{-\tau s} \qquad (7)$$

pero no le es fácil interpretar químicamente este resultado (observar que el límite coincide con el resultado de la fórmula 3).

Para un estudiante típico de Ingeniería Química sucede exactamente al revés. Una vez aprobado el curso de cálculo en el cual trabaja con límites como el anterior (fórmula 7), rápidamente se olvida de las técnicas y artificios que permiten resolver ese tipo de ejercicios. En cambio para dicho estudiante, comprender que una batería de reactores agitados en serie, cuyo número tiende a infinito y sus tiempos de residencia tienden a cero (fórmula 6), se comporta como un reactor tubular (fórmula 7), es casi evidente. Esto se comprobó reiteradamente, en varios años, tanto en cursos de grado [9], como en el posgrado [7], en los que se planteó este problema.

Esto último es una constante en los cursos de Matemática como asignatura de servicio. Aquello que los alumnos no aplican en otras materias lo olvidan rápidamente. Por el contrario, aquello que aplican, lo recuerdan y los motiva en su aprendizaje. Por otra parte, les produce satisfacción el poder lograr "interpretaciones químicas", de cosas que consideran "resultados matemáticos" y así lo hacen saber cuando se les consulta al respecto, ver por ejemplo [10] y [11].

Aplicaciones en Farmacocinética

En la Facultad de Química de Montevideo, Uruguay, hasta hace unos pocos años la asignatura denominada "Farmacocinética" no formaba parte de los cursos de grado dictados por dicha institución.

Por el contrario, la mencionada asignatura integraba la currícula de una de las orientaciones de Doctorado que se podían seguir dentro de las opciones vigentes en ese momento.

Sin embargo, dada su importancia e indudable utilidad práctica, se la transformó en una materia curricular que debe cursarse en el 5° y último año de la carrera de Química Farmacéutica.

Es conveniente aclarar que con el título de Químico Farmacéutico se obtiene una preparación que permite desempeñarse en diversas áreas, como ser Farmacia Hospitalaria, Análisis Clínicos, Bromatología, Producción de Medicamentos y seguimiento de la acción de distintas drogas.

Es en este último caso donde resulta fundamental la Farmacocinética, que consiste en el estudio, en el curso del tiempo, de los niveles de concentración de una droga y sus metabolitos en diferentes fluídos (por ejemplo la sangre) y tejidos, y la excreción del cuerpo, y de las relaciones matemáticas requeridas para desarrollar modelos para interpretar esos datos.

La determinación de estos valores de concentración resulta muy útil para ajustar la dosis de una droga, lo que se denomina índice terapéutico, el cual podemos definirlo como el intervalo de valores de dosis que resultan útiles para obtener resultados terapéuticos, donde si la dosis es menor al límite inferior de dicho intervalo, el tratamiento no será efectivo por no tener la concentración mínima necesaria del fármaco para ejercer una acción beneficiosa y si la dosis es mayor al límite superior, tendremos un efecto tóxico de dicha droga.

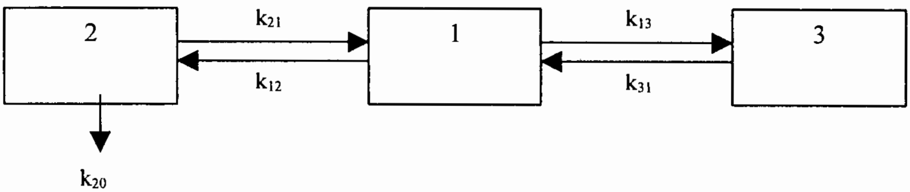
Esto es de mucha utilidad para el caso de drogas cuyo índice terapéutico es muy estrecho, es decir, donde las concentraciones mínima y máxima entre las cuales podemos movernos para lograr resultados clínicos, están muy próximas. Este caso lo tenemos para medicamentos que se emplean para tratar afecciones ampliamente distribuidas entre la población, como la digoxina para enfermedades cardiovasculares, y la teofilina para tratar procesos alérgicos serios como el asma.

Por otra parte, también permite comparar el uso de distintos excipientes para una misma droga y así optimizar la formulación de un medicamento.

El estudio de la cinética de absorción, distribución, metabolismo y excreción de drogas puede mejorar la comprensión de los mecanismos básicos involucrados en estos procesos. La aproximación más comúnmente empleada para la caracterización farmacocinética de una droga es representar al cuerpo como un sistema de compartimientos.

El modelo de un compartimiento, que es el modelo más simple, toma al cuerpo como una unidad homogénea. Este modelo es particularmente útil para el análisis farmacocinético de sangre, plasma o suero, y la excreción urinaria para drogas que se distribuyen rápidamente entre plasma y otros fluídos del cuerpo y tejidos, después de entrar en la circulación sistémica.

A continuación veremos un ejemplo de aplicación: supongamos un modelo de 3 compartimientos, donde la administración del medicamento se hace por infusión intravenosa:



donde k_{1j}, k_{j1} : son constantes de transferencia intercompartimental.

E_m : es la suma de las constantes de velocidad de salida fuera de los compartimientos.

El método se basa en la aplicación de funciones generales de entrada y funciones de disposición, de forma tal que su producto da lugar a la Transformada de Laplace de la función que describe la evolución temporal del medicamento en el organismo.

La función de disposición para el compartimiento 1, que suponemos es el plasma, la podemos expresar de la siguiente forma:

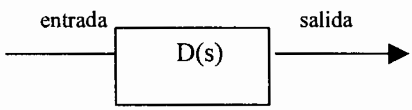
$$d_{s1} = \frac{\prod_{i=2}^{N} (s + Ei)}{\prod_{i=1}^{N} (s + Ei) - \sum_{j=2}^{N} \left[k_{j1} k_{1j} \prod_{\substack{m=2 \\ m \neq j}}^{N} (s + Em)\right]} \qquad \textbf{(8)}$$

d_s : es el operador de Laplace para la función de disposición. Esta comprende la distribución, el metabolismo y la excreción del medicamento en el organismo.
N : nº de compartimientos (en nuestro caso N = 3)

Desarrollando la expresión (8) con N = 3 y definiendo nuevas constantes α, β y γ en función de las k_{ij} y las Ei, resulta la siguiente expresión final:

$$d_{s1} = \frac{(s + E_2)\,(s + E_3)}{(s + \alpha)\,(s + \beta)\,(s + \gamma)} .$$

Podemos representarlo de la siguiente forma:



$$\mathcal{L}\{\text{entrada}\} \,.\, D(s) = \mathcal{L}\{\text{salida}\}$$

De donde: $$D(s) = \frac{\mathcal{L}\{\text{salida}\}}{\mathcal{L}\{\text{entrada}\}} .$$

Es decir, que las funciones de disposición son cocientes de las transformadas de las funciones que dan la evolución del medicamento en el organismo y las entradas utilizadas. Por lo que serían funciones de transferencia, de acuerdo a la definición habitual, lo que establece una interesante conexión con varias ramas de la Ingeniería y la Economía (Cujae 98).

La transformada de Laplace en los distintos cursos de la Facultad de Química

Muchas veces la Transformada de Laplace se presenta a los estudiantes como una definición extraña sin una motivación que la justifique, por lo que algunos autores han buscado otro tipo de enfoque en el que el concepto evoluciona a partir de ciertos ejemplos de resolución de ecuaciones diferenciales especialmente propuestos [12]. En nuestro caso hemos preferido una presentación distinta que tiene en cuenta, aunque no reproduce exactamente las ideas que llevaron a la construcción del concepto.

Lo que se hace es lo siguiente: al dar el tema Integrales Impropias se pone la Transformada de Laplace sin definirla como tal, como un ejemplo de integral impropia que depende de un cierto parámetro s, y que para algunos valores de dicho parámetro puede ser convergente y no para otros.

Luego, al resolver ciertas ecuaciones lineales de primer orden, aparecen expresiones cuya estructura recuerda a la Transformada de Laplace y que de hecho tiene mucho que ver con la génesis del concepto [13]. En ese momento, aprovechando la motivación provista por las ecuaciones diferenciales, se define formalmente la transformada, pero presentando a "s" como parámetro, no como otra variable y además se trabaja sólo en el campo real.

En esta etapa, que transcurre al final del primer semestre del curso anual de Matemática, se enseña a resolver ciertas ecuaciones diferenciales imprescindibles para los cursos de Física y Química General, del segundo semestre. También, a modo de divulgación, se comenta algo respecto a las aplicaciones químicas de la transformada, que se verán en detalle en los cursos de años superiores. Todo esto ha sido analizado con mayor profundidad en otro trabajo sobre la Transformada de Laplace [6].

En el segundo año de las carreras de Ingeniería Química e Ingeniería de Alimentos se dicta el curso denominado Matemática III en el que se ven más profundamente la Transformada de Laplace y las Ecuaciones Diferenciales incluyendo su estudio cualitativo y su resolución numérica. También se ve una introducción no muy profunda a las Ecuaciones de Derivadas Parciales (EDP). En este curso se presentan gran cantidad de aplicaciones a la Física, la Termodinámica y sobre todo la Cinética Química y el Diseño de Reactores.

En este curso más avanzado se estudian otras propiedades como la transformada de la convolución y la transformada de pulsos, escalones, rampas, etc. así como la interpretación de estos resultados en el diseño de reactores y otros problemas de Ingeniería Química e Ingeniería de Alimentos. Al final del curso, a modo de ejemplo, se suele presentar algún caso sencillo de resolución de EDP utilizando la Transformada de Laplace respecto a la variable t. Es decir, no se da formalmente la Transformada de Laplace en varias variables y su aplicación a la resolución de EDP, pero sí se presenta una pequeña muestra, de modo huerístico, para adelantar lo que se hará en el posgrado para aquellos que opten por hacer la Maestría en Ingeniería Química.

En dicha maestría, se vincula la Transformada de Laplace con la de Fourier, se dan ciertos elementos de la Teoría de Distribuciones a las que se les aplica la transformada y como ya se mencionó se dan algunas propiedades de la Transformada de Laplace en varias variables y se la aplica a la resolución de ciertas EDP de primer y segundo orden. A esta altura los estudiantes ya tuvieron dos semestres de diseño de reactores por lo que las aplicaciones que se dan son notoriamente más sofisticadas.

Como puede verse, el estudiante ve una primera aproximación a la Transformada de Laplace en el curso de primer año, luego profundiza en Matemática III (en segundo año), la aplica en los cursos de quinto año (sea Diseño e Reactores para Ingeniería Química e Ingeniería de Alimentos, o Farmacocinética para los de Química Farmacéutica) y por último, si hace el posgrado, la termina viendo por cuarta vez en un enfoque más profundo.

Este desarrollo en espiral, ha dado excelentes resultados desde los comienzos de su aplicación en 1995 (ver [6], [10] y [11]). Recientemente otros autores, en forma independiente, han planteado algo parecido para Ingeniería Eléctrica [14]. En dicho trabajo se presenta la Transformada de Laplace en varias ocasiones a lo largo de la carrera y se le da un enfoque aplicado, en este caso a la Teoría de Circuitos. Los resultados, al igual que en nuestro caso son excelentes de todo punto de vista.

Algunos resultados obtenidos

Los resultados de esta experiencia pueden analizarse desde varios ángulos. Por ejemplo, en lo que hace a la relación con otras asignaturas es interesante observar que por primera vez en mucho tiempo, luego de puesta en práctica la modificación mencionada en [6], los estudiantes pudieron ingresar al primer curso de Física con un conocimiento adecuado de las Ecuaciones Diferenciales necesarias para abordar dicha asignatura con éxito. Algo similar ocurrió con el curso de Fisicoquímica III (Cinética Química) al cual ingresaron sabiendo modelar cinéticas de primer orden en una o varias etapas, con o sin reacciones de equilibrio. Se esperan resultados similares cuando estos alumnos lleguen a los cursos de quinto año en que utilizan la Transformada de Laplace.

Desde ya los estudiantes han valorado el esfuerzo por vincular la Matemática a otras asignaturas. Esto se evidencia en sus respuestas a la evaluación docente que se realiza de manera anónima. Por ejemplo en la pregunta referente a si se establecen conexiones con otras asignaturas el resultado fue de 8.87 en escala de 10. En otra pregunta sobre las aplicaciones a la vida real y profesional el resultado fue aún mayor: 9.03.

Otras preguntas sobre motivación, ritmo de las clases, si los ejemplos son ilustrativos, etc. dieron resultados que oscilan entre 8.39 y 9.52, completamente inusuales para lo que suelen ser los cursos de Matemática en la Facultad de Química.

A nivel de posgrado, pese a que los estudiantes ya se encuentran bastante alejados de los cursos básicos de Matemática, los resultados son similares e incluso mejores en algunos rubros.

Conclusiones

En los planes de estudio de las diversas carreras suele plantearse como objetivo de los cursos de Matemática, el proveer herramientas para otras disciplinas y crear ciertas habilidades en los estudiantes que les permitan afrontar con éxito las exigencias de otros cursos superiores. Es bastante común que en los cursos de Matemática tradicionales estos objetivos se cumplan muy escasamente o sencillamente no se cumplan en lo más mínimo.

De más está decir que estas situaciones deben ser desterradas. Los cursos con excesivas demostraciones y desarrollos formales, con un fuerte énfasis en cuestiones técnicas o incluso de notación, no deberían tener lugar en las carreras técnicas. Por el contrario, los cursos deben ser útiles para los estudiantes, formativos y profundamente motivadores.

Una buena forma de lograr la motivación e los estudiantes es presentar aplicaciones de los conceptos matemáticos vinculados con sus verdaderos intereses. De igual modo los conceptos deben ser presentados teniendo en cuenta su génesis histórica y los problemas (muchas veces de otras ciencias) que les dieron origen.

Volviendo al tema de cómo se presentan los conceptos matemáticos, un desarrollo gradual, con presentaciones sucesivas de profundidad creciente, en espiral, y con constantes alusiones a la aplicación en la carrera es el mejor medio para que el estudiante comprenda, fije y aplique estos conocimientos. En tal sentido, los cursos de Matemática deben adaptarse a la o las carreras para los cuales se dictan.

Un caso interesante lo constituye la Transformada de Laplace y su adaptación a las carreras químicas. Esta herramienta posee una gran cantidad de aplicaciones a carreras muy diversas, de distintas áreas de la Química. Tanto la herramienta en sí como sus aplicaciones resultan fáciles de entender por los estudiantes y permite lograr a los docentes buenos niveles de motivación en sus clases.

Esta adaptación de los cursos, los programas y hasta los temas puntuales a las necesidades de las distintas carreras exige un gran esfuerzo de estudio de programas de Matemática y otras materias, planteo de problemas interesantes y aplicados, articulación con otras asignaturas, etc.

El diseño de esos planes, programas y situaciones didácticas es una tarea muy importante que sólo un equipo multidisciplinario integrado por matemáticos, profesionales de la facultad involucrada y expertos en Matemática Educativa pueden realizar con éxito.

Esta tarea de diseño de cursos y de situaciones didácticas aplicadas a cada situación particular choca con los intereses corporativos de ciertos grupos. Por un lado, los departamentos de Matemática, frecuentemente encabezados por matemáticos profesionales con escaso interés en los temas de enseñanza, se niegan a tratar de realizar el esfuerzo antes mencionado. En efecto, es más cómodo y lleva menos tiempo dar siempre el mismo curso para todas las carreras y orientaciones, prescindiendo de cuales puedan ser sus objetivos. Por otro lado, para las grandes empresas editoriales el mito del "contenido universal libre del contexto" [15] en los cursos de Matemática es sumamente redituable. En efecto, un texto de Matemática pura para cualquier carrera es más barato de hacer y tiene un público potencial más amplio, lo que redunda en ganancias más suculentas para las empresas que intervienen en su fabricación, distribución y venta.

Es imprescindible luchar contra estas situaciones desde el ámbito de la Matemática Educativa. La enseñanza no puede estar al servicio de los intereses de pequeños grupos corporativos. La enseñanza sólo puede estar al servicio de la sociedad que la sustenta.

Bibliografía

Martínez Luaces, V. Y Casella, S. ; "La Educación Matemática en las diferentes ramas de la Ingeniería en el Uruguay hoy", Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura, La Habana, Cuba, 1996, págs 386-391.

V. Martínez Luaces y E. Cuitiño, "Estadística para Químicos: ¿Qué enseñar?", Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME-12, Bogotá, Colombia, 1998.

K.R. Westerterp y otros, "Chemical Reactor Design and Operation", 2ª. Edición, 1984, Manchester, John Wiley & Sons.

M. Gibaldi and D. Perrier, "Pharmacokinetics", Marcel Dekker, INC., New York (1975), U.S.A., pp. 267-279.

Martínez Luaces, V. ; "Química y Matemática: ¿dos asignaturas inmiscibles?", presentado en el 12º Encuentro Internacional de Actualización Docente realizado en Carlos Paz, Argentina, 1998.

Martínez Luaces, V. ; "Una innovación en la enseñanza de la Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería Química", enviado a SUMA (España) para referato.

V. Martínez Luaces, "Notas para el curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales Aplicadas a Ingeniería Química", 1997, Facultad de Ingeniería, Montevideo, Uruguay.

Martínez Luaces, V., Acher, R. y Gómez, A. ; "Las Transformadas Integrales y su enseñanza en las distintas ramas de la Ingeniería y la Economía", Memorias del III Taller sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura (1998), La Habana, Cuba, págs 67-71.

Martínez Luaces, V., "Notas para el curso de Matemática III de Ingeniería de Alimentos" (1996), Montevideo, Uruguay, http://bilbo.edu.uy/~math/mathIII.html

Martínez Luaces, V., Acher, R. y Gómez, A. ; "Informe del curso de Matemática III del año 1996". Archivos de la Comisión de Enseñanza de la Facultad de Química.

Martínez Luaces, V., "Informe del curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales: Aplicación a la Ingeniería Química" (1997). Archivos de la Comisión de Posgrado del Instituto de Ingeniería Química de la Facultad de Ingeniería.

Randall, T. ; "An evolutionary introduction to Laplace Transform", Teaching Mathematics and its Applications, **16**, Nº 3 (1997), págs 127-130.

Miranda, E. y Cordero, F., "Génesis y Desarrollo de las Ideas que llevaron a la Construcción de la Transformada de Laplace". Memorias del II Taller sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura, La Habana, Cuba (1996), 366-379.

Miyar Chávez, A., "Transformada de Laplace: una propuesta de estructuración". Memorias del III Taller sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura (1998), La Habana, Cuba, págs. 77-81.

Alsina, C., "Towards a New Paradigm of Teaching Mathematics at University Level", Pre-proceedings of the ICMI Study Conference on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level (1998), Singapore, 16-25.

Pensamiento Algebraico

Álgebra lineal, informática y resolución de problemas

Yolanda de J. O'Farrill, Eugenio Carlos Rodríguez, Mayra Durán, Marlén M. Vázquez, Miguel Angel Díaz
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría
Cuba

Resumen

En la Educación Superior más que enseñar debiera educarse a los estudiantes en el empleo de las técnicas heurísticas, es necesario que el estudiante domine esos recursos como plantea Schonenfeld (1985) en aras de lograr un mejor desempeño en la resolución de problemas (Delgado, 1999).

Un ingeniero en su trabajo profesional en realidad se enfrenta a situaciones problémicas y él debe ser capaz de convertirlas en problemas, es decir, formular problemas ante situaciones vagas (**modelar**).

El estudio del Álgebra Lineal es de gran importancia en las carreras de ingeniería pues por medio del Álgebra Lineal se establece una conexión entre las funciones de una y varias variables, así como una extensión a espacios de dimensión n > 3, además su conocimiento es necesario en diferentes aplicaciones entre las que se enumeran: administración, economía, física, psicología, etc., ramas en las cuales puede desarrollarse profesionalmente un Ingeniero Informático.

El desarrollo de nuevas tecnologías entre las que se destacan los multimedia, ha revolucionado el campo de la Informática Educativa al permitir el aprovechamiento de recursos tales como gráficos, la animación y el sonido; pero lamentablemente las aplicaciones actuales no siempre consideran los avances pedagógicos que influyen en la educación, simplemente perpetúan con tecnología avanzada estructuras anteriores, incapaces de asumir nuevas demandas y técnicas docentes.

Desarrollo

El estudio del Álgebra Lineal es de gran importancia en las carreras de Ingeniería pues por medio de esta se establece una conexión entre las funciones de una y varias variables, así como una extensión a espacios de dimensión n > 3, además su conocimiento es necesario en diferentes aplicaciones entre las que se enumeran: administración, economía, física, psicología, etc., ramas en las cuales puede desarrollarse profesionalmente un Ingeniero Informático.

En el plan de estudio de la asignatura se disponen de 64 horas de clases para los temas de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, evidentemente se carece del tiempo suficiente para desarrollar situaciones problémicas donde el alumno pueda modelar las situaciones presentadas, es decir, formular el problema ante una situación vaga, lo que es lo mismo, convertir en problema una situación problémica, que es realmente a lo que se enfrenta un ingeniero en su trabajo profesional.

La presencia cada vez mayor de calculadoras y computadoras personales (PC) en toda la vida moderna, motiva que el quehacer pedagógico no pueda sustraerse de ellas y que se hagan obsoletos determinados conocimientos y habilidades a los que hoy se les dedican considerables esfuerzos para su formación.

En su lugar se podría dedicar más tiempo al tratamiento de los conceptos y sus significados y a la formación y/o desarrollo de habilidades de mayor generalidad (Delgado, 1995a).

El vertiginoso desarrollo de la Informática en el mundo, ha ocasionado transformaciones en el ámbito educativo. El desarrollo de nuevas tecnologías entre las que se destacan los multimedia, ha revolucionado el campo de la Informática Educativa al permitir el aprovechamiento de recursos tales como gráficos, la animación y el sonido; pero lamentablemente las aplicaciones actuales no siempre consideran los avances pedagógicos que influyen en la educación, simplemente perpetúan con tecnología avanzada estructuras anteriores, incapaces de asumir nuevas demandas y técnicas docentes.

El reto que se plantea a la enseñanza en nuestro tiempo, no es idear nuevos dispositivos, sino sacar partido creativamente a todo el potencial educativo que ofrece la tecnología actual.

La aparición en el mercado de productos con cada vez mayores posibilidades (DERIVE, MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, etc.) y la posibilidad real de adquirirlos, obliga ya al cambio, a pesar de que estos no respondan plenamente a las necesidades de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Nuestro instituto consciente del papel que debe jugar en el perfeccionamiento de la enseñanza superior ha elaborado un proyecto de investigación pedagógica para realizar una transformación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Matemática Básica para una carrera de ingeniería tomando como base el uso de la Informática en todas sus posibilidades.

Nos encontramos ante una interrogante: ¿Cómo introducir los progresos de la Informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las asignaturas de la disciplina Matemática para elevar la calidad del proceso de formación de ingenieros y contribuir a satisfacer las demandas del desarrollo social?

Nuestro trabajo tiene como **OBJETIVO**: Perfeccionar la asignatura Älgebra Lineal para el perfil de carrera Ingeniería Informática con la introducción de la tecnología informática como Tecnología Educativa para el desarrollo de procesos de enseñanza aprendizaje que desarrollen en los estudiantes capacidades para aprender a aprender.

Consideramos que para lograr ese perfeccionamiento tenemos que utilizar la tecnología.

Dentro del concepto de tecnología incluimos conocimientos, experiencias, habilidades, capacidades, es decir, la inteligencia del hombre.

El concepto de Tecnología Educativa lo consideramos en dos sentidos:

- como medios o instrumentos utilizados en el proceso de enseñanza- aprendizaje.
- como mediación pedagógica, referida a la actuación del profesor dentro de la estructura didáctica, como orientador, comunicador y organizador, al mismo nivel o dándole la misma importancia que las categorías de objetivos, contenidos, métodos, etc.

Dada la necesidad de lograr un pensamiento productivo en los estudiantes y los resultados de investigaciones psicopedagógicas realizadas, se estima necesario considerar el desempeño en la resolución de problemas como un indicador en el desarrollo del estudiante; de aquí la importancia de que en nuestras clases se enseñe a los alumnos a resolver problemas y, por tanto, que los profesores organicen la impartición de los contenidos apoyándose en la resolución de problemas.

Debe acotarse que los términos problema y resolución de problemas han tenido y tienen múltiples acepciones entre investigadores y docentes. Para unos, problema es cualquier ejercicio con texto, para otros este término se utiliza cuando se refieren a aplicaciones extra-matemáticas

Proponemos, el desarrollo de una enseñanza sistémica a través de la resolución de problemas. Dicha concepción propuesta por el Doctor Raúl Delgado conllevó a la creación y desarrollo de un tipo particular de enfoque sistémico.

Consideramos que esta variante posibilita al estudiante trabajar con sus estructuras de conocimiento, ponerse en el punto de vista del prójimo y relativizar su propio punto de vista, revisar sus propios esquemas.

Se ha realizado un estudio con los expertos para definir los temas en que se considera deben utilizarse softwares educativos llegando a la conclusión de desarrollar un Sistema Entrenador con el cual se resolverán problemas cuya modelación matemática conduzca a un Sistema de Ecuaciones Lineales. Teniendo en cuenta las opiniones de los expertos, se decidió tomar para la aplicación del aprendizaje a través de la Resolución de Problemas los temas:

Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL): por ser uno de los primeros temas de una de las asignaturas del primer semestre de la carrera, por la sencillez del tema y por la gran cantidad de problemas que se modelan a través de SEL.

Cambio de base y Aplicaciones Lineales: por estar relacionados con la visualización de gráficos por computadora (que se estudia en una asignatura de la especialidad impartida en 4to. año de la carrera). Aunque la impartición de los temas presenta tal vinculación, ésta sólo se realiza desde el punto de vista analítico. De esta manera se pierde una buena oportunidad de que el estudiante perciba el sentido práctico de los conceptos recibidos, de fomentar el espíritu de investigación y experimentación de tributar a la formación profesional creando habilidades en el manejo de la computadora.

Diagonalización: este tema al igual que los dos anteriores vincula estrechamente la asignatura de Álgebra Lineal con la Geometría Analítica de manera que los procedimientos utilizados se pueden ejemplificar a través de problemas geométricos relacionados con rotaciones o traslaciones de superficies cuádricas.

Por otra parte, en ejercicios de aplicación que no se resuelvan por Sistemas de Ecuaciones Lineales se propone la discusión de la modelación del problema en el aula y para la solución del mismo (cálculo) usar el Asistente Matemático DERIVE por resultar una herramienta eficaz para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje, se destacan las capacidades de: manipulación simbólica, representación gráfica y potencial numérico del DEMO, unido esto a una interfaz intuitiva y bajo requerimiento de hardware [Marcos, M., Irarragorri, F., 1997]. Esto implica un desplazamiento de las habilidades de cálculo hacia el razonamiento matemático, dando lugar al aprendizaje significativo de los conceptos y relaciones, a la formación de habilidades más generales, y a la resolución de problemas.

Para lograr todo lo anterior se está trabajando en el rediseño de la asignatura considerando la elaboración de un software educativo y las habilidades a lograr a través del uso de la computadora y la aplicación de la resolución de problemas.

Bibliografía

[Delgado, J. R., 1999.]La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas. Tesis Doctoral .Cuba, 1999.

[Fernández M., 1992] et. al. Multimedia y pedagogia. Un binomio actual. Universidad Pontificia Comillas (UPCO). Madrid, 1992.

[Kraus H., 1995] et al. Multimedia and hypermedia provide new opportunities for management training. Proceeding of the ED-MEDIA '95 Conference, AACE, Austria, 1995. 23-26

[Polya, G., 1994]Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México, 1994.

[Santos, L. M., 1994] La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas". Cuadernos de Investigación Nº28. CINVESTAV-IPN. México, 1994."

[Schoenfeld, A., 1985] Understanding and Teaching the Nature of Mathematical Thinking. University of California at Berkeley, USA,1985.

[Marcos, M., Irarragorri, F., 1997] Computación Reflexiones sobre el uso del DERIVE en un curso de Cálculo Diferencial para ingenieros. Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemártica Educativa, México, 1997.

Modos de pensamiento sintético y analítico: el caso de la base de un espacio vectorial

Rosa Ma. Chargoy Espínola (rchargoy@mail.cinvestav.mx)
DGETI
México

Asuman Oktaç, Francisco Cordero
AES-Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Resumen

Presento algunos resultados de mi proyecto de investigación, relativo al análisis conceptual de la base de un espacio vectorial en los modos de pensamiento geométrico-sintético, analítico-aritmético y analítico-estructural. En la historia, la noción de base se estudia en los sistemas de ecuaciones lineales en el modo analítico-aritmético, se construye en el modo geométrico-sintético y se establece de manera axiomática en el modo analítico-estructural.

Introducción

En mi práctica docente me percaté que en los cursos de álgebra lineal los alumnos tienen grandes dificultades para entender los conceptos y en sus exámenes tienen poco éxito. Esta situación me ha llevado a buscar el origen de la problemática. Con esta idea en mente, mi primera acción fue sondear en la comunidad escolar, y tanto maestros como alumnos, expresaron desaliento por el fracaso en sus cursos. Algunos alumnos llegaron a manifestar incluso que sus experiencias fueron traumatizantes.

Para contestar formalmente a la pregunta: "¿por qué los estudiantes tienen dificultad en el entendimiento de los conceptos del álgebra lineal?", es necesario tomar en cuenta que el estudiante de álgebra lineal debe entender una gran cantidad de símbolos, definiciones, propiedades, conceptos y teoremas que requieren en algunos casos, de un alto grado de abstracción, en otros de cálculo, además de razonamientos. Considero a continuación algunos de estos puntos. Analizando la problemática con los símbolos se observa que en el álgebra lineal un mismo símbolo puede representar diferentes elementos, por ejemplo, el símbolo (1,0) representa diferentes vectores en diferentes bases. En algunos casos los estudiantes no pueden ver la diferencia entre punto y vector en R^2 o en R^3.

En el caso del lenguaje, el alumno tiene que conciliar los lenguajes cotidianos con los que se emplean en el aprendizaje del álgebra lineal. El lenguaje del álgebra lineal presenta dificultades al estudiante, por las formas de descripción que se usan: el lenguaje de los espacios R^2, R^3, emplea términos geométricos como ortogonalidad, el lenguaje de la teoría de los espacios R^n, n-adas, matrices, rango, solución de sistemas de ecuaciones, etc. y el lenguaje de la teoría más general de espacios vectoriales, subespacios, dimensión, operadores, kernel. "El constante intercambio en el lenguaje de estos tres niveles de descripción, que además coexisten, pero no son equivalentes es una fuente de dificultad conceptual" (Sierpinska, 1994).

En el estudio de los sistemas de ecuaciones a veces sucede, por un lado, que los alumnos deben utilizar conceptos en álgebra lineal de los que no tienen bases suficientemente sólidas, por ejemplo, de lógica y teoría de conjuntos, que son necesarias y, por el otro, que los estudiantes usan técnicas algebraicas al margen del álgebra lineal.

Con relación a las dificultades conceptuales, Dorier menciona: "Los conceptos del álgebra lineal son difíciles de entender porque son de naturaleza epistemológica sofisticada y abstracta. Las teorías axiomáticas de espacios vectoriales fueron creadas con el objetivo principal de encontrar un método general para resolver diferentes problemas con las mismas herramientas y generalizar y unificar los conceptos anteriores, y no como otros elementos matemáticos, para resolver nuevos problemas; es decir, que a la axiomatización del álgebra lineal se llegó por el poder de generalización y unificación y, consecuentemente, de la simplificación de los conceptos y no de la posibilidad de encontrar una solución a un problema no resuelto" (Dorier, 1995).

A causa de las dificultades en el entendimiento del álgebra lineal se deben emprender tareas e investigaciones que busquen el origen de la problemática. Considerando la multiplicidad de direcciones que se presentan en el estudio, he elegido trabajar en mi investigación sobre la dificultad conceptual de la base de un espacio vectorial.

Justificación

Los espacios vectoriales son la parte central del álgebra lineal y la base es medular para el espacio vectorial. Dada una base para un espacio vectorial, los elementos del espacio vectorial se pueden expresar como una combinación lineal de los elementos de la base; es una forma de simplificar y describir los elementos del espacio vectorial. "Los vectores de la base forman un esqueleto sobre el que se ancla todo el espacio" (Saldanha, 1995).

Entre los enfoques sintético y analítico hay una separación que pienso, es necesario superar para que los estudiantes usen flexible y conscientemente los razonamientos. Por ejemplo, en los libros de texto usualmente se privilegia el enfoque analítico-aritmético sobre el sintético-geométrico y, aun cuando en algunos casos la exposición se hace en ambos razonamientos, no se transita de uno a otro de manera flexible y consciente. En los textos es común encontrar que proponen a los estudiantes resolver ejercicios de carácter analítico-aritmético favoreciendo los procesos algorítmicos.

Los estudiantes frecuentemente trabajan en el modo analítico, Carlson, y otros, (1997) opinan: "Los estudiantes están familiarizados con algoritmos computacionales que son menos difíciles, no así con los conceptos para los que tienen poca experiencia, como el aprendizaje de ideas. Los estudiantes no tienen experiencia en usar, y mucho menos en determinar, diferentes algoritmos para trabajar con un concepto en diversos marcos".

De la investigación bibliográfica que he realizado, he encontrado varias publicaciones e investigaciones en álgebra lineal que abordan aspectos diversos e importantes como la currícula, propuestas metodológicas, la incorporación de la tecnología al aula, etc. En algunos trabajos se estudian dificultades relativas a los conceptos, como el nivel de conocimiento que se requiere para su entendimiento, el lenguaje o la simbología que se emplea en ellos, por ejemplo:

"Los conocimientos de los estudiantes pueden ser muy limitados para que lleguen a abstraer, de los ejemplos que conocen, la estructura del espacio vectorial. Para una mayoría de estudiantes el álgebra lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas, que no se llegan a representar; además esas nociones están sumergidas bajo una avalancha de palabras nuevas, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas y de teoremas nuevos" (Dorier, *et al*, 1997).

El obstáculo del formalismo se manifiesta en los estudiantes, quienes operan en el nivel de una forma de expresión, sin ver que estas expresiones se refieren a algo más. Síntoma de esta confusión es considerar los vectores como números, las transformaciones como vectores, etc. Este obstáculo hace que el estudiante en ocasiones, reproduzca el discurso del maestro o el del libro de texto y, que tratando de ser eficiente, desarrolle conductas automáticas" (Sierpinska, 1999).

A pesar de que las investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal se han incrementado en los últimos años, un análisis de la base de un espacio vectorial, específicamente, no lo he encontrado hasta el momento. La tesis de maestría de Luis A.

Saldanha es lo primero que se ha escrito sobre el análisis conceptual de independencia y dependencia lineal.

Observaciones sobre las dificultades en el entendimiento de la base

A lo largo de mi experiencia docente he detectado algunas dificultades en la comprensión de la base de un espacio vectorial:

- El proceso de generalización de un espacio geométrico como R^3 a un espacio R^n involucra modificar ideas. Por ejemplo, una base en R^3 puede verse como tres vectores no coplanares, sin embargo, esta idea geométrica no puede generalizarse a R^n. Esta generalización requiere una reconstrucción del esquema mental, para llevar las ideas del espacio geométrico al abstracto. Harel se refiere a estas dos generalizaciones como expansivas y reconstructivas (Harel y Tall, 1991, citados por Saldanha, 1995).
- Una dificultad para el entendimiento de la base, es que la definición del concepto de independencia lineal implica el manejo de los cuantificadores y de la lógica que usualmente el estudiante no tiene.
- Respecto al concepto de generar un conjunto de vectores, cuando el conjunto generador se da por ejemplo, en forma geométrica $\{a,b\}$ (Fig.1) y se pide a los alumnos el conjunto de vectores que generan, se confunden, y en algunos casos, han pensado que el conjunto generado es el paralelogramo formado en la figura 1.

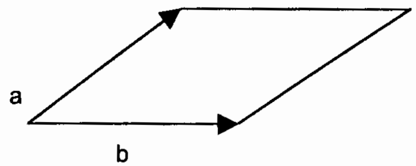


Fig. 1

- En los libros de texto es usual el estudio de la base canónica, dando poco énfasis a otras bases, esto pudiera causar en el estudiante una inclinación a pensar sólo en la base canónica.

Planteamiento del problema

¿Por qué a un estudiante le resulta difícil entender el concepto de base de un espacio vectorial? ¿Cuál es la problemática en el entendimiento de este concepto?

Objetivo

En álgebra lineal coexisten varios modos de pensamiento: el sintético-geométrico y el analítico, de este último se tienen dos clases: el analítico-aritmético y el analítico-estructural. "Se podría decir que el desarrollo del álgebra lineal es en cierto sentido el resultado de una interacción entre los modos de razonamiento. Para la enseñanza la pregunta no es cuál modo de razonamiento vale más para fomentar en el estudiante, sino cómo llevar a los estudiantes al uso flexible y consciente de ellos" (Sierpinska, 1996b).

Para la investigación de la base de un espacio vectorial en el marco teórico de los modos de pensamiento, he recurrido a actividades como las siguientes:

- Analizar el desempeño del estudiante cuando se le plantean problemas concernientes a la base en el modo sintético-geométrico y detectar cómo piensa en éste modo.

- Analizar qué sucede cuando resuelve el problema en el modo analítico-aritmético y detectar si tiene dificultades para pasar del modo sintético-geométrico al analítico-aritmético y viceversa.
- Estudiar las posibles fuentes de dificultad en este tránsito.
- Analizar si al resolver un ejercicio en el modo sintético-geométrico, es llevado por la geometría a otro contexto.
- Analizar qué papel juega la base y qué problemas tiene el estudiante al resolver sistemas de ecuaciones, y cómo relaciona la base con la dimensión de los espacios vectoriales solución del sistema.
- Detectar si le es más fácil encontrar la base formalmente.

Hipótesis

El análisis conceptual de la base en los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, me permitirá conocer cómo piensa el estudiante y que dificultades presenta al trabajar con el concepto bajo los diferentes razonamientos. En la medida que transite de un modo a otro y tenga un uso flexible y consciente de ellos, se podrá observar si privilegia algunos de los modos, y cuál le cuesta mayor dificultad: el paso del modo sintético al analítico o viceversa. Ejemplo:

A) Puede pensarse que el estudiante pasa del contexto de la geometría al de la Física, cuando piensa en el conjunto generado por los vectores $\{a, b\}$, como el paralelogramo que trazó en la figura1.

B) Es posible que el estudiante no pueda establecer la relación de la base del espacio vectorial solución de un sistema de ecuaciones lineales, con la definición formal de base.

C) El alumno privilegia el modo de razonamiento analítico-aritmético.

Resultados preliminares

a) Algunos resultados preliminares los obtuve del análisis de una situación resuelta en equipo, por profesores de bachillerato y licenciatura inscritos en la Maestría en Educación con especialidad en Matemática Educativa, en el tecnológico de Monterrey. El curso era introductorio al álgebra lineal en educación a distancia. La situación fue:

Sea $u = (1, 0, 2, -1)$ un vector dado en R^4.

a) Encuentra un vector ortogonal a u.

b) ¿Hay un sólo vector ortogonal a u o hay varios?

c) Demuestra que todos los vectores ortogonales a u forman un subespacio de R^4.

d) Halla una base para el subespacio.

Los profesores plantearon la ecuación $u \bullet v = 0$ y resolvieron los incisos a, b y c; para la solución del inciso d pensaron que deberían ser cuatro vectores linealmente independientes.

La secuencia de ideas que trabajaron fue la siguiente:

- "Cuando me refiero a cuatro vectores, me estoy refiriendo a que tienen cuatro elementos".

- "El conjunto de vectores ortogonales a un vector en R^2 es un conjunto de líneas paralelas; el conjunto de vectores ortogonales a un vector en R^3 es un conjunto de planos paralelos. Será entonces el conjunto de vectores ortogonales a un vector en R^4 un conjunto de espacios paralelos a R^3".
- "Un plano puede ser subespacio de R^3 y con dos vectores independientes se define su base. Entonces el "volumen" puede ser un subespacio de R^4 y con tres vectores independientes se define su base también".

Después de varios intentos y del empleo de herramientas geométricas, resolvieron el problema. El primer planteamiento de los estudiantes para resolver este problema fue por medios algebraicos; se observa la confusión entre el número de coordenadas de los vectores y la dimensión del espacio vectorial. Finalmente recurrieron al modo sintético para representar el problema y expresaron la solución en el modo estructural. La confusión entre el número de coordenadas de los vectores y la dimensión del espacio vectorial al que pertenecen, Dorier (1997) la reporta de la siguiente manera: "Los estudiantes derraparon completamente al dar dos vectores de R^2, para generar un subespacio de R^4".

b) Los alumnos de maestría en Matemática Educativa del Cinvestav (cuya preparación es variada pues hay ingenieros, licenciados en matemáticas y egresados de la escuela Normal Superior), después del curso de álgebra lineal de un semestre, en el examen final, trabajaron individualmente sobre el siguiente diseño de situación:

a) En cada una de las gráficas siguientes decide si los vectores forman una base para R^2. Explica tu respuesta.

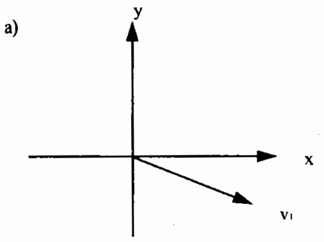


Fig. 1 sólo v_1

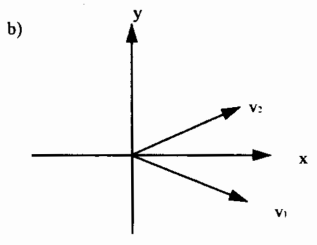


Fig. 2 v_1 y v_2

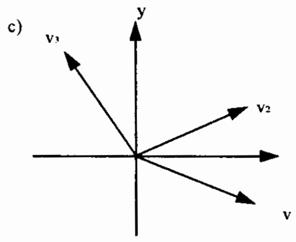


Fig. 3 v_1, v_2 y v_3

b) En los casos anteriores, decide si los vectores dados son:

1) Linealmente independientes.

2) Generan R^2. Explica tu respuesta.

c) Dibuja otra base para R^2.

Algunos resultados del análisis de las respuestas son los siguientes:

- Se confundieron con el número de elementos de la base y la dimensión del espacio vectorial, por ejemplo: tres vectores en R^2, linealmente independientes dos a dos, pensaron que podían generar R^3.
- Cuando se les pidió dibujar una base para R^2, la mayoría de los estudiantes dibujó la base canónica y en pocos casos otro base ortogonal.
- Usualmente trabajan en el modo de pensamiento analítico-aritmético.

c) Del análisis conceptual de la base en seis libros de texto, he investigado qué conceptos entran en juego para la definición de base y en cuáles el concepto de base es necesario, así mismo, cuáles se verían afectados por el desconocimiento de él. Al respecto mis observaciones son:

- Podemos darnos cuenta de la gran diferencia de las notaciones empleadas por los autores, así como de los diferentes símbolos y lenguajes.
- Para motivar a los estudiantes en el estudio de los espacios vectoriales, los autores en algunos casos promueven la intuición geométrica; en otros recurren a las leyes de la física, para representar los vectores por medio de flechas en el plano que cumplen la ley del paralelogramo; representan los vectores por medio de coordenadas en la representación analítica, en el caso particular de Banchoff y Wermer empiezan desde el espacio R^1.
- Al tratar los espacios vectoriales a través de la geometría analítica, favorecen el empleo de la base canónica. En el enfoque de Fletcher no se contempla esta situación, sin embargo, al trabajar por medio de ejercicios en un contexto, puede limitar el entendimiento del concepto. En el caso de Porter y Hill introducen la base en la solución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos, en el ambiente tecnológico.
- Para analizar los textos consideré un orden cronológico, es notable que con el devenir del tiempo, la representación geométrica aparece más en los textos así como la incorporación de la tecnología para su mejor comprensión.
- La base se trata a través de las ideas germinales de independencia-dependencia lineal y generar un espacio, de manera que usualmente se define en los textos de la siguiente forma:

Un subconjunto *S* de un espacio vectorial *V*, es una **base** para *V* si genera *V* y es linealmente independiente, es decir *S* es una base para *V* si satisface las siguientes condiciones:

El conjunto de vectores de *S* es linealmente independiente. Cada vector del espacio vectorial V se puede expresar en términos de ellos.

Los libros de texto considerados para el análisis son:

Álgebra Moderna Birkhoff, G. & MacLane, S

Linear Algebra Through its Applications Fletcher, T. J

Introduction to Linear Algebra. Theory and Applications O'Neil

Álgebra Lineal de Friedberg, S., Insel, A. y Spence, L

Linear Algebra Through Geometry de Banchoff & Wermer

Interactive Linear Algebra. A laboratory course using mathcad Porter, G. J. & Hill, R. D

Marco teórico

El marco teórico del proyecto lo hago en los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural; analizo cómo se define en la historia este marco y cómo el desarrollo del álgebra lineal se debe en gran parte a la tensión entre estos modos de razonamiento.

Los trabajos posteriores a la *Geometría de Situación* de Leibniz (1672), dan origen a la representación geométrica de los números complejos y, poco tiempo después, al álgebra de los cuaternios, este es el principio de los espacios vectoriales. Al intentar separar el álgebra de la geometría, se propicia la evolución de las dos disciplinas y tiempo después, se desarrolla el método axiomático.

Los modos de pensamiento y razonamiento coexisten en el álgebra lineal. El modo sintético-geométrico aparece primero en la historia y de manera subsecuente, los modos analítico-aritmético y analítico-estructural. Sin embargo, no se puede decir que uno elimine a los otros dos, ni cuál es el más relevante; se puede inferir que la importancia de ellos estriba en su interacción. Más que ver estos modos de razonamiento en el álgebra lineal como niveles en el desarrollo del pensamiento algebraico, es preferible verlos como modos de pensamiento igualmente útiles, cada uno en su propio contexto y para propósitos específicos, principalmente cuando interactúan.

La característica de los modos de pensamiento es que en el modo sintético los objetos están dados directamente a la mente, que entonces trata de describirlos, mientras que en el modo analítico, los objetos se dan indirectamente, ellos se construyen por la definición de sus elementos. Cada uno de los tres modos de pensamiento en álgebra lineal usa un sistema específico de representaciones.

El modo sintético-geométrico emplea el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas (una recta puede verse como un objeto dado previamente de una cierta figura en un lugar en el espacio; las propiedades de la recta sólo la describen, no la definen). En el modo analítico-aritmético las figuras se entienden como conjuntos de n-adas de números que satisfacen ciertas condiciones, que se escriben, por ejemplo, en la forma de sistemas de ecuaciones o desigualdades; las componentes numéricas de los objetos geométricos como puntos o vectores son importantes; por ejemplo, un sistema de ecuaciones podría escribirse con todos los coeficientes explícitamente:

1) $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

....

m) $a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

El pensamiento analítico-estructural, va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de la representación analítica en elementos estructurales; entonces el sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, o en forma vectorial $x_1\boldsymbol{A}_1 + \ldots + xn\boldsymbol{A}n = \boldsymbol{b}$. Respecto a los sistemas de ecuaciones, hay otra diferencia entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural: lo importante desde el punto de vista analítico-aritmético es encontrar métodos para la solución de sistemas de ecuaciones; en el modo de pensamiento estructural la cuestión podría ser relativa a las condiciones sobre la matriz $\boldsymbol{A}$ y el vector $\boldsymbol{b}$ para la existencia y unicidad de la solución. Las propiedades de la matriz serían más importantes que la naturaleza de sus componentes numéricas.

El desarrollo del álgebra lineal empezó como un proceso de pensamiento analítico del espacio geométrico; se pueden distinguir en este desarrollo dos grandes etapas relacionadas con estos dos procesos: la aritmetización del espacio, que toma lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en R^n y la desaritmetización del espacio o su estructuralización, por la cual los vectores perdieron las coordenadas que los anclaban al dominio de los números, para llegar a los elementos que definen su comportamiento por un sistema de propiedades o axiomas (Sierpinska, 1996b).

Método

Se tiene diseñada una situación que coloca a los estudiantes para trabajar en un modo de pensamiento a través de problemas sobre la base de un espacio vectorial. La situación empieza en un modo de pensamiento y después pasa a otro. También planteo la forma de encontrar el modo que prefiere el estudiante para resolver un problema. En una entrevista clínica se han entregado los problemas a los estudiantes en forma escrita, dándoles tiempo a que contesten para después comentar cómo llegaron a la solución de dichos problemas. Las entrevistas han sido grabadas para captar detalles que se pudieran escapar y que no quedaran registrados en el formato escrito.

He analizado las entrevistas tratando de investigar su forma de pensar para determinar las dificultades que se le presentaron, si el modo geométrico o el aritmético le causaron confusión, y/o si en el modo estructural entendió la definición pero no la puede llevar, por ejemplo, al modo sintético.

Me propongo trabajar con estudiantes de la licenciatura en Matemáticas y de Ingeniería, si es posible con profesores del nivel medio superior y superior que estudien en el diplomado en Matemática Educativa. De esta manera se enriquecería mi investigación al tener resultados de dos niveles y poder establecer alguna relación entre ellos.

Referencias.

Banchoff, T. & Wermer, J. (1991): *Linear Algebra Through Geometry.* Springer Verlang.

Birkhoff, G. & MacLane, S. (1953): *Álgebra Moderna.* Edit. Teide, Barcelona España. Traducido de la 12.ª edición inglesa.

Crowe, M. (1967): *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System.* Dover Publications, Inc. New York.

Dorier, J. L. (1990): *Contribution à L' Étude de L' Enseignement à L' Université des Premiers Concepts D'Algèbre Linéaire. Approches Historique el Didactique.* Thèse de Doctorat de L' Université Joseph Fourier (Grenoble).

Dorier, J.L. (1995): *Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics.* Educational Studies in Mathematics, 29: 175-197.

Dorier, J. L. (1996): *A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory.* Historia Mathematica, 22 pp. 227-261.

Dorier, J. L. (1997): *Recherches en Didactique des Mathématiques.L' Enseignement de L' Algèbre Linèaire en Question. Coordonné par Jean-Luc Dorier avec les contributions de Harel, Hillel, Rogalski, Roobert, Sierpinska et al.* Collection dirigée par Nicolas Balacheff.

Dubinsky, E. (1997): "*Some Thoughts on a first course in Linear Algebra at the College Level* in Carlson et Al. (ed.s) Resources."

Fletcher, T. J. (1972): *Linear Algebra Through its Applications.* Van Nostrand Reinhold company London.

Friedberg, S. Insel, A. y Spence L. (1982): *Álgebra Lineal.* Publicaciones Cultural.

Hillel, J. & Sierpinska, A. (1994). *On one persistent mistake in linear algebra.* PME, Portugal

O' Neil, P. (1979): *Introduction to Linear Algebra. Theory and Applications.* Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont, California.

Porter, G. & Hill, R. (1996): *Interactive Linear Algebra. A laboratory course using mathcad.* Springer.

Piaget, J. & García, R. (1994): *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* Siglo XXI editores.

Saldanha, L. A. (1995): T*he Notions of Linear Independence/Dependence: A Conceptual Analysis and Students Difficulties*. Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master in the Teaching of Mathematics. Concordia University. Montréal, Québec, Canada.

Sierpinska, A. (1992): *The diachronic dimension in research on understanding in mathematics-usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle*. Talk given at the conference: Interaction between History of Mathematics and mathematics learning, Essen, November 2-5

Sierpinska, A. (1996a): *Problems related to the design of the teaching and learning processes in linear algebra*, paper presented at the Research Conference in collegiate Mathematics Education, September 5-8, Central Michigan University, MT Pleasant, Michigan.

Sierpinska, A. (1996b): *Synthetic and Analytic modes of thinking in linear algebra*, BaCoMeT 4 publications. H.N. Jahnke, N. Knoche;-M. Otte (Eds), Interaction between History of Mathematics and Mathematics Learning. Göttingen. Vandenhoeck and Ruprecht.

Sierpinska, A. & Dreyfus, T. (1999): *Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The case of linear Transformations*. Recherches en Didactique des Mathematiques. 19(1), 7-40.

Pensamiento Geométrico

Desde el lápiz y el papel hasta las computadoras, trabajando con teselados

Silvina Cafferata Ferri, Liliana Homilka, Gerardo Mamani
Instituto Glaux, Buenos Aires
Argentina

"¡Cómo me gustaría aprender a dibujar mejor! Hacerlo bien requiere tanto esfuerzo y perseverancia... A veces los nervios me llevan al borde del delirio. Sólo es cuestión de batallar sin descanso con una autocrítica constante e implacable. Pienso que crear mis grabados sólo depende de querer realmente hacerlo bien. En su mayor parte algunas cosas como el talento son naderías. Cualquier escolar con unas pequeñas aptitudes podría dibujar mejor que yo. Lo que normalmente falta es el deseo incontenible de expresarse, apretando los dientes con obstinación y diciendo:

- Aunque sé que no puedo, sigo queriendo hacerlo."

Maurits C. Escher

La geometría en la escuela

Tradicionalmente, la enseñanza de la Matemática estuvo dirigida a la resolución de operaciones, con creciente complejidad de cálculos, los que muy pocas veces son encontrados fuera de las aulas. No obstante, aún se recuerdan experiencias en las que el nivel de abstracción exigido en las clases sobrepasaba el nivel evolutivo del alumno, incluso de los más interesados.

La enseñanza de la geometría se ha visto desplazada a un segundo plano debido a la poca intensidad horaria y a la fusión con la aritmética o el álgebra dentro de la Educación General Básica, donde sólo tienen cabida el cálculo de perímetros, superficies y volúmenes. Y son muchos los hechos que podemos considerar que agravan esta situación.

Afortunadamente, la organización de eventos académicos han hecho tomar conciencia del nivel formativo que posee la Geometría, ya que permite trabajar a partir de objetos concretos, llegando a distintos niveles de conceptualización.

Los niños toman posesión del espacio que los rodea, desde edad temprana, a través de la orientación, el análisis de la forma, la búsqueda de relaciones entre los objetos que encuentran a su alrededor, mediante la experimentación con las formas y los movimientos en el espacio.

Una de las funciones de la escuela es continuar este proceso, profundizando las ideas previas con las que accede a ella.

Surge entonces la necesidad de proporcionar, de manera amena y sencilla, unas lentes que faciliten la visión de todos los procesos geométricos que diariamente se producen a nuestro alrededor. Unas lentes que no se compran en ningún sitio porque están en nuestro cerebro y que como decía Galileo, "*nos van a permitir, si no salir del laberinto, sí al menos saber en qué punto del mismo nos encontramos.*"

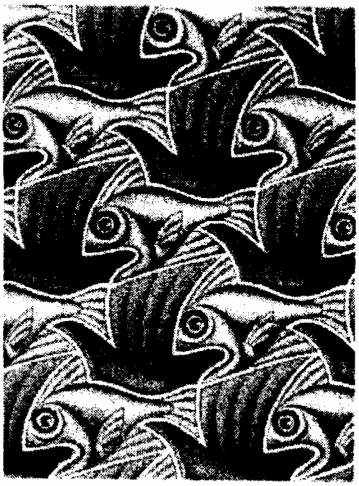
Este taller está dirigido a docentes de nivel medio. Su objetivo es presentar el atractivo mundo de la geometría de los movimientos, como una manera de abordar situaciones problemáticas en el plano.

La geometría en el arte

Todas las culturas han utilizado simetrías, traslaciones y giros en sus manifestaciones artísticas. Han jugado, casi siempre con sorprendentes resultados estéticos, con los movimientos en el plano.

Los movimientos en el plano se hacen arte en los frisos y sobre todo en los mosaicos que rellenan el plano. Es imposible no mencionar en este punto al gran artista holandés, Maurits Escher.

Hoy en día, la obra de Escher es mundialmente conocida y aparece en multitud de lugares, desde remeras hasta portadas de libros científicos. Gran cantidad de gente conoce los grabados y litografías de Escher, aunque muchos menos podrían señalar quién es su autor.



Pez y barco, de Maurits Escher

Escher entra de lleno en el concepto de "arte matemático". Un artista figurativo que sepa algo de ,matemática puede hacer una composición sobre un tema matemático de la misma manera que los artistas de la Edad Media hicieron con los temas religiosos o los artistas soviéticos con los temas políticos. Escher ha escrito que con frecuencia se sentía más próximo a los matemáticos que a sus colegas los artistas. A pesar de ello, Escher no poseía estudios matemáticos extensos ni completos.

La parte fundamental de la obra de Escher la constituye la división regular del plano. Forma parte, de alguna manera, de la mayoría de sus obras. Desglosando el plano en figuras de pájaros, peces, reptiles y figuras humanas, como en un rompecabezas, Escher ha logrado incorporar muchas de sus divisiones del plano en composiciones memorables. La división regular del plano en figuras congruentes que evoquen en el observador una asociación con un objeto natural familiar, es uno de esos problemas que generan pasión.

Una de estas creaciones, los teselados, constituye un buen punto de partida para la introducción y la aplicación de los movimientos del plano.

La computadora: una herramienta para trabajar en el aula

Hoy en día, con los avances de la tecnología, encontramos en la computadora un buen recurso para trabajar con nuestros alumnos en el análisis, reproducción y creación de estos diseños, sin necesidad de grandes conocimientos informáticos.

Así, la PC pasa a constituir un fuerte soporte para la formación y comprensión de conceptos, la visualización y el uso de múltiples representaciones del objeto matemático.

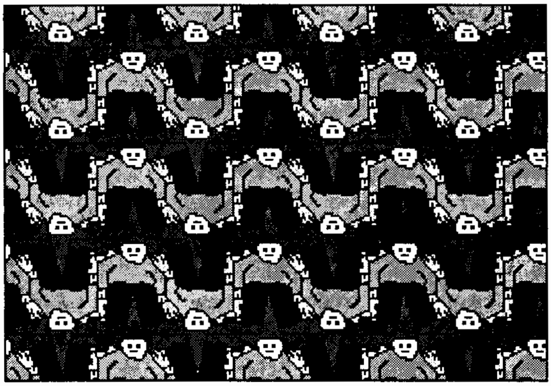
El creciente poder de las nuevas computadoras (junto a paquetes integrados y accesos a información externa), da lugar a considerarla ya sea como objeto de estudio o bien como una herramienta para el abordaje de contenidos pertenecientes a otras áreas. Con este sentido será tomada aquí: como una herramienta para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, que permite la experimentación y descubrimiento.

Así, la propuesta pretende que el profesor de Matemática emplee la computadora como un instrumento que permita ampliar (potenciar) la capacidad de comprender y operar en/con la realidad, lo cual no debe interpretarse como un desdén de otros recursos que hasta hoy dieron buenos resultados.

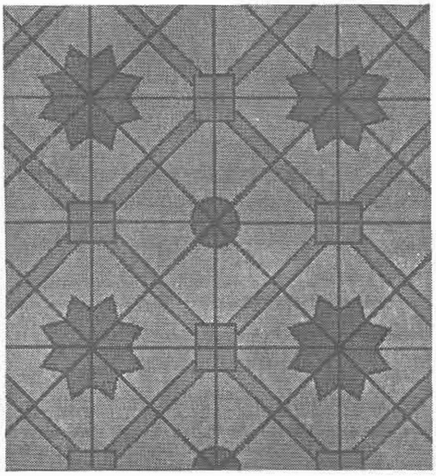
Nuestra propuesta del taller

A partir de una propuesta lúdica dirigida a los docentes asistentes, se analizarán las características y propiedades de mosaicos o teselados, y su aplicabilidad en el aula, para alumnos de enseñanza media (12-15 años).

Algunas actividades provistas consisten en presentar teselados y frisos, pidiendo identificar cuáles son las figuras patrón originales y los movimientos realizados para su creación. Un ejemplo puede ser el siguiente diseño creado por nosotros:



Se compararán distintos diseños para analizar cuáles son los polígonos regulares que pueden servir de base para los cubrimientos del plano. Es interesante crear mosaicos propios a partir de estos polígonos y también de otros no regulares. Esta actividad puede llevarse a cabo tanto con lápiz y papel, como utilizando a la computadora como recurso.



Otro ejemplo de nuestros diseños

En el taller, se propondrá la utilización de algún software gráfico que demande mínimos requerimientos de hardware y de conocimiento específico de su manejo, es decir, se tratará de interfaces amigables. Para esta propuesta hemos elaborado una guía básica del manejo del programa Neopaint, con el fin de facilitar a los asistentes el trabajo con el mismo.

Durante el desarrollo del taller se hará hincapié en no quedar únicamente al nivel gráfico y estético en este tema, pues ofrece posibilidades para trabajar a partir de ideas sencillas el método deductivo en geometría.

Los teselados en el aula

Para la implementación en el aula de las ideas presentadas en este taller, deberán tenerse en cuenta tanto algunos conocimientos previos tales como: primeros elementos de geometría euclidiana, concepto y clasificación de ángulos, paralelismo y perpendicularidad, polígonos y región poligonal, como el nivel en el se encuentren los alumnos en el momento de comenzar.

Estas actividades apuntan más allá de la comprensión de los conceptos que ellas enmarcan, ya que consideramos la necesidad de proporcionar elementos formativos esenciales en los estudiantes, para avanzar en el proceso cognitivo y desarrollar capacidades de validación y deducción. Nos interesa que los alumnos no sean sólo capaces de utilizar los conceptos o propiedades vistos en situaciones idénticas a las presentadas en el aula, sino que cuenten con ideas cuando se trata de resolver los mismos problemas planteados en un contexto algo diferente.

Es importante destacar que nos apoyaremos, en este punto, en el aporte de los profesores holandeses Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, de los cuales surge el hoy reconocido modelo de Van Hiele. Este modelo establece que la comprensión de la geometría pasa por cinco formas de ver los conceptos geométricos que se denominan *niveles de razonamiento*. El progreso en la comprensión de los conceptos geométricos siempre se produce desde el primer nivel y de manera ordenada, a través de los siguientes. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles ya que cada uno de ellos lleva asociado un lenguaje y el paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua y pausada.

Partimos de la manipulación de material concreto y avanzamos hasta el ordenamiento de propiedades que podrán ser captadas por los mismos alumnos. De esta manera, podemos avanzar desde el primer nivel de razonamiento planteado por el modelo de Van Hiele (reconocimiento) hasta el tercero (clasificación) alcanzando objetivos específicos en cada uno de los niveles.

Las habilidades básicas son útiles para describir los procesos de asimilación y adecuación en el aprendizaje de la geometría puesto que describen en forma gradual el desarrollo mental de los alumnos. La formación matemática que así se logra es valiosa puesto que proporciona un desarrollo en la percepción visual y espacial. Puede servir como vehículo para estimular y ejercitar habilidades generales de pensamiento y capacidades para la resolución de problemas.

La habilidad visual manifiesta características específicas desde los primeros niveles de razonamiento. El reciente desarrollo tecnológico ha hecho que resurja el interés por utilizar las técnicas visuales como uno de los principales elementos de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje. Se consideran un fuerte soporte para la formación y comprensión de conceptos, la visualización y el uso de múltiples representaciones de un objeto matemático.

El ejercicio de la visualización y la representación y comparación de figuras en diferentes posiciones, permite el desarrollo del sentido espacial que parece necesario para interpretar, comprender y apreciar la geometría.

En las primeras actividades del taller se analizará el desarrollo de estas habilidades, visualizando los diferentes movimientos geométricos, tanto para el reconocimiento de figuras trasladadas o rotadas, por ejemplo, como para la realización de los mismos.

En un segundo nivel, las actividades pretenderán que se empleen correctamente conceptos geométricos en el descubrimiento y análisis informal de los elementos y características de cada uno de los movimientos geométricos. Es importante aquí la justificación de las respuestas, y la discusión y acuerdo grupal de las características encontradas.

Un nivel superior a este, planteará actividades que pretenden la toma de conciencia de la relación existente entre la figura inicial, la transformación efectuada y la figura final.

No siempre se podrá llegar a los niveles superiores que plantea el modelo de Van Hiele. Pero, de todos modos, debemos dejar expuesta la importancia que tiene la validación formal de situaciones geométricas

Comentarios finales

Si bien elegimos en esta ocasión el tema de mosaicos para trabajar, todos sabemos que no es esta la única elección importante, sino también su implementación y análisis. Las actividades están orientadas a dominar las transformaciones geométricas y aplicarlas en la construcción de teselados. Elaboramos para este taller actividades tendientes a participar activamente entre y con los docentes intervinientes, que podrán ser luego implementadas en el aula, de acuerdo a las conclusiones obtenidas durante el desarrollo del mismo y las modificaciones que cada uno considere adecuadas para ser adaptadas al grupo con que esté trabajando.

Referencias bibliográficas:

VILLELLA, J. – CRESPO CRESPO, C. – PONTEVILLE, Ch. (1998): *Cuando la Geometría es el tema de la reflexión matemática*. Buenos Aires, UNSAM.

SPIEGEL, A. (1997): *La escuela y la computadora*. Buenos Aires, Ediciones Novedades Educativas.

SANTALÓ, L. (1992): *Temas nuevos en la enseñanza de la Matemática en un nivel secundario.Elementos de Matemática*.Vol.VII, N°26 (pp.11-28). Buenos Aires, CAECE.

PARRA, C. - SAIZ, I. (Comps.)(1997): *Didáctica de matemáticas*. Buenos Aires, Paidós.

PAPPAS, T. (1996): *El encanto de la Matemática*. Madrid, Zugarto Ediciones.

JAIME PASTOR, A. - GUTIERREZ RODRIGUEZ, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid, Síntesis.

GUTIERREZ SANTOS, M. V. (1992): *Notas de Geometría*. Santafé de Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.

CAFFERATA FERRI, S. - HOMILKA, L. – MAMANI, G. (1998): *Una experiencia en la elaboración de software educativo y su aplicación en el aula*. XII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Santafé de Bogotá.

Construcción de Poliedros

Juan M. Nole, Gonzalo García G.
Universidad de Panamá,
Centro de Investigaciones para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias Naturales y Exactas
Ministerio de Educación de la República de Panamá

Introducción

Este curso esta orientado para ser desarrollado con la participación de docentes de Matemática del Nivel Medio, trabajando con poliedros convexos, tales como Prismas, Pirámides, Tronco de Pirámides y Poliedros Regulares.

El desarrollo del curso consta de tres etapas o fases y en cada una se debe intentar construir poliedros y deducir las fórmulas correspondientes para calcular las áreas laterales y totales. En la primera fase los participantes trabajarán sobre láminas en las que aparecerá el diseño de la superficie total, que se denomina desarrollo del poliedro. En esta fase en el caso de los prismas, estos serán rectos. En la segunda fase, se trabajará sobre superficies totales de prisma oblicuos y pirámides dispuestas en cualquier forma, extendida sobre un plano. En la tercera fase se construirán los poliedros regulares a partir de sus desarrollos y luego se procederá a resolver problemas de construcción.

Objetivos

1- Construir poliedros a partir de sus desarrollos
2- Percibir de manera concreta las figuras geométricas en construcción.
3- Obtener fórmulas para las áreas lateral y total del prisma recto, de la pirámide y de un tronco de pirámide.
4- Calcular las áreas de poliedros regulares.
5- Resolver problemas de construcción.

Contenido

Poliedros

1- Prisma (paralelepipedos y cubo)
2- Pirámides
3- Tronco de Pirámides.
4- Poliedros Regulares (tetraedro regular, octaedro regular, exaedro o cubo, dodecaedro regular, icosaedro regular).

Metodología

Este curso está organizado para realizarse en tres sesiones de trabajo de dos horas de duración.

En cada sesión de trabajo se hará una exposición por parte del expositor y se entregará una guía de estudio conjuntamente con una guía de trabajo.

En la guía de estudio se desarrollaran las siguientes nociones:

Poliedros

Cuerpos Geométricos

1° Punto Interior y Recinto

2° Punto Frontera y Recinto cerrado

3° Cuerpo

4° Poliedro

5° Poliedros Elementales

5.1 - Prisma: Prisma Recto, Prisma Oblicuo, Prisma Regular,

- Superficie lateral de un Prisma (o área de la superficie
- lateral)
- Superficie Total
- Teorema: La superficie lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por la altura del prisma, o sea, por la longitud de sus aristas laterales
- Paralelepipedo
- El Cubo

5.2 - Pirámide

- Apotema
- Superficie Lateral
- Teorema: La superficie lateral de la pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base por la apotema.
- Superficie o Área total
- Tronco de Pirámide o pirámide tuncada
- Bases
- Apotema
- Teorema: La superficie lateral de la pirámide truncada regular es igual al producto de la semisuma de los semiperímetros de sus bases por el apotema

5.3 - Poliedros Regulares:

El tetraedro, el octaedro, el cubo, el dodecaedro y el icosaedro.

- La suma de los ángulos planos de un ángulo poliedro convexo es menor que 360°
- Áreas de Poliedros Regulares

Con relación a la construcción de poliedros en ocasiones en algunos libros de Geometría Plana aparecen indicios sobre la construcción de los poliedros, peros sin entrar en muchos detalles. Sin embargo hemos considerado necesario reunir toda aquella información para complementarla y ofrecer una técnica que contribuya a que el alumno construya su propio conocimiento.

Guía nº 1

En las hojas de trabajo o papel de Construcción se han extendido superficies totales (desarrollo de prismas rectos, pirámides, poliedros regulares) de: Cubo, Prisma Triangular, Prisma Cuadrangular, Prisma Pentagonal, Prisma Hexagonal, Paralelepípedo, Pirámide Triangular, Pirámide Cuadrangular, Pirámide Pentagonal, Pirámide Hexagonal, Pirámide Octagonal, Pirámide Truncada, Icosaedro, Octaedro, Dodecaedro, Tetraedro,

Los participantes, haciendo mediciones de segmentos del desarrollo de cada poliedro en las hojas de trabajo, calcularán su superficie lateral y total.

Luego construirán los poliedros correspondientes a cada desarrollo.

Guía nº 2

En hojas de trabajo y en cartoncillo se han extendido superficies totales de Prismas y Pirámides Oblicuas tales como: Prisma de Bases: paralelogramos, cuadrados, triángulos, pentágonos. Pirámide de Base: un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono. Los participantes, haciendo mediciones de segmentos del desarrollo de cada poliedro en las hojas de trabajo, calcularán su superficie lateral y total. Luego construirán los poliedros correspondientes a cada desarrollo en los cartoncillos.

Guía nº 3

Se plantean problemas de construcciones para que puedan ser resueltos por los participantes en grupos de trabajo de dos o tres integrantes.

1. Construir un paralelepípedo rectangular de cartoncillo cuyas dimensiones sean a=4cm, b=8cm, c=12cm, partiendo de su desarrollo. Calcular su área lateral y su área total.
2. Construir un prisma hexagonal regular de cartoncillo, cuya base tenga un lado de 4cm. y cuya altura sea de 12cm. Calcular su área lateral y su área total.
3. Construir un prisma pentagonal regular de cartoncillo, cuya base tenga lados de 3.7cm. y cuya altura sea de 12.4cm. Calcular su área lateral y su área total.
4. C
5. onstruir un prisma recto cuyas bases sean triángulos rectángulos isósceles cuyo cateto mida 5 cm. y cuya altura mida 12cm. Hallar el área lateral y el área total.
6. Construir una pirámide cuadrangular regular de cartoncillo, cuya base sea un cuadrado de 8cm. de lado y cuya arista lateral mida 14cm. Hallar su área lateral y su área total.
7. Construir una pirámide hexagonal regular de cartoncillo, cuya base sea un hexágono de 6cm, de lado y cuya arista lateral mida 12cm. Hallar su área lateral y su área total.
8. Construye un tetraedro regular de 9cm. de arista de cartoncillo, partiendo de su desarrollo. Calcular su área.
9. Construye un cubo de cartoncillo de 6cm. de arista. Hallar su área.
10. Construye un octaedro regular de 6cm. de arista y calcular su área.

Requisitos

Los interesados en participar en esta taller deben revisar previamente sus conocimientos sobre polígonos, polígonos regulares, particularizando en las nociones de triángulo, cuadrado, rectángulo, paralelogramo, pentágono, así como también de sus respectivas áreas.

Para la sustentación de este taller presentamos los siguientes antecedentes teóricos y metodológicos.

Antecedentes teóricos

1. El estudio de la noción de área o superficie.

2. El estudio de los poliedros

Antecedentes metodológicos

Algunos textos explican con carácter intuitivo y descriptivo la descomposición de un poliedro, extendiendo la superficie total del mismo sobre una superficie plana, y se procede a obtener las fórmulas necesarias para calcular sus áreas y volumen. Presentan además como motivación el desarrollo de algunos poliedros, con las indicaciones que hay que seguir para construir el poliedro correspondiente. Sin embargo, en los problemas de construcción de este tipo, se requiere que el alumno diseñe el desarrollo del poliedro que va a construir, de acuerdo a los datos del problema. De ahí que para abordar estos problemas se requiere una preparación previa.

Observaciones de los participantes

1- La construcción de poliedros es bastante importante en la medida que el estudiante tiene la oportunidad de recrearse haciendo matemática, mas cuando la geometría es un campo olvidado prácticamente en el aula.

2- En general el curso me ha parecido enriquecedor e interesante, sobre todo en el sentido de "repasar" conceptos y resultados importantes a la hora de enseñar estereometría. Sin embargo le hago unas observaciones como un criterio muy personal y en posición de profesora de secundaria

   a- Incluir en la primera parte del folleto (guía de estudio) algunos objetivos, sobre los conocimientos previos que debe tener el estudiante.

   b- Sugerir una metodología al final de la guía que integre la construcción de poliedros con los resultados (definiciones y teoremas) obtenidos de los poliedros.

3- El curso presenta un punto de vista diferente sobre el trabajo en el aula de la estereometría, lo cual me permite tener nuevas herramientas para el desarrollo de este tema. No obstante, me parece que el nombre del curso debería especificar un poco más su contenido. El trabajo realizado fue muy valioso, sobre todo la construcción.

4- Al concluir el curso construcción de poliedros he observado que las informaciones y el material de apoyo califica en primera escala. Este curso fue especial para mi, ya que el aprendizaje que obtuve en el contexto del mismo fue abarcador y significativo. Las actividades se desarrollaron de manera organizada y la calidad de los materiales fue buena. El grado de interacción del facilitador fue excelente y debido a eso se obtuvo habilidades y destrezas durante el curso.

5- Considero que el proceso de manipulación colabora con el desarrollo psicomotriz y me parece de gran importancia que se encuentre ligado con un trabajo teórico serio y profundo.

6- El curso fue muy didáctico, interesante y excelente.

7- El curso fue de mucho contenido y se desarrolló con profundidad matemática. El material entregado será de mucho provecho para enriquecer las lecciones que desarrollo en mis curso.

8- Los materiales fueron excelentes. Creo que lo aprendido me será de utilidad en los cursos que ofrezca en mi país.

9- El curso se presentó en forma clara y completa, el expositor demostró mucho dominio del tema y la presentación fue muy agradable. Cumplió con las expectativas en relación al tiempo y los materiales.

10- El contenido desarrollado es relevante para la escuela media. La utilización de material concreto es muy interesante para la enseñanza de estos contenidos. Los poliedros es un tema poco trabajado, es importante darle espacio en encuentros de docentes de nivel medio.

11- Creo que el curso puede mejorar en el sentido de práctica, dedicar más tiempo a poner los participantes a confeccionar las plantillas (desarrollos de poliedros). Debe además abarcar más horas, para poder ver otros cuerpos como los redondos.

12- Curso interesante, pues plantea y lleva a la práctica la aplicación de los conceptos geométricos en el aula mediante la utilización de materiales concretos. Las ideas desarrolladas tienen gran importancia pues permiten a los alumnos el conocimiento de la geometría tridimensional. La construcción de poliedros permite desarrollar además de los contenidos geométricos conceptuales, contenidos procedimentales y habilidades en los alumnos. En el curso se hizo énfasis además en la importancia de las demostraciones en el aula, como apoyo de los conceptos trabajados, y se dejaron inquietudes para continuar con trabajos posteriores basados en las temáticas planteadas.

Referencias

POGORELOV, A.V. Geometría Elemental. Editorial Mir. Moscú. 1974.

ROANES MACIAS, EUGENIO. Introducción a la Geometría. Manuales de Orientación Universitaria. Anaya. Madrid, 1979.

VIEDMA, JUAN A. Lecciones de Geometría Intuitiva, Editorial Norma Cali. Colombia. McGraw-Hill Book Company.

GUILLEN SOLER, GREGORIA. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis. España. 1991.

Exploración y aprendizaje de la geometría fractal

Henry Gallardo Perez, Gilma Baron Castiblanco, Mawency Vergel Ortega
Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta
Colombia

Objetivo del proyecto

Diseñar e implementar una propuesta metodológica, fundamentada en principios de corte constructivista, para la exploración y aprendizaje de la Geometría Fractal en la Naturaleza dirigido a estudiantes de educación básica y media de centros educativos de la ciudad de Cúcuta.

Justificación

El aprendizaje de las matemáticas debe realizarse con la constante interacción de los agentes y factores del medio en que se encuentra ubicado cultural y geográficamente el educando; de esta manera se logra despertar, tanto el interés como el amor por esta disciplina, llevando a una construcción formal y permanente de un pensamiento matemático, aplicable en las diferentes ramas del saber humano que complementen su desarrollo personal y profesional.

La geometría fractal ofrece una posibilidad de acercamiento del educando a la naturaleza. A partir de la exploración del medio que le rodea puede identificar objetos y formas en los que subyace el modelo fractal.

De esta manera, los conceptos y modelos matemáticos conceptualizados por el estudiante, así como sus habilidades matemáticas y capacidades para formular y resolver problemas se construyen con sólidas bases, garantizando que la formación matemática entra a ser parte fundamental de la educación integral del individuo y deja de ser un área de tipo netamente memorístico.

La enseñabilidad de las ciencias implica que el estudiante se vincule a procesos investigativos liderados por el docente para que, a partir del desarrollo de éstos, construya su propio conocimiento. La geometría fractal, es entonces un área de estudio que fortalecerá este campo.

La Universidad Francisco de Paula Santander, formadora de docentes de educación básica y media en el campo de las matemáticas y la computación, entre otras, debe incluir, a partir de los resultados de este proyecto, asignaturas en el plan de estudio de Licenciatura en Matemáticas y Computación que conlleven a la formación de los futuros educadores en esta rama de la ciencia. Su formación debe estar encaminada, tanto a la construcción formal de la geometría fractal, como a su aplicabilidad para modelar los diferentes patrones de la naturaleza.

Descripción

La realización del proyecto implica el diseño y puesta en marcha de una metodología para el estudio y aprendizaje de la geometría fractal en el nivel básico y medio de la ciudad de Cúcuta.

El proyecto incluye la capacitación de docentes de matemáticas en los colegios escogidos como representativos para la realización de la fase experimental, así como el trabajo directo con los estudiantes de matemáticas de dichos colegios en el área de geometría fractal

Como resultado de este trabajo, debe salir un módulo y/o texto guía para la implementación del proceso metodológico en los demás planteles educativos de la ciudad de Cúcuta.

A mediano plazo se espera capacitar a la mayoría de los docentes de matemáticas de la ciudad de Cúcuta, acompañado de la difusión e implementación del módulo de trabajo obtenido en la etapa experimental.

Población beneficiada

El proyecto está encaminado a cubrir las necesidades, en geometría, de la población estudiantil y docente de los planteles educativos de la ciudad de San José de Cúcuta, en los niveles de sexto a undécimo grado.

Población Estudiantil estimada para la ciudad de Cúcuta (grados 6 a 11): 50.826

Población Docente, en el área de matemáticas, estimada para la ciudad de Cúcuta (Grados 6 a 11): 290

El proyecto atenderá, en su etapa inicial, a los estudiantes y docentes de dos colegios representativos; de esta manera se puede realizar un seguimiento que propenda el logro de los objetivos planteados. En una segunda etapa, a mediano plazo, se extenderá su cobertura a la población total estudiantil y docente de la ciudad de Cúcuta y del departamento Norte de Santander.

Descripción de beneficios

Al diseñar e implementar una estrategia metodológica para el aprendizaje de la geometría fractal en educación básica y media se logra:

- Integrar el estudio y aprendizaje de las matemáticas con otras ciencias y, en general, con el ambiente en el cual está inmerso el estudiante.
- Avanzar en el sentido pragmático de la ciencia hacia el avance científico y su aplicación a otros campos, interactuando con los diferentes Planes de estudio.
- Impulsar el Proyecto de modernización de la Enseñanza de las Ciencias Básicas en la Ciudad de Cúcuta.

Fundamentos teóricos

Concepto de Fractal

Con la geometría clásica de Euclides, es posible dibujar los objetos creados por el hombre, tales como edificios, puentes, configuraciones electrónicas, etc. Sin embargo, no es posible modelar la naturaleza, esto es, no se pueden dibujar sus diversos objetos como son una costa, un árbol, una montaña, un río, un mapa, etc. ya que con dicha geometría sólo se logran aproximaciones, no muy precisas, de ellos.

Hasta ahora, los objetos matemáticos han sido bastante ideales y están lejos de encontrarse realmente en la naturaleza. Por tal motivo, se hace necesario desarrollar una nueva teoría que permita modelar los objetos que observamos diariamente a nuestro alrededor y que no obedecen a un patrón geométrico euclidiano.

La geometría fractal representa a la vez una teoría matemática y un método para analizar una gran diversidad de fenómenos de la naturaleza que parece que no están controlados por alguna ley.

Los fractales son figuras geométricas que se caracterizan por su autosimilitud, ya que cada una de sus partes es semejante al todo, salvo por escala. Las figuras fractales se obtienen a partir de repetir una y otra vez el mismo procedimiento, recursivamente una gran cantidad de veces o mediante un procedimiento iterativo.

El término fractal introducido por Mandelbrot para designar las formas irregulares, base de su trabajo, puede caracterizarse intuitivamente como una figura o modelo cuya forma es sumamente irregular, interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen

El Fractal es, matemáticamente , una figura geométrica que es compleja y detallada en estructura a cualquier nivel de magnificación. A menudo los fractales son semejantes a sí mismos; esto es, poseen la propiedad de que cada pequeña porción del fractal puede ser vizualizada como una réplica a escala reducida del todo. Existen muchas estructuras matemáticas que son fractales: el triángulo de Sierspinski, la curva de Koch, el conjunto Mandelbrot, los conjuntos Julia, y muchas otras.

La característica que fue decisiva para llamarlos fractales es su dimensión fraccionaria. No tienen dimensión uno, dos o tres como la mayoría de los objetos a los cuales estamos acostumbrados. Los fractales tienen usualmente una dimensión que no es entera, ni uno ni dos, pero muchas veces entre ellos

Origen

El origen de la geometría fractal se puede hallar a finales del siglo pasado y comienzos de este, con los problemas: el conjunto ternario de Cantor, la curva no diferenciable en todos sus puntos de Helge Von Koch, entre otros.

En la época de los setenta, Benoit Mandelbrot descubrió que en la naturaleza pueden encontrarse ciertos patrones o formas que se repiten en un mismo ser o parte de éste; por ejemplo, si se observa un árbol, puede apreciarse que su tronco se divide en ramas, luego estas se dividen en otras más pequeñas y así sucesivamente.

Situaciones similares se presentan al observar una cadena montañosa, el litoral de una costa, la conformación de una nube, las ramificaciones de los vasos sanguíneos, las fluctuaciones en el nivel de una serie económica temporal, la conformación de los sistemas planetarios y las galaxias, entre otros. Estos y muchos otros objetos de la naturaleza presentan esta propiedad de repetir su forma estructural varias veces disminuyendo la escala; a esta característica se le conoce con el nombre de invariancia bajo escala.

Fractales en la Naturaleza

Se dice que un objeto en la naturaleza es fractal, cuando un modelo de características fractales lo representa o constituye su modelo. En la naturaleza encontramos gran variedad de objetos que guardan la característica de autosemejanza.

Es importante reconocer que los fractales verdaderos son una idealización. Ninguna curva en el mundo real es un fractal verdadero; los objetos reales son producidos por procesos que actúan sólo sobre un rango de escalas finitas: En otras palabras, los objetos reales no tienen la infinita cantidad de detalles que los fractales ofrecen con un cierto grado de magnificación.

Construcción de Fractales

En la construcción de un fractal se deben tener en cuenta las cuatro caracteísticas inherentes a él, las cuales son: la autosemejanza o autosimilitud de su forma, loa reiteración o iteración en la formación del modelo, la dimensión que intenta describir su tamaño y el concepto de atractor que caracteriza la figura cuando el proceso de iteración tiende a infinito.

Autosemejanza

La propiedad de autosemejanza de un fractal hace referencia al concepto de que se repite el mismo patrón de alguna manera, no importa qué tanto uno amplifique la figura y qué punto tome como referencia.

Iteración

Básicamente, iterar significa repetir. Imaginemos una máquina, f, en la cual la entrada es un valor X_n, el cual al aplicarle la función f da como resultado un valor X_{n+1} , este valor se toma ahora coma entrada de la función y así se procede en forma sucesiva.

La sucesión obtenida: X_o, $f(X_o)$, $f(f(X_o))$, $f(f(f(X_o)))$,.... Se conoce como la órbita de X_o.

Dimensión

La dimensión de un fractal hace referencia al tamaño de este o su densidad; su longitud no está definida. Cuando se intenta medir la longitud de una línea fractal, su valor dependerá de la precisión que se tenga con el instrumento de medida; a medida que aumenta lá resolución del instrumento de medición, aumentará la longitud de un fractal. En vista de que la noción de longitud carece de significado en el caso de los fractales, se ha ideado el concepto de dimensión para cuantificar de qué modo llena el espacio un fractal.

La dimensión fractal pretende determinar qué tan rugosa es una curva. Por lo general, se considera que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2 y los volúmenes 3. A esta idea de dimensión se lo llama dimensión topológica. Sin embargo, una curva rugosa que recorre una superficie puede ser tan rugosa que casi llene la superficie en la que se encuentra. Superficies como el follaje de una árbol o el interior de un pulmón pueden efectivamente ser tridimensionales. Podemos, entonces, pensar de la rugosidad como un incremento en la dimensión: una curva rugosa tiene una dimensión entre 1 y 2, y una superficie rugosa la tiene entre 2 y 3.

Atractor

El concepto de atractor permite caracterizar la figura cuando el proceso de iteración tiende al infinito. El atractor permite presentar la figura en el "límite al infinito".

Propuesta metodológica

A nivel de 6° y 7° grado de educación media se puede pensar en las siguientes actividades para la construcción de fractales:

1. Identificar objetos en el medio en los que subyace la propiedad de autosemejanza, explorando sus propiedades. Implica realizar trabajo de campo, explorar la naturaleza, el arte, etc.
2. Familiarizarse con el proceso de retroalimentación. Para ello puede usarse dos espejos puestos el uno frente al otro, describir la sucesión de imágenes que se forma, o con una cámara de video enfocar la pantalla del televisor al cual esté conectada. Un juego didáctico que permite visualizar el concepto de la iteración es cabeza y cola. Los alumnos se ubican en fila, el de la cola define una regla de juego (por ejemplo, duplicar el número y restarle tres) y da una semilla (por ejemplo, 10); el estudiante que esté en la cabeza deberá aplicar la regla a la semilla y expresar el siguiente número (en este caso, 17), el segundo realiza el mismo procedimiento a 17 (debe decir 31) y así sucesivamente; quien se equivoque pasa a la cola y se inicia de nuevo el juego.

3. Reconocer el concepto de atractor Se logra mediante la exploración del plano y del espacio a través de las transformaciones aplicadas a figuras: traslación, rotación, reflexión y homotecia.

   Pueden utilizarse las obras de Maurits Escher y algunos fractales especiales para que el estudiante reconozca el concepto de atractor.

4. Transformaciones Afines. El estudiante debe reconocer las diferentes transformaciones afines que se aplican sobre figuras del plano para obtener la función a iterar en la construcción de fractales.

5. Creación de figuras fractales. Dada una semilla y las correspondientes transformaciones, el estudiante deberá generar el fractal correspondiente mediante la iteración de las transformaciones sobre la semilla. Puede crear figuras fractales utilizando, en primera instancia, lápiz y papel, y posteriormente con ayuda del computador.

Referencias bibliográficas

BARNSLEY, Michael. Fractals Everwhere, Academic Press, New York, 1988.

BARRET, Alexander. Biología, Pretince Hall, New Jersey, 1992.

JEGER, Max. Transformation Geometry, George Allen and Unwin Ltd, London, 1969.

MANDELBROT, Benoit. Los objetos Fractales: Forma, Azar, Dimensión. 3ª ed. Tusques, Barcelona, 1993.

MANDELBROT, Benoit. The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman, New York, 1985

MALETSKY, Evan et alter. Fractals for the Classroom, Springer-Verlang, New York, 1992.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Matemáticas: Propuesta de Programas Curriculares, Santafé de Bogotá, 1998.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Educación Matemática en el Nivel Medio, Santafé de Bogotá, 1993.

VASCO, Carlos. Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas, MEN, Santafé de Bogotá, 1994.

Pensamiento de Probabilidad y Estadística

Didáctica de la estadística

Henry Gallardo Perez, Gilma Baron Castiblanco, Mawency Vergel Ortega
Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta
Colombia

Objetivos

- Presentar una metodología didáctica que permita al docente de estadística en educación básica y media generar estrategias para la enseñanza de esta disciplina a partir de la interrelación que debe existir entre al quehacer académico y el entorno social en que está inmerso el estudiante.
- Compartir una concepción holística sobre el manejo Estadístico de datos masivos, en el aula de clase, que redunde en beneficio de la comprensión, análisis e interpretación de resultados, en los estudiantes de los niveles básica y media.
- Generar espacios de discusión en los que el docente presente metodologías y procedimientos que permitan la construcción de un conocimiento matemático y estadístico aplicado a la situación actual de su región.

Introducción

El auge de la aplicación de la Estadística en la Industria, el Comercio, los Servicios y la Investigación, le ha merecido un reconocimiento académico, reflejado en la cada vez más incorporación de esta disciplina a los programas curriculares de innumerables instituciones educativas de nivel medio, técnico y superior.

Para que este reconocimiento logre sus objetivos de formación, es necesario explorar diferentes alternativas metodológicas que contribuyan al mejoramiento del proceso enseñanza aprendizaje de la estadística y al desarrollo del pensamiento lógico deductivo e inductivo de los estudiantes, en la solución de problemas de la vida real.

En este documento se expone una metodología, para el perfeccionamiento del proceso enseñanza aprendizaje de la Estadística Elemental en los niveles Básica y Media.

Metodología de trabajo

Para el desarrollo de este taller se proponen los siguiente pasos:

1. Presentación del documento de trabajo y de los objetivos del taller.
2. Identificación de problemas a investigar: Los participantes mediante una lluvia de ideas propondrán los posibles temas de investigación que pueden realizarse con los estudiantes en el aula de clase y que involucren la vinculación con su entorno social.
3. Conformación de grupos de trabajo.
4. Selección y asignación de temas a los grupos de trabajo.
5. En la primera parte de cada sesión del taller, los integrantes de cada grupo aplicarán la metodología expuesta en el documento con el fin de resolver (en forma simulada) el problema señalado (Una vez definidas la población, muestra y variables, se suministrarán datos ficticios a fin de tener una "información recolectada").
6. La segunda parte del taller comprende la socialización del trabajo realizado; éste se retroalimentará con los aportes de los demás participantes.
7. Se discutirán propuestas metodológicas que conlleven al educando a construír su conocimiento.

Proceso de búsqueda de la solución

Para realizar una investigación estadística, es conveniente aplicar una secuencia de pasos que faciliten su ejecución. Para la identificación de estos pasos se requiere de un poco de reflexión, de conocimiento y apoyo de la experiencia.

En este documento se sugiere aplicar los siguientes pasos:

1. Planeamiento y preparación del trabajo
2. Recolección de los datos
3. Evaluación y depuración de la información
4. Presentación de los datos
5. Análisis e interpretación

PASO 1. PLANEAMIENTO y PREPARACION DEL TRABAJO

En esta etapa se debe dar una mirada global a la investigación proyectada. Para ello, es necesario establecer un plan general del trabajo que responda a una serie de interrogantes como: ¿Qué es lo que se va a investigar?, ¿Para qué se realiza la investigación?, ¿Dónde se realizará?, ¿Cuándo se llevará a cabo?, ¿Cómo se desarrollará?, ¿Con qué recursos se cuenta?, etc.

Este plan es la carta de navegación del estudio a realizar, por lo tanto merece toda la atención de los responsables del mismo.

Entre los aspectos que se deben considerar, sobresalen los siguientes:

1. Identificar el objeto de la investigación. Para ello se debe expresar con claridad y exactitud que es lo que la estadística va a registrar de cada una de las unidades a investigar Una estrategia es definir con precisión el concepto de Unidad de investigación dentro del trabajo, si es susceptible de medirse de manera adecuada y precisa de acuerdo a su naturaleza cualitativa o cuantitativa.
2. Definir los objetivos del estudio tanto generales como específicos
3. Se debe identificar los alcances y limitaciones de la investigación
4. Establecer los procedimientos que se aplicaran para la ejecución de cada etapa.
5. Identificar las personas responsables
6. Identificar las atribuciones de cada uno de los participantes
7. Precisar los recursos necesarios, su consecución y financiamiento
8. Establecer el tiempo de duración del estudio
9. Identificar los requerimientos de los informes finales si fuere necesario.
10. Diseñar un Diagrama de Gantt para esquematizar la planeación del proceso.

Un planeamiento, adecuado permite una visión en conjunto del estudio a realizar, prevee posibles problemas que se puedan presentar y la manera de resolverlos; facilita la comunicación de los participantes en el proyecto y sobre todo guía el desarrollo de cada una de las etapas hacia el logro de los objetivos.

PASO 2. RECOLECCION DE LOS DATOS

Esta etapa se inicia con la identificación de necesidades de información y la manera de adquirirla.

Como los datos son la materia prima del proceso, se relacionan a continuación algunas pautas encaminadas a mejorar la consecución y calidad de ellos

- Se deberá establecer la o las fuentes de información primarias (ejemplo: encuestas, observación directa, etc.) y/o secundarias (ejemplo: entidades como el Dane, Mineducación, etc.) necesarias para proveer la información requerida
- Se identificará el sistema de recolección a utilizar (si es censo o muestra; recolección continua, periódica o coyuntural).
- Se establecerán las especificaciones para el diseño de instrumentos (como objetivos, numero y tipo de preguntas, perfil del encestado, duración de la encuesta, forma de aplicación, forma en que se van a reportar los resultados, etc.)
- Se diseñará la creación, prueba, ajuste y calificación de los instrumentos de medición.
- Se establecerá la organización y logística de la recolección.
- Se identificará el sistema de información a aplicar.
- Se definirá el nivel de cobertura deseado.
- Se establecerá el nivel de precisión y exactitud.
- Se identificará la estrategia para garantizar la integridad de la información.
- Se identificarán las variables e indicadores que caracterizaran y explicaran la información.
- Se especificarán los indicadores de interés.
- Se identificará la estrategia mas adecuada para lograr un buen nivel de colaboración de los informantes.

PASO 3. EVALUACION Y DEPURACION DE LA INFORMACION

Recolectada la información, se someterá a un examen crítico, consistente en verificar si ella cumple con lo que se planeo y con los requisitos de recolección establecidos en el paso dos.

Se revisará luego si las mediciones efectuadas son consistentes, exactas, completas y precisas; esta revisión permitirá clasificar la información en uno de los siguientes grupos: información buena, información incorrecta pero que se puede corregir fácilmente, información desechable.

Con la información buena y la corregida se evalúa el impacto de ella en la cobertura del estudio y si fuere necesario se aplicarían acciones correctivas.

PASO 4. PRESENTACION DE LOS DATOS

Los medios mas usados para presentar la información, una vez compactada, son:

Las tablas y/o

Los gráficos

La forma **tabular** permite una visión integral de la información en forma resumida. Sinembargo, está muy influenciada por el número de intervalos que posea la tabulación presentada, hecho que incide fuertemente en los resultados y conclusiones del estudio.

Para definir adecuadamente el numero de grupos que se deben incluir en la elaboración de una tabla estadística es conveniente involucrar el objetivo del estudio, el numero de datos investigados, las características particulares de los datos y el nivel de detalle deseado.

Una estrategia que permite apoyar la decisión es probar varias alternativas de tablas cuyo numero de grupos o clases oscile entre 6 y 20 aproximadamente. La construcción de distribuciones de frecuencias es más un arte que una técnica.

Vale la pena señalar que la ubicación de los datos en grupos o intervalos de clase, incide en la identificación individual de los mismos, frente a una interpretación generalizada de las características de los datos analizados. Esta pérdida de información detallada es consecuencia ineludible de la condensación y simplificación necesarias para los métodos de clasificación estadísticos. Si se desea una información más detallada queda el recurso de aumentar el numero de grupos o clases o viceversa para lograr una mayor concentración de datos.

La forma **Gráfica** permite visualizar mejor la información, facilitándole al lector una idea rápida del comportamiento de esta. Se requiere un buen diseño para lograr el objetivo de presentar la información de manera confiable y atractiva.

Para tener una buena presentación de los datos, es conveniente presentar, una tabla bien diseñada acompañada de un texto explicativo y de una gráfica; no se debe olvidar que el título de una gráfica es fundamental para su interpretación.

PASO 5. ANALISIS E INTERPRETACION

Elaboradas las tablas y gráficos correspondientes, se procede a analizarlos e interpretarlos.

Esto se puede dar a diferentes niveles así:

1. Mediante la descripción de los aspectos relevantes encontrados en la información que se presenta en las tablas y gráficos. Esto permite identificar forma y sentido de la serie de datos.

2. Resumiendo la información en medidas descriptivas que permitan caracterizar el fenómeno estudiado.

Las **medidas descriptivas** se agrupan en 4 grandes familias, con objetivos específicos diferentes y complementarios, así:

Medidas de **Tendencia Central**. Permiten identificar el valor más representativo de un conjunto de datos que generalmente se halla en un punto intermedio del grupo de datos.

Medidas de **Variabilidad.** Permiten establecer el grado de alejamiento o concentración de los datos

Medidas de **Asimetría**. Permiten verificar el supuesto de normalidad de la distribución de los datos.

Medidas de **Apuntamiento**. Permiten medir la agudeza de la distribución y verificar el supuesto de normalidad de la distribución de los datos.

Las medidas descriptivas proporcionan al estudiante investigador una visión resumida de las características particulares de los datos analizados

Conclusiones

La estadística, como herramienta de apoyo a la investigación, hace aportes valiosos cuando se aplica con criterios claros y objetivos, fundamentados en desarrollos matemáticos sólidos y de amplia aceptación. Para su aplicación se debe identificar la mejor estrategia metodológica que integre todas las etapas involucradas en el proceso, pretendiendo de esta manera estimular la comprensión, análisis e interpretación de los estudiantes de estadística en su etapa inicial de aprendizaje.

Bibliografía

JOHNSON, ROBERT. Estadística Elemental. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Matemáticas: Propuesta de Programas Curriculares, Santafé de Bogotá, 1998.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Educación Matemática en el Nivel Medio, Santafé de Bogotá, 1993.

VASCO, Carlos. Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas, MEN, Santafé de Bogotá, 1994.

SCHEAFFER, RICHARD Y OTROS. Elementos de Muestreo, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1987

Estadística para Químicos : ¿qué enseñar?[1]

Víctor Martínez Luaces (victor@bilbo.edu.uy), Eduardo Cuitiño
Facultad de Química, Universidad de la República, Montevideo
Uruguay

Resumen

En la Química actual se trabaja por lo general con un número pequeño de muestras, por varios motivos: costo de los ensayos, carácter destructivo de los mismos, etc.

En compensación, para cada muestra se dispone de una gran cantidad de datos. Por ejemplo, en el espectro de una sustancia se tiene un valor de Absorbancia para cada longitud de onda.

Este solo aspecto, es decir, el pequeño tamaño muestral, aunado a la gran cantidad de datos por muestra, condiciona todo el tratamiento estadístico posterior y el propio diseño del experimento. Esto implica el uso de técnicas propias de la Quimiometría, más que las técnicas usuales basadas en muchos casos en resultados asintóticos (Ferreira M., 1996).

En el caso concreto de la Cátedra de Matemática de la Facultad de Química (Universidad de la República, Montevideo, Uruguay) se han ido incorporando algunos elementos, en principio en los cursos de posgrado (Martínez Luaces, V. y Casella, S, 1997) y luego en cursos de grado, en forma paulatina.

Se analizan en este trabajo varios informes y encuestas realizados con estudiantes, docentes y egresados (Martínez Luaces, V. y Casella, S, 1996), (Archivos de la Unidad de Educación Permanente de la Facultad de Química, 1995-1997) y (Martínez Luaces, V., Acher, R. y Gómez, A. , 1996) así como algunos documentos más generales sobre la Matemática como asignatura de servicio (Houson, A.G., Kahane, J.P. y otros), (Steen, L., 1996). Finalmente, se formulan conclusiones, tendientes a disminuír la brecha existente entre los cursos actuales y lo que los egresados finalmente utilizarán en su vida profesional.

Introducción

En la Química actual cada vez más se tiende a obtener una mayor cantidad de datos de cada muestra analizada. A modo de ejemplo, basta observar que los equipos que se usaban en el curso práctico de Análisis Instrumental de la Facultad de Química en Montevideo, hace más de 15 años [1] ya permitían obtener lecturas en un rango espectral comprendido entre 200 y 1000 nm. Es decir que, con una sola muestra es posible obtener absorbancias para varios cientos de longitudes de onda. Si a los datos de la espectroscopía se agregan los de otras técnicas, por ejemplo cromatografía de gases, resulta entonces que, con unas pocas muestras se obtienen cientos de datos.

Las propias características de los ensayos químicos: costosos, a menudo destructivos, tediosos, etc., hacen que cada vez más se tienda a sustituir las técnicas tradicionales por otras más modernas basadas en el Análisis Instrumental. Incluso desde el punto de vista didáctico, hace ya bastante tiempo que se sustituyeron en Uruguay las clásicas "marchas sistemáticas" para análisis de cationes y de aniones por otras técnicas más directas [2] y [3], con excelentes resultados.

---

[1] Trabajo presentado en la Relme 12, celebrado en la Universidad Nacional de Colombia, del 6 al 10 de julio de 1998

Todos estos cambios plantean la necesidad de utilizar en el tratamiento de datos ciertas técnicas que por lo general no se enseñan en los cursos habituales de Probabilidad y Estadística. Muchas de estas técnicas integran lo que hoy día se conoce como Quimiometría. Esta nueva disciplina toma elementos de la Estadística, el Algebra Lineal y el Cálculo Numérico, y los aplica al análisis de datos de origen químico.

Lo anterior exige un replanteo de los cursos de Probabilidad y Estadística para estudiantes de Química, que acompañe los cambios producidos en la obtención de los datos. Surge entonces la pregunta: "¿qué conviene enseñar? " y como suele suceder, la respuesta no tiene por que ser única. En este trabajo expondremos nuestros puntos de vista, acompañados del análisis de varias experiencias realizadas por docentes de la Cátedra de Matemática de la Facultad de Química, que han resultado exitosas y que permiten extraer conclusiones respecto al camino a seguir.

Experiencias realizadas y resultados obtenidos

En los cursos de Probabilidad y Estadística de la década pasada y principios de la actual, en la Facultad de Química, se insistía bastante en la parte de Probabilidad y se dejaba poco margen para el desarrollo de los temas de Estadística.

Esto tal vez se debía a una cierta copia de programas provenientes, por ejemplo, de la Facultad de Ingeniería, los que a su vez parecían estar redactados especialmente para Ingeniería Eléctrica, dejando de lado a las demás orientaciones. Por otra parte, había un cierto énfasis en los resultados asintóticos como las Leyes de Grandes Números, Teorema Central del Límite, Teorema de Laplace-De Moivre, etc. En función de ello, la distribución Normal o Gaussiana aparecía a lo largo y ancho de todo el programa, donde todo, o casi todo, a la larga se asumía como normal.

Sin embargo, entendemos que este enfoque no es el adecuado. En Química, como ya hemos dicho, por motivos de costos y de tiempo, las muestras suelen ser pequeñas, pero, en contraposición, cada una de ellas permite obtener cientos de datos. En otras ciencias (en las Ciencias Sociales por ejemplo) la situación suele ser exactamente al revés. Por ejemplo, para extraer conclusiones respecto a las preferencias del público consumidor de bebidas refrescantes es necesario entrevistar a muchas decenas o cientos de clientes. Sin embargo, a cada uno de ellos bastará preguntarle qué bebida prefiere, su edad, sexo y eventualmente alguna variable más, es decir que se trabaja con muestras grandes, pero se toman pocos datos de cada uno de los entrevistados.

Lo anterior lleva a que las matrices de datos en Química tengan pocas filas (suponiendo una fila por muestra) y muchas columnas (cada columna corresponde a un dato, por ejemplo una absorbancia a una determinada longitud de onda), mientras que en otras ciencias es más frecuente la situación contraria. Esta diferencia en la presentación de los datos, exige métodos apropiados como los que provee la Quimiometría: Análisis de Componentes Principales y Análisis Jerárquico de Datos, entre otros [4].

Lo que se hace actualmente en el curso de Probabilidad y Estadística es tener en cuenta lo anterior en varios aspectos. Si bien se siguen mencionando los teoremas asintóticos antes citados, como el Teorema Central del Límite, dicha mención se limita al enunciado y a cierta explicación heurística de su significado. Esto mismo se hace en los cursos de posgrado y Educación Permanente [5].

Del punto de vista práctico, se suele mostrar algún ejemplo de aproximación de la binomial por la normal, pero ya no se insiste demasiado en este tipo de ejercicios. En cuanto al curso teórico, fueron eliminados varios temas como "Convergencia en Probabilidad" y otros fueron reducidos a un planteo heurístico (Leyes de Grandes Números, por ejemplo). Esto tiene su razón de ser, ya que si el estudiante de Química va a trabajar con pocas muestras, la condición de que $n \to \infty$ para él no tendrá sentido. Por otra parte, las demostraciones en la parte de Probabilidad fueron reducidas a unas pocas, para dedicar el mayor tiempo posible a los temas de Estadística.

Con respecto a la parte de Estadística se han empezado a introducir tests para pequeños tamaños muestrales y métodos no paramétricos [5]. Dado que el Teorema Central del Límite no siempre es aplicable, el estudiante debe disponer de métodos que le permitan trabajar con poblaciones no normales. Además el mismo debe poder chequear la normalidad o no de una determinada muestra. Se dan varios tests de hipótesis destinados a este fin, en particular el de D´Agostino [6] que permite trabajar con poblaciones no muy grandes (existen tablas a partir de n=10).

En el futuro, esta tendencia a orientar los cursos hacia aquellos temas de mayor aplicación se irá acentuando, pero resulta evidente que en cierto momento ya no se podrán compactar más los temas de Teoría de Probabilidades ni tampoco se podrán agregar más temas al primer curso de Probabilidad y Estadística. Resulta fundamental entonces, complementar dicho curso con otros de posgrado y de Educación Permanente, en los que se pueden tratar temas específicos de Quimiometría, Control de Calidad, Tratamiento de Datos, etc. Es en este rubro que la Cátedra de Matemática de la Facultad de Química ha dedicado importantes esfuerzos, recursos humanos y materiales a fin de satisfacer las demandas en continuo crecimiento.

Otra posibilidad, que también se está estudiando, es crear materias electivas que el estudiante seleccionaría según su orientación. Por ejemplo: si el estudiante desea trabajar en la Industria Farmacéutica le puede convenir cursar Control de Calidad y en ese caso sí importaría que conozca algo más de métodos asintóticos. Para otros más interesados en la investigación, podría ser más importante el Diseño de Experimentos.

Todos estos cambios han comenzado a mostrar resultados alentadores. Por ejemplo, una encuesta realizada en 1997 [7], confirmó lo que se suponía en cuanto a la disconformidad de los estudiantes respecto a la enseñanza que habían recibido en años anteriores (en lo que hace a los cursos de Matemática en general). Por el contrario, las evaluaciones de los cursos de Educación Permanente de 1995, 1996 y 1997 muestran resultados muy positivos [8]. Más aún, algunos de los estudiantes que cursaron en otra época, asistieron a estos cursos, ahora como egresados, confirmando en conversaciones con los docentes actuales todo lo antedicho.

Una actitud similar han tomado otras cátedras, departamentos e institutos que antes casi no interactuaban con la Cátedra de Matemática y que en la actualidad solicitan cursos, asesoramientos e intervienen en proyectos de investigación conjuntos.

Algunas de estas experiencias han sido recogidas en otros trabajos [9] y han llevado a un estudio más general sobre la Matemática como asignatura de servicio a nivel universitario. Tanto esos trabajos a nivel nacional [10] como otros que se han hecho por especialistas de primer nivel internacional [11] han mostrado la necesidad de integrar los cursos de Matemática a los de otras disciplinas y fomentar la creación de equipos multidisciplinarios tanto en docencia como en investigación. La Estadística para Químicos no debe ser la excepción a esta regla, como sugieren los resultados obtenidos.

Conclusiones

Es un hecho que las ciencias experimentales, pero muy en particular la Química, han cambiado mucho en los últimos años, dando paso a la introducción de equipos sofisticados que permiten obtener, registrar y graficar gran cantidad de datos con pequeñas muestras.

La enseñanza de la Estadística, en particular el Tratamiento de Datos y el Diseño de Experimentos debe adecuarse a los cambios mencionados. No se puede continuar enseñando la asignatura de espaldas a los cambios tecnológicos, no sólo en la Química sino también en la Computación.

Otras disciplinas afines (Cálculo Numérico, Computación y Algebra Lineal) también deberán participar de ese cambio en cuanto al enfoque y forma de enseñar, en mayor o menor medida. Por ejemplo, el estudiante debe trabajar fluidamente con matrices, sin embargo lo que importa hoy en día es su dominio conceptual, no las cuentas rutinarias que las puede hacer mejor una máquina.

Los cursos, los docentes, los equipos, el software que se utiliza, etc., deberán estar a tono con todas esas transformaciones. A modo de ejemplo, se pueden utilizar los mismos programas informáticos y hasta realizar evaluaciones conjuntas de temas de Computación y Cálculo Numérico con los de Probabilidad y Estadística, tratando de lograr la máxima articulación entre ellos.

Yendo más a lo concreto, hay ciertas modificaciones que son impostergables, por ejemplo un curso de Probabilidad y Estadística para Químicos, basado en métodos asintóticos está totalmente fuera de contexto y fuera de las posibilidades de un buen aprovechamiento. En efecto, para comprender cabalmente los resultados asintóticos es imprescindible hilar muy fino en temas propios de la Teoría de la Medida, totalmente desconocida para los estudiantes de Química.

Esto no implica eliminar dichos métodos asintóticos de los programas, ya que por ejemplo se los utiliza en la elaboración de diagramas de control de calidad, pero sí minimizar su participación en la distribución del tiempo disponible al menos para el primer curso de Probabilidad y Estadística. En todo caso, en cursos más específicos (Control de Calidad, Tratamiento de Datos, etc.) se les puede dedicar una mayor atención.

Por el contrario, los métodos para pequeños tamaños muestrales y los tests no paramétricos deberán tener mayor participación en el citado curso inicial.

Debemos enseñar aquello que resulte más útil a nuestros alumnos y no aquello que por comodidad, por tradición, o por gustos personales estamos acostumbrados a dar. Lamentablemente a esto último se oponen diversos intereses corporativos: por un lado de los docentes o de los departamentos de Matemática que pretenden dar lo mismo en cualquier facultad, por una cuestión de mínimo esfuerzo y por otro lado por parte de las empresas editoriales que pretenden que los textos sean los mismos para cualquier carrera u orientación profesional, ya que eso asegura mercados más voluminosos y por tanto más rentables economicamente.

Este concepto, es decir, dar aquellos temas que presenten una mayor utilidad para el alumno, en sentido amplio (sea del punto de vista formativo o informativo), implica una actitud dinámica de parte del docente. En efecto, es necesario estar atento a los cambios científicos y tecnológicos e introducir las modificaciones que sean necesarias en los cursos de servicio.

Sólo un equipo multidisciplinario con conocimientos sólidos de Matemática, de Química y de Matemática Educativa, puede tomar las decisiones correctas sobre que temas enseñar y cómo enseñarlos para lograr el máximo aprovechamiento de los cursos.

En definitiva, si la ciencia avanza, la enseñanza no puede permanecer estática.

Bibliografía

Cátedra de Análisis Instrumental de la Facultad de Química. "Curso Práctico de Análisis Instrumental", División Publicaciones y Ediciones de la Universidad de la República, Montevideo, 1980.

Martínez Luaces, V. y Labandera, F. ; "Suggestions for the modification of assesment procedures in Analytical Chemistry courses; the statistical approach", Journal of Chemical Education (1989), 66, número 10, 843-844.

Labandera, F. y Martínez Luaces, V. ; "An Hydrogen Sulfide free analytical technique for cation analysis; the statistical approach", Journal of Chemical Education (1992), 69, número 11, 934-935.

Ferreira, M. ; "Curso de Quimiometría", dictado en Agosto de 1996 en Facultad de Química, Montevideo, Uruguay.

Martínez Luaces, V. ; "Tratamiento Estadístico de Datos Experimentales", notas del curso de Educación Permanente del año 1996, editado por G.U.E.I.Q.A, Montevideo, Uruguay.

D'Agostino; "An omnibus test of normality for moderate and large size sample", Biometrica (1971) 58, pag 341-347.

Martínez Luaces, V., Acher, R. y Gómez, A ; "Informe del curso de Matemática III del año 1996". Archivos de la Comisión de Enseñanza de la Facultad de Química.

Archivos de la Unidad de Educación Permanente de la Facultad de Química. Informes de los cursos de los años 1995, 1996 y 1997.

Martínez Luaces, V. y Fuentes, J. ; "Experiencias en la impartición del Procesamiento de Datos a profesionales de diferentes perfiles y niveles", presentado en COMPUMAT 97, Cienfuegos, Cuba, año 1997.

Martínez Luaces, V. y Casella, S. ; "La Educación Matemática en las diferentes ramas de la Ingeniería en el Uruguay hoy", Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura, La Habana, Cuba, 1996, pags. 386-391.

ICMI ; "Mathematics as a service subject", L'Enseignement Mathématique" **32** (1986), 159-172.

Bibliografía

Cátedra de Análisis Instrumental de la Facultad de Química. "Curso Práctico de Análisis Instrumental", División Publicaciones y Ediciones de la Universidad de la República, Montevideo, 1980.

Martínez Luaces, V. y Labandera, F. ; "Suggestions for the modification of assesment procedures in Analytical Chemistry courses; the statistical approach", Journal of Chemical Education (1989), 66, número 10, 843-844.

Labandera, F. y Martínez Luaces, V. ; "An Hydrogen Sulfide free analytical technique for cation analysis; the statistical approach", Joumal of Chemical Education (1992), 69, número 11, 934-935.

Ferreira, M. ; "Curso de Quimiometría", dictado en Agosto de 1996 en Facultad de Química, Montevideo, Uruguay.

Martínez Luaces, V. ; "Tratamiento Estadístico de Datos Experimentales", notas del curso de Educación Permanente del año 1996, editado por G.U.E.I.Q.A, Montevideo, Uruguay.

D'Agostino; "An omnibus test of normality for moderate and large size sample", Biometrica (1971) 58, pag 341-347.

Martínez Luaces, V., Acher, R. y Gómez, A ; "Informe del curso de Matemática III del año 1996". Archivos de la Comisión de Enseñanza de la Facultad de Química.

Archivos de la Unidad de Educación Permanente de la Facultad de Química. Informes de los cursos de los años 1995, 1996 y 1997.

Martínez Luaces, V. y Fuentes, J. ; "Experiencias en la impartición del Procesamiento de Datos a profesionales de diferentes perfiles y niveles", presentado en COMPUMAT 97, Cienfuegos, Cuba, año 1997.

Martínez Luaces, V. y Casella, S. ; "La Educación Matemática en las diferentes ramas de la Ingeniería en el Uruguay hoy", Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura, La Habana, Cuba, 1996, pags. 386-391.

ICMI ; "Mathematics as a service subject", L'Enseignement Mathématique" **32** (1986), 159-172.

Uso de Tecnología

Diseño y Construcción del Sistema Tutorial Inteligente Función(x)

Carlos Armando Cuevas Vallejo
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

José Luis Díaz Gómez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
México

Resumen

Durante los últimos años, y bajo diferentes enfoques de la enseñanza, se han realizado diversos esfuerzos para utilizar el potencial de la microcomputadora en la educación. Estos esfuerzos van desde la utilización de software para uso profesional y lenguajes de programación de propósitos generales, hasta la utilización de software diseñado específicamente para la enseñanza. Sin embargo, queda aún un largo camino por recorrer para obtener una forma de uso que sea realmente útil para un amplio espectro de estudiantes y, que cumpla la meta de lograr que el estudiante adquiera conocimientos a través de este uso. Con el objetivo de dar un paso hacia delante en esta dirección, en este artículo se presenta una propuesta para el Diseño y Construcción del Sistema Tutorial Inteligente Función(X). En este sistema se sigue un enfoque de enseñanza constructivista, con el cual se busca que el estudiante, a través de la conjunción maestro e interacción con el sistema, construya su conocimiento para la adquisición del concepto de función.

El concepto de función. Importancia y dificultades

Uno de los conceptos más importantes en la matemática es el concepto de función. Las razones de esta importancia son varias. Entre ellas podemos mencionar, el importante papel que juega en el desarrollo de muchos conceptos matemáticos, así como en la modelación matemática de fenómenos naturales. También, se encuentra su valor para unir ramas de la matemática aparentemente no relacionadas. Por ejemplo, en muchos currículos escolares une al álgebra, la trigonometría y la geometría. Más que eso, aparece como una hebra que atraviesa los currículos escolares desde los cursos de enseñanza primaria hasta los universitarios. Debemos destacar también el papel siempre creciente del concepto de función en las ciencias físicas, químicas, biológicas, sociales, económicas y la ingeniería. Lo cuál nos muestra que las funciones son importantes tanto dentro como fuera de las matemáticas.

La importancia de las funciones en las matemáticas ha tenido también un impacto en el curriculum de las matemáticas. Sobre todo en el álgebra escolar. A este respecto; Fey y Good (1985) proponen el concepto de función como el centro del álgebra escolar; asimismo, Carolyn Kieran y colegas (1993) consideran que el concepto de función se debe introducir al inicio del curso del álgebra escolar y que todo se construya a partir de él. En cuanto a los planes de estudio algunos han sido diseñados teniendo el concepto de función como referencia. (v. g. Usiskin & Senk, 1992).

Algunos investigadores han ido mucho más allá, al proponer marcos teóricos para investigar el conocimiento de las funciones de los estudiantes (Vinner, 1983; Dreyfus & Eisenberg, 1982, 1983; Sfard, 1987; Vinner y Dreyfus, 1989; Even, 1990; Breidenbach, et. al., 1992), otros se han centrado en las diferentes componentes y representaciones de las funciones así como de la interpretación de las gráficas de las funciones (Bell & Janvier, 1981; Clement, 1985; Ponte, 1985; R. Duval, 1988; Hitt, F., 1996); se han desarrollado micromundos como el de Schoenfeld et. al. (1990); o taxonomias del concepto de función como en Lovell (1971) y Dreyfus & Einseberg (1983); o estudios de múltiples representaciones como el de Kaput (1987).

Este concepto es pues tan importante, que se ha dedicado un considerable esfuerzo para presentar con claridad este unificador tópico matemático en artículos, revistas, conferencias, congresos, investigaciones y en textos y, aún continúan los desacuerdos y confusiones acerca de su definición.

Lo anterior nos muestra pues, la importancia que tiene el concepto de función en la matemática y fuera de ella, sin embargo las investigaciones en educación matemática nos reportan que los estudiantes rara vez desarrollan una comprensión satisfactoria del mismo. Las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades con el concepto parecen centrarse alrededor de su complejidad y generalidad. El concepto tiene muchas facetas y contiene una multiplicidad de representaciones, además de una variedad de conceptos asociados que pueden manifestarse en diferentes niveles de abstracción. También, aparece en una variedad de contextos y de situaciones aparentemente no relacionadas (Dreyfus & Eisenberg, 1983; Eisenberg, 1986). Estas características han llamado la atención de los investigadores interesados en estudiar los diversos aspectos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, y han generado un conjunto creciente de investigaciones alrededor de él. La mayoría de ellas motivados por el interés en mejorar los problemas de enseñanza y aprendizaje de este concepto y, que ataçan el problema desde distintos puntos de vista, como ya se mencionó anteriormente.

En este artículo con el objetivo de dar un paso hacia delante en la búsqueda de una solución al problema complejo de la enseñanza aprendizaje del concepto de función se presenta una propuesta distinta, que consiste en el diseño y construcción de un Sistema Tutorial inteligente (STI), que sigue un enfoque de enseñanza constructivista, con el cual se busca que el estudiante, a través de la conjunción maestro e interacción con el sistema, construya su conocimiento para la adquisición del concepto de función.

Propuesta didáctica

Uno de los problemas fundamentales de la sociedad, lo constituye la educación y de esta, una de las partes cruciales es la enseñanza de las matemáticas. Sobre la cual se ha creado un "ambiente negativo", que se refleja en los altos índices de reprobación y en la baja matrícula en las carreras en las cuales se imparten cursos de matemáticas dentro de su currículum. Las causas que se mencionan como generadoras de este problema son muchas y variadas. Pero uno de los mayores problemas, —que con mayor frecuencia se menciona— es la forma en que se enseñan las matemáticas. En relación con el tema que nos ocupa en este proyecto —el concepto de función— las investigaciones relacionadas con el mismo nos muestran que unida a las dificultades inherentes del concepto se encuentra la forma en que actualmente se enseña esta noción.

De acuerdo con Balacheff, la enseñanza actual, se realiza principalmente a través del discurso por medio del cual se comunica el conocimiento (Balacheff, 1994). Este proceso de enseñanza que sigue el modelo de enseñanza del siglo XIX, denominada "*enseñanza tradicional*", se caracteriza por la ubicación en un mismo lugar del profesor, como representante del conocimiento y de la sociedad, y del alumno que debe de educarse para formar parte de la sociedad. Esta enseñanza se apoya fuertemente en la enseñanza verbalista que se deriva de la forma de enseñanza en la Edad Media y el renacimiento.

La enseñanza tradicional representa también, hoy, la herencia de la metodología de las teorías de Comenio, Rousseau, Pestalozzi y Herbart, quienes propusieron la "enseñanza intuitiva", que satisface una de las condiciones indispensables para adquirir la mayor parte de las nociones y operaciones, como lo es la utilización en la enseñanza de datos intuitivos. Pero la mayor influencia la recibió de la psicología calificada como *sensorio-empirista*, una psicología que coincibe las nociones como derivadas de imágenes mentales, de "intuiciones" que se imprimen en nuestro espíritu y, que halla el origen de todas las ideas en la experiencia sensible y no atribuye al sujeto sino un papel insignificante en su adquisición (Aebli, 1958).

Históricamente se ha observado que este tipo de enseñanza no produce los resultados deseados, que no es capaz de suscitar progreso y formar en el alumno nociones y operaciones nuevas. Que origina con frecuencia conjuntos de ideas confusas que el estudiante asimila difícilmente y que apenas retiene. En consecuencia se han buscado alternativas de enseñanza que conduzcan al estudiante a la adquisición del conocimiento y lo doten de mecanismos intelectuales que le permitan conocer e interpretar el complejo mundo que los rodea.

En la búsqueda de alternativas para la enseñanza y el aprendizaje, en este artículo se presenta una propuesta, la cual consiste en el diseño y construcción del Sistema Tutorial Funcion(X) en el cual se incluye una didáctica constructivista para introducir el concepto de función a través de la microcomputadora. La didáctica que se propone es la parte fundamental de todo el sistema, y toda la estructura del sistema queda supeditada, de alguna forma, a lo que en ella se establece. Esta didáctica sigue el modelo propuesto por Cuevas (1998) el cual se basa y parte de la didáctica propuesta por Aebli (1958). Ambas didácticas se fundamentan en una epistemología constructivista derivada de la psicología de Jean Piaget. En esta didáctica se propone que al enseñar un concepto matemático, se parta de un proyecto de acción que represente un problema o pregunta de interés para el estudiante, hasta la aplicación del concepto en otro problema en donde ese concepto sea un medio o elemento de análisis para resolverlo.

Esta didáctica se resume en los siguientes principios:

1. Cada vez que se introduzca un concepto o noción matemática, intentar partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando. Este problema puede generar ejercicios o subproblemas cuya solución, en forma estructurada o coordinada, lleven al estudiante a definir o mostrar el concepto matemático deseado.

2. Para esta didáctica, es esencial que el estudiante deba estar siempre desarrollando una acción. En este sentido y en cuanto a la acción se refiere, hemos traducido este principio a la importancia de que sea el propio educando quien mediante la resolución de problemas, gradualmente dosificados construya o llegue al concepto deseado. Esto es, el alumno debe de estar continuamente resolviendo o intentando resolver problemas.

3. Una vez resuelto el problema presentado, el estudiante debe de validar sus resultados, verificando que tengan sentido lógico, de acuerdo al problema planteado.

4. Cuando se trate de enseñar un determinado tema o concepto matemático complejo, mediante la resolución de un determinado problema es necesario descomponer o dividir este problema en subproblemas que representen las operaciones parciales que lo constituyen y anotar todas las operaciones y/o conceptos que resulten de este análisis y que el estudiante requiere para resolver el problema inicial. Generar así un plan de acción, mediante ejercicios, gradualmente dosificados, que nos lleve en forma coordinada y coherente a la consecución de la meta.

5. Cada vez que se planteen ejercicios que representan las operaciones directas asociadas a un concepto, implementar ejercicios que representen a la operación inversa asociada.

6. Cuando se proponga una forma o método para resolver un problema, intentar dar una forma de solución alternativa. En todo caso, nunca imponer una forma de solución.

7. Elaborar los problemas en lo que corresponde a su grado de dificultad, de acuerdo al principio de adecuación óptima. Es decir, que las dificultades de los problemas deben de ser graduadas de tal forma que requieran el esfuerzo del estudiante, puesto que en caso contrario no los tomarán en cuenta, pero lo suficientemente fáciles para resolverlos.

8. Si se elabora material con el fin de sugerir o ayudar en la solución de un problema complejo, estos deberán adecuarse al principio de mínima ayuda. Es decir, no plantear preguntas o dar indicaciones demasiado directas. Por el contrario, proporcionar problemas que puedan a su vez ser indicaciones, que proporcionen elementos para que el alumno construya por sí mismo la solución del problema.

9. Cada vez que se propongan problemas o ejercicios que apoyen la enseñanza de un determinado concepto de las matemáticas, en un determinado sistema o registro, plantear actividades semejantes al mismo, en los diversos sistemas de representación o registros que le sean propios.

10. Si un concepto matemático se ilustra mediante actividades y/o ejercicios, en mas de un sistema de representación o registro, instrumentar operaciones directas e inversas que promuevan la articulación o traslación entre los diferentes registros o sistemas de representación.

11. Establecer problemas en donde el concepto recién adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo. Esto es, idear problemas en donde el concepto enseñado sea parte de la estructura con la que el alumno debe de analizar y resolver el problema planteado.

Esta didáctica será el fundamento teórico del modelo didáctico del concepto de función que estará inmerso en el proyecto del Sistema Tutorial que se propone.

Diseño del sistema propuesto. (Díaz, 1998)

Este proyecto propone un Sistema Tutorial Inteligente que emplea a la microcomputadora como medio para la enseñanza del concepto de función. El objetivo es el de contribuir a incrementar la eficiencia de la enseñanza de la matemática a través del uso de software que permita desde la adquisición de conceptos, el repaso de una clase o la evaluación de conocimientos adquiridos a través de la Enseñanza Asistida por microcomputadora.

Los criterios que se tomaran en cuenta para el diseño del sistema, son los siguientes:

- El concepto de función es uno de los más importantes en la matemática.
- Existencia de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función.
- La necesidad de que el futuro profesional sea capaz de realizar la modelación de situaciones reales.
- Presentación de situaciones reales que contribuyan a que el estudiante sea capaz de interpretar el concepto de función.
- Interpretación de propiedades analíticas y geométricas de una función dada en forma explícita, gráfica o en un texto.
- Aplicación de técnicas de hipertexto que vinculan el uso de recursos multimedia en la concepción del sistema de ayudas.
- Diseño de una interfaz gráfica amigable que emplea las facilidades del ambiente Windows.
- La comunicación con el estudiante en todo momento será interactiva. A través de preguntas de selección y desarrollo. Apoyadas en el procesamiento del lenguaje natural.

Estructura del sistema

A continuación y de manera somera describiremos tres de las componentes del sistema: el dominio de conocimiento, la componente tutorial, y la interfaz.

Dominio de Conocimiento.

En la base de conocimiento se parte del objeto función. A partir de la experiencia del autor, del análisis histórico y de los resultados de las investigaciones, y siguiendo el modelo didáctico propuesto se delimitará el contenido a tratar en la ejercitación, así como de los tipos de problemas y los criterios a tener en cuenta en la clasificación de los mismos.

El contenido a enseñar aparecerá en tópicos, una clasificación tentativa es la siguiente:

- Modelación de funciones
- Identificación de funciones
- Reconocimiento del dominio de una función
- Operaciones con funciones

Modulo Tutor

La componente tutorial es la encargada de presentar los problemas, sugerir las actividades y dosificar las mismas de acuerdo a un orden dentro de cada tema y subtema. También tiene la responsabilidad de analizar las respuestas del alumno, clasificar el error en caso de que exista, y solicitar una nueva respuesta o proporcionar ayuda si el estudiante los solicita.

Este módulo contempla los mensajes iniciales en los ejercicios que así lo requieren y las explicaciones dadas al estudiante en caso de error. En caso de que sean mensajes se le da una breve información al estudiante que lo ubica en el tópico que enfrentará.

La ayuda que suministrará el tutor al usuario-estudiante será de cuatro formas:

1.  **Ayuda**, símbolizada por el icono esta ayuda le comunica al usuario que se espera que haga, como navegar en el sistema, que tipo de datos se espera que escriba, como se introducen, etc. No proporciona ayuda académica.

2.  **Apoyo**, simbolizada por el icono esta ayuda es esencialmente académica y puede ser variable e interactiva. De acuerdo al principio de mínima ayuda; esta ayuda es mínima para que el estudiante pueda superar la dificultad que presenta el problema, en la idea de que basta un "ligero tip" para que el estudiante resuelva por sí mismo el problema planteado.

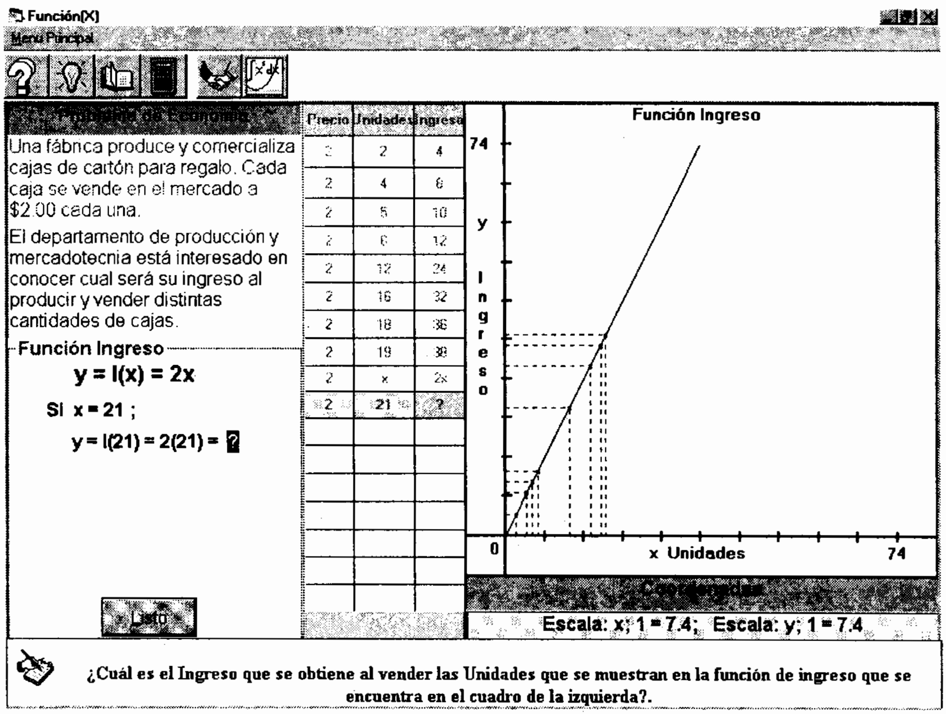
3.  **Texto**, simbolizada por el icono a través de esta ayuda el estudiante tendrá acceso a un glosario de conceptos y terminología, es prácticamente un texto sobre el tema de funciones y temas relacionados. Es una ayuda del tipo que se proporciona en los programas bajo el ambiente Windows, y a la que se tiene acceso por medio de la tecla F1. La cual provee el texto o parte de él para un tema específico, si se llama señalando una palabra clave, o general en caso contrario.

4. Error. Este tipo de ayuda no tiene un icono específico. Se proporciona cuando se comete un error semántico, o se introduce un dato erróneo y se da un tip para continuar. Esta ayuda se proporciona en la barra de estado de la pantalla principal.

Interfaz.

La interfaz es el módulo encargado de establecer el vínculo del sistema con el estudiante, por esto se plantea una interfaz amigable. Para lograrlo se ha seleccionado el ambiente Windows y se aprovecharán muchos de sus recursos y facilidades, especialmente el uso de gráficos. La interfaz seguirá reglas de operación simples, consistentes y lo más intuitivas posibles. Algunas de las características que se proponen son:

- En la interfaz, las diferentes opciones del software se operarán basándose en menúes y barras de herramientas organizados temáticamente.
- En todo momento el estudiante-usuario sabrá en que estado o situación del programa se encuentra y las posibles acciones que podrá efectuar.
- En todo momento podrá disponer de ayudas o apoyos en contexto.
- De requerirse aparece un botón de herramienta, que proporcione facilidades de cálculo al estudiante.
- Sólo se aceptarán las teclas que tengan sentido en contexto.
- Se proporcionará una calculadora con la que se podrán ejecutar operaciones aritméticas.
- Se tendrá la posibilidad de cancelar una opción seleccionada y regresar a la situación anterior, siempre que no afecte la actividad que se encuentra en progreso.



En la figura anterior se muestra una pantalla de una de las opciones del STI. En esta pantalla se presentan varias secciones. En una de ellas se plantea un problema, como un proyecto de acción práctica a realizar. En esta pantalla se conjugan los distintos aspectos del modelo didáctico planteado.

Bibliografia

Aebli, Hans. (1958). Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. Kapeluz. Buenos Aires.

Balacheff, N. (1994). *Artificial Intelligence and Real Teaching.* In: Learning Through Computers: Mathematics and Educational Technology. C. Keitel and K. Ruthven (Eds.). Springer Verlag. Berlín. Págs.131-138.

Bell, A. & Janvier, C. (1981). *The interpretation of graphics representing situations.* For The Learning of Mathematics. 2, (1), 34-42.

Clement, J. (1985). *Misconceptions in graphing.* In L. Streefland (eds.) Proceedings of the Ninth International Conference for the PME. Vol. 1. (pág. 369-375). The Netherlands.

Cuevas, V., C. Armando. (1998). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas, basada en la psicología de Jean Piaget.* En prensa.

Díaz, Gómez, José Luis (1998). Documento Candidatura Doctoral. Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Dreyfus, T., y Eisenberg, T. (1983). *Intuitions on functions.* Journal of Experimental Education, 52, pág. 77-85.

Dreyfus, T., y Eisenberg, T. (1983). *The function Concept in College Students: Linearity, Smoothness and Periodicity.* Focus on Learning Problems in Mathematics. Vol. 5, No. 3 y 5. Pág. 119-132.

Eisenberg, T. (1992). *On the development of a sense for functions.* En G. Harel y E. Dubinsky (eds.). The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pág. 153-174.

Even, R. (1988). *Pre-service teachers conception of the relationship between functions and equations.* Proceedings of the PME XII (pág. 304-311). Vezprem, Hungary.

Even, R. (1990). *Subject matter knowledge for teaching and the case of functions.* Educational Studies in Mathematics. 21, 521-544.

Fey, J., & Good, R. (1985). *Rethinking the sequence and priorities of high school mathematics curricula.* In C. R. Hirsch (Ed.). The secondary school mathematics curriculum (pág. 43-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hitt, F. (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemólogicos y didácticos.* Didáctica. Investigaciones en Matemática Educativa. XX Aniversario CINVESTAV-IPN. Grupo Editorial Iberoamérica.

Janvier, C. (1981). *Use of situations in mathematics education.* Educational Studies in Mathematics. 12, 113-122.

Kaput, James. (1987). R*epresentation Systems and Mathematics.* In Claude Janvier (eds.). Problems of Representations in the Teaching and Learning of mathematics. Hillsdale, N. J.: Erlbaum. Pág. 19-25.

Kieran, K., Garançon, M., Lee, L., Bolleau, A., (1993). *Technology in the learning of functions: Process to object?.* Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Pacific Grove. Ca. USA. Vol. 1. Pág. 91-99.

Ponte, J. (1985). *Geometrical and numerical strategies in students functional reasoning.* . In L. Streefland (eds.) Proceedings of the Ninth International Conference for the PME. Vol. 1. (pág. 413-418). The Netherlands.

Schoenfeld, A. H., J. P. Smith III, y A. Arcavi: (1990). *Learning – the microgenetic analysis of one student's understanding of a complex subject matter domai;* en R. Glaser (ed.), Advances in Instructional Psychology, 4, Erlbaum, Hillsdale.

Graficando funciones interactivamente con Cabri Geometry II

Edison De Faria Campos[1] (edefaria@cariari.ucr.ac.cr)
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica

Resumen

En este curso especial utilizaremos el software Cabri Geometry II para desarrollar una serie de actividades relacionadas con la geometría. El tema escogido se debe a su importancia en la educación media y a la posibilidad de experimentar y conjeturar sobre los objetos geométricos.

La aplicación Cabri Geometry II nos permite por un lado realizar "experimentos" geométricos, de manera que los estudiantes lleguen a establecer las relaciones adecuadas y obtener sus propias conclusiones, y por otro lado facilita la conexión interna entre distintas representaciones matemáticas.

Introducción

Los profesores de matemáticas tenemos un nuevo desafío: Aprender a enseñar de manera diferente a los procedimientos que tradicionalmente hemos utilizado.

Los avances científicos y tecnológicos de nuestro tiempo y en especial la electrónica y la informática, han revolucionado al mundo y plantean grandes cambios en todos los niveles, en particular en la educación, ya que la tecnología vino para quedarse, y las futuras generaciones convivirán con ella. Las computadoras y las calculadoras tienen el potencial de modernizar nuestras aulas y hacer las matemáticas más pertinentes e interesantes para nuestros estudiantes. En particular pueden considerarse como herramientas que permiten a los estudiantes concentrarse sus esfuerzos en razonar y en la resolución de problemas.

La tecnología continúa evolucionando y al mismo tiempo transformando la manera como vivimos, la manera como proponemos y resolvemos problemas teóricos y prácticos, y la manera como hacemos y percibimos las matemáticas.

Las computadoras y calculadoras graficadoras se conceptualizan como un medio de apoyo al curriculum y como herramientas para el aprendizaje. Como medios que favorecen "*la creación de ambientes de aprendizajes activos, aptos para resolver problemas, afrontar retos, desarrollar destrezas de pensamiento, creatividad y procesos de reflexión*" ([1] Badilla: 1994, 182). *Específicamente medios que promueven la iniciativa, la exploración, la investigación, el descubrimiento, la construcción de modelos, el diseño, la creatividad, la invención, la interpretación, la experimentación, formulación de hipótesis, la demostración, el análisis, la síntesis, la responsabilidad del aprendiz en su aprendizaje, el trabajo colaborativo, en fin la actividad del estudiante sobre el objeto-conocimiento desde diferentes aristas* ([2] Cervantes & Víquez, 1997, 144).

Las computadoras y calculadoras ofrecen muchas oportunidades para la exploración e investigación de propiedades numéricas y establecer relaciones.

La National Council of Teachers of Matematics ([3] NCTM, 1996-97, 18-24) recomienda la integración de la calculadora en distintos niveles de la enseñanza de las matemáticas, para :

[1] Proyecto de Innovaciones Tecnológicas en la Educación Matemática, PITEM, Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, CIMM

- Explorar y experimentar con ideas matemáticas tales como: patrones, propiedades numéricas y algebraicas, y funciones.
- Desarrollar y reforzar habilidades tales como: estimación, cálculo, graficación y análisis de datos.
- Enfocar el proceso de resolución de problemas en lugar de concentrarse en los cálculos asociados con los problemas
- Tener acceso a ideas matemáticas y experiencias que van más allá de los niveles limitados por los cálculos tradicionales como papel y lápiz, permitiendo elevar el nivel de abstracción y generalización.
- Desarrollar conceptos.
- Construir modelos.

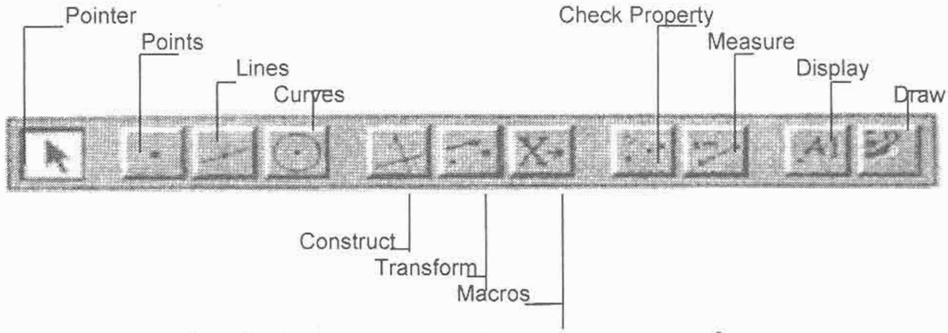
Es claro que las computadoras y las calculadoras no pueden enseñar por sí solas. Cualquier actividad de aula, incluyendo aquellas que usan alguna herramienta tecnológica, depende de la actitud del profesor y de la respuesta de los estudiantes a dicha actividad.

Incorporar tecnología en las aulas requiere más que, simplemente proporcionar los instrumentos tecnológicos a los estudiantes. Debemos de tener presente que el aprendizaje debe desarrollarse en un ambiente apropiado que permita explorar y construir su propio conocimiento, por lo que tenemos que seleccionar las tareas apropiadas, que nos conduzcan al logro de los objetivos.

La enseñanza de la geometría, en muchos casos, se hace de una manera estática, expositiva y rutinaria, en donde el alumno juega un papel receptivo; en este taller se propone presentar a los docentes de matemática, una metodología que permite crear un ambiente que propicie la construcción del conocimiento por parte del estudiante, con experiencias conducentes a establecer las relaciones lógicas que integran los conceptos de funciones, desde una perspectiva geométrica y dinámica.

Para la creación de ese ambiente, se plantea la utilización del software Cabri Geometry II, ya que este permite al estudiante explorar, inferir, hacer conjeturas, poner a prueba argumentos y análisis de resultados; y si el educador utiliza (estas cualidades o) este potencial en forma creativa y adecuada, lo convierte en una herramienta eficaz para los alumnos en su tarea de construcción de conceptos, y en la consecución de sus objetivos [4], [5], [6].

Por esta razón, al incorporar el uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el educador debe asumir un papel de facilitador y su tarea consistirá en diseñar y presentar situaciones que conduzcan a la adecuación del ambiente ideal para asegurar el éxito del proceso. El Cabri Geometry II contiene herramientas para construcción, y utiliza ciertos objetos primitivos para construir objetos más complejos. Las 11 herramientas se encuentran distribuidas en el siguiente menú de herramientas, de tal forma que cada menú contiene actividades comunes.



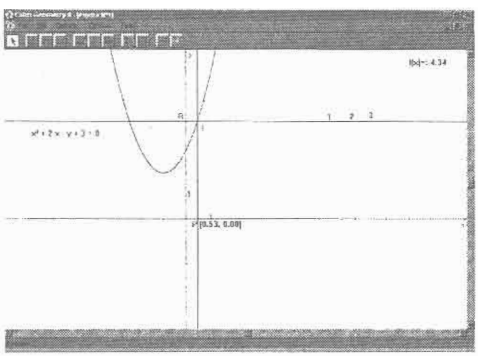
Construcción de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx + c$

Las funciones cuadráticas pueden ser exploradas con el Cabri Geometry II, mediante la graficación interactiva de la familia de curvas y = ax^2 + bx + c, para varios valores de los parámetros a, b y c. La gráfica de cada miembro de la familia cambiará dinámicamente al cambiar de una manera interactiva los parámetros de la ecuación cuadrática.

Objetivo: Utilizar el software Cabri Geometry II para investigar el comportamiento de la gráfica de la función cuadrática y = ax^2 + bx + c, al variar los valores de los parámetros a, b y c.

Pasos:

1. Activar ejes y construir un segmento AB sobre el eje x(Show Axes: menú Draw y Segment: menú Lines)
2. Construir un punto P sobre el segmento AB(Point on Object: menú Points) y determinar las coordenadas de P(Equation and Coordinates: menú Measure; y click en P).
3. Edite 3 números: 1, 2 y 3(Numerical edit: menú Display)
4. Utilice Calculate: menú Measure, click en el primer número editado, * click en la coordenada x del punto P ^2, + click en el segundo número editado, * click en la coordenada x de P, + click en el tercer número editado. Click en =, y arrastre el resultado.
5. Utilice Measurement Transfer: menú Construct, para transferir el resultado al eje y. Sea R el punto correspondiente.
6. Construya una recta por P paralela al eje y(o perpendicular al eje x), y otra por R paralela al eje x o perpendicular al eje y(menú Construct: Parallel Line o bien Perpendicular Line). Sea T el punto de intersección de las rectas(intersection point: menú Points).
7. Oculte las rectas y las coordenadas(Hide/Show: menú Draw)
8. Determine el lugar geométrico de T cuando P se mueve sobre el segmento AB(locus: menú Construct; click el punto T y click el punto P).
9. Modifique los valores de los números editados(doble click en cada número editado)
10. Modifique dinámicamente los valores de los números editados(animation: menú Display, click en el número, arrástrelo con el mouse y suelte).
11. Utilice la herramienta Conic: menú Curves, para construir una cónica sobre el lugar geométrico de la parábola. Una cónica es definida mediante cinco puntos. Click en cinco puntos sobre el lugar geométrico de la parábola, en respuesta a la pregunta Ön this locus).
12. Utilice Equations and Coordinates: menú Measure, para obtener la ecuación de la cónica (parábola en este caso).



13. Describa el significado de cada de cada uno de los parámetros a, b, c en la gráfica de la función cuadrática general y= ax^2 + bx + c.

14. Utilice la herramienta Calculate: menú Measure, y los coeficientes de la función en pantalla, para calcular el vértice de la parábola:

$$\left(\frac{-b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

15. Utilice Measurement Transfer: menú Construct, para transferir la primera coordenada del vértice al eje x, y la segunda coordenada al eje y. Construya perpendiculares a los ejes x, y por estos puntos, para determinar el vértice de la parábola.
16. ¿ Cuál es el lugar geométrico del vértice de la parábola, cuando variamos los valores a, b y c? Explique algebraicamente porque esto ocurre.
17. Repita la construcción de la parábola, utilizando la forma estándar de la función cuadrática $y = a(x-h)^2 + k$, e investigue los efectos que producen los cambios de a, h, k. ¿ Cuál es el lugar geométrico del vértice cuando los parámetros son cambiados? ¿ Cuál es la conexión algebraica entre la forma estándar y la no estándar?
18. Utilice la misma técnica iterativa anterior, para graficar la función cúbica de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y explique cuál es el efecto de cada uno de los parámetros sobre la forma de la gráfica.

Construcción de funciones de la forma y = a sen(b(x-c)) + d.

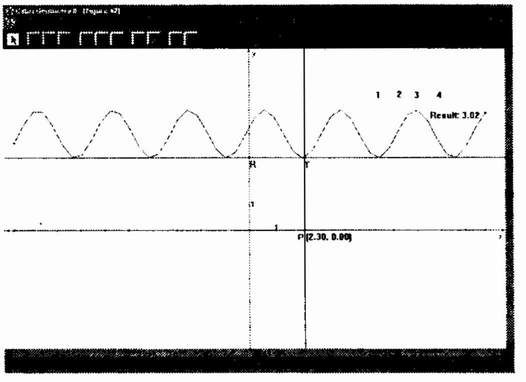
Las funciones sinusoidales pueden ser exploradas con el Cabri Geometry II, mediante la graficación interactiva de la familia de curvas y = a sen(b(x-c)) + d, para varios valores de los parámetros a, b, c y d. La gráfica de cada miembro de la familia cambiará dinámicamente al cambiar de una manera interactiva los parámetros de la ecuación.

Objetivo: Utilizar el software Cabri Geometry II para investigar el comportamiento de la gráfica de la función sinusoidal y = a sen(b(x-c)) + d, al variar los valores de los parámetros a, b, c y d.

Pasos:

1. Activar ejes y construir un segmento AB sobre el eje x(show Axes: menú Draw y Segment: menú Lines)
2. Construir un punto P sobre el segmento AB(point on Object: menú Points) y determinar las coordenadas de P(equation and Coordinates: menú Measure; y click en P).
3. Edite 4 números: 1, 2, 3 y 4(numerical edit: menú Display)
4. Utilice Calculate: menú Measure, click en el primer número editado, * click en el botón Sin, click en el segundo número editado, * click la coordenada x del punto P, - click en el tercer número editado, cierre paréntesis dos veces, + click el cuarto número editado. Click en =, y arrastre el resultado.
5. Utilice Measurement Transfer: menú Construct, para transferir el resultado al eje y. Sea R el punto correspondiente.
6. Construya una recta por P paralela al eje y(o perpendicular al eje x), y otra por R paralela al eje x o perpendicular al eje y(menú Construct: Parallel Line o bien Perpendicular Line). Sea T el punto de intersección de las rectas(intersection point: menú Points).
7. Oculte las rectas y las coordenadas(Hide/Show: menú Draw)

8. Determine el lugar geométrico de T cuando P se mueve sobre el segmento AB(locus: menú Construct; click el punto T y click el punto P).
9. Modifique los valores de los números editados(doble click en cada número editado)
10. Modifique dinámicamente los valores de los números editados(animation: menú Display, click en el número, arrástrelo con el mouse y suelte).



11. Describa el significado de cada de cada uno de los parámetros a, b, c y d en la gráfica de la función sinusoidal general y= a sen(b(x-c)) + d.

Construcción de relaciones paramétricas

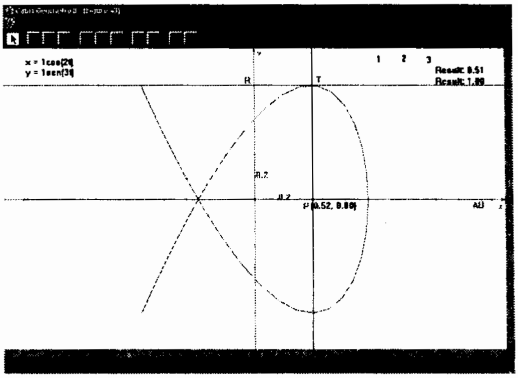
Las relaciones paramétricas y sus gráficas se parecen mucho a las funciones estándar y sus gráficas en el plano xy, pero son menos restrictivas que estas.

Objetivo: Utilizar el software Cabri Geometry II para investigar el comportamiento de la gráfica de las ecuaciones paramétricas de la forma x = a cos b*t, y = c sen d*t, al variar los valores de los parámetros a, b, c y d.

Pasos:

1. Seleccionar Preferences... en el menú Options, y en el campo de Display Precision and Units, escoger Radian(rad). Activar ejes y construir un segmento AB sobre el eje x(show Axes: menú Draw y Segment: menú Lines)
2. Construir un punto P sobre el segmento AB(point on Object: menú Points) y determinar las coordenadas de P(equation and Coordinates: menú Measure; y click en P).
3. Edite 3 números: 1, 2 y 3(numerical edit: menú Display)
4. Utilice Calculate: menú Measure, click en el primer número editado, * click en el botón Cos, click en el segundo número editado, * click la coordenada x del punto P, click en =, y arrastre el resultado.
5. Click en el primer número editado, * click en el botón Sin, click en el tercer número editado, * click en la coordenada x del punto P, click en =, y arrastre el resultado.
6. Utilice Measurement Transfer: menú Construct, para transferir el primer resultado al eje x, y el segundo resultado al eje y. Sean Q y R los puntos correspondientes en el eje x, y en el eje y respectivamente.

7. Construya una recta por Q paralela al eje y(o perpendicular al eje x), y otra por R paralela al eje x o perpendicular al eje y(menú Construct: Parallel Line o bien Perpendicular Line). Sea T el punto de intersección de las rectas(intersection point: menú Points).
8. Oculte las rectas y las coordenadas(Hide/Show: menú Draw)
9. Determine el lugar geométrico de T cuando P se mueve sobre el segmento AB(locus: menú Construct; click el punto T y click el punto P).
10. La figura resultante se verá muy pequeña. Una forma de ampliar la figura es seleccionando una unidad sobre el eje x (por ejemplo, el punto que representa el número 1), y como respuesta a la indicación "this unit" arrastre la unidad.
11. Modifique los valores de los números editados(doble click en cada número editado). Al cambiar el primer número editado, es probable que la figura resultante no se vea en pantalla. Para verla, habrá que reducir las unidades de nuevo. Las figuras obtenidas se denominan **figuras de Lissajous**.



12. Describa el significado de cada de cada uno de los parámetros a, b y c en la gráfica de la relación paramétrica general x = a cos(b*t), y = a sen(c*t). Observe lo que sucede cuando b=c.
13. Modifique la construcción, para graficar la relación paramétrica más general que la anterior: x = a cos(b*t), y = c sen(d*t).

Construcción de cónicas como lugares geométricos

Objetivo: Utilizar el software Cabri Geometry II para construir las cónicas como lugares geométricos de puntos que cumplen ciertas restricciones.

a. La parábola

Pasos:

1. Activar ejes y construir un segmento AB sobre el eje x(show Axes: menú Draw y Segment: menú Lines)
2. Construir un punto P sobre el segmento AB(point on Object: menú Points)
3. Construir un punto Q en el primer cuadrante del plano xy (Point: menú Points), Q fuera del eje x
4. Construir una recta L, mediatriz de PQ(perpendicular bisector: menú Construct)

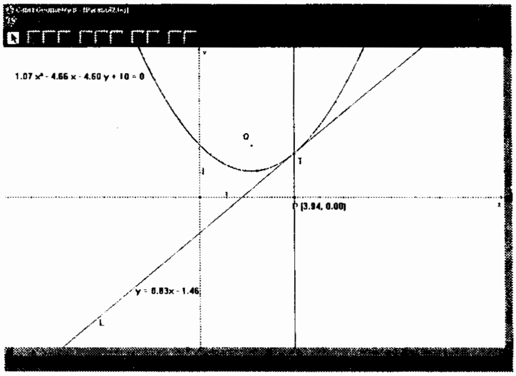
5. Construya una recta por P perpendicular al eje x(menú Construct: Perpendicular Line). Sea T el punto de intersección de esta recta con la mediatriz L(intersection point: menú Points).

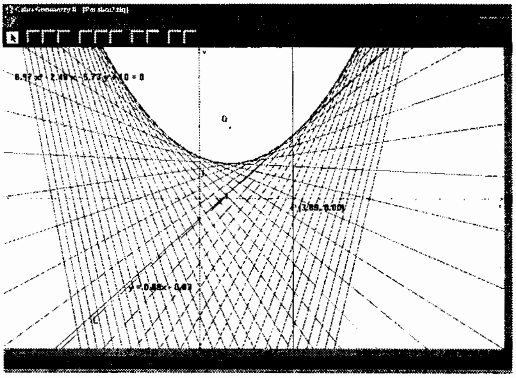
6. Determine el lugar geométrico de T cuando P se mueve sobre el segmento AB(locus: menú Construct; click el punto T y click el punto P). La figura resultante es una parábola con foco en Q y directriz en el eje x. Use Distance and Length para medir la distancia de T a Q, y de T al eje x.

7. Arrastrar Q, acercándolo u alejándolo de la directriz y anotar las observaciones. Explique algebraicamente lo que ocurre en términos de transformaciones de funciones.

8. Utilice la herramienta Conic: menú Curves, para seleccionar 5 puntos sobre la parábola. Utilice el comando Equations and Coordinates del menú Measure para determinar la ecuación de la parábola y de la recta L. Verifique que L es tangente a la parábola en T.

9. Determine el lugar geométrico de L cuando P se mueve sobre la directriz de la parábola.





b. La hipérbola

1. Activar ejes y construir un segmento AB sobre el eje x(show Axes: menú Draw y Segment: menú Lines)

2. Construir una recta L, y los puntos C, D, E sobre L.

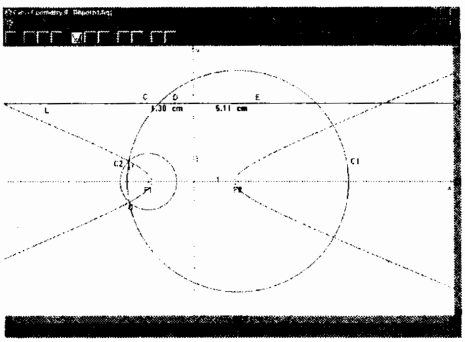
3. Construir los puntos F1 y F2 sobre el segmento AB.

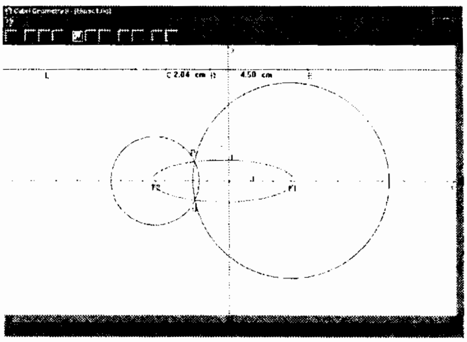
4. Mida las distancias CD y CE.

5. Utilice Measurement Transfer: menú Construct para transferir la medida CD en F1 y CE en F2. Sean P y Q los puntos de intersección de las dos circunferencias resultantes.
6. Utilice Preferences en el menú Options para aumentar el número de objetos en el locus a 5000.
7. Determine el lugar geométrico de P cuando C se mueve sobre L, y el lugar geométrico de Q cuando C se mueve sobre L.
8. Mover C, D, E, F1, F2 y anotar observaciones.

c. La elipse

1. Activar ejes y construir un segmento AB sobre el eje x(show Axes: menú Draw y Segment: menú Lines)
2. Construir una recta L, y los puntos C, D, E sobre L
3. Construir los puntos F1 y F2 sobre el segmento AB
4. Mida las distancias CD y DE.
5. Utilice Measurement Transfer: menú Construct para transferir la medida CD en F2 y DE en F1. Sean P y Q los puntos de intersección de las dos circunferencias resultantes.
6. Utilice Preferences en el menú Options para aumentar el número de objetos en el locus a 5000.
7. Determine el lugar geométrico de P cuando D se mueve sobre L, y el lugar geométrico de Q cuando D se mueve sobre L.
8. Mover C, D, E, F1 y F2. Anotar las observaciones.





Conclusiones

Hemos visto el potencial del software Cabri Geometry II como agente didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, y como herramienta útil para integrar distintas representaciones matemáticas.

El Cabri es un programa dinámico en donde la acción del sujeto es prioritaria sobre el objeto del conocimiento, para la generación de los conceptos, permitiendo que la clase se transforme en el lugar central de la experiencia educativa en que el alumno se enfrente a los problemas y construya conceptos.

Bibliografía:

Badilla, E. (1994) *Hacia una Política de Informática Educativa en el sistema educativo de Costa Rica.* Seminario Taller Nacional de Reflexión sobre Política en Informática Educativa. EDUNED, San José, Costa Rica.

Cervantes, O., Víquez M. (1997) *Las nuevas tecnologías: viejos y nuevos desafíos para la educación matemática costarricense.* Memoria V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas. Liberia, Costa Rica.

NCTM (1996-1997) *Position Statements.* Handbook.

De Faria Campos E. (1998) *Calculadoras gráficas, geometría y el constructivismo.* Revista Innovaciones Educativas, UNED. Año V, No. 9, 1998.

Vonder Embse Charles et all (1998) *Analytic Geometry Institute, T^3 Teachers Teaching With Technology.* Texas Instruments Inc. , May 1998.

Cabri Geometry II (1997) Guidebook for Macintosh, Windows and MS-DOS.

Aprendiendo matemática discreta desde el computador (con una mirada centrada en las actitudes hacia el saber y la tecnología)

Malva Alberto de Toso, Lilian Cadoche, Iván Melgrati (imelgrat@frsf.utn.edu.ar)
Universidad Nacional del Litoral – Universidad Tecnológica Nacional
Argentina

A menudo los docentes nos planteamos interrogantes, que no siempre tienen respuesta inmediata, pero que forman parte del proceso de enseñanza y aprendizaje: ¿qué tipo de relaciones se instalan en el aula universitaria?, ¿cómo interactúa el aprendizaje de los conceptos y procedimientos de la asignatura con la relación docente -alumno?, ¿cómo se da el interjuego entre el deseo del alumno de aprender y el del docente de enseñar?.

Nos preguntamos: ¿De qué manera generamos las condiciones didácticas que favorecerán los procesos de transmisión, comunicación, apropiación, construcción del conocimiento?. Cuando en una situación de enseñanza se ponen de manifiesto estos procesos, las relaciones pedagógicas se entrecruzan, complementan y hasta contradicen. Lo importante es dar lugar, en el espacio pedagógico, a las mediaciones, a las interacciones, a la apropiación, ya que contribuyen al acceso de lo simbólico y de la cultura.

Ahora bien, ¿qué estrategias participativas mejoran las relaciones interpersonales (docente, alumno, grupo) y las relaciones del conocimiento (alumno con objeto del conocimiento, docente con objeto del conocimiento)? Las respuestas nos llevaron a implementar distintas propuestas curriculares (tales como talleres, lecturas complementarias, cursos especiales, debates) centradas en la presencia permanente de los jóvenes en actividades de aprendizaje, investigación y desarrollo.

Si de alguna manera podemos reducir el trabajo realizado a lo largo de los últimos tres años, a una simple enumeración de los pasos dados, podemos citar estos cinco: *selección del contenido*, *incorporación de jóvenes en tareas de investigación y desarrollo*, *generación de material didáctico con herramientas computacionales*, *implementación de estrategias participativas para todos los estudiantes* y *evaluación de las actitudes de los estudiantes*.

Haremos una breve referencia al proceso seguido y nos centraremos posteriormente en mostrar parte del *material didáctico para aprender Matemática Discreta con el apoyo de herramientas computacionales*, y en la *evaluación de las actitudes de los estudiantes.*

Selección del contenido: Esta etapa se centra en un *contenido*, temas de *Matemática Discreta*. Comienza con el reconocimiento sobre la creciente integración y abundancia de aplicaciones de la combinatoria y de los métodos discretos en las más diversas ciencias y particularmente en las llamadas "ciencias de la computación" y continúa con la selección y alcance de los mismos.

Incorporación de jóvenes en tareas de investigación y desarrollo: Organizamos actividades participativas y en especial generamos estrategias didácticas donde transmitimos a nuestros estudiantes que la vida universitaria adquiere mayor significado cuando ellos van resolviendo satisfactoria y exitosamente los problemas que se le presentan adhiriendo a la premisa de que cada alumno se comprometa con su propio aprendizaje. Aquí comienza la verdadera interacción entre docente, alumno y contenido.

Generación de material didáctico para aprender Matemática Discreta con el apoyo de herramientas computacionales: Con la colaboración de los estudiantes incorporamos herramientas computacionales como coadyuvantes inmediatos para la solución de problemas planteados desde la Matemática Discreta. Aprovechamos luego, las bondades y capacidades que tiene el software Mathematica para ser utilizado como un lenguaje de programación donde los jóvenes encontraron la oportunidad para crear sus propios "paquetes" con funciones y comandos que resuelven situaciones problemáticas relacionadas con este campo disciplinario. Posteriormente elaboramos guías de aprendizaje, incluyendo algunos ejemplos en las páginas siguientes.

Implementación de estrategias participativas para todos los estudiantes: Extendimos la participación a todos los estudiantes mediante el dictado de numerosos talleres y cursos, promoviéndose experiencias de aprendizaje enriquecedoras e innovadoras y creándose un ámbito propicio para el aprendizaje de los contenidos. Los ejercicios y problemas que seleccionamos permitieron revisar el material teórico y práctico, enlazar nuevas ideas con otras previas y favorecer la reflexión, la síntesis y la apertura a nuevos cuestionamientos.

Evaluación de las actitudes de los estudiantes: Notamos que el permanente accionar con los jóvenes había creado condiciones favorables para el aprendizaje.

Generación de material didáctico para aprender Matemática Discreta con el apoyo de herramientas computacionales: Podemos dividir la tarea en dos etapas. Por un lado la generación de "paquetes" en el ámbito del Mathematica con funciones creadas para resolver problemas en Matemática Discreta y por el otro lado la generación de guías de estudio para utilizar especialmente dichas funciones. Los contenidos desarrollados comprenden los siguientes temas:

Módulo I:	Lógica. Álgebras de Boole.
Módulo II:	Introducción a los Grupos Finitos.
Módulo III:	Combinatoria.
Módulo IV:	Relaciones. Grafos.

A los efectos de limitar nuestro reporte, sólo expondremos una parte de las funciones creadas para el tratamiento de las Álgebras de Boole y cómo utilizarlas en la resolución de problemas. Estamos suponiendo, además, que nuestro lector está familiarizado con la introducción de los comandos básicos propios del Mathematica.

Los ejercicios y problemas que proponemos tienen como objetivo servir de punto de partida para la elaboración de otros más complejos. Son fácilmente adaptables a distintas situaciones de aprendizaje y constituyen una síntesis de algunos modelos trabajados con los alumnos, susceptible de ser actualizada, modificada y enriquecida permanentemente por nuevos aportes. Veamos algunos ejemplos:

Módulo I: Lógica y Álgebras de Boole

Creamos el paquete DiscreteMath\`BooleanAlgebra\` con nuestras propias funciones y comandos propios del Mathematica. Podemos expandir y/o simplificar expresiones lógicas, estudiar la presencia de estructuras de álgebras de Boole, expresar una función booleana en su primera y segunda formas canónicas, simplificar y obtener su tabla de verdad. Finalmente, podemos determinar la equivalencia de dos expresiones booleanas o lógicas. Investigamos los comandos de este paquete mediante la sentencia:

```
?DiscreteMath`BooleanAlgebra`*

EquivalentQ             LogicalSimplify
FirstCanonicalForm      SecondCanonicalForm
IsBooleanAlgebraQ       TruthTable
```

¿Es Álgebra de Boole?: Podemos preguntar si dado un conjunto B no vacío y dos operaciones binarias ("+" y "×", por ejemplo) definidas sobre él, la terna (B,+, ×) es Álgebra de Boole.

a) Dado el conjunto de los divisores de un número natural n (Divisors[n]) , y las operaciones mínimo común múltiplo (LCM) y máximo común divisor (GCD), preguntamos si la terna es Álgebra de Boole tipeando:

IsBooleanAlgebraQ[Divisors[77],LCM,GCD]

Respuesta: True

IsBooleanAlgebraQ[Divisors[36],LCM,GCD]

Respuesta: False

IsBooleanAlgebraQ[Divisors[30],LCM,GCD]

Respuesta: True

Observando las respuestas dadas por el Mathematica, surge una buena pregunta es: ¿para qué valores naturales n, el conjunto de los divisores de n es Álgebra de Boole? Con el comando FactorInteger encontraremos la respuesta:

FactorInteger[77]

Respuesta: {{7, 1}, {11, 1}}

FactorInteger[36]

Respuesta: {{2, 2}, {3, 2}}

FactorInteger[30]

Respuesta: {{2, 1}, {3, 1}, {5, 1}}

b) Dado un conjunto finito C y las operaciones binarias Unión e Intersección definidas en el Conjunto de Partes de C, la terna es Álgebra de Boole. En efecto, si C={a,b,c,d}, el comando Subsets[{a,b,c,d}] nos da una lista con todos los subconjuntos de C y preguntamos:

IsBooleanAlgebraQ[Subsets[{a,b,c,d}],Union,Intersection]

Respuesta: **True**

c) Otro ejemplo interesante es el de los valores de verdad {True, False} que constituyen Álgebra de Boole con las operaciones disyunción (Or) y conjunción (And).

IsBooleanAlgebraQ[{True,False},Or,And]

Respuesta: **True**

Tablas de Verdad: Dada una función booleana, obtenemos su tabla de verdad mediante el comando TruthTable.

a) La función $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \times (x_1 + \neg x_3)$ posee la siguiente tabla:

TruthTable[(#1||#2&&(#1||!#3))&,3]

Respuesta:

{{0,0,0,0},{0,0,1,0},{0,1,0,1}, {0,1,1,0}, {1,0,0,1},{1,0,1,1},{1,1,0,1}, {1,1,1,1}}

El comando TableForm nos permite mejorar la presentación anterior al mostrarla en forma de tabla. Además, si a la función TruthTable se le coloca True como tercer argumento, cada una de las columnas tendrá su encabezado.

TruthTable[(#1||#2&&(#1||!#3))&,3,True]//TableForm

Respuesta:

x1	x2	x3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Observamos que para cargar cada función anterior, las variables xi las anotamos como #i, el símbolo & indica que el argumento previo encerrado entre paréntesis es una función y el número posterior indica la cantidad de variables .

b) Mostramos la tabla de verdad de la función implicación lógica, escribiendo:

TruthTable[Implies,2,True]//TableForm

Respuesta:

x1	x2	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

c) Mostramos la tabla de verdad de la conjunción, para 3 variables, escribiendo:

TruthTable[And,3,True]//TableForm

Respuesta:

x1	x2	x3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Formas Canónicas: Dada una función booleana, podemos obtener sus primera y segunda formas canónicas usando las funciones FirstCanonicalForm y SecondCanonicalForm.

a) Por ejemplo, la función $f(x_1,x_2,x_3)= x_1 + x_2 \times (x_1 + \neg x_3)$ tiene las siguientes formas canónicas:

FirstCanonicalForm[(#1||#2&&(#1||!#3))&,3]

Respuesta:

x1 && x2 && x3 || x1 && x2 && !x3 || x1 && x3 && !x2 || x1 && !x2 && !x3 ||

|| x2 && !x1 && !x3

SecondCanonicalForm[(#1||#2&&(#1||!#3))&,3]

Respuesta: (x1 || x2 || x3) && (x1 || x2 || !x3) && (x1 || !x2 || !x3)

b) También podemos utilizar estas funciones para obtener las formas canónicas de aquellas ya definidas en el Mathematica. Por ejemplo, para obtener las dos formas canónicas de la disyunción excluyente para 3 variables escribimos:

FirstCanonicalForm[Xor,3]

Respuesta:

x1 && x2 && x3 || x1 && !x2 && !x3 || x2 && !x1 && !x3 || x3 && !x1 && !x2

SecondCanonicalForm[Xor,3]

Respuesta:

(x1 || x2 || x3) && (x1 || !x2 || !x3) && (x2 || !x1 || !x3) && (x3 || !x1 || !x2)

c) Si la función está definida por medio de su tabla, también podemos obtener sus formas canónicas interpretando cada renglón de la tabla como una lista y a la función como una lista de listas. Por ejemplo:

FirstCanonicalForm[{{0,0,0,1},{0,0,1,1},{0,1,0,0},{0,1,1,0},{1,0,0,1},{1,0,1,0}, {1,1,0,1},{1,1,1,1}}]

Respuesta:

x1 && x2 && x3 || x1 && x2 && !x3 || x1 && !x2 && !x3 || x3 && !x1 && !x2 ||

|| !x1 && !x2 && !x3

SecondCanonicalForm[{{0,0,0,1},{0,0,1,1},{0,1,0,0},{0,1,1,0},{1,0,0,1},{1,0,1,0}, {1,1,0,1},{1,1,1,1}}]

Respuesta: (x1 || x3 || !x2) && (x1 || !x2 || !x3) && (x2 || !x1 || !x3)

Simplificación: Otra de las operaciones que podemos realizar para las expresiones booleanas es su simplificación. Para ello, utilizamos la función LogicalSimplify.

a) Para simplificar la expresión $x_1 \times (\neg x_2 + x_3) + x_2$ escribimos:

LogicalSimplify[x1&&(!x2||x3)||x2]   Respuesta: x1 || x2

b) La expresión $x_1 + x_1 \times x_2 + \neg x_1 \times x_3 \times \neg x_3$ se simplifica como:

LogicalSimplify[x1||x1&&x2||!x1&&x3&&!x3]   Respuesta: x1

c) La función LogicalSimplify también opera con las tautologías y las contradicciones, en cuyo caso devuelve True o False, respectivamente. Por ejemplo:

LogicalSimplify[Implies[!(x1||x2),!x1]]   Respuesta: True

LogicalSimplify[x1&&!x1]   Respuesta: False

Para finalizar nuestra exposición haremos una reflexión final acerca de *Evaluación de las actitudes de los estudiantes:* Para comenzar, podemos decir que si se comprenden las actitudes como aquellas tendencias a actuar de una manera determinada, una actitud positiva lleva a que el alumno construya patrones para apreciar la matemática, su valor y su contenido. Si bien la incidencia de los componentes actitudinales, cognitivos, afectivos y conductuales es variable, la importancia que juega el entorno social y cultural previos de profesor y de sus alumnos es fundamental. Creemos que si nos enfrentamos con actitudes negativas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, éstas pueden constituirse en uno de los principales problemas a enfrentar para el logro de intervenciones educativas eficaces. Las reacciones emocionales contrarias, afectarán no sólo los logros cognitivos presentes sino que también podrán provocar resistencia para su utilización en la futura vida profesional. Y esta postura de resistencia podrá invalidar los esfuerzos docentes para trasmitir el valor y aplicación de esta cada vez más preciada Matemática Discreta.

Por consiguiente, favorecer el desarrollo de actitudes positivas hacia la disciplina debe convertirse en una de las primeras metas a lograr si se desea generar conocimientos sólidos y perdurables.

¿Si damos "buenas clases" ya hemos resuelto el problema?. Parece que eso es una condición necesaria pero no suficiente. Porque una actitud positiva está relacionada con formar en las "ganas por aprender", con la autonomía del pensamiento, la aceptación de cambios de comportamiento, la mejora en las ideas y concepciones, la curiosidad, el interés por la búsqueda de la verdad, el compromiso con la tarea, etc.

Como las actitudes se generan a partir de la valoración que se haga del objeto al que se dirigen, cada materia concreta generará una disposición actitudinal acorde con: el contenido que se imparte (componente cognitiva), las relaciones docente alumno que se generen en el espacio de interacción (aula, taller, laboratorio, etc.), y el poder de dicho intercambio para generar acciones. Así, el alumno desarrollará actitudes positivas o negativas hacia determinada materia no sólo en función de su contenido sino también en función del ambiente que se genere durante el proceso de intervención, y de las actividades que se propongan. ¿Quiere decir esto, por ejemplo, que si se proponen buenas actividades usando la tecnología y del computador, éstas constituyen la panacea al problema de los aprendizajes y de las actitudes? La respuesta es No. Todo es necesario, pero los problemas en el aprendizaje aún no están resueltos.

Las encuestas realizadas a nuestros alumnos acerca del valor que asignan al uso de la computadora nos permiten sintetizar que la consideran un elemento útil, motivador y estimulante, que les da confianza y seguridad, que les da libertad para hacer y proponer y que les resulta agradable. Usar la computadora favorece la interacción, la experimentación, el descubrimiento de semejanzas y diferencias y la transferencia de estrategias a nuevas situaciones, pero por sí sola no es suficiente para aprender. Sin embargo su uso es muy aconsejable. Estas opiniones no se pueden generalizar más allá de la realidad estudiada. Pensamos que los resultados pueden ser transferidos en términos generales, a situaciones contextuales similares, pero no a relaciones particulares. Desde esta perspectiva los resultados obtenidos pueden ser considerados más que nada como generadores de hipótesis de trabajo y no como conclusiones.

No pretendemos resolver los problemas que plantea el aprendizaje de los contenidos disciplinares, pero notamos que la creación de un ambiente favorable de interacción y de una buena disposición para actuar habían generado una relación de interioridad, una relación donde el conocimiento no era sólo un factor incorporado al docente y donde la relación pedagógica se había transformado en social y afectiva a la vez que cognitiva.

Nota: los interesados en las guías de estudio completas y paquetes creados en el Mathematica pueden solicitarlos a las siguientes direcciones electrónicas.

mtoso@satlink.com.ar

mtoso@frsf.utn.edu.ar

imelgrat@frsf.utn.edu.ar

Bibliografía

Grimaldi, Ralph. "Matemática Discreta y Combinatoria"- Addison Wesley. 1.997

Liu, C.L. "Elementos de Matemática Discreta". McGraw Hill. 1.995.

Meader, Roman. "Programing in Mathematica". Addison Wesley Company. 1.992

Steven Skiena. "Implementing Discrete Mathematics". Addison Wesley Company. 1.990

Sistemas de representación en el ambiente computacional suministrado por la TI-92

José Luis Lupiáñez Gómez
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Introducción

Las primeras aplicaciones de las calculadoras se limitaban básicamente a operar con números, y por lo general su utilidad carecía de otra trascendencia. Ya entre 1974 y 1975, se abrieron nuevas puertas que posibilitaban acciones hasta entonces insospechadas con la aparición de las calculadoras científicas, que permitían realizar actividades que usualmente estaban limitadas al papel y al lápiz. Pero fue a mediados de los ochenta cuando llegó al revolución con la aparición de las calculadoras graficadoras.

Actualmente, algunas de ellas permiten establecer redes bi-direccionales entre distintas representaciones de objetos y relaciones matemáticas, que permiten manipularlas activamente, y suministran extraordinarias herramientas de trabajo en educación matemática. Las tradicionales representaciones analíticas se han visto ampliamente complementadas con los sistemas de representación ofrecidos por estas tecnologías, y en el caso particular de la TI-92, estas posibilidades resultan francamente enriquecidas.

En este trabajo, se analiza el papel de esta calculadora como herramienta de mediación en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, y se ejemplifican algunas de las ventajas que ofrece el uso de la TI-92 en el aula de matemáticas, como son la posibilidad de afrontar un problema de cálculo de diferentes formas bajo el entorno DERIVE de la calculadora, aprovechando las conexiones entre representaciones analíticas, gráficas y tabulares; la ejecutabilidad de las representaciones computacionales de CABRI, y la capacidad para indagar en técnicas propias de resolución de problemas por parte de los estudiantes.

Sobre las Representaciones

El papel de las representaciones dentro del marco de la educación matemática tiene una importancia muy relevante. El NCTM dentro del borrador de sus Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000 (NCTM, 1998), señala que:

"*Los programas de instrucción matemática, deberían enfatizar las representaciones matemáticas para fomentar la comprensión de las matemáticas de forma que todos los estudiantes:*

- *Creen y usen representaciones para organizar, memorizar y comunicar ideas matemáticas.*
- *Desarrollen un repertorio de representaciones matemáticas que puedan usarse de forma útil, flexible y apropiada.*
- *Usen representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.* "

Pero junto a la importancia que cobran los sistemas representacionales en educación matemática, aparece una idea que es, cuando menos, paradójica: es muy importante, y complicado, no confundir el objeto matemático con ninguna de sus representaciones, pero al mismo tiempo, es obvio que no puede hablarse de ese objeto sin emplear de algún modo una o varias de esas representaciones.

Esta cualidad, distingue a los objetos matemáticos de cualesquiera otros. En la enseñanza de la biología, por ejemplo, un dibujo en la pizarra de un árbol, es una representación icónica de árboles reales, mientras que en matemáticas, el dibujo de un triángulo pintado en la pizarra, es la representación de una idea abstracta (Damerow, 1996).

Las representaciones están basadas en una importante función de la mente que Piaget bautizó como *función simbólica*. Ésta, es la habilidad para concebir algo y representarlo; objetos reales actuando como símbolos pueden representar ideas abstractas. Y es la abstracción un proceso constructivo esencial para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, lo cual constituye una diferencia significativa entre esta disciplina y otras como la física o la química, por ejemplo.

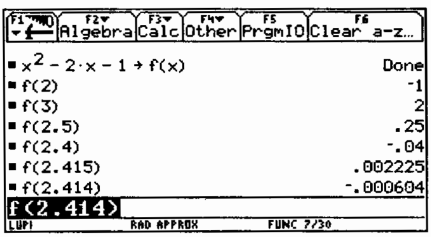
Una clasificación inicial de representaciones puede ser dividirlas en *externas* e *internas*. Las primeras abarcan todas aquellas representaciones que son susceptibles de ser percibidas por los sentidos, mientras que las internas, son imágenes mentales que el sujeto tiene de los objetos y relaciones que forman parte de su conocimiento.

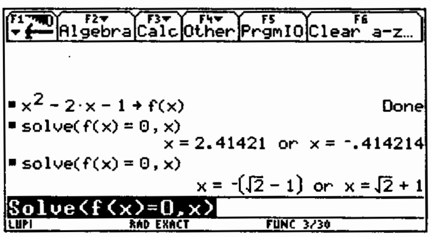
Pero ambos dominios, desde un punto de vista genético, no pueden verse como aislados entre sí, pues existen fuertes relaciones entre ellos: las representaciones externas son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y sus representaciones mentales, las cuales a su vez, se desarrollan según un proceso de interiorización de las representaciones externas (Duval, 1993).

Representaciones en Ambientes Computacionales

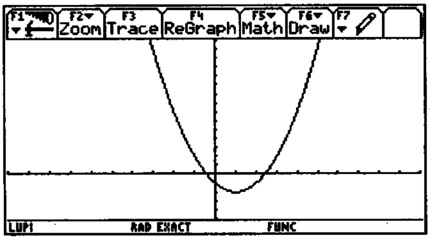
Trabajando en un ambiente computacional, se tiene acceso no sólo a un gran número de representaciones numéricas y gráficas, sino que además se facilita el traslado de unas a otras. Por ejemplo, si estudiamos la búsqueda de los ceros de una función de segundo grado, con la ayuda de la calculadora TI-92, esta es una tarea que puede afrontarse de varias formas.

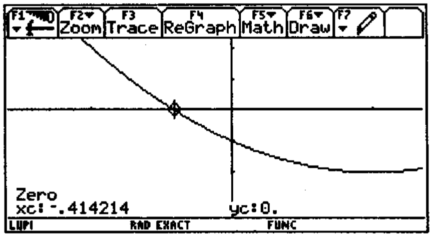
La más inmediata, es usar el comando SOLVE, que nos otorga la raíz de la ecuación correspondiente en fracciones de segundo, si bien, no es el modo más provechoso desde el punto de vista didáctico. Otra opción que permite el poder de cálculo de la máquina, es la aproximación numérica a partir de la definición de la función. En ambos casos, las acciones se realizan desde la pantalla HOME de la TI-92.



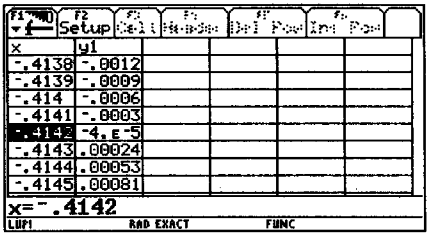


Posibilidades más interesantes nos las brinda la representación gráfica de la función, a partir de la cual podemos ir aproximando la raíz usando los comandos ZOOM y TRACE. Con el primero vamos ampliando la zona de la parábola que más nos interesa, y el segundo va recorriendo la traza de la función indicando el valor de abcisa y ordenada por el que está pasando. Desde la pantalla de graficación, también es ejecutable un comando llamado ZERO, que nos da el corte con el eje con sólo indicarle el intervalo en el que se produce un cambio de signo.





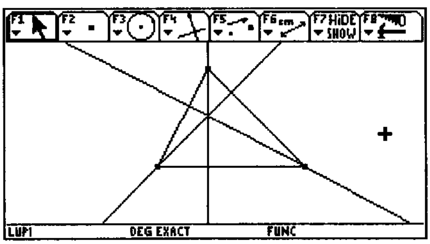
Otra importante cualidad de la TI-92 es la representación tabular; con la orden TABLE, se nos muestra la tabla de valores de la función, que por defecto, va generando las imágenes de los números enteros. Pero dado que podemos elegir el punto de inicio de esa tabla, y la variación con la que deseamos que vaya evaluando, es sencillo ir aproximando los ceros de la función con la precisión que deseemos, como queda ilustrado en la figura de la página siguiente.

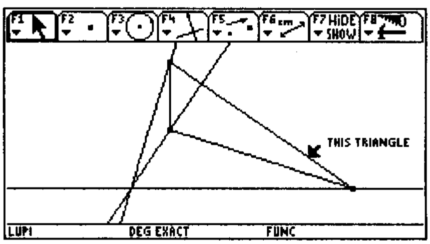


x	y1
-.4138	-.0012
-.4139	-.0009
-.414	-.0006
-.4141	-.0003
-.4142	-4.E-5
-.4143	.00024
-.4144	.00053
-.4145	.00081

De manera somera, se han descrito cinco formas diferentes de abordar con la calculadora un problema que, por tradición, se resolvía sólo usando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado. Por otra parte, podemos hablar de la calculadora como instrumento de mediación en la formación y estructuración del conocimiento matemático del estudiante, en el momento en que le permite manipular los objetos matemáticos de una forma que no es imaginable sin la ayuda de estas tecnologías. Cuando un estudiante introduce una representación analítica de un objeto matemático en la máquina, ésta le devuelve una representación visual del objeto, que es *ejecutable*, por lo que esta respuesta puede verse como el objeto matemático en sí.

Para ejemplificar este hecho, se puede emplear el paquete geométrico CABRI que trae incorporada la TI-92. Si dentro de este programa representamos un triángulo, y trazamos sus alturas prolongándolas como rectas, observamos que se cortan en un punto. Pero no se trata de que hemos representado *un* triángulo, sino *cualquier* triángulo, pues podemos variarlo de forma, posición, medidas, etc., y se sigue viendo como las rectas señaladas antes, a pesar de variar, continúan cortándose en un punto.





Esto viene a destacar la idea de representaciones ejecutables que brindan estas herramientas, en contraposición a las representaciones estáticas tradicionales, con las que resulta cuando menos imposible visualizar ciertas propiedades de objetos matemáticos.

Estas tecnologías, alteran por tanto la naturaleza del conocimiento matemático, su estructura, la forma de construirlo e incluso la manera de legitimarlo (Moreno y Rojano, 1998). Como se ha señalado antes, las ideas y conceptos abstractos de las matemáticas se convierten en reales con el uso de la calculadora, en el sentido de que se pueden manipular, transformar, en definitiva *intervenir matemáticamente* en ellos.

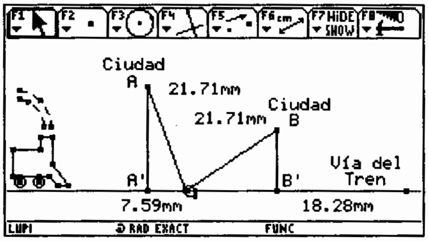
Toda acción humana, y todo conocimiento están mediados por un instrumento, ya sea material ó simbólico; la calculadora media en la construcción del conocimiento matemático y otorga significado a sus objetos y relaciones al proporcionar a los estudiantes diversas representaciones con las que pueden interactuar.

Pero el valor de esta tecnología en la escuela es aún mayor. Los estudiantes pueden explorar los objetos virtuales que las máquinas ofrecen, y contrastar la información recibida con sus propias concepciones, facilitando así el aprendizaje de los conceptos que estén estudiando. Estas actividades suministran al estudiante la posibilidad de construir su propio significado matemático de los objetos, y afrontar la resolución de una tarea de acuerdo a sus creencias, sin necesidad de suscribirse al método habitual o estándar.

Una muestra de esto es la siguiente experiencia. Durante un curso para futuros docentes de matemáticas de Secundaria (Bedoya, 1998) en el que se estudiaba el valor didáctico de la TI-92, el profesor planteó el siguiente problema:

"*Dos ciudades A y B están a 25 Km. y 860 metros de distancia en línea recta. Al mismo tiempo, A dista, también en trayectoria rectilínea, 20 Km. 340 metros de una vía de tren, mientras que B está a 11 Km. 720 metros de dicha vía. Los alcaldes de A y B van a construir una estación de ferrocarril en la vía, pero cada uno quiere que esté lo más cerca posible de su ciudad. ¿Dónde habría que construir la estación para satisfacerlos a ambos?*"

El profesor recordó que este problema normalmente se resolvía con técnicas de optimización, que obviamente precisaban de nociones de derivabilidad, o bien mediante cálculo vectorial, pero que con la calculadora, si representábamos gráficamente la función distancia, podíamos hallar la solución calculando el mínimo de esa función a partir de su gráfica, con lo que no se precisaban conocimientos específicos de derivación ni de geometría. Pero no sólo eso; se consiguió llegar a reducir el problema a un cambio de escala, y con las posibilidades de representación y ejecutabilidad del programa CABRI de la calculadora, la cuestión quedaba zanjada de una forma eficiente. Un paso importante en esta estrategia era que se había conseguido descontextualizar la situación, permitiendo así emplear técnicas que en principio ni se habían considerado.



Los procesos de descontextualización son una aspiración en educación matemática; persiguen que un conocimiento adquirido pueda salir de su contexto, y emplearse en otras acciones. A pesar de que no es posible descontextualizar totalmente un conocimiento, lo que se pretende es que se relacionen entre sí, y puedan aplicarse en diferentes situaciones.

El Papel del Profesor

Sin duda, el eje primordial en torno al cual gira la utilidad y practicidad de las calculadoras es el estudiante, pero ineludiblemente es el docente el que guía su aprendizaje. Un paso relevante en la formación del profesor, es que sea consciente de su propia concepción de las matemáticas, y que debe aceptar que sus alumnos tendrán las suyas propias, para trabajar a partir de ellas, modelarlas, formalizarlas, y no desecharlas, imponiendo sus propias creencias. Y la tecnología es una herramienta útil para explorar las formas de pensamiento de los alumnos.

A través del trabajo que los estudiantes realizan con el apoyo de las calculadoras, el profesor puede acercarse a su forma de pensamiento, sus creencias, sus carencias y sus dificultades. Con esta información, el educador matemático puede alterar o cambiar alguna característica de sus métodos de enseñanza, haciendo así de su labor, una actividad autorreguladora, plausible de ser alterada, y no un patrón de trabajo inamovible que no se adapte a las necesidades de sus alumnos.

Ahora bien, no se puede esperar que tantas y tan complejas tareas puedan ponerse en práctica de forma espontánea, sin adecuar previamente la formación didáctica del profesor y realizar importantes ajustes en el currículum. Cualquier cambio en el sistema educativo pasa por el educador en relación a sus conocimientos, a su metodología, y a sus métodos de evaluación, y por eso debe estar muy en consideración la formación que reciba; aunque como último eslabón del proceso de enseñanza, el docente debe tomar conciencia propia de la necesidad de cambio.

Referencias

BALACHEFF N., KAPUT, J. (1996) Computer-Based Learning Environments in Mathematics en BISHOP, A. et al. (eds.) (1996) International Handbook of Mathematics Education. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

BEDOYA, E. (1998) Calculadoras Gráficas y Enseñanza de las Funciones en Secundaria. Curso impartido a través de la Universidad de Granada

DAMEROW, P. (1996) Abstraction and Representation. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

DUVAL, R. (1993) Sémiosis et Noésis. Conférence A.P.M.E.P.I.R.E.M.

FEY, J., HIRSCH, C. (Ed.) (1992) Calculators in Mathematics Education. Reston (Virginia): NCTM.

MORENO, L. (1998) History of Calculus and Technology. The Construction of Mathematical Meaning. CIAEM 50, Neuchâtel.

MORENO, L., ROJANO, T. (1998) Las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas y Ciencias en *Avance y Perspectiva,* Vol 17, Mayo-Junio 1998.

NCTM (1998) Principles and Standards in School Mathematics: Discussion Draft. Reston (Virginia): NCTM.

RICO, L. (Coord.) (1997) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori.

Ecuaciones Diferenciales con la TI 89/92 plus

Edison De Faria Campos (edefaria@cariari.ucr.ac.cr)
Universidad de Costa Rica

Resumen

El objetivo de este taller es mostrar el potencial de la calculadora graficadora con sistema algebraico computacional (CAS) TI89/92plus para resolver algunos modelos matemáticos representados por ecuaciones diferenciales de primer y segunda orden, así como sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, permitiendo que el sujeto utilice dinámicamente distintas representaciones matemáticas: gráfica, simbólica y numérica, al plantear la ecuación que modela el fenómeno, bosquejar el campo direccional, obtener la solución numérica, analítica, o graficar el diagrama de fase. Utilizaremos generadores de números aleatorios para simular soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias – métodos de Monte Carlo.

Introducción

La modelación matemática es de importancia fundamental en el aprendizaje de la matemática y nos permite reflexionar y explicar fenómenos que pueden ser simulados bajo condiciones favorables. La simulación de fenómenos físicos junto con la modelación matemática, representa un elemento muy importante para la construcción de conceptos matemáticos, y las nuevas calculadoras graficadoras programables permiten crear un ambiente de experimentación dentro del aula, funcionando como un agente didáctico dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje [1], [2], [3]. Gómez [4], reflexiona que:

> *La tecnología no es la solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La enseñanza no se puede automatizar y el profesor no se puede reemplazar. No obstante, las nuevas tecnologías abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas difíciles de reproducir con los medios tradicionales como el lápiz y el papel. En estas experiencias matemáticas el estudiante puede realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático.*

De acuerdo a Balacheff [5], el aprendizaje es un proceso que tiene lugar en la interacción entre el sujeto(estudiante), el medio y los agentes didácticos. La dimensión cognitiva es el aspecto relevante del sujeto desde el punto de vista del sistema y el medio es un sistema antagonista del sujeto.

El medio está en capacidad de actuar y de reaccionar a las actuaciones del sujeto y el conocimiento es una propiedad del sujeto en situación y en interacción con el sistema antagonista.

La utilización de la tecnología permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos y dichos sistemas son un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos y sus relaciones y de las actividades matemáticas que éste ejecuta cuando realiza tareas que tienen que ver con esos objetos.

1. Modelos de poblaciones

Suponga que tenemos una población de N(t) individuos en el instante t, y que la tasa relativa de crecimiento instantáneo r(N) de la misma es una función decreciente de N que cumple las siguientes propiedades:

- Si N = 0 entonces r = c (constante)
- Si N = N_∞ entonces r = 0 (N_∞ representa la capacidad del ambiente o el limite de crecimiento)

La función más simple que satisface las condiciones anteriores es la lineal:

$$r(N) = c\left(1-\frac{N}{N_\infty}\right)$$

Como

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)\Delta t}$$

representa la tasa relativa de crecimiento de **N** durante el intervalo de tiempo [t, t + Δt], entonces la tasa relativa instantánea de crecimiento de **N** es

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)\Delta t}=\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}=r(N)$$

y por lo tanto, la ecuación diferencial que modela nuestra población es la *ecuación logística* (Verhulst, 1838)

$$\frac{dN}{dt}=c\left(1-\frac{N}{N_\infty}\right)N$$

La calculadora TI89 o bien la TI92 plus nos permite analizar las soluciones de ecuaciones como la anterior, desde múltiples sistemas de representaciones:

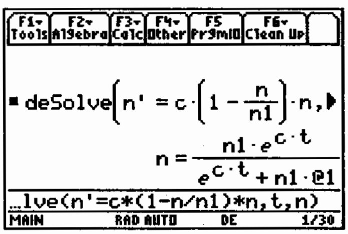
Solución analítica

El comando *deSolve()* permite resolver analíticamente muchos tipos de ecuaciones diferenciales de primer o de segunda orden, con o sin condiciones iniciales. Para las ecuaciones de primer orden, se utiliza la siguiente sintaxis:

deSolve(ecuación diferencial [and condición inicial], varindep, vardep) varindep denota la variable independiente, mientras que vardep se utiliza para la variable dependiente. Para nuestra ecuación logística, si queremos la solución general basta escribir

$$dSolve\left(N'=c\left(1-\frac{N}{N_\infty}\right)N,t,N\right)$$

pues t es la variable independiente y N la dependiente. El comando *deSolve()* se encuentra en el menú de la pantalla principal (HOME). Seleccione el comando en C: deSolve y presione ÷. El símbolo prima en N' se encuentra sobre la tecla ℑ, y se accesa mediante la combinación de teclas 2 ℑ. Después de digitar la expresión para deSolve presione ÷.



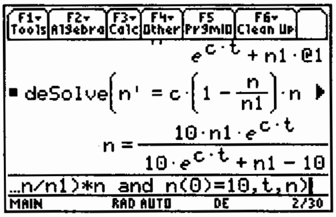
Hemos utilizado n1 en lugar de N_∞. Observe en pantalla la solución general de la ecuación logística

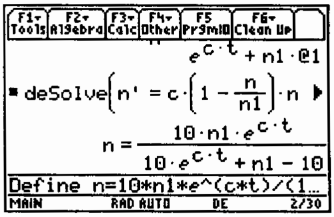
$$N = \frac{N_\infty e^{ct}}{e^{ct} + N_\infty @1}$$

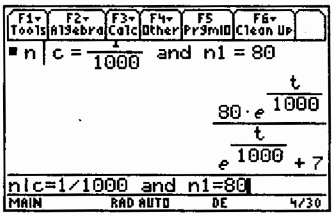
con la constante de integración @1. Podríamos haber determinado una solución particular que cumple por ejemplo la condición inicial N(0)=10

$$dSolve\left(N' = c\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)N \text{ and } N(0) = 10, t, N \right)$$

así como definir una función para guardar la respuesta y evaluarla en valores particulares de los parámetros c y N_∞.

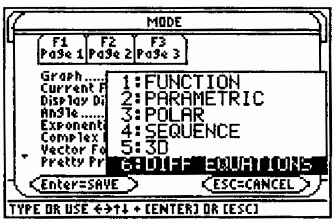


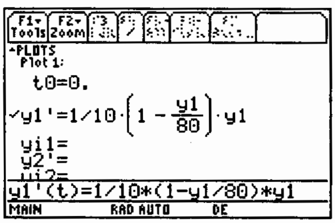




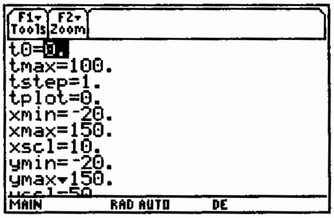
Campo de pendientes y curva solución

Para trazar el campo de pendientes, necesitamos cambiar el modo de graficar. Presione la tecla 3 y seleccione la opción 6:DIFF EQUATIONS para Graph. Presione ∞# para ingresar al editor de ecuaciones, y digite la ecuación logística, con los valores 1/10 para c y 80 para n1. No utilizaremos condición inicial por ahora.

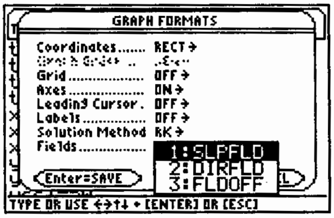


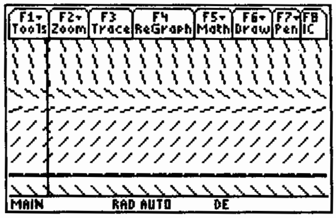


Presione ∞∃ y utilice los siguientes valores para los rangos de los parámetros t, x, y:



Presione :9 Format o bien ∞ ⊆ y seleccione SLPFLD para Fields. Pulse ∞% para obtener el campo de pendientes para los valores particulares de los parámetros.





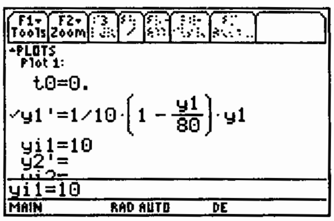
Experimente digitando distintos valores para la condición inicial yi1, desde el editor de ecuaciones. Experimente con una lista de condiciones iniciales, como por ejemplo: yi1={0, 20, 50, 100}. Posteriormente utilice el menú en la pantalla gráfica, para seleccionar condiciones iniciales interactivamente. Digite un valor para t, presione ÷, digite un valor para y1 y presione ÷. Experimente mover el cursor a una posición en que se quiere observar la curva solución que pasa por tal punto, después de presionar . Finalmente, experimente con otros valores de los parámetros c y N_∞.

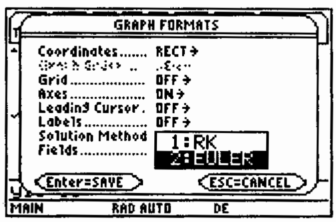
Solución numérica

Ahora buscaremos la solución para el problema con condición inicial:

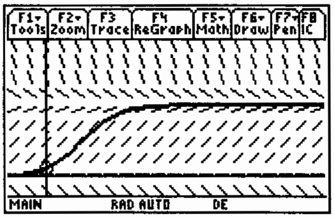
$$N' = 0.1\left(1 - \frac{N}{80}\right)N \quad con \quad N(0) = 10$$

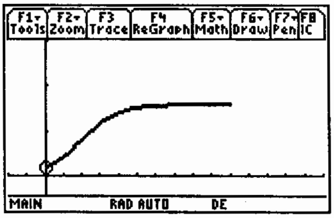
Digite la ecuación y la condición inicial en el editor de ecuaciones ∞# y presione 9:Format, o bien ∞⊆ para determinar el formato gráfico de la solución numérica del problema.





Utilice Runge-Kutta como método de solución, y SLPFLD como campo. Presione ∞% para obtener la gráfica de la solución del problema con condición inicial. Repita el procedimiento, pero seleccionando Euler como método de solución, y experimente con FLDOFF como campo, para que el campo de pendientes no sea desplegado en pantalla.





Utilizando tablas, podemos comparar las soluciones dadas mediante los métodos de Runge-Kutta, de Euler y analítico. Presione ∞& digite el valor 10 para Δtbl, y ∞϶ para desplegar la tabla.

Para la solución analítica, cambie el modo gráfico a función 3 Function, utilice el comando *deSolve*, copie y pegue la solución a la primera función disponible en el editor de ecuaciones.

t	y1
0.	10.
10.	22.373
20.	41.067
30.	59.316
40.	70.964

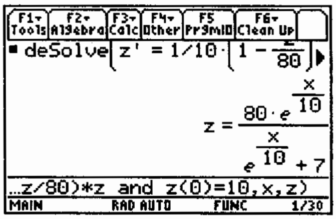
t=40.

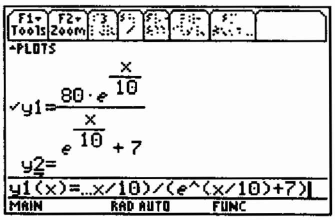
Runge-Kutta

t	y1
0.	10.
10.	21.899
20.	40.25
30.	58.872
40.	70.939

t=0.

Euler





x	y1
0.	10.
10.	22.377
20.	41.082
30.	59.325
40.	70.909

x=0.

Solución Analítica

Ecuación logística y depensación crítica

Comparemos los dos siguientes modelos poblacionales dados por ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dN}{dt} = 3.2\left(1 - \frac{N}{10}\right)N \qquad \text{(ecuación logística)}$$

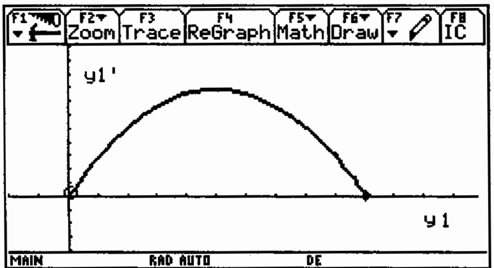
$$\frac{dP}{dt}=\begin{cases}4(P-2)P & si\ \ 0\le P<2\\ 5\left(1-\dfrac{P}{10}\right)(P-2) & si\ \ 2\le P\end{cases}$$ (depensación crítica)

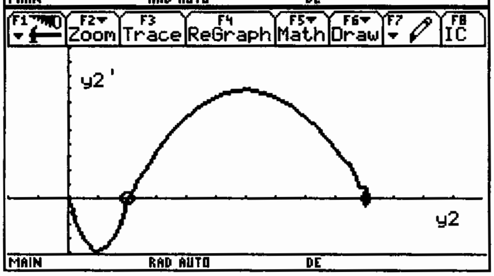
con condiciones iniciales: N(0)=0.1, P(0)=0.1

y1' = 3.2(1 – y1/10)*y1
yi1 = .1
y2' = when(y2 < 2, 4(y2 – 2)*y2, 5(1 – y2/10)*(y2 – 2))
yi2 = .1

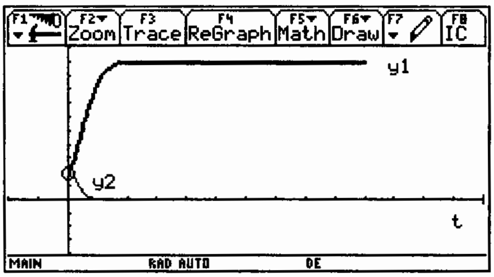
Con ∞⊆ seleccione FLDOFF para Fields, Seleccione tMin = 0, tMax = 10, tStep = .1, tPlot = 0, xMin = -2, xMax = 14, xScl = 1, yMin = -4, yMax = 11, yScl = 1, ncurves=0, diftol=.005

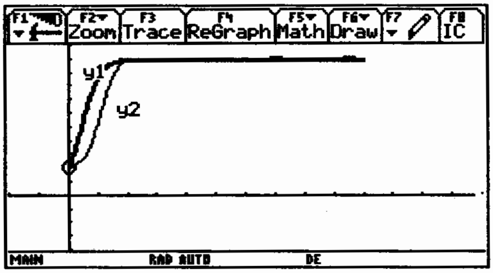
En el editor de ecuaciones, Axes, seleccione CUSTOM para Axes: con y1 en el eje x, y1' en el eje y. ∞ para graficar. Después cambie los ejes para que quede y2 en el eje x, y2' en el eje y, pero cambiando las condiciones iniciales para yi1={1.99,2.01}, yi2={1.99,2.01} que se encuentran a la izquierda y a la derecha de P=2.





Los diagramas de fase de los sistemas autónomos muestran que y1' > 0 si 0 < y1 < 10 mientras que y2' < 0 para 0 < y2 < 2 exhibiendo características de extinción de la especie. Si ponemos TIME para Axes: podemos visualizar este comportamiento.





Curvas solución para yi1=yi2=1.99 y 2.1 respectivamente.
La ecuación forzada de Duffing

$$mx''+cx'+kx+\beta x^3 = F_0\cos(wt)$$

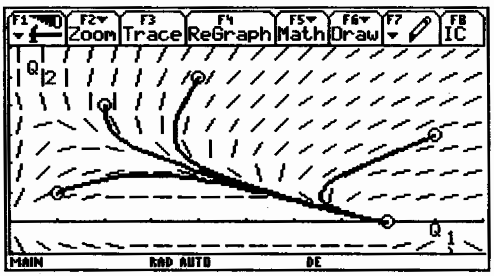
m = c = β = w = 1, k = -1, Condiciones iniciales x(0)=1, x'(0)=0, Sea x' = y

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 - y + F_0 \cos t \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

x(t) en el eje x, y(t) en el eje y. Experimentar con valores F_0=0.7,0.75,0.8, observar la trayectoria en el plano de fase. Graficar las curvas solución en el plano tx (CUSTOM) para observar el período y la frecuencia de la solución. Modelo de especies que compiten por un mismo recurso (Lotka, Volterra)

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(\frac{M_\infty - N - aP}{M_\infty}\right),\quad \frac{dP}{dt} = sP\left(\frac{\tilde{M}_\infty - P - bN}{\tilde{M}_\infty}\right)$$

Se reducen a la ecuación logística en la ausencia de la otra población (N=0 o P=0). Analice el modelo para los parámetros r=2, $M_\infty = 8$, a=1.5, s=1.7, $\tilde{M}_\infty = 4$, b=0.8, direction field, xMin=0, xMax=10, yMin=-1, yMax=6.



El modelo SIR

S = clase susceptible
I = clase infectada
R = clase recuperada (o removida)

Este es un modelo de propagación de una epidemia no fatal, y supondremos que:

S+I+R=N (población total) es constante durante el intervalo de tiempo bajo consideración.

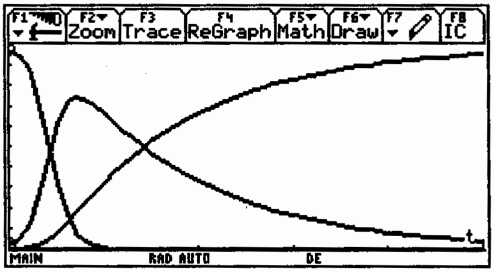
Individuos pasan de la clase S a la I a una razón proporcional al producto de S por I; de la clase I a la R a una tasa proporcional a I. Entonces las ecuaciones para el modelo son las siguientes:

$$\frac{dS}{dt} = -kSI, \quad \frac{dR}{dt} = rI, \quad \frac{dI}{dt} = kSI - rI$$

Como dN/dt=0, es suficiente considerar la primera y la tercera ecuación. Utilizaremos y1 para S, y2 para I. Además incluiremos y3 para R.

Analizar el modelo para los valores de los parámetros:

k = 0.1, r = 0.7, yi1 = 98, yi2 = 2, yi3 = 0, FldOff, tMin=0, tMax=10, tStep=0.1, tPlot=0, xMin=0, xMax=10, xScl=1, yMin=0, yMax=100, yScl=10, difTol=0.001; TIME para ejes.



Resolviendo una ecuación diferencial de tercer orden

La Ti89/92plus no resuelve directamente en forma analítica una ecuación diferencial ordinaria de orden mayor que dos. Lo que hay que hacer con una ecuación de orden mayor que dos es convertirla en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo, la ecuación

$$y''' + y'' - 2y' + y = x * \cos(x) \quad con \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 1$$

se transforma en el sig uiente sistema, mediante la sustitución $y=y_1$, $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_3$

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = x * \cos(x) - y_1 + 2y_2 - y_3 \end{cases}$$

Como la solución de esta ecuación de tercer orden es precisamente y_1 entonces tenemos que seleccionar solamente y_1 en el editor de ecuaciones. Utilice para desactivar todas las otras funciones. Con 9:Format, o bien ∞⊆ seleccione FLDOFF para Fields (no podemos utilizar las otras opciones para ecuaciones de orden mayor que 2), y TIME para ejes en el editor de ecuaciones.

Conclusión

La calculadora TI89/92plus es un excelente apoyo didáctico en el proceso enseñanza-aprendizaje, pues nos permite interactuar dinámicamente con múltiples representaciones de objetos matemáticos, modelar y simular situaciones que no podemos o no debemos de experimentar en un laboratorio. Existe un grande potencial en ellas para que los estudiantes puedan experimentar, conjeturar, verificar y contextualizar las matemáticas.

Referencias

De Faria, C. (1997). Aplicaciones de la calculadora TI92 al cálculo. *Memoria V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas*. Liberia, Costa Rica.

Bauldry W., Ellis W., Fiedler J., Giordano F., Judson P., Lodi E., Vitray R., West R. (1997). *Mathematics and Modeling*. Addison Wesley

TI92 Plus Module: A Supplement to the TI92 Guidebook (1998). Texas Instruments.

Gómez P. (1998). Tecnología y educación matemática. *Revista de Informática Educativa*. Vol. 10, No. 1, Colombia.

Balacheff, N.; Kaput, J.J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics.

Bishop A., Clemens K.; Keytel Cl; Kilpatrick J.; Laborde C. (Eds). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht:Kluwer.

Algunas ideas sobre el uso de métodos participativos de enseñanza y asistentes matemáticos en temas de la asignatura análisis matemático i para funciones de una variable real.

María de los Ángeles González Peñalver
Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería Civil-ISPJAE Habana
Cuba

Resumen

En este trabajo se expresan las formas en que se estudiaron diferentes contenidos de la Asignatura "Cálculo Diferencial e Integral 1" de la Disciplina de Matemática de Ingeniería Civil y "Matemática 1" de la Carrera de Hidráulica, utilizando diferentes programas de Computación, como asistentes matemáticos, con el propósito de organizar el trabajo independiente de los estudiantes y lograr su motivación a través de la relación de la asignatura con la computación, ya que como medio de enseñanza cumple su propósito pues es una forma amena y eficaz que contribuye a fijar los conocimientos de la asignatura.

En la estructura de dichos contenidos se implementaron los métodos y técnicas participativas que permiten un mayor y mejor desarrollo del proceso docente educativo en cuanto a la actividad participativa, creadora e investigativa de los alumnos, apoyados con un asistente matemático que contribuye a hacer más atractivo dicho proceso.

Introducción

Desde el siglo pasado muchos de nuestros más eminentes pedagogos, expresaron sus ideas, sobre la necesidad de convertir la enseñanza en objetiva y científica, dejando a un lado el verbalismo y la retórica.

Mucho se ha logrado en aras de hacer realidad esta necesidad que nos impone la sociedad contemporánea, de formar profesionales con un elevado desarrollo de las habilidades intelectuales necesarias para enfrentarse a los problemas que día a día se les presentan.

En tales circunstancias, los profesores deberán entender que su función no es la de simples transmisores o actualizadores de conocimientos, sino de verdaderos entrenadores de habilidades intelectuales que propicien soluciones para que los alumnos sean capaces de simplificar la información de que disponen, de generar nuevas proposiciones, de aumentar su poder para manipular sus conocimientos.

Ante las limitaciones de los métodos y procedimientos de la enseñanza tradicional, sustentados en la actividad del docente y la pasividad del alumno, han surgido variadas respuestas que desde diferentes bases teóricas metodológicas, pretenden revolucionar la práctica de la enseñanza y el aprendizaje. Es así que se desarrollan los llamados métodos en grupos, dinámica grupal.

En la literatura pedagógica, aparecen estos métodos activos de enseñanza, que en general permiten conducir el proceso docente de forma tal, que los estudiantes tengan la posibilidad de valorar problemas e ir a la búsqueda de su solución , e intercambiar experiencias y argumentar decisiones, lo que también contribuirá al desarrollo de su expresión oral y escrita.

Estos métodos aplicados de forma consecuente a la formación por etapas de las acciones mentales, permiten el logro de mejores resultados en las acciones que se desean formar en los estudiantes.

Por otra parte, el profesor tiene la posibilidad de modelar tareas y simular situaciones que vinculen el objeto de estudio del tema con la futura actividad profesional del alumno, independientemente de la asignatura que se trate y de la etapa del proceso de asimilación por la cual esté transitando; lo que si requieren es de una gran creatividad y adecuada elaboración.

Objetivos

Con este trabajo, pretendemos mostrar la forma de impartir algunos conceptos de la asignatura Matemática I para estudiantes de Ingeniería Hidráulica y estudiantes de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería Civil del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, apoyándonos en la implementación de métodos activos de enseñanza y asistentes matemáticos, que permitan perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje y contribuir a alcanzar niveles superiores de desarrollo del conocimiento y habilidades.

Fundamentacion Teórica de los métodos participativos.

Los métodos y técnicas participativas, se definen como vías, procedimientos y medios sistematizados de la organización y desarrollo de la actividad del grupo de estudiantes sobre la base de conocimientos no tradicionales de las posibilidades cognoscitivas y afectivas.

La índole de las tareas a acometer, así como las condiciones en las que éstas se desarrollan, estimulan una mayor actividad cognoscitiva en los estudiantes, así como el desarrollo del espíritu investigativo, la independencia cognoscitiva , la creatividad y la capacidad de autoaprendizaje. Contribuye a romper con modelos paternalistas de educación, a que el papel del maestro en el proceso de enseñanza aprendizaje, no sea el del agente esencial principal, el que piensa y transmite de forma acabada los conocimientos, con poco margen para que el alumno elabore y trabaje mentalmente.

Ayuda a la constitución del grupo, al establecimiento de relaciones interpersonales y a un mayor conocimiento mutuo, estimulando la cooperación entre los participantes y agiliza las vías del desarrollo de la formación de valores del individuo.

Desarrollo

Nosotros vamos a desarrollar estos temas, utilizando las siguientes formas de enseñanza y métodos participativos.

Tema: Trazado de curvas

Actividad #	Forma de Enseñanza	Método a aplicar
1	Conferencia Orientadora	Método Situación. Conversación heurística. Búsqueda Parcial.
2	Clase Practica	Discusión en pequeños grupos. Discusión Conferencia.
3	Taller	Técnica de la rejilla. Discusión Plenaria.
4	Laboratorio de Computación.	Trabajo Independiente. Auto-Evaluación.

Contenidos del tema.

Extremos locales para funciones de una variable real. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. Puntos de inflexión. Intervalos de concavidad y convexidad. Asíntotas verticales y no verticales.

Nota: Aquí también se aplicarán conceptos estudiados en Temas anteriores, como: dominio de una función, interceptos con los ejes coordenados, función par e impar.

Objetivo del tema

El principal objetivo del Tema, es hacer que el estudiante pueda graficar una función, conociendo su expresión analítica y utilizando la información que le brinda la primera y segunda derivada y otros conceptos que se describen en el contenido. Que contribuya al desarrollo de aspectos formativos y de habilidades geométricas; además de servir de modelo matemático a variados fenómenos de la realidad.

Breve descripción de cada actividad.

Conferencia Orientadora. (Actividad #1)

Sumario.

* Concepto de extremos locales de funciones de una variable real.

* Determinación de extremos locales.

* Criterios de suficiencia para determinar extremos locales.

* Concepto de punto de inflexión.

* Determinación de puntos de inflexión.

* Criterio de suficiencia para la determinación de punto de inflexión.

* Asíntotas oblícuas. (Las asíntotas verticales y horizontales, ya se impartieron)

* Trazado de curvas.

En esta Conferencia, a partir de la representación gráfica de una función Y = F(x), el profesor presentará el problema (método de situación-caso) de forma escrita a los estudiantes. Bien en una pancarta, dibujado en pizarra o utilización del retroproyector.

Esta forma de presentación permitirá a los estudiantes analizar, meditar individualmente, para dar respuesta a preguntas como éstas:

¿Qué conceptos tendremos que aprender, para conociendo la expresión analítica de una función, poder llegar a representarla gráficamente como aparece ante ustedes?

¿Cómo poder llegar a estructurar la información que nos brinda la primera y segunda derivada de una función Y = F(x), para que a través de dicha información, conocer la forma gráfica que la función presenta?

Se acompaña instrucciones en las que se orienta el análisis de las causas y condiciones que ocasionaron el surgimiento del problema y se pregunta acerca de cómo creen que se pueda dar solución.

Esta variante tiene un propósito mas bien motivacional, se insta al estudiante a analizar y evaluar determinada situación presentada, como ilustración del contenido que se imparte.

El profesor comenzará a dar respuesta a las preguntas planteadas, como una situación a resolver , desarrollando los contenidos del sumario sobre la base de la participación de los estudiantes, utilizando la conversación heurística , para que ellos puedan plantear sus puntos de vista y experiencias basadas en los contenidos objeto de estudio y polemizar con criterios novedosos.

El docente por su parte, tiene la responsabilidad de desarrollar el tema de forma tal que encierre una contradicción lo suficientemente interesante, para que despierte el interés de participar con sus criterios los alumnos.

Se orienta que se discuta la curva cuya ecuación se presentará como SITUACIÓN a analizar, para buscar finalmente la correspondencia que existe entre la discusión de cada concepto y el trazado que aparece en pizarra o .... durante el desarrollo de la Conferencia Orientadora.

Quedará bien clara la metodología a seguir para discutir y trazar una curva, dada su expresión analítica y se formarán los equipos con vistas a la Clase Practica así como el contenido a investigar (Búsqueda Parcial). Se formarán 5 equipos de 4 alumnos cada una y el contenido que corresponde a investigar y estudiar por cada equipo se les entregará en tarjeta.

El objetivo de la actividad docente siguiente, consiste en hallar los extremos de una función dada su expresión analítica. Hallar los puntos de inflexión de una función dada su expresión analítica y hallar las ecuaciones de las asíntotas (si existen) .

Cada equipo tendrá la información necesaria con el siguiente contenido, para diferentes funciones. Por ejemplo:

Dada la función $Y=x/\ln(x)$

a) Determine los extremos locales de dicha función.

b) Determine los puntos de inflexión.

c) Obtenga la ecuación de la asíntota vertical y no vertical (encaso que existan)

NOTA: Al finalizar esta actividad, se le entregará a los estudiantes una TAREA que podrán realizar como estudio independiente y que se comprobará en el Laboratorio de Computación, utilizando un Asistente Matemático Derive.

Clase Práctica (Actividad #2)

- Los equipos formados en la actividad anterior, se reunirán para discutir los trabajos que cada uno de sus integrantes preparó para esta actividad.

- Confección de los indicadores a tener en cuenta para la evaluación final, tanto colectiva, por equipos como individualmente. Exposición. Preguntas orales. Tanto la exposición como las preguntas orales girarán en torno a los siguientes aspectos: dominio de f(x), significado analítico de los procesos aplicados, significado geométrico.

- Seleccionar el trabajo de mayor calidad que servirá para representar al equipo en la exposición. En este momento se solicitará a dicho equipo que represente la gráfica de Y=F(x).

- Actividad en el plenario. Constará de dos momentos: el primero para aprobar los indicadores de evaluación y el segundo de exposición de trabajos y discusión colectiva.

En esta actividad es muy importante la labor que desarrollen los estudiantes que tienen asignado roles específicos; como el registrador (que tiene a su cargo la responsabilidad de resumir los indicadores de evaluación, los aspectos interesantes de la discusión y los resultados de las conclusiones a que se llegue.

Esta actividad se evaluará aplicando un P.N.I. donde seguramente surgirán aspectos que permitirán establecer el desarrollo de futuras actividades docentes.

Taller. (Actividad #3)

Objetivo: Desarrollar habilidad para extraer información de una función a partir de su primera y segunda derivada, aplicando los conceptos estudiados, así como algunas de sus propiedades y características,

Desarrollar habilidades para relacionar toda la información obtenida y proceder al trazado de dicha curva.

Se formarán 5 equipos de 4 estudiantes cada uno, formándose la rejilla de la siguiente manera

A	B	C	D	E
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Al inicio del Taller se explicará al grupo, que ésta técnica se compone de dos momentos desiguales de trabajo. Un primer momento, en que cada equipo abordará un mismo ejercicio y se formará con los números que quedaron de la misma columna. Un segundo momento, en que los equipos se forman por filas, quedando en el mismo, representantes de cada uno de los equipos tomados verticalmente y por lo tanto se discutirá y analizarán todos los ejercicios que se proponen para la actividad.

Cada miembro de los equipos del primer momento tiene la responsabilidad de resolver correctamente el ejercicio asignado y entenderlo a tal punto que pueda explicarlo en el segundo momento.

En el segundo momento, que se reorganizan los equipos en sentido horizontal, cada equipo tiene representantes de todos los anteriores. Por lo tanto, tienen resueltos todos los ejercicios .

Una vez finalizada esta etapa, se constituye el plenario y se selecciona al azar o se designa el equipo que dará la visión general de las soluciones de los ejercicios a partir de la cual se procederá al debate y análisis de conjunto.

Esta forma de actividad se planificará con anterioridad para un tiempo que permita llegar al plenario para la representación de 3 curvas, haciendo que varíe el trabajo de cada equipo del primer momento, por tanto la técnica de la rejilla se aplicará 3 veces.

Al finalizar la actividad, el profesor insistirá en aspectos importantes del tema tratado y pedirá opiniones para la evaluación de la técnica utilizada.

ACLARACION; Dada la forma que se organiza esta actividad, así como sus objetivos se introducirá un aspecto novedoso en el mismo. Cuando queden conformados los equipos del segundo momento, que tienen resueltos todos los ejercicios, se les pedirá en un tiempo adicional que tracen la curva. (Cumplimiento del segundo objetivo del taller).

Ejemplo de ejercicio para esta actividad.

Equipo A (1,6,11,16)

Dada la función $Y=2x-1/x^2-1$

a) Determine el dominio de f(x)

b) Determine los interceptos con los ejes coordenados

c) Halle las asíntotas verticales(si existen)

Equipo B (2,7,12,17)

Dada la función $Y=2x-1/x^2-1$

a) Determine si f(x) es impar o par

b) Halle el signo de f(x) y represéntelo mediante un esquema

c) Determine las asíntotas no verticales (si existen)

Equipo C (3,8,13,18)

Dada la función $Y=2x-1/x^2-1$

a) Halle $f'(x)$

b) Determine los puntos críticos de f(x)

Equipo D (4,9,14,19)

a) Dada $f'(x)= 2+2x/ (x^2-1)^2$ determine los puntos de extremos locales.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

Equipo E (5,10,15,20)

a) Halle $f''(x)$

b) Determine los puntos de inflexión de f(x)

c) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de f(x).

Como se observa, en ningún momento se solicita como trabajo colectivo el trazar la curva, pues para una misma función, hay 5 equipos trabajando. Despues se procederá a cambiar la función y los objetivos de cada tarjeta.

Laboratorio de Computación. (Actividad # 4)

Objetivos:

- Contribuir al desarrollo en los estudiantes de habilidades en el manejo de sistemas computacionales.
- Utilizar un asistente matemático DERIVE, como herramienta de cálculo para comprobar los ejercicios realizados analíticamente por los alumnos como auto-estudio, orientados en la actividad #1 del tema.
- Lograr que los alumnos se autoevalúen a medida que comprueban en la computadora, el resultado de sus esfuerzos.
- Organizar y garantizar el trabajo independiente de los estudiantes.
- Establecer una motivación entre los contenidos estudiados y la computación.

Esta actividad se realiza como culminación del estudio del tema planteado, donde el profesor puede intervenir como un controlador de la actividad y puede a su vez participar activamente utilizando la conversación heurística, pero ésta vez con apoyo del movimiento en pantalla, donde se puede apreciar las interpretaciones geométricas de algunos conceptos.

Con este asistente matemático, el alumno podrá realizar :

1. Solución de ecuaciones.
2. Operaciones para evaluar una función en un punto $x=x_0$
3. Cálculo de límites de funciones.
4. Cálculo de derivadas de cualquier orden.
5. Representación gráfica de funciones.

Trabajo independiente.

A partir de este momento, se le orientará la representación de varias funciones, donde el alumno pueda trabajar analíticamente primero y después ir al laboratorio de computación y verificar su resultado o viceversa.

Conclusiones

Durante el desarrollo de esta experiencia pudimos observar el interés de los alumnos por desarrollar su tarea y verificar si la misma estaba resuelta correctamente y además como de forma espontánea ocupaban su "tiempo de máquina" para resolver otros problemas no orientados. El desarrollo del pensamiento creador de los futuros Ingenieros Civiles e Hidráulicos es uno de los principales objetivos, que se propone nuestra Facultad. Llevar a la práctica este propósito implica que el mismo esté presente en las concepciones de nuestro trabajo, en la organización de la docencia y en la selección y utilización de métodos apropiados para lograrlo. Supone también enfrentarnos a hábitos y formas de trabajo consolidados en el tiempo, como en la insistencia en la memorización y reproducción de grandes volúmenes de información como formas de enseñanza.

Se trata en cambio de fomentar el desarrollo de habilidades y capacidades que permitan la adquisición de conocimientos por ellos mismos y su utilización en nuevas situaciones de forma independiente y motivante. El entrenamiento de esta actividad de modo continuado y sistemático contribuye a que el estudiante se independice un poco del proceso de aprendizaje en relación alumno-profesor-aula y se vea él solo ante su dificultad, en una actitud mental que ayude al desarrollo de la creatividad, hábitos de estudio, motivaciones, etc.

Nos propusimos aprovechar las posibilidades del ordenador para asimilar mejor los conceptos de la Teoría y aprender a utilizar el paquete informático DERIVE. Es interesante por las presentaciones que ofrece en relación a la preparación para dar introducción a otros paquetes informáticos más complejos que los alumnos podrán encontrarse más adelante y en su vida profesional. Nos proponemos seguir estudiando y profundizando sobre esta experiencia, elevando la forma y calidad de la vinculación del ordenador derive con la asignatura y la especialidad ya que los beneficios pedagógicos que proporciona la incorporación del ordenador en la enseñanza de la Matemática 1 para Ingenieros Civiles e Hidráulicos pueden resumirse en:

- Las computaciones automáticas pueden liberar al estudiante para acometer tareas más importantes conceptuales.
- Los estudiantes medios y más débiles reciben estímulos importantes, al percibir que no deben ser capaces de ser brillantes en el tecnicismo algebraico para llegar a dominar el pensamiento abstracto.
- El estudio de los algoritmos subyacentes ayudan a entender la naturaleza de las operaciones.
- El permitir al usuario construir operaciones más complejas de las habituales se traduce en el mejor entendimiento conceptual.
- Trabajar con el ordenador proporciona al estudio de las matemáticas del factor experimental, lo que lleva al establecimiento de conjeturas, ejemplos y contraejemplos.
- A diferencia del profesor, el ordenador no manifiesta impaciencia alguna, al cometerse errores repetidamente.
- La forma de estudiar del alumno cambia si es confrontado con el ordenador, muchos conceptos son encontrados "por el alumno a través de su experiencia directa con el software.
- Experimenta un cambio notable la motivación que el alumno siente al sentirse investigador, más que repetidor y la posibilidad de visualizar dinámicamente (no estáticamente como en los libros) muchos conceptos matemáticos.

Sin embargo la excesiva dependencia del ordenador puede crear problemas más serios que los que se intentan corregir. Muchos educadores se oponen a la introducción del ordenador en la educación matemática, no obstante, la cuestión de la utilidad de los ordenadores en la mejora de la docencia de las Matemáticas no es cuestión de todo o nada, sino de un uso juicioso de la herramienta.

Bibliografía

Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.

Matemática Asistida por ordenadores, Cálculo Infinitesimal Pedro Pérez Carreras. Universidad Politécnica de Valencia.

Introducción al uso de DERIVE, 2da. Edición de José Luis Llorens Fuster, Universidad Politécnica de Valencia.

Cálculo Diferencial e Integral, Primera y Segunda parte de C. Dr. Raúl Rodríguez y otros, Editorial Pueblo y Educación.

Álgebra y Análisis de funciones elementales de M. Potapov, V. Alexandrov, P. Pasichenko Editorial Mir. Moscú.

Enseñando matemática en la Universidad con computadora

Dora Odstrcill
Universidad Nacional de Jujuy
Argentina

Resumen

El propósito de esta comunicación es darles a conocer la experiencia que hemos recogido con el Mathemática durante dos años con los alumnos de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy.

Introducción

Cada época desarrolla su propia tecnología y es un deber de las respectivas generaciones ponerla al servicio de sus necesidades. La matemática no se ha mantenido ajena a este proceso, así se pasó del ábaco a los sumadores manuales y de éstos a la regla de cálculo, para continuar con la calculadora y llegar en la actualidad a la computadora. Esta es, es sin dudar, el mayor apoyo de la matemática, lo cual no significa que se deba dejar de lado el aspecto formativo de la matemática en beneficio del uso de la computadora. Debemos tomarlo como un complemento indispensable en la formación matemática del estudiante. Muchas veces nos ha sucedido que realizamos un importante desarrollo teórico pero al querer ejemplificarlo nos encontramos con que los cálculos involucrados son de tal magnitud que nos vemos limitados a presentar casos triviales entonces, por la complejidad de los cálculos, privamos a los alumnos de ver comprobada la teoría con ejemplos interesantes que son los que normalmente se presentan en las aplicaciones prácticas.

Con esta tecnología surge sin duda una discusión ¿cómo debemos usar la calculadora y/o computadora en la enseñanza de la matemática? ¿ cuál es su impacto en el aula? ¿cómo afecta en nuestra tradicional forma de evaluar? y ¿cuál es su impacto en la currícula ?. Las posiciones son de lo más variadas, están aquellos profesores que se niegan al uso de las calculadoras en el salón de clases, hay otros que permiten el uso de todo tipo de tecnología pero que siguen enseñando y evaluando de la manera tradicional. Pero, en medio de todo esto, hay una realidad: la computadora existe ; y es una obligación para el docente no sólo conocer su potencial sino aplicarlo para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática. Nosotros estamos convencidos que la computadora debe utilizarse en la enseñanza de la matemática y que se la debe considerar como:

a) Una herramienta para realizar cálculos, entendiendo por cálculo tanto el numérico como el simbólico. Debemos usar la computadora para simplificar expresiones complicadas, calcular derivadas, límites indeterminados, determinantes, matrices, números complejos, etc. Por ejemplo, debiéramos concentramos en enseñar las aplicaciones de la derivada, más que en enseñar su cálculo, si bien creemos que no podemos dejar de lado la enseñanza del mismo.

b) Una herramienta que nos permite realizar gráficos que nos ayudarán a entender el problema o modelo con el que estemos trabajando. Los gráficos nos ayudan a obtener aproximaciones de puntos notables de las funciones, como ser raíces, extremos, puntos de inflexión, intersección de curvas, intersección de superficies, etc. En estadística, a través de los gráficos son más fáciles de entender conceptos elementales como media, cuartiles o desviación de una muestra.

c) Una herramienta que podemos programar para realizar cálculos repetitivos. Aquí podemos apelar a nuestra creatividad para realizar programas de algoritmos sencillos: por ejemplo métodos iterativos de aproximación, algoritmos geométricos, algoritmo de Euclides, etc.

Pero debemos tener cuidado

A pesar de que es conveniente el uso de la computadora, no pensemos que la computadora soluciona todo, o que podemos dejar de lado conceptos tan importantes como derivada, límite, integrales, etc. etc., pues a veces a pesar de que utilicemos un programa muy potente como puede ser el Mathematica, no siempre obtenemos respuestas a nuestras preguntas o lo que es peor, a veces son incorrectas.

En definitiva creemos que debemos dejar de enseñar cosas tediosas, repetitivas y mecánicas y enseñar en cambio los aspectos conceptuales de las matemáticas. Nuestro desafío es hacer que los alumnos piensen, creen, entiendan fenómenos y aprendan a aplicar la matemática.

Fundamentos

Conscientes de que debemos mejorar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en el Nivel Universitario, es que hemos decidido efectuar un cambio en la propuesta de tres cátedras, incorporando una nueva experiencia en la metodología de la enseñanza, con el intento de hacer a los temas más atrayentes y significativos para los alumnos universitarios.

La necesidad del cambio es grande pero también son las limitaciones que en nuestra Facultad tenemos:

- El gran número de ingresantes
- La diferencia entre la educación matemática del Nivel Medio y la Universidad
- La preparación docente
- La dedicación docente
- La falta de disponibilidad de computadoras, que no hacen posible una práctica más continua del software.

La experiencia mencionada se implementó en las cátedras de Algebra y Geometría Analítica, Algebra I y Análisis Matemático I, todas pertenecientes al primer año de las carreras de Ingeniería Informática, Química, Metalúrgica y Minas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy. La misma consistió en la incorporación de una propuesta con metodología de Taller, de carácter opcional.

Justificación de la elección del Software

Se ha elegido usar el programa Mathematica, pues según el uso que se haga de este programa podemos considerarlo como:

a) Una calculadora numérica: Podemos realizar operaciones simples o muy complicadas como si estuviésemos trabajando con una calculadora de bolsillo. Pero tiene una gran ventaja sobre ellas: posee muchísimas funciones ya incorporadas y además podemos trabajar con la precisión que nosotros le indiquemos.

b) Un paquete de subrutinas para el cálculo numérico: Tiene subrutinas implementadas y listas para ser utilizadas como por ejemplo: integración numérica, minimización de funciones, programación lineal etc.

c) Una calculadora simbólica: Permite trabajar con expresiones simbólicas. Por ejemplo: podemos definir una función en variable x, quedando ésta almacenada tal como es y no en forma de un algoritmo que pueda dar aproximaciones a dicha función. Luego podemos sustituir valores de la variable x no numéricos y operar en forma simbólica.

d) Una potente herramienta de cálculo simbólico: Podemos derivar, integrar, resolver ecuaciones, calcular límites, manipular series de potencias etc., en forma simbólica.

e) Un paquete gráfico: Podemos realizar gráficos en dos o tres dimensiones, elegir las perspectivas, los puntos de vista, el sistema de representación, el sistema de coordenadas etc. Además soporta animaciones.

f) Además de los distintos usos mencionados, podemos utilizar el Mathematica para programar y como soporte para otros programas.

Objetivo de la Experiencia

Que el alumno logre:

- Mejorar la comprensión de los conceptos adquiridos durante el año lectivo utilizando el programa **Mathematica.**
- Conocer una herramienta concreta de software que le permita realizar cálculos de forma rápida y cómoda.
- Resolver problemas hasta el final con el software propuesto, comprobando si se trata de problemas bien o mal condicionados, con existencia de solución única o múltiple, etc.
- Descubrir la conveniencia del uso de la computadora en la resolución de problemas.

El Taller

A continuación explicitaremos diferentes aspectos que hacen a la propuesta:

Sede de las acciones y personal responsable

Los trabajos prácticos desarrollados en el taller fueron realizados en el centro de cómputos de la Facultad de Ingeniería, en una de las salas que cuenta con 15 máquinas. En cada computadora trabajaron 2 o 3 alumnos.

El personal docente que participó en el taller fue el mismo con el que cuentan las cátedras para desarrollar sus actividades durante el transcurso del año lectivo.

Destinatarios

La experiencia se realizó al terminar el año lectivo 1996 y 1997, siendo voluntaria para los alumnos, los que debían inscribirse previamente en las respectivas cátedras. No se exigió como requisito para inscribirse tener regularizada la materia.

El número de alumnos que participaron en 1996 fue de 40 alumnos en Análisis y 40 alumnos en Algebra. En 1997 participaron 80 alumnos en Análisis y 80 alumnos en Algebra.

Metodología

Análisis Matemático I.

Se elaboró una guía de ejercicios que los alumnos debían desarrollar utilizando el programa Mathematica, en el horario establecido. Se hizo entrega además de una lista de los comandos necesarios para realizar el trabajo práctico.

En la clase se brindó una explicación general referida al manejo del programa Mathematica y luego los alumnos trabajaron teniendo como guía el material entregado, contando con la permanente supervisión de los docentes.

El taller se desarrolló en dos clases de 3 horas reloj de duración cada una.

Álgebra I y Álgebra y Geometría Analítica

Se elaboró una guía teórico-práctica con la intención de que cualquier estudiante con o sin conocimientos de computación pueda usar una PC con este software. La misma contenía ejercicios resueltos en los cuales se detallaban los comandos necesarios para su resolución.

En el taller los alumnos debían desarrollar, con el uso del Mathematica, ejercicios extraídos de la guía de trabajos prácticos que se habían resuelto en la forma tradicional, en el transcurso del año. En la clase se brindó una explicación general referida al manejo del programa Mathematica y luego los alumnos trabajaron teniendo como guía el material entregado, contando con la permanente supervisión de los docentes.

La duración del taller fue de dos clases de 3 horas reloj de duración cada una.

Contenidos desarrollados en el taller:

Análisis Matemático I

Estudio completo de una función: dominio, simetría, monotonía, extremos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas y gráficos. Gráfico de curvas en coordenada paramétricas y polares. Representación de funciones dadas en forma implícita. Cálculo de límite. Desarrollo de una función aplicando fórmula de Taylor. Integrales Indefinidas, Definidas e Impropias. Cálculo de área de una región plana. Cálculo de longitud de arco de una curva plana. Sólido de Revolución: cálculo de su volumen y área.

Álgebra y Geometría Analítica y Álgebra I

Números complejos: operaciones. Resolución de ecuaciones de variable compleja. Matrices: operaciones. Determinante: su cálculo. Matriz inversa. Potencia enésima de una matriz. Sistema de ecuaciones lineales: sistemas homogéneos y no homogéneos. El plano. Intersección de planos. Cónicas. Superficies. Superficies de revolución. Superficies cónicas y cilíndricas. Intersección de superficies y planos.

Comentarios sobre la Experiencia

En Análisis Matemático I

Haremos un análisis de los ejercicios que debían resolver, detallando las principales dificultades encontradas y los logros alcanzados.

1.- Estudio de la variación de una función. Gráfico.

Dada una función se les pedía que determinaran su dominio, simetría del gráfico, monotonía, extremos, concavidad, puntos de inflexión y asíntotas. Luego, utilizando los comandos del programa, debían confeccionar el gráfico de la función y cotejar la información obtenida previamente, con el gráfico obtenido con el software.

El problema fundamental que se presentó fue cómo utilizar los comandos que nosotros le habíamos indicado, para resolver la consigna. Por ejemplo se pedía calcular el dominio de la función, pero ningún comando específico lo hacía. Idéntica situación se presentó cuando debían determinar la simetría del gráfico a través de la paridad de la función, ya que no se daban cuenta como comparar $f(x)$ con $f(-x)$.

Se presentó la misma dificultad cuando analizaban la monotonía de la función, con el agravante de que algunos alumnos no recordaban el concepto teórico pertinente. El cálculo de la derivada, necesario para el análisis de la monotonía, no presentó inconveniente, pero sí la determinación de los puntos donde la derivada no existe.

En el resto de los items solicitados en este ejercicio no se presentaron mayores dificultades para destacar, esto se debió a que existían comandos específicos para realizarlos y además ya estaban familiarizados con el procedimiento que se debía emplear

Mediante este ejercicio quisimos mostrar a los alumnos que la computadora es importante pues realiza cálculos repetitivos, tediosos y mecánicos, pero que de ninguna manera puede sustituir la etapa en la que nosotros debemos pensar qué instrucciones darle a la máquina para que resuelva lo que queremos.

Se propusieron ejercicios donde los alumnos vieron que hay que tener cuidado con los resultados obtenidos, pues no siempre son correctos. Por ejemplo en el cálculo de límite, para hallar las asíntotas, determinaron el valor del límite en un punto, pero cuando calcularon los límites laterales, vieron que estos valores eran distintos, lo que representaba una contradicción.

Quedaron maravillados con la facilidad que podían obtener las derivadas sucesivas de una función y la rapidez con que podían simplificar la expresión de las mismas. Lo sencillo que resultaba calcular límites indeterminados y sobre todo la simplicidad con que la máquina podía graficar cualquier función.

2.- Límites indeterminados

Se propusieron ejercicios para que calcularan límites indeterminados. En estos ejercicios no hubo complicaciones, por el contrario estaban realmente entusiasmados apreciando la facilidad con que se resolvían los ejercicios que a ellos les había costado tanto calcularlos durante el transcurso del cursado de la asignatura.

3.- Integrales

La consigna pedía que calcularan algunas integrales, definidas, indefinidas e impropias, y en algunos casos que comprobaran (derivando) el resultado obtenido.

No hubo problemas, pues con sólo escribir el comando que permite calcular integrales y apretar una tecla, la máquina les entregaba el resultado, hecho que asombraba a los alumnos.

También se pidió que calcularan una integral cuya resolución con lápiz y papel era sencilla, sin embargo el programa utilizado no pudo entregar el resultado. Esto nos permitió reafirmar que la computadora no nos podía solucionar todos los problemas y que era importante que conozcamos los métodos de integración.

4.- Aplicaciones de la integral

Aquí debían calcular áreas de regiones planas, longitud de un arco de curva plana, volumen y área de la superficie de un sólido de revolución.

Como este ejercicio implicaba la elaboración de un planteo previo que permita realizar el cálculo correctamente y después utilizar la computadora, no les resultó tan atractivo.

5. - Gráficos

Debían confeccionar gráficos de curvas cuya ecuación estaba dada en forma implícita o bien por sus ecuaciones paramétricas o expresada en coordenadas polares.

Estos ejercicios fueron sencillos de resolver y bastante atractivos.

6.– Fórmula de Taylor

Como último tema se trabajó con Taylor, obteniendo la fórmula y el polinomio de Taylor correspondiente a una función dada. En base a los desarrollos obtenidos se realizaron los de otras funciones y se utilizaron para el cálculo de límites indeterminados.

En este ejercicio pudieron apreciar la ventaja de usar la computadora para realizar cálculos tediosos repetitivos y mecánicos.

En Álgebra y Geometría Analítica y Álgebra I

1.– Números complejos

La guía indicaba como realizar operaciones con números complejos, como obtener la parte real e imaginaria y como hallar la solución de una ecuación con variable compleja.

No hubo inconveniente en la comprensión de este tema ni en el manejo de los comandos. Esto permitió valorar la computadora como una herramienta para hacer cálculos tan extensos, como por ejemplo la solución de una ecuación con raíces complejas. Como los alumnos ya habían resuelto la práctica con lápiz y papel pudieron apreciar la ventaja que proporciona el uso del software.

2.– Matrices

Se indicaba como definir matrices, matriz diagonal, matriz identidad, producto escalar, producto de matrices, determinantes, matriz inversa y potencia de una matriz. No se presentaron dificultades. La resolución resultó muy atractiva, sobre todo al momento de resolver un determinante de 4 x 4, encontrar la matriz inversa y efectuar el producto de dos matrices.

3.– Sistemas de ecuaciones lineales

Se mostraba como resolver sistemas de ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas mediante distintos comandos. Los alumnos pudieron trabajar con ellos comandos y comparar las variaciones que éstos ofrecían para resolver el sistema.

Se pudo observar como pueden combinarse los nuevos comandos utilizados para resolver sistemas con los estudiados anteriormente (cálculo de determinantes, definición de matrices).

4.– Gráficos en el plano

Se enseñaba a crear gráficos en el plano y se mostraban distintas opciones para modificarlo, como por ejemplo: cambiar el rango de visualización, cambiar el color, etiquetar el gráfico, evaluar la función en un punto, etc. Se proporcionaban las instrucciones necesarias para examinar en una serie de gráficos varias funciones sin que se superpongan.

Fue de gran entusiasmo esta parte de la aplicación del programa. Se consiguió el objetivo: valorar la herramienta de trabajo e interesarlos en la alternativa del cambio.

5.– Gráficos en el espacio

Se presentaban ejemplos que mostraban cómo graficar funciones de dos variables, cómo realizar intersecciones de dos superficies y cómo obtener superficies de revolución.

Los distintos comandos presentados permitieron a los alumnos crear en forma inmediata nuevas figuras. Se entusiasmaron buscando y ensayando nuevas formas y se maravillaron ellos y nosotros también. Como por ejemplo con los siguientes gráficos:

Curva de Nivel del paraboloide hiperbólico de ecuación

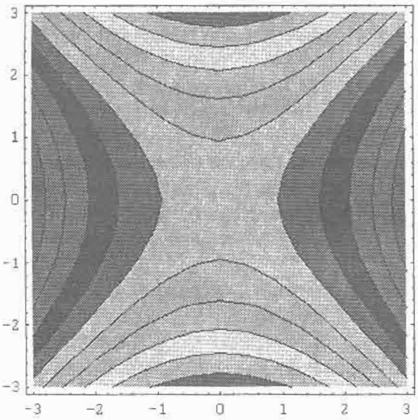
$z = x^2 - y^2$

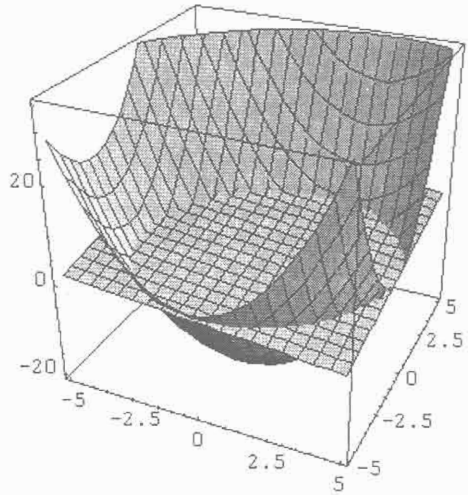
Intersección de dos superficies :

$z = (12 - 2x + 3y) / 4$

y

$z = x^2 + y^2 + ((12 - 2x + 3y) / 4)^2 - 25$





Conclusiones de la experiencia:

Los alumnos se han mostrado muy interesados en participar en el taller, valorando positivamente esta iniciativa de las cátedras ya que se debe tener en cuenta que si bien los alumnos de Ingeniería Informática poseían experiencia con la computadora, para muchos alumnos de las otras carreras - Ingeniería Química, Metalúrgica y de Minas - era su primera experiencia con esta herramienta.

Los estudiantes tuvieron una participación activa durante el taller. Se observó alguna dificultad en la escritura de los comandos usados, debido a la rigurosidad de la sintaxis del programa.

En Análisis Matemático I, muchos de los alumnos que realizaron el taller no recordaban o bien no manejaban los conceptos básicos necesarios para la resolución de los ejercicios presentados en la guía, lo que representó la mayor dificultad que hubo que salvar en el taller. Cabe recordar que la única condición establecida para poder inscribirse en estas clases era la de ser alumno de la materia, por lo que en el presente año lectivo se prevee abrir la inscripción al taller, solamente a aquellos alumnos que hubieren regularizado la asignatura.

A pesar de ello la mayoría de los estudiantes participantes pudieron realizar los ejercicios propuestos en su totalidad.

En Algebra no se observaron grandes dificultades, esto probablemente se debe:

- A que los alumnos manejaron la guía de trabajos prácticos bien conocida por ellos y el trabajo en el taller en gran parte fue una verificación de resultados.

- Que los apuntes teóricos–prácticos le permitieron repasar rápidamente algunos conceptos fundamentales para abordar el tema.

En general, fue evidente que para el alumno resultó atractivo el hecho de poder visualizar, por ejemplo, variadas superficies e intersecciones de un modo radicalmente diferente al de las clases cotidianas. La versatilidad del programa les permitió descubrir una forma atrayente de aprender, analizar, y avanzar "hasta el final" en la resolución de problemas.

Más allá de las reformulaciones que necesariamente habrá que hacer a esta experiencia, una evaluación de lo ya realizado, nos permite afirmar que el uso del programa Mathematica resulta sumamente provechoso y despierta entusiasmo e interés en los alumnos.

En el futuro, sería interesante comparar si realmente los aprendizajes logrados con esta herramienta superan los niveles de rendimiento actuales.

Bibliografia

MANUAL DEL USUARIO DE MATHEMATICA

CALCULO –Deborah Hughes Hallett , Andrew M. Gleason , et al. Editorial CONTINENTAL S.A. D E C.V., México 1996

CALCULO una variable – Thomas , Finney . Editorial Addison Wesley Longman , 1998

CALCULO – James Stewart . Grupo Editorial Iberoamericano – 1995

Análisis de un Software Educativo en el Aprendizaje de la Matemática Superior

María de la Caridad Pinto Correa (caryp@ind.ispjae.edu.cu)
Dpto. de Matemática General, Facultad de Ingeniería Industrial, ISPJAE
Habana, Cuba

Resumen

La modelación matemática de diversos problemas tecnológicos requiere de los estudiantes un adecuado dominio del tema Ecuaciones Diferenciales. En las carreras de Ingeniería, muchas de las situaciones problémicas con las que se enfrentan sus estudiantes se modelan a través de estas ecuaciones, luego las mismas juegan un importante papel en la preparación de estos especialistas.

EDIF constituye un software educativo para la enseñanza de las Matemáticas específicamente en el tema de Ecuaciones Diferenciales de 1er orden.

En el sistema se tuvieron en cuenta las siguientes características propias de un software para la docencia

1. Capacidad de instruir eficazmente sin participación directa del profesor y de forma tal que cada alumno pueda aprender a su propio ritmo.
2. Distribución del material en pequeñas partes y presentación de estos elementos simples en secuencias ordenadas, cada una apoyándose en la anterior, de forma que el estudiante pueda seguir aprendiendo independientemente de toda la información precedente, y con un mínimo de error.
3. Exigencia de frecuentes respuestas del alumno, haciendo de éste un participante activo.
4. Confirmación o corrección inmediata de la respuesta, para que el alumno conozca el valor de ésta.

En el Sistema Entrenador en Ecuaciones Diferenciales se trata de reforzar las dos fases finales del proceso de instrucción: **aplicación y retroalimentación**.

EDIF se confeccionó a través de un lenguaje visual de actualidad, sobre el soporte de Windows que es el ToolBook Multimedia versión 4.0, el cual es un ambiente interactivo de desarrollo orientado a objetos provisto de un conjunto de herramientas diseñadas para la creación de objetos y de un potente lenguaje de programación, el OpenScript.

Introducción

El análisis ha sido la rama dominante de las matemáticas durante 300 años, y las Ecuaciones Diferenciales están en el corazón del análisis. Constituyen el objetivo natural del cálculo elemental y la parcela matemática más importante para la comprensión de las ciencias físicas. Es fuente, además, en las cuestiones más profundas que suscita, de la mayoría de las ideas y teorías que conforman el análisis avanzado.

La modelación matemática de diversos problemas tecnológicos requiere de los estudiantes un adecuado dominio del tema Ecuaciones Diferenciales. En las carreras de Ingeniería, muchas de las situaciones problémicas con las que se enfrentan sus estudiantes se modelan a través de estas ecuaciones, luego las mismas juegan un importante papel en la preparación de estos especialistas.

EDIF constituye un software educativo para la enseñanza de las Matemáticas específicamente en el tema de Ecuaciones Diferenciales de 1er orden. El Sistema que se presenta resulta un medio de enseñanza de gran utilidad para los estudiantes de las carreras de ingeniería, ya que en el mismo se enfatiza que en su relación con la enseñanza, la Informática puede ser contemplada desde muy diversos ángulos, entre los que cabe destacar:

- Como tema propio de enseñanza en todos los niveles del sistema educativo, debido a su importancia en la cultura actual.
- Como herramienta para resolver problemas en la enseñanza práctica de muchas materias.

En el sistema se tuvieron en cuenta las siguientes características propias de un software para la docencia

1. Capacidad de instruir eficazmente sin participación directa del profesor y de forma tal que cada alumno pueda aprender a su propio ritmo.
2. Distribución del material en pequeñas partes y presentación de estos elementos simples en secuencias ordenadas, cada una apoyándose en la anterior, de forma que el estudiante pueda seguir aprendiendo independientemente de toda la información precedente y con un mínimo de error.
3. Exigencia de frecuentes respuestas del alumno, haciendo de éste un participante activo.
4. Confirmación o corrección inmediata de la respuesta, para que el alumno conozca el valor de ésta.
5. Pruebas del programa con estudiantes y revisión del mismo como método esencial en el desarrollo del programa, para asegurar el logro de los objetivos de la enseñanza.

En el Sistema Entrenador en Ecuaciones Diferenciales se trata de reforzar las dos fases finales del proceso de instrucción: aplicación y retroalimentación. En el mismo se aprecia además que se ha tenido en cuenta los siguientes elementos que caracterizan un entrenador:

- Cantidad de ejercicios.
- Variedad de los formatos con los que se presenta.
- Retroinformación que re-oriente con luz indirecta la acción del aprendiz.

Objetivos

- Crear una herramienta computacional como apoyo al proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas.
- Lograr la motivación por el tema de enseñanza en los estudiantes con el uso de un Sistema Entrenador.

Estructura del sistema. Funcionamiento

Criterio para el diseño

En el diseño del trabajo se tuvo en cuenta la estrategia siguiente:

1. Se recogen los datos del los estudiantes a través de una boleta de registro, que almacena en una base de datos, nombre y una valoración o nota de los resultados obtenidos al ir resolviendo cada ejercicio del entrenador, finalmente se le da una nota global si transitó por toda una batería.

2. A modo de hipertexto aparece un módulo de Historia de las Ecuaciones Diferenciales, y otro módulo donde se dan una cantidad de conceptos básicos, y metodólogias o algoritmos para la solución de los mismos.

3. Dos módulos restantes correspondientes al ejercitador propio del entrenador y el evaluador.

Diseño de la aplicación

La aplicación que se presenta, permite crear determinadas habilidades necesarias en el proceso enseñanza - aprendizaje, como son la identificación y la modelación, creándose una relación en el aprendizaje del tipo: alumno, entrenador y profesor, cuyo esquema se muestra a continuación, en la figura #1:

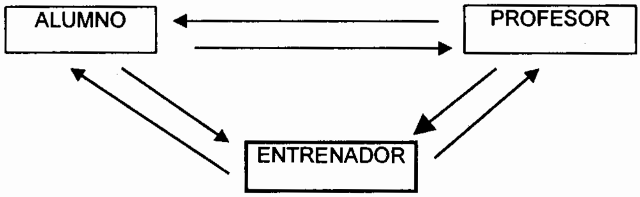


Figura # 1

Modelo del estudiante

El modelo del estudiante que se concibe para el uso de este software debe poseer las características siguientes:

- Estudiantes del 2do año ó más de las carreras de ingeniería de cualquier especialidad.
- Los estudiantes deben haber cursado y aprobado las asignaturas del 1er año que tratan el cálculo diferencial e integral.
- Además deben poseer habilidades mínimas en el manejo de aplicaciones sobre ambiente Windows.

Análisis de la Interfaz

Es la parte del sistema con la que el alumno interactúa. la misma fue desarrollada para la plataforma Windows, utilizándose sus posibilidades de recursos multimedia, para producir una presentación amigable, uso de diferentes tipos de fondos en el background.

En la pantalla principal se recoge los módulos que integran el sistema y botones para interáctuar con el sistema, de los cuales se puede obtener una explicación de su funcionamiento al pasar el mouse sobre ellos, una ayuda sensible.

Módulos del sistema

El software que se presenta, constituye un libros que a su vez contiene cuatro libros, cada uno de los cuales constituyen módulos independientes del sistema, o sea se puede acceder a cada uno de ellos sin interferencia con los otros.

La estructuración de cada módulo es la siguiente

- Módulo contenido en un book de 8 páginas con un recuento breve de la historia de las Ecuaciones Diferenciales. Este muestra sobre un mismo background las páginas, que contienen campos editables (fields), donde aparece expuesto una relación de textos que poseen un conjunto de palabras activas, las cuales no son más que palabras o frases, que al ser activadas nos lleva a la visualización a través de viewer de conceptos relacionados con ellas, aparecen como palabras activas los nombres de los matemáticos de mayor relevancia en el surgimiento de las Ecuaciones Diferenciales. Al accionar sobre estos nombres aparece un grupo (conjunto de dos ó más objetos tool book) formado por la foto y los datos biográficos de cada matemático.

- Módulo contenido en un book de 18 páginas, donde en la 1era página aparece un índice de los conceptos a tratar en la aplicación, así como ejemplos y metodológias de trabajo para la resolución de cada tipo de ecuación diferencial tratados en el sistema.

Los tipos de ecuaciones diferenciales que se abordan en el software son: ecuaciones diferenciales de variables separadas, separables y lineales de 1er orden. Cada punto del índice constituye una frase activa, la cual al ser activada nos lleva a otra página donde aparece, en forma explícita el concepto a tratar con un ejemplo ilustrativo relacionado con dicho concepto ó la metodología de trabajo que se seleccione con un ejemplo del trabajo que trate, constituyendo este módulo un Hipertexto. Se caracteriza porque ofrece diferentes opciones para el usuario, y este es quien determina de modo interactivo, tomando el control de un conjunto de enlaces dinámicos junto a unidades de información, a cuales de ellas seguir a la vez que lee el texto. Es no secuencial, ya que no existe un sólo orden para determinar la secuencia en la cual el texto va a ser leído. La forma de acceder a un hipertexto es mediante la "navegación", que consiste en recorrer la red atravesando los enlaces accesibles por el usuario, el cual puede moverse libremente a través de la información de acuerdo con sus propias necesidades.

- Módulo contenido en un book de 80 páginas de ejercitación, constituyendo este, el módulo del entrenador. En el módulo del entrenador, existen ejercicios "tipos" y ejercicios "derivados". Llamamos ejercicios "tipos" aquellos ejercicios que el estudiante es capaz de resolver ya sea por comparación con otro ejercicio resuelto ó apoyándose en la ayuda conceptual dada, a la cual él puede acceder en el momento que lo desee. Si esto no es posible y la respuesta es incorrecta, lo cual demuestra que requiere de otro tipo de tratamiento, pasamos a los llamados ejercicios derivados, llamada así a la estrategia pedagógica seguida.

Análisis descendente del problema

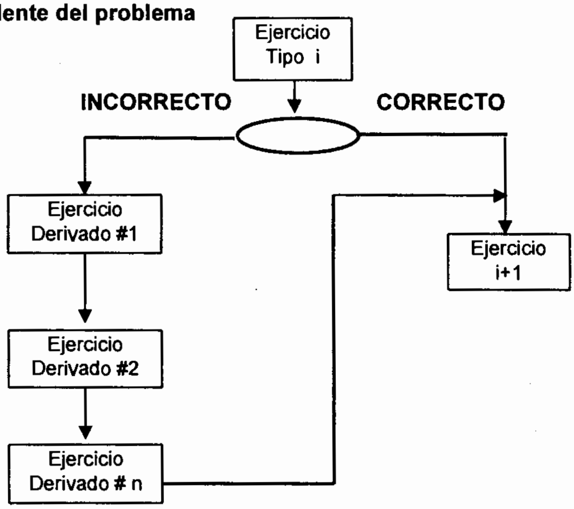


Figura #2 Diagrama del comportamiento de los ejercicios " tipos" con respecto a los ejercicios "derivados "

En los ejercicios derivados el tratamiento a seguir consiste en los siguientes pasos:

- Dado un ejercicio tipo i, se analiza la respuesta del alumno, si esta es Correcta, se pasa al ejercicio i+1, pero si la respuesta es Incorrecta, se da un mensaje, y se ramifica la tarea con ejercicios derivados de este, como se muestra en la figura #2.

- El ejercicio derivado #1, es un ejercicio con un mínimo nivel de dificultad, este ejercicio puede ser resuelto por el alumno fácilmente, pues el objetivo del mismo es ubicar elementos que el alumno posiblemente no tuvo en cuenta a la hora de comenzar a resolver el ejercicio tipo dado, no obstante puede consultar el botón de ayuda, para esclarecer su tarea un poco más, una vez dada la respuesta si esta es Correcta, pasa al ejercicio derivado #2, con un nivel de dificultad mayor, con respecto al anterior. Pero si la respuesta es Incorrecta se le da un mensaje, y se le plantea la respuesta correcta, y también pasa al ejercicio derivado #2, cuando de esta misma forma el alumno ha transitado por todos los ejercicios derivados hasta el ejercicio n, ya está en condiciones de pasar a resolver nuevamente el ejercicio tipo dado, como se muestra en la figura #3

El carácter no lineal del problema se define a través del análisis descendente de su componente cognitiva.

Para los ejercicios derivados el gráfico del algoritmo o estrategia elaborada es el siguiente:

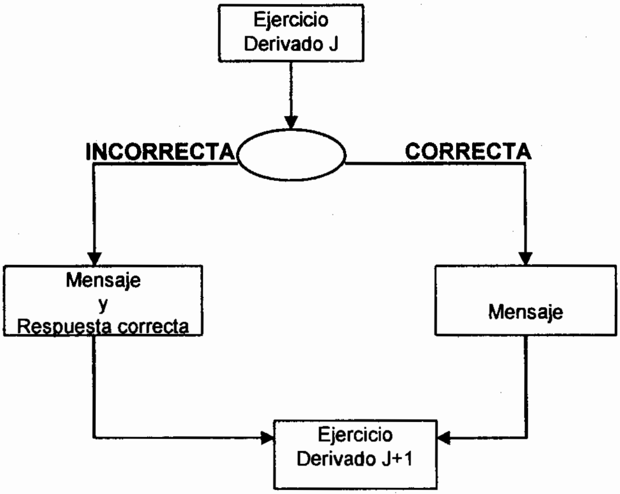


Figura #3 Diagrama del comportamiento de los ejercicios "derivados"

La forma de plantearse cada ejercicio es variada, existen ejercicios de selección simple, en los que el alumno, dado una relación de posibilidades debe seleccionar una respuesta correcta ó dada una relación de posibilidades, hay varias respuestas correctas.

En los ejercicios de completamiento con elementos dados, se le dan una relación de elementos como respuestas posibles y el debe seleccionar la correcta y con el mouse, usando la técnica de drag and drop, colocarla en el lugar adecuado.

En el módulo de ejercitación, en cada página (pantallas) aparecen ejercicios que como planteamos anteriormente pueden ser ejercicios tipos o derivados, ante una respuesta de un ejercicio tipo el alumno debe oprimir el botón evaluar, si su respuesta es correcta pasa al próximo ejercicio tipo con un mensaje por haber resuelto adecuadamente el ejercicio y poder continuar avanzando en su entrenamiento. Es importante señalar que el alumno puede acceder en cualquier momento a una ayuda en línea, específica del aspecto que trate en esa página. Una vez concluido su entrenamiento, el alumno recibe una evaluación por preguntas y una nota global alcanzada, la cual es guardada en el registro de la base de dato, donde el se añade a través de una boleta de registro al comenzar su entrenamiento. El docente puede acceder a esta base de dato con su clave y conocer así los resultados alcanzados por cada estudiante en su entrenamiento y en la evaluación.

El cuarto módulo es el correspondiente al evaluador donde el alumno se somete a una evaluación, donde ya los ejercicios (que aparecen por cada página) no contienen ayuda, y por su puesto ante respuestas incorrectas recibe mensajes de errores, para que conozca la situación que tiene y la posibilidad de obtener una mala nota en la evaluación, si esta se realiza completamente.

Programación del Sistema.

EDIF se confeccionó a través de un lenguaje visual de actualidad, sobre el soporte de Windows que es el ToolBook Multimedia versión 4.0, el cual es un ambiente interactivo de desarrollo orientado a objetos provisto de un conjunto de herramientas diseñadas para la creación de objetos y de un potente lenguaje de programación, el OpenScript para el diseño y comportamiento de los objetos.

El ToolBook usa la metáfora de libro, para definir sus aplicaciones, y como los libros impresos, el libro en ToolBook está dividido en páginas que no son más que las pantallas o formas de la aplicación. Estas páginas se pueden ver en los llamados vierwers, y contienen campos (field) botones y gráficos. El ToolBook al igual que Windows es un sistema guiado a eventos, esto significa que el sistema está preparado para responder a cada una de las posibles acciones del usuario (eventos), por ejemplo hacer clic, teclear, seleccionar un menú, etc.

Sus aplicaciones pueden incluir una interfaz usuario gráfica sofisticada con elementos como: menúes, cajas de dialogo y controles gráficos.

La interfaz del sistema producto de las posibilidades que brinda la herramienta utilizada para su confección, es agradable con el uso de background de gran belleza en sus colores. Por la posibilidad de multimedia del ToolBook se utilizaron efectos para cambiar de una página a otra del libro, y el diseño de los botones resulta atractivo. En la figura #4 se presenta una pantalla con un mensaje dado ante una respuesta incorrecta.

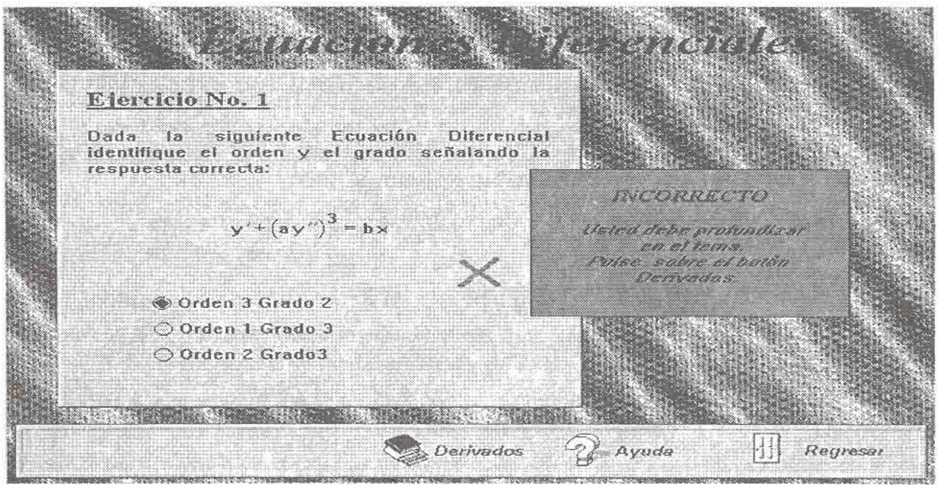


Figura #4 Muestra la interfaz utilizada.

Requerimientos de configuración

La configuración mínima que se necesita para instalar y ejecutar el Entrenador en Ecuaciones Diferenciales es la siguiente :

- Microprocesador 386 o superior
- 4 Mb de memoria RAM
- Disco Duro con una capacidad de memoria libre de 10 Mb para instalar y ejecutar el Sistema
- Monitor VGA o superior
- Mouse
- Windows 3.1 o superior

Conclusiones

EDIF cumple con los objetivos que se trazaron en su realización, ya que el mismo resulta una herramienta útil en la asignatura de Matemática que incluye el tema. Es de fácil utilización y manejo y resulta una motivación para los alumnos por el estudio del tema Ecuaciones Diferenciales. Su introducción en los laboratorios ha posibilitado a los docentes de estas asignaturas, el uso de la computación a través de Entrenadores con herramientas de actualidad, y incorporar en sus P-1 estas actividades de laboratorios de computación que hasta el momento no poseían.

Bibliografía

Aguirregabiria M., Congreso Mundial Vasco Tecnología y Educación, País vasco, 1987.

Alfaro R. I., Dificultades en el aprendizaje, Madrid, 1991.

Alessi S., Trollip S, Computer Based Instruction. Methods and Development. Prentice Hall, New jersey, 1985.

Alfaro R. des, 1994] Andes Universidad de los, Revista de Informática Educativa, Bogotá, 1994.

García D., Hipertextos e hipermedia. Conferencia impartida en el curso de Informática Educativa. Centro de Estudios de Informática y Sistemas, 1994.

González J., Multimedia en la Educación. Centro de Estudios de Software para la Enseñanza (CESOFTE), La Habana, 1994.

López J., Ilustración y diseño con ordenador, Madrid, 1992.

Martí E., Aprender con ordenadores en la escuela, Cuadernos de educación #10, Universidad de Barcelona, 1992.

O'Shea T. y Self J., Enseñanza y aprendizaje con ordenadores. Inteligencia Artificial en la Educación. Ed. Científico Técnica, La Habana, 1985.

Pons Juan de P., Las nuevas tecnologías de la información en la Educación, Sevilla, 1993.

Algunas ideas sobre el uso de la computadora en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Valentina Badía Albanés
Departamento de Física General y Matemática, Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares

Resumen

En la Educación Superior, en la enseñanza de las asignaturas de la Disciplina Matemática, nos encontramos con problemas que carecen de solución analítica o la misma se hace muy difícil de encontrar, por lo que en ocasiones se abandonan los problemas de mayor interés práctico . En otros casos, aún después de hallada la solución, la dificultad aparece en la interpretación de resultados, pues las dependencias funcionales son bastante complejas y no evidentes.

Esto conduce a cierto grado de operativismo, superficialidad en los análisis, poca motivación por parte de los estudiantes e insuficiente transferencia de los saberes. En este contexto, es necesaria la búsqueda de vías que conduzcan a un aprendizaje más efectivo y desarrollador.

Una de las alternativas que se somete a análisis en el presente estudio es la introducción de la computación en la enseñanza, por ser esta una de las tendencias actuales de la enseñanza en la Educación Superior y a la cual debe brindársele una atención especial.

Las ideas que se discuten están enfocadas al estudio de la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y son el resultado de la experiencia de la autora en la impartición de esta materia, del análisis de la bibliografía consultada sobre este tema y del intercambio de criterios con colegas e investigadores interesados en estas cuestiones.

Introducción

Es un hecho innegable que la informática es ya parte de la cultura de la humanidad. La aparición de las computadoras personales durante la década de los ochenta y la amplia difusión de las mismas durante la presente década , deberá repercutir en la forma en que se efectúa la enseñanza en todos los niveles, fundamentalmente en la Educación Superior.

Los cambios en la enseñanza deberán estar a la altura de los logros obtenidos en la Ciencia y la Tecnología. Modernizar el contenido y la metodología de impartición de las materias, para aumentar la calidad del proceso docente, es una tarea de gran actualidad.

Cada profesor, de cualquier Universidad, deberá pensar en la manera de usar la computadora en la materia que imparte, de tal forma que se corresponda su uso con el objeto de estudio y con el estilo de enseñanza-aprendizaje, ya que las condiciones en cada lugar pueden ser muy diferentes. Puede ocuparse una posición de vanguardia en la utilización de la computadora en la enseñanza de la Matemática, inclusive sin poseer grandes recursos tecnológicos, pues el resultado dependerá , sobre todo, de las ideas pedagógicas adoptadas.

El uso de la computadora debe responder a una concepción integradora y ser coherente con los objetivos educativos e instructivos a cada nivel y en cada materia. Las mismas no deben concebirse como un medio de enseñanza más, que realice entradas y salidas eventuales durante el curso. Tampoco deben tratarse como accesorios a los cursos de Matemática de estilo tradicional. Las computadoras deben considerarse como un elemento esencial del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las actividades realizadas con la computadora, deberán contribuir a desarrollar el pensamiento teórico, creador y la imaginación de los estudiantes.

Como planteó R. Pea (1987), "una tecnología cognitiva es cualquier medio que ayude a vencer las limitaciones de la mente", y en ese sentido ,es que debemos explotar al máximo todas las posibilidades que nos brinda la computadora, que además aproxima el proceso de enseñanza -aprendizaje , a la actividad investigativa.

De cierta manera, este intento es parte de lo que hace hoy la educación para formar a quienes serán los protagonistas del porvenir. Es un pequeño elemento de la respuesta a la interrogante de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI: ¿Cómo puede la educación desempeñar un papel dinámico y constructivo para preparar a los individuos y las sociedades del Siglo XXI? (Delors, 1996).

Los sistemas algebraicos computacionales como herramientas de aprendizaje

Los sistemas algebraicos computacionales no son una respuesta a las necesidades educacionales, sino que surgieron como resultado de la innovación tecnológica. Pero lo cierto es que están ahí, al alcance de la educación matemática. Los maestros de Matemática debemos convertir a la computadora en nuestra aliada y ocuparnos seriamente de la identificación del lugar que estos sistemas deben ocupar en la instrucción matemática.

En el debate surgido alrededor de la introducción de la computadora en la docencia hay dos extremos: "Los sistemas algebraicos computacionales proveen de oportunidades sin precedentes para enriquecer el entendimiento y apreciación de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes" y "debido a su potencia y disponibilidad creciente, los abusos y usos indebidos de estos sistemas, pueden causar un daño considerable a la vitalidad e integridad de la educación matemática" (Page, 1990)

Lo cierto es que la nueva generación de sistemas algebraicos computacionales (MAPLE, MATHEMATICA, DERIVE, etc) ha tenido gran aceptación dentro de la comunidad matemática. Los mismos proveen de un amplio repertorio de herramientas matemáticas, eliminan el penoso trabajo de cálculos complejos y le brindan a los estudiantes múltiples enfoques en la resolución de problemas, utilizando las representaciones analíticas, numéricas y gráficas.

Estos sistemas son más que sistemas algebraicos o manipuladores simbólicos, son lenguajes de manipulación matemática que poseen los siguientes atributos, que los hacen pedagógicamente atractivos (Hillel 1991):

- Tienen representación integrada: simbólica, numérica, tabular y gráfica.
- El usuario puede definir construcciones de nuevos objetos matemáticos y procesos.
- Pueden usarse a través de diferentes tópicos y en diferentes niveles de dificultad.
- Usan un vocabulario matemático coherente.
- Tienen todas las características de procesadores de texto.

Por otra parte, el trabajo en el laboratorio con estos sistemas, propicia un estilo más activo y exploratorio en el aprendizaje de la Matemática. Todo esto sin olvidar la incidencia del factor motivacional, pues una actividad realizada con la computadora resulta muy atractiva para el estudiante.

Descripción de la plataforma elegida

Los laboratorios computacionales que se diseñaron, se hicieron usando el MATHEMATICA. ¿ Por qué este software?. Cada sistema tiene sus fortalezas y debilidades. Por ejemplo, mientras que el MAPLE tiene muy buenas rutinas simbólicas y un vocabulario cómodo, los gráficos del MATHEMATICA son superiores. Estas posibilidades para la visualización del MATHEMATICA , determinaron que nos inclináramos hacia su uso.

No obstante, se supone que en el futuro, las versiones posteriores de sistemas algebraicos computacionales, tenderán a converger, cada uno adoptando las fortalezas del otro; tendrán una mejor interface y resultarán más amistosas para los estudiantes.

Entre todas las asignaturas de la disciplina Matemática , se escogió la materia Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como plataforma para realizar el estudio. Esta elección se fundamenta en:

1) Es una asignatura integradora de los conocimientos adquiridos en Algebra y Cálculo Diferencial e Integral.

2) Se imparte en segundo año de la especialidad , para ese entonces el estudiante ya transitó por la fase crítica de adaptación al sistema de enseñanza de la Universidad y está mejor preparado para recibir y asimilar tipos diferentes de influencias pedagógicas de una manera más efectiva.

3) Por último, el propio objeto de estudio de la asignatura brinda un marco apropiado y da inmensas posibilidades para el empleo de ideas creativas, novedosas, para la exploración numérica y para el análisis e interpretación de resultados.

El marco teórico general en que se inserta la investigación es en la concepción del proceso de enseñanza - aprendizaje desde un enfoque histórico cultural, en que el estudiante juega un papel activo en la construcción de su conocimiento.

Un marco teórico más específico, lo constituyen los modelos teóricos de enseñanza aprendizaje para el desarrollo del talento que aparecen en la bibliografía consultada y que pueden utilizarse, ya sea por separado o en combinación, en la elaboración curricular de programas de estudio. Cada modelo tiene sus ventajas y sus desventajas, así como diferencias de grado para especificar las estrategias que sugieren, también parten de distintos supuestos y bases filosóficas. El profesor debe ser capaz de escoger la mejor combinación para planear su curso.

Constituyen también fuentes teóricas del presente trabajo, las ideas aparecidas en la literatura sobre la utilización de la computadora en la enseñanza .

Una experiencia en la asignatura ecuaciones diferenciales ordinarias

Durante el curso pasado fueron llevadas a cabo, varias actividades de laboratorio con el uso del MATHEMATICA. A modo de ejemplo citaré lo relacionado con el tema de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Se realizó una actividad de preparación previa que consistió en una especie de acercamiento de los estudiantes al código, pues se explicó la filosofía general del programa y se esbozaron las instrucciones y herramientas que serían usadas con mayor frecuencia en las clases. Dentro del tema se realizaron dos clases de laboratorio. La primera fue el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y la segunda clase fue sobre dinámica no lineal.

Durante la primera clase los estudiantes se familiarizaron con las instrucciones que se usan para resolver las ecuaciones diferenciales y los sistemas de ecuaciones diferenciales de forma analítica, el modo de introducir las condiciones iniciales para la obtención de soluciones particulares, la forma en que el programa presenta las soluciones analíticas, las diferentes opciones de presentación de estos resultados, la manera de obtener comportamientos temporales y comportamientos en el espacio de fases.

En la segunda actividad fueron estudiados: Atractores puntuales, un ejemplo de ciclo límite, el sistema de Lorenz, el sistema de Rossler y el oscilador de Duffing. La proposición de problemas que no tienen solución analítica permitió explotar la posibilidad de irse más allá de lo que normalmente se hace en el aula y alejarse de los problemas estereotipados que aparecen en los libros de texto.

Los estudiantes investigaron la sensibilidad de tales sistemas no lineales a las condiciones iniciales y a la variación de los parámetros del modelo. Dentro del laboratorio se llevó a cabo una discusión colectiva de los resultados obtenidos, que incluyó el análisis de situaciones desde el punto de vista físico. Puede pensarse en la generación de otras actividades que aumenten la calidad del análisis de resultados, como por ejemplo, el estudio de casos límites, el estudio de singularidades y la resolución de problemas más complejos.

Los estudiantes se mostraron muy motivados durante la realización de ambas actividades, en particular de la segunda, surgieron muchas ideas e interrogantes que ellos fueron capaces de explorar e investigar por sí mismos.

Debe señalarse, que debido a las condiciones concretas de nuestra escuela, en lo referente a la disponibilidad de máquinas computadoras, los estudiantes cumplimentaron estos laboratorios en parejas. Además tuvieron a su disposición la guía de tareas para el trabajo en la clase de laboratorio.

Algunas consideraciones de interés

Es imprescindible la orientación previa del laboratorio computacional, el estudiante debe acudir con la base teórica adecuada y con la guía de actividades a realizar , sólo así puede usarse de forma eficiente el tiempo dedicado al laboratorio.

No hace falta tener una computadora por alumno, basta con un laboratorio computacional bien equipado en cada escuela.

Los estudiantes deben entender las limitaciones reales de la herramienta que se pone en sus manos.

Debe darse cierta libertad al estudiante para que experimente por sí sólo y se sienta confiado para generar nuevas ideas e interrogantes, no debemos temer a las preguntas que a ellos se les puedan ocurrir, sólo cuando el estudiante nos supere, nos multiplique, habremos cumplido bien con nuestra misión.

Hay que pensar en cuestiones tales como:

- ¿ Cómo introducir el uso de la computadora, de forma tal que se puedan ir descargando los programas de las asignaturas?
- ¿ Hasta qué punto se debe enseñar computación y uso de paquetes profesionales y dejar de enseñar métodos analíticos de solución de problemas?
- ¿ En qué asignaturas y en qué parte de la asignatura debe introducirse el uso de la computadora?

Conclusiones

A pesar de la introducción masiva de las microcomputadoras en la educación, aún son pobres los resultados obtenidos en la enseñanza de la Matemática, en comparación con las posibilidades que brinda la nueva tecnología.

En particular, dentro de la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias debe continuarse trabajando para generar actividades que resulten interesantes y ricas en contenido, tanto físico, como matemático; es decir, el diseño de laboratorios computacionales debe verse como una alternativa real a la realización de clases prácticas tradicionales en el aula en que todo se resuelve a mano.

El uso de la computación contribuirá al aumento de la efectividad del aprendizaje de los estudiantes, pues se logra una mayor comprensión de los conceptos estudiados.

Los profesores que nos disponemos a enfrentar los retos del nuevo Siglo debemos ser receptivos y estar preparados para utilizar todas las vías que conduzcan al mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje en los centros de Educación Superior.

Bibliografía

Delors, J. "Formar a los protagonistas del futuro". Revista Correo de la UNESCO. Abril, 1996.

Elsgoltz, L. "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional" Editorial Mir, 1983.

Hillel, J. " Computer algebra systems as learning tools". International Reviews on Mathematical Education. ZDM ,No.5, 1991.

Page,W. "Computer Algebra Systems, Issues and Inquiries". Computer Mathematical Applications. No. 6, 1990.

Pea R. "Cognitive Technologies for Mathematics Education" . Cognitive Science and Mathematical Education. Hillsdale,1987,p. 89-122.

Silva y Ortiz , M.T. " El niño sobredotado". Editorial EDAMEX, México, 1992.

Tall D.O. "A Versatile Approach to Calculus and Numerical Methods" . Mathematics Education Research Centre. University of Warwick. UK. 1987

Tall D.O. "Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking" .. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick. UK. 1988.

Valdés R. " Objetivos fundamentales y metodología de la utilización de las computadoras en la enseñanza de la Física". Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. C.Habana,1996.

Wolfram S."Mathematica: A system for doing Mathematics by computer". Copyright 1991.

Polymath: software matemático para la enseñanza de la ingeniería química

Milagros Horta N., Roberto A. González C., Marcelo Marcet S., Lilian D. Curiel L., Nancy Horta C.
Facultad de Ingeniería Química, Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos"
Cuba

Introducción

En la enseñanza de la Ingeniería Química en la Universidad de Matanzas, se han empleado diferentes software para la solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales y no Lineales y de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, empleándose gran parte de ellos desde la enseñanza de los Métodos Numéricos. Como ejemplo se tiene el **TKSolver, Mathematica, Derive** y el **Matnum** y más recientemente el **MatLab**, todos ellos con diferentes características tanto desde el punto de vista de sus posibilidades como desde el punto de vista de los requerimientos de hardware.

Más recientemente se introdujo el **Polymath** desarrollado por la **CACHE** *(Computers Aided for Chemical Engineering)* en sus versiones 3.0 y 4.0, el cual se ha comenzado a utilizar en la Enseñanza de la Modelación y Simulación Matemáticas y en Asignaturas como Termodinámica, Balances de Materiales y Energía, Reactores y Operaciones Unitarias y resulta por tanto conveniente realizar la comparación del mismo con los software que se han estado utilizando hasta el momento, con vistas a definir su real utilidad y tratar de unificar en lo posible el uso de los software de tipo matemático en la enseñanza de la Ingeniería Química.

Características del polymath 3.0.

Esta versión corre en las computadoras personales compatibles IBM, requiriendo una memoria mínima de 512 Kb, con MS´DOS 3.0 y superiores y puede correr también como una aplicación DOS bajo Windows. Consta de tres programas principales y un utilitario (Sachan y Cutlip, 1994):

Resolvedor de Ecuaciones Diferenciales

Permite resolver hasta 12 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias simultáneas y ecuaciones algebraicas auxiliares, con lo cual constituye un simulador dinámico interactivo. Las ecuaciones se introducen en su notación matemática normal y se chequean automáticamente desde el punto de vista sintáctico, alertando de inmediato ante cualquier error. El usuario debe suministrar solamente información relacionada con el modelo matemático (ecuaciones, condiciones iniciales y valor final). No necesita que se le suministre información técnica tales como métodos de integración, tamaño del paso, escalado de los gráficos, etc. Después de que se entran las ecuaciones sólo se requiere pocos segundos de tiempo de computación para resolver los problemas más complicados.

Puede alternar entre tres métodos de integración para la solución numérica de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Comienza en todos los casos con el método **Euler explícito** y se estima el error de integración repitiendo el mismo paso y haciéndolo entonces con dos pasos de longitud h/2. Si el error de integración estimado es menor que 0.01 veces la tolerancia del error, continúa con ese método. En caso contrario pasa a utilizar el método **Runge-Kutta-Fehlberg (RKF)** de cuarto orden con estimación del error y control del tamaño del paso.

En el método de **RKF** el error local de truncamiento de la integración se estima comparando los valores de la variable en el tiempo, empleando alternativamente el método **Runge Kutta** de 3^{ero} y 4to orden. El **RKF** monitorea el estimado del error de integración obtenido de esa forma y en consecuencia reduce o incrementa el tamaño del paso de integración para mantener el error por debajo de un valor límite especificado. El tamaño del paso se reduce hasta un mínimo de h = (intervalo de integración)/160. Si en ese caso el error de integración continúa muy grande (mayor que 0.1 veces la tolerancia), el proceso de integración se detiene y se le pregunta al usuario si desea continuar con un método específico para *sistemas rígidos*, en ese caso el **Euler Implícito**.

Como limitación se tiene que el método **Euler Implícito** no está ajustado para integrar Ecuaciones Diferenciales Rígidas (**EDR)** en periodos de integración relativamente prolongados (Sachan, Brauner y Cutlip, 1994), por lo que en esos casos el programa advierte que el periodo de integración es muy grande y debe ser reducido.

Resolvedor de Ecuaciones Algebraicas

Permite resolver simultáneamente hasta doce ecuaciones y expresiones algebraicas implícitas y también chequea automáticamente los errores de sintaxis y cualquier otro error en la introducción de datos. Las ecuaciones se pueden añadir, modificar o eliminar fácilmente. Se incluye también un resolvedor de ecuaciones lineales simples, el cual puede resolver hasta seis ecuaciones simultáneas.

Análisis de Regresión No Lineal, Lineal Múltiple y Polinomial

Este programa permite introducir datos numéricos hasta un máximo de 30 columnas, pudiendo contener hasta 100 puntos de datos cada columna. Los datos se manipulan mediante expresiones que contienen los nombres de cada columna y de esa forma se pueden hallar las relaciones entre las diferentes variables (columnas de datos), utilizando regresiones lineales múltiples, no lineales y polinomiales, así como mediante interpolación con *splines* cúbicas. Las curvas ajustadas pueden ser interpoladas, diferenciadas e integradas. Permite la salida gráfica de las curvas ajustadas y efectúa un análisis estadístico de los parámetros obtenidos durante la regresión.

Utilitarios

Cuenta con un *calculador* que tiene disponible un gran número de funciones normales (exponenciales, funciones trigonométricas, raíces, etc.) y permite entrar cualquier expresión y obtener su valor inmediato, de mucha utilidad en los cálculos previos a la solución de los sistemas de ecuaciones y para diversos usos prácticos. Tiene además un *convertidor de unidades* que es accesible desde cualquier parte del paquete y permite realizar en cualquier momento en que sea necesario conversiones de unidades de energía, fuerza, longitud, masa, potencia, presión, volumen o temperatura, lo que resulta también de gran utilidad práctica en los problemas de ingeniería.

Polymath 4.0.

En esta versión se ha incrementado considerablemente la potencia del **Polymath** 3.0 lo cual compensa el incremento de sus necesidades de hardware. En este aspecto, aunque en su manual (Sachan y Cutlip, 1996) se mantienen los mismos requisitos que para la versión 3.0, en la práctica se ha comprobado que no corre adecuadamente en las computadoras que no disponen de coprocesador matemático ni de una adecuada capacidad de memoria RAM. A diferencia del **Polymath 3.0** consta de cuatro programas principales y tiene también un utilitario:

Resolvedor de Ecuaciones Diferenciales

Incrementa el número máximo de ecuaciones diferenciales y algebraicas simultáneas hasta 31 e introduce una función lógica *if* que permite incluir condicionales en el sistema de ecuaciones a resolver y que puede ser anidada hasta cuatro veces, lo que amplía considerablemente la flexibilidad del simulador.

Elimina el uso del método de **Euler** tanto **implícito** como **explícito** y comienza siempre con el método de **Runge-Kutta-Fehlberg** de cuarto orden. La tolerancia del error absoluto y relativo con que comienza el método es menor que 10^{-10}. Si no se puede obtener una exactitud tan alta, el programa prueba reduciéndola a 10^{-7}, y si tampoco se logra prueba con 10^{-4}. *Si incluso esa exactitud no se obtiene la integración se para y el usuario puede escoger un* algoritmo especial para **EDR**, o sea el **Midpoint semi implícito**. Ese algoritmo incluye también estimación del error y control del tamaño del paso, siendo la tolerancia del error máximo requerida de 10^{-10}. El **Midpoint semi implícito,** a diferencia del **Euler implícito** que se empleaba en **Polymath 3.0**, está ajustado para integrar sistemas rígidos en un intervalo de integración grande, por lo cual se elimina la limitación que tenía el **Polymath 3.0** para las **EDR**.

Resolvedor de Ecuaciones Algebraicas No Lineales.

Amplía también la capacidad del mismo de 12 que permitía el **Polymath 3.0** hasta 31 ecuaciones simultáneas y lo especializa en las ecuaciones no lineales, dejando el resolvedor para ecuaciones lineales como un resolvedor aparte, también con más capacidad.

Resolvedor de Ecuaciones Lineales.

Se incrementa el número de ecuaciones de 6 que permitía el pequeño resolvedor lineal anexo al resolvedor de Ecuaciones Algebraicas de **Polymath 3.0** hasta 31 ecuaciones en un Resolvedor independiente de **Polymath 4.0** y su entrada se realiza de manera similar que en las hojas de cálculo (*spreadsheets*).

Experiencias en la utilización del polymath en la universidad de Matanzas.

El **Polymath** se ha empleado por más de una década en la enseñanza de Ingeniería Química en muchas Universidades de EE.UU., desde sus versiones 1 y 2 iniciales (Sachan y Cutlip, 1988; Sachan, Brauner y Cutlip, 1994) y se comenzó a utilizar en su Versión 3.0 en la Universidad de Matanzas desde 1995 (González et al., 1997) y en su Versión 4.0 desde 1996.

Para su uso se dispone de un libro con problemas resueltos de **Polymath 3.0** (Sachan y Cutlip 1995) que abarcan casi la totalidad de los programas de las asignaturas especializadas de la carrera de Ingeniería Química (Termodinámica, Balance de Materiales y Energía, Reactores y Operaciones Unitarias), lo que ha facilitado considerablemente su uso y ayudado a una mayor divulgación del mismo.

El hecho de contar en un mismo paquete con herramientas de cálculo, conversión de unidades y análisis estadístico de regresión, resulta de gran utilidad para la realización de los cálculos en los ejercicios de todas las asignaturas antes mencionadas. Además, como no se requieren suministrar datos técnicos para la solución de las ecuaciones diferenciales y algebraicas y las mismas se introducen en una notación casi igual a la normal, el alumno se puede concentrar en los requerimientos específicos de las asignaturas y no se distraen con los aspectos de análisis numérico o programación.

Sin embargo el hecho de ser un programa que avisa de la presencia de las **EDR**, para señalar la necesidad de emplear un método de integración diferente al que asume por defecto, ha servido de acicate al estudio de las **EDR** y ha permitido también demostrar la importancia de introducir este tipo de ecuaciones diferenciales en el estudio de los Métodos Numéricos en la Carrera de Ingeniería Química en particular y en general en todas las carreras de Ciencias Técnicas (Horta et al., 1998).

Se ha utilizado también este paquete matemático en la Simulación Dinámica de procesos, aunque se ha limitado a procesos sencillos, debido a la cantidad relativamente reducida de ecuaciones que permite manejar, sobre todo en su Versión 3.0 (González, 1998).

Comparación con otros paquetes matemáticos.

Las características propias del **Polymath** como paquete de programas de análisis numérico para uso práctico por alumnos y por profesionales en tareas prácticas de producción, lo diferencian de paquetes matemáticos más generales y por lo tanto más complejos como el **Matematica** o el **MatLab**, los cuales tienen posibilidades también de cálculo simbólicos y están más orientados a la enseñanza de las Matemáticas en general. aunque en el MatLab tienen un gran peso sus aplicaciones prácticas ingenieriles con el **Simulink** y los **ToolBoxs** que se le incorporan. También se diferencia de programas como el **Matnum**, orientado específicamente a la enseñanza de los Métodos Numéricos, dada la orientación práctica del **Polymath**, lo que lo hace incluso no apto para la enseñanza de los métodos numéricos, ya que no permite seleccionar entre métodos ni realizar ajustes técnicos en los método utilizados.

Por otra parte, cuando se compara con simuladores profesionales como el **PSI/c** o el **ISIM**, o programas como el **ModelMaker**, el **Polymath** se ve muy limitado en el número de ecuaciones algebraicas o diferenciales a resolver, por lo cual no puede ser empleado para simular procesos muy complejos, aunque esto realmente se aparta del objetivo con el que fue creado, ya que la simulación dinámica de problemas complejos se sale de la enseñanza de pregrado y del uso diario práctico del ingeniero de proceso.

Cuando se compara con el **TKSolver**, la diferencia fundamental radica en que el **TKSolver** está concebido fundamentalmente para resolver ecuaciones algebraicas, por lo cual no tiene realmente un resolvedor de ecuaciones diferenciales y por lo tanto no puede ser considerado de por si un simulador. No obstante sus facilidades de programación hacen que se le hayan podido incorporar programas para la solución de ecuaciones diferenciales, con los cuales se pueden realizar también simulaciones dinámicas simples.

El **TKSolver** no cuenta tampoco con un libro con problemas resueltos para las distintas asignaturas especializadas de Ingeniería Química como el **Polymath**, aunque en el caso de la Universidad de Matanzas esto se compensa en parte dado el uso extensivo que se le ha dado desde hace varios años, lo que hace que disponga también de un número de aplicaciones prácticas en algunas asignaturas de Ingeniería Química. No obstante, hasta el momento no ha sido posible lograr un uso extensivo del **TKSolver** por la totalidad de los profesores de la Carrera, sobre todo en el caso de los que no tienen una gran familiaridad con la computación y esto se facilita considerablemente con el **Polymath**, fundamentalmente por la existencia del mencionado libro y por el hecho de que no requiere definiciones técnicas en la ejecución de los métodos de integración, lo cual si requiere el **TKSolver** en los procedimientos desarrollados con ese fin.

Conclusiones y Recomendaciones:

El **Polymath** resulta un paquete matemático sencillo en su utilización, que satisface los requerimientos docentes de la totalidad de las asignaturas especializadas de la carrera de Ingeniería Química y que tiene grandes posibilidades para su uso extensivo por profesores y alumnos dada su sencillez y la gran cantidad de posibilidades de uso práctico que brinda.

La utilización del Polymath debe circunscribirse al uso en la enseñanza de pregrado y en el trabajo práctico de los Ingenieros Químicos en la producción. En la enseñanza de postgrado deberán emplearse otros simuladores más complejos y para la enseñanza de las Matemáticas en general y los Métodos Numéricos en particular deberán emplearse software especializados como el **Derive**, **Matematica** o **Matlab**.

Se debe trabajar para lograr una mayor difusión del Polymath en la enseñanza de la Ingeniería Química en la Universidad de Matanzas y en el resto de las Universidades de Cuba.

Bibliografía

Glez, R.A; Tecnología Química; 1998.

Horta,M.;Glez, R.A; Tarifa,L.; Horta,N. "Necesidad de introducir las EDR en las carreras de ciencias técnicas en Cuba";Venezuela; 1998.

Shacham,M.; Cutlip, M.B.; User Manual Polymath 3.0; CACHE; 1994.

Shacham,M.;Brauner,N.; Clutip,M.B.;Exothermic CSRTs.Just How Stable are the Multiple Steady States?; Chemical Engineering Education; 1994.

Shacham,M.;Clutip,M.B.;"Aplication of a Microcomputer Computation Package in Chemical Engineering Education"; Chemical Engineering Education; **12** (1); 18 (1988).

Shacham,M; Cutlip, M.B.;"Numerical Solution of Chemical Engineering Problems using POLYMATH; CACHE;Austin TX; 1996.

Shacham,M; Cutlip, M.B.; User Manual Polymath 4.0; CACHE; 1996.

Una experiencia sobre la vinculación de las asignaturas Álgebra Lineal y Geometría Analítica con computación para el perfil mecánico

Elena Fraga G., Luis A. Reig M., Laura S. Flores B., Lilian Delgado J. (efraga@mecanica.ispjae.edu.cu)
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría " Ciudad de la Habana
Cuba

Resumen

En los actuales lineamientos de la Educación Superior en nuestro país uno de los aspectos fundamentales que se plantea es lograr una articulación horizontal y vertical de las asignaturas que conforman el plan de estudios de los futuros profesionales.

Es por ello que esta experiencia se propone mostrar a los estudiantes la vinculación que existe entre la asignatura "Álgebra Lineal y Geometría Analítica" con AutoCAD, software que se imparte dentro de la "Computación", las cuales forman parte del programa de asignaturas de la carrera de Ingeniería Mecánica.

Es sabido que los editores gráficos, en su gran mayoría, basan sus principales transformaciones en el cálculo matricial, AutoCAD da solución al problema gráfico, pero no muestra al usuario el tratamiento matemático que utiliza para darle solución a la situación gráfica planteada; por lo que se introdujo en Álgebra Lineal el estudio de las transformaciones geométricas básicas referidas a una figura u objeto representado en el plano y el tratamiento matricial que sustenta las mismas. Estas son:

1. Rotar un ángulo determinado con respecto al origen de coordenadas.
2. Traslación.
3. Reflexión respecto a los ejes coordenados.
4. Escalado.

Además se realizó un laboratorio de Computación donde se vinculó el AutoCAD con el contenido impartido en Álgebra Lineal antes mencionado utilizando el asistente matemático DERIVE y mostrándoles a los estudiantes cómo mediante operaciones con matrices pueden lograr las mismas transformaciones que el AutoCAD realiza como básicas.

Esta experiencia se aplicó por primera vez en la Facultad de Ingeniería Mecánica en dos grupos de primer año en el curso 1997-1998, lográndose una alta motivación por ambas asignaturas.

Introducción

En la actualidad, con el impetuoso avance de las técnicas desarrolladas en computación, tanto en la parte correspondiente al hardware como en lo que a desarrollo de los software se refiere, resulta esencial que los profesionales de las ciencias y la técnica conozcan las llamadas "cajas negras" de los software profesionales con vistas a tener un mayor conocimiento del funcionamiento de los mismos y en algunos casos operar sobre estos.

Uno de los software con más utilización en nuestra época, por las posibilidades que brinda, es el AutoCAD, el cual en todas las versiones hasta el momento desarrolladas, tiene como objetivo primordial realizar transformaciones en el plano (R^2) y en el espacio (R^3) de entidades. Este software utiliza las herramientas del cálculo matricial para realizar las transformaciones básicas (geométricas y de coordenadas): Rotación, Traslación, Reflexión y Escalado en el plano y en el espacio.

Por otra parte, uno de los aspectos fundamentales que se plantean en los actuales lineamientos de la Educación Superior en nuestro país es lograr una articulación horizontal y vertical de las asignaturas que conforman el plan de estudios de los futuros profesionales, por lo que se introdujo en Algebra Lineal el tema de las transformaciones geométricas con su tratamiento matricial correspondiente, para mostrar la vinculación de esta asignatura con Computación, que tiene como uno de los temas la impartición del software AutoCAD. Además se realizó un laboratorio de Computación en Algebra Lineal utilizando el asistente matemático DERIVE y mostrándoles a los estudiantes cómo mediante operaciones con matrices pueden lograr las mismas transformaciones que el AutoCAD realiza como básicas.

Desarrollo

Para estudiar las llamadas transformaciones de un objeto en el plano es necesario primero conocer a que se llama objeto:

"Considérese un sistema coordenado X,Y en el plano, un OBJETO en el plano puede considerarse como un conjunto de puntos P de coordenadas (x, y) de manera tal que el objeto es la "suma" total de todos sus puntos coordenados [1]".

Existen dos puntos de vistas complementarios para describir el movimiento de objetos. El primero es que el objeto se mueve en relación con un sistema de coordenadas estacionario o fondo, el planteamiento matemático de tal punto de vista se explica mediante transformaciones geométricas aplicadas a cada punto del objeto. El segundo punto de vista sostiene que el objeto se mantiene estacionario mientras que el sistema de coordenadas se mueve con relación a dicho objeto; este efecto se obtiene a través de la aplicación de transformaciones de coordenadas.[1] Las transformaciones geométricas básicas son las siguientes:

1. Rotación con respecto al origen de coordenadas.

En la rotación se rota la figura un ángulo θ con respecto al origen de coordenadas, la transformación de rotación R es aquella que permite obtener la imagen de cualquier punto P mediante la expresión

P' = R (P) y las coordenadas del punto P' son:

$$x' = x.\cos\theta - y.\operatorname{sen}\theta$$

$$y' = x.\operatorname{sen}\theta + y.\cos\theta$$

Esta transformación la realiza AutoCAD con el comando ROTATE.

Este comando permite la transformación de rotación no solo con respecto al origen de coordenadas, sino con respecto a cualquier punto del plano, se encuentre este contenido en el objeto o fuera de él, lo que es posible basándose en una concatenación de transformaciones básicas que se explican posteriormente en este trabajo.

2. Puesta en escala con respecto al origen.

La puesta en escala es el proceso de "expandir o comprimir" las dimensiones de un objeto. Se utilizan constantes positivas de puesta en escala Sx y Sy para describir los cambios en longitud con respecto a los ejes X e Y respectivamente. Esta transformación puede ser representada por: P' = S (P), las coordenadas del nuevo punto P' son:

$$x' = Sx.\ x$$

$$y' = Sy.\ y$$

AutoCAD con el comando SCALE realiza esta transformación, pero como en el caso de la rotación permite la realización de la puesta en escala con respecto al origen de coordenadas o a cualquier punto del plano XY, se encuentre este dentro o fuera del objeto, de encontrarse fuera de los límites del objeto se alterará entonces la distancia de este al origen del sistema coordenado.

3. Reflexión con respecto a los ejes coordenados.

La transformación de reflexión Mx con respecto al eje "x" es aquella que a todo punto P (x, y) del plano le hace corresponder como imagen el punto P'(x', y') y las coordenadas del nuevo punto P' están dadas por:

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

De forma análoga se define, la transformación de reflexión My con respecto al eje "y", y las coordenadas del punto P'(x', y') están dadas por:

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

MIRROR es el comando de AutoCAD que realiza esta transformación y permite reflejar el objeto respecto a los ejes coordenados o con respecto a cualquier otra recta en el plano, al igual que en las transformaciones anteriores para lograr este resultado realiza una composición de transformaciones que es explicada posteriormente.

Se puede demostrar que las transformaciones de Rotación con respecto al origen, Reflexión con respecto a los ejes coordenados y Escalado constituyen endomorfismos de R^2, o sea son aplicaciones lineales que a todo vector de un espacio vectorial R^2 le hace corresponder como imagen un vector del mismo espacio vectorial R^2.

En estos casos es posible encontrar la matriz asociada a cada una de estas aplicaciones para una base A cualquiera del espacio vectorial R^2. La utilización de estas matrices permite calcular la imagen de cualquier vector del espacio vectorial R^2 en la base A, ya que toda matriz asociada a una aplicación lineal la representa totalmente.

Utilizando la expresión:

$$[\,f(X)\,]_A = M(f\,;A)\,.\,X_A$$

donde M(f ; A) es la matriz asociada al endomorfismo f para la base A y X_A las coordenadas del vector X= (x,y) $\in R^2$ en la base A, se obtienen las coordenadas del vector imagen f(X) en la base A; una vez conocidas las coordenadas $[\,f(X)\,]_A$ es posible obtener la imagen del vector X.

Como A es cualquier base del espacio vectorial R^2, entonces en particular se puede tomar la base canónica de R^2, o sea A = { (1,0) (0,1)} $\subset R^2$ y como las coordenadas de cualquier vector de R^2 en la base canónica coinciden con las componentes del vector, tiene lugar entonces lo siguiente:

- Para la Rotación con respecto al origen:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

- Para el Escalado:

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

- Para la Reflexión con respecto a los ejes coordenados,

Con respecto al eje x:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Con respecto al eje y:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Por lo que se pueden hallar las coordenadas de P', una vez efectuada una de las transformaciones anteriores multiplicando la matriz asociada a cada una de ellas por las componentes del vector X = (x,y) $\in R^2$.

4. Traslación

En la traslación un objeto se desplaza una distancia y dirección determinadas a partir de su posición original. Si el desplazamiento está dado por el vector: v = tx *i* + ty *j*, el nuevo punto P' (x', y') puede obtenerse al aplicar la transformación a P (x, y), en donde:

$$x' = x + tx$$

$$y' = y + ty$$

La traslación no constituye una aplicación lineal pues la imagen del vector nulo de R^2 mediante esta aplicación no es el vector nulo de R^2.

Esta transformación se puede representar en forma matricial de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

mediante la utilización de las llamadas coordenadas homogéneas.

El comando utilizado por AutoCAD para efectuar esta transformación se denomina MOVE y permite elegir el punto de referencia del objeto, punto base, en cualquier lugar del sistema coordenado (pertenezca este al objeto o no) resolviendo este caso con la concatenación de las operaciones de transformación en el plano necesarias.

En la mayoría de los casos las transformaciones geométricas en el plano que se realizan en AutoCAD y en general en los editores gráficos, constituyen una composición de las transformaciones antes mencionadas, para la implementación de tales operaciones se utiliza el producto de las matrices asociadas a cada una de las aplicaciones para la base canónica de R^2, y se define de la siguiente forma:

"Sean f: $R^2 \to R^2$ y g: $R^2 \to R^2$ dos aplicaciones lineales, M (f ; A) y N (g; A) las matrices asociadas a f y a g respectivamente para la base A de R^2, entonces la aplicación (g o f): $R^2 \to R^2$ que a todo vector (x , y) $\in R^2$ le hace corresponder como imagen g (f (x , y)), tiene como matriz asociada para la base A la matriz P (g o f ; A) y esta es igual a N (g ; A) . M (f ; A) en este orden" [1]. Este proceso recibe el nombre de concatenación de matrices.

Existen infinidad de casos donde es necesario realizar una composición de transformaciones geométricas donde una de ellas es la traslación. Para establecer la conformidad para el producto de matrices se utilizan las coordenadas homogéneas en la operación producto de matrices, teniendo en cuenta que la matriz que representa a la traslación es una matriz de orden 3.

En la asignatura de Algebra Lineal y Geometría Analítica se tratan como primeros temas los relacionados con la Geometría Analítica del Plano y del Espacio y posteriormente se imparten los correspondientes a Algebra Lineal.

En esta experiencia Todos estos aspectos fueron abordados tanto en conferencias como en clases prácticas, realizando en estas últimas ejercicios en los que el estudiante debía realizar transformaciones geométricas a una figura determinada utilizando las herramientas del cálculo matricial y representar geométricamente la figura después de realizada la o las transformaciones geométricas propuestas a realizar.

Además se impartió un Laboratorio de Computación dentro de esta asignatura, en el que se utilizó el asistente matemático DERIVE soportado en ambiente Windows, y en el mismo se mostró a través de ejemplos concretos como se materializa la articulación entre las dos asignaturas, uno de estos ejercicios es el siguiente:

Dada la figura (Figura 1):

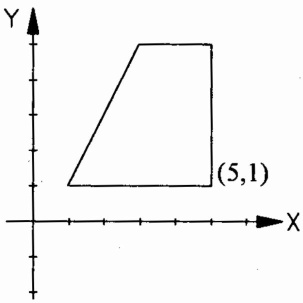


Figura 1. Representación del objeto en el plano

Efectúese una rotación de 45^0 en sentido positivo con respecto al punto (5,1):

Los pasos necesarios para realizar esta transformación son:

1. Trasladar el punto de referencia de manera tal que el punto (5,1) se encuentre en el origen de coordenadas.
2. Efectuar la rotación de 45^0 en sentido positivo de la figura con respecto al origen.
3. Trasladar la figura a su posición original.

Estas operaciones se pueden representar matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

Al resultado del producto de estas matrices se le llama matriz producto, y se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mediante la multiplicación de la matriz producto por las coordenadas de cada uno de los vértices de la figura original se obtienen los vértices de la figura rotada, cuya representación gráfica es:

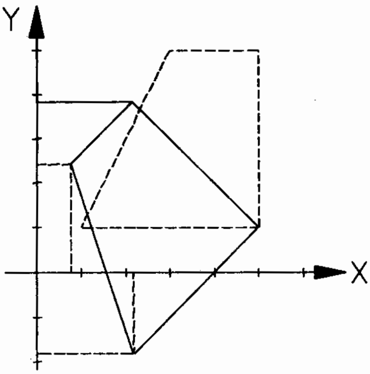


Figura 2. Objeto rotado

Es conveniente señalar además, que estos algoritmos matriciales constituyen la base matemática de los programas que utilizan las máquinas herramientas de Control Numérico para la tecnología de fabricación de piezas, temática que se aborda en la Asignatura de Máquinas Herramientas, la cual forma parte del plan de estudios de la carrera de Ingeniería Mecánica en el tercer año.

Conclusiones

A partir de estas experiencias aumentó considerablemente la motivación de los alumnos, al conocer una de las aplicaciones prácticas de los conocimientos teóricos que reciben en la asignatura "Álgebra Lineal y Geometría Analítica" por una parte y por la otra en "Computación", al conocer cual es la sustentación teórica de su funcionamiento, lo que trajo como consecuencia que mejorara ampliamente la atención a las actividades docentes y el tiempo de estudio dedicados a ellas.

No obstante, se propone como sugerencia incluir en este estudio las transformaciones de coordenadas que también trabajan los editores gráficos, pues permite mostrar una de las aplicaciones del tema "Matriz de cambio de base" en Espacios Vectoriales. Además se propone abordar estos dos puntos de vista para describir el movimiento de objetos en el espacio (R^3), lo que complementaría este estudio.

Bibliografía

Anónimo "Gráfica por Computadoras. Teoría y 442 problemas resueltos" Serie Shawn, Editorial McGrawn-Hill E.U., ISPJAE (fotocopia).

López J., Tajadura J. "AutoCAD Avanzado Release 12". Editorial McGrawn-Hill, España, 1994.

Noriega Sánchez, Teresita y De Arazoza Rodríguez, Héctor "Álgebra" Tomo I, Editorial Pueblo y Educación, 1986.

La informática en la enseñanza del cálculo para ingenieros: algunas experiencias.

Beatriz Deiros Fraga, Jesús A. Alvarez Sánchez
Instituto Superior Politécnico " José Antonio Echeverría", La Habana
Cuba

Resumen

Diversos han sido los estudios que se han realizado con vistas a encontrar e instrumentar soluciones eficaces a las dificultades que presentan los alumnos en la asimilación de los contenidos de Matemática, así como con vistas a contribuir de manera más directa a que la matemática juegue el papel que le corresponde dentro del plan de estudio de una carrera de Ingeniería.

Este trabajo es una contribución al perfeccionamiento de la asignatura Matemática I que se imparte en el primer semestre de la carrera de Ingeniería Mecánica en el Instituto Superior Politécnico " José Antonio Echeverría" (ISPJAE). De manera resumida se describen las características de actividades lectivas realizadas - con el apoyo de asistentes matemáticos- reflexionando en torno a las nuevas dificultades que tuvieron que enfrentar los estudiantes cuando se les solicitó la solución de diversos problemas mediante el empleo de las nuevas tecnologías informáticas. Entre otras observaciones, vale la pena resaltar que el alumno aplicó de forma consciente los algoritmos estudiados y comprobó que el trabajo con una herramienta informática no reemplaza el necesario conocimiento acerca de un tema; por su parte, el profesor incorporó al aula mayor cantidad de problemas, en particular con dificultades diferentes a las que se presentan en una clase tradicional.

El esfuerzo se justificaría si solo nos hubiéramos propuesto promover y perfeccionar la incorporación de las nuevas herramientas informáticas al desarrollo de la asignatura; pero además se contribuyó a elevar los niveles de asimilación y consolidación de los nuevos conocimientos que aporta el estudio del cálculo, así como a la formación profesional del futuro ingeniero.

Introducción

La asignatura Matemática I que se imparte en el primer año de la carrera de Ing. Mecánica en el ISPJAE está formada por los contenidos que corresponden al tema de Calculo Diferencial de funciones de una y varias variables. Se dispone para ello de 98 horas lectivas, incluyendo en este número las horas correspondientes a distintas actividades, es decir, conferencias, clases prácticas, seminarios, y actividades evaluativas (excepto el tiempo correspondiente al examen final).

De manera permanente el colectivo de nuestro departamento ha venido trabajando en el perfeccionamiento de la asignatura (3,4) incluyendo la incorporación al programa académico de las herramientas informáticas. Consideramos que en correspondencia con el momento actual, caracterizado por la formidable expansión que las nuevas tecnologías están experimentando, no es posible que las asignaturas de matemática se desarrollen sin que en ellas estén presentes las nuevas herramientas informáticas en una o varias de sus formas (1, 2, 5, 6).

Cuando el tema se relaciona directamente con los métodos numéricos, la inclusión de estas herramientas es aceptada de manera general. Sin embargo, a la hora de abordar otros temas a muchos profesores les cuesta trabajo aceptar la inserción en los programas analíticos de asistentes matemáticos. Los argumentos son variados: unos expresan que con ello los alumnos se van a "mecanizar" y no van a aprender el por qué de muchos procesos; en otros puede estar presente cierto temor, pues son los propios profesores quienes a veces no dominan el trabajo con herramientas informáticas.

En este trabajo se describe y se reflexiona en torno a las experiencias obtenidas con la incorporación de asistentes matemáticos en el marco del programa de la asignatura Matemática I. En particular se relacionan los temas abordados y en cada uno de ellos se comenta acerca de las transformaciones ocurridas. Los asistentes matemáticos utilizados son similares a los ya conocidos por la comunidad académica (DERIVE, Matemática, etc.).

Se fundamenta que el desarrollo de actividades lectivas con asistentes matemáticos no solo contribuye a la familiarización del alumno con este tipo de herramientas - lo cual resulta imprescindible en el mundo contemporáneo - sino que además, realiza una importante contribución en la asimilación y consolidación de conceptos, en la resolución de problemas y en general en el desarrollo de diversas habilidades cognitivas.

Descripción de temas y características del trabajo

Los temas cuyo contenido fue apoyado mediante el empleo de asistentes matemáticos fueron los siguientes:

- Representaciones mediante curvas de nivel.
- Calculo de límites y análisis de continuidad.
- Demostración de no existencia de límites de funciones de varias variables.
- Desarrollo de una función según la fórmula de Taylor. Representación gráfica.
- Representación gráfica de funciones.
- Calculo de las coordenadas de los interceptos con los ejes, ecuaciones de las asintotas, determinación de las coordenadas de los extremos locales, determinación de las coordenadas de los puntos de inflexión.
- Solución numérica de ecuaciones.

Para el desarrollo de las actividades se dispuso de una máquina computadora por cada 1,5 alumnos, de manera que algunos estudiantes trabajaron solos y otros por pareja. Igualmente se confeccionó un listado de ejercicios de cada uno de los temas enumerados de modo tal que cada alumno debió desarrollar su propio conjunto. Luego de concluido el trabajo, el alumno entregó un reporte escrito con sus conclusiones personales. A continuación se relacionan algunas de las características de las actividades ejecutadas.

Representaciones mediante curvas de nivel

Para el análisis del comportamiento de funciones, en muchas ocasiones resulta necesario el uso de curvas de nivel. Sin embargo, este es un tema que se toca brevemente en los cursos de cálculo.

La introducción del asistente matemático *permitió representar un conjunto amplio de funciones* mediante el empleo de curvas de nivel. Ello no fue posible con solo "apretar una tecla", como muchas veces se supone. El alumno debía seguir la metódica de trabajo correspondiente: escribir la función, darle valores constantes a la variable dependiente, representar gráficamente la ecuación resultante, darle valores sucesivos a la variable dependiente y representar las ecuaciones resultantes, todas en una misma ventana. Con ello se logró que el alumno *consolidara de una forma amena el concepto de conjuntos de nivel.*

Cálculo de límites y análisis de continuidad

Los ejemplos relacionados con la continuidad de las funciones requieren un análisis de las funciones para localizar los puntos donde ellas no están definidas. Mediante el asistente matemático el alumno tiene la posibilidad de representar gráficamente la función, y a partir del mismo realizar el análisis correspondiente.

Sin embargo, en el caso de las discontinuidades evitables, esto no fue suficiente. Si las coordenadas del punto de discontinuidad coinciden con uno de los ejes coordenados, no es posible apreciar la presencia del "huequito", lo que implica que el asistente matemático no elimina la necesidad de reconocer las características de las funciones por métodos analíticos.

Ante la presencia de saltos, no pudo definir con precisión el valor de la variable independiente en el que ocurre, ni los valores que alcanza la variable dependiente. Se vio obligado a precisar por sí solo, cual era el valor de la variable independiente donde aparecía la discontinuidad y calcular los límites laterales correspondientes, para lo cual sí pudo hacer uso de las posibilidades del asistente.

Demostración de no existencia de límites de funciones de varias variables

Lo mas usual es que el asistente esté diseñado para trabajar con funciones de una variable. Pero basta definir *cual es la variable*, para que su uso se pueda extender a problemas de varias variables como el del caso que nos ocupa. El alumno consolidó algo mas: el concepto de variable es muchas veces relativo.

Los límites iterados fueron calculados de manera sucesiva, igual que en el aula. Si estos valores eran iguales, entonces debía acudir a los limites por caminos, lo que implicó la realización de la sustitución correspondiente en la función y, un nuevo cálculo de limites.

El empleo del asistente matemático realizó una contribución importante en la *asimilación y consolidación del concepto* de limite para este caso, pues su atención no se perdió al realizar los cálculos requeridos para lograr el resultado de un limite en particular, sino que se centró en la *estrategia general de trabajo* y por ende en el concepto correspondiente.

Desarrollo de una función según la fórmula de Taylor. Representación gráfica

En los cursos tradicionales en general no es posible abordar el desarrollo de varias funciones: no hay tiempo para ello. Sin embargo, con el empleo del asistente matemático el alumno pudo *obtener con rapidez los desarrollos de diferentes órdenes de una misma función*, con lo cual adquirió una mejor visión del tema.

Además, fue posible *representar gráficamente y en un mismo sistema de coordenadas los gráficos correspondientes a la función y varias de sus aproximaciones* en un mismo punto, con lo cual la idea central de la aproximación por Taylor quedó mejor lograda y consolidada.

Representación gráfica de funciones

Este fue uno de los temas mas interesantes para trabajar con el asistente matemático. Como quiera que los mismos siempre poseen una instrucción a través de la cual se representan gráficamente las funciones, cualquier otra cosa que se explique en el aula, puede parecer superficial. Sin embargo, durante el desarrollo del laboratorio los alumnos comprobaron que esto no es así.

Por ejemplo, no podían responder con precisión acerca de la *tendencia de la función* cuando la variable se aproxima a algún valor, puesto que las *asintotas no aparecen en la representación* obtenida. Esto por cierto, constituye una ventaja, pues hasta ese momento, el alumno piensa que las asintotas son parte de la representación gráfica de una función y no elementos que nos ayudan a comprender el comportamiento de ellas.

Por otra parte, debido a la *selección automática de la escala* por parte del asistente, mas de uno concluyó -a partir del gráfico que propone el asistente- que su función no presentaba extremos locales o puntos de inflexión, o no podía definir con precisión las coordenadas de ellos. En otros ejemplos, resultaba difícil obtener la representación gráfica correcta, igualmente debido a que la selección de la escala por parte del asistente *no permitía visualizar el gráfico en su integridad.* Todo ello hizo que el alumno manipulara el control de escalas y reconsiderara la necesidad de llevar a cabo cálculos en paralelo, lo que justificó la necesidad de realizar el siguiente ejercicio.

Cálculo de las coordenadas de los interceptos con los ejes, ecuaciones de las asíntotas, determinación de las coordenadas de los extremos locales, determinación de las coordenadas de los puntos de inflexión

El empleo del asistente matemático permitió *ampliar el conjunto de funciones*. Tradicionalmente se pressentan al estudiante ejercicios en los cuales aparecen ecuaciones cuya solución analítica es posible. De hecho el estudiante llega a pensar que las ecuaciones siempre tienen solución en el conjunto de los números enteros o en el de los números racionales. El cálculo de los interceptos con los ejes resultaba una tarea sencilla, pero debía *indicar a la computadora las operaciones a realizar*, aunque *obviando la necesidad de resolver la ecuación resultante* ni realizando los cálculos aritméticos correspondientes.

Igualmente en el caso de las asíntotas, se debía indicar a la máquina la secuencia de operaciones. Para el caso de las oblicuas, se requiere formular la expresión para la pendiente (m) de la recta y calcular los límites correspondientes cuando $x \to +\infty$ ó a $-\infty$. Pero adicionalmente el alumno debe *interpretar el resultado*, y en consecuencia , formular la expresión para el cálculo del intercepto (b). A continuación dar la orden para calcular los límites formulados por él, y nuevamente interpretar los resultados. El cálculo de las asíntotas verticales, al igual que se procede analíticamente, requirió la *identificación de los puntos de discontinuidad* y a partir de ello dar las indicaciones necesarias para que el asistente matemático calculara los límites correspondientes. Finalmente debía *formular las ecuaciones de las asíntotas* (en caso de existir) y, si fuera de su interés, representarlas gráficamente en la misma ventana en la que hubiera representado la función.

La determinación de los extremos locales, también requirió de la *aplicación del algoritmo* paso a paso: calcular la primera derivada, igualar a cero la expresión hallada, resolver la ecuación. En todos los casos, las indicaciones fueron dadas por el estudiante. En general no fue necesario aplicar la condición de suficiencia, toda vez que al tener el gráfico se podía establecer una adecuada correspondencia entre el mismo y los resultados obtenidos a partir de los cálculos analíticos. El *pensamiento reflexivo* del alumno también resultó activado.

Para conocer el valor de los extremos debió dar las instrucciones para la realización de las operaciones necesarias. Un procedimiento similar debió llevarse a cabo para la determinación de las coordenadas de los puntos de inflexión.

Solución numérica de ecuaciones

Se puede pensar que al tratar el tema de métodos numéricos resulta evidente la necesidad del empleo de un asistente matemático, pero aún en este caso se logran aportes adicionales al que se corresponde con la eliminación de la reiteración automática de los cálculos aritméticos.

Tradicionalmente, luego de que se imparten los fundamentos matemáticos de los métodos objeto de estudio (en este curso fueron los métodos de bisección, Regula - Falsi y Newton Raphson) y se discuten los algoritmos correspondientes a cada uno, resulta tedioso para los alumnos la realización de cálculos a mano, sobre todo cuando él sabe (o se imagina) que con un equipo de cómputo "puede apretar una tecla" y obtener el resultado deseado.

En este caso se buscaron ecuaciones que preferentemente tuvieran mas de una raíz. El sistema de métodos numéricos MN (7) solicita un intervalo en el cual esté contenida la raíz, de manera que el alumno debía hacer el trabajo de localización de la misma. El propio asistente brinda la posibilidad de representaciones gráficas con ese objetivo y siempre propone un intervalo para ellas. Pero es evidente que el intervalo que es bueno para una función, puede no ser bueno para la otra, de manera que en muchos casos el alumno no obtuvo de manera inmediata el punto de intersección entre dos funciones y con ello el intervalo aproximado en que se encuentra la raíz buscada. Esto lo obligó a *conocer el dominio de las funciones*. Por ejemplo, si la función logaritmo estaba presente, no era posible trabajar con un intervalo en el que estuvieran presentes valores negativos para la variable, aunque la otra función si lo permitiera.

No se trata de que estos aspectos no se traten en una clase tradicional. Pero es que en ella el trabajo es guiado por el profesor y el alumno muchas veces copia mecánicamente, creyendo que comprende. Pero en la máquina es diferente: el trabajo es individual, y si no realiza adecuadamente las operaciones, es decir, si no da la indicación que corresponde-cuando corresponde- no obtiene resultados adecuados.

Conclusiones

A lo largo del trabajo se han ido exponiendo diversos logros alcanzados con la incorporación de asistentes matemáticos al programa de la asignatura Matemática I. A modo de resumen señalaremos los siguientes:

1. Fue posible abordar mayor número de problemas.
2. El grado de dificultad de muchos de los ejercicios incorporados fue diferente al que se presenta en las clases tradicionales.
3. El alumno tuvo que aplicar de forma consciente los algoritmos de trabajo correspondientes a los diversos tema.
4. En lo anterior jugó un papel importante el carácter individual del trabajo con la computadora; pero además, influyó positivamente el hecho de que los algoritmos pueden ser aplicados sin la usual perturbación debida a las dificultades inherentes a los cálculos algebraicos, trigonométricos o aritméticos.
5. Se contribuyó a mejorar la asimilación y consolidación de los contenidos. La atención individual que requiere este tipo de actividad lectiva y los resultados de los exámenes finales escritos pusieron de manifiesto la afirmación anterior.
6. El estudiante comprobó que el asistente matemático no reemplaza en su totalidad el conocimiento requerido de las características de una función.

A los resultados anteriormente señalados debemos añadir otros de no menor importancia, pues constituyen un aporte a la formación profesional del alumno. Entre ellos se destacan los siguientes:

1. Adquirió habilidades en el manejo de asistentes matemáticos y conoció las posibilidades que ofrecen desde el inicio de sus estudios universitarios, lo que le permitirá hacer uso de ellas en otras asignaturas de la carrera o en su vida profesional, según sea requerido.
2. Conoció que muchos problemas no se resuelven "apretando una tecla", sino que, se requiere conocer y dominar los procesos y algoritmos correspondientes.
3. Comprendió que no puede confiar ciegamente en los resultados de la computadora: cualquier información debe ser analizada críticamente.
4. Profundizó en el trabajo con las escalas, habilidad que resulta de vital importancia para el trabajo técnico y científico.
5. Desarrolló habilidades de trabajo autónomo.

6. Se familiarizó con el empleo de las herramientas informáticas, lo que resultó de gran motivación para el estudiante, que intuye cuan importante es para su futuro el dominio de estas nuevas tecnologías.

Referencias

Collins, Allan. El potencial de las tecnologías de la información para la educación. Seminario en la Universidad Internacional Menéndez y Pelayo, Cuenca, Junio, 1995.

Hernández Rabell, Lourdes y otros. Una experiencia de integración de tecnología de avanzada en la disciplina Matemática Superior para Ingenieros. Primer encuentro internacional sobre matemática aplicada y dibujo para la Ingeniería Mecánica y Metalúrgica. Memorias. La Habana, Cuba. Abril, 1998.

Martínez, Fernando. Una variante de sistema didáctico para la enseñanza del Cálculo diferencial. Tesis de Doctorado. La Habana, Cuba. 1993.

Rodríguez, Teresa. Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina Matemática Superior. Tesis de doctorado. La Habana, Cuba. 1991.

Vaquero Sánchez, Antonio. La Tecnología en la educación. TIC para la enseñanza, la formación y el aprendizaje. 1997.

Vizcarro, Carmen y León, José A. Introducción al papel de las nuevas tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje. Seminario en la Universidad Internacional Menéndez y Pelayo, Cuenca, Junio, 1995.

Alemán Romero, I. Sistema de métodos numéricos MN. Primer encuentro internacional sobre matemática aplicada y dibujo para la Ingeniería Mecánica y Metalúrgica. Memorias. La Habana, Cuba. Abril, 1998.

Incorporación de Distintas Perspectivas

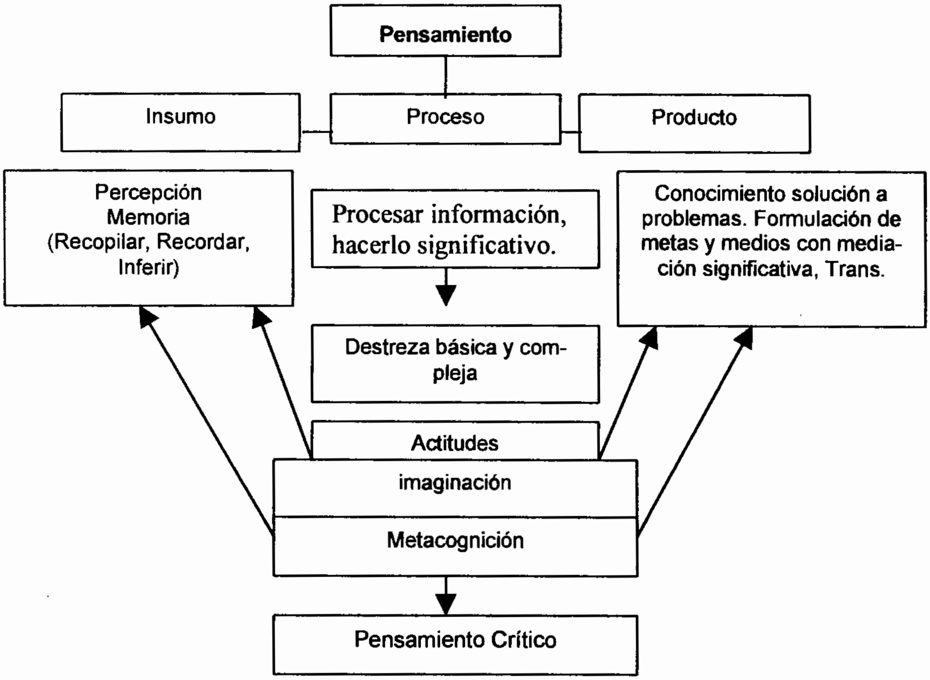
Desarrollo Del Pensamiento Crítico en Matemática

Carmen Evarista Matías de Rodríguez
Universidad Autónoma de Santo Domingo, UASD
República Domicana

Para abordar el tema del Desarrollo del Pensamiento Crítico en Matemática, se debe hacer una revisión de los conceptos que involucran el desarrollo del pensamiento y las destrezas que hay que desarrollar para lograr un Pensamiento Crítico. Dentro de este contexto se dan los procesos mentales, cuya base es el cerebro. Es mediante el uso de métodos y técnicas que científicos del área (Psicólogos, Filósofos y otros) han tratado de construir una representación o idea de cómo funciona el pensamiento. (Villarini, 91). Uno de los grandes problemas del profesor de matemática es que los alumnos encuentran muchos obstáculos para pensar lógicamente sobre los contenidos matemáticos. Se preguntan ¿Cómo pueden los alumnos aprender a pensar?.

Para lograr desarrollar el Pensamiento Crírtico en las matemáticas, nuestros estudiantes, debemos inducirlos primero a obtener un aprendizaje y que éste aprendizaje de las matemáticas cumpla los requisitos siguientes: Que sea significativo, activo, reflexivo, colaborativo y empoderador. Para inducir al alumno a una situación de aprendizaje auténtico, se debe iniciarlo en las destrezas del Pensamiento, que es un proceso que se inicia con la pe*r*cepción (insumo) de estimulos que nos llegan a través de los sentidos. Estos estimulos son transformados en percepción o información gracias a las imágenes y conceptos que se encuentran archivados en la memoria.

Modelo de Pensamiento



Los modelos de pensamiento son construcciones hipotéticas acerca de cómo funciona o debe funcionar el pensamiento para que pueda producir eficazmente un resultado, es decir, procesar información y construir conocimiento. Según Villarini, se puede establecer un sistema de codificación o representación de la información y el segundo, un sistema para procesar, es decir, reestructura o reorganiza la información. Esto contribuye al desarrollo del pensamiento lógico matemático en los alumnos. Se debe prestar atención para el desarrollo del pensamiento a la forma de procesar la información, sin menospreciar la capacidad de memorizar, se reconoce qué objeto principal del desarrollo del pensamiento es la producción del conocimiento. Al orientar la enseñanza del Desarrollo del Pensamiento nos referimos a que a través de las matemáticas, vamos a proveer información de la tarea, condiciones educativas que pongan el estudiante en contacto con situaciones donde pueda desarrollar las destrezas y de este modo, desarrollar el Pensamiento Crítico que no es más el pensamiento disciplinado, autoririgido y que demuestra el dominio de las destrezas y habilidades intelectuales.

Es un pensamiento capaz de autoregularse y de perfeccionarse (López y Sánchez, 93). Todo currículo, en particular el de matemática debe fundamentarse en el Pensamiento Crítico, en los valores y la pertinencia del mismo. Se hace evidente que a través del currículo se pueda integrar los conceptos matemáticos, destrezas y actitudes utilizando el contenido como vehículo para activar los procesos de pensamiento. Para desarrollar el Pensamiento Crítico en matemática se tomará en cuenta los pricipios básicos que presenta el movimiento del Pensamiento Crítico de Puerto Rico(López y Sánchez), que parte de los supuestos:

- Todo ser humano tiene capacidad para pensar.
- Las destrezas del pensamiento pueden desarrollarse.
- La enseñanza debe orientarse a la activación de los procesos mentales.
- El / La estudiante es un ente activo, procesador de información, curioso y quien gusta de descubrir
- El aprendizaje es capaz de aprender a aprender.
- El contenido es el vehículo para desarrollar destrezas y actitudes.
- Los conceptos fundamentales deben ser tratados en espiral de manera que se asegure un aumento en su complejidad a lo largo de un currículo.
- La pertinencia de la experiencia de aprendizaje depende de los contextos académicos y el nivel de desarrollo del ser.

Bibliografía

INGENIERIA DIDACTICA EN EDUCACION MATEMATICA, Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (Michéle Artigue, Régine Douady, Luis Moreno y Pedro Gómez).

MATEMATICAS DIARIAS, Everyday Learning Corporation. (The University of Chicago School Mathematics Project).

CONOCIMIENTO DECLARATIVO Y PROCESAL PARA EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO, (Rubén Estremera, Ed.D.)

EVERYDAY MATHEMATICS (Journal 1) The University of Chicago School Mahtematics Project.

EVERYDAY MATHEMATICS (Journal 2) The University of Chicago School Mahtematics Project.

REVISTA EDUCACION MATEMATICA (Vol. 8 , No. 2, Agosto 1996).

DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS (A. Orton).

MANUAL PARA LA ENSEÑANZA DE DESTREZAS DE PENSAMIENTO, Angel Villarini, Ph.D.

UN MODELO DE PLANIFICACION CURRICULAR PARA LA INTEGRACION DE DESTREZAS DE PENSAMIENTO, Luz E. López, Ph. D. Prog. Adolfo Sánchez.

MATEMATICA: DESTRZAS BASICAS.

Los valores presentes en la Enseñanza de la Matemática

Patricia Fogliatti de Job
Universidad Nacional de la Patagonia Austral (U.N.P.A.)
Centro de Enseñanza Particularizada (C.E.P.)-Departamento de Investigaciones
Argentina

Desarrollo

Este tema es resultado de investigaciones que se realizaron durante varios años de trabajo en equipo, haciendo encuestas y entrevistas, realizando talleres de reflexión durante la capacitación con docentes de todos los niveles de la enseñanza.

Estamos investigando en nuestro centro de qué depende en gran medida el éxito de una clase de matemática y para tratar de reflexionar quién es verdaderamente un educador, cuáles son las cualidades fundamentales de un educador, y cuáles deben ser las actitudes al educar.

Es una tarea ardua, pero ha sido cuestión de facilitarnos el trabajo, en talleres donde hemos "compartido " nuestras experiencias, con docentes y alumnos de todos los niveles de la educación, nos hemos escuchado mutuamente y fundamentalmente hemos tenido en cuenta que estos talleres no podrían SER si no FUERAN NUESTROS COLEGAS Y NUESTROS ALUMNOS, que son el componente más importante.

Hablamos de CRISIS EN EDUCACIÓN, y en realidad en todos los sentidos estamos viviendo en crisis, y es por ello que debemos volver a reflexionar sobre cuáles son los valores que estamos enseñando, mostrando a nuestros niños, a nuestros adolescentes y a nuestra juventud. Ponernos a pensar en EDUCAR EN VALORES nos induce a hacer algunos cuestionamientos que se podrán traducir en preguntas tales como:

- ¿Qué significa ser persona?
- ¿Qué significa educar?
- ¿Quién es verdaderamente un educador?
- ¿Qué son los valores en educación?
- ¿Estamos en una época de crisis? ¿Qué es la crisis para nosotros?
- ¿Qué son los valores hoy?
- ¿Cómo puede hacer un educador para EDUCAR EN VALORES?
- ¿Podemos EDUCAR EN VALORES?
- ¿Qué sucedió en la historia y cómo estamos hoy?
- ¿Nos escuchamos uno al otro?
- ¿Nos preocupamos por los sentimientos de nuestros alumnos?
- ¿Nos sentimos responsables de lo que decimos y hacemos?
- ¿Qué tipo de lenguaje (oral, corporal, gestual) utilizo?
- ¿Soy consciente de mi poder?
- ¿Me pongo en lugar de mis alumnos?¿Conozco "ese" sentimiento?¿Me parezco a ellos?
- ¿Qué valor tienen mis alumnos para mí?
- ¿Cómo es el clima en mis aulas?
- ¿Cómo se adapta el alumno a mis clases?
- ¿Manejo mis enojos?

Serían incontables las preguntas y tal vez no encontraríamos todas las respuestas y es por ello que es preferible, tratar de expresar lo que creemos a cerca de cómo estamos hoy y de cómo deberíamos ser a modo de *meta a alcanzar*.

Durante la historia de la humanidad, han habido ciertos cambios en los valores, que fueron marcados por acontecimientos de mucho peso para la misma. En un principio, los valores fundamentales, fueron DIOS, EL HOMBRE, LA SOCIEDAD Y LA ECONOMIA (en ése mismo orden). Después del RENACIMIENTO, los mismos variaron cambiando el orden y por lo tanto los demás valores cambiaron: EL HOMBRE, DIOS, LA SOCIEDAD Y LA ECONOMIA.

La REVOLUCION FRANCESA, trajo aparejado otros cambios pasando a ser LA SOCIEDAD, alrededor de quien se centrara toda la actividad, luego EL HOMBRE, DIOS, y por último la ECONOMIA. Con el CAPITALISMO (Carl Marx) tomó un valor relevante LA ECONOMIA, luego LA SOCIEDAD, EL HOMBRE y por último DIOS.

Creemos que el nuevo milenio, trae nuevos cambios, tal vez cambio de los VALORES en sí mismos, o un nuevo orden en los ya mencionados, pero estamos seguros que esta nueva sociedad de la que ya formamos parte, ha tomado otro rumbo.

¿Cómo estamos?

ODIO - ANGUSTIA - IDOLATRIAS - ROBO - MIEDO GURUES - EL MAL

CRISIS DE FE - SOLEDAD - ABURRIMIENTO- CANSANCIO - VACIO - SEXO FRUSTRACION - ZOZOBRA - DECAIMIENTO - ABORTO - DIVORCIO VIOLACION - ADICCIONES

MENSAJES SUBLIMINALES - DESLIÑO - HACE LA TUYA - MANIPULEO DE PERSONAS - TODO VALE - EGOISMO DROGAS - AVARICIA - FALSEDAD - SOBORNO - ACOHOL - HOROSCOPOS

Son palabras que circulan a nuestro alrededor.

... ¿nos acostumbraremos?...

" SI OBRAMOS SIEMPRE A NUESTRO ANTOJO, ¿DE QUÉ NOS SIRVE VIVIR?"

Don Bosco.

Los valores del posmodernismo

Nos preguntamos si ¿puede haber valores en medio de este caos?. Pues sí, los valores proliferan. ¿Cuáles?. Por ejemplo, es un valor ser joven, tener salud, estar bien, hacer lo que deseamos, es un valor lo divertido, ya que si algo es divertido, es bueno, nos sirve, nos distrae, nos entretiene, es un valor la libertad, ¿cuál? la que nos permite hacer lo que se nos dé la gana. Ya no importa invertir nuestro tiempo disfrutando un buen rato de charla entre amigos, gustar de un juego en familia, gozar con una conversación sobre un tema que nos ilustre y nos haga crecer, hacer lo que "debemos" por libertad, ser fiel a nuestras propias decisiones y elecciones, y cambiar con sensatez y criterio equilibrado.

"Donde ninguno manda, mandamos todos y la vía está abierta para el caos".

BOSSUET

La ciencia y la tecnología, la medicina, el confort, productos de consumos variados y abundantes, podrían permitirnos una vida feliz. ¿Por qué, entonces, el hombre perdió la esperanza y cayó en el desencanto?.

Este gran progreso significaría el TRIUNFO para todos ¿qué pasó? Todo esto nos conduce a un vacío, llevando al individuo a perder de vista su objetivo, su SENTIDO DE VIVIR.

Por eso creemos que la posmodernidad creció por:

La falta de fe (no necesariamente en una determinada religión, ideología política, tendencia)

Llevando al hombre a una personalidad lábil, con una identidad poco clara, sin criterios; agregando la crisis del progreso, ideales prometidos y no logrados; la pretensión de eliminar las clases sociales; el progreso y la tecnología hacen innecesaria la mano del hombre enfrentándonos a una forma de vida para la cual no estamos preparados, trayendo como consecuencia la desocupación.

El Consumismo

Los motivos de las compras no son tanto las necesidades vitales, como la moda, la marca, la imitación. Comprar... comprar. comprar....El hombre de hoy es una máquina de consumir. Usa y tira; todo, en nuestra sociedad consumista es relativo; todo pasa,... se usa y se tira.

La libertad sin límites

Romper fronteras y vivir sin límites, sin normas, sin horarios,... por impulsos. Todo se puede,... nada está planificado, ni proyectado. Es el todo vale. Se privilegia lo personal sobre lo social, esto ha llevado al hombre al individualismo, lo alejó de los problemas sociales... "cada uno hace lo que siente ¿para qué comprometerse?" Todo es lícito, por reflejo estimamos que todos los valores se reducen a la libertad, a MI LIBERTAD, a poder hacer lo que a mí se me da la gana, hay que "gozar del momento actual".

Lo normal es aburrido, porque todo lo que suena a norma es considerado malo para la libertad de la persona.

Muerte de lo ético y de la razón

"Nada está prohibido"..."Haz lo que quieras"... "Sé feliz". No hay valores supremos, no tiene sentido el pensar profundamente pues no da réditos en el mercado. Vivir, experimentar sensaciones, cuanto más rápidas, mejor. Nada de valores ni el bien, ni el mal, vale lo que gusta, lo que agrada. *Hacé la tuya,* Nuestra sociedad posmoderna nos sugiere el individualismo, el quedarnos cada uno con lo suyo, cómodos, despreocupados, indiferentes ante los demás.

Existen otras palabras, que nosotros, educadores podemos enseñar:

VALOR - AMOR - JUSTICIA - HUMILDAD - PARTICIPACION - SOLIDARIDAD PAZ - RESPONSABILIDAD - VIRTUD - DIALOGO - ALEGRIA - SABIDURIA ILUSION DE VIVIR - CREER EN EL HOMBRE - FE - ESPERANZA CARIDAD - EL BIEN - CONVIVENCIA - LEALTAD - VALENTIA - VERDAD - PERSEVERANCIA - FIDELIDAD - SINCERIDAD - TOLERANCIA GENEROSIDAD - CORAJE - HONRADEZ - FAMILIA - AMISTAD - CONCORDIA

Para comenzar, debemos repensar la educación como tal, como EDUCACION EN VALORES.

Pensar la educación matemática sólo como la mera transmisión de conocimientos, teoremas, algoritmos, etc... o bien como la repetición de ideas, problemas históricos, etc, es educar parcialmente al hombre; nos limitamos a la faz intelectual y limitamos a la educación encasillándola en el papel de transmisión incompleta de instrucciones, que por otro lado nuestros jóvenes ya no escuchan, no les interesa, tienen poco tiempo de concentración, necesitan otros tipos de modelos, algo tangible que a ellos les llegue a lo más íntimo.

Es también, considerar al hombre en un sólo aspecto, olvidando el ser persona, y que nuestra dimensión humana hace que nuestros sentimientos permitan que podamos asimilar la instrucción o "sufrirla", es importante por lo tanto también proporcionar diferentes tipos de estímulos a los alumnos, para lograr una buena educación y no tan sólo la instrucción del individuo.

Es nuestra función, como educadores, no sólo educar, sino también orientarlos con un compromiso real en la jerarquización y vivencia de los valores que hacen al desarrollo integral de sus dimensiones personales y comunitarias.

Debemos enseñarles a descubrir, a interpretar y a señalar, identificando los signos de los tiempos que caracterizan esta época en la que vivimos, con tantos cambios y tan rápidos; ayudándoles a reconocer los valores y antivalores que esos signos encierran; es nuestro deber, preocuparnos en forma permanente por su formación, por nuestra formación y capacitación específica constante, para no alejarnos tanto de ellos que lleguemos a hablar de cosas diferentes y en lenguajes diferentes; debemos "estar cerca" de ellos para entenderlos y que nos entiendan.

Debemos vivir nuestra autoridad como servicio reflexivo, mostrándola a través de actitudes de responsabilidad, justicia, veracidad, apertura, autocrítica y sano optimismo. Es importante buscar constantemente el equilibrio emocional y la madurez psicológica asumiendo actitudes de diálogo maduro y abierto en las relaciones educativas. Un buen educador, debe promover un proceso de integración de valores éticos, técnicos, científicos, culturales, (de la cultura regional, nacional e internacional) y valores en su vida y la de los jóvenes que estén a su alrededor. También debe ser un agente de cambio, orientador, para que ésos jóvenes sean protagonistas de su propio desarrollo y se inserten, en forma constructiva, crítica y responsable en la sociedad, implementando estrategias metodológicas actualizadas que favorezcan el protagonismo, la autoestima y la interrelación de los educandos entre sí.

Es importante tener y mostrar la apertura necesaria para asumir actitudes de respeto, diálogo y autocrítica que favorezcan el clima eminentemente pedagógico, en la interrelación tanto con los niños y adolescentes, como con sus padres, con nuestros colegas y directivos. No podemos perder de vista que los jóvenes educandos deben ser los protagonistas de su formación y asumir el compromiso de sus deberes, no como una carga sino con la alegría de entender que por medio del hecho de cumplir sus responsabilidades serán verdaderos animadores de la comunidad en la que actúan, viviendo en relación positiva consigo mismo y con los demás.

Es importante enseñarles a asumir positivamente y con serenidad la propia realidad humana con todas sus potencialidades y límites físicos, afectivos, sexuales, espirituales; valorando y desarrollando los propios dones. Debemos enseñarles a conquistar su propia libertad a través de la responsabilidad y de las ocupaciones de cada día, disfrutando de sus logros y ejercitándose en actuar impulsados por razones cada vez más profundas. Es necesario que lleguen a madurar su propia afectividad, amándose y respetándose a sí mismos, entablando relaciones positivas y profundas con los demás hasta llegar a la gratuidad.

Debemos esforzarnos por hacer crecer la vida en la comunidad humana desde el aula, experimentando que la propia vida está enraizada en una historia, en una cultura que hay que descubrir, interpretar y desarrollar con creatividad y esperanza. Mostrar nuestro aprecio por los valores de la familia como lugar privilegiado de relación interpersonal y elemento básico de la sociedad.

Debemos primero nosotros, educadores, tomar conciencia de la necesidad de la adquisición de una competencia profesional que cualifique el propio servicio y contribuya al desarrollo de la sociedad humana, para luego hacerles entender a los jóvenes, por nuestro ejemplo de vida, la responsabilidad de estudio que tienen ante sí.

Debemos hacerles entender que tienen que asumir un rol protagónico y consciente dentro de la comunidad y sociedad en la que actúa, que él es importante para el futuro de todos, tratando de que sus opciones sean siempre favorables al hombre y que promuevan la solidaridad, la justicia y la paz.

Debemos nosotros mismos ver desde una posición de optimismo, que la historia del hombre está llena de sentido y de futuro, y que el futuro son ellos, nuestros alumnos de hoy, asumiendo la propia vocación como un compromiso concreto de liberación y promoción de la vida.

Debemos lograr para todo ello un ambiente, que sea familiar y comunitario, para lograr que se transforme en vehículo y propuesta de valores, donde se respira un clima de familia manifestado en las relaciones interpersonales entre educadores y educandos hasta llegar a la comunión de ideales y valores.

Despertar las fuerzas interiores dinámicas de la razón y la amabilidad, para que el joven se oriente con responsabilidad en la elección de lo verdadero y lo bueno y, por otra parte, tenerlo siempre como base firme de un criterio de acción educativa. El éxito de un curso también depende directamente y en forma particular del ambiente de trabajo y éste depende a su vez del tratamiento que el profesor dé a cada estudiante en particular, al encuentro personal que ha logrado con él. El estudiante debe sentirse "observado", "tenido en cuenta", "conocido", si hacemos que él entienda esto, lograremos un verdadero compromiso de su parte y será difícil que quiera "fallarnos".

Aprender sufriendo : no es necesario que el alumno reciba toda la información, para que al necesitarla, logre construir su aprendizaje; pero lo que no debemos dejar es que el alumno aprenda sufriendo la inseguridad de que en cualquier momento, el profesor puede ponerlo en ridículo ante el resto del grupo. En la búsqueda de la definición de un concepto o de la construcción de una herramienta, el estudiante debe ser quien proponga las alternativas posibles. Nosotros, los profesores, debemos ser quienes guiemos la discusión para que, a partir de esta materia prima, llevemos al estudiante a la respuesta más eficiente. Este es un proceso y el estudiante debe "sufrir" con este proceso como lo hacemos todos cuando estamos tratando de descubrir.

El poder del profesor: muchas veces, por una falta de seguridad en cómo llevar adelante la disciplina del grupo áulico, hace que el profesor tome una distancia que lo hace caer en el tradicional esquema de la "clase catedrática". El profesor mantiene el control de la clase pues porque tiene el poder de regañar, suspender, o expulsar al alumno, ese es el verdadero "terrorismo" ya que existe un control, porque hay un poder formal proveniente exclusivamente de la posición relativa de los dos participantes, el alumno respeta al profesor porque teme las medidas extremas que pudiera tomar para con él.

Es cierto que para que haya un control, tiene que haber un poder, y para que haya un poder, tiene que existir un respeto; pero el respeto del estudiante hacia el profesor no tiene por qué provenir del temor. El respeto del estudiante hacia el profesor tiene que tener un origen honesto y válido, este respeto debe provenir de la combinación de varios factores:

- El reconocimiento por parte del estudiante del conocimiento que el profesor tiene del tema.
- El reconocimiento por parte del estudiante del interés que tiene el profesor en que el primero logre los objetivos del curso.
- El reconocimiento por parte del estudiante de la actitud del profesor como partícipe de un problema común y no como el policía que vigila el cumplimiento de unas reglas.

Por lo tanto podemos concluir que basta ser amigo del estudiante, conocer los objetivos del curso y dominar los temas específicos, y entregarse honestamente en su búsqueda. Podemos olvidarnos del "poder terrorista".

La guía del profesor, tiene también un contenido metodológico, consistente en ideas de cómo llevar a los alumnos al propósito que se tiene y es además de un pequeño discurso psicológico, en donde guardamos nuestras impresiones acerca del "estudiante promedio o típico". Al tener esta información, tenemos una idea de cuáles pueden ser las actitudes, las expectativas, los errores y las reacciones típicas de los estudiantes y, por consiguiente, podemos producir una posición y una actitud previa hacia ellas.

Sin embargo, esta posición implica múltiples problemas y defectos desde el punto de vista de lo que debería ser la misión del sistema pedagógico. Un sistema pedagógico que pretenda únicamente la producción de profesionales capaces de reproducir el conocimiento adquirido durante su vida estudiantil es un sistema pedagógico que aporta muy poco al entorno social, puesto que ha de ser claro que el propósito esencial de todo sistema pedagógico es el de producir profesionales *capaces de utilizar creativamente el conocimiento* en la búsqueda de soluciones a los diversos problemas que enfrentan en el ejercicio de su oficio.

La aceptación y la aplicación de esta posición epistemológica implican una serie de requisitos y de problemas dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. En primera instancia, la docencia se debe centrar más alrededor de los procesos que de los contenidos en sí (aunque debe mantenerse el equilibrio). Por otra parte, se hace necesario introducir cambios en la mayoría de los factores que determinan el proceso pedagógico: el contenido, las metodologías, el ambiente de la clase, la evaluación y el libro de texto. Sin embargo, el problema se centra en el profesor. Es quién asume una posición, ataca y resuelve los problemas pedagógicos dentro del proceso.

Por otra parte, se requiere un cambio de *actitud* por parte del profesor, que a veces por razón de sus múltiples ocupaciones y de su experiencia, no es necesariamente receptivo al cambio. No se puede lograr este cambio por "orden" de un superior, el cambio viene desde el mismo profesor, y para lograr el cambio en un profesor, es necesario que el mismo "viva la experiencia", se ponga en situación de aprendizaje, y que sea gracias a estas experiencias, que él descubra y acepte las ventajas del cambio.

En el momento en que el profesor vea claro cuáles son las ventajas de ese cambio dejará de trabajar para lograr alcanzar algo (que no sean los objetivos) y muchas veces vemos que se nos va la vida tratando de alcanzarlo y no lo logramos porque no sabemos descubrirlo en lo cotidiano.

¿Cuántas veces nos hemos sorprendido pensando o diciendo: "Algún día voy a conseguir vivir en paz, tranquilo, haciendo lo que me gusta..." ó "Algún día voy a lograr superar mis dificultades, voy a trabajar menos y a disfrutar de mis clases, de mis alumnos, de mi familia..." ó "Algún día podré cosechar lo que estoy sembrando y voy a darme cuenta de que valió la pena el sacrificio y el esfuerzo..."

En realidad, son comentarios válidos y que revelan un proyecto personal, profesional y una búsqueda. Pero ¿por qué tener que esperar a "algún día" y no aprender a disfrutar lo que anhelamos desde hoy? ¿Qué me impide hacer hoy lo que me gusta? ¿Qué es lo que no me deja tiempo para disfrutar? ¿Qué barrera se interpone para que no pueda tener paz, tranquilidad, alegría,... y un buen clima en mis clases? ¿Será cierto que la educación prepara para **sobrevivir** y no para **vivir**?. Es necesario conseguir y alcanzar nuestra plenitud y nuestra realización allí donde nos encontramos y en el gusto por lo que hacemos. **VIVIR CON VOCACION**.

"Vocación: ese llamado que nos interpela para cumplir una misión en el mundo", debemos preocuparnos por hacerla congeniar con el trabajo que hacemos, con nuestra profesión.

Ese llamado, puede ser interpretado como el llamado de Dios para ocupar un lugar en el mundo desde una determinada situación y otros podrán interpretarlo como el llamado del propio yo que, reuniendo habilidades, tendencias y gustos convoca a ser de una determinada manera. Es cierto que, en muchos casos, es difícil lograr esa coherencia. Son muchas las trabas que nos pone la sociedad para poder desarrollarnos en plenitud. **Pero es importante saber que es posible.** Una buena forma de comenzar es reflexionando sobre nosotros mismos, y comunicándonos con los que están a nuestro alrededor. Claro que ello nos llevará a un COMPROMISO con nosotros mismos, y ese compromiso se quiere evitar, a veces, a toda costa, porque es característica propia de la nueva cultura (el posmodernismo) que "nada comprometa a fondo".

Pensemos un poco en cómo reflexionar. En eso consiste nuestros talleres, en los que siempre comenzamos con un poema

NO ES LO MISMO

No es lo mismo ser bueno,
Que ser incapaz de ser malo.
No es lo mismo ser pacífico,
Que ser cobarde.
No es lo mismo ser casto,
Que ser impotente o reprimido.
No es lo mismo ser creyente,
Que "practicar" algunos ritos religiosos.
No es lo mismo ser patriota,
Que odiar a los extranjeros.
No es lo mismo perdonar,
Que dejarte pisotear, incapaz de defenderte.
No es lo mismo ser generoso,
Que dar una limosna para sentirte bueno.

No es lo mismo ser adultamente libre,
Que ser adolescente rebelde.
No es lo mismo vivir con
libertad tu sexualidad,
Que ser esclavo de tus "instintos".
No es lo mismo amar a tus padres,
Que necesitarlos cuando ya no los necesitas.
No es lo mismo estar al servicio del prójimo,
Que servirte del prójimo para parecer virtuoso.
No es lo mismo creer en dios,
que es la verdad,
Que sentirte dueño de la verdad
Y dios para juzgar y condenar a los otros.

Rene Trossero

Bibliografía

Módulos: "Educando" (N° 1: ¿Quién es verdaderamente un educador? ; N°2: Cualidades Fundamentales del Educador I; N°3: Cualidades Fundamentales del Educador II; N° 4: Actitudes del Educador) - Grupo de Investigación Pedagógica - Centro P. Kentenich Schoenstatt - Córdoba - Material de Autoformación para Padres y Docentes - Ed. Patris - 1992 - Buenos Aires - Argentina -

"Y por casa ¿cómo andamos? La comunicación de la familia en la nueva cultura" - Juan Carlos Pisano - Ed. Bonum - 1994 - Buenos Aires - Argentina -

"El hombre, la libertad y los valores" -Julio César Labaqué - Ed. Bonum - 1995 - Capital - Argentina

"Profesor: no entiendo" Reflexiones alrededor de una experiencia en docencia de las matemáticas" - Pedro Gómez - Ed. Grupo Editorial Iberoamérica - Universidad de los Andes - 1995 - México, D.F.

Entre alambres, hilos y pompas de jabón...

Cecilia Crespo Crespo, José Villella
Universidad Nacional de General San Martín, Buenos Aires
Argentina

"No creo que haya nadie, en esta sala, que no haya formado alguna vez una burbuja de jabón corriente, y que, al admirar la perfección de su forma y el maravilloso brillo de sus colores, no se haya preguntado cómo es que un objeto tan magnífico puede producirse con tanta facilidad. Espero que ninguno de ustedes esté cansado de jugar con burbujas, porque como espero veremos, hay mucho más dentro de una pompa de jabón de lo que nadie puede imaginarse si sólo las ha utilizado como diversión"

Charles Vernon Boys

"Como la forma del universo entero es sumamente perfecta, y está en efecto concebida por el más sabio creador, nada podrá acontecer en lugar alguno del mundo sin que de una forma u otra brille en ello alguna regla de máximo o mínimo"

Leonhard Euler

En este taller se propone trabajar a partir de la formación de pompas de jabón el planteo y la resolución de diversas situaciones problemáticas en las que aparecen conceptos geométricos. Algunos de estos problemas tuvieron importancia histórica y permitirán ver cómo la geometría experimental ofrece una herramienta para encarar y solucionar problemas de minimización cuya solución requeriría de otra manera de la aplicación de complicados cálculos.

El estudio de las formas geométricas generadas a partir de espuma de jabón no es muy usual en los libros de texto, sin embargo permiten a partir de la geometría experimental, descubrir y aplicar propiedades sencillas y a la vez sorprendentes.

Es posible reflexionar junto con docentes de nivel medio sobre los conceptos puestos en juego y los niveles del razonamiento (Van Hiele) que se alcanzan en la solución. Asimismo, se analizarán las posibles aplicaciones en el aula como motivación o como vínculo con otros temas de la Geometría.

De esta manera las situaciones problemáticas planteadas permitirán ubicar el problema como un *instrumento de control* para los aprendizajes ya adquiridos, como un *móvil* para la satisfacción de las inquietudes de los alumnos o como un *medio* para acercar a los alumnos al saber matemático que se está desarrollando (Charnay). Se facilitará entonces la agrupación de los problemas en redes conexas de conceptos y relaciones que Vergnaud denomina espacio de problemas y que para la Educación General Básica (EGB) tanto como para el nivel polimodal se vincula con tres grandes categorías, una de las cuales sirve de nexo entre las otras dos, dado que estas utilizan sus conceptos como herramientas para desarrollar sus propios contenidos. Gráficamente nos referimos a:

Espacio de problemas

Campo aditivo (adición y sustracción)	Exploración, organización y cuantificación del espacio	Campo multiplicativo (multiplicación y división)

Los problemas a trabajar con pompas de jabón permiten abordar conceptos propios del espacio tridimensional, y aprovechar los resultados obtenidos para la discusión y aplicación de otras propiedades matemáticas.

Los antecedentes de este taller se encuentran en varios cursos para docentes organizados por los autores en Argentina.

Problemas de minimización con pompas de jabón

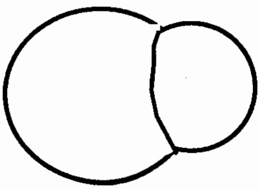
En la naturaleza, uno de los principios básicos que rige a muchos fenómenos es la búsqueda del estado de menor energía. Este principio de economía de la naturaleza ya era conocido en época de Herón de Alejandría.

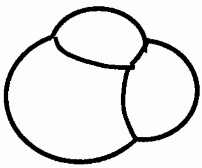
La búsqueda de máximos y mínimos ha tenido gran importancia en el desarrollo de la ciencia moderna.

Las películas jabonosas pueden ser utilizadas para resolver de manera intuitiva y sencilla varios problemas matemáticos de este tipo. El físico británico Charles Vernon Boys realizó a principios de este siglo experimentos y estudios sobre pompas y películas de jabón, algunos de ellos basados en la obra de James Plateau, físico belga del siglo pasado. En ellos se hace hincapié en la utilidad de modelos físicos para la resolución de problemas matemáticos de gran complejidad. Actualmente se realiza este tipo de estudios desde la llamada geometría experimental.

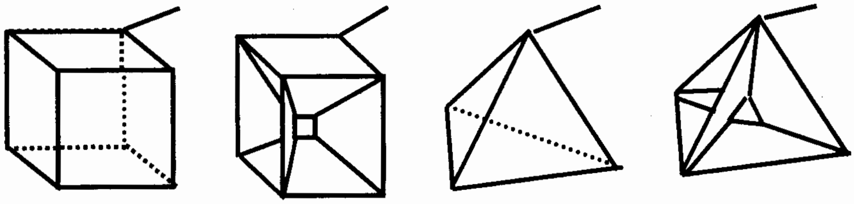
Plateau planteó el siguiente problema: dada una curva cerrada en el espacio tridimensional, ¿cuál de las superficies limitadas por la curva dada es mínima? Esta pregunta es respondida desde la matemática mediante complicados procedimientos del cálculo de variaciones, sin embargo, una película jabonosa la responde de inmediato: si se hace con alambre la curva propuesta y se la sumerge en una solución jabonosa apropiada, la película adoptará precisamente la forma de la superficie de área mínima.

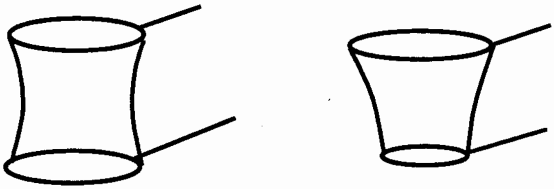
Mientras la forma de una pompa de jabón aislada tiende a ser esférica, al ponerse en contacto dos o más pompas, se forma una intersuperficie en la superficie de contacto de ellas. La forma lograda, tenderá a minimizar la superficie total. Es interesante el análisis de las formas obtenidas en función de las tensiones de las películas. Trabajando con los ángulos que forman las tangentes a las superficies resultantes, es posible analizar los radios de las esferas que dan origen a la formación.





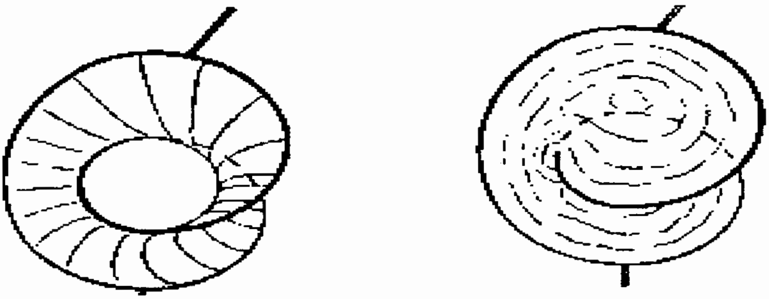
Distintas formas de estructuras de alambre permiten al ser sumergidas en una solución jabonosa, la aparición de superficies mínimas en las que se evidencian algunas veces formas poliédricas y otras, simplemente formadas por superficies planas o curvas.





A partir de las superficies así obtenidas, es posible discutir en el aula si se trata de poliedros o de qué tipo de formas, mediante la verificación de algunas de sus propiedades características.

Mediante aros de alambre deformados convenientemente, es posible la formación de superficies jabonosas de dos caras y de una cara. Una espiral de Möbius obtenida de esta manera, da la oportunidad para tratar conceptos topológicos en el aula.



También es posible encontrar contornos de alambre tales que las superficies mínimas que pueden encerrar no son únicas y otras que están formadas por superficies planas y curvas, según los casos.

Siguiendo esta forma de trabajo, el docente se verá en posición de diseñar situaciones de enseñanza de diferentes tipos (Brousseau):

- de **acción** cuando ponen al alumno frente al problema cuya solución es el conocimiento a aprender. En este caso, cuando se trata de averiguar la superficie mínima que la pompa está representando. La **experimentación** en la hora de clase es el indicador de su presencia en la secuencia aludida.

- de **formulación de hipótesis** obligando al alumno a manifestar sus creencias sobre los conceptos construyendo una descripción sobre los mismos. La **comunicación** de lo que se cree ver a través de la pompa y de qué concepto matemático está puesto en juego, es el indicador en el aula de su incorporación al trabajo.

- de **validación** en tanto hacen que el alumno pruebe que lo que dice es verdadero, analizando la coherencia y consistencia del razonamiento empleado y el docente intervenga para evidenciar contradicciones, mejorar argumentos, pedir pruebas. La **demostración** de las propiedades de las superficies que las pompas de jabón representan, constituye un buen indicador al respecto.

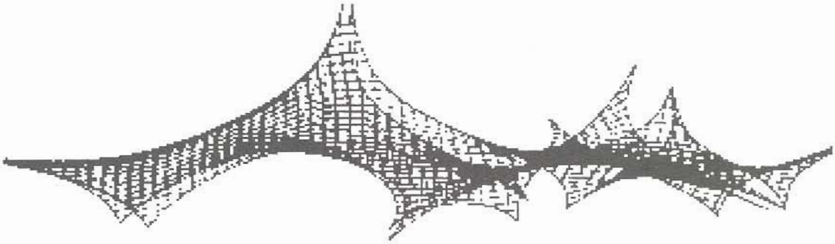
- de **institucionalización** tendientes a fijar las convenciones y utilizar el lenguaje simbólico de la matemática. La **formalización** de las propiedades de las superficies mínimas descubiertas a través del análisis de las pompas y las películas de jabón, son la muestra clara de su incorporación en el desarrollo del contenido a estudiar.

- de **consolidación** que proponen interrelacionar los contenidos aprendidos con la estructura conceptual que el alumno ya posee, proponiéndole adecuadas e interesantes actividades y situaciones problemáticas que involucren la **práctica** como eje vertebrador.

- de **aplicación** que intentan detectar el grado de significatividad del contenido midiendo su nivel de funcionalidad y manifestándose a través de la **transferencia** que del saber aprendido puede hacerse a otras situaciones de trabajo en el aula.

Aplicaciones a la arquitectura

Entre las aplicaciones más destacadas de la geometría de las pompas de jabón, se encuentran las estructuras arquitectónicas de varios edificios, como los diseñados por Frei Otto en Munich.



Para estos diseños, se sumerge una plancha de tela fina atravesada por varillas de distintos pesos y bordeada por hilos más gruesos, en una solución jabonosa, de la que luego se la extrae con cuidado, transformándose en una réplica en miniatura de la estructura que se construirá. Los modelos así creados son fotografiados y medidos para la posterior construcción de maquetas. Estas se prueban en túneles aerodinámicos previamente a la construcción de los edificios, para evaluar el efecto del viento, la lluvia y la nieve. Finalmente se dibujan los planos y se procede a la construcción en la que se sustituye la película jabonosa con material sintético y los hilos con cables de acero.

Las figuras así estudiadas y diseñadas necesitarían complicados cálculos matemáticos para ser descriptas con exactitud, por lo que la geometría experimental colabora en gran medida a la resolución de complejos problemas de superficies y contornos.

Es interesante la experimentación en el aula con este tipo de problemas, pues los alumnos pueden de esta manera, no sólo comprender algunas de las técnicas arquitectónicas actuales sino combinar la geometría con el gusto artístico y la formación de conceptos matemáticos a través del desarrollo de sus cualidades o atributos relevantes (Vinner)

Comentarios finales

El empleo de recursos didácticos sencillos, como las pompas de jabón, permite desarrollar actividades de distinto tipo para el aula, en las que se combina la imaginación con la aplicación de propiedades geométricas. Este tipo de actividades, además de permitir solucionar diversos problemas, da la posibilidad de crear en los alumnos una visión científica del mundo que los rodea.

El objetivo de este taller está centrado en la reflexión acerca de estas actividades, para lo cual, los participantes deberán no sólo resolver problemas en los que experimentarán con pompas de jabón, sino diseñar y analizar actividades que puedan ser transferidas al aula.

Referencias bibliográficas

COURANT R. - ROBBINS, H. (1968). *El problema de Plateau*. En Newman, J. (Comp.): *Sigma: El Mundo de las Matemáticas* 2. (pp. 177-187) Madrid, España: Grijalbo.

CHEVALLARD, Y. - BOSCH, M. - GASCON, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Ice - Horsori.

HILDEBRANDT, S. - TROMBA, A. (1990). *Matemática y formas óptimas*. Madrid, España: Prensa Científica.

PERELMAN, Y. (1987). *Problemas y experimentos recreativos*. Moscú, URSS: Mir.

PETERSON, R. (1992). *El turista matemático*. Madrid, España: Alianza.

VERNON BOYS, C. (1968). *Las burbujas de jabón*. En Newman, J. (Comp.): *Sigma: El Mundo de las Matemáticas* 2. (pp. 169-178) Madrid, España: Grijalbo.

VILLELLA, J. (1996). *Sugerencias para la clase de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

VILLELLA, J. - CRESPO CRESPO, C. - PONTEVILLE, Ch. (1998). *Cuando la geometría es el tema de la discusión acerca de la didáctica de la matemática*. En *Educación en Ciencias*. Vol. II, nº 5. (pp. 60-68). Buenos Aires, Argentina: UNSAM.

La matemática nos ayuda a preparar una fiesta patria en la escuela[1]

Alicia Ferrari, Diego Gazzola Monamicq, Ebiana Marey, Patricia Torres, Julio Vecchietti
Argentina

Fundamentación de la propuesta

La idea de presentar como propuesta la organización de un acto patrio en la escuela, surge como una necesidad, fruto de la convergencia de variadas actitudes presentes en nuestra comunidad educativa. Por un lado la búsqueda de propuestas innovadoras, en cuanto a la presentación de situaciones p.oblemáticas que resulten atrayentes a los alumnos, y sean útiles para promover la acción de los mismos sobre los contenidos escolares que se proponen. Por otro lado, la necesidad de integrar las distintas áreas en los proyectos áulicos, notando que en muchos casos, la situación se fuerza en forma extralimitada.

Por último, la escasa apreciación que existe de los símbolos nacionales y fechas patrias como medio de comunicación y reconocimiento internacional. Si bien el sentimiento patriótico aparece o se exterioriza espontáneamente durante eventos deportivos mundiales, el resto de los días, incluso los patrios, no se viven de igual modo. Conscientes de que la zona de desarrollo próximo (Vigotsky), es el lugar de intervención del docente y que para ubicarse correctamente en ella, debemos pensar actividades de aprendizaje que movilicen al alumno, realizamos esta propuesta que implica: *pensar, sentir y hacer* (Novak).

Teniendo como meta trabajar con el espíritu patriótico, desarrollamos este trabajo que propone la participación de los alumnos no solo en la elaboración de un acto patrio, sino que además hará suya la fiesta, haciéndose vivo este sentimiento sea cual fuere su país de origen. Si bien nuestra propuesta tiene una base netamente matemática, el hecho de que trate de la organización y puesta en práctica de un acto escolar permite, no solo que el alumno resuelva situaciones problemáticas presentadas desde lo geométrico, aritmético o algebraico con diferentes niveles de complejidad, sino que también puede considerarse como válida para que el alumno:

- Desarrolle una actitud de aprecio por lo propio, pudiéndose así contribuir a la formación del sentido de pertenencia y al de la identidad nacional.
- Aprecie el significado e importancia de los símbolos patrios como elementos de comunicación y de identificación de una comunidad o país, siendo éstos universalmente aceptados.
- Aproveche e integre en forma creativa el tiempo dedicado a la actividad escolar, permitiendo que comprendan, formulen y reformulen instrucciones simples y complejas.

Temperley, Buenos Aires, ARGENTINA. Julio de 1999

La matemática nos ayuda a preparar una fiesta patria en la escuela

GRUPO 1
A este grupo le tocó:

- Organizar una **rifa** para recolectar dinero.
- Armar **escarapelas usando cinta argentina.**
- Confeccionar una **escarapela original**.

[1] La propuesta está pensada para trabajar con alumnos entre los 9 y 12 años. Al resolverla, intenta pensar como lo hace un alumno a esa edad. Cualquier consulta, dirigirse a ebiana@bigfoot.com

Organización de la rifa

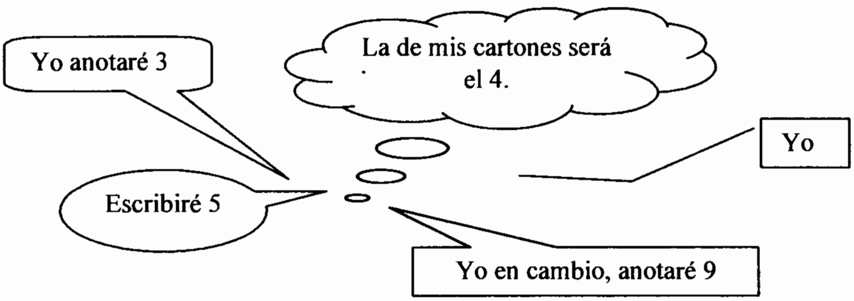
Estaban muy entusiasmados con la rifa. Hicieron muchas averiguaciones. Finalmente decidieron:

- El primer premio será un radio, que nos cuesta 42$[2]
- El segundo premio, un vale de 20$ para comprar un compacto.
- El tercero, un reloj despertador de 7$.

a) En total son 25 alumnos. ¿Cuántos números participarán en la rifa, si cada uno deberá vender 8 rifas?

b) Se pusieron de acuerdo, en que el valor de la rifa sería de cincuenta centavos[3]. Si se vendieran todas, ¿cuánto dinero tendrán de ganancia?

Prepararon unos cartoncitos para la rifa, y allí escribieron los números. La rifa iba a ser original, porque en los cartones había anotados números de 5 cifras, no obligatoriamente correlativos. Por ejemplo anotaron 13450, o 87421. Para que los números no se repitieran, los chicos del grupo eligieron qué número ocupará el lugar de las decenas de mil en cada uno de los cartones que armaron.



Mientras trabajaban los chicos se reían mucho. Por ello se acercó la señorita a preguntarles:

MAESTRA: ¿Por qué tanta risa?

UN ALUMNO: Porque cuando digamos los números ganadores, nuestros padres deberán hacer cuentas para saber si son ganadores.

MAESTRA -¿Cómo?

OTRO ALUMNO QUE DICE: Por ejemplo:

Supongamos que la mamá de Belén compró el 15010, el 32677 y el 94278. La mamá de Tamara el 46957 y el 15310. Y que la mamá de Carol el 32487 y el 46057.

Si al sacar los números ganadores el día de la fiesta decimos:

Primer premio: 4 x 10000 + 6 x 1000 + 9 x 100 + 5 x 10 + 7
Segundo premio: 3 x 10000 + 2 x 1000 + 6 x 100 + 7 x 10 + 7
Tercer premio: 1 x 10000 + 5 x 1000 + 3 x 100 + 10

c) ¿Quién se lleva la radio?
d) ¿Y el compacto?
e) ¿Quién se sacó el reloj?

MAESTRA: Ahora entiendo... ¿Y si los papás no lo entienden?

---

[2] En nuestro taller consideraremos de dólar estadounidense. ¿Resulta muy cara esta rifa para tu país?

[3] De dólar.

LOS ALUMNOS ANTERIORES: Nosotros se lo explicaremos.

f) Expresá el resto de los números del ejemplo, tal como se leerían si salen en la rifa.

g) Los números ganadores resultaron:

$$1 \times 10000 + 4 \times 10 + 7 \times 100 + 2 \times 1000$$
$$9 \times 10000 + 5 \times 100$$
$$2 \times 10000 + 4 \times 1000 + 8 \times 10$$

¿Qué había escrito en cada uno de los cartones ganadores?

Para las escarapelas

1) La señorita les pidió a tres de los integrantes que compraran medio rollo de cinta a cada uno. Al llegar a la escuela y comparar el largo del medio rollo de cinta:

- uno medía medio metro.
- el otro 10 metros.
- el tercero, 3 metros.

Si todos compraron ciertamente medio rollo de cinta, ¿cómo explicas lo que sucede?

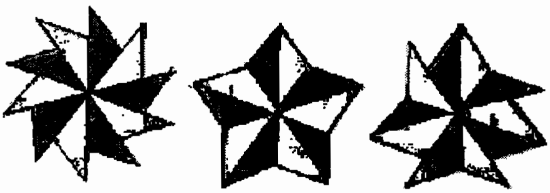
2) Para una escarapela se usan 7 cm de cinta.

a) ¿Cuántas escarapelas pueden hacerse con toda la cinta que trajeron?

b) ¿Y cuántas de cada rollo?

Para las escarapelas originales

Para estas escarapelas, la señorita les presentó los siguientes modelos:



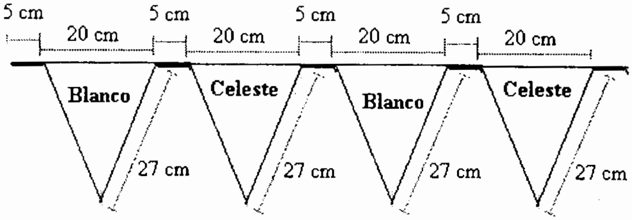
Trabajá para reproducirlos del tamaño que quieras. Por supuesto... ¡¡También puedes crear tus propios modelos!!

GRUPO 2

A este grupo le tocó:

- Armar guirnaldas de banderines.
- Ayudar a Sofía con los pastelitos.

Para las guirnaldas la señorita entregó el siguiente esquema:

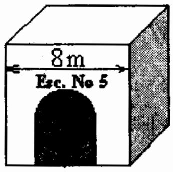


Ayudá a construir un molde para los triángulos de los banderines... Y con el molde, un banderín.

Para trabajar necesitás: Cinta métrica o metro de madera. Si armaras guirnaldas para el aula del taller y las colgaras en los lugares que se indican en el cuadro. ¿Qué podés decir de información solicitada?

Lugar	*Cantidad de banderines*		*Longitud del hilo (en m)*
	CELESTES	**BLANCOS**	
En la puerta del aula			
Sobre una pared del aula			
Arriba del pizarrón			
Atravesando el aula			

La primera guirnalda que hicieron los chicos del grupo, fue para cubrir la pared del frente de la escuela, que es de ocho metros de ancho.



a) Como la guirnalda medía ocho metros igual que la pared, para poder atarla tuvieron que añadir hilo. ¿Por qué?

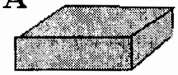
c) Las otras dos guirnaldas hechas por el grupo, se usaron para decorar dos de las paredes del aula. Medían desde el primer al último banderín 7 m y 5m. ¿Cuántos banderines se usaron para armarlas?

En este grupo estaba Eliana.

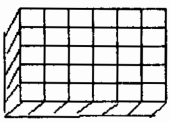
A Eliana **le encanta cocinar**, por ello al grupo, la señorita le encargó la elaboración de pastelitos de dulce.

Compraron 6 paquetes de dulce de membrillo (Figura A).

A



B



Cortaron todos los paquetes de dulce del mismo modo. Cada parte se usa en un pastelito. Desde arriba los cortes se veían así (Figura B). Cada paquete de tapas para pastelitos trae 24 unidades. Con ellas se pueden armar una docena de pasteles.

1) ¿Cuántos paquetes de tapas tuvieron que comprar si gastaron todo el dulce?
2) Cada paquete de dulce, costaba 1,50$[4]. El paquete de tapas, 1,70$.

Como era para la escuela, el almacenero les cobró 30$. ¿Qué descuento les hizo?

[4] Consideraremos dólares estadounidenses

GRUPO 3

En este grupo las tareas asignadas fueron:

- Confeccionar escarapelas gigantes para decorar la escuela
- Trabajar con el panel gigante.

Para las escarapelas... debían usar el compás.
Como mucho no se acordaban, la señorita los orientó diciéndoles:

- Con el compás podés transportar segmentos, manteniendo su longitud.
- También con centro en un punto y haciéndolo girar, obtenés con el compás una línea cerrada llamada circunferencia.
- El punto en el que hacés centro con el compás, es el centro de la circunferencia y si medís la separación del mismo a cualquier punto de la curva, verás que están todos a la misma distancia.
- La circunferencia, junto con todos los puntos interiores a ella, forman un círculo.

Y ahora animate...

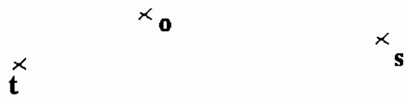
1) Trazá varias circunferencias usando el compás y en cada una nombrá el centro con la letra "**o**".
2) Elegí un punto de una circunferencia y llamalo h. Trazá el **segmento oh**. Acabás de marcar un radio.
3) Elegí otro punto de la circunferencia y llamalo m. Trazá el **segmento mh**. Acabás de marcar una cuerda.

Los segmentos de recta que tienen por extremos dos puntos de la circunferencia, se llaman **cuerdas**.

4) En las circunferencias anteriores, trazá la cuerda de mayor longitud.

La cuerda de mayor longitud, se denomina **diámetro**.

5) Dibujá varias circunferencias, que tengan como centro, los puntos "**o**", "**s**" y "**t**" que se marcaron.



6) En cada circunferencia, trazá algunos radios y varias cuerdas, entre ellas el diámetro.

7) Mirando los dibujos indicá V o F:

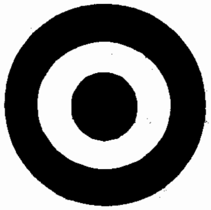
   a) Al comparar los radios de una misma circunferencia veo que son de distinta longitud.
   b) El radio es la mitad del diámetro de una misma circunferencia.
   c) El diámetro es más largo que cualquier otra cuerda.

Y ahora a armar las escarapelas, dijo la señorita...

Para trabajar necesitás:

- Papel celeste.
- Papel blanco.
- Adhesivo
- Tijera.
- Compás.
- Regla

Escala 1:10



a) Armá una escarapela gigante.

Continuando con el uso de escalas

b) Calculá la cantidad máxima de círculos celestes pequeños que podés cortar de una cartulina. Dibujalos a escala en este rectángulo.

Escala 1:10

El panel gigante

Para el panel gigante, buscaron figuras y las pegaron. Luego cuadricularon la lámina. El panel quedó muy llamativo... **está pegado en esta aula...** Para mencionar la ubicación de una figura, usarás las coordenadas. Debés decir primero el número de la columna y después el número de la fila. Por ejemplo en (9;1) hay un ají. En (6;4).se ve un angelito Y en (12;5) está pegada una foto del General Don José de San Martín.

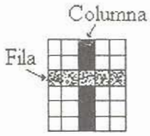
1) ¿Qué hay en (3;1)?
2) ¿Quién está en (10;7)?

Con el panel, organizaron un concurso...

I. Había que buscar los casilleros con las siguientes correspondencias:

San Martín – Cordillera de los Andes.
Belgrano – Bandera argentina.
Cristóbal Colón – Carabelas
25 de mayo – Cabildo

II. Para poder completar una tarjeta que se colocaba en una urna.
Las tarjetas a llenar eran así:



Alumno: .... Año: .....

	C	F
San Martín		
Belgrano		
Cristóbal Colón		
Cabildo		

	C	F
Cordillera de los Andes		
Bandera argentina		
Carabelas		
25 de mayo		

III. De entre todas las tarjetas que se respondan correctamente, por sorteo, se elegirá al alumno que recibirá el premio.

c) Completá la tarjeta con las respuestas necesarias, para ser ganador.
d) Para poder representar al panel en el reverso de esta hoja, ¿cuántas veces es necesario achicarlo?
e) ¿Qué tamaño tendrá cada cuadro del panel representado en la hoja?

GRUPO 4

A este grupo le tocó:

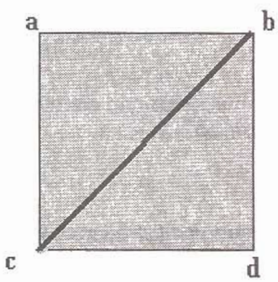
- Construir molinetes.
- organizar una encuesta sobre el uso de escarapelas

Todavía falta un molinete, ¿lo hacés?. Para trabajar necesitás:

- Dos cuadrados de iguales dimensiones, uno de cartulina celeste y el otro de cartulina blanca.
- Un alfiler.
- Un sorbete.
- Un fideo dedalito.
- Un trocito de corcho

Llamamos diagonal de un polígono al segmento que une dos vértice no consecutivos.

Una de las diagonales del cuadrado dibujado es el segmento bc.

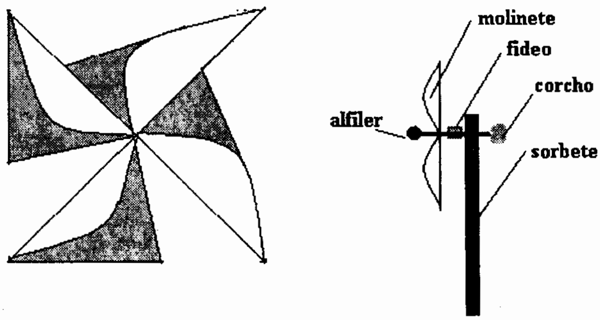


El segmento $\overline{bc}$ une dos vértices no consecutivos

⇨ Dibujá y nombrá a la otra diagonal.

1) Superponé y pegá los dos cuadrados de cartulina.
2) Trazá las diagonales del cuadrado y plegá por ellas.
3) El punto donde se cortan las diagonales es el centro del cuadrado. Llamalo "**o**"
4) Marcá el punto medio de los segmentos que unen cada vértice con "**o**".
5) Cortá desde cada vértice hasta el punto medio de cada segmento.

Doblá sin marcar el doblez, como muestra la figura:

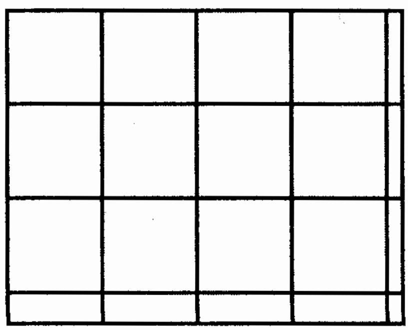


6) Colocá el alfiler en el centro como muestra la figura. Agregá el fideo dedalito y el sorbete, como se muestra.
7) Para no pincharte, clavá en el extremo del alfiler, el trocito de corcho.

Los chicos trabajaron así:

Para recortar los cuadrados celestes que necesitaban en los molinetes dibujaron los cuadrados en la cartulina. Les quedó así:

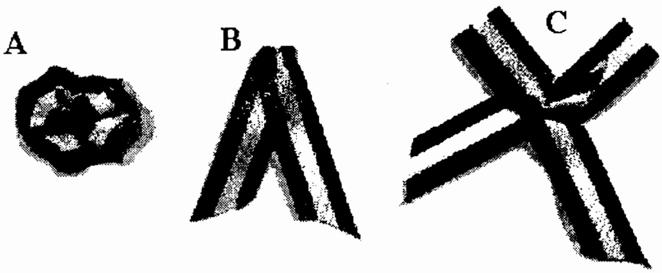
Escala 1:10



a) ¿Cuánto medía el lado del cuadrado de los molinetes que construyeron?
b) ¿Qué ancho y largo tenía la cartulina que usaron?

¿Cuál conviene?

Si tuvieras que **hacer** escarapelas para entregar en un acto escolar y te dan a elegir entre estos 3 modelos.



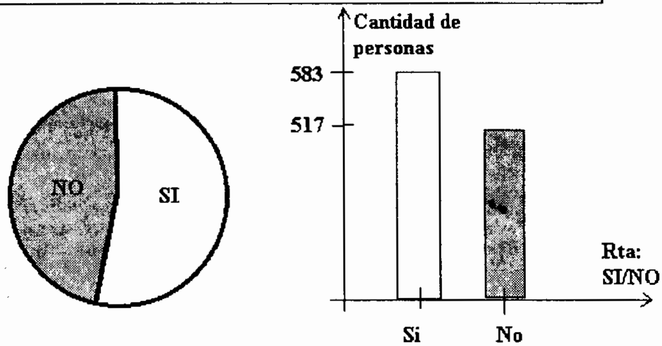
a) ¿Cuál elegirías? ¿Por qué?
b) Si quisieras usar la menor cantidad de cinta posible, ¿modificarías tu elección?

¿Usás escarapela?

El Centro de Estudiantes de nuestra escuela organizó una encuesta que duró todo un mes. La pregunta de la encuesta fue: ¿Usás escarapela o embanderás tu casa en las fechas patrias?

Los resultaron fueron los que se muestran:

¿Usa escarapela o embandera su casa durante las fechas patrias?



a) ¿Cuántos fueron los encuestados?
b) ¿Cuál de las dos situaciones predomina?
c) ¿Qué tenés en cuenta para contestar mirando el gráfico de barras?
d) ¿Y al mirar el gráfico circular?

⇨Preparen la misma encuesta **en nuestra aula taller...** Con las respuestas de todos lo alumnos, organicen la información. Preparen los gráficos de barras y de sectores. Comparen los resultados de esta encuesta, con los de la realizada por el Centro de Estudiantes.

La solución de problemas en la enseñanza de la Matemática de la Educación Secundaria

Santiago Ramiro Velázquez B.
Universidad Autónoma de Guerrero
México

En este trabajo se explican los resultados preliminares, de una investigación en proceso sobre la solución de problemas en la enseñanza de la Matemática. Dicha investigación pertenece al Sistema de Investigación Benito Juárez de CONACYT, en la que se analizan las estrategias que usan los alumnos para resolver problemas aritméticos, algebraicos y geométricos. Además, se pretende hacer una estructuración didáctica, donde se integren estrategias y acciones específicas, que promuevan el desarrollo de la habilidad de resolver problemas. En este trabajo se considera que una estructuración didáctica, se integra con un conjunto de acciones del alumno y el profesor, conformando un proceso en el que se reflejan los aspectos esenciales del objeto motivo de estudio. En este proceso es fundamental la implicación personal del educando en su aprendizaje, de modo que los objetivos se encaminen al desarrollo de los recursos de su personalidad (Mitjans, A. 1995). Dichos recursos consisten en formaciones motivacionales, tendencias orientadoras, independencia y autovaloración, que se pueden manifestar en la problematización y reconceptualización del saber y en la búsqueda de nuevas estrategias de solución de problemas.

Uno de los objetivos esenciales de la enseñanza de la Matemática en la educación secundaria, es la solución de problemas, por sus potencialidades para desarrollar las acciones de comprender, modelar, recodificar, fundamentar, plantear y resolver. No obstante, los alumnos al concluir este nivel educativo, tienen deficiencias en la formación de estas acciones. Las que se reflejan en una actuación puntual, de desinterés y en el uso de estrategias "poco reflexivas" en la solución de problemas. Así se constata en investigaciones recientes en esta línea.

Para contribuir a la solución de esta problemática, se pretende hacer una propuesta que promueva el desarrollo de la habilidad de resolver problemas. Se parte del supuesto de que las habilidades pueden ser desarrolladas mediante el diseño, experimentación y adecuación de estructuraciones didácticas y las acciones apropiadas. A los efectos, se analiza la aplicación de pruebas y entrevistas a estudiantes de secundaria, caracterizando las estrategias que usan al resolver problemas. En los problemas de cálculo o determinación se identifican las estrategias, que a continuación se exponen, en orden, de la "menos reflexiva" a la "más reflexiva" : Opera con los números, que consiste en identificar números en el problema y operar con ellos. Busca números cómodos, consistente en inferir un número que puede ser la solución y probar si lo es. Procedimiento rutinario asociado a indicadores textuales, en el que el alumno reconoce el "indicador" que le recuerda el tipo de procedimiento a utilizar. Palabra clave, que consiste en realizar operaciones relacionadas con alguna palabra expresada en el problema. Tanteo, en el que se busca la solución probando sistemáticamente con distintos valores, hasta encontrarla. Significados, consistente en identificar los significados de las operaciones que están presentes en el problema y ejecutarlas. En los problemas de demostración y de construcción, se reconocieron las siguientes estrategias: construye y no presenta argumentos, construye y presenta argumentos empíricos y construye y presenta argumentos conceptuales.

Además, se considera el análisis de diversos antecedentes en esta temática, como los trabajos de Fariñas (Fariñas, G. 1995) donde se explica que la escuela tiene como función principal, la formación de las habilidades conformadoras del desarrollo de la personalidad, HCDP. Dichas habilidades están organizadas en 4 grupos referentes al planteamiento y persistencia en el logro de metas personales, en la organización temporal de la actividad y en las acciones de comprender, comunicar, plantear y resolver.

Las HCDP constituyen un modelo en el que se pueden enmarcar, aspectos esenciales de la solución de problemas Como: Los estudios de Polya (Polya, G. 1976) sobre las 4 fases de solución de problemas, instrumentadas con un programa heurístico. De igual modo los criterios de Schoenfeld (Schoenfeld, A. 1988) acerca de las ideas fundamentales de la solución de problemas y los trabajos de Rizo y Campistrous (Rizo, C. y Campistrous, L. 1996) que contienen un material de apoyo para los docentes, denominado: procedimiento generalizado para resolver problemas. Este procedimiento se basa en las 4 fases de Polya y se formula con acciones de los alumnos como: leo. releo, reformuló, busco la vía de solución, resuelvo y hago consideraciones. Para instrumentar estas acciones se proponen estrategias y técnicas, entre ellas, lectura analítica, modelación, determinación de problemas auxiliares y tanteo inteligente.

Avances de la estructuración didáctica

De estos análisis se integran las ideas que conforman la estructuración didáctica que se está realizando, cuyo avance se resume de la siguiente forma:

Para asegurar condiciones favorables a la solución de problemas de la matemática escolar, es necesario que la escuela y en particular, la enseñanza de la Matemática se transformen en un centro de interés. Donde el alumno cree y recree ideas, dándole sentido a la actividad que realiza. Para contribuir a esta transformación se han precisado algunos aspectos que caracterizan un problema, estos son: se trata de una situación o tarea que intenta transformar o resolver el alumno, es una contradicción que se le presenta al sujeto y este quiere resolverla y la vía de solución es desconocida para el estudiante. De esta concepción se derivan las siguientes implicaciones didácticas:

No considerar problemas tipo.

Motivar para despertar el interés del alumno.

No intentar resolver el problema antes de ser comprendido

El apresuramiento en la solución de un problema, es nocivo.

En base a estas consideraciones se ha elaborado una colección de problemas, para ser instrumentada en la escuela. En el mismo sentido se explica, que por su carácter abarcador las HCDP pueden constituir un modelo, en el que se enmarca la solución de problemas, ya que se asocian entre si, asocian a las habilidades matemáticas y se asocian con ellas. De este modo la solución de problemas se estructura en varios momentos, uno de ellos establece la relación entre las HCDP y las acciones generales de esta actividad.

El grupo de habilidades referentes al planteamiento y persistencia en el logro de metas personales y la organización temporal de la actividad, se corresponde con las acciones que promueven al alumno, como sujeto de su aprendizaje. Es decir, que el estudiante participe en la solución de problemas, buscando su desarrollo. De este modo, se pueden lograr formaciones motivacionales, tendencias orientadoras e independencia. Estos son recursos de la personalidad, que al desarrollarse aseguran al sujeto, un desempeño exitoso en su vida laboral y social. De la colección de problemas, los denominados interesantes, históricos y prácticos son apropiados para instrumentar estas acciones.

El grupo de habilidades relacionadas con la comprensión y búsqueda de información, se corresponde con las acciones que promueven la "buena lectura" y la visualización. Al hablar de "buena lectura" se trata de una lectura analítica o inferencial, con la que se descubren los aspectos esenciales y sus relaciones, del objeto de estudio. Por su parte, la visualización es una acción que consiste en comprender y realizar diferentes registros de representación y relacionarlos entre si, de modo que el alumno descubra lo esencial y lo reconceptualice. Algunos registros de representación son el algebraico, tabular, icónico, gráfico y verbal (Duval, R. 1993).

Como se puede ver, la “buena lectura” y la visualización son relevantes para comprender, que a su vez es una acción imprescindible para la solución de problemas, ya que el proceso de solución inicia cuando se empieza a comprender y termina cuando se ha comprendido.

Cuando en la solución de problemas, estas acciones son objeto de enseñanza aprendizaje, se concreta una de las funciones de esta actividad, lograr la unidad del pensamiento y el lenguaje. De modo que el lenguaje se haga intelectual y el pensamiento se torne verbal (Vigotsky, L. 1996).

El grupo de habilidades relacionadas con la comunicación, se corresponde con las acciones que promueven las “buenas preguntas”, la visualización y el expresarse correctamente desde el punto de vista de la forma y el contenido. Las "buenas preguntas" se pueden orientar con estas interrogantes ¿ qué necesito o que aporto ?, ¿ Por qué y para qué ?, ¿ Cómo y cuándo ?. El expresarse correctamente desde el punto de vista de la forma y el contenido, está relacionado con la visualización y las “buenas preguntas”. De modo que el alumno determine la forma, de comprender y expresar el objeto motivo de comunicación, de acuerdo a las exigencias planteadas.

El grupo de habilidades referentes al planteamiento y solución de problemas, están relacionadas con las acciones que promueven el campo de acción y la toma de decisiones (Mitjans, A. 1995), la problematización, la reconceptualización, la formulación de problemas y la búsqueda de nuevas estrategias de solución. La organización del campo de acción y la toma de decisiones, está orientada por los objetivos. De modo que el estudiante al implicarse en la actividad de resolver problemas, sea consciente que de él se espera un trabajo productivo y creativo. En el que problematice, reconceptualice y busque nuevas vías de solución. En este trabajo se considera que problematizar significa, identificar, formular y reformular problemas. Reconceptualizar es comprender y aplicar los significados de los conceptos, de acuerdo al problema y buscar nuevas vías de solución es resolver problemas, particularmente, los de carácter práctico en forma original.

En el análisis de la aplicación de pruebas y entrevistas, a estudiantes y profesores de educación secundaria, se constata que estas ideas no se instrumentan en la escuela o se hace de manera deficiente. En tanto que del análisis de los cursos y talleres trabajados con docentes, se puede argumentar que las referidas ideas son aplicables en situación escolar.

Este momento se puede resumir de la siguiente forma.

HCDP	ACCIONES PARA PROMOVER:
Habilidades referentes al planteamiento y persistencia en el logro de metas personales y organización temporal de la actividad	- Al alumno como sujeto de su aprendizaje - Formaciones motivacionales - Tendencias orientadoras - Independencia
Habilidades relacionadas con la comprensión y la búsqueda de información	- Unidad del pensamiento y el lenguaje - Personalización de experiencias - La “buena lectura” - La visualización
Habilidades referentes a la comunicación	- Unidad del pensamiento y el lenguaje - Las “buenas preguntas” - La visualización - Expresarse correctamente desde el punto de vista de la forma y el contenido

Habilidades relacionadas con el planteamiento y solución de problemas	- Organización del campo de acción y toma de decisiones - La problematización - La reconceptualización - La formulación y reformulación - Búsqueda de nuevas vías de solución

Otro momento de la propuesta, está formado por las fases propias de solución de problemas, como marco para integrar acciones, estrategias y técnicas específicas. De modo que constituya una base de orientación para que el alumno personalice experiencias, en esta actividad. La estructuración de esta base toma como guía el procedimiento generalizado para resolver problemas (Rizo, C. y Campistrous, L. 1996) y está inconclusa, ya que hace falta caracterizar algunas acciones y estrategias. Los avances se muestran en esta representación, que sistematiza preguntas, acciones, técnicas y estrategias.

¿ Qué dice ?	Leo Releo	Lectura analítica Modelación Visualización
¿ Puedo decirlo de otra manera ?	Reformulo	Lectura analítica y reformulación Visualización
¿ Cómo puedo resolverlo ?	Busco vías de de solución	Modelación Significados Tanteo Determinación de problemas auxiliares Analogía Vía directa o indirecta Lugares geométricos Transformaciones geométricas Argumentos visuales Argumentos conceptuales
	Resuelvo	
¿ Es correcto lo que hice ?	Hago consideraciones	Comprobación

Instrumentación del modelo. Uso de técnicas y estrategias

La técnica de modulación

Modelar significa, representar por medio de esquemas las relaciones fundamentales que se establecen en un problema, de modo que se despeje de elementos inecesarios que hacen difícil su comprensión. La modelación se ha estructurado didácticamente como una técnica útil en la solución de problemas (Rizo, C. y Campistrous, L. 1995). Dicha estructuración consta de las acciones para modelar, los diversos tipos de modelos y su instrumentación en la solución de problemas. Se han caracterizado los siguientes modelos: lineal, tabular, ramificado, conjuntista y analógico. En este trabajo se consideran las acciones y los modelos, como originalmente se explican en los trabajos de Rizo y Campistrous, en tanto que nosotros elaboramos su instrumentación con diversos problemas, sobre los contenidos del programa de educación secundaria. En forma similar se procederá en las demás técnicas y estrategias.

Acciones que conforman esta técnica

--Analizo el problema para determinar el tipo de modelo a utilizar.

¿ Qué tipo de modelo utilizo ?

--Decido por donde voy a comenzar a representar la información.

¿ Cómo represento la información ?

--Hago el esquema. Represento

--Controlo si se corresponde con la situación.

¿ Se ajusta a la situación ?

--Lo analizo para ver si me ayuda a comprender mejor el problema o a encontrar la vía de solución.

¿ Qué puedo inferir del modelo ?

Instrumentación de la técnica

Un hacendado cuya esposa está por dar a luz, muere, dejando en su testamento las siguientes instrucciones: si nace un varón, le corresponde el doble de la herencia que reciba la madre, si nace una niña le corresponde la mitad de la herencia que reciba la madre. Nacen mellizos de diferente sexo. ¿ Cómo debe repartirse la herencia para que se cumpla el testamento ?

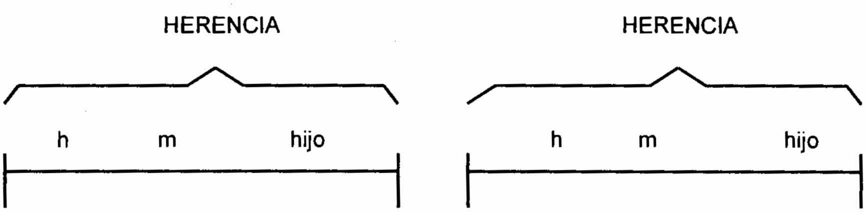
¿ Qué modelo voy a utilizar ?

Debido a que en el problema se expresa una relación parte todo, voy a usar un modelo lineal.

¿ Cómo represento la información ?

Con un segmento de recta represento la herencia total y lo divido en partes como se indica en el problema, de modo que se cumplan las relaciones entre las partes y se correspondan con el todo.

Represento



¿ Se ajusta la situación ?

Sí, ya que representa las relaciones establecidas en el problema.

¿ Qué puedo inferir de este modelo ?

Al representar las relaciones establecidas en el problema, el total de la herencia queda dividida en 7 partes iguales, de modo que cada parte es un séptimo. Por lo tanto a la hija le corresponde un séptimo de la herencia, a la madre el doble, es decir, dos séptimos y al hijo el doble de lo de la madre equivalente a cuatro séptimos. En este caso al modelar se resuelve el problema. En la fase de hago consideraciones respondo a la pregunta: ¿ Es correcto lo que hice ?

Sí, ya que se corresponde con las condiciones y exigencias establecidas en el problema. Además, valoro esta técnica como eficaz en esta actividad y considero que he tenido un buen desempeño al exponer y defender mis ideas e interactuar con el profesor y mis compañeros.

La técnica de lectura analítica

Cuando una persona hace una lectura analítica, de un texto o de un problema, reconoce los elementos que lo forman y las relaciones esenciales que se establecen entre ellos. Polya (Polya, G. 199) llama "Lector inteligente" a quien lee en esta forma. Este lector puede ser el profesor o el alumno, que lee buscando los aspectos esenciales de modo que descubra el propósito del material que analiza o la veracidad de un razonamiento.

Para "Leer bien" es necesario ejecutar las siguientes acciones:

--Leo con detenimiento e identifico lo conocido y lo desconocido
¿ Qué es lo que conozco ?   ¿ Qué es lo que no conozco ?
--Describo palabras desconocidas
¿ Qué significa lo que leo ?
--identifico las condiciones dadas en el problema
¿ qué me dicen sobre lo que conozco y lo que no conozco ?
--Identifico las relaciones o conceptos
¿ Qué tipo de relaciones se establecen?   ¿ De qué conceptos se trata ?
--Si me es útil hago un modelo.
¿ Puedo modelar esta situación ?

Instrumentación

Una fábrica produce 2500 cuartos de yogour semanalmente. La ganancia neta por cada cuarto de yogour que se vende es de 40 centavos, mientras que los que no se venden se desechan con una pérdida de$0,70 por cada cuarto. Escribe la fórmula que expresa la ganancia de la fábrica en términos del número de cuartos vendidos. (Libro para el maestro de educación secundaria, pág. 179)

¿ Qué es lo que conozco ?
--El número de cuartos de yogour que se produce por semana: 2500
--La ganancia por cada cuarto vendido: 40 centavos
--La pérdida por cada cuarto que no se vende: 70 centavos
¿ Qué es lo que no conozco ?
--La fórmula que expresa la ganancia en términos de los cuartos vendidos
¿ Qué significa lo que leo ?
La ganancia tiene que ver con los cuartos vendidos y con los no vendidos
¿ Qué me dicen sobre lo que conozco ?
Que por cada cuarto vendido se ganan 40 centavos y que por cada cuarto no vendido se pierden 70 centavos
¿ Qué me dicen sobre lo que no conozco ?

La ganancia se puede expresar en términos de la diferencia, entre el número de cuartos vendidos por lo que se gana en cada uno y el número de cuartos no vendidos por lo que se pierde en cada uno de estos. El número de cuartos vendidos lo represento con x, por lo tanto el número de curatos no vendidos será 2500 - x. Entonces la ganancia será igual a lo ganado: 0.4 x menos lo perdidos (2500 - x) (0.7).

¿ Qué tipo de relaciones se establecen?

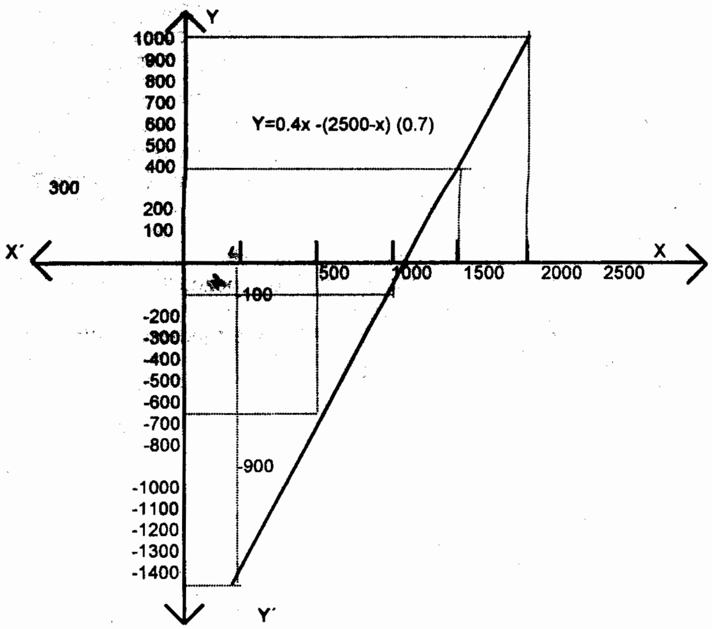
Se establece una correspondencia entre la ganancia y el número de cuartos vendido.

¿ De qué conceptos se trata ?

Del concepto de función, en donde la ganancia que puedo representar con y depende del número de cuartos vendido x. La fórmula pedida es: $y=0.4x-(2500-x)(0.7)$

¿ Puedo modelar esta situación ?

Puedo hacer una figura de análisis (modelo analógico) que consiste en una gráfica cartesiana, el eje de las XX' representa el número de cuartos vendido y el eje YY' la ganancia, como se muestra a continuación:



En este caso al realizar la lectura analítica se resuelve el problema.

Al plantear la pregunta ¿ Es correcto lo que hice ?. Puedo responder que si, ya que en la respuesta, en el modelo y en las diferentes anotaciones que se hacen se comprueba el cumplimiento de las condiciones y exigencias del problema. Además, considero que esta técnica es valiosa no solo para resolver problemas matemáticos, sino para comprender el avance científico, tecnológico y humanístico, que por lo general se expresa en forma escrita y visual.

Técnica de determinación de problemas auxiliares

Se afirma que resolver un problema consiste en responder a la pregunta o preguntas, que se plantean a partir de las condiciones o datos. Este proceso de solución puede darse en forma directa, es decir, de los datos a las preguntas o en forma indirecta a partir de las preguntas. La vía indirecta se aplica cuando es necesario encontrar primero, problemas auxiliares o subproblemas de cuya solución depende la solución del problema original.

La determinación de problemas auxiliares, es la técnica que más promueve el pensamiento heurístico, por esta razón su estructura no responde a determinadas acciones como en los otros casos. Su aplicación se puede orientar con el siguiente procedimiento, elaborado por Rizo y Campistrous (Rizo, C. y Campistrous, L. 1995).

--Se parte de lo que se busca, es decir, de las preguntas. Se contrapone con lo conocido y se buscan relaciones inmediatas entre ambas partes.

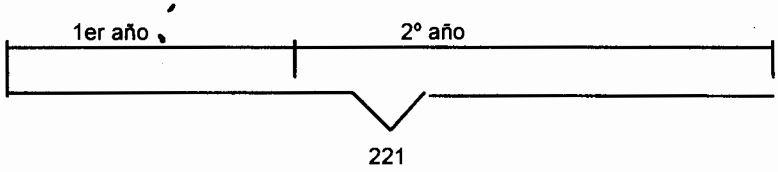
--Si no existen dichas relaciones, se establecen sucesivos problemas auxiliares, hasta llegar a un subproblema que es el "Núcleo" o sea que se puede resolver con los datos dados o con una transformación simple de ellos.

–Respondido ese problema, se sale del "Núcleo" y siguiendo el proceso inverso se van resolviendo los problemas auxiliares encontrados, hasta resolver el problema original.

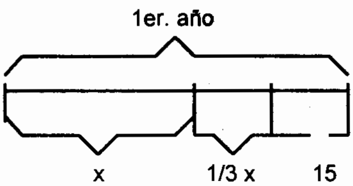
Instrumentación

Un rebaño de ovejas crece cada año un tercio del total y al final de cada año se venden 15 ovejas. Después de vender las 15 del final del segundo año quedan 221. ¿ Cuántas ovejas había al principio ? (Plasencia, I. et al, 1998)

Represento la situación en un modelo lineal

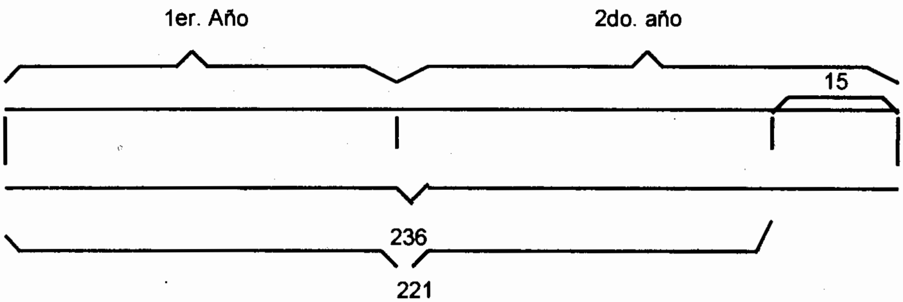


Hasta el momento no puedo resolver el problema.
Planteo el 1er subproblema: ¿Cuántas ovejas había al final del primer año ?
Represento la situación en un modelo lineal



No puedo contestar.
2° subproblema: ¿ Cuántas ovejas aumentaron en el 2° año ?
No puedo contestar.
3er subproblema: ¿ Cuántas ovejas había al final del 2° año antes de vender las 15 ?

Represento en un modelo lineal

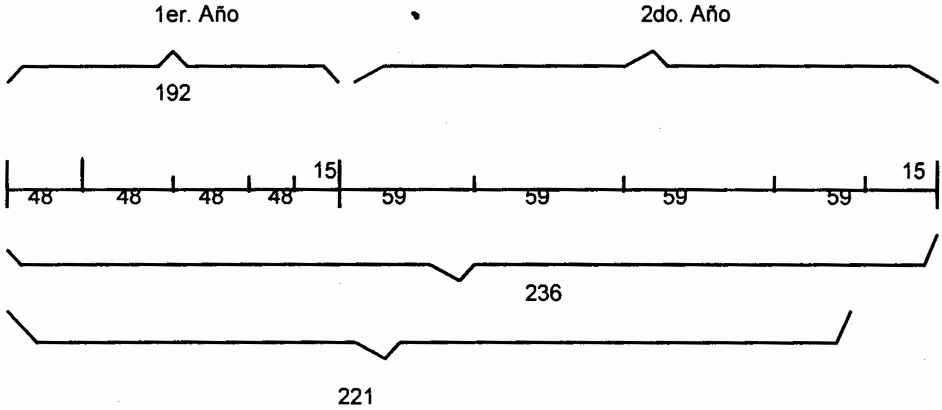


La respuesta es 236. Esta es la solución del problema "Núcleo". Ahora ya puedo resolver los otros subproblemas.

Las ovejas que aumentaron en el 2° año se calculan así: Las 236 representan los 3 tercios que había al principio del 2° año más un tercio que aumentó, es decir, 4 tercios, cada tercio equivale a 236÷4=59. Aumentaron 59 ovejas.

Entonces al principio del 2° año había 236-59=177, de modo que al final del 1er año antes de vender las 15 ovejas había 177 + 15 = 192.

Estas 192 representan los 3 tercios que había al principio más un tercio que aumentó, o sean 4 tercios, por lo tanto en el primer año aumentaron 192÷4=48. Para terminar, al principio había 48 x 3 = 144. Esta es la respuesta al problema original. En la realización de este proceso me oriento con un modelo lineal como el siguiente.



En la parte de hago consideraciones, compruebo que 144 es una respuesta correcta, dado que 144 + (144 ÷ 3) - 15 = 177.

Con 177 inició el 2° año, de modo que 177 + (177÷3) - 15 = 221 que son las ovejas que había al final. De igual modo compruebo que el proceso en su conjunto es correcto, ya que se corresponde con las condiciones y exigencias establecidas en el problema. Además considero que este es un recurso eficaz en la solución de esta clase de problemas y como se puede ver, también se trabaja lectura analítica y modelación. Mi desempeño fue exitoso porque en todo momento estuve orientado, defendí mis ideas, y participé en la socialización de experiencias en un ambiente de trabajo cooperativo.

La técnica de tanteo inteligente

Este técnica consiste en la búsqueda sistemática de soluciones mediante pruebas sucesivas, si se tienen en cuenta todas las soluciones y la naturaleza de los datos del problema, se puede llegar a un número posible de casos a analizar (Rizo, C. y Campistrous, L. 1995). En la prueba sistemática debe analizarse cada vez lo obtenido y compararlo con los resultados anteriores, para ver si existe alguna regularidad, que disminuya la cantidad de cálculos a realizar o permita concluir que no se han dejado soluciones sin considerar. A esta forma de proceder se le denomina "Tanteo inteligente".

Acciones de esta técnica

--Analizo si se pueden determinar casos.
¿ Puedo separar casos ?
--Decido como puedo organizar los casos
¿ Cómo los organizo ?
--Busco regularidades para reducir, si es posible, los casos
¿ Puedo reducir los caos ?
--Investigo qué casos cumplen las condiciones del problema
¿ Cuáles cumplen con las condiciones ?
--Controlo si consideré todos los casos
¿ Consideré todos los casos ?

Instrumentación

Una profesora compró un total de100 útiles escolares entre cuadernos, plumones y lápices. Cada cuaderno vale $3.50, un lápiz vale 50 centavos y se pagan $4.00 por cada tres plumones. Si en total gastó $100.00 ¿ Cuántos útiles compró de cada clase? (Guía de estudio de Matemáticas de los cursos nacionales de carrera magisterial)

¿ Cómo organizo los casos ?

Usando un modelo tabular. Dejo fijo el número de cuadernos y hago variar el número de plumones y de lápices:

cuadernos	10	10	10	
plumones	15	18	24	
lápices	75	72	66	
total en útiles	100	100	100	
total en pesos	92.50	95	100	

Al hacer variar el número de plumones y de lápices, me doy cuenta de una regularidad en el sentido de que al aumentar 3 plumones y disminuir 3 lápices, el dinero aumenta en $2.50. Como en la primera columna se tienen $92.50 es necesario aumentar 9 plumones y disminuir 9 lápices para obtener los $100.00. De este modo se llega a la solución, que se expresa en la cuarta columna.

En la fase de hago consideraciones, afirmo que la respuesta es correcta pero no es única, ya que 5 cuadernos, 42 plumones y 53 lápices dan un total de 100 útiles escolares con un importe de $100.00, por lo tanto también es una respuesta. Considero que esta técnica es valiosa en la solución de problemas "Difíciles" y que se puede acompañar de un modelo tabular para organizar los casos. (1)

(1) Es necesario analizar y resolver una variedad de problemas que sean adecuados para la aplicación de esta técnica. Se proponen los que cumplan con las siguientes características: problemas donde se busquen diversas posibilidades de hacer algo, problemas donde se busquen combinaciones y problemas donde se busquen cantidades que cumplan con determinadas condiciones (Rizo, C. y Campistrous, L. 1995).

Bibliografía

Cabañas, G. y Velázquez, S. 1998, La resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática De la escuela secundaria, proyecto de investigación en proceso, SIBEJ-CONACYT , Chilpancingo.

Cantoral, R. 1997, acerca de la intuición del rigor: notas de una reflexión didáctica, Antologías 1, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Duval, R. 1993, Registros de representación y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en memorias de Didáctica y Ciencias Cognitivas, traducción del Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México, 1997.

Fariñas, G. 1995, Maestro, una estrategia metodológica, Academia, Habana.

Freudenthal, H. 1992, Problemas mayores de la educación matemática, en antología de educación matemática, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.

Hitt, F. 1998, Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum, revista de Educación Matemática, Vol. 10, No. 2, Iberoamérica, México.

Mitjans, A. 1995, Personalidad, creatividad y educación, Pueblo y Educación, Habana.

Placencia, I. et al, 1998, Creatividad y visualización, Revista de educación matemática, Vol 10, No 2, Iberoamérica, México.

Polya, G. 1976, Cómo plantear y resolver problemas, Trillas, México.

Rico, L.1998, Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Thonson Editores, México.

SEP, 1996, La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria, guía de estudio, PRONAP, México.

SEP, 1994, Libro para el maestro de educación secundaria, México.

Schoenfeld, A. 1985, Ideas y tendencias de la solución de problemas, del libro La enseñanza de la Matemática a debate, Madrid.

Rizo, C. y Campistrous, L, 1976, Aprende a resolver problemas aritméticos, Pueblo y Educación, Habana.

Waldegg, G. et al. 1998, Matemáticas en contexto, serie de libros para secundaria, Iberoamérica, México.

Velázquez, S. 1996, Una estructuración de la enseñanza de los dominios numéricos en la escuela secundaria del estado de Guerrero, tesis de doctorado, Chilpancingo.

Vygotsky, L. 1997, Pensamiento y lenguaje, Quinto sol, México.

Los procesos de comunicación en el aula de matemáticas

María Leticia Rodríguez González
Cinvestav-IPN
México

El presente trabajo tiene la intención de analizar y comprender los procesos de comunicación que se dan en el aula de matemáticas, específicamente en la situación particular de la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos, lo cual adquiere características muy complejas, porque este espacio temporal denominado espacio escolar, es un pequeño microcosmos que se rige con cierta autonomía respecto a las determinaciones sociales e institucionales.

Ante; estas circunstancias, nosotros consideramos que:

- En la parte se conjuga la complejidad del todo.
- En este lugar delimitado las acciones de sus protagonistas van a orientar los sentidos *dentro del mismo, de acuerdo con sus experiencias referenciales.*
- En el aula se conjugan los fines de la educación, de la sociedad y de los sujetos que participan en ella.
- Como consecuencia las actividades de los sujetos pueden estar influenciadas por esos fines, los cuales mediante la acción comunicativa, se van a caracterizar de manera particular según el campo disciplinario que se trabaje.
- No conocemos un modelo teórico de comunicación que dé cuenta de cómo se construyen los procesos de comunicación en el aula.
- Reconocemos que en el aula se construyen diversos significados y sentidos alrededor de los contenidos curriculares.
- La comunicación y la didáctica son dos procesos que están relacionados, pero, esto no significa que exista dependencia entre ellos.
- Comunicar no es enseñar, es trascender las fronteras de la didáctica y la enseñanza.
- Es necesario y posible proyectar a la enseñanza desde la perspectiva de la comunicación hacia la Educación matemática.

Hasta el momento hemos podido observar, que los procesos de comunicación que se dan en el aula con el pretexto de la resolución problemas aritméticos, intervienen:

a) El dominio que tienen sobre sistema de escritura y las características de su comprensión lectora van a determinar las maneras de cómo los niños construyen y organizan las ideas para dar sentido a la intencionalidad de problema.

b) Las formas de resolución dependen de su experiencia escolar, social y familiar.

c) El modelo enseñanza, va jugar un papel importante, para propiciar la comprensión y resolución de los problemas aritméticos.

Por lo anterior, el trabajo de investigación se ha organizado en tres espacios de reflexión metodológica:

1. Realizar un análisis por episodios de situaciones cotidianas del aula, con un grupo de 2° grado de educación primaria, lo que permitirá comprender: a) Cómo se construye lo formal del contenido matemático en los docentes, los alumnos.

2. Revisión de las investigaciones que se han realizado sobre resolución de problemas: Kamii, Fuson, Luis Puig, Cobb; así como, el proyecto teórico de Piaget en lo relacionado a la formación del símbolo en el niño; con la finalidad de articularlos al proyecto de comunicación.

Este trabajo no presenta un referente metodológico específico, porque no pretendemos explicar, sino comprender los procesos de comunicación con contenido matemático que se generan en el aula en las condiciones cotidianas, es decir, no se pretende controlar la situación.

El instrumento de la observación nos permitirá reflexionar sobre los elementos que se ponen en juego para la resolución de problemas aritméticos desde la perspectiva de la comunicación.

Como decíamos, la comunicación que se da en el aula, específicamente con la resolución de problemas aditivos, adquiere características muy complejas, empezando porque los niños construyen diversos significados sobre ellos. La forma de presentación (su estructura semántica y sintáctica, oral o escrita) van a jugar un papel muy importante para poner en movimiento estrategias de entendimiento y comprensión de los niños hacia el maestro y hacia el sentido de la situación problemática. Así hemos observado que los niños manifiestan mayor facilidad para comprender un problema que se sugiere de manera oral; que cuando se les presenta de manera escrita. Puede ser porque el lenguaje oral va acompañado de diversos elementos metalingüísticos como los gestos, miradas, ademanes, que van auxilian a la construcción del sentido del problema. Pues aunque la lengua oral y la escrita comparten vocabulario y formas gramaticales, tienen funciones diferentes, y por lo tanto, requieren de construcción y estilo específico. Esto lo podemos comprobar con el hecho de que no escribimos como hablamos, generalmente la escritura tiene una caracterización propia en la cual intervienen reglas semánticas, sintácticas y gramaticales, así como usos convencionales. Sin embargo, en la lengua escrita, el sentido que el sujeto construye del segmento lingüístico va a depender de sus referentes cognitivos, culturales y sociales.

Por lo que son fundamentales los progresos que los niños van logrando en el dominio del sistema de escritura, en donde los dos procesos son importantes: la lectura y la escritura. "La lectura es un proceso complejo que va más allá del simple desciframiento de signos. (...) La lectura es un acto de comunicación que permite un encuentro personal entre el lector y el escritor y propicia el cambio de los estados internos del lector. (...) El significado es algo que está en la mente del escritor en el momento en que se genera el texto. Para aquel que lo comprenda, el texto es una pista que lo lleva a volver a generar más o menos satisfactoriamente el significado que alguien quiso comunicar a través del texto. Al hacer esto, el lector reconstruye, aportándole al texto original lo que posee y desea y, dando así, el significado de mensaje". (Alonso González Gómez, "Hacia una nueva pedagogía de la lectura" AIQUE. P. 18). Siendo medular este punto cabría preguntarse cuál es el significado de mensaje que interpretan los niños de un problema matemático cuando no se constituye como una situación problemática, y a la inversa, cuando se constituye una situación problemática. ¿Cuál es la importancia del rol que asumen los actores en el aula en el proceso de adquisición del sistema de escritura relacionada con contenidos matemáticos? ¿Cómo podemos constituir al sistema de escritura relacionada con contenidos matemáticos en un proceso de comunicación?

A continuación, presentamos un ejercicio de observación en el aula, para tratar de comprender los procesos comunicación que ahí se están desarrollando.

Resolución de problemas aditivos

La actividad que se desarrolló en esta sesión con los niños, tuvo la intencionalidad de que mediante el agrupamiento de colecciones, orientar al niño para que conceptualice el sistema de unidades, decenas y centenas; y facilitar las posibilidades de resolución de problemas que implican la operación de sumar asociada al significado de juntar, utilizando primero procedimientos no convencionales (uso de material concreto, dibujos, conteo por agrupamiento) y finalmente utilizar la regla de operación de suma por columnas. Lo que presentamos es un episodio de la sesión, en donde la maestra propone a los niños que le dicten un problema de matemáticas para resolverlo todos juntos. El análisis que pretendemos hacer desde la comunicación en el aula, tratará de comprender ¿cómo se expresan los niños?, ¿Cómo organizan sus explicaciones? ¿Cómo se enfrentan los niños a la lectura del texto matemático? ¿Cómo trata el docente los contenidos y hacia donde se centra su atención?

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES	OBSERVACIONES	ANÁLISIS
M: ¿Quién me quiere dictar un proble ma? M: A ver Gamaliel G: Entre los .. M: Dictenme un problema... nada más con unidades y decenas, los dos números. M: A ver les voy a ayudar: Juan fue al cine y compró... N: Una bolsa de palomas" M: ¿Qué compró, pero vamos a tomar dos números" N: "Un refresco y una bolsa de palomas" M: ¿Qué compró? N: "un refresco y una bolsa de palomas" M: Juan fue al cine y compró unos helados y gastó 24 pesos y 2 bolsas de palomitas que le costaron 28 pesos. M: ¿cómo se puede resolver? N: Con una suma M: Fíjense que estas son las cantidades que se van a sumar. Lo vamos a hacer con las fichas de colores. Las unidades van a ser de color azul y las decenas de color rojo N: faltó el 24 M: ahora, 28, N: ¡Yo! M: A ver tú. M: ¿Cuántas azules? N: 8 azules y 2 rojas. M: ¿Qué tengo que hacer? N: Contar M: ¿Contar? M ¿qué tienes que hacer? ¿Qué tienes que hacer? M: A ver, ¿Qué tenemos que hacer para saber cuánto tenemos en los 24 y en los 28? N: 52 M: ¿Qué tenemos que hacer? N: Contar M: Pero, ¿qué operación tenemos que hacer?.	Por la forma de conducir la clase por parte de la maestra podemos pensar que no se desarrolla en el diálogo, puesto que ignora las sugerencias de los niños, y es ella quien redacta el problema. La maestra pregunto: cómo se podía resolver, sugiriendo de inmediato el uso de las fichas de colores, haciendo énfasis en que los números que debían considerarse eran el 24 y el 28 subrayándolos, pidiendo los niños que le dijeran cómo se podían representar estas cantidades con las fichas de colores. Una vez que se representan las cantidades, la maestra pregunta los niños: ¿que tenemos que hacer?. Tradicionalmente la enseñanza se centra en inducir a los niños a utilizar la regla de operación de la suma por columnas.	El maestro debe permitir que los niños expresen sus ideas alrededor del conocimiento matemático, pues "... cuando comprendemos que los niños tienen que pensar por su cuenta, dejamos de impedírselo y, en cambio, tratamos de facilitar el proceso constructivo" (Kamii). En el problema que propone la maestra se puede observar la parte informativa, pero le falta la pregunta; es un problema de dos etapas. El número 2 puede ser una palabra numérica que confunda a los niños. La acción de representar las cantidades a través de la manipulación de objetos concretos como son las fichas de colores, no garantiza que los niños establezcan las relaciones mentales de valor posicional y de sistemas de unidades y decenas. La representación no es el dibujo, palabras numéricas, u objetos; es una acción mental que posibilita el uso de símbolos y signos a través de la articulación entre la abstracción y la representación. (Piaget) Cuando los niños contestan contar, el sentido que asignan los niños a la palabra contar está relacionado con la suma asociada al significado de juntar; esto lo podemos deducir cuando uno de los niños da como respuesta el número 52. Por la forma de dirigir la enseñanza podríamos pensar que la respuesta que la maestra esperaba era la de la palabra "suma" asociada a la utilización de regla de operación por columnas; pero el problema es que esto conlleva a una seria dificultad de conceptualizar el valor de la posición, así como la dependencia del papel y lápiz junto con la distribución espacial de las cifras.
C: Contar de 10 en 10. Mire,: diez, veinte, treinta, cuarenta, cuarenta y uno, cuarenta y dos, cuarenta y tres, cuarenta y cuatro, cuarenta y cinco, cuarenta y seis, cuarenta y siete, cuarenta y ocho, cuarenta y nueve, cincuenta y uno y cincuenta y dos.(cuenta las fichas rojas, y	César (un alumno) se levanta de su lugar y pasa al pizarrón para tratar de explicar cómo se puede resolver y escribe el resultado correcto. Sin embargo, la maestra le dice que no, y le pide que vuelva a contarlos. El niño los vuelve a contar en voz alta a la vez que iba señalando con su mano las	La estrategia de resolución que siguió César, fue a través del conteo de objetos físicos, contando todo el conjunto. Por la forma de contar, podemos pensar que Cesar todavía no tiene confianza en su sistema de decenas, porque utiliza su sistema de unidades después de contar en

continua el conteo después del 40 de 1 en 1) M: No, a ver, vuelve a contarlos César: diez, veinte, treinta, cuarenta, cuarenta y uno, cuarenta y dos, cuarenta y tres, cuarenta y cuatro, cuarenta y cinco, cuarenta y seis, cuarenta y siete, cuarenta y ocho, cuarenta y nueve, cincuenta y uno y cincuenta y dos. M: Él lo sacó así. ¿De qué otra forma lo podemos resolver? (Se dirige al grupo)	fichas que va contando.	este caso las fichas de color azul que representan a las decenas.
R: (Reynaldo otro alumno contesta) pues sumando M: Reynaldo como lo sumarías Reynaldo se levanta y pasa al pizarrón) M: ¿qué vas a hacer? R: Sumar los dos números. 24 (escribe esto en el pizarrón) +28 16	José Antonio trata de corregir el resultado, pero la maestra le dice a Tania que pase pizarrón ignorando la acción de José Antonio	Una vez que los niños proponen a la maestra la presentación de la suma por columnas; la maestra dirige su interés en su solución, pero como decíamos, esto no implica que ellos comprendan el valor de la posición, lo cual tiene que ver con los significados que han construido sobre el sistema de numeración decimal.
M: No, no, no (le dice la maestra en voz baja) M: Tania pasa al pizarrón M: Explícale a tus compañeros como lo hiciste T: Sumé el 4 con el 8, luego el 2 con el 2. M: Por qué pusiste este número aquí (refiriéndose al número 1) Tania: Porque sumé el 1 con el 2		
M: ¡Ajá! Quien me quiere pasar a explicar este ... a ver cuántas azules. (Antonio grita "12 maestra) M: Alberto ¿cuántas azules son? Antonio: 12 maestra (vuelve insistir) Alberto¨12 maestra (Alberto las cuenta señalando las fichas sin tocarlas y dice resultado) M ¿Cuántas rojas? Niños: cuatro Niños, 4 rojas y 12 azules. M: Pero, aquí no vamos a poner el número 12. Niño(1): Porque nada mas se pone el número 2. Niño (2): porque se lleva uno M: a ver, vamos a contar las azules... (encierra 10 de las fichas azules en un círculo, por lo que pregunta) ¿Este diez donde lo colocamos? M: ¿Cuál es este diez, donde aparece? Antonio: allá maestra señalando lugar de las decenas (no es escuchado) M. a ver; ¿Dónde aparece este diez?	(Tania resuelve correctamente la operación solicitada, agrupando primero las unidades y colocando número uno arriba de los números dos) La maestra repite la frase "12 azules" y escribe en el pizarrón el número 12.	Cuando la maestra se refiere al papel que juega el número 1, del número 12, observa que la concepción de decena está referida sólo al conjunto de diez unidades. La enseñanza tradicional concibe que las decenas son sólo unidades agrupadas de diez en diez, lo cual es incorrecto. Primero se construyen el sistema de las unidades con sus relaciones de orden y de inclusión jerárquica, y que sobre este sistema el niño puede construir el segundo sistema: de las decenas con las mismas características que el anterior. Por lo tanto el 12 no serán 12 unidades, sino una decena y dos unidades.
	Al dar la maestra la explicación, le resta las posibilidades de construcción de ideas que puedan servir de base para conocimiento matemático de los niños	

A: en el uno.(vuelve a repetir) M: ¿por qué en las decenas? Niño: Porque ahí hay una decena. M: ¿por qué una decena cuántos tiene? Niños: 10 Antonio: por eso lo colocamos en el 1 M: Bueno		Aquí podemos reflexionar que no siempre se puede establecer un proceso de comunicación entre todos los participantes, por ejemplo, la participación de Antonio, quién trataba de expresar lo que sabía acerca de la suma siguiendo la regla de operación por columnas, y el sistema de unidades con el de decenas su participación no fue escuchada. En este sentido se pudo haber cuestionado lo que Antonio sabía Cuando la maestra se refiere al papel que juega el número uno (decenas) no se refiere al conjunto de 10 unidades, sino a una unidad de orden superior, es decir, una unidad de diez, ligada a las relaciones de orden y de inclusión jerárquica. Es decir, que en el sistema de decenas también se ordenan estas nuevas unidades, y se incluyen el 1 en el 2, 2 en el 3, etc.

Bibliografía

Alonso González Gómez, "Hacia una nueva pedagogía de la lectura" AIQUE

Kamii, Constance, "Reinventando la Aritmética II" Editorial Visor. 1992

Foucault Michelle, "Vigilar y Castigar" Editorial Siglo XXI. 1990

Piaget Jean, "La formación del Símbolo en el niños" Editorial FCE. 1996

Fuson Karen, "Research on Learning and Teaching, addition and subtraction of whole numbers", Northwestern University.

Puig, E:. Luis y Cerdán P. Fernando., "Los problemas Aritméticos Escolares" Editorial Síntesis. 1988

Ensalada de frutas: una experiencia alternativa de aprendizaje – enseñanza de matemática realizada en tercer grado

Antonia Medrano, Ana Teresa Valerio
República Dominicana

Propósitos generales

- Propiciar la investigación, desde una perspectiva integradora de los saberes específicos para la información de sujetos críticos. Seleccionando los contenidos pertinentes de cada área. (En esta experiencia: los de Matemáticas) y nivel.
- Aportar nueva concepción de los Procesos de Aprendizaje de Matemática, partiendo de la realidad y de los conocimientos previos de los estudiantes; construimos los conocimientos específicos matemáticos que ayudan a la formación de sujetos críticos, autónomos, participativos, capaces de tomar decisiones.
- ¿DÓNDE SE DESARROLLO ? En el Politécnico Femenino Nuestra Señora de las Mercedes de Santiago de los Caballeros. (Comentar el perfil de la escuela).
- NIVEL: 3^er grado del nivel básico, con 44 alumnas.
- TIEMPO: Primer cuatrimestre del año escolar, un mes aproximadamente.
- ¿CUANDO?: Planificación del primer cuatrimestre del año escolar 1994 – 1995

¿Cómo surge el proyecto?

En esta escuela, un grupo de maestras y maestros realizan esfuerzos para transformar el aula y la escuela en espacio de creación e innovación educativa, donde la vida se articula a los procesos de aprendizaje, orientados hacia la formación de sujetos democráticos.

¿Cómo planificamos?

Ejemplo Temático. Se hace en dos etapas

1) Al final de cada cuatrimestre recogemos las inquietudes de cada curso y fruto del consenso de las estudiantes, salve una situación problemática que deseen investigar.
2) Con las sugerencias aportadas por los / as profesores / as en los diferentes cursos, escogemos una situación problema que exprese él sentir de la mayoría.

Así llegamos a la elaboración del eje temático del cuatrimestre. El que se desarrolló en el primer cuatrimestral del año 94 – 95, fue:

"Conozcamos y analicemos las condiciones de vida de nuestras familias. Trabajemos para aportar soluciones que ayuden a mejorarlas".

Las maestras de tercer grado, dialogan como concretar ese eje temático para el grado, en esta discusión participaron en algunos momentos las estudiantes y en plenaria llegaron a la formulación de lo siguiente:

Situación problema

¿Cómo alimentaremos con los bajos ingresos de nuestros padres para mantenernos sanas?

Esta situación problema es el que muestran a la asesora de matemática con las interrogantes: ¿ Cómo hacemos matemática con esto ?, ¿ Cómo trabajamos los contenidos que nos exige el curriculum?, ¿ Aprobarán estas niñas las Pruebas Nacionales?

Primeras reflexiones

La realidad como punto de partida.

Como hemos visto, desde nuestro eje temático hemos llegados al planteamiento de una situación problema que hace referencia a la realidad familiar de las alumnas. Y esto para trabajar precisamente los conocimientos matemáticos. Con ello pretendemos provocar una ruptura con la concepción que considera que se aprenden en la escuela como algo al margen de la vida. En otras palabras, partimos de nuestra experiencia familiar para conocerla poniendo énfasis en las matemáticas, esto es, con un enfoque matemático de la realidad cotidiana. Nos planteamos, pues, la relación siguiente:

$$\boxed{\text{MATEMATICA} \leftrightarrow \text{REALIDAD}}$$

Esta doble articulación entre matemática y realidad (y viceversa) nos posibilita, como señala Argentina Enríquez << abrir la escuela, acogiendo la corriente de vida que traen los estudiantes >>.

Así nos esforzamos por integrar la comunidad en un proceso de múltiples aprendizajes significativos, donde se dan la mano conocimientos, acciones y compromisos. Esto pasa por un <<aprendizaje por descubrimiento>> que articula realidad y el saber cotidiano con el saber elaborado y sistemático a desarrollar en la escuela. Ahora no era presentar la matemática en función de ella misma, sino desde una necesidad sentida o un problema a solucionar. Claro, las maestras estando consciente que los resultados de un proyecto de investigación ayudaran por los menos a la conciencia critica, no es que ya a solucionará el problema. En esta búsqueda también lográbamos desarrollar destrezas y habilidades numéricas.

Perspectiva de integración

Como la situación problema ya expresaba nos planteaba la temática de <<la alimentación>> igualmente propia de las Ciencias Naturales, vimos como nos brindaba la posibilidad de desarrollar un proyecto de investigación sustentado en esta área de experiencia. Pensamos entonces integrar Ciencias Naturales y Matemática en el proyecto, incluyendo los temas alimentación, economía familiar y salud, sin descartar la presencia de otras áreas de manera parcial. En el presente informe se recoge la experiencia de conjunto, leída desde el área de matemática.

Planificación del proyecto

SITUACION PROBLEMA	¿Cómo alimentamos con los bajos ingresos de nuestros padres para mantenernos sana?
¿QUÉ PRETENDEMOS?	• Descubrir que en los alimentos se encuentran los nutrientes para desarrollar nuestro organismos, vivir mejor y realizar trabajos. • Investigar que alimentos consumimos en nuestra casa y cuáles debemos consumir. • Conocer la importancia de dietas alternativas a menor costo. • Desarrollar el sentido critico sobre el presupuesto familiar en la alimentación. • Organizarse para preparar meriendas alternativas como un modo de provocar nuevos hábitos alimenticios favorables a la salud.

CONTENIDOS TRABAJOS:	NATURALES	MATEMATICAS
CONCEPTUALES	• La alimentación • Clasificación de los alimentos. • Enfermedades que podemos contraer	• Valor de Posición • Composición y descomposición de cantidad • Relación Topológica
PROCEDIMENTALES		• Lecturas y escritas de números. • Cálculo mental, aproximaciones. • Resolver problemas. • Elaborar dietas alternativas a menos costo. • Agilidad mental.
ACTITUDINALES	• Importancia que consumimos. • Necesidad y beneficios del consumo de frutas. • Confianza en si misma. • Toma de decisiones. • Flexibilidad en la búsqueda de soluciones.	

ESTRATEGIAS	• Observar lo que comen y el costo de los alimentos. • Entrevistar a padres, madres, otros familiares y vecinos. • Elaborar listados de los alimentos que consumimos. • Partir de los conocimientos que las estudiantes tiene sobre el tema. • Realizar investigaciones bibliográficas sobre los diferentes nutrientes en los alimentos. • Elaborar guías de percepción y entrevista acerca de lo que comen en su casa, escuela, calle. • Organizar las informaciones recogidas e iniciar el proceso de análisis. • Realizar análisis críticos en base a situaciones aditivas y cálculos mentales. • Elaborar dietas alternativas a menor costo. • Socializar los resultados de la investigación (por medio de un mural o una exposición de dibujos, cuentos y otras producciones de las alumnas) .
PASOS DEL PROYECTO	1. Partimos de los conocimientos previos de las estudiantes. 2. Elaboramos una guía de entrevista: a. ¿ Qué alimentos consumimos? b. ¿ De dónde proceden? c. ¿ Cuánto cuestan estos alimentos ? d. ¿ Cuáles son los ingresos aproximados de nuestras familias.? e. ¿ Por qué necesitamos alimentarnos? f. ¿ Da lo mismo comer cualquier alimento? g. ¿ Cuáles alimentos debemos comer y por qué?
PROFUNDIZACION	3. Organizamos las informaciones recogidas. Calculamos costos de desayuno, cena, comida, con los precios de los alimentos.
PROPUESTA DE ACCION	4. Realizamos lecturas acerca de la alimentación. 5. Comparamos los datos de la entrevista con los subrayados en la lectura y utilizamos algunas clasificaciones de alimentos. 6. Realizamos algunas actividades de recapitulación, como la ensalada de frutas. A partir de ellas, realizamos cálculos mentales, estimaciones, lecturas y escritura de cantidades numéricas. Establecimos relaciones topológicas. 7. Hicimos nuevas preguntas a las familias y con esos datos resolvimos problemas de situaciones aditivas. 8. Elaboramos carteles y cuadros con alimentos conocidos de acuerdo a los nutrientes.
	9. Realizamos dramas y cuentos sobre el tema. 10. Elaboramos dietas alternativas a bajo costo.

OTRAS ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACION	1. Relacionar cada alimento con su precio. 2. Emplear los signos (>, <, =) para comparar precios de iguales alimentos en distintos colmados y supermercados. 3. Leer los precios de los alimentos (lecturas de decimales). 4. Calcular costo de un desayuno, comida, cena a través del calculo mental y escrito, aplicando algunas propiedades de la adición. 5. Recortare de periódicos anuncios con precios de los alimentos que consumimos (para incentivar la lectura y escrita de números decimales). 6. Dibujar o pegar láminas en el cuaderno de algunos de tus alimentos preferidos y calcular el costo diario y semanal, según el consumo realizado, confrontar con sus compañeras.
RECURSOS	Del entorno: su casa, escuela, comunidad. Listado de alimentos que consumen. Frutas y otros alimentos. Textos, diccionarios, folletos de educación popular, periódicos, material gastable, ega, creyones, lápices de colores, cartulinas.
EVALUACIÓN	¿ Qué evaluamos ? • Evaluamos cada actividad en los niveles de conocimiento, habilidades y destrezas, actitudes frente al trabajo. • Evaluamos en toda actividad las actitudes de solidaridad con las compañeras, responsabilidad, participación, creatividad e iniciativa frente al trabajo. • ¿ Cómo ? Mediante. • Autoevaluación • Evaluación colectiva en los grupos. • Evaluación por la profesora.

¿ Cuáles contenidos matemáticos trabajamos ? Y ¿ cómo ?

Articulando saberes

En la medida que íbamos concretizando el proyecto, fuimos tomando en cuenta lo que las estudiantes sabían sobre cada uno de los tema trabajados, aunque estos conocimientos fueran <<erróneos>> o incompletos. Nuestra tarea consistió en incluirlos, ordenarlos y ampliarlos para llegar a un nuevo conocimiento. Para ello, teníamos que contratar lo que sabíamos con lo que logramos a partir de la investigación de la realidad y del saber <<acumulado>> por las ciencias matemáticas y naturales (reflejado en los textos y otras ayudas).

Para poner en común los conocimientos previos a que hemos hecho referencia, planteamos las siguientes preguntas:

¿ Qué conocemos ?

¿ De dónde proceden los alimentos que consumimos ?

¿ Qué cuestan esos alimentos ?

¿ Cuáles son los ingresos aproximados de la familia ?

Estas preguntas sirvieron de base para interesarnos en detalle por el tema, dando paso a la elaboración de las guías de percepción y entrevista. A su vez, estas últimas nos permitieron recoger las informaciones necesarias para el desarrollo del proyecto.

Cálculo mental y de valor de posición

Cuando ordenábamos los datos de las entrevistas sobre los productos alimenticios que consumimos y los precios a qué se venden en las calles, en los establecimientos comerciales o a personas que los pregonan, introdujimos, a través de calculo mental, el valor de posición auxiliándonos de recursos materiales como piedrecitas y granitos de maíz para contar.

Algunos precios de los productos fueron <<lechosa a 6 pesos>>, <<piña a 8, 10 y 15 pesos>>, << zapote a 2 por 15 y a 4 pesos>>, <<melón a 10 y 12 pesos>>, <<guineo a 2 por un peso y a un peso>>. Aprovechamos y preguntamos: ¿ Cuántos cheles o centavos hay en un peso?. Contestaron 100 cheles. Continuamos con las preguntas: Si en un peso había 100 cheles, ¿Cuántos había en dos pesos?, y otras preguntas similares.

Realizamos algunos ejemplos con tapitas de refrescos y piedrecitas; con ellas contamos las unidades (una por una). Luego las agrupamos en grupos de 10 tapas y más adelante en grupo de 100, juntando 10 decenas. Fuimos realizando cálculos mentales, hasta formar 10 grupos de 10, formando de esta manera 10 decenas, equivalente a 100 unidades. Notamos que 100 unidades forman una centena y que su nombre viene de <<cien>>.

Resolvimos algunos problemas que involucraban cálculos mentales, como: ¿ cuántas decenas hay en 50 unidades?, ¿ cuántas decenas ha en 65?, ¿ cuántas unidades son 5 veces 100?, de esta manera llegamos a cifras de cuatro dígitos. Cabe destacar que este proceso de cálculo mental es un contenido procedimental clave en el aprendizaje de las matemáticas en los primeros grados de la educación básica.

Utilizamos el libro de texto de matemática para desarrollar otros ejercicios, siguiendo el esquema que se sugiere allí de clasificación en unidades, decenas y centenas.

Ensalada de Frutas: un mini-proyecto

Las profesoras tuvimos la ideas de preparar en el aula una ensalada de frutas. Lo propusimos a las estudiantes como proyecto para la clase. Las alumnas mostraron curiosidad y encontraron la actividad muy atractiva, ¡les gustó la idea!. Describimos lo que era necesario para realizar nuestro proyecto; nos distribuimos las responsabilidades entre todas, según las posibilidad de cada una, y así comenzamos a dar concreción al proyecto.

Al día siguiente, mientras el equipo de cuatro estudiantes preparaba la ensalada, una estudiante escribía las letras de la canción<<El Frutero>> en la pizarra y las demás copiaban en sus cuadernos, para luego cantarlas juntas. Luego, entre otras nos preparamos para el momento de comer y compartir la ensalada de frutas y lo ambientamos con una melodía instrumental.

¿Qué aprendimos? Establecimos una secuencia de picado de frutas, primero las piñas, segundo... tercero... . En este caso vimos que los números ordinales sirven para indicar el orden en que debíamos picar las frutas.

Como se ve, esta actividad la realizamos dentro del curso. Aprovechamos esas circunstancias para tratar relaciones topológicas. Las estudiantes trajeron frutas peladas (descubiertas), como las piñas y otra sin pelar (cubiertas), como los guineos. Trajeron tantas frutas, que hubo que colocar una parte en el piso (debajo) y otra las colocamos sobre el escritorio (arriba).

Con el costo de las frutas que se compraron, volvimos sobre el cálculo mental, por aproximación de cantidades en forma oral. Preguntamos, ¿ cuánto gastamos en la copra de las frutas en total, más de 25 ?. la respuesta casi a coro fue: "más de 50 pesos y menos de 75". Una estudiante dijo que<< no había centena>>, porque gastamos menos de 100 pesos en la compra.

Las respuestas aproximadas redondeados cantidades, forman parte del cálculo mental, como contenido procedimental, el cual constituye una estrategia importante para ayudar a resolver problemas, con la ventaja adicional de que por medio de las aproximaciones se puede recuperar el sentido de las operaciones. Destacamos la importancia de saber cuándo hay que usar números redondos o aproximados y cuándo hay que usar números exactos y precios.

Por la experiencia que hemos realizado, creemos muy importante la inclusión del cálculo mental en el currículo de matemática, sobre todo en los primeros grados de la educación básica. Esto ayuda a lograr un manejo rápido en el cálculo como forma de consolidar las combinaciones aditivas y multiplicativas, además de ayudar a superar el contar con los dedos y darle a las estudiantes soltura y seguridad en el empleo de las matemáticas.

Actitudes y valores: ejes transversales

Para nosotras las maestras, es muy importante todo lo que se relaciona con la autoestima de las estudiantes. Por eso nuestra reflexión sobre el cálculo mental y su importancia al favorecer la soltura y seguridad, pues las matemáticas enseñadas de manera tradicional tienden a crear inseguridad y temores.

Más allá de este plano personal, tuvimos en cuenta otras actitudes con repercusiones colectivas. Por ejemplo, durante la actividad (<<ensalada de frutas>>) pudimos reflexionar sobre algunas de estas actitudes. Unas relativas a la higiene, como lavarse las manos antes de preparar los alimentos y de comer, uso adecuado de servilletas, evitar hablar mientras se tenga alimentos en la boca, etc.. También otras.

La investigación como estrategia. Una experiencia de aprendizaje con los alumnos de 7mo. Curso

Vinicio Vásquez
Colegio Babeque Secundaria, Santo Domingo
República Dominicana

Resumen

Esta ponencia recoge los detalles y resultados de una experiencia de investigación realizada por los alumnos de 7mo curso del Colegio Babeque, en el cual se determina el gasto en que incurren los hogares dominicanos para solucionar la deficiencia de la energía eléctrica, así como la relación entre el costo de la energía eléctrica facturada por la Compañía Dominicana de Electricidad (CDE) y el costo de la energía eléctrica suministrada por las plantas domésticas y/o inversores.

Motivación

Durante más de 35 años la República Dominicana ha venido padeciendo de una grave deficiencia en el suministro de la energía eléctrica, y el problema aún persiste.

Esta ha sido la causa por la que muchos hogares de todos los estratos sociales del país se han visto en la necesidad de invertir cuantiosas sumas de dinero para comprar plantas eléctricas domésticas, industriales y/o inversores que resuelvan, de manera temporal, los molestosos apagones. Esta situación se ha convertido en un gran problema social, económico y político, y la escuela está en el deber de involucrar a sus alumnos en el planteamiento y solución de los problemas que nos aquejan.

Propósito

Involucrar a los alumnos en el planteamiento y solución de los problemas más significativos del entorno social.

Introducción

Durante muchos años la enseñanza de la Matemática en nuestro país ha estado centrada en la transmisión de conocimientos a través de exposiciones por parte de los educadores. No se ha avanzado mucho en materia de estrategias metodológicas innovadoras, que hagan posible un aprendizaje significativo, o por lo menos divertido.

Los conocimientos matemáticos deben servir de herramientas necesarias para la solución de problemas de la vida cotidiana. Es la misma preocupación de los profesores que imparten Matemática en otras latitudes, los cuales han venido trabajando para que los alumnos aprendan matemática y la apliquen a la solución de problemas, y no que aprendan matemática por la matemática misma. En nuestro país, Rep. Dom. estas inquietudes, sobre la aplicación de estrategias innovadoras para la enseñanza de la matemática, son recomendadas en el nuevo diseño curricular, puesto en marcha (en las aulas) a partir de 1995, pero todavía la mayoría de los profesores seguimos atados al sistema tradicional de las exposiciones en el aula.

La Matemática ha de servir como medio para la solución de problemas, no para acumular conocimientos. La mayoría de los conocimientos matemáticos aprendidos por los alumnos son saberes no significativos, ya que los mismos no le sirven para realizar conexiones o aplicaciones con el diario vivir. Por esto todavía seguimos escuchando la tan cacareada pregunta de los alumnos: ¿ y esto, para qué nos sirve?

Fundamentación teórica

Durante los últimos años la investigación científica se ha dinamizado y evolucionado, dando lugar al nacimiento de nuevas teorías y postulados que enriquecen el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Los nuevos enfoques metodológicos o paradigmas, vienen a contrastar con la corriente positivista de finales de siglo. Estas nuevas teorías educativas planten la solución de problemas de acorde con la realidad y a la utilidad social.

La utilización de nuevas y variadas tecnologías o estrategias metodológicas se enmarcan dentro de estos paradigmas, siendo la investigación una de estas estrategias. Todo esto supone un reordenamiento en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Varios principios o postulados sustentan las bases del positivismo contemporáneo, los cuales sirven de soporte teórico a este trabajo.

- La unidad de la ciencia.
- La metodología de la investigación como fundamento de las ciencias exactas.
- La explicación científica es de naturaleza causal.

Así también el positivismo cuantitativo, el cual se afinca en el análisis de los fenómenos observables susceptibles de medición, de análisis matemáticos y control experimental. Todos ellos sirven de base de sustentación para defender la investigación como estrategia de enseñanza de la matemática según los tiempos modernos.

Otro paradigma refiere el proceso enseñanza – aprendizaje en dos vertientes: centrado en el profesor y centrado en el alumno.

El primero centra su acción en la enseñanza, más que en el aprendizaje, es decir, analiza la actuación del profesor en cuanto a sus creencias y actitudes, conocimientos, estrategias, experiencias, etc. Mientras que el segundo se refiere a los mecanismos cognoscitivos internos que usa el alumno al proceso de aprender (Psicología piagetiana). La interacción social y cognoscitiva del alumno influye en los resultados del aprendizaje. La forma como el alumno aprende los procesos, es determinante para la utilización de lo aprendido y la solución de problemas. Estos argumentos teóricos nos permiten defender la enseñanza de la Matemática donde lo que se aprende sea significativo para quien aprende, no para el que enseña. Aunque el mecanismo de influencias recíprocas es vital para el procesamiento de la información.

La realidad social es el punto de partida de los fenómenos educativos. En este sentido, la investigación ha de responder a las necesidades socioeconómicas y políticas, debe enfocarse desde la perspectiva de los conflictos y problemas presentes en el ambiente. La Matemática debe ser, por consiguiente, un medio que facilite la acción en el proceso de la investigación, debe ser útil, y no debe atemorizar a los alumnos. Su presencia debe divertir y entretener las distintas etapas del proceso de la investigación.

Dentro de las bases que fundamentan este marco teórico referencial, hay que destacar la participación de los padres de los jóvenes, que se involucraron activamente y aportaron los datos necesarios, teóricos, prácticos e interpretativos, para que los niños pudieran elaborar los resultados obtenidos en cada etapa del proceso de la investigación.

La formulación de los ejes temáticos para la enseñanza de la Matemática, contenidos en el nuevo diseño curricular para la Rep. Dom., constituyen una buena fundamentación para la elaboración de este proyecto. Uno de los ejes temáticos que más se acerca a este trabajo es resolución de problemas. Este implica un proceso para la ejecución de un algoritmo, también implica la profundización de los procesos mentales.

Esta estrategia debe conseguir que el alumno sea capaz de plantear estrategias de trabajo, organización de las ideas, construir tablas, graficar, etc.

Conexiones matemáticas

Es sin lugar a dudas el eje temático que más apoya esta investigación. La Matemática juega un papel muy importante en la vida diaria y el desarrollo económico y tecnológico de nuestra sociedad. La Matemática incide en los campos de las ciencias naturales y en las ciencias sociales. La sociedad demanda de más ciudadanos capaces de pensar y utilizar la matemática, con el fin de resolver problemas y tomar decisiones.

"Los estudiantes han de tener múltiples oportunidades de apreciar la interacción de la Matemática con otras disciplinas y con la sociedad" (Fundamentos del curriculum, tomo II, 3-20)

¿Qué tan útil es lo que nos proponemos enseñar?

En la medida que nuestros alumnos se hagan conscientes de la importancia de un aprendizaje, en esa misma medida valorizarán los conocimientos matemáticos que nos proponemos transmitir. Pero estos conocimientos deben llegar a través de estrategias que permitan mantener un marcado interés por lo que se aprende y por la forma como se aprende.

Por esta razón estamos presentando este informe sobre una experiencia de aprendizaje de la matemática con los alumnos de 7mo. curso, ejecutado en el colegio Babeque Secundaria durante el año escolar 1997-98.

Con el tema: EL COSTO DE LA ENERGIA ELECTRICA, los alumnos se propusieron determinar el gasto en que incurren los hogares dominicanos para resolver la falta de la energía eléctrica.

Prerequisitos matemáticos

Operaciones aritméticas, conversiones, calculo del %, media aritmética, estimaciones, proporciones o regla de tres, probabilidades, frecuencia y gráficos estadísticos, lectura del reloj contador eléctrico.

Procedimiento metodológico

En la dinámica de la investigación se cumplieron varias etapas del método científico:

- Se eligió, democráticamente, un tema. " Los apagones. Fue el primer tema a discutir, luego se cambió por "**el costo de la energía eléctrica**". Todo dentro de un ambiente de apertura y escucha.
- Se formuló una hipótesis. Esta etapa fue dirigida por el profesor, ya que los niños no tienen mucha experiencia en este aspecto de la investigación. La intervención del profesor consistió en formular una pregunta para ser discutida y analizada por los estudiantes.¿ qué resulta más económico, pagar las tarifa de la CDE o tener una planta eléctrica en la casa?
- Elaboración de un proyecto de investigación. Esta parte de la investigación le correspondió al profesor de la asignatura, el cual lo presenta a sus alumnos para ser ejecutado por ellos y supervisado, etapa por etapa, por el profesor.
- Se Formaron grupos o equipos de trabajo. (3 estudiantes por equipo).
- Aprendimos a leer los contadores eléctricos y cada uno de los miembros de grupo ejecutó la lectura del contador eléctrico en su propia casa. Actividad que tuvo el propósito de crear conciencia de la importancia del ahorro de la energía eléctrica.

Esta estrategia debe conseguir que el alumno sea capaz de plantear estrategias de trabajo, organización de las ideas, construir tablas, graficar, etc.

Conexiones matemáticas

Es sin lugar a dudas el eje temático que más apoya esta investigación. La Matemática juega un papel muy importante en la vida diaria y el desarrollo económico y tecnológico de nuestra sociedad. La Matemática incide en los campos de las ciencias naturales y en las ciencias sociales. La sociedad demanda de más ciudadanos capaces de pensar y utilizar la matemática, con el fin de resolver problemas y tomar decisiones.

''Los estudiantes han de tener múltiples oportunidades de apreciar la interacción de la Matemática con otras disciplinas y con la sociedad'' (Fundamentos del curriculum, tomo II, 3-20)

¿Qué tan útil es lo que nos proponemos enseñar?

En la medida que nuestros alumnos se hagan conscientes de la importancia de un aprendizaje, en esa misma medida valorizarán los conocimientos matemáticos que nos proponemos transmitir. Pero estos conocimientos deben llegar a través de estrategias que permitan mantener un marcado interés por lo que se aprende y por la forma como se aprende.

Por esta razón estamos presentando este informe sobre una experiencia de aprendizaje de la matemática con los alumnos de 7mo. curso, ejecutado en el colegio Babeque Secundaria durante el año escolar 1997-98.

Con el tema: EL COSTO DE LA ENERGIA ELECTRICA, los alumnos se propusieron determinar el gasto en que incurren los hogares dominicanos para resolver la falta de la energía eléctrica.

Prerequisitos matemáticos

Operaciones aritméticas, conversiones, calculo del %, media aritmética, estimaciones, proporciones o regla de tres, probabilidades, frecuencia y gráficos estadísticos, lectura del reloj contador eléctrico.

Procedimiento metodológico

En la dinámica de la investigación se cumplieron varias etapas del método científico:

- Se eligió, democráticamente, un tema. '' Los apagones. Fue el primer tema a discutir, luego se cambió por ''**el costo de la energía eléctrica**''. Todo dentro de un ambiente de apertura y escucha.
- Se formuló una hipótesis. Esta etapa fue dirigida por el profesor, ya que los niños no tienen mucha experiencia en este aspecto de la investigación. La intervención del profesor consistió en formular una pregunta para ser discutida y analizada por los estudiantes.¿ qué resulta más económico, pagar las tarifa de la CDE o tener una planta eléctrica en la casa?
- Elaboración de un proyecto de investigación. Esta parte de la investigación le correspondió al profesor de la asignatura, el cual lo presenta a sus alumnos para ser ejecutado por ellos y supervisado, etapa por etapa, por el profesor.
- Se Formaron grupos o equipos de trabajo. (3 estudiantes por equipo).
- Aprendimos a leer los contadores eléctricos y cada uno de los miembros de grupo ejecutó la lectura del contador eléctrico en su propia casa. Actividad que tuvo el propósito de crear conciencia de la importancia del ahorro de la energía eléctrica.

- Recolección de datos. Cada grupo debió recoger los últimos 5 recibos o facturas de la CDE. (fue necesario la ayuda de los padres de los alumnos) que de antemano se espera que se involucren en la ejecución del proyecto.
- Luego se calculó el promedio del costo de la energía eléctrica durante estos meses y se elaboraron gráficos de barras para ilustrar este comportamiento.
- Los grupos debieron calcular e interpretar las variaciones registradas en las tarifas eléctricas durante estos cinco meses.
- Cada miembro del grupo debió reunirse con sus padres (papá o mamá) para determinar, juntos, el costo promedio de los gastos realizados en el hogar por concepto de mantenimiento y combustibles para las plantas eléctricas domésticas y/o inversores durante los últimos cinco meses.
- Reunidos en equipos los alumnos debieron calcular el gasto total por concepto de energía eléctrica consumida en cada casa. Para esto fue necesario tomar en cuenta el gasto promedio por concepto de las tarifas pagadas a la CDE más el promedio de los gastos por concepto del mantenimiento de las plantas domésticas.
- Se construyeron gráficos estadísticos de comparación, para establecer la relación entre el gasto promedio mensual por concepto de las tarifas pagadas a la CDE y el gasto promedio mensual por concepto de las plantas eléctricas domésticas.
- Los gastos promedios mensuales se extrapolaron para calcular el gasto promedio anual.
- Se hicieron estimaciones para calcular (teóricamente) el gasto promedio anual, en pesos dominicanos, de unas 200,000 plantas domésticas con este consumo.
- Mediante esta estimación se interpretó el gasto en dólares (fuga de divisas) que representa para el país el mantenimiento de estas plantas eléctricas de emergencia
- Cada grupo de trabajo debió entregar un informe escrito conteniendo todos los cálculos efectuados en cada una de las etapas del proceso. En el informe debió aparecer, también, las conclusiones o recomendaciones del grupo para disminuir el consumo de energía, así como la forma de reducir o resolver la deficiencia de la energía eléctrica que hay en el país.
- En este informe deben aparecer los efectos que causan las plantas eléctricas a la salud ambiental y personal, así como la importancia de la Matemática para este tipo de investigación.

Resumen de la estrategia utilizada por los alumnos

Los alumnos utilizaron la recopilación de la información directa, consultado con sus padres los gastos promedios mensuales que generan las plantas eléctricas domésticas y revisando las facturas o recibos de la CDE durante los últimos 5 meses.

Formaron grupos de trabajos y realizaron estimaciones, promediaron y compararon resultados, además registraron estos resultados mediante tablas y gráficos estadísticos.

Se reunieron por equipos en varias ocasiones, discutieron y analizaron los resultados, entregaron borradores al profesor en cada etapa, éste los chequea y los devuelve con las enmiendas de lugar. Luego, al concluir el proceso de las revisiones, los grupos entregan un informe escrito, revisado y evaluado en cada una de sus etapas. Finalmente cada equipo hace una exposición verbal frente a los demás compañeros, frente a su profesor, autoridades de la institución y padres invitados.

La investigación abarcó a una muestra de 56 familias de clase media alta y se limitó a todos los hogares de los alumnos de 7mo curso del colegio Babeque Secundaria durante los meses de Noviembre de 1997 hasta Marzo de 1998.

Según los resultados de la investigación los hogares dominicanos, de clase media alta, están pagando más por concepto de las plantas eléctricas domésticas que por las tarifas de la CDE.

Estos resultados reflejan que el país está perdiendo más de 500 millones de dólares (más de 8 mil millones de pesos dominicanos) por culpa de las deficiencias de la CDE.

Los resultados indican que el 55% del costo de la energía eléctrica de los hogares dominicanos corresponde a las plantas de emergencia domésticas, mientras que el 45% corresponde a la energía suministrada por el Estado.

A continuación presento un cuadro comparativo, elaborado por los alumnos, con los promedios de los gastos en energía eléctrica suministrada por las plantas domésticas y las plantas de la Compañía Dominicana de la Electricidad, así como el gráfico correspondiente a estos datos. Según los cálculos realizados por los alumnos.

También aparece un gráfico circular que ilustra el porcentaje del gasto promedio mensual, según los mismos cálculos.

Cuadro comparativo del costo de la energía eléctrica cde vs plantas domésticas

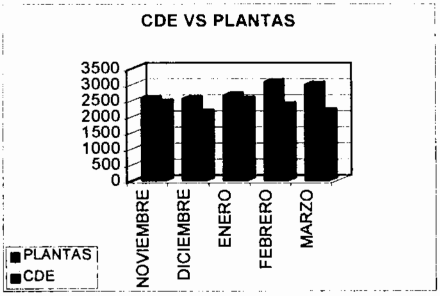
Noviembre de 1997 a marzo de 1998

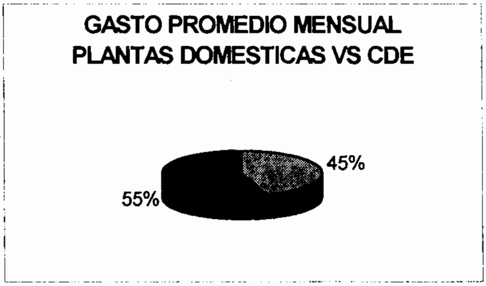
MESES	*PLANTAS DOMESTICAS*	*CORPARACIÓN DE ELECTRICIDAD*
NOVIEBRE	RD $2548	RD $2432
DICIEMBRE	RD $2549	RD $2122
ENERO	RD $2653	RD $2515
FEBRERO	RD $3065	RD $2349
MARZO	RD $2988	RD $2152

Promedio mensual

CDE	Plantas Domésticas
RD $ 2294	RD $ 2760

El costo de la energía eléctrica





Conclusión

Esta experiencia nos demuestra la importancia que tiene el aprendizaje de la Matemática como medio imprescindible para la investigación científica. Los alumnos finalmente pudieron contestarse a sí mismos aquella famosa inquietud: - ¿ y esto, para qué me sirve?

Es con experiencia como esta que los alumnos se dan cuenta de la utilidad del cálculo aritmético, del uso de los gráficos estadísticos, del cálculo del promedio, de las estimaciones, del cálculo porcentual, de los problemas con proporciones o regla de tres, las conversiones, en fin, todo lo que haya constituido la base del conocimiento matemático aplicado a una situación de la vida real.

Con este trabajo los alumnos realizaron conexiones de la Matemática con situaciones de la vida cotidiana y aprendieron a utilizar el método científico, además pudieron ver claramente la relación de la Matemática con otras disciplinas.

Además, sin necesidad de atarse al rigor matemático, se pudo trabajar varios contenidos al mismo tiempo, algunos de los cuales les sirvieron de repaso. Mientras que otros tuvieron que incorporarlos para su oportuna aplicación.

Los contenidos más trabajados fueron: cálculo con números enteros y con números decimales, resolución de problemas usando la regla de tres (proporciones), cálculo del porcentaje, estimaciones, media aritmética, tabla de frecuencias y gráficos estadísticos.

Conclusión de los alumnos

- Los hogares dominicanos de clase media alta están pagando más por concepto de las plantas eléctricas domésticas que por las tarifas de la CDE.
- El país está perdiendo más de 500 millones de dólares al año (más de 8 mil millones de pesos dominicanos) por culpa de la deficiencia de la CDE.
- El 55% del gasto en energía eléctrica de los hogares investigados corresponde a las plantas de emergencia, mientras que el 45% corresponde a la energía suministrada por el Estado.

Importancia de esta experiencia

- Responde a los requerimientos de las nuevas tendencias de la enseñanza de la matemática, según la propuesta curricular.
- Los alumnos aprenden a utilizar la matemática como un medio, no como un fin.
- Se dinamiza el proceso de enseñanza-aprendizaje. (rompe la rutina).

- Se rompe el rigor matemático, abordando varios contenidos en un mismo proceso.
- Se establecen conexiones de la matemática con situaciones de la vida cotidiana.
- Los alumnos se inician en el método científico.
- Se establece la relación interdisciplinaria de la asignatura.
- Los alumnos aprenden a valorizar el aprendizaje de los cálculos matemáticos.
- El educador siente un deleite espiritual al cosechar los frutos de este tipo de evento educativo.

Bibliografía

Enciclopedia Práctica de la Pedagogía, tomo III. Editorial Planeta, Barcelona España, 1988.

Informativo CDE. Equipo de ingenieros de la Compañía Dominicana de Electricidad, coordinado por el ingeniero Víctor Ventura Hernández. Editora Alfa y Omega.

Santo Domingo, Rep. Dom., 1996.

Plan Decenal de Educación en Acción, Nivel Básico. Serie Innova 2000, primera edición, Secretaría de Estado de Educación, Rep. Dom. 1995.

Fundamentos del Curriculum, tomo II. Serie Innova 2000, primera edición, 1994.

Estrategias Didácticas que favorecen la Construcción del Pensamiento Matemático en la Educación Media

Miledys Teresa Tavárez Marzán
Secretaria de Estado de Educación y Cultura, Departamento de Pedagogía - UASD
República Dominicana

Resumen

Partiendo de las reflexiones que sobre el proceso de enseñanza y del aprendizaje de la Matemática, la de Construcción del Pensamiento aportado por Piaget, Ausubel, Coll y los aportes de Vigosky sobre el trabajo socialmente construido y el desequilibrio cognitivo necesarios para acercarse al conocimiento, proponemos un taller para practicar una serie de estrategias que aunque no son nuevas no son utilizadas con mucha frecuencia en las aulas de Matemática del nivel Medio o Secundario.

En los ambientes donde se trabaja la Matemática existen unas veces prejuicios sobre el uso o no de una determinada estrategia, pues se parte del supuesto de que en matemática no se puede perder el tiempo en tonterías; otras veces se desconocen, lo cual dificulta conocer sus posibilidades; y muchas veces no se aplican porque existen supuestas razones que dificultan su implementación, todas estas razones queremos analizarlas luego de una práctica conjunta.

Las clases de Matemática del nivel Medio podrían ser planificadas como una especie de laboratorio, en el cual se buscan conocimientos, se hacen hipótesis, se experimenta, se recrea el espíritu, se disfruta, se potencie el pensamiento y los procedimientos y se invente.

El Taller que proponemos busca ser un espacio para posibilitar el análisis y la reflexión sobre todo lo que podemos hacer para mejorar nuestras clases de Matemática, pues para ello podemos utilizar desde equipos sofisticados, como el video, la calculadora, la computadora hasta juegos, modelos, manipulativos, crucigramas, adivinanzas, etc., muchos de los cuales podrían ser elaborados por los/as docentes y hasta por los/as mismos/as alumnos/as.

Objetivos Generales

a) Motivar el uso de variadas Estrategias Didácticas con el objeto de recrear el proceso de enseñanza y de Aprendizaje de la Matemática para que los/as alumnos/as disfruten aprendiendo.
b) Compartir la reflexión sobre el uso de algunas Estrategias Didácticas que facilitan la construcción de un pensamiento matemático comprensible, auténtico y duradero.
c) Practicar las Estrategias propuestas para identificar sus ventajas y posibilidades, así como variantes producto de las adecuaciones de los participantes.

Contenidos

* Fundamentos Psicopedagógicos del Aprendizaje y de la Enseñanza.
* Pensamiento matemático y su construcción.
* Perfil del/la Profesor/a Constructivista.
* Estrategias didácticas propuestas, sus ventajas para la construcción.

Metodología

Se usará una metodología de Taller, la cual permite la práctica concreta de los/as participantes así como el análisis colectivo con el objeto de socializar y buscar nuevas formas para la acción individual. Una vez conocidas las bases conceptuales de partida, se ejecutarán las estrategias viviendo sus posibilidades como estudiantes, para luego evaluarlas como docentes, analizando ventajas y limitaciones.

Recursos

Se usarán fotocopias de diversas estrategias, así como los materiales que cada una exija, calculadoras, dados, tv, vhs, tijeras, crucigramas, cuadritos, fichas, algeblok, crayones, hojas cuadriculadas, cinta adhesiva, etc.

La formación del pensamiento del alumno requiere del empleo y el despliegue de verdaderas situaciones que pongan a funcionar el razonamiento, la elaboración de hipótesis, la búsqueda y experimento mental. Una situación trivial no desarrolla el pensamiento, sino que se habitúa al alumno a los caminos trillados y de bajo esfuerzo intelectual (Labarriere, 1989), impidiendo su efectiva inserción en una sociedad cada vez más exigente.

"ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS QUE FAVORECEN LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN LA EDUCACION MEDIA"

Mtra. Miledys Teresa Tavárez Marzán
Secretaria de Estado de Educacion y Cultura
Departamento de Pedagogia - UASD -
República dominicana

Programa General del Taller

Objetivos Generales

a) Motivar el uso de variadas Estrategias Didácticas con el objeto de recrear el proceso de enseñanza y de Aprendizaje de la Matemática para que los/as alumnos/as disfruten aprendiendo.

b) Compartir la reflexión sobre el uso de algunas Estrategias Didácticas que facilitan la construcción de un pensamiento matemático comprensible, auténtico y duradero.

c)Practicar las Estrategias propuestas para identificar sus ventajas y posibilidades, así como variantes producto de las adecuaciones de los participantes.

Contenidos

* Fundamentos psicopedagógicas del Aprendizaje y de la Enseñanza.
* Pensamiento matemático y su construcción.
* Perfil del/la Profesor/a Constructivista.
* Estrategias didácticas propuestas, sus ventajas para la construcción.

Metodología

Se usará una metodología de Taller, la cual permite la práctica concreta de los/as participantes así como el análisis colectivo con el objeto de socializar y buscar nuevas formas para la acción individual. Una vez conocidas las bases conceptuales de partida, se ejecutarán las estrategias viviendo sus posibilidades como estudiantes, para luego evaluarlas como docentes, analizando ventajas y limitaciones.

Recursos

-tijeras	-acetatos o transparencia	-cerillos o fósforos
-ega	-crayones	-dados de diferentes tamaños
-papel	-videos	-transportador
-cartulina	-regla	-calculadoras elementales
-VHS	-hojas	-papel cuadriculado
-cinta adhesiva	-fichas redondas y cuadradas de diferentes colores	
-TV	- copias de las estrategias a trabajar	

Evaluación

Se evaluarán las Jornadas diarias del taller para reflexionar el proceso y retroalimentarlo.

Programa de Actividades

Primer momento		
Técnica de presentación		Tiempo
		10m.
Identificar las expectativas		
Segundo momento	Presentación del Taller	
Base psicopedagógica del Taller		
Preguntas y respuestas		10m.
		10m.
Tercer momento	<u>Estrategias Didácticas</u>	50m.
Discusión de las Estrategias		20m.
Cuarto momento	Conclusiones y Evaluación	10m.
Cuarto momento	Conclusiones y evaluación	10m.

A Modo de Introducción

La sociedad actual lleva un ritmo acelerado en cuanto al uso de la ciencia y la tecnología.

Cada día se necesita de personas capaces de tomar decisiones adecuadas, de pensar y resolver los problemas para la adecuación y construcción necesaria en pro de mejorar su calidad de vida.

La acción del Docente en general y específicamente del y la docente de Matemática, es un reto, pues para lograr los nuevos hombres y mujeres tendremos que luchar contra muchos escollos sociales y profesionales. Esto debido a que con relación a la enseñanza de la matemática existe una cultura (ver anexo1) que por su poca flexibilidad para la creatividad, la imaginación, dificulta cualquier tipo de cambio en el proceso educativo.

Esta cultura no es ocasional, sino que viene dada por el desarrollo histórico de la concepción sobre la Matemática y su método (ver anexo 2). La concepción que más a primado en las ideas de algunos de los que la trabajan es que "es una actividad intelectual autoconsistente que maneja construcciones mentales gobernadas por leyes autoevidentes (Brower) o como "manipulación de configuraciones, conjuntos de símbolos, según reglas determinadas tengan o no significado real " (David Hilbert, 1899) como puede verse existe poca participación en la construcción matemática por parte del individuo, pues todo se reduce a simple fórmulas o a estructuras innatas que solo poseen los genios o los muy dedicados. Algo hay que diferenciar efectivamente y es de cuál Matemática aprenden nuestros/as alumnos/as (ver anexo 3), pues una es la matemática que hayan los científicos que explican su contenido y otra es la que utilizan los/as alumnos/as para enfrentar los retos actuales y futuros.

"La herramientas conceptuales y metodológicas de una ciencia serán transpuestas en los diferentes actos de enseñanza según las pautas que hacen referencia para la transposición didáctica "(Cantoral, 1995), pero resulta que si la referencia es tradicionalista, en ese orden se reproducen.

Desarrollo

a. Conocimiento y Matemática

Hagamos pues un aparte para identificar de cuáles conocimientos partimos para trabajar la enseñanza y para lograr los supuestos aprendizajes.

El conocimiento, puede ser logrado tanto espontánea como sistemáticamente, de ahí el conocimiento científico y el conocimiento cotidiano. Cada uno implica una experiencia con el objeto cognoscible real o referencial. Si entendemos el conocimiento como una entidad, éste solo produce conocimientos automatizados de la realidad , si lo vemos como un sistema podemos observar estructuras y relaciones, si lo entendemos como proceso esto implica que hay un sujeto que aprende de forma participativa construyendo y reconstruyendo (Piaget, 1960).

En el terreno educativo, implica una relación pedagógica entre alumno/a y profesor/a donde el conocimiento se aplica y se explica mediante construcciones diversas (Sanjorje, 1994). En los actuales momentos en que se han venido reformulando los sistemas educativos, se han establecido algunos estandares para la enseñanza de la Matemática (1991, NCTM) ,ésta debe hacer que los/as alumnos/as.

1- Aprendan a valorar la matemática
2- Que se sientan capacitados/as para hacer matemática
3- Que lleguen a resolver problemas matemáticos
4- Que aprendan a comunicarse mediante la matemática

Se necesita que la matemática en la Educación Media sean:

1- Trabajadas de forma activa por los/as alumnos/as
2- Para pensar y dar sentido a su entorno
3- Entendibles para todos/as
4- Con contenidos prácticos y cambiantes (Cristina Gómez, 1998).

Como podemos ver el objetivo de la enseñanza no debe ser la transmisión de conocimientos, que pierden relevancia y validez con el tiempo, sino que el alumno aprenda a aprender y aprenda a cambiar (Rogers, 1991).

De ahí que el método debe ser riguroso y sistemático lo que no equivale a decir rígido e inflexible (Sanjorje, 1994). Lo fundamental es ofrecer al estudiante las condiciones necesarias para el aprendizaje, vale decir, ideas, actividades y estrategias que desencadenen y estimulen el aprendizaje de los procesos del pensamiento (idem), conociendo que estos/as alumnos/as están construyendo su pensamiento lógico y abstracto por encontrarse en la adolescencia, próximo a la adultez.

En trabajos realizados, se ha detectado que en los alumnos existe poco desarrollo en sus habilidades y sus principales deficiencias se suscitan por:

a. Insuficientes acciones de orientación, análisis, órdenes, búsqueda de procedimientos y vías de solución.
b. Alternativas de solución muy limitadas y esquemáticos, conducta impulsiva en la solución, poco desarrollo de habilidades cognitivas tales como (observación, comparación, clasificación, etc.).
c. Poca utilización de procedimientos dirigidos a la regulación y autorregulación de su actividad, de sus resultados (acciones de control, valoración y adecuación de los procedimientos empleados).

El alumno opera fundamentalmente ante las tareas que sólo le exigen un nivel de reproducción de los conocimientos que posee (Dra. Pilar Rico y otros, 1995). Debemos pues, concebir propuestas didácticas y actividades de aprendizaje que potencien y promuevan la asimilación por parte del/la alumno/a de determinados procedimientos de trabajo, que permitan desde el inicio del aprendizaje escolar una actividad intelectual reflexiva, auto regulada, que contribuya al desarrollo del pensamiento y las capacidades cognitivas (Idem).

Las habilidades perceptuales nos permiten percibir en los objetos sus características y cualidades. Estas se manifiestan en el proceso de asimilación del conocimiento mediante los procesos avanzados del pensamiento: análisis, síntesis, abstracción y generalización. Habilidades cognitivas que favorecen la profundización, la conexión y la observación de regularidades.

Existen otras habilidades como la observación, comparación, clasificación y la modelación, las cuales junto al proceso de autorregulación de la actividad mediante la planificación, control y evaluación facilitan el proceso de construcción de los conocimientos amplios sobre el objeto.

b. Pensamiento y Acción Docente

¿ Qué implica enseñar a pensar?

- Variados procedimientos o estrategias en el desarrollo de habilidades o destrezas de pensamiento.
- Resolución de problemas.
- Pensamiento Reflexivo.

El sujeto será capaz de examinar, controlar y evaluar sus propios pensamientos, a ésto se le llama metacognición. Al respecto, (Villarini, 1988) plantea que este proceso metacognitivo permite al sujeto en la fase de planificación: clasificar el objetivo y establecer estrategias para alcanzarlo. En la fase de control, verifican que los pasos propuestos que estén siendo llevados a cabo y en consonancia con los objetivos, para ello se deben tomar medidas de contingencia, si es necesario, asegurándonos de la calidad del proceso. La organización de diferentes formas de trabajo permite el conocimiento de diferentes criterios y alternativas de solución, ampliar su marco de referencias, de análisis, la variación y el reajuste de puntos de vista, de procedimientos a aplicar.

Se favorecen, pues habilidades como:

- La toma de decisiones argumentadas.
- Autocontrol.
- Autoevaluación.
- Autoconocimiento.
- Autocorrección del proceso y sus resultados.

Todas ellas esenciales en el desarrollo de la autoreflexión sobre su propia actividad, proceso necesario para lograr la abstracción del pensamiento matemático.

¿Cuáles acciones debe ejecutar el/a maestro/a del nivel Medio para trabajar el pensamiento?

- Propiciar tareas y problemas que potencien al máximo el aprendizaje.
- Hacer actividades de búsqueda, de análisis, de contradicciones, de errores, de encontrar alternativas diferentes de solución y de interpretación del fenómeno u objeto que estudia.

La formación del pensamiento abstracto del alumno requiere del empleo y el despliegue de verdaderas situaciones que pongan a funcionar el razonamiento, la elaboración de hipótesis, la búsqueda y experimento mental. Una situación trivial no desarrolla el pensamiento, sino que se habitúa al alumno a los caminos trillados y de bajo esfuerzo intelectual (Labarriere, 1989). Para que un aprendizaje sea Significativo, se deben dar ciertas condiciones en el objeto de aprender, el nuevo conocimiento debe ser:

- Funcional.
- Integrable.
- Potencialmente significativo.
- Internamente coherente.

Además, el sujeto que aprende debe:

- Disponer del aprendizaje de las estructuras cognitivas necesarias para relacionar el nuevo contenido.
- Poseer Actitud favorable.
- Comprender la existencia de una distancia optima entre lo que sabe y desconoce.
- Disponer de una ayuda pedagógica que posibilite la integración significativa.

c. Reacción del Proceso de Construcción y las Estrategías Didácticas

¿Por qué hablamos de proceso de construcción?

Porque conocemos la realidad a partir de una permanente interacción con ella, en función de la cual dotamos de significación a los objetos , comprendemos propiedades, relaciones y estructuramos los instrumentos de la inteligencia (Avendaño, 1992).

Todo sujeto tiende a permanecer en equilibrio; pero en relación con su medio del cual recibe estímulos, los cuales producen procesos de desequilibrio que posibilitan el aprendizaje (Piaget, 1960), mediante la acomodación y la reestructuración.

La construcción de nuevos conocimientos puede partir de la formación de hipótesis, de una actividad, de un descubrimiento, de una exposición movilizadora, o de cualquier otro recurso que posibilite el desequilibrio cognitivo.

Es necesario también tener en cuenta las formas de retroalimentación (feedback) que puede ser controlado por el ritmo propio del medio o por el ritmo del aprendizaje de cada alumno. (En Duke, 1983).

Es precisamente a través de la instrumentación didáctica y de la utilización variada de distintas estrategias que faciliten distintas maneras de acercase a un objeto de estudio, que posibilitamos la comprensión de un nuevo contenido por parte de un mayor número de alumnos/as del nivel Medio.

(Aebli,1988) nos habla de las Fases del método didáctico y las define como...

criterios generales que posibilitan una utilización creativa y adecuada al contexto, el sujeto que aprende y al objeto de conocimiento.

El aprendizaje constructivista plantea las etapas de: construcción ,elaboración, ejercitación y aplicación.

En la primera, influye la disposición del alumno/a el cual pone en actividad sus estructuras cognitivas ante el desequilibrio provocado por el nuevo estímulo que pudo ser un concepto, una operación o una acción y al cual responde analizando, diferenciando, pensando y haciendo conexiones. En el proceso de elaboración liga los nuevos conocimientos con los viejos para hacer relaciones y semejanzas y está frente a la movilidad del pensamiento.

La movilidad del pensamiento es posible de ser entrenado y al respecto, la intervención didáctica puede hacer mucho. Esta implica: Descentrarse, Cooperar, operar con otros, Revisar los propios esquemas, superar la unilateridad y relativizar. Los conceptos como instrumentos de pensamiento nos permiten comprender los contenidos de la mima disciplina, los contenidos de otras y las situaciones de la vida real.

El ejercicio sin la construcción y la elaboración automatizada, desarrolla solo la memoria mecánica, a partir de la cual los conocimientos se vuelven rígidos, pero el ejercicio después de la construcción y la elaboración consolida y da consistencia.

Un sujeto mejor capacitado tanto para desempeñarse en la vida cotidiana, como para continuar aprendiendo significativamente, será aquel que cuenta con mayores instrumentos de pensamiento.

"Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros/as estudiantes a través de la Matemática es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamientos adecuados para la resolución de problema" (De Guzmán, 1984).

La escuela del nivel Medio debe acrecentar el repertorio mental que capacita para actuar y pensar, para ver y contemplar (Aebli, 1988). La aplicación comprensiva pone en juego el proceso de adaptación con su doble fases de asimilación y acomodación (Piaget, 1960).

"Una operación es una efectiva representación (interna) o traducida a un sistema de signos y en cuya realización él actúa, dirige su atención a la estructura que va surgiendo, en resumen, podemos decir: una operación es una acción abstracta "(Aebli, 1988).

"La operación parte de las acciones sobre los objetos, pero es necesario darse cuenta de las acciones realizadas, representándolas en la mente, establecer relaciones dentro de un sistema operativo, cambiar imágenes por sus signos" (idem).

.... Su origen está en el interés concreto, en la necesidad de claridad y compresión , por lo tanto comenzar a partir de situaciones problemáticas concretas será también muy conveniente para la construcción de las operaciones".

Construir una operación implica entender las conexiones implícitas en la misma. La reflexión acerca de las conexiones puede ser simultánea o posterior a las acciones. Las estrategias didácticas tenderán a apoyar y enriquecer los procesos de construcción de los nuevos conocimientos.

La ayuda pedagógica consiste esencialmente en crear condiciones adecuadas para que se produzca esta dinámica (de construcción) y para orientarla en una determinada dirección, la dirección que indican los intereses didácticos. Es una ayuda en dos sentidos: Coayuda al alumno, verdadero artífice del proceso de aprendizaje de quien depende en último término la construcción del conocimiento, y ayuda, que utiliza todos los medios disponibles para favorecer y orientar dicho proceso. (Coll, Pag. 29, 1991)

¿Cuál será el profesor/a que trabajará la construcción?

(Aebli, 1988) nos plantea algunas ideas, ...el profesor domina su oficio cuando:

A- Tiene competencia social: su lenguaje- Aprendizaje.

B- Capacidad de acción.

C- Debe ser capaz de ver, oír, como vibran los ojos y oídos de sus alumnos.

D- Competencia didáctica y de construcción.

d. Estrategias Didácticas con las cuales Podemos Innovar la clase de Matemática y favorecer la Construcción de su Pensamiento.

ROMPECABEZAS:	Crucigramas Comprobando la edad Adivinanzas de números Inversión de un numero Un poema enigmático Adivinando tu edad y tu número de casa
MANIPULADORES:	Algebloks Contador de.pinzas de ropa Elcontador de cintas Circulo de factores Bloques multibásicos Regletas de.Cuinesaire
JUEGOS	Conocimientos: Numéricos Geométricos Estrategias : La suma La resta La división Uso de Modelos Resolución de Problemas
MEDIOS ELECTRÓNICOS:	Uso de la calculadora Uso del Vídeo

e. Descripción de las Ventajas de cada una de las Estrategias Propuestas

Los juegos:

Permiten la práctica sistemática. La práctica de juegos, con su formato, las limitaciones que tienen que cumplir los jugadores y los movimientos necesarios para su desarrollo aproximan al alumno al gran juego que constituyen las propias Matemáticas (Corbalán, 1988).

....El juego es un buen laboratorio para repetir ensayo y buscar nuevos caminos (idem).

Es una buena forma de detección y autocorrección de errores, pues si se cometen se pierde.

Resolución de problemas

Los problemas intelectuales están motivados por una necesidad de comprender, de saber más precisamente, una necesidad de conocer. La resolución así como el pensamiento general no se ajustan a recetas estereotipadas para su resolución, porque perdería la creatividad.

Uso de Medios electrónicos

El docente actual posee una gran variedad de medios tecnológicos y manipulativos que les sirven para renovar sus clases de matemática, pero muchas veces la rutina los agobia y prefieren seguir con sus métodos de tiza y borrador. Sin embargo estos medios han dado muy buenos resultados según muchas investigaciones.

Se plantea que dentro de sus veñtajas están:

- Variedad metodológica y atención a la diversidad.
- Facilita el tratamiento, la presentación y la comprensión de ciertos tipos de inferencias.
- Motiva, propicia el trabajo colaborativo y optimizan el individualizado.
- Plantea al alumno el acceso a mundos y situaciones fuera de su alcance (Gutiérrez, 1997)

El uso de las calculadoras

Las calculadoras según, (NCTM, 1991) se recomienda para todos los niveles escolares en la clase de matemática. Estas deben integrarse en los objetivos escolares y facilitarse en las escuelas para los trabajos en clase ya que permiten un aprendizaje más rápido y un ahorro del tiempo.

Se recomienda usarlas para

1. Concentrarse en el proceso de resolución de problemas.
2. Lograr acceso a matemática que van más allá de cálculos aritméticos.
3. Explorar, desarrollar y reforzar conceptos, incluyendo estimaciones, cálculo y aproximaciones.
4. Experimentar con ideas y patrones matemáticos.
5. Hacer cálculos con datos de la vida matemática.

Uso del vídeo

Permite aportar una gran riqueza de situaciones imposibles de simular en el aula, aumenta las expectativas en los/as estudiantes, facilita la repetición según los intereses, amplia e integran los conocimientos matemáticos, facilita la comunicación en las clases de matemática.

Trabajo para afianzar los Algoritmos

El algoritmo es automático una vez que se ha acumulado el proceso mediante el que se desarrolla y se ha comprendido la lógica que lo sustenta. De ahí la importancia del desarrollo que posibilitan los juegos, la resolución de problemas, los manipulativos, en fin todos los medios que se puedan integrar para lograr el aprendizaje mas duradero y menos mecánico de la matemática.

Se propone: Diseñar una secuencia con situaciones o modelos en las cuales el/a niño/a se sienta seguro/a y por ello pueda experimentar, redefiniendo y acortando sus métodos hasta llegar a un proceso que pueda automatizar (B. Gómez, 1993)

Conclusiones

El propósito de este trabajo es proponer unas ideas para reflexionar sobre el rol que nos toca realizar frente a los nuevos retos educativos. Los/as profesores/as de matemática tenemos en las manos la mejor herramienta para contribuir con la educación integral de nuestros/as alumnos/as, ya que nuestro trabajo no tendría éxito sino colaboramos con el desarrollo de un pensamiento lógico mediante la acción reflexiva sobre el objeto del conocimiento. Además de reconocer filosóficamente nuestro papel, debemos aportar ambientes educativos donde se utilicen todas las estructuras posibles del pensamiento con el objeto de romper la inercia, motivar y poner a actuar de forma consciente a todos/as los/as alumnos/as.

Las estrategias que seleccionamos no son las únicas, pero pienso que colaborarían para dinamizar y renovar las clases de Matemática del nivel Medio y podrían usarse en diferentes momentos de la construcción del conocimiento. Solo hemos querido aportar un poco, le toca al / a maestro/a seguir profundizando y variando las mismas.

Una de las ideas que queremos puntualizar es la de construir una aula de matemática con enfoque de laboratorio, lo cual nos permite investigar dentro los procesos, descubrir nuevas relaciones matemáticas, propiedades, uso de tecnologías, etc. , aceptemos el reto y tendremos mejores frutos en toda Latinoamérica.

Bibliografía

Barrientos, Heriberto.Taller de Fracciones. Puerto Rico: Labmat 7, 1997.

Cantoral, Ricardo. Serie artículos. Mexico: Cinvestav, 1995.

Corbalán, Fernando. Educación Matemática en Secundaria. Madrid: Síntesis, 1994.

Dreyfous, Ricardo.algeblocks. Puerto Rico: Edumat, 1995.

Dickson, Linda. El aprendizaje de la Matemática. Barcelona: Labor, 1991.

Dodge, Jhon V. Matemáticas. Barcelona: Enciclopedia Hispánica,vol. 9

Fiher, Robert. Investigando las Matemáticas. Madrid: Akal, 1990.

Farfán, Rosa María ; Rodolfo Trujillo. Diseño de una clase para la gráfica de una función. México: Cinvestav, 1995.

GómezAlfonso, Bernardo. Numeración y cálculo. España: Síntesis, 1993.

Gómez, Cristina y otros. Situaciones Problemáticas de precálculo. Bogotá: Una Empresa Docente, 1998.

Gutierrez, Martín, Alfonso. Educación Multimedia y nuevas tecnología. Madrid: De la Torre, 1997.

Hernández Pérez, Esnel. Retos 6. México: Esfinge, 1994.

Imbernón, Francisco. La Formación del Profesorado. Barcelona: Paidos, 1994.

Maldonado, Dina. Integración del álgebra a la Geometría. Puerto Rico: Instituto de Matemáticas, 1997.

Rico Montero, Pilar (y otros). Aprendizaje en el aula. Habana: Pedagogía 97, 1997.

Santoyo, Luz Alba. Metodología de la enseñanza de la Matemática. Santo Domingo: Poveda, 1993.

Wenzelburger, Elfred. Calculadora Electrónica. México: Iberoamericana, 1993 ....Actividades de mejoramiento aritmético para niños de la escuelas primaria.

¿Presentan las mismas dificultades en Matemática, Química, ... , los ingresantes universitarios?[1]

Nilda .M. Monti (nmonti@fce.unl.edu.ar)
Matemática III, Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional del Litoral

P.C. L'Argentière
Química Inorgánica, Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Litoral

Muchas veces al desarrollar Ciencias como Matemática, Química,... se las suele mostrar como existiendo un divorcio entre la teoría y la práctica. Como consecuencia de esto, al observar un gran número de alumnos ingresantes a la Universidad, provenientes de establecimientos educacionales del Nivel Medio de nuestra ciudad, pudimos establecer que pueden dividirse en dos grupos con particularidades muy distintas.

El grupo mayoritario está formado por alumnos:

- Que en Matemática, Química,... poseen un conjunto de conocimientos de tipo memorístico (sin relacionar teoría con práctica); solo poseen contenidos conceptuales y además muchas veces los mismos no están actualizados, desconocen casi en su totalidad los contenidos procedimentales propios de cada asignatura.
- Tampoco poseen contenidos actitudinales que les permitan resolver satisfactoriamente un problema, ni desenvolverse correctamente en un laboratorio o en un taller.
- No han descubierto el modo de pensar propio de las Ciencias y no saben construir los contenidos de Matemática, Química,..., basándose en sus conocimientos previos.

Este grupo mayoritario está formado por los alumnos provenientes de establecimientos educacionales del Nivel Medio de nuestra ciudad y alrededores con los cuales no establecimos ningún tipo de contacto.

El grupo minoritario está formado por alumnos:

- Que poseen conocimientos tanto conceptuales como procedimentales; también poseen conocimientos actitudinales que les permiten resolver satisfactoriamente situaciones problemáticas de Matemática, Química, etc.
- Saben desenvolverse correctamente en un laboratorio de Química o en un Taller de Matemática.
- Que están familiarizados con el uso del gran auxiliar de cualquier asignatura: la computadora; y la integran como una herramienta más de trabajo.
- Que fundamentalmente, están acostumbrados a realizar interdisciplinariedad entre distintas asignaturas y niveles educativos.

Este grupo minoritario está formado por los alumnos provenientes de establecimientos educacionales del Nivel Medio de nuestra ciudad con los cuales establecimos contacto y estuvimos trabajando con ellos primero en forma asistemática a partir del año 1991 y luego a partir del año 1996 lo hicimos en forma sistemática en el marco del Proyecto:

"Enseñanza significativa de Química y Matemática: Transferencia de conocimientos y experiencias para la integración del Nivel Medio con la Universidad".

[1] Se agradece a la Universidad Nacional del Litoral el apoyo económico brindado a través del Programa CAI+D.

El objetivo de este estudio es:

- Determinar cuáles son las falencias que poseen los alumnos del grupo mayoritario, que los lleva generalmente a abandonar sus carreras.
- Establecer si las características de las falencias son las mismas en distintas asignaturas.
- El mismo se realizó a través:
- De evaluaciones diagnósticas tomadas a los alumnos ingresantes a las Facultades de Ingeniería Química y Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral. Estas evaluaciones estaban elaboradas sobre la base de los contenidos conceptuales y procedimentales específicos de Química y Matemática desarrollados por ellos en los distintos establecimientos educacionales del Nivel Medio de nuestra ciudad y alrededores.
- De la observación del desenvolvimiento de estos alumnos en un laboratorio de Química o en Taller de Matemática.
- De encuestas tomadas a los alumnos sobre como les resultaba su inserción en la vida universitaria, con qué dificultades se encontraban y con cuáles no.
- De entrevistas a alumnos provenientes de distintos establecimientos educacionales.

Es importante destacar que en todo momento se les aclaró a los alumnos que se les tomaron las evaluaciones diagnósticas como las encuestas o a los que fueron encuestados que la información obtenida solo servía como dato estadístico para poder establecer las características de ellos y que en ningún momento dicha información iba a ser utilizada para evaluarlo ni en Matemática ni en Química.

Del estudio realizado surgió que el tipo de falencias es el mismo tanto en Matemática, Química,... y que la diferencia entre el grupo minoritario y el mayoritario está dada en que no todos los ingresantes provienen de las mismas Escuelas de Enseñanza Media.

Los alumnos del grupo minoritario, a diferencia del caso anterior, provienen de establecimientos, donde se:

- Encara la enseñanza de las ciencias de una forma totalmente distinta, cuyos docentes han sabido motivar a sus alumnos para que les guste el desarrollo y los contenidos de la disciplina que se está impartiendo.
- Han cambiado las estrategias de enseñanza de la Matemática, Química,...en los distintos cursos, con abordajes novedosos.
- Incorporaron experiencias de articulación entre los alumnos de distintos niveles y de distintas disciplinas.
- Muestran aplicaciones concretas de los contenidos de distintas disciplinas en hechos de la vida real.
- Utilizan los multimedios como auxiliares de la actividad docente.
- Desarrollan parte de las horas destinadas a una determinada disciplina a través de un Taller, donde los alumnos deben realizar búsqueda bibliográfica sobre los contenidos solicitados, plasmar los resultados de los mismos a través de informes ya sea por medio de reportes de investigación o pósters, de acuerdo a sus preferencias, y realizar la defensa de sus informes frente a los demás integrantes del curso. También realizan exposiciones con el material desarrollado en los distintos Talleres. Las mismas son visitadas por todos los alumnos del establecimiento. Estos Talleres forman parte del curriculum del Establecimiento Educación y están aprobados por el Ministerio de Educación.

Este grupo minoritario como ya mencionamos anteriormente está formado por los alumnos provenientes de establecimientos educacionales del Nivel Medio de nuestra ciudad con los cuales establecimos contacto y estuvimos trabajando con ellos, partiendo de la base que todo el proceso educativo debe ser continuo, ya que a través de él nos proponemos formar una persona autónoma, responsable, que asuma en plenitud los derechos y deberes de la vida en democracia. Una persona "competente", que se realice en las dimensiones cultural, social, estética y ética acorde con sus capacidades, guiada por los valores de vida, libertad, bien, verdad, paz, tolerancia, solidaridad, igualdad y justicia, capaz de elaborar su propio proyecto de vida.

Sobre estas pautas trabajamos de la siguiente manera:

- Realizamos reuniones conjuntas con docentes de Matemática y Química de los niveles de educación media y universitario.
- Establecimos utilizar las mismas notaciones y simbologías tanto en el nivel medio como en el universitario.
- Los contenidos comunes a ambos niveles fueron encarados desde el nivel medio desde la misma manera de cómo se los iba a utilizar en el nivel universitario. Esto posibilitó a que los alumnos realicen un aprendizaje significativo de nuevos contenidos, ya que éstos siempre se construyeron sobre la base de los contenidos anteriores independientemente de que correspondieran a un mismo nivel o distinto nivel educativo.
- Los alumnos de estos establecimientos educacionales de Nivel Medio, cuando cursaban el último año de sus respectivas carreras visitaron las Facultades de Ciencias Económicas e Ingeniería Química donde participaron de charlas, talleres y clases de laboratorio impartidas en forma conjunta por docentes del Nivel Medio y Universitario.
- Dictamos a los docentes de las áreas de Matemática y Química de estos establecimientos educacionales cursos de capacitación en dichas áreas. Estos cursos de capacitación posibilitaron:

1. La adquisición de nuevos conocimientos y la actualización de otros.
2. La sistematización de la nomenclatura y el simbolismo.
3. Haber palpado la realidad del ambiente universitario en que deberá desenvolverse la mayoría de sus alumnos en el futuro.
4. Despertar en estos docentes la inquietud por desarrollar sus contenidos con un enfoque moderno, dinámico, estructurado y significativo para sus alumnos.
5. Plantear los objetivos conceptuales, procedimentales, actitudinales y transversales que se pretenden alcanzar con cada tema, teniendo en cuenta los recursos disponibles, dónde se va a desarrollar ese contenido, quiénes son los destinatarios, tiempo estimado y actividades.
6. Elaborar guías de aprendizaje para integrar la computadora como herramienta de trabajo tanto en Matemática como en Química.
7. La utilización de los multimedios para motivar y fundamentar la importancia de la enseñanza de una determinada ciencia.
8. La incorporación de nuevas pedagógicas como es el uso de los mapas conceptuales y los diagramas de Gowin.
9. Evaluar de una manera distinta, es decir teniendo en cuenta procesos y resultados obtenidos. Esto implica tener en cuenta la comprensión conceptual, el gusto por hacer esa determinada ciencia, la habilidad de plantear problemas y resolverlos con una variedad de estrategias, teniendo en cuenta que cualquier ciencia es una habilidad

humana a la que todos pueden acceder de manera placentera, la significación y funcionalidad de la cada ciencia a través de su conexión con el mundo real, entre sus diversas ramas y con las otras ciencias, el valor de la nueva tecnología (calculadoras, computadoras, etc.), que se incorpora al aula, no sólo para simplificar los cálculos, sino por la posibilidad que brinda de *"experimentar"*, enriqueciendo el campo perceptual y las operaciones mentales involucradas en los procesos de constitución, estructuración y análisis de los contenidos.

Estas diferencias entre los dos grupos de ingresantes desaparecerán cuando todos encaremos nuestras prácticas docentes teniendo en cuenta que "desde la presentación de la asignatura se debe hacer conocer su objeto de estudio, su método, su relación con la realidad cotidiana, valorando la importancia que tiene para el alumno que los conocimientos que recibe sean actualizados y significativos *para él.*

Las experiencias realizadas con un gran número de alumnos ingresantes a la Universidad se hicieron en el marco de los Proyectos "*Investigación del mejoramiento de la capacidad para aprender Química y Matemática Universitarias en las Facultades de Ing. Química y Ciencias Económicas*", y "*Enseñanza significativa de Química y Matemática: Transferencia de conocimientos y experiencias para la integración del Nivel Medio con la Universidad*" ambos son de la Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, dirigido por el Ing. Pablo L'Argentière y la Prof. Nilda Monti

El proyecto *"Enseñanza significativa de Química y Matemática: Transferencia de conocimientos y experiencias para la integración del Nivel Medio con la Universidad"* nos permitió establecer contactos con establecimientos educacionales del Nivel Medio de nuestra ciudad. Este contacto se realizó con docentes de las asignaturas de Matemática y Química, como así también con alumnos de dichos establecimientos.

Bibliografía

N. Monti, P. L'Argentière, "La importancia de las relaciones intra e interdisciplinarias en pos del mejoramiento de la calidad de la enseñanza"; III Taller Internacional sobre enseñanza de la Matemática para Ing. y Arquitectura, Cuba 1998.

Nilda Monti, Silvia Visciglio, "Mejoramiento de la capacidad para aprender Matemática. Experiencia de articulación Escuela Media-Universidad"; Relme 12. Colombia 1998.

C. Monereo et al. "Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje"; Ed. Graó, Barcelona, 1993.

Ministerio de Educación de la Nación Argentina "Ley Federal de Educación" Nº 24195, artículo 6, 1995.

Enseñanza de Procedimientos Lógicos Elementales mediante la Matemática

Alexis Durán Jorrín
Ministerio de Educación
Cuba

Introducción

Mucho se habla en estos tiempos sobre la necesidad de desarrollar el pensamiento lógico de los alumnos. Como se conoce, el pensamiento lógico tiene modos especiales de manifestarse, las llamadas formas lógicas del pensamiento.

Por forma lógica del pensamiento se entiende lo general que puede ser inherente a distintos pensamientos, independientemente de toda la variedad de sus contenidos y objetos. Se reconocen tres formas lógicas del pensamiento: los conceptos, los juicios y los razonamientos.

El concepto es la forma lógica del pensamiento que refleja los indicios substanciales de una clase de objetos homogéneos o de un objeto. El juicio es la forma de pensamiento en que se afirma o niega algo respecto a los objetos, los vínculos entre un objeto y sus propiedades o las relaciones entre objetos. El razonamiento es la forma de pensamiento mediante la cual, y utilizando ciertas reglas de inferencia, de uno o varios juicios verdaderos (premisas) se obtiene un nuevo juicio (conclusión) que se infiere de aquellos de un modo necesario o con determinado grado de probabilidad (Getmanova,1989).

El razonamiento constituye un instrumento imprescindible del proceso del conocimiento. El extraordinario valor del razonamiento para este proceso consiste en el hecho de que con su ayuda el nuevo conocimiento se alcanza sin recurrir el experimento, a la comprobación práctica, lo cual amplía significativamente las posibilidades del conocimiento científico.

El proceso de razonamiento tiene una estructura compleja: la distinción del objetivo del razonamiento, el análisis de la situación, la separación de los elementos esenciales de los no esenciales, el surgimiento del plan general del razonamiento y su realización. El razonamiento se realiza en forma de juicios y de conclusiones. Los razonamientos pueden ser deductivos o reductivos (inductivos, analogías, etc.).

El pensamiento no es una cualidad innata en el hombre (Talízina,1987). El no nace con un pensamiento lógico preparado, con conocimientos preparados sobre el mundo. Pero tampoco descubre en cada ocasión ni las leyes lógicas del pensamiento, ni las leyes de la naturaleza. Todo lo que llegó a ser conocido por las sociedades anteriores lo asimila en el proceso de su vida. En este proceso de asimilación, la enseñanza juega un papel esencial.

Tradicionalmente se ha planteado como una de las tareas de la enseñanza de la Matemática la de contribuir al desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos. Dado que la Matemática es una ciencia que utiliza sistemáticamente los procedimientos lógicos se da por seguro que debe contribuir a lograr tal desarrollo en los alumnos. Sin embargo, la práctica demuestra que el pensamiento lógico no se desarrolla automáticamente con la enseñanza de la Matemática, al menos en la medida en que cabría esperarlo. Son conocidas, por ejemplo, las dificultades de los alumnos en el trabajo con teoremas y sus demostraciones, en la resolución de problemas, en la interpretación de la información contenida en un texto, en el razonamiento deductivo en general, evidenciadas en la actividad práctica en nuestras escuelas y en diferentes investigaciones (Durán, 1997). Algunas dificultades en el pensamiento lógico se mantienen incluso en estudiantes de nivel superior (Hernández,1992).

Debe enseñarse a los alumnos a razonar correctamente. Cómo hacerlo es una tarea que enfrentamos docentes e investigadores. En nuestra opinión, debe ayudarse a que los alumnos elaboren sus propios procedimientos de razonamiento. Para ello deben ser puestos en situaciones en las que es necesario pensar, es decir, ante problemas. Recordemos que el hombre siente la necesidad de pensar, organizar y dirigir su actividad cognoscitiva cuando durante su interacción con el medio se alza, como barrera, el desconocimiento que le impide o dificulta el alcance de determinados fines. Sobre esto existe consenso en la literatura psicológica y pedagógica.

Desarrollo

El concepto procedimiento se emplea con frecuencia en la literatura psicológica y pedagógica. Por procedimientos lógicos del pensamiento entenderemos aquellos procedimientos más generales, que se utilizan en cualquier contenido concreto, se asocian a las operaciones lógicas del pensamiento y se rigen (cuando son adecuados) por las reglas y leyes de la Lógica (Campistrous,1993).

Pueden clasificarse los procedimientos lógicos asociándolos a las formas lógicas del pensamiento (Campistrous,1993). De esta manera podemos hablar de procedimientos lógicos asociados a conceptos, procedimientos lógicos asociados a juicios y procedimientos lógicos asociados a razonamientos.

Centraremos nuestra atención en los procedimientos lógicos asociados a razonamientos. Entre estos podemos citar: realizar inferencias inmediatas, deducción por separación, refutación, realizar inferencias silogísticas elementales, demostración directa, demostración indirecta, argumentar, realizar inferencias reductivas.

Nótese que todos, excepto el último están asociados a razonamientos deductivos. Además tienen diferentes grados de complejidad. Los primeros (realizar inferencias inmediatas, deducción por separación, refutación, realizar inferencias silogísticas elementales) son más simples pues en ellos se emplea una sola regla de inferencia. Los restantes (demostración directa, demostración indirecta, argumentar) son más complejos pues en ellos se utilizan varias reglas de inferencia e incluso contienen procedimientos más simples. Llamaremos elementales a los primeros y complejos a los últimos.

En este trabajo profundizaremos, dentro del razonamiento deductivo, en el razonamiento condicional categórico. En este tipo de razonamiento una de las premisas es un juicio condicional y la otra, un juicio categórico simple. Razonamientos de este tipo tienen un uso frecuente en la enseñanza, especialmente de las ciencias y en particular de la Matemática.

En el razonamiento condicional categórico se dan cuatro casos:

Caso I Si A entonces B

A

B

Caso II Si A entonces B

no B

---

no A

Caso III Si A entonces B

no A

---

no se puede decidir

Caso IV Si A entonces B

B

---

no se puede decidir

Los casos I y II se basan en dos conocidas reglas de la Lógica: el modus ponens y el modus tollens. Los casos III y IV se conocen como el primer y el segundo modo probable.

Asociados a este tipo de razonamiento están los procedimientos deducción por separación y refutación.

En la concepción actual de la enseñanza de la Matemática en nuestro país se reconoce que "enseñar a demostrar es ante todo enseñar a razonar" (Orientaciones metodológicas, Matemática, 9no grado) y se establece una estrecha relación entre teoremas y sus demostraciones por una parte y razonamiento por otra. Sin embargo en el trabajo con teoremas no se hacen explícitos los procedimientos lógicos elementales asociados a los razonamientos que intervienen en el proceso de demostración. Se procede como si el alumno ya supiera hacer tales deducciones.

Se crea entonces un cierto círculo vicioso: el alumno aprende a razonar deductivamente mediante la realización de demostraciones de teoremas, pero para hacer o comprender demostraciones necesita saber razonar deductivamente. Para romper con este círculo vicioso nuestra posición es que deben enseñarse de manera explícita determinados procedimientos lógicos elementales mediante ejercicios adecuados, para ser empleados por los alumnos en cualquier contexto y no únicamente en demostraciones de teoremas.

Opinamos que vincular los procedimientos lógicos asociados a los razonamientos solo a la enseñanza de los teoremas tiene varias limitaciones:

- Se reducen las posibilidades de estudiarlos pues la mayoría se concentra en determinadas temáticas, fundamentalmente la Geometría y además en nuestros programas actuales se han eliminado una parte significativa de las demostraciones.
- Puede provocar que los alumnos los relacionen únicamente con los teoremas y no vean la posibilidad de aplicación en otros contextos.
- En la demostración de teoremas solo se emplean razonamientos que conducen a conclusiones seguras, no aquellos que conducen a conclusiones indeterminadas o probables.
- Los teoremas aparecen siguiendo la lógica del contenido, por lo cual no necesariamente hay una gradación según los niveles de dificultad de los razonamientos que emplean.

Para enseñar a razonar deductivamente a los alumnos debe tratarse de que se apropien de las acciones que componen el procedimiento. En la literatura psicológica (Hernández,1992) encontramos que las tres acciones propias de todo razonamiento deductivo son: análisis de premisas, cumplimiento de las reglas de inferencia y elaboración de la conclusión.

Hemos tenido en cuenta estas acciones y las adecuamos al razonamiento condicional categórico. Incluimos además, de manera explícita, una acción referida al control de la conclusión. Es conveniente enseñar acciones de corrección a los alumnos, de manera que tengan la posibilidad de autocontrolarse cuando sea necesario. De manera que, para su instrumentación didáctica, en el razonamiento deductivo podemos considerar las siguientes acciones:

- Identificar la estructura
- Buscar relaciones entre los juicios
- Concluir
- Verificar la conclusión

Estas acciones no tienen que realizarse esquemáticamente en este orden, pero están presentes en todo razonamiento.

La primera acción significa una orientación en la situación que se presenta, el reconocimiento de que se está en una situación en la que hay un razonamiento.

La segunda acción consiste en la búsqueda de las relaciones entre los juicios que componen el razonamiento, teniendo en cuenta el contenido relativo al objeto sobre el que se razona. En el caso del razonamiento condicional categórico implica reconocer el antecedente y el consecuente en el juicio condicional y verificar que en el juicio categórico se afirma que se cumple el antecedente o el consecuente del condicional (o sus negaciones).

La tercera acción está muy vinculada a la segunda y se materializa en la conclusión que se obtiene.

La cuarta acción tiene sobre todo un objetivo didáctico y se refiere no solamente a la comprobación de la conclusión sino también a la realización de consideraciones sobre ella. Esto es particularmente importante en los casos en que a partir de las premisas no pueden hacerse conclusiones. En estos casos es útil, para contribuir al desarrollo del pensamiento de los alumnos, no limitarse a terminar con la respuesta "no se puede decidir" sino analizar también el porqué y discutir las posibles alternativas.

En el proceso de enseñanza debe lograrse que los alumnos aprendan estas acciones. Esto puede lograrse mediante el análisis y discusión de ejercicios y problemas en los que deben evidenciarse las acciones que se realizan.

A los estudiantes se les deben enseñar recursos para elaborar sus razonamientos. Una de las vías posibles para ellos es la modelación gráfica del razonamiento. En este sentido es posible utilizar esquemas gráficos, como los diagramas empleados en Matemática para representar relaciones de inclusión entre conjuntos.

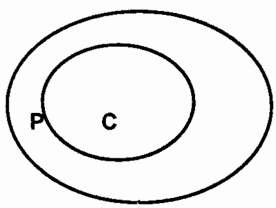
Ilustremos cómo pueden ser empleados estos diagramas para modelar situaciones en las que se presentan razonamientos de tipo condicional categórico. En los ejemplos que a continuación aparecen solo se utilizan en situaciones de contenido matemático, no obstante, por el carácter general del procedimiento empleado, es posible utilizarlo en otro contexto.

Ejemplo 1

Consideremos la situación siguiente:

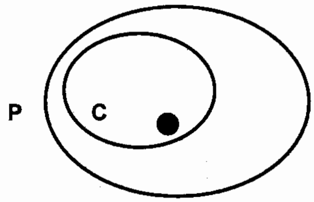
"Si una figura es un paralelogramo entonces es un cuadrilátero. La figura dada es un paralelogramo. ¿Qué conclusión se obtiene?"

La primera afirmación (el juicio condicional "si una figura es un paralelogramo entonces es un cuadrilátero") puede representarse esquemáticamente de la siguiente manera:



donde P representa la condición "ser paralelogramo" y C significa "ser cuadrilátero". Nótese que P está incluido dentro de C porque siempre que sea paralelogramo será cuadrilátero.

Representemos ahora la segunda afirmación (el juicio categórico "la figura dada es un paralelogramo") con un punto, para lo cual colocamos un punto dentro de P.



Para obtener la conclusión se analiza la posición del punto respecto a C. Se observa entonces que el punto está también dentro de C. Como C significa "ser cuadrilátero", entonces la conclusión es: la figura dada es un cuadrilátero.

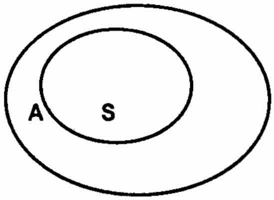
Ejemplo 2

Apliquemos un esquema análogo para resolver el siguiente ejercicio:

Si la ecuación dada es del tipo ax+b=0 (a diferente de cero) entonces tiene solución.

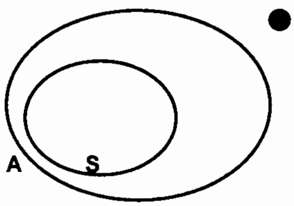
La ecuación dada no tiene solución. ¿Es del tipo ax+b=0 (a diferente de cero)?

Representamos primero la afirmación del tipo si...entonces...



donde A representa "es ecuación del tipo ax+b=0 (a diferente de cero)" y S representa "tiene solución".

Representamos la segunda afirmación



Nótese que ahora el punto está fuera de S porque se ha representado la situación "no tiene solución".

Al analizar la relación entre el punto y A se observa que siempre estará fuera de A. Por lo tanto la conclusión en este caso es "no es del tipo ax+b=0 (a diferente de cero)".

Ejemplo 3

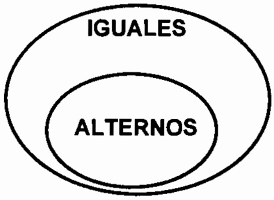
Veamos también un caso en el cual la respuesta es indeterminada (probable).

Resolvamos mediante modelación, el ejercicio siguiente:

A partir de las afirmaciones "los ángulos A y B no son alternos entre paralelas" y "si dos ángulos son alternos entre paralelas entonces son iguales", se obtuvo como conclusión "los ángulos A y B no son iguales".

¿Es correcta esta conclusión?

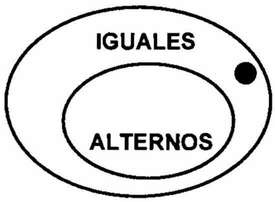
La relación entre el antecedente (los ángulos son alternos entre paralelas) y el consecuente (los ángulos son iguales) del juicio condicional puede representarse de la siguiente forma



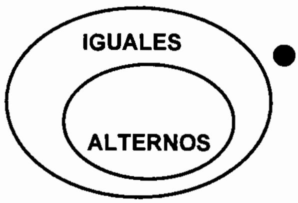
Representamos ahora la afirmación "los ángulos A y B no son alternos entre paralelas". Para ello colocamos un punto fuera de ALTERNOS.

Pero en este caso hay dos posibilidades:

Primera posibilidad:



Segunda posibilidad:



En el primer caso el punto queda dentro de IGUALES, pero en el segundo, queda fuera. Por lo tanto no se puede decidir si los ángulos son iguales o no. La conclusión planteada no es, por tanto, correcta.

En resumen, para utilizar los esquema analizados al modelar la situación lógica que se presenta, se puede proceder así:

1. Representar el juicio condicional mediante un diagrama.
2. Representar el juicio categórico.
3. Analizar, a partir de la representación obtenida, si la conclusión queda representada o no.

El uso de estos esquemas permite comprender que la conclusión no depende del contenido. La conclusión se deriva del diagrama; un mismo diagrama puede emplearse para representar diferentes contenidos.

Como puede apreciarse, los diagramas anteriores pueden emplearse en la búsqueda de relaciones entre las premisas dadas para después concluir. Es posible también apoyarse en la analogía. En este caso la situación que se presenta se modela mediante otra en la que aparece la misma situación lógica (y en la cual sea más simple para el alumno hacer el razonamiento); obtiene la conclusión en el modelo y por analogía, se plantea la conclusión en la situación que se analiza.

En los casos de respuesta indeterminada, la conclusión debe expresarse de diversas maneras: no se puede decidir, no hay elementos para afirmar que se cumple P, es probable que P se cumpla pero no puede asegurarse, etc.

También deben proporcionársele al alumno medios y métodos para comprobar sus razonamientos. En este caso, para verificar la conclusión puede procederse de diversas maneras. Una posibilidad es buscar contraejemplos. En los casos de respuesta indeterminada deben discutirse las posibilidades. En el ejemplo 3, señalado antes, debe analizarse que, con las condiciones que se dan, los ángulos A y B pudieran ser, por ejemplo, correspondientes entre paralelas y por tanto iguales. O pudieran ser dos ángulos cualesquiera con amplitudes diferentes. En ambos casos se cumplen las condiciones dadas, pero se arriban a conclusiones distintas. Deben discutirse otras posibilidades para que los alumnos comprendan porqué de las dos afirmaciones dadas no se puede obtener una conclusión segura.

Estas ideas fueron llevadas a la práctica con estudiantes de séptimo grado del nivel secundario en nuestro país. En su concepción se tuvo en cuenta, además de elementos de carácter teórico, estudios realizados por el autor que revelaron la existencia de determinadas tendencias en los estudiantes al hacer razonamientos de este tipo. Las tendencias más importantes fueron dos:

- Hay tendencia a no reconocer que existen casos en los que a partir de las premisas dadas no se pueden hacer conclusiones.
- Hay tendencia a suponer que la relación entre el antecedente y el consecuente en un juicio condicional es reversible, o sea, que la presencia o no de uno de ellos implica necesariamente la presencia o no del otro.

Por tales motivos es que consideramos importante enseñar no reglas de inferencia aisladas (modus ponens, modus tollens) sino un procedimiento lógico más general que incluye los cuatro casos posibles asociados a razonamientos condicionales categóricos.

La experiencia realizada demostró que la propuesta elaborada es realizable en la práctica y constituye una alternativa para la enseñanza de procedimientos lógicos asociados a razonamientos deductivos.

Conclusiones

La formación de procedimientos lógicos tiene gran importancia pues constituyen premisas para el desarrollo de un pensamiento lógico y a la vez, herramientas cognitivas que el individuo utiliza para organizar más racional y lógicamente sus estrategias intelectuales.

El aprendizaje de tales procedimientos no debe ser dejado a la espontaneidad sino enseñados por el maestro. Esto no significa, en nuestra opinión, convertir las clases en clases de Lógica. Incluso pensamos que enseñar Lógica axiomáticamente en el nivel secundario puede ser un intento estéril, pero creemos que no basta conque el profesor realice correctamente todos sus razonamientos y que las demostraciones matemáticas sean rigurosamente correctas; es necesario también que se le enseñe al alumno cómo razonar y se le den medios para decidir si su razonamiento es correcto o no.

Nuestra posición es enseñar esos procedimientos lógicos elementales, y no simplemente reglas de inferencia, para ser empleados por los alumnos en cualquier contexto y no únicamente en demostraciones de teoremas.

Enseñar al los alumnos estas ideas generales sobre el empleo de esquemas gráficos para modelar razonamientos y estimularlos a que elaboren sus propios procedimientos puede hacer una contribución importante al desarrollo de su capacidad de razonamiento.

Bibliografía

Campistrous, Luis (1993), *Lógica y procedimientos lógicos del aprendizaje*, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, Cuba.

Durán, Alexis (1997), *Enseñanza de procedimientos lógicos elementales mediante la Matemática*, tesis doctoral, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, Cuba.

Getmanova, Alexandra (1989), *Lógica*, Editorial Progreso, Moscú.

Hernández, Adela (1992), *Diagnóstico y desarrollo del procedimiento de deducción en estudiantes de Ciencias Técnicas*, tesis doctoral, Universidad de la Habana.

Talízina, Nina (1987), *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*, Universidad de la Habana.

Experiencias de Aprendizaje propuestas por los alumnos y su Resolución en un Taller de Matemáticas

Alejandro Muñoz Diosdado (amunoz@acei.upibi.ipn.mx)
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología, Instituto Politécnico Nacional
México

Resumen

En este trabajo se describe la experiencia realizada en una Escuela de tipo interdisciplinario, acerca de una actividad que usualmente no se presenta en los espacios educativos: que los alumnos propongan experiencias de aprendizaje en donde puedan aplicar los conocimientos adquiridos, en este caso en las asignaturas de Matemáticas y Computación.

Tal propuesta surge de que tales alumnos manifestaron cierta frustración porque los problemas que se resolvían en las asignaturas de Matemáticas estaban muy desconectados con lo que sucede en la realidad y en particular con las carreras que ellos estaban estudiando. Por ello propusieron que en un espacio denominado taller de Matemáticas se tratara de resolver problemas propuestos por ellos mismos que tuvieran las siguientes características: que fueran novedosos, que se aplicaran los conocimientos adquiridos por ellos en Matemáticas y Computación, que se modelaran fenómenos que realmente suceden en la Naturaleza y que en la medida de lo posible estuvieran relacionadas con sus carreras. La investigación de problemas diversos con estas características es difícil al principio, pero después se va creando un banco de problemas que los alumnos pueden abordar. En este trabajo se describe como se llegó a la elección de un problema que interesó a todos, aunque el problema no es complejo, su resolución tardó aproximadamente tres meses, por todos los cálculos que hubo que realizar.

La experiencia fue muy enriquecedora, se mostró que es posible involucrar a los alumnos en la selección de experiencias de aprendizaje, pero además con este método pueden abordarse una gran cantidad de problemas, sencillos y complejos. Se cree que si se permite al alumno plantearse a sí mismo problemas interesantes y más sencillos que el aquí se plantea, entonces esto puede hacerse de forma cotidiana en el aula de clases, cuando el alumno se siente involucrado en tales actividades su interés y rendimiento mejoran notablemente.

Introducción

Ultimamente se tiende a involucrar más al alumno en el proceso de enseñanza aprendizaje, el alumno ha dejado de ser un sujeto pasivo, casi inmóvil, a un sujeto que participa, que da su opinión y la contrasta con la de sus compañeros y la del profesor. Sin embargo, hay tendencias que plantean que el alumno debe participar más, incluso en terrenos que se cree deben de ser del dominio completo del profesor. Así a los alumnos se les puede dejar participar en la estructuración del programa, no de los contenidos sino de la secuencia de los temas, y además al alumno se le ha dejado participar o al menos opinar en el mecanismo de evaluación. Un rubro en el que no se había dejado participar al alumno (al menos en los lugares de México conocidos por el autor), es el de la elección de las experiencias de aprendizaje. Usualmente en los cursos de Matemáticas, el profesor elige las experiencias más adecuadas que, según él, ayuden a fortalecer el aprendizaje, tal elección la hace usualmente a partir de los libros de texto, y por lo regular consiste en una serie de problemas alejados completamente del contexto del alumno, que raramente son de interés para los educandos y por lo tanto no lo motivan. El alumno resuelve tales problemas de una forma mecánica y cuando termina las largas listas de ejercicios muchas veces se sigue preguntando para que sirven los conocimientos adquiridos, es decir en donde se pueden aplicar.

Usualmente las experiencias de aprendizaje en la enseñanza de cualquier asignatura sean o no de Matemáticas, son propuestas por el profesor tomando como referencia el programa de estudios de la asignatura, la elección de experiencias de aprendizaje adecuadas, que garanticen que el alumno aprenda uno o más conceptos de la asignatura que se trate es muy relevante y en ocasiones altamente contradictoria. Sobre todo en los cursos de Matemáticas muchas veces las experiencias de aprendizaje elegidas parecen estar muy separadas del contexto en el cual se desenvuelve cada estudiante, no solamente en el sentido de que no es posible que se produzca el aprendizaje significativo, sino que también existe una distribución en el tiempo de tales actividades que no parece muy lógica, es decir, en lugar de ser un conjunto de actividades regularmente distribuidas en el tiempo en que se imparte la asignatura, resulta que al inicio del curso prácticamente no hay tales actividades, éstas se acumulan ya sea previamente a los exámenes o bien cerca del final del curso.

Casi siempre tales experiencias de aprendizaje consisten en la resolución de problemarios con una gran cantidad de problemas, pero solo son problemas de tipo "académico", de tal forma que es difícil que los alumnos resuelvan problemas realmente de aplicación, esto resulta sobre todo relevante en el caso de alumnos de Ingeniería que tienen que llevar varios cursos de Matemáticas. Para tales alumnos las preguntas, ¿Para qué sirve?, ¿En que se aplica? No parece no tener una respuesta satisfactoria. Desde luego que hay razones de peso para que el estado de cosas actualmente sea así, por un lado los programas muchas veces son extensos, de tal forma que se tiene que sacrificar la calidad por la cantidad, también (afirman los docentes) que aunque los problemas que se resuelven no son aplicativos si son altamente formativos y por otro lado los problemas de aplicación usualmente requieren que el alumno conozca otras herramientas, (de matemáticas o de otras asignaturas) que imposibilitan muchas veces que se puedan realizar aplicaciones "reales", del campo de la disciplina que se está estudiando.

Como conclusión resulta que no existe realmente un espacio (al menos en las escuelas de nivel superior conocidas por el autor) en donde puedan realizarse aplicaciones que vayan más allá del curso o los cursos de Matemáticas tomados y muchas veces no existe ni la disposición por parte de los docentes y los alumnos. Sin embargo, cuando se da la combinación de situaciones que posibilitan que se pueda resolver este tipo de problemas el aprendizaje mejora porque alumnos y docentes se sienten comprometidos en una actividad que es altamente satisfactoria y motivadora.

Descripción del trabajo

En este trabajo se presentan las observaciones y resultados de una actividad que va un poco más allá de lo que se ha descrito y consistió en que las actividades fueron propuestas por los mismos alumnos. Los alumnos mencionados son alumnos del área de Ingeniería en una Escuela de corte interdisciplinario que cursaron los siguientes cursos de Matemáticas: Cálculo Diferencial e Integral en una y varias variables, Algebra Lineal, Probabilidad y Estadística, Métodos Numéricos y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Tales alumnos manifestaron su "frustración" porque no habían aplicado los conocimientos adquiridos en Matemáticas a problemas "reales". Por otro lado tales alumnos están medianamente capacitados en el uso de la computadora, usualmente saben programar en lenguaje C o Pascal y dominan al menos las bases de algún software de uso en Matemáticas, pudiendo ser MATCAD, MATHEMATICA, MAPLE ó MATLAB.

Definir que es un problema "real" junto con los alumnos fue una tarea muy difícil y no fue completada satisfactoriamente. Plantear uno o varios problemas que sean de interés tanto para los alumnos interesados como para los docentes llevó mucho tiempo, pero el principal problema es encontrar el espacio y el tiempo para realizar tal actividad. Una vez hechas todas las propuestas y analizadas en su conjunto se acordó trabajar con el siguiente objetivo:

Realizar una o varias aplicaciones que fueran novedosas, que estuvieran más o menos desarrolladas en la literatura científica, que no necesitaran por parte de los alumnos el aprendizaje de nuevas disciplinas (aunque si algunos temas básicos), que se utilizaran los conocimientos de programación adquiridos por ellos y en las que además se modelara algún fenómeno que realmente sucediera en la naturaleza.

Cuando se pudo establecer claramente cual era el objetivo ya solamente quedó un conjunto pequeño de alumnos interesados (aproximadamente diez) y un profesor. Se decidió agruparlos en una especie de "taller" de Matemáticas trabajando tiempo extraclase y en equipo en la resolución de un solo problema elegido por todos. En esta primera experiencia el planteamiento de problemas fue totalmente libre, es decir, no necesariamente se trataba de problemas relacionados con las carreras que se ofrecen en la Escuela.

La primera etapa fue realizar una investigación de problemas que cumplieran con los anteriores supuestos, en el transcurso de la investigación hubo muchas propuestas pero muchas de ellas fueron rechazadas porque obviamente el objetivo no era realizar investigación científica sobre algún tema de los propuestos, simplemente se quería aplicar los conocimientos adquiridos, sin embargo después de examinar las propuestas de los alumnos y del profesor, se concluyó que realizar una aplicación del tipo de las que se habían presentado (muchas de ellas eran realmente complejas, incluso para el docente) era necesario seguir muchos de los pasos que usualmente se siguen en cualquier trabajo científico, no era solamente "aplicar por aplicar". Problemas de aplicación que sean fáciles de entender y de resolver usando herramientas básicas de Matemáticas y de Computación y que además en ellos se modelen sistemas complejos parecería que son muy difíciles de encontrar, sin embargo, se propusieron varios que cumplieron con tales características, por brevedad solamente se describirá uno de los que se resolvió y en el que hubo consenso por parte de todos. Se hace un resumen de lo realizado porque los resultados obtenidos por el grupo fueron muy amplios.

La pila de arena y el modelo de resorte bloque

Uno de los temas que más llamó la atención de los alumnos fue el de los autómatas celulares. Los autómatas celulares son sistemas dinámicos discretos cuyo comportamiento está completamente especificado en términos de una relación local. En este sentido, se ha dicho que los autómatas celulares son para los científicos computacionales, la parte correspondiente al concepto de campo de los físicos[1].

En un autómata el espacio se representa por una malla uniforme, cada sitio o celda contiene varios bits de datos, el tiempo avanza en pasos discretos y las leyes de este universo se expresan por una regla sencilla, a través de la cual en cada paso y para cada celda, se calcula su nuevo estado a partir del estado de sus vecinos más cercanos. Las leyes del sistema son locales y uniformes. Local significa que para conocer que sucederá en alguna celda en algún momento, únicamente se tiene que ver el estado de las celdas de alrededor, en principio no se permite acción a distancia. Uniforme quiere decir que las leyes son las mismas en cualquier lugar. Dada una regla adecuada, este simple mecanismo operacional es suficiente para dar lugar a una jerarquía completa de fenómenos y estructuras. Los autómatas celulares proveen de modelos muy útiles para muchas investigaciones en ciencias naturales, matemáticas combinatorias y ciencia computacional, en particular representan una forma natural de estudiar la evolución de sistemas físicos grandes.

Los resultados de la investigación realizada mostraron que los autómatas celulares están jugando un papel cada vez más importante como modelos prácticos y conceptuales de sistemas dinámicos espacialmente extendidos, de los cuales los sistemas físicos son los principales prototipos.

Aunque la teoría de autómatas resultó bastante compleja para los participantes en el taller, no lo fueron las dos aplicaciones elegidas, los modelos de la pila de arena y del modelo conocido como de resorte bloque (o spring-block). Se describen brevemente a continuación tales modelos.

La pila de arena

Físicamente una pila puede construirse iniciando sin nada y añadiendo al azar arena, un grano cada vez. La pila crecerá y la pendiente se incrementará. Eventualmente, la pendiente alcanzará un valor crítico (llamado ángulo de reposo), si más arena se añade ésta resbalará hacia fuera. Alternativamente si iniciamos de una situación donde la pila está muy empinada, la pila colapsará hasta que alcance un estado llamado estado crítico, el cual es estable. Al agregar granos de arena se producen avalanchas, según la pila se está construyendo, el tamaño característico de las avalanchas más grandes crece, hasta que en el punto crítico hay avalanchas de todos los tamaños, incluso comparables al tamaño del sistema. Programar el autómata conocido como pila de arena no resultó difícil (se hizo en MATLAB por la facilidad de este software para manejar matrices de gran tamaño), el algoritmo está descrito en las referencias [2] y[3], lo mismo que los resultados, los cuales han dado origen a una nueva teoría en la Física que se llama criticalidad auto organizada que sirve para la modelación de sistemas complejos. El siguiente paso fue resolver el autómata celular conocido como modelo de resorte bloque (o spring-block), el cual es un modelo básico para simular la dinámica de una falla sísmica.

El modelo de resorte bloque

Olami, Feder y Christensen[4] (OFC) introdujeron en 1992 un modelo de autómata celular continuo donde el nivel de conservación se podía controlar. El modelo propuesto es una versión en dos dimensiones del modelo de resorte bloque de Burridge y Knopoff[5] para modelar la dinámica de una falla sísmica, la falla es representada por una malla bidimensional de bloques interconectados por resortes. Cada bloque está conectado a sus cuatro vecinos más cercanos. Adicionalmente, cada bloque se conecta a una placa rígida móvil por otro conjunto de resortes, también están conectados por medio de la fuerza de fricción a una placa rígida fija. Véase la figura 1. Los bloques se dejan llevar por el movimiento relativo de las dos placas rígidas. Cuando la fuerza sobre uno de los bloques es más grande que algún valor de umbral *Fth* (la máxima fricción estática), el bloque resbala. Se asume que el bloque que se mueve resbalará a la posición de fuerza cero. El deslizamiento de un bloque redefinirá las fuerzas en sus vecinos más cercanos. Esto puede resultar en más deslizamientos y una reacción en cadena puede presentarse. Aunque este modelo obviamente está altamente simplificado, para los participantes en el taller fue realmente satisfactorio el comprobar que este modelo es capaz de dar una explicación razonable del proceso dinámico real asociado con las fallas en donde se producen los sismos. Se obtienen del modelo muchos resultados, pero uno de los principales es que a partir de él se puede obtener la ley de Gutenberg-Richter de la sismicidad.

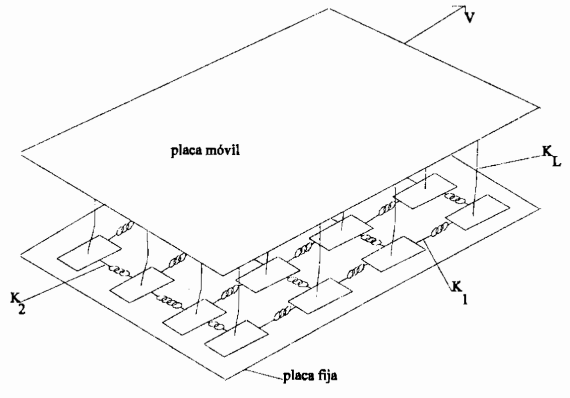


Fig. 1 La geometría del modelo de resorte bloque de Burridge-Knopoff. La fuerza en los bloques se incrementa uniformemente como una respuesta al movimiento relativo de las dos placas.

Conclusiones

La resolución de estos problemas no requiere el uso de matemática compleja y los programas que se realizaron pueden ser reproducidos por cualquier alumno que tenga un conocimiento regular de programación, sin embargo los resultados que se obtienen modelan comportamientos muy complejos que se presentan en la naturaleza, por ello fue que se cumplió con el objetivo planteado. La motivación de los alumnos fue creciendo casi de forma exponencial conforme se avanzaba en la resolución de los problemas y ha hecho que otros alumnos se interesen por participar. Sin embargo, creemos que en futuros talleres más bien se abordarán problemas que no involucren tanto tiempo en su solución y que realmente sean del área de competencia de las carreras que están estudiando los estudiantes.

La experiencia muestra, independientemente de los problemas resueltos, que es posible involucrar a los alumnos en la selección de las experiencias de aprendizaje, el alumno siente que el profesor lo toma en cuenta y modifica sustancialmente sus actitudes y su desempeño, lo cual al final produjo un mejoramiento en las calificaciones de curso y también trajo como resultado que ahora los talleres de Matemáticas sean considerados como una alternativa para mejorar el rendimiento de los alumnos.

Como reflexión final se puede afirmar que se ha mostrado que el involucrar a los alumnos para que ellos hagan propuestas acerca de las experiencias de aprendizaje que serían más adecuadas para ellos mismos puede ser muy enriquecedor, esto puede realizarse en un Taller de Matemáticas como el que se ha descrito pero también si se usan problemas más simples que el que aquí se ha presentado, esto podría hacerse cotidianamente en el aula de clases.

Bibliografía

Toffoli T., Margolus N. *Cellular automata machines*. The MIT Press, Massachusetts, USA. (1987).

Bak P., Tang C., Weisenfeld K. Self-organized criticality. Phys. Rev. A, **38**(1), 364-374. (1988).

Bak P. *How nature works*. Springer-Verlag New York. USA. (1996).

Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K. Self-organized criticality in a continuos, nonconservative cellular automaton modelling earthquakes. Phys. Rev. Lett. **68**(8), 1244-1247. (1992).

Burridge R., Knopoff L. Model and theoretical seismicity. Bull. Seismol. Soc. Am. **57**, 341-371. (1967).

Didáctica de la matemática financiera

Henry Gallardo Perez, Gilma Baron Castiblanco, Mawency Vergel Ortega
Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta
Colombia

Objetivos

- Presentar una metodología didáctica que permita al docente de matemáticas en educación básica y media generar estrategias para la enseñanza de las matemáticas involucrando el modelo económico como parte de la interrelación que debe existir entre al quehacer académico y el entorno social en que está inmerso el estudiante.
- Capacitar a los docentes de matemáticas en las aplicaciones de éstas en el sector económico y financiero.
- Generar espacios de discusión en los que el docente presente metodologías y procedimientos que permitan la construcción de un conocimiento matemático aplicado a la situación actual de su región.

Metodología

El taller se realiza mediante la metodología de taller, teniendo en cuenta la realización sucesiva de las siguientes actividades:

- Motivación: se presentarán actividades que despierten el interés de los participantes en los diferentes tópicos de las matemáticas financieras. Para ello, una vez presentada la situación problema se motivará la discusión de diferentes aspectos relacionados con la misma y se argumentarán las posibles soluciones.
- Formación Teórica: Por medio de exposiciones, trabajos en grupos y solución de talleres se desarrollarán los contenidos temáticos correspondientes a la fundamentación teórica necesaria para abordar el problema presentado.
- Formación práctica: se realizarán talleres de aplicación de la teoría estudiada con la respectiva socialización de los resultados, argumentando las soluciones encontradas. Discusión de estrategias metodológicas para realizar con los estudiantes

Presentación

El currículo en matemáticas en los grados de educación básica debe desarrollarse de manera integrada tanto dentro de la matemática como entre ésta y otras materias y el mundo real.

En la construcción de su conocimiento matemático, el estudiante debe incorporar aplicaciones de la matemática que lo relacionen con el medio social y cultural en el que está inmerso, a fin de que visualice las matemáticas como una estructura sólida, pilar de muchas actividades del saber humano, logrando así su mejor comprensión y por ende un mejor aprendizaje.

Las matemáticas financieras, ofrecen al estudiante, un sinnúmero de posibilidades, que le permiten conectar la matemática con otras asignaturas y con el mundo fuera del aula, y tocan un tema de gran interés y relevancia en el mundo actual.

Desde esta óptica, la aplicación de las matemáticas en el área financiera, permite diseñar actividades que respondan a las nuevas propuestas para la educación básica del programa de renovación curricular, las cuales implican que debe hacerse énfasis en discutir, escribir, leer y escuchar ideas matemáticas; razonar inductiva y deductivamente con proporciones;

resolver problemas abiertos; representar situaciones en forma verbal, numérica y gráfica; desarrollar el sentido numérico y operacional, y muchas otras más.

En este taller, se presenta una propuesta metodológica que permite el estudio de las matemáticas financieras a la luz de las razones expuestas, acompañada de la fundamentación teórica necesaria para su desarrollo.

No se trata aquí de realizar un estudio formal de las matemáticas financieras; solamente se presentan los conocimientos básicos que una persona interesada en el tema debe manejar y algunas aplicaciones importantes enfocadas al sistema económico colombiano. Se pretende así, que con los temas tratados en este módulo y con la metodología desarrollada en el taller, se tenga un concepto claro de la importancia de la utilización de la matemática financiera en nuestras actividades cotidianas y de la forma como se puede motivar a los estudiantes para que comprendan y apliquen estos conceptos.

Introducción

Intereses bancarios, préstamos, hipotecas, financiamientos, comisiones, porcentajes, corretajes,..., las Matemáticas aplicadas a la economía están por todas partes. La mayoría de los problemas referidos a estas cuestiones son sólo aplicaciones de las propiedades de las proporciones y de la regla de tres: si a cien le corresponde un cierto rédito, interés o porcentaje, ¿qué corresponderá a un capital C?

Las tasas de interés ejercen una influencia general en las decisiones tomadas por las empresas y por nosotros en nuestra vida personal. Las compañías pagan cada año millones de pesos por concepto de interés por el uso del dinero que obtienen mediante préstamos. El público gana dinero por sus inversiones en cuentas de ahorros, certificados de depósito y los fondos colocados en el mercado de dinero. Pero también paga por utilizar el dinero que ha pedido prestado para gastos en general, pago de hipotecas, compras con tarjetas de crédito, etc.

Actividades para el desarrollo de la propuesta

Actividades Preliminares

Las siguientes actividades pretenden familiarizar al estudiante con el uso de proporciones para calcular porcentajes de valores nominales de documentos.

- Se preparan dos juegos de tarjetas, uno con el precio de diferentes artículos y el otro con los posibles descuentos que se pueden aplicar a la compra del artículo (según se cancele de contado, a crédito, con cheque, etc.). El jugador en turno escoge un artículo y determina la forma de pago, debe entonces, según la tarjeta de descuento, calcular el valor que debe pagar por dicho artículo (el docente decidirá, según el nivel, si se utiliza o no la calculadora).
- La Bolsa de Valores. El objetivo del juego es simular el comportamiento de empresarios en la bolsa de valores. Su dificultad es un poco mayor que el anterior.

A cada jugador se le asigna una cierta cantidad de dinero ficticio. Se presenta a los jugadores el portafolio de acciones en la bolsa, cada una con su respectivo precio, cada jugador compra el tipo y la cantidad de acciones de su preferencia. En dos bolsas se han colocado sendos juegos de tarjetas, uno con los nombres de las acciones y otro con valores de incremento o decremento porcentual del valor de la acción.

El presidente del juego selecciona, al azar, una acción y posteriormente, también al azar, la tarjeta que indica si su precio subió o bajó y en qué porcentaje. Los jugadores tomarán decisiones acerca de comprar o vender acciones de esa empresa. Una vez concluida la negociación, se procede a seleccionar otra acción y su variación en el precio, los jugadores vuelven a negociar.

El objetivo del juego es obtener la mayor cantidad de dinero representado en efectivo y en el valor de las acciones al precio final.

Actividades y Ejercicios de Aplicación "El Interés Simple"

- El curso se divide en grupos de trabajo. Cada grupo elaborará un problema en el cual se presente el valor inicial de un documento, la tasa de interés (que puede ser real o comercial) la fecha inicial y el plazo (que puede expresarse en años, meses o días). Los problemas formulados se reparten teniendo cuidado de que a un grupo no le corresponda su propio problema. Cada grupo debe resolver el problema asignado y presentar su solución, la cual será discutida por todo el curso.

- Este tipo de actividad se puede repetir con problemas de mayor dificultad. Aquí citamos tres a manera de ejemplo.

  - Un documento de valor final $300.000 se va a descontar 5 meses antes de su vencimiento a la tasa de descuento del 43%. Calcule el valor del descuento bancario y del descuento racional. Compare sus resultados y coméntelos con sus compañeros.

  - Se constituye un certificado de depósito a término de un año por un valor de $800.000 en una cooperativa que paga el 26%. Si el documento es descontado por otra entidad al 38%, cuatro meses antes de su vencimiento, determinar el valor de la transacción.

  - Un comerciante compra artículos por valor de $500.000 y ofrece hacer tres pagos iguales, uno en dos meses, el otro en cuatro meses y el tercero en seis meses. Suponiendo que la tasa de financiación es del 4% mensual (asumir que este es el rendimiento), ¿cuál debe ser el valor de los pagos? Suponga la fecha focal en seis meses.

Actividades y Ejercicios de Aplicación "Interés Compuesto"

Actividad Preliminar: Como motivación para este tema se realizará el juego de "cabeza y cola". Los participantes se organizan en una fila. Aquel que quede en la cola selecciona un número (semilla) y una función exponencial. Por ejemplo la semilla es 3 y la función es elevar al cuadrado. La persona que está a la cabeza debe decir el número 9, la siguiente toma este número y lo eleva al cuadrado, luego debe decir 81, y así sucesivamente. Quien se equivoque pasa a la cola y el juego vuelve a iniciar.

Puede permitírseles el uso de lápiz y papel para realizar los cálculos. De esta manera la semilla no siempre deberá ser un número entero. Puede incluso trabajarse con exponentes racionales.

- Como actividades complementarias se pueden realizar visitas a bancos y cooperativas de la ciudad para averiguar las diferentes modalidades de ahorro que ellos ofrecen, certificados de depósito a término, modalidades de descuento de certificados, etc. (no es conveniente visitar aún las corporaciones que trabajan con sistema UPAC). La visita puede cambiarse por la invitación de un funcionario del banco al aula de clase.

- Con base en la información recolectada, se pueden plantear, individualmente o en grupos, problemas relacionados con situaciones ficticias o reales, en las cuales el estudiante deposite dinero en una cuenta de ahorros, se liquiden los intereses, se determine el monto al cabo de un tiempo determinado, etc.

- Crear una cooperativa de ahorro entre los estudiantes con diferentes modalidades de ahorro y por ende de liquidación de intereses. Se debe estudiar la posibilidad de efectuar préstamos.

- Crear un banco didáctico con dinero simulado que realice actividades financieras similares a las de un banco real y con los estudiantes del curso como clientes.

- A continuación presentamos una serie de problemas típicos, relacionados con estos temas, que pueden ser resueltos por los estudiantes en grupos de trabajo:

  - Cuánto tiempo hay que esperar para que después de depositar $150.000 en una cuenta de ahorros que reconoce 5% trimestral, podamos retirar $588.000? Cuál es el interés efectivo anual?

  - Qué es más conveniente, invertir en una sociedad que garantiza duplicar el capital en 36 meses o depositar en una cuenta de ahorros que reconoce el 30% capitalizable trimestralmente?

  - Un CDT de $100.000 produce intereses de 26% al año, capitalizable trimestralmente. (a) Cuál es el interés total en un período de dos años? (b) Cuál es el interés efectivo anual?. (c) Calcule el monto compuesto al cabo de los dos años.

    (a) A qué tasa efectiva anual se duplica un capital en dos años?

    (b) A qué tasa nominal capitalizable semestralmente se duplica un capital en dos años?

    (c) A qué tasa nominal capitalizable mensualmente se duplica un capital en dos años?

    (d) A qué tasa de interés anual capitalizable trimestre anticipado se duplica un capital en dos años?

  - Un inversionista tiene cuatro posibilidades de invertir su dinero: (a) al 28,5% capitalizable mensualmente, (b) al 30% capitalizable trimestre anticipado, (c) al 34% simple, (d) al 31% capitalizable semestralmente. Cuál es la mejor opción?

  - Una entidad financiera ofrece pagar un interés del 5,7% por trimestre anticipado. Si se depositan $500.000 a término fijo de un año con reinversión de interés, calcular: (a) la tasa efectiva trimestral pagada, (b) la tasa efectiva anual pagada, (c) el monto recibido al final del año.

  - Un comerciante compra mercancías para cancelar así: $100.000 de contado, $350.000 en tres meses y $550.000 en seis meses. Cuál es el precio de contado de la mercancía, si el interés es del 36% C.M.?

  - Una persona debe $150.000 a cinco meses, $300.000 a ocho meses y $600.000 a 12 meses. Si ofrece pagar $400.000 hoy y el resto en seis meses, cuánto debe pagar dentro de seis meses si los intereses están al 21% C.M.?

  - Hallar la tasa de interés efectiva anual que corresponde a una tasa nominal del 28% capitalizable trimestre anticipado.

  - Los TAN en el mercado primario (Títulos de Ahorro Nacional comprados directamente al Banco de la República) son emitidos a $46.948,40 para ser redimidos en 90 días en la suma de $50.000. Hallar (a) la rentabilidad trimestral y la rentabilidad efectiva mensual, (b) calcular las rentabilidades si la retención en la fuente es del 3,7% sobre utilidades.

- Se constituye un CDT a seis meses por un valor de $2.000.000 en un banco que paga el 26% C.M. El documento debe descontarse dos meses antes de su vencimiento. Hallar el valor de la transacción si la entidad financiera que lo descuenta cobra una tasa de descuento del 4% mensual.

Actividades y Ejercicios de Aplicación: "Anualidades"

- Programar visitas con los estudiantes a almacenes que venden a crédito y/o a cooperativas. Averiguar sobre los planes de financiamiento para adquisición de electrodomésticos, vehículos, etc.

- Con base en la información recolectada, los estudiantes en grupos de trabajo elaborarán tablas de amortización para adquisición de electrodomésticos, vehículos, etc.

- Averiguar en entidades financieras acerca de préstamos que se estén realizando para los cuales los pagos sean en forma de anualidades, utilizar esta información para elaborar, en grupos de trabajo, tablas de amortización para amortizar estos préstamos.

- Presentamos a continuación una serie de ejercicios típicos, que los estudiantes pueden desarrollar en grupos de trabajo:

  - Una persona compra un televisor, el cual debe cancelas en 12 cuotas iguales de $63.000 mensuales. Si la tasa de interés es del 32%, hallar el precio de contado del televisor (tenga en cuenta que la primera cuota se paga el día que le entregan el televisor). Elabore también, la correspondiente tabla de amortización

  - Se desea capitalizar un millón de pesos con cuotas iguales de $25.000 mensuales y un interés del 26%. Hallar el numero de cuotas necesarias.

  - Un artículo, cuyo precio de contado es de $300.000, se puede adquirir mediante 12 pagos mensuales de $35.000 al principio de cada mes. Cuál es la tasa efectiva mensual cobrada y cual es la tasa nominal convertible mensualmente?

  - Una persona compra un automóvil en $17.730.000. Le exigen una cuota inicial del 30% y el saldo lo va a cancelar en 48 cuotas iguales mensuales vencidas con un interés del 38% C.M. Calcular el valor de la cuota mensual.

  - Se tiene una deuda de $1.500.000 con vencimiento en dos años y pago mensual de interés al 3%. Con el objeto de poder pagar la deuda a su vencimiento, se ahorran $R en un fondo que paga el 30% C.M. Cuál es el costo de la deuda? (El costo de la deuda es el valor que periódicamente debe disponerse a fin de pagar intereses y amortización)

  - Se solicita un préstamo a la Caja Agraria por un valor de $2.500.000 para ser pagado en 48 cuotas mensuales iguales de $102.000. Hallar la tasa de interés mensual y la tasa efectiva anual.

Actividades y Ejercicios de Aplicación: "Gradientes"

- Averiguar en el sector financiero del municipio acerca de préstamos que se estén realizando cuyos pagos se realicen con base en gradientes.

- En una empresa financiera didáctica simular el préstamo de dinero, liquidando los pagos tanto en forma de anualidades como de gradientes.

- Realizar talleres en grupos para resolver los ejercicios de aplicación planteados a continuación:

- Se constituye un crédito por dos millones de pesos en un banco con un interés del 36% C.M., para cancelar en 12 cuotas mensuales

  a. Elaborar la tabla de amortización si las doce cuotas son iguales

  b. Elaborar la tabla de amortización si las cuotas decrecen geométricamente con G=0.08

  c. Elaborar la tabla de amortización si los intereses son mes anticipado y cada mes se hacen abonos iguales al capital

- Hallar el valor final de una serie de 12 depósitos que crecen linealmente $8.000; si el primer depósito es de $100.000, los depósitos son vencidos y la tasa de interés efectiva es del 12%

- Una persona desea reunir $1.000.000 mediante depósitos trimestrales en tres años. Si estima que cada depósito trimestral lo podrá incrementar en $2.000 y la tasa es del 21% C:T:, cual debe ser el valor del depósito inicial?

- Se va a amortizar una deuda de $300.000 en un año mediante pagos mensuales con interés de 36,8% C.M., entendiéndose que la cuota será incrementada todos los meses en un 10%. Determine el valor de la octava cuota y su distribución entre intereses y abono a capital

- Demuestre que las fórmulas que se presentan para el valor presente y el valor futuro de gradientes aritméticos y geométricos son válidas. Siga un proceso análogo al que se utilizó en el caso de anualidades.

- Una entidad financiera le presta a un cliente $5.000.000 con un interés del 38% C.M. El deudor tiene un plazo de cuatro años para amortizar la deuda. Las cuotas mensuales se incrementan en un 5% cada mes durante el período de la deuda. Hallar el valor de la primera cuota.

Referencias bibliográficas

BACA, Guillermo. Las Matemáticas Financieras y los Sistemas, Comex, Bogotá, 1985

CARDONA, Alberto. Matemáticas Financieras: Enfoque Práctico, McGraw Hill, Bogotá, 1990

GALLARDO, Henry. Tópicos en Matemáticas Financieras, UPTC-CEP, Tunja, 1994

GOMEZ, Alberto. Matemáticas Financieras Aplicadas al Sistema Financiero Colombiano, Tecnomundo, Armenia, 1987

PORTUS, Lincoyán. Matemáticas Financieras, 3ª ed., McGraw Hill, Bogotá, 1990.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Matemáticas: Propuesta de Programas Curriculares, Santafé de Bogotá, 1998.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Educación Matemática en el Nivel Medio, Santafé de Bogotá, 1993.

VASCO, Carlos. Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas, MEN, Santafé de Bogotá, 1994.

Experiencias en el uso de formas novedosas en la enseñanza de la matemática

Jorge Luis Domínguez González
Departamento de Matemática General, Universidad de Matanzas
Cuba

Resumen

En el artículo se expone la experiencia de los autores en el uso de formas novedosas de enseñanza de la Matemática en el nivel terciario, como: las clases mixtas y las clases talleres. Además se ofrecen las opiniones de los estudiantes al respecto.

Introducción

La política educacional de nuestro país se fundamenta en los principios martianos acerca de la educación de las nuevas generaciones. Ella tiene como finalidad formar a nuestro relevo en los principios científicos, ideológicos y morales del socialismo, convirtiéndolos en convicciones personales y hábitos de conducta diaria, promoviendo hombres plenamente desarrollados, aptos para vivir, trabajar y proyectarse en la sociedad en que vive.

Para lograr tales fines se requiere que nuestra enseñanza superior desempeñe un papel cada vez más destacado y exigente como centro formador multilateral de profesionales. La revolución científico-técnica contemporánea, nos pone la meta de que los graduados universitarios prosigan la elevación de sus peldaños científico-técnicos de manera consciente y sistemática, convirtiendo su rigor científico-investigativo en la razón de ser transformadores de la sociedad presente y futura.

Fundamentamos nuestro trabajo en la necesidad de que los estudiantes del nivel superior. no sólo reciban conocimientos sólidos en las distintas asignaturas ; sino además, conformen en su perfil, hábitos y destrezas en su autosuperación, favoreciendo su disposición de incrementar constantemente sus conocimientos y motivándolos hacia la creatividad, lo que contribuirá a desarrollar sus capacidades para resolver los problemas prácticos que se presentarán en el ejercicio de su profesión y en su labor cientíco-investigativa.

Desarrollo

Partimos del hecho de que el trabajo docente constituye el fundamento del proceso docente-educativo en nuestro sistema educacional. De él depende la formación integral de nuestros especialistas y la conjugación instrucción-educación. Este todo es logrado a través de las distintas formas de enseñanza que intervienen en dicho proceso, las cuáles permiten la transmisión y adquisición de conocimientos, la formación de convicciones, hábitos, destrezas y habilidades que les serán útiles en el enfrentamiento con la vida cotidiana como especialistas futuros; de estas formas de enseñanza las principales que utilizamos en nuestra disciplina son: conferencias, clases mixtas, clases prácticas, talleres, clases de evaluación y consultas. Analicemos cada una de ellas:

La conferencia constituye la forma rectora del proceso docente en la Educación Superior, consiste en la exposición lógica, concatenada y con unidad de un tema específico, en una disciplina determinada. Esta debe considerarse como la esencia en el desarrollo de la capacidad cognoscitiva del educando, de las formas de percibir y adquirir los nuevos conocimientos, de su interpretación y razonamiento de su creatividad, generalización y aplicación. Además, el éxito del trabajo independiente está estrechamente relacionado con la habilidad del docente en la impartición de la conferencia; de modo que el trabajo independiente del estudiante sea estable desde su primer encuentro con las asignaturas a las que se enfrentará.

La clase mixta es una forma más activa que la conferencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje; pues a través de ella se logra que los estudiantes trabajen independientemente para prepararla adecuadamente. En ella, el estudiante se ve precisado a utilizar las notas de la conferencia, textos orientados, bibliografía complementaria, consultas, etc. lográndose que se haga un estudio más profundo del contenido indicado, para poder ser discutido en el aula. Además en esta los estudiantes adquieren hábitos, destrezas y habilidades para la expresión oral y el desenvolvimiento ante su grupo de estudio.

El carácter de la preparación de los estudiantes para estas clases, se determinan por sus objetivos y por la complejidad del material objeto de la clase. Sólo será posible una verdadera profundización de los conocimientos si ha existido una sólida orientación y un trabajo constante por parte del estudiante bajo el control riguroso del profesor, de manera que el mismo intervenga con soltura y fluidez en el desarrollo de la actividad.

Queremos destacar que en nuestro caso en particular, en cada tema localizamos los núcleos básicos del conocimientos, es decir, las definiciones, teoremas y propiedades Matemáticas esenciales del tema, y estas son expuestas por el profesor en la conferencia; el resto de los contenidos del tema son introducidos en las clases mixtas, donde en lo fundamental son planteados y discutidos por los propios estudiantes, después de haber realizado su estudio independiente por los textos básicos y complementarios, orientados por el profesor en la conferencia.

¿Qué opinan los estudiantes de estas formas de enseñanza?.

Los estudiantes opinan, en encuesta realizada al respecto, que para ellos en el primer año de una carrera universitaria les ha resultado muy buena estás formas de abordar los nuevos conocimientos (sobre todo en esta asignatura), pues no reciben una clase atiborrada de definiciones, teoremas o propiedades, etc., sino que el profesor explica, demuestra gráfica, ejemplifica, etc. acerca del concepto fundamental del tema y nos da una orientación detallada de la bibliografía a utilizar para el estudio del tema y prepararnos adecuadamente para las clases mixtas, y demás actividades docentes. En particular piensan que la clase mixta es de su agrado, pues en vez de estar como simples espectadores escuchando al profesor; ellos vienen preparados a exponer y discutir sus ideas, apoyados siempre por el profesor. Esto también los forzó a mantener un estudio independiente constante desde el comienzo de cada semestre.

La clase práctica es una de las formas de enseñanza que nos sirve para ejercitar, consolidar, a la vez que para diagnosticar el grado de efectividad de nuestra actividad docente. En ella el profesor aclara las dudas individuales y colectivas; realiza conclusiones en cada problema, una vez agotado por los estudiantes; controlará y evaluará los resultados parciales y finales de la clase, y en sus conclusiones generalizará sobre los métodos utilizados, su efectividad o no, las dificultades principales y orientará o recomendará métodos para trabajos independientes que se realice posteriormente, etc.

El taller es una forma de enseñanza que requiere una participación más activa; nos permite relacionar, generalizar y aplicar los conocimientos adquiridos en un bloque temático; así como manejar los fenómenos, sus causas y además sacar conclusiones adecuadas. Esta presupone mayor autopreparación, más trabajo independiente y más independencia en el estudiante del nivel superior; también estimula la capacidad creadora de los estudiantes. Nosotros en particular, en las clases prácticas, se controla estrictamente el estudio realizado, mediante la autopreparación orientada y el desenvolvimiento en la clase, pero como no todas son evaluativas, contribuyen a que los estudiantes se muestren más confiados, pregunten sus dudas y se acerquen más al profesor. Los talleres tienen entre sus objetivos esenciales la modelación y resolución de problemas del perfil profesional. Son una actividad integradora de los contenidos del tema y conllevan a que los estudiantes tengan que analizar cual es la vía de solución adecuada.

¿Cuál es la opinión de los estudiantes sobre estas formas de enseñanza?.

Ellos plantean que se sienten muy cómodos en las clases prácticas, pues aunque el profesor les controla el estudio independiente realizado por ellos, no sienten temor al plantear sus dudas o ir a la pizarra a resolver un ejercicio (aunque no lo hayan terminado en la libreta), pues no se ven presionados por una evaluación de sus conocimientos. Por lo que en esta actividad docente adquieren hábitos y habilidades en los ejercicios tipos de la asignatura. Y en los talleres aunque son evaluados, se orientan desde la primera clase del tema y pueden ir resolviendo los ejercicios poco a poco, en caso de alguna dificultad que no pueden resolver por sí solos, cuentan con la ayuda del profesor.

La clase de evaluación. En esta forma de enseñanza se comprueban fundamentalmente, los objetivos de los temas; implicando un nivel mayor de interacción y sistematización de los conocimientos y habilidades de los estudiantes en un bloque temático determinado. Con esta clase el profesor comprueba el logro de los objetivos de uno o varios temas de una asignatura; así como los objetivos generales de la misma, en la medida en que estos deben irse logrando durante el proceso docente-educativo.
La consulta nos sirve para apoyar el resto de las formas de enseñanza, pues en ella el profesor puntualiza y recomienda como realizar el estudio independiente orientado en la conferencia, discute los ejercicios que le fueron indicados en la clase práctica a los estudiantes con dificultades, discute ejercicios más complejos con estudiantes aventajados, ayuda a prepararse a los estudiantes para la exposición de los nuevos contenidos en las clases mixtas, el profesor puede también dar algunas orientaciones con respecto al taller, además de aclarar las dudas generales del colectivo de estudiantes.

En nuestro caso la clase de evaluación se realiza, casi siempre, al finalizar un bloque temático, para comprobar el cumplimiento de los objetivos específicos y particulares del tema; se realiza de forma escrita y siempre incluimos un problema a modelar, afín a la especialidad. En el caso de as consultas, como impartimos clases en primer año, en el primer semestre tenemos consultas semanales, dedicadas sobre todo a enseñar como estudiar la Matemática, como hacer un uso adecuado de la bibliografía, tratar de eliminar las dificultades que traen de enseñanza media. Posteriormente se dan quincenalmente o simplemente cuando el estudiante o el profesor la necesite.

¿Qué piensan los estudiantes de estas formas de enseñanza?.

Ellos están conformes con estas clases de evaluación, pues se realizan cuando ya han alcanzado las habilidades necesarias en los aspectos esenciales del tema; es decir, cuando ya han transitado por el resto de las formas de enseñanza y han madurado los conocimientos. En cuanto la consulta, para ellos, es la forma de enseñanza más importante en los inicios de su vida universitaria, por la gran ayuda y apoyo que les brinda, no sólo en conocimientos, sino también en aprender a estudiar, e incluso a comportarse en esta enseñanza nueva para ellos.

Conclusiones

La dirección de nuestro país ha planteado en reiteradas ocasiones, que el tesoro más preciado de la humanidad, lo constituye el hombre; y este cumplirá su cometido como tal, si nuestra sociedad contemporánea y dentro de ella, la escuela superior, juega su verdadero papel en la formación integral del hombre, en correspondencia de dicha línea trazada.

Para lograr esa transformación en el hombre, hay que desarrollar en el mismo las condiciones necesarias, para que de un simple hábito común, se convierta en una condición del ser hombre en la época actual. Lógicamente no podemos ver la formación de esta nueva generación como un fenómeno aislado, y entre las condiciones mínimas exigidas para el logro de tal objetivo, se nos impone a necesidad de que nuestra enseñanza cumpla con determinadas reglas políticas, pedagógicas, profilácticas y didácticas que arrojen la gestación, desarrollo y formación de ese hombre necesario.

La práctica pedagógica nos convence de que los conocimientos logrados por los propios esfuerzos de los estudiantes, en muchas ocasiones, son más sólidos que los conocimientos dados, y de que la habilidad de obtener individualmente nuevos hechos contribuye a la formación del pensamiento creador.

La organización del proceso docente-educativo y el uso de formas de enseñanza, como las que proponemos en este trabajo, contribuyen en gran medida a perfeccionar el estudio independiente y con ello a adquirir mayor solidez en sus conocimientos.

Bibliografía

Klimberg, L. Introducción a la didáctica general. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1980

Talízina, N.F. Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior. Univ. de la Habana, 1984

Tomaschewski, K. Didáctica general. Ed. Grijalbo, México D.F., 1976.

Vecino Alegret, F. Algunas tendencias en el desarrollo de la Educación Superior. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1986.

Verrier Rodríguez, R. y otros. Algunos temas sobre didáctica de la Educación Superior. MES. La Habana, 1986.

Resolución de Problemas de forma participativa: una motivación por la matemática

Angela León Mecías, Miriam Crespo Estrada
Depto. de Matemática de la Facultad de Ingeniería Civil Instituto Superior Politécnico José A. Echeverría
Cuba

Sinopsis

Imbuidos en el perfeccionamiento de nuestro plan de estudios proponemos el diseño de la asignatura "Series, Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y Cálculo Variacional (tercer año Ingeniería Civil) tomando como generatriz del conocimiento la Enseñanza Problémica. El proceso de enseñanza - aprendizaje de la asignatura en su totalidad se organiza haciendo uso del método problémico investigativo, donde el problema central es la resolución de un Proyecto de Curso. Los problemas que se plantean son problemas abiertos de la especialidad, uno por equipo y se van resolviendo a lo largo de todo el semestre en actividades concebidas de forma participativa, garantizando el control y la retroalimentación por parte de profesores y estudiantes. A partir del orden lógico en que se deben resolver las tareas del proyecto , se propone una nueva estructuración del contenido de la asignatura. Para resolver el problema que se le plantea , el estudiante no sólo hace uso de los conocimientos adquiridos en Matemáticas y los que recibe en la asignatura en cuestión si no que utiliza conocimientos de Física del curso anterior, por lo que estamos trabajando para que el proyecto constituya también parte de la evaluación final de Física que en el primer semestre de tercer año no tiene examen final.

Introducción

Como parte del perfeccionamiento de los planes y programas de estudio en la Educación Superior cubana se implementó a partir del año 1990 el plan de estudio C siendo la interdisciplinariedad uno de sus logros fundamentales.Teniendo en cuenta los nuevos enfoques pedagógicos y psicológicos que en la actualidad constituyen fundamentos teóricos importantes de todo proceso docente-educativo, nos encontramos desarrollando la primera variante de perfeccionamiento del plan C. Como parte de este programa,en el tercer año de la especialidad de ingeniería civil se imparte la asignatura "Series, Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y Cálculo Variacional", donde la vinculación de la Matemática con temas de la especialidad y otras ciencias básicas como la física tiene un peso importante y una de las vías donde se materializa esta vinculación es en la realización de un

Proyecto de curso que forma parte del sistema de evaluación de la asignatura. La experiencia acumulada a lo largo de cuatro cursos de impartición de la asignatura, nos ha demostrado que debido a una serie de factores objetivos y subjetivos el estudiante no se encuentra lo suficientemente motivado por la asignatura, por lo que dejan la realización del proyecto para el final, lo cual influye en detrimento

De la calidad de los trabajos

Cómo estructurar el contenido de la asignatura de forma que el estudiante reciba una orientación efectiva para que, desde el primer día comience a resolver las tareas que emanan del proyecto?. Cómo lograr que el proyecto de curso constituya una motivación para el aprendizaje de los contenidos?. Cómo lograr motivar a los estudiantes en la ejecución del proyecto?. Cómo la aplicación consecuente de los métodos participativos y el uso de la enseñanza problémica como generatríz fundamental del conocimiento pueden ayudar a organizar la ejecución y control del proceso de enseñanza-aprendizaje?. Son estas interrogantes a las que pretendemos dar respuesta con nuestro trabajo. Reflexiones y propuestas

La asignatura "Series, Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y Cálculo Variacional" que se imparte en el tercer año de la especialidad de Ingenierá Civil vió la luz a partir del año 1990 con la implementación del plan de estudio C, su concepción estuvo permeada por el propósito de lograr una alta vinculación de la matemática con diferentes temas de la especialidad y otras ciencias básicas de modo que el estudiante sienta la necesidad de la matemática como herramienta y soporte para enfrentar y resolver problemas que en su perfil se le presenten. Con el fin de ver instrumentada esta vinculación y de poder controlarla y evaluarla se concibió como parte de la evaluación final un proyecto de curso donde el estudiante debe modelar, identificar, resolver y calcular problemas relacionados con la especialidad.

Como su nombre lo indica la asignatura reune en si misma tres temas del conocimiento matemático ;Series numéricas y de funciones, Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (E.D.D.P.) y Cálculo Variacional. Estos temas en su integración permiten la multiplicidad de descripción de un fenómeno como rasgo esencial en el desarrollo del pensamiento científico.

Tomando como base la experiencia acumulada a lo largo de varios cursos de impartición de la asignatura, detectamos que debido a la alta carga docente de los estudiantes de tercer año, a la presión que ejercen sobre ellos las asignaturas de la especialidad, a la estructuración actual de los contenidos de nuestra asignatura y a la forma de impartirla , los estudiantes no estaban motivados por la solución del proyecto, dejándolo para el final , repercutiendo esto de forma negativa en la

Calidad de los mismos

En el abordaje de los problemas hay bloqueo o se hace evidente en las señales escritas por los estudiantes en torno a la solución de poblemas, que no hay una organización efectiva del conocimiento. Siempre digo que, que un estudiante pueda resolver efectivamente un problema es porque tiene una cierta organización del conocimiento, pero el recíproco no se cumple, de ahí que se trate de inducir a una estructuración del conocimiento eficiente. (Hernández, H.[4]).

Pensamos entonces que concibiendo un proyecto de curso que abarcara de forma lógica e integradora los contenidos que se imparten en la asignatura, que se pudiera ir realizando por etapas, éste se convertiría en la motivación de los estudiantes por aprender y a su vez consolidar los conocimientos y habilidades matemáticas que se pretenden lograr con la asignatura. El proyecto de curso pasaría a ser el centro del proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura. Esto por supuesto traería aparejado una nueva estructuración de los

Contenidos

En el diseño original de la asignatura, se comienza con el tema "Series", el cual mantiene su ubicación , lo que argumentaremos posteriormente, luego se imparte el tema E.D.D.P. donde a partir de las leyes de conservación de la física se deducen los tipos característicos de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (se incluyen aspectos teóricos importantes) y se da como método de solución el método de Fourier aplicándolo a problemas relacionados con la especialidad.

Por último se imparte el tema Introducción al Cálculo Variacional , el cual se introduce como una forma alternativa de modelar problemas de la práctica en el caso en que el modelo operacional no pueda ser resuelto, junto a otros postulados se demuestra cierta relación de equivalencia entre los dos modelos y se da como método de solución del problema variacional el método de Ritz.

Esta estructuración del contenido adolece de las siguientes deficiencias

1. El deducir las E.D.D.P. a partir de las leyes de conservación de la física es un proceso engorroso, que necesita de maduración y para el cual el estudiante no está preparado, por lo que se desorienta y se desmotiva, al no poder interactuar con el profesor , se convierte en un sujeto pasivo.

2. Se pierde la posibilidad de relacionar de forma natural y asequible para el estudiante los dos últimos temas: a partir de la demostración de la equivalencia entre las dos vías de modelar un problema , partiendo de la formulación variacional , llegar a la opercional, lo que sinifica obtener el modelo dado por una ecuación diferencial. Conocedores de la materia saben que realizar el proceso a la inversa no siempre es fácil y requiere de conocimientos matemáticos más profundos.

3. Lo anterior repercute en que no se pueda realizar una integración armónica en las tareas del proyecto ó que el estudiante deba esperar terminar la asignatura para comenzar a realizar el proyecto.

En la presente propuesta , al enfocar el estudio de los diferentes temas partiendo de la necesidad de resolver problemas de la especialidad y para superar las deficiencias mencionadas proponemos que luego del tema Series (por lógica matemática debe ir primero ya que los métodos de solución variacionales y operacionales que se tratan en los temas posteriores necesitan de los conocimientos de Series), se imparta el tema Introducción al Cálculo Variacional ya que los estudiantes con ayuda de bibliografía de la especialidad y de conocimientos adquiridos en Física en segundo año pueden llegar sin mucha dificultad al modelo variacional del problema (encontrar el mínimo del funcional de energía), por otra parte al demostrar la condición necesaria para la existencia de extremo del funcional se llega a una Ecuación Diferencial Ordinaria ó en Derivadas Parciales por lo que de forma natural se motiva el estudio del tema E.D.D.P. Es bueno señalar también que este orden permite al estudiante interiorizar mejor el método de Ritz que constituye la base para el método de Elementos Finitos que se imparte en el segundo semestre como una vía de resolver numéricamente el problema y es muy usado en el campo de la ingeniería civil. Fundamentación Teórica Compartiendo la aseveración hecha por Hernández , H.[4] "Mi trabajo de muchos años como profesora e investigadora, a la vez que asesora académica del MES de la República de Cuba, me ha llevado a la convicción de que tanto los problemas identificados anteriormente, como los que a diario afrontamos en las aulas universitarias o de niveles precedentes, reclaman para su solución de la determinación de bases teóricas". Tomando como sostén teórico y metodológico la teoría de la actividad (Leontiev), y La teoría de formación por etapas de las aciones mentales (Galperin) ,que refiere que una organización correcta del proceso de aprendizaje debe garantizar las tres componentes funcionales de toda actividad: la motivadora , la orientadora, la ejecutora y la de control y apoyándonos en lo planteado por R. Glaser en la Conferencia impartida en la Universidad de La Habana (1992) donde identifica tres aspectos fundamentales en el proceso docente :

El estudiante como centro del proceso, la organización del conocimiento y la solución de problemas, acometimos nuestro trabajo. Considerando que es nuestro objetivo formar ingenieros que una vez fuera de nuestras universidades sean capaces de enfrentar y resolver problemas de la práctica, dimos prioridad número uno al tercer aspecto planteado por Glaser, y a partir de éste obtuvimos los otros dos. Por esta razón centramos nuestra asignatura alrededor del problema : "Resolver el proyecto de curso", (entiéndase resolver un problema abierto de la especialidad) que conduce inevitablemente a un cambio en la concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Esto nos llevó a organizar la asignatura tomando como generatríz del conocimiento la enseñanza problémica, donde sin menoscabo de las tareas encaminadas al desarrollo de habilidades cognoscitivas, el estudiante es sometido sistemáticamente al enfrentamiento de tareas que lo hacen pensar explorar, contrastar , formular hipótesis y verificar los resultados.

Con esto brindamos al estudiante no sólo conocimientos matemáticos teóricos en forma de definiciones , teoremas y métodos sino además, estrategias generales para enfrentar problemas de forma efectiva. Por otra parte fue necesario hacer cambios en las formas de enseñanza tradicionales para que los estudiantes tengan oportunidad de emitir y confrontar sus ideas en el colectivo y para que el profesor pueda ir reorientando y controlando el trabajo.

Decidimos por ello emplear el Método Problémico Investigativo para organizar la actividad creadora de los estudiantes, los cuales resolverán problemas ya resueltos por la sociedad pero que son nuevos para ellos. Este método concibe la solución del problema en tres fases:

1.- Fase preparatoria.

2.- Fase ejecutiva.

3.- Fase evaluativa.

En nuestra situación específica partimos del problema "Resolver el Proyecto de Curso" por lo que la fase preparatoria se desarrolla en la primera actividad de la asignatura (Conferencia #1) donde se debe en primer lugar organizar a los estudiantes por equipos y mostrar la colección de problemas a resolver , esto permite que los estudiantes puedan elegir en que tema les gustaría trabajar . En la segunda conferencia deben traer el problema elegido

Proyecto de Curso: "Torsión de barras prismáticas"

Objetivos:

Modelar, por dos vías matemáticas diferentes un problema simple de la mecánica de los cuerpos deformables. Resolverlo y calcularlo utilizando los métodos matemáticos correspondientes.

Situación Problémica:

Se considera una barra prismática que trabaja a torsión bajo la acción de pares de fuerza aplicados en los extremos de la barra. Según Saint-Vennant la deformación de la barra prismática sometida a torsión consiste en:

1) Una rotación de las secciones transversales.

2) Un alabeo de las secciones transversales en desplazamientos.

Problema Docente:

Modelar matemáticamente el problema de la torsión de barras prismáticas (por la vía operacional y variacional, demostrar su equivalencia). Resolver el problema de la torsión de barras prismáticas en tensiones.

Observación

Este proyecto se presenta en diferentes variantes al considerar la barra con diferentes secciones transversal

- Uso de la Enseñanza Problémica como generatríz del conocimiento.
- Análisis de la evaluación como proceso donde se implica al estudiante.(el estudiante resolverá el proyecto por etapas, que se desarrollarán y controlorán a lo largo de todo el semestre).
- Vinculación del conocimiento con necesidades del desarrollo social (resolución de problemas).
- Participación del estudiante en la definición de objetivos y contenidos.

Por otro lado al ser la tarea planteada un problema relacionado con su especialidad y constituir parte de su evaluación final (proyectos excelentes pueden eximir de la prueba final), la disposición del estudiante a aprender los nuevos conocimientos es buena.(parte motivadora del proceso).

Esta nueva forma de enfocar la asignatura nos exigió además una nueva estructuración de los contenidos.

Relación Proyecto de Curso-Contenido de la asignatura

Con el esquema se hace más claro la propuesta hecha anteriormente en cuanto a la secuencia de los temas que se impartirán en la asignatura: Tema 1: Series. Tema 2: Introducción al Cálculo Variacional. Tema 3: Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.

Actividades de cada tema, su forma organizativa, como tributan al proyecto

Tema 1 : Series Numéricas y de funciones.

6 Conferencias

6 Clases Prácticas

1 Taller

Prueba Parcial # 1.

En el taller que cierra el tema y dura cuatro horas , el profesor escoge al equipo que debe resolver el problema de consolidación de suelos para que exponga la dedución de la ecuación diferencial que modela el problema (es sencilla); en la primera media hora. Luego reagrupa los equipos de manera que todo el grupo quede organizado en tres equipos, esta reorganización se hace atendiendo al tipo de ecuación diferencial en derivadas parciales que modelará el problema planteado en el proyecto de curso. Por supuesto que en este momento esto sólo lo conoce el profesor por lo que deberá usar su creatividad para que los equipos queden de la forma deseada. Los ejercicios que se orientan son similares al que mostraremos a continuación.

Ejercicio modelo

Para el siguiente problema de contorno con las condiciones de frontera de tipo Dirichlet, la solución es de la forma:

Determine para que sea solución del problema planteado. El planteamiento del ejercicio no se hace de forma tan fría sino que se dan las siguientes orientaciones generales:

1. Demostrar que la solución planteada satisface la ecuación diferencial del modelo dado.
2. Demostrar que se cumplen las condiciones iniciales y de frontera.
3. Interpretar la igualdad a partir de la cual se calculará el coeficiente de la serie.
4. Calcular el coeficiente.
5. Interpretar físicamente la solución. (*)

Ejercicio modelo

Para el siguiente problema de contorno con las condiciones de frontera de tipo Dirichlet la solución es de la forma:

Determine para que sea solución del problema planteado.

El planteamiento del ejercicio no se hace de forma tan fría sino que se dan las siguientes orientaciones generales:

1. Demostrar que la solución planteada satisface la ecuación diferencial del modelo dado.
2. Demostrar que se cumplen las condiciones iniciales y de frontera.
3. Interpretar la igualdad a partir de la cual se calculará el coeficiente de la serie.
4. Calcular el coeficiente.
5. Interpretar fisicamente la solución.

El taller se desarrolla usando el método de discusión (discusión en pequeños grupos y discusión plenaria). Este tipo de ejercicio es bien interesante y hemos comprobado en la práctica que al darle al estudiante la solución , éste se motiva e indaga como llegar a ella (tercer tema de la asignatura) por otro lado al hacer comentarios acerca de las exigencias que debe cumplir una función para satisfacer la ecuación diferencial introdicimos la posibilidad de existencia de otra vía de modelar el problema real, con lo cual estamos motivando el siguiente tema de la asignatura.

Tema 2 :Introducción al Cálculo Variacional.

3 Conferencias.

2 Clases Prácticas.

1 Taller.

El diseño del tema se hace usando métodos participativos como se muestra a continuación

Actividad Modo de Enseñanza Método a emplear N0. 1

Conferencia

Método Problémico

(exposición problémica)

N0.2 Conferencia

Método Problémico

(conversación heurística)

N0.3 Conferencia Método Problémico

(conversación heurística y búsqueda parcial)

N0.4 Clase Práctica

Método de discusión

(técnica de la rejilla)

N0.5 Clase Práctica Método de discusión

(Discusión en pequeños grupos y discusión plenaria)

En el taller que se incluyó en el recién finalizado semestre y que dura también cuatro horas, cada equipo presentará la obtención de la formulación variacional del problema físico, se escoge uno para que exponga, aquí es donde deben aplicar los conocimientos de física. Luego se ponen a resolver su problema por el método de Ritz.

Tema 3 :Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.

5 Conferencias.

3 Clases Prácticas.

1 Taller

Prueba Parcial # 2.

En el taller correspondiente a este tema se discutirá el cálculo por el método de Fourier de la solución del modelo operacional de los diferentes proyectos, el trabajo también se realiza empleando el método de discusión (discusión en pequeños grupos y discusión plenaria).

Finalmente en sesión plenaria en una actividad de dos horas se realiza la discusión de proyectos. Los alumnos con buen curso y proyectos excelentes quedan exonerados de la prueba final oral. Conclusiones Esta experiencia fue realizada en el primer semestre del curso 98-99 y podemos decir que la calidad de los trabajos fue superior, desde un principio los estudiantes sabían a dónde querían llegar (de aquí la importancia de la base orientadora de la acción), y se motivaron con la resolución de la tarea . Algunos pretenden profundizar en la misma para continuarlo como trabajo de tesis. Se logró un mayor dominio por parte de los estudiantes del Método de Ritz, se vieron en la necesidad de consultar bibliografía especializada. La mayor dificultad estuvo en interpretar correctamente los principios variacionales para formular matemáticamente por esta vía los problemas. Debemos señalar que hay proyectos menos complejos que el que expusimos como ejemplo, para estudiantes de menor rendimiento. Al estar diseñadas las clases usando métodos participativos y trabajo en grupos se obliga al estudiante a pensar y se involucra en la construcción del conocimiento, lo que permite incidir en él en la formación y fortalecimiento de valores tales como el colectivismo, la solidaridad, la responsabilidad entre otros.

Nuestra propuesta constituye una alternativa en la búsqueda de soluciones a los problemas que aún subsisten en el aprendizaje de la matemática, lo expuesto es sólo una parte del trabajo de perfeccionamiento que se acomete en la asignatura, donde nos queda mucho por hacer, sin pretender dar una fórmula mágica.

Bibliografía

Crespo, M.:"La motivación y el aprendizaje, una propuesta de estrategia para fomentar la motivación por la Matemática en la carrera de Arquitectura, INFOMADI 98, ISPJAE.

Delgado, J.R.: "Apuntes sobre la Enseñanza Problémica y la Resolución de Problemas".CEPES.

Delgado, J.R.: "Las Habilidades Generales Matemáticas".Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre la formación de profesores e investigación en Matemática Educativa, La Habana, 1995.

Hernández H.: " Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana".

Majmutov, M.I.:"La Enseñanza Problémica", 1983.

Los Métodos Participativos como Estrategia Docente en la Formación de la Responsabilidad

Hugo Roberto Mesa Sánchez
Dpto. de Matemática de la facultad de Ing. Civil, I. S. P. J. A. E
Cuba

Gladys Viña Pérez
C. E. P. E. S., U. H.
Cuba

Introducción

El trabajo que abordamos pretende contribuir a través de una estrategia docente a la formación de valores en los jóvenes universitarios, específicamente la responsabilidad, definiéndola como valor de la manera siguiente: es la tendencia de la personalidad a actuar en correspondencia con el sentido del deber ante sí mismo y la sociedad como una necesidad interna, que es fuente de vivencias positivas y se realiza independientemente de la obligación externa, a partir de la comprensión de su necesidad.

Implica la calidad en el cumplimiento de las tareas, vencer los obstáculos para llevarlos a sus últimas consecuencias, así como la disposición a responder por sus actos [11].

Entendiendo que responsabilidad del estudiante en su formación profesional es el cumplimiento de la mejor manera posible de sus deberes como estudiante (estudio sistemático, tareas docentes, actividad laboral e investigativa, trabajo independiente, compromiso con su entorno social) como necesidad interna que se asume de forma voluntaria y consciente y despierta vivencias positivas, así como la disposición a responder por sus actos [11]. Para trabajar con este concepto entendemos por definición operacional de la responsabilidad del estudiante en su formación profesional el estudio de los aspectos que componen el valor responsabilidad: componente cognitivo, valorativo-motivacional, y conductual, así como la autocrítica y autoperfeccionamiento de los sujetos de la muestra en relación con el valor analizado.

En este trabajo, a partir de un diagnóstico inicial relacionado con el desarrollo de la responsabilidad, se evaluarán los resultados que ejerce la "concepción e instrumentación del proceso enseñanza-aprendizaje" basado en una enseñanza activa, dialógica, reflexiva e interactiva lo que equivale a utilizar los métodos participativos como estrategia en el desarrollo de la responsabilidad; enmarcado en una concepción teórico-metodológica basada en los postulados del Enfoque Histórico-Cultural, en particular, los enunciados por L.S. Vigotsky y la Teoría de la Actividad a partir de la concepción de la formación por etapas de las acciones mentales de P. Ya Galperin y colaboradores.

La relevancia teórica del trabajo propuesto se refleja en el hecho de que a diferencia de estudios anteriores, los cuales han abordado sólo los aspectos cognoscitivos en la formación del estudiante y que han dejado a la espontaneidad los aspectos afectivos de la personalidad, este pretende trabajar ambos aspectos a través de una estrategia docente concebida conscientemente que propicie el desarrollo de la responsabilidad a través de la asimilación de los contenidos y la formación de las habilidades. Esto permitirá una mejor comprensión teórica del proceso de formación en su conjunto y de las posibilidades que brinda una docencia participativa basada en el Enfoque Histórico-Cultural y de la Actividad a tales fines.

La importancia práctica está dada por los datos y experiencias obtenidas que podrán permitir llegar a estrategias metodológicas para el trabajo de esta temática.

Los objetivos del trabajo son

1. Constatar el nivel de desarrollo de la responsabilidad en jóvenes estudiantes de la Educación Superior y determinar que componentes psicológicos de los que intervienen en la responsabilidad alcanzan mayor o menor desarrollo.

2. Reelaborar los objetivos y reestructurar los contenidos del programa de las asignaturas para favorecer la utilización de los métodos participativos teniendo en cuenta la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales y algunos postulados del Enfoque Histórico-Cultural.

3. Elaborar un sistema de tareas docentes a través de los cuales se contribuya conscientemente a elevar la calidad del aprendizaje y el desarrollo de la responsabilidad.

Para dar cumplimiento a los anteriores objetivos se realizaron las siguientes tareas:

- Diagnóstico del desarrollo de la responsabilidad en los estudiantes de la muestra.

Se aplicó el cuestionario a estudiantes donde se indagó acerca de: componente cognitivo, grado de autocrítica, tendencia al autoperfeccionamiento, circunstancias que influyen en una conducta responsable.

También se valoraron dilemas morales (conflictos cotidianos de la vida estudiantil para indagar acerca de los motivos que determinan las acciones, grado de crítica, implicación afectiva e intención conductual.

Para lograr el segundo objetivo se realizó la reelaboración de los objetivos y la reestructuración de los contenidos.

Modelo de los objetivos

1. Modelar problemas de la futura profesión y físicos, mediante funcionales, ecuaciones diferenciales parciales precisando las condiciones iniciales y/o de contorno, controlándolos mediante la significación física y de la especialidad de los conceptos matemáticos utilizados.
2. Resolver los modelos matemáticos operacionales y variacionales mediante el método de solución más adecuado (analítico o numérico), algoritmizando la tarea y utilizando softwares o asistentes matemáticos que faciliten o apoyen la solución de las tareas propuestas, midiéndolos a través de los resultados obtenidos del cálculo.
3. Interpretar los resultados obtenidos del cálculo mediante los conceptos matemáticos tales como: ecuación diferencial, solución de una ecuación diferencial, problemas correctamente planteado, problema variacional, extremal, etc., y controlarlas a través de las recomendaciones prácticas que de estas interpretaciones se deriven.

Como indicadores cualitativos de la acción se tendrán en cuenta: la conciencia, la independencia.

Modelo de los contenidos

Tradicionalmente para las especialidades del perfil de la construcción en las Ciencias Técnicas y particularmente en la especialidad de Ingeniería Hidráulica, el desarrollo de funciones mediante las Series Trigonométricas de Fourier, las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y los métodos analíticos de solución (Método de Fourier) o los métodos numéricos (Método de las Diferencias Finitas y el Método de los Elementos Finitos) y el Cálculo Variacional se desarrollaban de manera tal que no permitían el tratamiento de estos contenidos con un enfoque sistémico. Para superar esta dificultad y propiciarle a los estudiantes suficiente tiempo para utilizar las posibilidades que brindan los asistentes matemáticos como el MATLAB en la solución de los diferentes ejercicios del curso que así lo requieran, utilizaremos una estructuración sistémica que le facilita al estudiante encontrar las ideas esenciales, las regularidades y las conexiones matemáticas que le permitirán abordar de forma mas efectiva los problemas a resolver. Esta nueva estructuración de los contenidos no responde ni al enfoque estructural funcional ni al genético, sino que persigue un ordenamiento lógico de los contenidos de tal manera que unos conduzcan a los otros y a la vez le permita a los estudiantes disponer de un tiempo adecuado para la utilización de las computadoras en la realización de las diferentes tareas docentes.

Como primer tema se tomó el *cálculo variacional,* el cual mediante las condiciones necesarias para el cálculo de los extremales conduce a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (contenido ya desarrollado en asignaturas anteriores) y a las *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales,* constituyéndose así en fuente de motivación para el estudio de las mismas, éstas constituyen el próximo tema de conocimientos, el cual a su vez se relaciona con los *métodos analíticos y numéricos* de solución de las mismas constituyéndose ellos en los próximos temas.

Proceso de asimilación

El proceso de asimilación ha sido estructurado según las etapas que lo componen (motivacional, creación de la base orientadora de la actividad, material, verbal y mental) a través del diseño de situaciones de aprendizaje cuyo núcleo generador es una situación problémica o un conflicto cognitivo, que exigen la participación activa del estudiante. Esta organización se ha realizado considerando que en cada tema se produce un ciclo que transcurre según las etapas.

A continuación se muestran los métodos participativos utilizados en el desarrollo del primer tema.

Actividad # 1 (método problémico).

Conferencia # 1 Título: Introducción al cálculo variacional.

Sumario:

1.1. Modelación matemática de problemas físicos y de la especialidad.

1.2. Conceptos básicos del cálculo variacional.

Objetivos

1. Modelar mediante un funcional de energía la determinación de la elástica de una viga y medirlo mediante la interpretación física de los conceptos matemáticos utilizados.
2. Definir los conceptos del cálculo variacional: funcional, extremal, problema variacional, proximidad de curvas y variación a partir de su analogía con la determinación de extremos de funciones y medirlos a través de su aplicación a casos particulares.

Por ser la primera clase del curso, se realiza la técnica del encuadre.

Técnica del Encuadre

Se le realiza la siguiente propuesta sobre el curso a desarrollar:

- Se le presentan los objetivos de la asignatura tal y como se mostraron arriba.
- Se le muestra el diagrama de la organización de los contenidos.
- Se le plantea el sistema de evaluación propuesto.
- Se le comunica el objetivo de contribuir a través de esta asignatura a la formación de la responsabilidad mediante la utilización de métodos participativos.

Se divide al grupo en equipos de aproximadamente seis integrantes y se le pide que analicen y reflexionen sobre la propuesta anterior y que realicen las sugerencias y adecuaciones que consideren necesarias. A continuación se reúne el grupo en sesión plenaria y cada equipo expone sus sugerencias y modificaciones, obteniéndose al final la propuesta definitiva sobre los objetivos, contenidos y su estructuración, así como del sistema de evaluación a desarrollar en el curso.

Etapa Motivacional

Situación Problémica

Encontrar la ecuación de la línea elástica de una viga de una sola luz, la cual se encuentra simplemente apoyada en sus dos extremos, y está sometida a una carga uniformemente distribuida.

De la asignatura de Resistencia de Materiales los alumnos conocen que la ecuación que modela o describe la flexión de una viga de una sola luz, de sección transversal constante y sometida a una carga *q* uniformemente distribuida es:

$$Y^{IV}(X) = \frac{q}{EI}, \quad 0 < x < l \qquad (1)$$

si nos referimos al caso particular de bordes simplemente apoyados (como indica la figura), las condiciones de frontera serían:

$$Y(0) = Y^{II}(0) = 0$$

$$Y(l) = Y^{II}(l) = 0 \qquad (2)$$

El modelo descrito por (1) sujeto a (2) se conoce con el nombre de *modelo operacional o formulación clásica o fuerte del problema.*

Esta tarea nos la podemos plantear de otra forma desde un punto de vista energético. Para esto tendremos en cuenta que en la flexión, al igual que en las demás deformaciones, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores se gasta en alterar la energía potencial de la barra deformada.

La energía potencial de toda la viga se determina por la expresión

$$E[\,Y(x)\,] = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(Y^{II}(x))^2 - qY(x)\right]dx$$

Por la conocida propiedad de la energía potencial, la cual tiene en la literatura el nombre de *principio de Lagrange*, la verdadera ecuación de la línea elástica de la viga será aquella, que le brinda un valor mínimo a la expresión de la energía potencial sujeta a las condiciones de frontera (2).

El problema es:

$$\min E[\,Y(x)\,] = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(Y^{II}(x))^2 - qY(x)\right]dx$$ sujeto a las condiciones de frontera:

$$Y(0) = Y^{II}(0) = 0$$

$$Y(L) = Y^{II}(L) = 0$$

Este modelo lo llamamos *modelo variacional o débil* (sólo se exige continuidad hasta la segunda derivada, mientras que en el clásico se exige la continuidad hasta la cuarta derivada).

Observaciones

La contradicción entre lo que sabe y lo que no sabe se presenta aquí entre el modelo operacional, ya conocido por el estudiante, el cual él sabe resolver, y el nuevo modelo variacional que no conoce y debe darle solución. Esta solución, a su vez, debe coincidir exactamente con la solución del modelo operacional o tener un alto grado de aproximación con ella.

El control en esta etapa se realiza mediante la observación de los estudiantes en cuanto a:

- Disposición a la tarea.
- Interés.
- Participación en la elaboración conjunta.

Inicio de la Base Orientadora de la Actividad (B. O. A.)

Después de una conversación heurística debemos concluir con la definición de funcional destacando los elementos esenciales para la identificación del concepto. A continuación se realiza un ejercicio (del cual se muestra un inciso) para el desarrollo de la habilidad lógica de identificación, realizando las siguientes operaciones:

a) Establecimiento del concepto por parte de los estudiantes.
b) Se establecen los elementos esenciales del concepto.
c) Se identifica el tipo de estructura: conjuntiva, disyuntiva, conjuntivo-disyuntiva.
d) Se determina la pertenencia o no al concepto.

Determine en el caso siguiente si la relación presentada es un funcional

$$V[\,Y(x)\,] = \int_{x_0}^{x_1}\left[\, p(x)\,(Y^{i}(x))^2 + q(x)\,Y^2(x) + 2\,f(x)\,Y(x)\,\right]dx\,,$$

siendo Dom $V[\,Y(x)\,] = C^1([x_0\,,\,x_1])$.

A través de la explicación en la solución de los ejercicios (debe haber ejercicios de pertenencia, no pertenencia e indeterminación) va quedando conformada la B. O. A. y como se trabaja la identificación como proceso lógico del pensamiento.

Queda de esta manera definido el problema docente como un problema variacional, siendo un ejemplo:

Resolver: min $V[\,Y(x)\,] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y^{I}(x)\right) dx$ sujeto a las condiciones de contorno :

$y(x_0) = y_0\,,\ \ y(x_1) = y_1$.

Actividad # 2 (métodos de discusión en pequeños grupos y discusión plenaria).

Conferencia #2 Título: Problemas variacionales.

Sumario :

2.1. Ecuación de Euler.

2.2. Ecuación de Euler-Poisson.

2.3. Ecuación de Ostrogradski.

Objetivo

1. Deducir la condición necesaria de extremos para funcionales unidimensionales y bidimensionales a partir del concepto de variación y apoyándose en la derivación e integración de funciones reales y medirla mediante su aplicación a problemas variacionales particulares.

Culminación de la B. O. A.

En esta clase continuaremos el estudio de los problemas variacionales y para eso se dividirá el grupo de estudiantes en tres equipos cada uno de los cuales estudiará un problema variacional diferente, que expondrá en una sesión plenaria al resto de los equipos, de manera tal que al finalizar la actividad todos los estudiantes tendrán los tres `problemas que se trataran en clases desarrollados.

A cada uno de los equipos se le orientará una tarea como la siguiente:

Tarea

El objetivo de esta tarea es la obtención de la condición necesaria de extremo de la funcional unidimensional, conocida como ecuación de Euler.

Problema : Obtener la condición necesaria de extremo de la funcional

$V[\,Y(x)\,]= \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y^{I}(x)\right) dx$, sujeto a las condiciones de contorno :

$y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Bibliografía: Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Elsgoltz L. Capítulo VI, epígrafe 2, pág. 299. Editorial Mir. Moscú. Código L006174.

Observaciones a la conferencia # 2:

Se tendrán en cuenta las siguientes precisiones:

➔ La forma (el método) de ejecutar la tarea.

Esta debe ejecutarse en elaboración conjunta para garantizar que la B. O. A. le quede a cada uno de los estudiantes.

Cuando se termine la B. O. A. se debe concluir con los elementos esenciales, pues estos conformarán la tarjeta de estudio.

➔ Control de B. O. A.

Se realizará preguntando sobre la base de la utilización de los elementos esenciales del contenido.

Comprobar si les queda claro cuales son los elementos esenciales del concepto.

Desde el punto de vista de la responsabilidad en esta tarea conscientemente pretendemos que el estudiante interactue y se comunique con los demás integrantes del equipo y dejamos a la elección del colectivo estudiantil la manera en que cada estudiante aportará individualmente a la solución de la tarea colectiva, aspecto éste que se controlará en la exposición de la tarea por el equipo.

Esta tarea permite que el estudiante se enfrente a distintos niveles de dificultad: con el nivel de partida, el contenido, la búsqueda bibliográfica, posibilidad real de reunirse en equipos, preparación para la exposición.

Actividad # 3 (métodos de discusión en pequeños grupos y discusión plenaria).

Clase Práctica # 1 Título: Problemas variacionales.

Objetivo :

1. Aplicar la condición necesaria de extremos a modelos variacionales y determinar los extremales en el caso de funcionales unidimensionales.

Etapa Materializada-Verbal.

Los estudiantes trabajarán en equipos donde resolverán ejercicios como el siguiente:

El modelo variacional que resuelve la torsión de una viga simplemente apoyada en sus dos extremos es:

$J[u(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 4u \right] dxdy$' donde $D=\{(x,y)\in R^2/\ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$ es la sección de la viga, sujeta a las condiciones de borde:

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0.$$

Obtenga el modelo operacional para la torsión de la viga.

Para los estudiantes que deseen ampliar sus conocimientos se le propone que resuelvan ejercicios como el siguiente:

El modelo operacional que permite determinar el eje de una viga cilíndrica elástica homogénea deformada con extremos fijos es:

$$Y^{IV}(X) = -\frac{\rho}{\mu},\ -L \leq x \leq L. \text{ sujeto a: } Y(-L)=Y(L)=Y'(-L)=Y'(L)= 0.$$

Obtenga el modelo variacional

Con estos últimos ejercicios se pretende controlar el cumplimiento del aspecto de la responsabilidad del estudiante relacionado con el desarrollo de tareas no obligatorias.

Después de resueltos los ejercicios, un equipo expondrá en sesión plenaria los resultados donde se concluye si el resto de los equipos está de acuerdo. De lo contrario se propicia el debate y se llega a conclusiones.

Los niveles de ayuda para la formación de la independencia mediante esta tarea docente son:

- El profesor muestra e identifica las fórmulas adecuadas y sus términos.
- El profesor muestra e identifica las fórmulas adecuadas.
- El profesor muestra las fórmulas.

Observaciones de la clase práctica # 1:

A los estudiantes en el equipo se les exige que en la ejecución de los ejercicios argumenten que hicieron y cómo lo hicieron, para de ese modo trabajar la formación de la conciencia como cualidad de la acción.

El docente debe velar que los estudiantes en la argumentación se basen en los elementos esenciales del contenido y que utilicen la terminología matemática adecuadamente.

Con respecto al la influencia de estos ejercicios y métodos en la formación de la responsabilidad, se observa durante el trabajo de los estudiantes: actitud del estudiante (participación, atención, etc.), vencimiento de obstáculos (como trabajó de forma individual con las limitaciones que tiene para aportar al trabajo en equipo), calidad en la ejecución de la tarea, si se ajustaron o hicieron el esfuerzo por ajustarse al tiempo disponible, para ver el desenvolvimiento del componente conductual de la responsabilidad en los estudiantes.

Actividad # 4 (métodos de discusión en pequeños grupos y discusión plenaria).

Clase Práctica # 2 Título: Cálculo Variacional.

Objetivo :

1. Aplicar la condición necesaria de extremos a modelos variacionales de problemas de la especialidad y físicos y determinar los extremales en el caso de funcionales unidimensionales.

Etapa Mental

En esta etapa se trabaja primero de forma individual (sin apoyo material) de manera que el estudiante tenga posibilidades de solicitar ayuda (se les orienta esta posibilidad con antelación) para determinar que alumnos aún no pueden trabajar de forma independiente y retroalimentar la etapa en la cual aún presentan dificultades.

Seguidamente se pasa a la formación de equipos para que con la interacción individual se llegue a la solución de la tarea en equipos (llegar a consenso). En plenaria un equipo expone la solución que dio a los problemas, si el resto de los equipos están de acuerdo, se concluye, de lo contrario los que plantean otra vía de solución u otros resultados exponen, se propicia el debate y se llega a conclusiones.

El docente controla el nivel de conciencia en la exposición al observar si los alumnos se basan en los elementos esenciales del contenido para dar solución a la tarea. Esta tarea permite que el estudiante se enfrente a dificultades de diferentes niveles como son: enfrentar problemas de la especialidad, de los contenidos y preparación de la exposición del resultado alcanzado.

Con respecto al la influencia de estos ejercicios y métodos en la formación de la responsabilidad, se observa durante el trabajo de los estudiantes: actitud del estudiante (participación, atención, etc.), vencimiento de obstáculos (como trabajó de forma individual con las limitaciones que tiene para aportar al trabajo en equipo), calidad en la ejecución de la tarea, si se ajustaron o hicieron el esfuerzo por ajustarse al tiempo disponible, para ver el desenvolvimiento del componente conductual de la responsabilidad en los estudiantes.

La tarea docente presentada en esta clase incluye ejercicios como el siguiente:

El funcional de energía potencial, que modela el movimiento del agua en un medio poroso saturado, hacia drenes soterrados es:

$$J[h(x,t)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{2} K D \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(F(x,t) + S \frac{\partial h}{\partial t} \right) h(x,t) \right] dx$$

donde:
S coeficiente de almacenamiento o porosidad efectiva, [adimencional],
K conductividad hidráulica de Darcy, [l / t],
D espesor saturado, [l],
H recarga sobre los drenes, [l],
F recarga que alimenta el acuífero (lluvia o riego), [l / t],
$[x_0, x_1]$ intervalo en estudio.

Sea un sistema acuífero homogéneo e isótropo de extensión infinita en el que se ha colocado un sistema de drenaje cuyo objetivo es eliminar el agua en exceso que penetra en la zona radicular de determinado cultivo para que no afecte su rendimiento agrícola. Se conoce que la zona radicular Z_r tiene un espesor de 0.5 m y que los drenes se han colocado a una profundidad de 1.5 m. La conductividad hidráulica es K=1 m / d y la distancia desde la superficie del terreno hasta el lecho impermeable es de 5 m.

Se ha tomado un espaciamiento entre drenes, E=40 m, el cual se supone que debe satisfacer los requerimientos de drenaje que se le quiere imponer al nivel freático:

- Al final de la recarga el nivel freático debe penetrar en la zona radicular hasta un 40 % del espesor de la misma.
- Tres días después de haberse alcanzado la condición anterior el nivel freático debe haber descendido 0.6 m.

El valor de la recarga es $F(t) = \begin{cases} 0.025 \text{ m/d}, & 0 \le t \le 1 \\ 0 \quad\ \text{m/d}, & 1 \le t \le 4 \end{cases}$

El valor del coeficiente de almacenamiento es S=0.04 y el radio de los drenes es r_d=0.05 m.

Dadas las siguientes condiciones de frontera: h(0,t)=h(E,t)=0, para $0 \leq t \leq 4$ y la condición inicial h(x,0)=0 para $0 \leq x \leq E$.

Conclusiones

- La mayoría de los estudiantes de tercer año de Ingeniería Hidráulica se encuentran en un nivel medio y bajo del desarrollo de la responsabilidad.
- La autocrítica como componente psicológico que interviene en la responsabilidad es el que alcanza el valor más bajo.
- El sistema de tareas elaborado conscientemente para formar un nivel elevado de independencia y conciencia demostró ser adecuado.
- El sistema de tareas elaborado conscientemente para contribuir al desarrollo de la responsabilidad demostró haber influido en el componente conductual.

Bibliografía

Calderón, R.M. La enseñanza del Cálculo Integral. Una alternativa basada en el enfoque histórico-cultural y de la actividad. Tesis de Doctorado. Ciudad de la Habana, Cuba. 1996.

Colectivo de autores. Los métodos participativos, ¿una nueva concepción de la enseñanza?. C.E.P.E.S. Ciudad de la Habana, Enero de 1995.

González, O. Didáctica de la Educación Superior. CEPES, Cuba. Inédito.

Hernández, H. El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Superior cubana. Experiencia en el Álgebra Lineal. Tesis de Doctorado. Cuidad de la Habana, Cuba. 1991.

Hernández, H. Vigotski y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana. 1997. Ciudad de la Habana. Cuba.

Leontiev, U. N, Diomin, I. I, Pastuchijin, V. N. Dos temas de mecánica de la construcción. Monografía. Editora I.S.P.J.A.E. Cuba.1998.

MES : Plan de Estudios. Carrera de Ingeniería Hidráulica.1990. Cuba.

Notas sobre el postgrado impartido en Enero de 1995 sobre los métodos activos por el Dr. Guillermo Pérez Pantaleón. I.S.P.J.A.E. Ciudad de la Habana. Cuba.

Rodríguez, T. Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina Matemática Superior. Tesis de Doctorado. Cuidad de la Habana, Cuba. 1991.

Talízina, N. F. Conferencia sobre los fundamentos de la enseñanza de la educación superior. Universidad de la Habana, Cuba. 1995.

Ojalvo Mitrany, Victoria et al. Concepción de la Enseñanza-Aprendizaje y Organización Docente para la Formación de Valores en Estudiantes Universitarios. Diseño de Investigación. 1997. Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior (C. E. P. E. S.), Universidad de la Habana (U. H.).

Los Modelos Matemáticos y el contexto de la ingeniería

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional
México

Introducción

La problemática de la enseñanza de las matemáticas en escuelas de ingeniería, no es solamente un problema de instituciones públicas o privadas, ni de países de tercer, segundo o primer mundo, éste es un problema de índole mundial, el cual se detecta a través del índice tan alto de alumnos reprobados en estas asignaturas, en cualquier lugar del planeta tierra.

La situación anterior lleva a reflexionar acerca de los factores que intervienen en este proceso, así como en detectar cuáles de éstos se pueden modificar o cambiar, para favorecer, en la medida de lo posible, la solución de la problemática mencionada.

De hecho, existen muchos factores que intervienen en la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ingeniería. Uno de éstos tiene que ver con la aridez de las matemáticas[1] en los cursos que se imparten en escuelas de ingeniería. Lo cual posteriormente repercute en la deficiente habilidad para modelar problemas de la ingeniería durante la vida profesional del egresado, pues un punto clave es que debe integrar los conocimientos que recibió de matemáticas con los de las asignaturas de ingeniería, situación que desconoce [Camarena, 1995].

La matemática y el Contexto de la Ingeniería

Se sabe que la matemática que se requiere en escuelas de ingeniería, generalmente ha nacido dentro del contexto del área del conocimiento en donde se le necesita. Al transcurrir el tiempo, los textos presentan a esa matemática descontextualizada de su origen, como un conocimiento acabado, el cual posee formalidad matemática y una estructura que lo hace demasiado abstracto para los estudiantes [Camarena, 1995].

Para tratar de abordar el factor mencionado, se parte del paradigma educativo que expresa que: "La matemática en escuelas de ingeniería, más precisamente en escuelas en donde la matemática no es una meta por sí misma, es una herramienta de apoyo a la ingeniería en cuestión, sin olvidar el carácter formativo que ésta ofrece" [Camarena, 1984], y se toman como marco teórico las teorías del constructivismo y la epistemología genética, con las cuales se fundamenta la Matemática en Contexto.

Con la Matemática en Contexto el estudiante se motiva, le encuentra sentido a los cursos de matemáticas que recibe, entiende por qué se le imparten, y cómo y dónde los aplicará. Ve a las matemáticas sin aplicaciones artificiales, con la notación que usará durante su carrera y vida profesional, modelando problemas que son propios de su carrera [Camarena, 1984, 1987].

En general el hablar de la matemática en contexto no es simplemente el ofrecer aplicaciones, sino desarrollar la teoría matemática a las necesidades y ritmo que dictan los cursos de ingeniería. El problema que algunas personas que no han practicado la matemática en contexto ven, es que de esa forma se estará ofreciendo un curso de tipo operativo y no será formativo porque solamente se está dando lo que necesitan. Para esto cabe recordar que el decir que se dan los temas a las necesidades y ritmos que dictan los cursos básicos de la

[1] Es decir, fuera de contexto, como menciona Camarena en su trabajo titulado: El currículo de las matemáticas en ingeniería (1984).

ingeniería y propios de la ingeniería, no implica que se de un curso mecánico, ni un curso no formativo, pues estos elementos son determinados por la forma como imparta estos temas el profesor. Que dicho sea de paso, el carácter formativo, así como el ser un curso no solamente operativo depende del profesor, ya que los programas de estudio en ninguna parte indican el carácter formativo de la matemática, ni tampoco el que sea o no un curso de tipo operativo, esos elementos son huellas que deja cada profesor con su formación y experiencia [Camarena, 1990].

También se debe aclarar que la matemática en contexto como se entiende en general, definición que utiliza el presente trabajo, no es tan fácil de lograr, pero el presentar aplicaciones que sean no artificiales para el estudiante y que sean de su carrera en estudio del alumno, llevan a una aproximación de la matemática en contexto, la cual favorece el proceso enseñanza-aprendizaje [Camarena,1984].

La matemática en contexto con la concepción que se ha dado, posee varias etapas [Camarena, 1997; Mochón, 1997]:

1.- Planteamiento del problema.

2.- Determinación de las variables y de las constantes del problema.

3.- Determinación del modelo matemático.

4.- Solución matemática del problema.

5.- Determinación de la solución requerida por el problema.

6.- Interpretación de la solución en términos del problema.

Los Modelos Matemáticos y la Matemática en Contexto

Según las etapas mencionadas, el modelaje o Modelo Matemático, es una de las etapas de la Matemática en Contexto. Mas no es cualquiera de las etapas, se puede decir que es una etapa central, en el sentido de que sin ésta, no se logra la matemática en Contexto.

Por otro lado, de las etapas de la Matemática en Contexto, se tienen que para el modelaje se requiere de las etapas 1 y 2 anteriores al modelo.

Las diferencias entre el modelaje o Modelos Matemáticos y la Matemática en Contexto estriba en el hecho de que los Modelos Matemáticos se desarrollan de cualquier problema, ataña o no a la realidad, más la Matemática en Contexto se refiere a problemas reales del área de estudio del alumno. La Matemática en Contexto toma el problema lo resuelve e interpreta la solución, el modelaje se refiere a encontrar la representación matemática del problema, es decir a matematizar o modelar el problema.

Un caso específico

A continuación se presenta uno de los problemas [Camarena,1987] que se han analizado para determinar las etapas que se han mencionado de la Matemática en Contexto y los Modelos.

MATEMÁTICA EN CONTEXTO [Camarena,1987]

1.- Planteamiento del problema.

CIRCUITO R-C CON VOLTAJE CONSTANTE [Camarena,1987]

Vamos a estudiar el fenómeno de carga de un condensador (capacitor), cuya capacitancia es C, cuando la corriente eléctrica es obligada a pasar por una resistencia de valor R. Para tal propósito se tiene un circuito en el cual un condensador totalmente descargado, está conectado en serie con una resistencia, a las terminales de una batería que suministra una tensión constante V. Es claro que este es el caso más simple de un circuito **real, que contenga** un capacitor.

2.- Determinación de las variables y de las constantes del problema.

Para nuestro problema supondremos conocidas las siguientes constantes: R, C y V. El tiempo y la carga del condensador serán las variables.

3.- Determinación del MODELO MATEMÁTICO.

Las relaciones que se dan a continuación son las que se cumplen para todo tiempo t al cerrarse el circuito.

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} \text{.....................(1)}$$

$$v_R(t) = R\,i_R(t) \text{..................(2)}$$

$$i_R(t) = i_C(t) = i(t) \text{...........(3)}$$

$$v_R + v_C = V \text{.......................(4)}$$

donde v_C y v_R representan la caída de voltaje en el condensador y en la resistencia respectivamente, así como i_C e i_R la intensidad de corriente en el condensador y en la resistencia. La primera relación (1) es la expresión fundamental de un capacitor, que nos da la diferencia de potencial en dicho elemento. La segunda (2) es la formulación de la ley de Ohm en términos del voltaje; es decir, nos determina la caída de voltaje en el resistor. La tercera y cuarta son consecuencia inmediata de la primera y segunda leyes de Kirchhoff para el circuito con el que vamos a trabajar.

Las unidades utilizadas para que las fórmulas que acabamos de dar sean correctas son: R en ohms; C en farads; V, V_C(t) y V_R(t) en volts; q(t) en coulombs; $_C$(t), i_R(t) e i(t) en amperes (coulombs por segundo) y t en segundos.

Se sabe por la definición de intensidad de corriente, que ésta está dada por el cambio de su carga respecto al tiempo, es decir, i(t) = dq(t)/dt. En el caso particular del condensador, se tiene la siguiente relación:

$$i_C(t) = \frac{d}{dt}q(t)$$

por otro lado se tiene que $\frac{d}{dt}q(t) = i_R(t)$. Obviando pasos intermedios en este documento, con todo lo anterior se obtiene

$$R\frac{d}{dt}q(t) + \frac{1}{C}q(t) = V \text{.............(5)} \quad \text{MODELO MATEMÁTICO}$$

relación válida para todo tiempo t, en donde R, C y V son constantes.

4.- Solución matemática del problema.

En la ecuación 5, nuestra incógnita es q(t), la carga del condensador que varía con el tiempo t. Como se puede observar, en la ecuación aparecen la incógnita y su derivada, por tal razón, se dice que se trata de una ecuación en derivadas, o *ecuación diferencial* (ya que las derivadas se pueden expresar como cociente de diferenciales).

Para encontrar la solución de esta ecuación diferencial, se dejan en un sólo miembro de la igualdad, todos los términos que contienen a q(t) y en el otro miembro los términos que contienen a t. Procedimiento denominado "*Separación de variables*".

$$R\frac{d}{dt}q(t) = V - \frac{1}{C}q(t)$$

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{1}{RC}(CV - q).$$

$$\frac{dq}{CV - q} = \frac{1}{RC}dt.$$

$$\int\frac{dq}{CV - q} = \int\frac{1}{RC}dt.$$

$$\int\frac{d(CV - q)}{CV - q} = \int\frac{1}{RC}dt.$$

$$\ln|CV - q| = \frac{-t}{RC} + cte$$

$$e^{\ln|CV-q|} = e^{\frac{-t}{RC}+cte}$$

$$|CV - q| = e^{\frac{-t}{RC}}e^{cte}$$

$$q - CV = k\,e^{\frac{-t}{RC}}, \quad \text{con } k = \pm e^{cte}$$

$$q = CV + k\,e^{\frac{-t}{RC}} \quad \text{........................(6)}$$

Solución denominada: *la solución general* de la ecuación diferencial 6.

5.- Determinación de la solución requerida por el problema.

Como el condensador estaba totalmente descargado al inicio del problema, lo que se tiene es que en t=0 la carga era cero, o sea, q(0)=0. Condición llamada *condición inicial.*

Si sustituimos la condición inicial en la solución general, se obtiene

$$0 = CV + k$$

de donde el valor de la constante k debe ser -CV. Sustituyendo esta constante en la solución general, obtenemos

$$q(t) = CV\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) \quad \text{........................(7)}$$

a esta solución se le llama la solución para la condición inicial $q(0)=0$, o *la solución particular de la ecuación*, para tal condición.

6.- Interpretación de la solución en términos del problema.

Físicamente la solución 7 que se ha encontrado sólo tiene sentido para valores de t mayores o iguales a cero. Pero nótese que si hacemos correr al tiempo indefinidamente, es decir, si hacemos que t tienda a infinito en la expresión para q(t) (recuérdese que R, C > 0), tenemos que:

$$\lim_{t \to \infty} q(t) = CV(1-0) = CV$$

es decir, la carga final del condensador (denotada por Q), será CV.

Esto es, cuando se obtenga la carga final Q, la diferencia de potencial entre las placas del condensador será igual a V, el voltaje de la batería. Teóricamente al condensador le tomaría un tiempo infinito en cargarse completamente. Esto, por supuesto, no es así en la práctica.

En la solución 7, puesto que CV es un factor constante, el valor de q(t) depende del cociente t/RC. El valor numérico RC, expresado en segundos (de hecho, RC tiene unidades de segundos cuando R se representa en ohms y C en farads) recibe el nombre de *constante de tiempo*. Es decir, una constante de tiempo es igual a RC segundos.

Transcurrida una constante de tiempo, se tiene que

$q(RC) = CV(1 - e^{-1}) = 0.632$ CV, puesto que CV es la carga final total, se observa que transcurrida una constante de tiempo se tendrá el 63.2% de su carga final. Esta independencia del voltaje V, justifica el nombre de constante de tiempo.

Al transcurrir dos constantes de tiempo, o sea, 2RC segundos, se tendrá que

$q(2RC) = CV\ (1 - e^{-2}) = 0.865$ CV, es decir, el 86.5% de la carga final.

Después de tres constantes de tiempo, es decir, 3RC segundos, tenemos que

$q(3RC) = CV\ (1 - e^{-3}) = 0.950$ CV, o sea, el 95.0% de CV.

Con cuatro constantes de tiempo, 4RC segundos, obtendremos que

$q(4RC) = CV\ (1 - e^{-4}) = 0.982$ CV, es decir, el 98.2% de CV.

Cuando han transcurrido cinco constantes de tiempo, o sea 5RC segundos, se tendrá que $q(5RC) = CV\ (1 - e^{-5}) = 0.993$ CV, consiguientemente, en 5RC segundos se tendrá el 99.3% de la carga final, que para fines prácticos, se considera que entonces el condensador se encuentra completamente cargado.

Por tanto, el tiempo que tarda en cargarse un condensador, depende de la resistencia y capacitancia del circuito, no del voltaje que suministre la fuente.

Para finalizar se mencionará que se está intentando llevar a cabo una clasificación de las formas de modelar, de tal suerte que los casos más simples, los cuales tienen que ver con la etapa experimental se les ha denominado modelos de primera generación. Un ejemplo típico de éstos es la llamada Ley de Ohm [Camarena,1997]. El tema de la clasificación se deja para una presentación posterior.

Conclusiones

1. Para los alumnos el desconocer el para qué les van a servir las matemáticas que estudian es un problema que influye determinantemente en su desempeño escolar, incidiendo principalmente en la motivación hacia el curso de matemáticas [Camarena, 1984].

2. Como se menciona en la Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica [Camarena, 1990], es necesario que los docentes de matemáticas incursionen en las áreas del conocimiento de las carreras en donde laboran, para presentar una matemática en contexto o con aplicaciones que sean del interés del estudiante, con lo cual se estará preparando al futuro ingeniero para que modele los fenómenos con que se tope en su vida profesional.

3. Los modelos Matemáticos son una parte de la Matemática en contexto. La Matemática en Contexto y los Modelos Matemáticos **INTEGRAN** el conocimiento.

Bibliografía

Camarena G. P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos.* Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

Camarena G. P. (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería.* Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación 1984 en el IPN.

Camarena G. P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica.* Edit. ESIME-IPN.

Camarena G. P. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería.* Resúmenes del XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Colima.

Camarena G. P., Rocha M. (1997). *Modelos matemáticos de la electricidad y magnetismo.* XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Morelia, 1997.

Mochón S. (1997). *Modelos matemáticos: los puentes entre las matemáticas y el mundo real.* Matemática Educativa, CINVESTAV.

Desarrollo histórico del Concepto de Integral

Encarnación Rosado Zavala (erosado@delfin.unacar.mx)
Universidad Autónoma del Carmen, Ciudad del Carmen, Campeche
México

Resumen

Dentro de la compleja y variada herencia científica de los sabios de la antigüedad, son prácticamente nulo los vestigios de la enseñanza de las matemáticas en nivel general; en este trabajo se tratará de llevar a cabo aquellas facetas en las cuales exista relación entre las matemáticas y su enseñanza. La enseñanza de la integral pocas veces incluye su historia, debido a ello, la asimilación de los términos, notaciones e ideas son deficientes.

Como una reflexión para la valoración, a nuestros antepasados científicos Niklitschek 1944, nos hace la observación bastante acertada, pues en lo particular la comulgo.

Hoy día nos sentimos demasiado inclinados a menospreciar presuntuosamente las aportaciones de los pueblos de la Antigüedad en el terreno de las ciencias naturales y la técnica. Cometemos con ello una gran injusticia, pues dos mil años antes de que Leibnitz y Newton fundaran las matemáticas superiores propiamente dichas, el arte de calcular el área de una parábola, y de una superficie limitada por curvas, era ya conocido por el genial *Arquímedes*. Nuestra pretensión se limita a deshacer la leyenda negra en que se quiere envolver este sublime arte del razonamiento, y convencer al lector de que, tal como enseña la botánica, las espinas tan temidas no son otras cosas que verdaderas hojas transformadas, y que aun cuando nos movamos mucho entre ellas, no es forzoso que nos hieran, siempre y cuando desde un principio hayamos aprendido a evitar las agudas puntas y a interpretar las ideas fundamentales con la sencillez que les es realmente propia...(Niklitschek, 1944).

Desarrollo histórico de la Integral.

¿Dónde y Cuándo inicia la noción de Integral?. Reseña histórica de los egipcios.

Los papiros de Rhind y Golenischev de los egipcios

Los documentos matemáticos más antiguos de que se tienen conocimiento son dos rollos de papiros egipcios que datan de (2000-1788 a.J.C.). Ambos se designan con los nombres de sus primeros poseedores.

El más antiguo de los dos, el papiro Golenischev – se conserva en Moscú; el papiro Rhind, se halla en el British Museum. El papiro de Moscú, consiste en una colección de veintiocho problemas, el método de resolución de estos problemas coinciden con las reglas que aparecen en el papiro Rhind. Uno de los problemas, indica que los egipcios conocieron la forma de calcular el volumen de un tronco de pirámide, $V = \left(h/3\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)$, donde a y b son las longitudes de la base de la pirámide y h es la altura.

El papiro Rhind lo compuso un escriba llamado Ahmés(Acmés), éste relata que copió el texto "fielmente de un escrito antiguo realizado en tiempos del rey del Alto (y el Bajo) Egipto (Nema) ´et-Rê´". El documento data de la dinastía XII, 1849-1801 a.J.C. Pero la incertidumbre existe.

Varios científicos estuvieron de acuerdo en nombrarlo como una antigüedad de primer orden; y posteriormente D'Arcy Thompson lo llamó "uno de los antiguos monumentos del saber" según nos dice Newman 1994.

El papiro Rhind, como dice Newman, 1994, aunque demuestra la poca habilidad que poseían los egipcios para las *generalizaciones* y su inclinación hacia procedimientos de cálculos engorrosos, prueba también que poseían notable tenacidad para resolver problemas corrientes de aritmética, así como mediciones; los egipcios construían verdaderos rompecabezas algebraicos, y que eran hábiles en extremo para manejar sus incómodos métodos.

El área de un círculo con diámetro *d*, fue dado como $(d-d/9)^2$, $= \left(\frac{64}{81}\right)D^2$ entonces $\left(\frac{64}{81}\right)D^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ lo que condujo a un valor de π = 256/81 =3.1605.

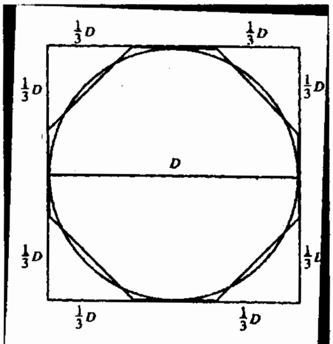


Figure 0.1

Dunham 1994, nos proporciona la siguiente demostración

Aunque no hay certeza. Una posibilidad es que el área circular fuera reemplazada por la de un octágono, como la indicada en la figura 0.1; un cuadrado circunscribe a un círculo con diámetro *D*. Y omitiendo las esquinas del cuadrado los cuatro triángulos isósceles sombreados con sus lados iguales de longitud (*D/3)*; lo restante es un octágono cuya área es aproximadamente la del círculo original. Porque cada triángulo omitido tiene un área de

$$\frac{1}{2}(base \times altura) = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{3}\right)\times\left(\frac{D}{3}\right) = \frac{1}{18}D^2\text{; entonces}$$

Área (del círculo) $\approx$ área(del octágono) = área(del cuadrado) – 4áreas(triángulo isósceles).

$$\text{área(del octágono)} = D^2 - 4\left(\frac{1}{18}D^2\right) = D^2 - \frac{2}{9}D^2 = \frac{7}{9}D^2 = \frac{63}{81}D^2$$

Este valor es bastante parecido al valor de Ahmes: $\left(\frac{64}{81}\right)D^2 \approx \frac{63}{81}D^2$.

La historia de la derivada y la integral no se encontraron en ninguna parte antes del período de los griegos.

¿Dónde y Cuándo inicia la noción de Integral?. Reseña histórica de los babilonios.

Los textos últimamente descifrados pertenecen al período babilonio (2000 a.C.). Los problemas que se refieren a aplicaciones geométricas, revelan el conocimiento de la *proporcionalidad* entre los lados de triángulos semejantes, en cambio, para la longitud de la circunferencia y el área del círculo adoptaron valores poco aproximados, para la circunferencia el valor de tres diámetros (valores que incluso se conservan en la Biblia) y para el círculo el triple del cuadrado del radio. El conocimiento geométrico más interesante que revelan las tablillas es el llamado "teorema de Pitágoras" un milenio antes de la existencia de su pretendido autor.

A continuación se da un ejemplo según Struik, 1994, tomado de una tablilla que data de ese período "La tablilla está en la *Bibliothêque Nationale et Universitaire* de Estrasburgo."

Un área A, que consiste de la suma de dos cuadrados es 1,000. El lado de un cuadrado es 2/3 del lado del otro cuadrado, disminuido en 10. ¿Cuáles son los lados del cuadrado?

Esto nos conduce a las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 1{,}000; \quad y = \tfrac{2}{3}x - 10$$

Y la ecuación cuadrática es:

$$\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0;$$

Con solución positiva: $x = 30$; y por tanto $y = 10$.

La solución existe en el texto cuneiforme se limita – como en todos los problemas orientales - a la simple enunciación de los pasos numéricos que deben ser efectuados para resolver la ecuación cuadrática.

Los babilonios usaban tabletas de arcilla cocidas, y los egipcios usaban piedras y papiro, este último se conservó durante mucho tiempo debido al excelente clima seco de la región. Pero los primeros chinos e hindúes usaron material muy perecedero como la corteza de árboles y el bambú.

Así, mientras una cantidad razonable de información ahora es conocida acerca de las matemáticas de la antigua Babilonia y Egipto, muy poco es conocido con algún grado de certeza acerca de los estudios de la antigua China e India... En secuencia antes de mediados del siglo XIX, algo así como, medio millón de tabletas de arcillas grabadas fueron desenterradas. Hay excelentes colecciones de estas tabletas en el gran museo de París, Berlín y Londres.

De las tabletas mencionadas, cerca de 300 fueron identificadas como estrictamente tabletas matemáticas conteniendo tablas matemáticas y listas de problemas matemáticos.

El enigma de estas tabletas fue descifrado por Rawlinson en 1847, quien perfeccionó las primeras sugerencias de Grotefend. Hay textos matemáticos que datan del último período sumerio de tal vez del año 2100 a.C., un segundo y extenso grupo que sucedió a la primera dinastía babilonia de la era del rey Hammurabi, muy cerca de los inicios de 1600 a.C., y un tercer grupo en el transcurso de 600 a.C., a 300 D.C., abarcando el nuevo imperio de Babilonia de Nabucodonosor y las eras siguientes de Persia y Seleucidan... aproximadamente 200 tabletas contienen tablas, mostrando multiplicación, recíprocos, cuadrados y cubos, y aún tablas de exponenciales. Estas últimas fueron usadas más tarde probablemente en, interpolación y problemas de *interés compuesto*...

Aproximaciones de la Integral durante el período 500 a.c. - 1650 d.c.

La historia de la matemática de los griegos empieza en el siglo VI A.C. Con Thales y Pitágoras, ambos de quienes se dice tuvieron que viajar a Babilonia y Egipto para adquirir el conocimiento de aquéllos lugares.

Método de Exhaución según Antiphon.

Los primeros problemas ocurridos en la historia del cálculo fueron referentes al cálculo de áreas, volúmenes, y longitudes de arcos. Una de las contribuciones importantes en el principio, para el problema de la cuadratura del círculo fue la de Antiphon el sofista (430 a.C.); nos dicen, adelantó la idea que doblando el número de lados consecutivamente de un polígono regular inscrito en un círculo, la diferencia de áreas entre el círculo y el polígono al fin sería agotada.

Eudoxo y la escuela de Atenas.

Tres grandes problemas: 1) *La duplicación del cubo* o el intento de encontrar la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado; 2) *La trisección de un ángulo dado*; y 3) *La cuadratura del círculo* o intento de encontrar un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado. Hipócrates descubrió, al intentar cuadrar el círculo, que podían dibujarse dos figuras en forma de luna, la suma de cuyas áreas fuera igual a la de un triángulo rectángulo. Así, Hipócrates dio, el primer ejemplo de una solución de *cuadraturas*.

Hipócrates, hizo progresos notables. Fue el primer autor conocido que haya escrito un tratado de matemáticas elementales; dedicó especialmente su atención a las propiedades del círculo. Actualmente, su trabajo práctico permanece entre los teoremas de Euclides,. Se cree que consideró al círculo como el límite de un polígono regular, ya sea inscrito o circunscrito. Este fue el primer ejemplo del *método de exhaución*, una utilización particular de la aproximación por encima y por debajo del límite deseado.

Demócrito ha sido famoso durante mucho tiempo como el creador de la teoría atómica, pero aun así, sólo ha visto la luz muy recientemente. Esto sucedió en 1906, cuando Heiberg descubrió un libro perdido de Arquímedes titulado el *Método*. Allí vemos que Arquímedes considera a Demócrito como el primer matemático que estableció la fórmula del volumen de un cono o de una pirámide... Demócrito consideró estos sólidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas. En el caso del cilindro no habría ninguna dificultad, pues todas las capas serían iguales. Pero en el cono o en la pirámide el tamaño iría disminuyendo gradualmente de capa en capa hasta llegar a un punto... los tamaños menguantes le confundían. "¿Son iguales o desiguales?", preguntaba, "pues si son desiguales, el cono será irregular como si tuviera muchas incisiones, como escalones, y asperezas; Pero, si son iguales, las secciones serán iguales y el cono tendrá la propiedad del cilindro y estará formado por círculos iguales, y no desiguales, lo cual es totalmente absurdo".

Esta observación es sorprendente, pues prefigura la gran labor constructiva de Arquímedes y, siglos más tarde, la de Cavalieri y Newton, muestra así; la infancia del cálculo infinitesimal.

El método de exhaución es usualmente acreditado a Eudoxio (370 a.C) y puede tal vez ser considerado como la respuesta de la escuela Platónica para las paradojas de Zenón. El método asume la divisibilidad infinita de magnitudes y tiene, como bases, la proposición: *Si de cualquier magnitud fuera sustraída una parte no menos que su mitad, del resto de otra parte no menos que su mitad, y así sucesivamente, allí permanecerá largamente una magnitud menor que cualquier magnitud preestablecida del mismo tipo.*

Los pitagóricos habían resuelto el problema de la "cuadratura de los polígonos", pero al pasar de los polígonos al círculo, el proceso resultaba inaplicable y, los intentos de "cuadrar el círculo", sin acudir a recursos especiales, resultaban infructuosos... Brisón por su parte agregó, mostrando como las dos series de polígonos uno inscrito y otro circunscrito, estrechaban cada vez más al círculo, cuya área debería estar comprendida entre la de los polígonos. Si Brisón llegó hasta aquí, aún sin resolver el problema, dejó señalada la senda por la cual más tarde, Arquímedes lograría notables resultados.

Arquímedes y su gama de obras.

Debido a las innumerables invenciones y descubrimientos de Arquímedes, cada científico interesado en sus obras, ha tenido la precaución de proporcionarnos lo mejor de ellas.

Arquímedes, uno de los genios más importantes de todos los matemáticos, fue el hombre práctico de sentido común... poseía la habilidad imaginativa y la perspicacia para tratar la geometría métrica y que incluso algunos estudiosos dicen que inventó el *cálculo integral.* La tierra abonada y fértil así como, la semilla seleccionada que dejó este gran genio, posteriormente fue aprovechada por Kepler y Newton. Y También *Cavalieri,* de Bolonia, figurará siempre como un notable geómetra, que hizo progresar mucho el *cálculo integral* con su *método de los indivisibles.*

Las contribuciones más importantes, que Arquímedes hizo a la matemática fueron en el dominio de lo que hoy llamamos "*cálculo integral*", teoremas sobre áreas de figuras planas y sobre volúmenes de cuerpos sólidos. En la *Medida del Círculo* encontró una aproximación de la circunferencia del círculo por el uso de los polígonos regulares inscritos y circunscritos. Extendiendo su aproximación a polígonos de 96 lados, encontró que π es aproximadamente igual a 3 1/7.

Edwards, Jr, 1937, nos menciona de los tres ingredientes faltantes, que obscurecen la gran labor sobre el cálculo del sabio de Grecia.

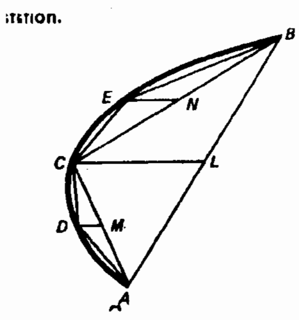
A pesar de estas nubosidades, varios autores han dado crédito a *Arquímedes como el descubridor original del cálculo.*

(1) La introducción explícita del concepto de límite.

(2) Un algoritmo general computacional para el cálculo de áreas y volúmenes.

(3) Un reconocimiento de la relación inversa entre los problemas de área y la tangente.

Cuadratura de la parábola utilizando el método de Exhaution aplicado por Arquímedes.



Pero de la antigüedad fue Arquímedes quién hizo la más elegante aplicación del método de Exhaución y quién estuvo muy cerca de la ***integración actual***. Como uno de sus primeros acercamientos, la cuadratura de un segmento parabólico (ver figura anterior). Designemos los puntos *C, D, E* como los puntos en el arco del segmento parabólico, obtenidos al dibujar *LC, MD, NE* paralelas al eje de la parábola y pasando por los puntos medios *L, M, N* de *AB, CA, CB* de la geometría de la parábola Arquímedes mostró que

$$\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}$$

Por aplicaciones repetidas de esta idea encontró que el área del segmento parabólico está dada por

$$\Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \ldots\ldots$$

$$= \Delta ABC\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{4}{3}\Delta ABC.$$

Aquí tenemos abreviado el trabajo, tomando el límite de la suma de una progresión geométrica; el área del segmento parabólico es: $\frac{4}{3}A$. (A = área del triángulo inscrito).De acuerdo a las figuras siguientes se procederá a la obtención de: $\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}$. Debido a que pocos autores ofrecen la demostración, a continuación la presento, utilizando medios más modernos de los que disponía Arquímedes.

Así por geometría de la parábola en la figura B el lado (cuerda) AB queda dividido en cuatro partes iguales. Como BP = $\frac{BL}{2}$, y BN = $\frac{BC}{2}$, y *EP es paralela a CL*. Podemos aseverar que; $NP = \frac{CL}{2}$; Se demostrará que el ΔCBL = 4ΔNBP = 4ΔCBE; Ya que el ΔCBL contiene: (1) al ΔNBP en su posición original, (2) si desplazamos el ΔBNP de modo que BN se pose sobre NC del ΔCBL; y como los ∠BNP y ∠NCL son iguales por ser correspondientes, cabe perfectamente ΔNBP en ΔCBL, (3) si posamos BP en PL el ΔBPN cabe en el ΔBLC pues $NP = \frac{CL}{2}$ y además ∠BPN = ∠BLC por ser correspondientes, (4) y por último el espacio restante da lugar a un triángulo con las siguientes características uno de sus lados es *NP* que pertenece al ΔBPN, su lado mayor es igual y paralelo a *NC* y el otro lado es igual y paralelo a *PL*, y como estos dos últimos lados son también lados del ΔBPN entonces este cuarto triángulo es igual al ΔBPN. Y en consecuencia ΔCBL = 4ΔNBP.

Ahora se procederá a demostrar que ΔNBP = ΔEBC; De la figura B, CL nos representa al eje *x*, y la paralela a AB que es tangente en C, como el eje *y*, así pues, el punto E de la parábola tiene de coordenadas (*x, y*) y el punto B de la misma (CL, LB), en este caso *y* *igual* y paralela a PL = BP = $y = \frac{LB}{2}$ $\therefore$ E$\left(x, \frac{LB}{2}\right)$ como la parábola se rige por la expresión $y^2 = 4px$, hagamos uso de ella en los dos puntos de la misma es decir en E y en B. Del punto E tenemos $\left(\frac{LB}{2}\right)^2 = 4px$ $\therefore$ $x = \left(\frac{LB}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4p}\right)$; Del punto B tenemos $(LB)^2 = 4p(CL)$ de aquí $\left(\frac{LB}{2}\right)^2 = p(CL)$; Sustituyendo este valor en la igualdad de *x*; tenemos: $x = p(CL)\left(\frac{1}{4p}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)(CL) \therefore EP = (\frac{3}{4})(CL) \therefore$ como $NP = \frac{CL}{2}$ entonces: $EN = \frac{CL}{4}$ y finalmente NP = 2EN, con estos datos a continuación podemos comparar los triángulos de interés en la figura B, los ΔBNP y ΔENC en N, sus ángulos son opuestos por el vértice y por tanto iguales, además al inicio dijimos que BN = NC, y como acabamos de demostrar NP = 2EN de esto se concluye que ΔBNP = 2ΔENC; Examinando los ΔBNP y ΔENB tenemos que el lado NB es común, que los $\angle$s BNP y BNE son suplementarios y por tanto el valor del *seno* de ambos es el mismo, como demostramos NP = 2EN; El área de un triángulo está dada por: Área = $\frac{1}{2}$ *ab(senC)*. Cuando se conoce un ángulo y los lados que lo sustentan.

Sustituyendo valores y comparando las dos áreas tenemos que: ΔBNP = 2 ΔENB = ΔCEB; retomando nuestro ΔLCB = 4ΔCEB ya que (ΔNBP = ΔCEB); de forma análoga obtenemos que ΔACL = 4ΔCDA; pues ΔACL + ΔLCB = ΔACB; y con esto la demostración finaliza.

$$\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}.$$

El punto de viraje de las matemáticas fue la *variable de Descartes*. Debido a ello se introdujo en las matemáticas el movimiento y adjunto la dialéctica, de aquí surge la necesidad del *cálculo diferencial e integral,* que se inicia, y que Newton y Leibniz perfeccionaron, pero hay que aclarar atrás de ellos hubo un sustento enorme de grandes sabios.

Kepler: Es de los más recientes europeos modernos que desarrollaron ideas de infinitesimales en conexión con integración, particular mención debe ser hecha a Johann Kepler. Tuvo que acudir a un procedimiento de *integración* para calcular áreas implicadas en su segunda ley del movimiento planetario y también los volúmenes repartidos en su tratado sobre capacidad de barriles de vino.

Struik,1994, nos dice:

La exposición sistemática de lo que actualmente llamamos el cálculo. Apareció en la *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) de Bonaventura Cavalieri. Aquí estableció una forma simple del cálculo, basándola en la concepción escolástica de lo *indivisible*, el punto generando la línea, la línea generando el plano por movimiento. Cavalieri entonces, sumaba segmentos lineales para obtener un área, segmentos planos para obtener un volumen. Sus ideas sobre las líneas que forman un área lo condujeron al "principio de Cavalieri" correcto, el cual infiere que dos sólidos de alturas iguales tienen el mismo volumen, si las secciones transversales planas a igual altura tienen la misma área. Esto le permitió llevar a cabo el equivalente de la integración de polinomios.

Bibliografía

Boyer, Carl B. The History of the Calculus and its Conceptual Development. Dover Publications, Inc. New York 1949.

Edwards, C.H. Jr. The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag. U.S.A. 1937.

Eves, Howard. An Introduction to the History of Mathematics, Holt, rinehart and Winston U.S.A. 1953.

Newman, James R. El mundo de las matemáticas, Ediciones Grijalbo, S.A. Barcelona 1994

Niklitschek, Alexander. El prodigioso jardín de las matemáticas. Iberia-Joaquín Gil Barcelona 1944.

Pastor, J. Rey., Babini, José. Historia de la matemática. Gedisa. Barcelona 1997.

Smith, David Eugene, History of mathematics; Dover Publications, Inc. New York. 1925

Struik, Dirk Jan., Historia concisa de las matemáticas. I.P.N- México 1994

La enseñanza de la matemática. Sistema de habilidades lógicas y su relación con el aprendizaje de esta ciencia

Dora Odstrcil, Josefina Royo, Celia Torres Bugeau, Edna Agostini, Ana Lasserre, Mercedes Naraskevicins
Universidad Nacional de Jujuy
Argentina

En el marco de la Transformación Educativa que nuestro país iniciara a comienzos de esta década y que alcanzará su punto culminante en los primeros años del siglo entrante, numerosas son las investigaciones llevadas a cabo por distintos equipos, todas ellas tendiendo a un mismo objetivo : mejorar la calidad de la enseñanza que se imparte a nuestra niñez y juventud en todos los niveles del sistema educativo.

En el caso particular de la matemática, esas investigaciones tendieron, además, a disminuir el alto índice de fracaso en esta disciplina, observado en nuestro estudiantes.

Así, en nuestro trabajo de investigación "Hacia una nueva dinámica en la enseñanza de la Matemática" que se encuentra en la etapa de elaboración del Informe final, la hipótesis central de trabajo que sostuvimos, era la siguiente : *"Una de causas del fracaso en el aprendizaje de la Matemática es la ausencia de competencias básicas en los estudiantes, en lectura y comprensión de textos que le permitan o le faciliten el aprendizaje de la Matemática".*

A lo largo del desarrollo de la investigación antes citada, emerge otra causa como determinante del fracaso en el aprendizaje de la Matemática y es la carencia de formación en las habilidades lógicas necesarias para un correcto aprendizaje en la EGB III, a partir de lo abordado en EGB I y II. Impulsadas por el deseo de ofrecer respuestas a la comunidad educativa comprometida en este estudio, decidimos indagar acerca del esclarecimiento de esta nueva causalidad.

Los objetivos planteados son los siguientes :

- Diagnosticar en los alumnos ingresantes a la EGB III, en la provincia de Jujuy, el nivel de adquisición previa de habilidades lógicas u operaciones mentales, necesarias para el aprendizaje de la matemática en ese nivel
- Determinar cuáles son las falencias básicas de la enseñanza de la matemática en EGB I y II que obstaculizan o no estimulan la adquisición de las habilidades lógicas necesarias para el aprendizaje de la matemática en EGB III.
- Proponer un sistema de acciones compensatorias, adecuadas a nuestro contexto provincial, que estimulen el desarrollo de esas habilidades
- Desarrollar algunas ideas generales acerca de cómo trabajar los conceptos básicos de aritmética y geometría acorde a la etapa evolutiva del estudiante de EGB III.

Metodología

Lugar de estudio

La investigación se desarrollará en dos escuelas de EGB I y II y en dos de EGB III, ubicadas en San Salvador de Jujuy, capital de la Provincia de Jujuy. Es decir que se tomarán en total 4 escuelas.

Etapas de la investigación

El proceso de investigación se desarrollará con un enfoque cualitativo de tipo etnográfico, distinguiéndose 3 etapas en el mismo.

Etapa de preparación

En esta fase, el equipo de investigación discutirá el proyecto de trabajo y diseñará la organización futura del mismo. Se considerará fundamental la revisión bibliográfica acerca del tema en cuestión a fin de enriquecer las conceptualizaciones teóricas que sustentan el problema a abordar.

Se diseñarán los instrumentos a aplicar en el trabajo de campo, acordando el enfoque que se imprimirá a las observaciones y entrevistas a realizar. Se iniciará el vínculo con las escuelas de EGB I y II en las cuales se realizarán las observaciones y entrevistas correspondientes y se restablecerá el vínculo con las escuelas secundarias (EGB III) que ya fueron el universo de estudio de nuestra investigación anterior. En esta presentación se discutirá el proyecto de trabajo con la institución. Se destaca que existen conversaciones previas acerca del estudio planificado por el equipo de investigación con directivos y docentes de las escuelas citadas.

Trabajo de campo

Se realizarán entrevistas al personal docente y alumnos, encuestas, observación de clases y análisis de documentación.

Está prevista la realización de un diagnóstico inicial a los grupos seleccionados en el EGB III. Las visitas institucionales tendrán una frecuencia de una o dos veces por semana.

Etapa de análisis e interpretación

Debido a las características del proyecto (se trabaja con docentes, alumnos e intervenciones pedagógicas en el proceso de aprendizaje), se hace necesario realizar el análisis y la interpretación de los datos, no sólo al final del proyecto sino en forma paralela a la recolección de la información. Este sistema de trabajo nos permitirá revisar el marco conceptual acordado y el reajuste de las hipótesis iniciales, desde los datos empíricos recolectados.

Etapa de redacción de informe final

Puesto que se prevé el desarrollo del proyecto en tres grandes etapas, al finalizar cada una de ellas se redactará un informe final-parcial integrando los múltiples análisis e interpretaciones cuanti-cualitativas de los procesos en estudio

Triangulación de la metodología

Se cruzarán los datos de tipo etnográfico con los obtenidos en el trabajo estadístico pre-experimental, a fin de obtener los datos empíricos necesarios para evaluar habilidades lógicas, proponer estrategias compensatorias y evaluar la eficacia de esas estrategias. En la faz de trabajo inicial se aplicará uno o dos instrumentos de diagnóstico para evaluar las habilidades lógicas alcanzadas, evaluación que será cuantificada en forma numérica.

Para neutralizar los efectos de invalidación externa (interacción de administración del test con el test propiamente dicho) se elaborarán dos instrumentos de diagnóstico que evaluarán las mismas habilidades lógicas.

Transferencia

- El conocimiento teórico que resulte de esta investigación será propuesto como material de consulta para:

1. La elaboración de diseños curriculares, tanto del nivel correspondiente como de la formación docente.

2. La implementación de esos mismos diseños curriculares.
3. La evaluación de los alumnos en relación a su aprendizaje de la Matemática.

- Esta investigación contribuirá al mejoramiento de la enseñanza de la Matemática que es de significativa importancia dadas las especiales características socio-culturales y económicas de la región NOA y de la provincia de Jujuy, en particular.
- Como el ámbito de trabajo de campo de esta investigación son instituciones educativas, la transferencia a ellas es inmediata, tanto en lo que respecta a la capacitación de los docentes, como al rendimiento de los alumnos involucrados en la experiencia.

Bibliografía

Assael y otros (1989) "Alumnos, padres y maestros. La representación de la escuela" - Programa Interdisciplinario de investigaciones en educación (PIIE) - Santiago de Chile

Campbell,D. Y Stanley,J. (1995) "Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social"- Amorrortu Editores - Buenos Aires

Blalock,H. (1994) "Estadística social" - Fondo de Cultura Económica SA de CV - México

Piaget,J ; Inhelder,B. (1977) : "Psicología del niño" - Ediciones Morata - Madrid

Naraskevicins, M. ; Odstrcil,D. ; Royo,J. ; Torres Bugeau,C. ; Agostini, E. ; Lasserre,A. (1998) "Lectura comprensivo-activa en la enseñanza de la matemática". En Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa- Pág 151 a 154 - Grupo Editorial Iberoamérica - México. -

Odstrcil,D. ; Royo,J. ; Torres Bugeau,C. ; Agostini,Edna ; Lasserre,A. ; Naraskevicins, M. (1997) "En busqueda de una propuesta en la enseñanza de la geometria" - En Investigaciones Educativas - Victor Manuel Hanne - Salta - Argentina

Royo,J. ; Torres Bugeau,C. ; Agostini,Edna ; Lasserre,A. ; Naraskevicins, M. ; Odstrcil,D. (1998) - "Aportes para la integracion de niveles en Educación Matemática, en el marco de la Transformación Educativa en la Provincia de Jujuy"- Trabajo presentado en IV Seminario Internacional de Integración Subregional - Puno - PERU

Torres Bugeau,C. ; Agostini,Edna ; Lasserre,A. ; Naraskevicins, M. ; Odstrcil,D. ; Royo,J. (1998) - "Una alternativa en la enseñanza de la Matemática" - Trabajo presentado en XII RELME - Bogotá (Colombia) -

Agostini,Edna ; Lasserre,A. ; Naraskevicins, M. ; Odstrcil,D. ; Royo,J. ; Torres Bugeau,C. (1998)- "La geometria : ¿puede aprenderse de otro modo ?" - Trabajo aceptado para ser presentado en el 1° Congreso Argentino en Educación Matemática Resistencia (Chaco)

Lasserre,A y otros (1994) - "El niño y las matematicas escolares : ¿que se enseña en las aulas ?" - Trabajo presentado en IV Jornadas de Investigación en Humanidades y Cs. Sociales - UNJu -

Odstrcil,D. ; Royo,J. ; Torres Bugeau,C. ; Agostini,Edna ; Lasserre,A. (1993) "Posibles causas del fracaso de los alumnos en Matemática" - Jornadas sobre Fracaso Escolar - FHyCS - UNJu.

Bardavid, D ; Daino,M ; Lasserre,C ; Lasserre,A (1995) "El niño y las Matemáticas escolares : Análisis del curriculum" - Cuadernos de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales N° 5- JUJUY - Pág. 19 a 25. -

Bardavid, D ; Daino,M ; Lasserre,C ; Lasserre,A (1995) "Obstáculos en la enseñanza de la estructura multiplicativa : una cuestión didáctica" - 1995 - En Publicaciones de la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa - Vol. II. Página 49 a 54. LA HABANA. Cuba. –

Aspectos a considerar en un diseño de instrucción centrado en el proceso de solución de problemas matemáticos. Caso del Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería de la UCV

Yolanda Serres Voisin (yserres@sagi.ucv.edu.ve)
Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería
Venezuela

El objetivo de esta investigación fue determinar aspectos específicos que hagan más eficiente el progreso de la capacidad de resolver problemas y proponer soluciones de enseñanza-aprendizaje para ser implementadas en el aula. La instrucción estuvo enmarcada en el área de Lenguaje y Métodos de Pensamiento dictada en el Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela. El marco teórico considerado fue la definición de diseño instruccional de Aguilar (1989), considerándose componentes de naturaleza instruccional los siguientes: el proceso de aprendizaje de los estudiantes, los propósitos del área, las estrategias docentes, los materiales instruccionales y la evaluación; y los aportes de Schoenfeld (1992) y Lester (1994) sobre la solución de problemas en la Educación Matemática. Como resultados del trabajo de campo se recomienda: - desarrollar el "punto de vista matemático" en problemas de contenido específico, - usar estrategias como los mapas conceptuales paralelamente al proceso de solución de problemas, - proponer la elaboración y el uso de materiales instruccionales contextualizados, - uso de instrumentos de evaluación que promuevan la autocrítica.

Planteamiento del problema

En la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería (FIUCV) existe, desde hace diez años, un Curso Introductorio. Este curso nació como una propuesta para resolver los problemas de aprendizaje observados en los estudiantes de nuevo ingreso con respecto a las fallas de conocimientos previos y de estrategias para resolver los problemas que se le planteaban, necesarios para el estudio de la ingeniería. Para ingresar a dicho curso el bachiller o estudiante del último año del bachillerato debe presentar la Prueba Voluntaria de Aptitud Académica (PVAA) que administra la FIUCV. El estudiante que resulta aprobado es asignado al primer semestre de la carrera, pero si está cerca de los parámetros de aprobación se le ofrece la posibilidad de ingresar al mencionado curso. El curso dura un semestre y consta de seis asignaturas obligatorias (Física, Geometría, Lenguaje y Métodos de Pensamiento, Matemática, Orientación y Química) que deben ser todas aprobadas para que el estudiante ingrese al primer semestre de la carrera. La asignatura Lenguaje y Métodos de Pensamiento tiene como propósitos: 1. Ayudar al estudiante a desarrollar habilidades de búsqueda, investigación y producción de conocimientos. 2. Proporcionar información y experiencias de aprendizaje para que el estudiante explore y evalúe su nivel de habilidades para el estudio de las otras áreas del Curso Introductorio. 3. Estimular el desarrollo de una actitud crítica y reflexiva por parte del estudiante, de modo que éste pueda dirigir y supervisar su proceso de aprendizaje, (Programa de Lenguaje y Métodos de Pensamiento, 1997).

Debido a reiteradas sugerencias de aplicar el contenido del área Lenguaje y Métodos de Pensamiento a otras áreas del conocimiento, es decir, de darle aun más el carácter instrumental a la misma se planteó transferir estos conocimientos al área de Matemáticas, ya que entre algunas de las características de los nuevos enfoques de enseñanza de la matemática se encuentran: - el adquirir los procesos de pensamiento matemático, como el de aprendizaje activo, en cuanto a las metas del enfoque; .- el de una didáctica centrada en procesos y con énfasis en el desarrollo de estrategias heurísticas para la solución de problemas, en cuanto a la metodología a utilizar, (González, 1994). Este enfoque busca un estudiante autónomo, que piense matemáticamente de manera de fortalecer sus capacidades intelectuales, y percibe las matemáticas como un saber hacer más que como un contenido por saber.

También en una revisión sobre el papel de la solución de problemas en la comunidad de educación matemática, realizada por Lester (1994), éste plantea que aunque hay ambigüedades en las conclusiones, los resultados que sobresalen los siguientes: 1. Los estudiantes tienen que resolver muchos problemas para mejorar las habilidades asociadas a este proceso. 2. Las habilidades para resolver problemas se desarrollan lentamente a lo largo de un prolongado período de tiempo. 3. Para que los estudiantes se beneficien de la instrucción, deben sentir que sus maestros piensan que resolver problemas es importante. 4. La mayoría de los estudiantes se benefician enormemente de la instrucción en solución de problemas si ella es planificada sistemáticamente. 5. Enseñar a los estudiantes estrategias para resolver problemas, heurísticas y fases de resolución de problemas (por ejemplo la de Pólya [1945/1973 modelo de solución de problemas en cuatro fases), contribuye poco a mejorar las habilidades de los estudiantes para solucionar problemas matemáticos en general.

Por todas las razones expuestas anteriormente se consideró que el área Lenguaje y Métodos de Pensamiento debe ayudar al aprendizaje de las matemáticas, promoviendo de manera intencional la transferencia de sus contenidos a esa área del conocimiento, y tomando como base el proceso de solución de problemas matemáticos de los estudiantes del Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela (CIFIUCV) e introduciendo modificaciones en su diseño de manera de aplicar los conocimientos de las ciencias cognitivas sobre cómo se aprende a una área específica, que para efectos de esta investigación fue escogida la matemática por su importancia en la formación de un ingeniero.

Objetivos

Esta investigación se centró en **estudiar** aspectos específicos que hagan más eficiente el progreso de la capacidad de resolver problemas a partir de actividades en el aula; **proponer** soluciones de enseñanza-aprendizaje para ser implementadas en el aula, de modo que sea posible un mejor aprovechamiento y desarrollo de la capacidad de resolver problemas; y **proponer** estrategias para cuestiones específicas basadas en problemas.

Marco teórico

El concepto de **diseño de instrucción** que se siguió en esta investigación fue el siguiente:

"Un proceso que apoyado en un enfoque sistémico, organiza de una forma sistemática un conjunto de componentes de naturaleza instruccional, que permiten satisfacer necesidades y metas instruccionales". (Aguilar, 1989).

Se tomó este concepto por considerar la instrucción como un proceso que tiene múltiples partes y múltiples relaciones que forman un sistema, cuyos insumos son las necesidades del grupo de estudiantes involucrados y cuyos productos son el logro de las metas instruccionales tanto de los estudiantes, como de los docentes y de la institución educativa responsable de la instrucción. Se considera que las partes que conforman el sistema son: el proceso de aprendizaje de los estudiantes, los objetivos instruccionales, las estrategias docentes, la evaluación y los materiales instruccionales. En cuanto a los **objetivos instruccionales** plantea Schoenfeld (1992) que la instrucción matemática debe:

- desarrollar la comprensión de conceptos importantes en el contexto apropiado de los estudiantes;
- proveer a los estudiantes la oportunidad para explorar un amplio rango de problemas y de situaciones problemáticas;
- ayudar a los estudiantes a desarrollar lo que ha sido llamado un "punto de vista matemático";

- ayudar a los estudiantes a desarrollar precisión tanto en presentaciones escritas como en orales;
- ayudar a los estudiantes a desarrollar la habilidad de leer y usar el texto y otros materiales matemáticos.

El "punto de vista matemático", se entiende como analizar y comprender, percibir la estructura y las relaciones estructurales, ver cómo funcionan juntas, denotar aquellas connotaciones que pueden ser puras o aplicadas, ayudando así a los estudiantes a desarrollar sus destrezas analíticas y la habilidad para razonar.

Plantea (Lester, 1994), que la enseñanza de la cognición y la metacognición en el proceso de solución de problemas matemáticos debe ocurrir en el contexto de aprendizaje de conceptos y técnicas matemáticas específicas, pues la instrucción de metacognición general probablemente va a ser menos efectiva.

Sumados a estos planteamientos está el de Santos (1996): "no solamente resulta importante que el estudiante aprenda una gama de contenidos matemáticos, reglas, fórmulas, y procedimientos; sino que también es necesario que desarrolle un conjunto de habilidades y estrategias que le permitan aplicar y encontrar el sentido de las ideas matemáticas. En este proceso, es importante que el estudiante proponga y analice conjeturas, formule, rediseñe, y resuelva diversos tipos de problemas. Además, es necesario que el estudiante desarrolle cierta disposición hacia el estudio de las matemáticas donde valore y comunique eficientemente sus ideas". (p. 58)

Las **estrategias docentes** son todas aquellas acciones que lleva a cabo el docente en el aula de clases que estimulen, propicien y orienten el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Estas pueden ser debates, preguntas, observaciones, conclusiones, etc. Algunas acciones a seguir en la enseñanza centrada en el proceso de solución de problemas son: (Lester y col., citado por Schoenfeld, 1992)

ANTES

ACCIÓN AL ENSEÑAR	PROPÓSITO
1. Leer el problema, discutir palabras o frases que los estudiantes puedan no entender.	*Ilustrar la importancia de leer cuidadosamente, focalizar en vocabulario especial.*
2. Usar la discusión de la clase completa para focalizar en la importancia de entender el problema.	Focalizar en datos importantes, clarificación de procesos.
3. (Opcional) Discusión de la clase completa de posibles estrategias para resolver un problema.	Sonsacar ideas para posibles caminos para solucionar el problema.

DURANTE

4. Observar y preguntar a los estudiantes para determinar dónde están.	Diagnosticar debilidades y fortalezas.
5. Proveer tantas indicaciones como sean necesarias.	Ayudar a los estudiantes a superar obstáculos.
6. Proveer tantas extensiones del problema como sean necesarias.	Retar a los estudiantes que terminan primero a que generalicen la solución.
7. Requerir a los estudiantes que obtengan una solución que responda la pregunta del problema.	Requerir a los estudiantes mirar su propio trabajo y estar seguros de que tiene sentido.

DESPUÉS

8. Mostrar y discutir soluciones.	Mostrar y nombrar diferentes estrategias.
9. Referir previamente problemas resueltos o tener extensiones resueltas por estudiantes.	Demostrar aplicabilidad general de las estrategias de solución de problemas.
10. Discutir fracasos especiales, como dibujos.	Mostrar como los fracasos pueden influenciar la aproximación.

En el contexto de esta investigación se plantearon las siguientes acciones adicionales: *Antes del proceso:* cuando se trata de focalizar en el vocabulario especial, en estos estudiantes esencialmente hay que focalizar en la terminología y en los conceptos matemáticos. En cuanto a focalizar en datos importantes, hay que considerar los explícitos e implícitos al problema, y clarificar los conocimientos previos tanto de conceptos como de procesos y por último comparar con problemas realizados anteriormente o analizar los recursos necesarios para abordarlo.

Después del proceso: hay que discutir todo tipo de representaciones que puedan haber llevado al fracaso del proceso.

Como recomendaciones de aula para los profesores, Schoenfeld (1992), (p. 365) agrega:

- Modelar las conductas de solución de problemas siempre y cuando sea posible, explorar y experimentar junto con los estudiantes.
- Crear una atmósfera de aula en el cual los estudiantes se sientan cómodos intentando expresar sus propias ideas.
- Invitar a los estudiantes a explicar sus pensamientos en todas las etapas de solución de problemas (leer, explorar, analizar, planificar y verificar).
- Apuntar hacia el hecho de que más de una estrategia puede necesitarse para resolver un problema, dado que hay problemas que pueden requerir aproximaciones originales.
- Presentar situaciones problemáticas muy parecidas a la realidad, tanto en variedad como en complejidad, de modo que las experiencias que los estudiantes obtienen en el aula sean transferidas.

En una clase donde se quiere estimar las habilidades para resolver problemas que poseen los estudiantes, el docente debe manejar con propiedad el área de conocimiento de los problemas que plantee, para poder entender y explicar el proceso de aprendizaje del área en cuestión y, en consecuencia, tener variaciones de los problemas, plantear varias vías para resolverlo y hacer las preguntas pertinentes para poder explorar el proceso de solución que sigue el estudiante; el docente debe ser un experto en contenido y un experto en procesos cognitivos para que facilite las relaciones entre los aspectos conceptuales y los procesos y proporciones la condiciones para que los estudiantes descubran el conocimiento, (Sánchez, 1994). Una consecuencia directa de esto es la necesidad de la constante actitud de explorador que debe mantener el docente, buscar nuevos e interesantes problemas, preparar dinámicas par promover la discusión centrada en el conocimiento y no en su autoridad, atender los casos especiales fuera del aula, (quizás las dos horas semanales de consultas que habitualmente se asignan en la FIUCV, sean insuficientes para un proceso de ayuda al reaprendizaje).

El aspecto de la **evaluación** se considera el más complejo de abordar en un enfoque de aprendizaje cognoscitivo, pues los cambios que se van produciendo durante un período escolar en un estudiante no son totalmente tangibles. Primero porque los instrumentos de evaluación, ya sean individual o grupal, generalmente escritos, tareas, pruebas, reportes, proyectos, etc. no muestran el proceso "tal cual" como ocurre. La evaluación oral es poco usada actualmente y además exige una alta inversión de tiempo que el docente venezolano no está en capacidad de afrontar (los cursos suelen ser de 35 a 45 estudiantes). Una modalidad muy utilizada en la asignatura Lenguaje y Métodos de Pensamiento es la autoevaluación y la coevaluación, la cual ha dado resultados aceptables. Se insiste en la actividad de evaluación como un momento para revisarse, para hacer un corte en el tiempo, dar un juicio y decidir si hay que mejorar en algún aspecto o proponerse nuevos retos de aprendizaje.

También se considera que el aprendizaje al que da lugar la asignatura no es de evaluación inmediata, el cambio en las estructuras de conocimientos, en las estrategias utilizadas para resolver problemas y en el estado de alerta es un proceso que va más allá de un período escolar. Algunos estudiantes han manifestado la utilidad de la asignatura luego de terminado el semestre, confiesan estar más alerta de lo que hacen, preguntarse constantemente ¿cuál es la meta del problema?, pensar antes de comenzar qué es lo que tienen que hacer y buscar el camino más óptimo (Según entrevista realizada a los estudiantes que conformaron la muestra de esta investigación, dos meses después de terminada la fase de recolección de la información).

Las propuestas concretas en cuanto a los instrumentos de evaluación a utilizar son: - Tareas que conformen un portafolio para evaluar la adquisición del conocimiento conceptual, a través de la elaboración de mapas conceptuales, y para evaluar el proceso de solución de problemas, a través de problemas con distintas instrucciones y niveles de dificultad y de pequeños proyectos de investigación para tener la posibilidad de resolver problemas más cercanos a la realidad y con un nivel de complejidad más real. - Pruebas con material de apoyo permitido (guías de la asignatura LMP). - Reportes de autoevaluación al finalizar cada prueba.

En cuanto a cómo diseñar los **materiales instruccionales** se coincide con Lopes y Costa, (1996) en la afirmación "un currículo centrado en resolución de problemas debe estar basado en una gran variedad de problemas", (p. 46). Y también con Schoenfeld (1992) cuando enfatiza en que se debe ofrecer al estudiante un rango de problemas que vaya desde los abiertos hasta los cerrados y también situaciones exploratorias, conjuntamente con una amplia variedad de aproximaciones y técnicas, dominando desde las aplicaciones lineales de los métodos algorítmicos apropiados para el uso de métodos de aproximación, hasta el uso de estrategias heurísticas de solución de problemas.

Por otra parte los materiales instruccionales tienen que considerar el uso de la tecnología, calculadoras y computadoras específicamente, ya que estos componentes permiten el planteamiento de problemas de más reto, permiten, al no dedicar tanto tiempo a los cálculos, hacer los problemas por más vías y además motivan a los estudiantes a cumplir con la demanda de tarea al sentirse en un ambiente más acorde con el entorno que lo rodea y, en el caso particular de estudiantes de ingeniería, con las necesidades de su profesión.

Análisis de los resultados

Esta investigación fue del tipo cualitativa etnográfica (Martínez, 1991), ya que pretendió describir cómo resuelven problemas matemáticos un grupo específico de personas: los estudiantes de una sección del Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela. Paralelamente a la investigación de este fenómeno y de sus causas se evaluó cómo se progresa en este proceso y cómo se diseñará la instrucción para ayudar a este proceso.

La información se obtuvo utilizando como técnicas básicas las siguientes:

- la observación participante, ya que las clases de Lenguaje y Métodos de Pensamiento tienen una dinámica tipo taller que permite a la investigadora, y a la vez docente del grupo, plantearse la observación como estrategia fundamental para adquirir la información necesaria tanto de los aspectos globales que pueden influir en el proceso como de los detalles; éstas se hicieron en la fase de ejercitación de la clase, es decir, luego de haber planteado los problemas, haberlos resueltos y discutido en grupo;

- las entrevistas semiestructuradas, las cuales fueron programadas en las horas de consulta de la asignatura y tuvieron por objetivo aclarar los aspectos necesarios que no fueron captados en la observación de aula; se hicieron de manera individual o en parejas. Para congelar la información suministrada se utilizó un grabador de audio;
- el portafolio como instrumento de estimación del trabajo estudiantil, éste fue el principal instrumento de evaluación de la asignatura Lenguaje y Métodos de Pensamiento; se realizaron revisiones periódicas con el objetivo de evaluar el interés, la dedicación y el esfuerzo que hizo el estudiante en cada tema;
- las filmaciones de las clases donde se llevó a cabo el proceso; se hicieron en las últimas semanas de clase para apreciar el progreso en el proceso de solución de problemas y para mantener los hechos congelados.

Los resultados arrojaron lo siguiente: en cuanto a los estudiantes de alto rendimiento, éstos realizan el análisis de los problemas de manera implícita o explícita, implícita porque aunque no identifiquen la estructura del problema como se les exige su implementación muestra que hubo análisis de la situación. Identifican y usan los conceptos involucrados con el problema. Llegan a las soluciones y las verifican bien sea explicando su propio proceso o justificando con argumentos de la propia matemática.

Los estudiantes de rendimiento medio analizan los problemas, identifican los conceptos, usan estrategias pero las técnicas de verificación que mencionan son generales y poco efectivas (llegué a la meta y cumplí con las condiciones).

En cuanto a los estudiantes de bajo rendimiento presentan un análisis erróneo, no verifican sus respuestas y tienen una baja ejecución del lenguaje matemático.

Conclusiones

Para Lenguaje y Métodos de Pensamiento el reto está en: Desarrollar la habilidad de análisis como medio para abstraerse del contenido y centrarse en las estructuras del lenguaje matemático.

Desarrollar la habilidad de comparación en el marco del proceso de estudio de funciones reales donde se debe estimular el contraste entre el estudio analítico y la gráfica de la función.

Ayudar a mejorar la base conceptual necesaria para resolver los problemas, debe haber más conexión entre distintos temas, por ejemplo entre funciones afines, cuadráticas, de grado mayor que tres; deben diseñarse estrategias para ayudar a los estudiantes a adquirir el conocimiento conceptual. Se utilizaron los mapas conceptuales apreciándose un aprendizaje más significativo, como lo revelan otros estudios (Cruz, 1994). Esta base hará que los estudiantes puedan analizar los problemas con mayor propiedad pues si hay una dificultad conceptual, difícilmente se analiza y se razona desde conceptos previos relacionados con el problema específico. El proceso de solución de problemas puede darse si y sólo si hay comprensión conceptual del tema subyacente al problema, si no, el problema no tiene ningún significado, el estudiante no sabe cómo comenzar, por dónde atacar dicho problema. En una investigación reciente se apoya esta propuesta cuando se sugiere que un factor clave asociado con el nivel de éxito en el logro de las soluciones de los problemas de geometría es el estado de organización del conocimiento base, (Llorente, 1996)(p. 52). Los mapas conceptuales revelan los significados que se le dan a las ideas matemáticas, y además Fuatai, citado por González (1992), encontró en sus investigaciones con estudiantes de secundaria que después de la instrucción con mapas conceptuales, no sólo obtuvieron mejores puntuaciones en los tests de Matemáticas típicos, sino que aumentó su habilidad para la resolución de problemas matemáticos nuevos. (p. 152).

Se deben **diseñar estrategias** para mostrar la importancia de la **verificación** de las soluciones dadas a los problemas, de la seguridad que debe tenerse cuando se resuelve un problema. El dedicarle tiempo a esta etapa es una costumbre que debe modelarse permanentemente:

- En la **lectura** del problema, si es necesario debe solicitarse la lectura en voz alta y preguntar si hay alguna duda acerca de lo que pide el problema, en este momento se puede estimar la solución.
- En el **análisis**, cuando se busca la información esencial dada por el propio problema y se relaciona con la teoría matemática necesaria para abordar ese problema en particular; analizar el problema antes de comenzar a resolverlo es una estrategia en la que hay que insistir.
- En el **planteamiento de estrategias**, preguntar por qué esa estrategia es la mejor para resolver ese problema en particular.
- Llegar a la solución, e interpretar ésta.
- Y, por último, en cuanto a la escritura del problema.

En cuanto a los **materiales instruccionales** hay que elaborar un banco de problemas y de proyectos conjuntamente con los profesores de matemáticas incorporando el uso de la tecnología y actividades hechas por los estudiantes. Estos problemas y proyectos contextualizados a la sociedad venezolana servirán para realizar modelos matemáticos a pequeña escala y así preparase para las futuras demandas de la profesión de ingeniería.

Referencias bibliográficas

Aguilar, J. (1989). *El diseño de instrucción en la planificación de la enseñanza.* (Mimeografiado) (pp. 1-19). Caracas: Universidad Simón Bolívar.

Cruz, C. (1994). *Evaluación del desempeño estudiantil en matemáticas a nivel superior mediante mapas conceptuales y diagramas de Gowin.* Tesis de maestría en Educación. Caracas: Universidad Central de Venezuela. Facultad de Humanidades y Educación.

González, F. (1992). Los mapas conceptuales de J. D. Novak como instrumentos para la investigación en didáctica de las ciencias experimentales. *Enseñanza de la Ciencia,* 10(2), 148-158.

González, F. (1994). *Paradigmas en la enseñanza de la matemática.* Serie Temas de Educación Matemática. Parte Uno. Maracay: Copiher.

Lester, F. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25(6), 660-675.

Llorente, F. (1996). *Autoexplicaciones y resolución de problemas de geometría en estudiantes de alto y bajo rendimiento.* Tesis de maestría en Psicología de la Instrucción. Caracas: Universidad Central de Venezuela. Facultad de Humanidades y Educación.

Lopes, B., Costa, N. (1996). Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: fundamentación, presentación e implicaciones educativas. *Enseñanza de las Ciencias,* 14(1), 45-61.

Martínez, M. (1991). *La investigación cualitativa etnográfica en educación.* Caracas: Texto.

Sánchez, L. (1994). El proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva cognoscitiva. *Revista de Pedagogía,* XV(37), 21-30.

Santos, L. (1996). Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. *Educación Matemática,* 8(2), 57-69.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan

Análisis, revisión y posibles mejoras al proceso de Asesoramiento Académico a los estudiantes bajo régimen de permanencia, con deficiencias en el área de Matemática y Estadística[1]

Nelly Elizabeth González de Hernández.
Departamento de Estadística y Matemática de la Escuela de Administración y Contaduría.
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Central de Venezuela, Caracas Venezuela.

Motivación de la presentación de la Ponencia en la Decimotercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

La Unidad de Asesoramiento Académico (UAA) es un programa institucional de la Universidad Central de Venezuela, dirigido a sus estudiantes desde el momento de su ingreso hasta la culminación de sus estudios[2]. En su organización se establecen dos subprogramas: el sub programa de Asesoría Preventiva y el sub programa de Asesoría Remedial, es este último el objeto de nuestra investigación y pretende evaluar sus resultados y que den a conocer esta práctica con el fin de contrastar experiencias, mejoras sus deficiencias, potenciar y divulgar sus resultados positivos y en forma más amplia y ambiciosa, establecer contacto con aquellas instituciones —universidades, tecnológicos, etc.— donde existan procesos semejantes.

El encuentro con profesores de otras universidades latinoamericanas nos estimula a presentar la descripción de un proyecto en el cual hemos depositado nuestras mejores expectativas para ayudar a los estudiantes que deben superar dificultades de la práctica lectiva que, por diferentes motivos, no permiten una mayor eficiencia en el logro de sus actividades académicas.

El proyecto espera consecuencias que no sólo permitan al estudiante superar obstáculos sino también que aquellos profesores responsables de la ejecución de las actividades programadas por la UAA, detecten cuales son las necesidades que no ha atendido o cuales son los mecanismos que deberá utilizar en un futuro para que los resultados sean los mejores.

Justificación de la creación de una Unidad de Asesoramiento Académico

La Universidad Central de Venezuela contempla en su reglamentación, a fin de mantener los niveles de excelencia académica, la imposición de ciertas condiciones a aquellos estudiantes que no cumplan con los requisitos de rendimiento y eficiencia deseados[3]. Estas condiciones penalizan al estudiante que no cumple dichas exigencias y se le somete a sanciones que van desde minimizar el número de créditos académicos a ser cursados durante un semestre hasta permanecer fuera de la universidad durante un año[4].

Aquellos alumnos que se encuentran en situación tal que pudiera llevarlos temporalmente fuera de la institución, han sido objetos de preocupación por parte del cuerpo profesoral y en

---

[1] Investigación en proceso de desarrollo. En una primera fase dirigida al departamento de Estadística y Matemática de la Escuela de Administración y Contaduría. FACES. UCV y que en fases posteriores, se aplicará al resto de los Departamentos de la Escuela.

[2] Reglamento de Asesoría Académica. Capítulo I. Disposiciones Generales. Artículo 2 18 febrero 1998

[3] Universidad Central de Venezuela. Oficina Central de Asesoría Jurídica. Legislación Universitaria. Ediciones del Rectorado. Caracas 1992. Capítulo III Artículo 34

[4] Procedimientos para la aplicación de las Normas sobre Rendimiento Mínimo y Condiciones de Permanencia de los alumnos de la UCV. Abril 1996

la búsqueda de ofrecerles atención, fue creada la Unidad de Asesoramiento Académico, que contempla entre sus funciones organizar un grupo de profesores de planta para cumplir el papel de asesores/consejeros.

Los profesores asesores deben vigilar durante el transcurso del semestre, mediante entrevistas planificadas con el estudiante, el cumplimiento de ciertas estrategias que, de mutuo acuerdo, hayan logrado plantear para superar las dificultades que el estudiante supone son sus trabas y que el asesor, en base a su experiencia, considera que deben ser atendidas[5]. . Las estrategias a las que hacemos mención son trazadas una vez que se realiza la entrevista inicial donde el estudiante llena previamente un cuestionario que da la pauta al asesor de hacia donde debe dirigir sus cuidados. Una vez que el asesor/consejero se informa de los antecedentes del estudiante (copia del récord de calificaciones es entregado al profesor) *analiza el cuestionario donde suministra información sobre sus hábitos de estudio, actividades* paralelas que realiza (trabajo, deporte, cultura, familiares), analiza la problemática y propone al estudiante un *Plan de Trabajo* para superar las fallas detectadas.

Las entrevistas sucesivas permiten revisar si las actividades programas se cumplieron, sí los resultados obtenidos en la materia son los esperados y deseables y sí es necesario aplicar correctivos sobre la propuesta inicial de trabajo.

Desafortunadamente no existen mecanismos burocráticos que permitan al asesor/consejero conocer el resultado final del proceso a menos que el estudiante comunique voluntariamente el éxito o fracaso que haya alcanzado. No está previsto pues, un proceso de *retroalimentación* que estimule al profesor en los casos que el asesorado supere sus dificultades o que le alerte en caso contrario. En este aspecto se han realizado las recomendaciones respectivas a fin de solventar tal deficiencia y se han considerado, desde la perspectiva legal, la reglamentación interna de las UAA en función de recomendar la adecuación de sus procedimientos a tal fin.

El proceso tal y como está planteado ha generado diversas inquietudes entre quienes nos desempeñamos en el área de Matemática y Estadística. Por una parte, la experiencia nos indica que las razones argumentadas por los estudiantes para explicar su bajo rendimiento obedecen en la mayoría de los casos a elementos externos (el tiempo que nos quita tener que trabajar y estudiar, la atención a la familia, un problema de salud o un problema personal, entre otros) y en mucha menor proporción escuchamos una crítica sobre situaciones que apreciamos día a día en el aula (severas fallas en su formación matemática básica, métodos de estudios ineficientes a las características de la materia, falta de interés en la materia, por citar sólo algunas de las más frecuentes).

Además, llama también a reflexión que una significativa proporción de alumnos acuden a la primera entrevista con el asesor/consejero y después no continúan con el programa propuesto. Así que surgen interrogantes como ¿Quién falló? ¿Falló el asesor al proponer una estrategia que resultó no ser convincente? ¿Las razones de fracaso son ajenas al proceso de asesoramiento?, etc.

También nos preocupa, aparte de las inquietudes mencionadas anteriormente, que dentro de este grupo de estudiantes que necesitan la ayuda de la Unidad de Asesoramiento Académico son numerosos aquellos que revelan severas deficiencias en el área de Matemática y Estadística (aproximadamente un 50%, de los estudiantes bajo régimen de permanencia).

Es por este motivo que el Departamento de Estadística y Matemática se propone realizar una investigación entre los estudiantes bajo régimen a él asignados y dentro del grupo de profesores que han actuado como asesores, con los objetivos siguientes:

[5] Normas de Rendimiento Mínimo y Condiciones de Permanencia de los alumnos de la UCV Artículo 4

- Evaluar la eficiencia del proceso de asesoramiento académico en el área de Matemática y Estadística, bajo las características del proceso actual
- Conocer la percepción que el estudiante bajo régimen tiene del proceso
- Conocer la percepción del Asesor/Consejero sobre el proceso de Asesoramiento Académico

Como ya hemos dicho no tenemos argumentaciones *a priori* que nos hagan sospechar la ineficiencia de este sistema, antes por el contrario estamos convencidos de la potencialidad del asesoramiento académico pero por factores no identificados aún y fuera del control de quienes han instrumentado el programa hemos observado las siguientes deficiencias:

Adjudicables al estudiante:

- No acude en las fechas previstas a las entrevistas pautadas.
- Acude en una primera oportunidad y no regresa, convirtiéndose en un desertor del programa.
- No informa con exactitud las causas del bajo rendimiento, ocultando información que podría ser decisiva al ahora de trazar un Plan de Trabajo.
- Se presenta a las entrevistas pero no cumple los compromisos de trabajo en la materia.
- Ofrece cambiar algunas características del entorno personal/académico y no lo hace.

Adjudicables al profesor:

- No evalúa el conocimiento previo que posee el estudiante en la materia donde presenta sus deficiencias ni otras materias conexas, a fin de determinar sí la falla más grave radica en esa falta de información.
- Impone estrategias sin contar con la aceptación total del estudiante.
- No se compromete con el esfuerzo del estudiante y no cumple a cabalidad con su papel de Asesor.

Adjudicables a la Unidad de Asesoramiento Académico

- No se ha realizado la evaluación de la gestión y en consecuencia no existe información sobre los resultados.
- No se ha investigado, en el caso de los desertores del programa, las causas del retiro.
- No han sido revisadas las estrategias usadas por los profesores asesores a fin de evaluar su conveniencia.

Propuesta de Investigación

Convencidos de la necesidad de actuar en aquellos casos donde los estudiantes no rinden dentro de los límites esperados por la Institución proponemos realizar una investigación que satisfaga los objetivos siguientes:

- Puesta en práctica de un proceso de seguimiento sistemático de Asesores y Asesorados.
- Evaluación de las estrategias en cada caso.
- Investigación paralela de las motivaciones particulares de los estudiantes a través de entrevista, dirigidas y abiertas, encuestas y cuestionarios.
- Evaluación del rendimiento alcanzado por los asesorados en las materias que han sido objeto de asesoría

Objetivos

Generales

(a) Medir la eficiencia de la Sub Unidad de Asesoramiento Académico de la Escuela de Administración y Contaduría, FACES UCV, y el proceso a su cargo, en función de sus resultados potenciales y observados y eventualmente demostrar su vigencia y validez

(b) Reconocer cuáles, donde y de que tipo son las deficiencias existentes en el planteamiento del proceso de asesoría a los estudiantes bajo régimen de permanencia que no permiten minimizar la distancia entre los resultados potenciales y observados

(c) Reconocer las expectativas previas de los actores (estudiantes, asesores/consejeros, directiva de la Sub Unidad de Asesoramiento Académico) sobre el proceso, a fin de informar y modificar las percepciones negativas *a priori* en dichos actores para facilitar el proceso y potenciar los logros

Específicos

(a) Diseñar un proceso de seguimiento de Asesorados, para su posterior puesta en práctica sistemática

(b) Diseñar un proceso de seguimiento de Asesores, para su posterior puesta en práctica sistemática

(c) Medir expectativas sobre el proceso de asesoramiento académico mediante el seguimiento sistemático de los alumnos durante su permanencia bajo régimen, durante el segundo semestre lectivo del año 99

(d) Medir expectativas de los asesores sobre el proceso de asesoramiento académico, durante el segundo semestre lectivo del año 99.

(e) Medir resultados del proceso de asesoramiento académico desde el momento de su creación hasta el presente, en la Escuela de Administración y Contaduría

(f) Sistematizar las recomendaciones estratégicas mediante la creación de una técnica de uso general y sus consideraciones para la particularización de casos

(g) Diseñar un proceso de seguimiento de la aplicación de técnicas y sus adaptaciones a nuevos escenarios

(h) Evaluar los resultados durante el segundo semestre lectivo del año 99.

Metodología

Como podemos observar, tan amplia colección de objetivos han menester de diversos métodos de trabajo los cuales describiremos a continuación:

Para alcanzar los objetivos específicos *a* y *b*, se estudiará la estructura del método de trabajo actual de la Unidad de Asesoramiento Académico y con el análisis de resultados que se desprenden de los objetivos específicos *c* y *d* de la etapa antes señalada, se propondrá los elementos de observación periódica para mantener un sistema que interactue permanentemente

Para alcanzar los objetivos específicos *c* y *d* se realizarán dos encuestas de opinión bajo los criterios siguientes:

Para alcanzar el objetivo: EXPECTATIVAS DE LOS ASESORADOS AL INICIO DEL SEMESTRE

Metodología

Entrevistas de profundidad

El instrumento a utilizar es un cuestionario con preguntas cerradas y abiertas. El número de preguntas será un número no menor de quince (15) ni mayor de veinte (20). El tiempo estimado para realizar la entrevista se calcula alrededor de veinte (20) minutos. El tipo de muestreo será exhaustivo (la población de estudiantes bajo régimen para el segundo semestre del año 1999 es aproximadamente 250 estudiantes)

Variables a observar

- Perfil del estudiante bajo régimen
- Propuestas del estudiante para mejorar su rendimiento
- Expectativas del estudiante sobre su relación con el asesor y disposición de acatar las normas

Objetivo: expectativas de los asesores

Metodología

Entrevistas de profundidad al inicio del período de asesoría.

En las entrevistas el instrumento a utilizar es un cuestionario con preguntas cerradas y abiertas. El número de preguntas será un número no menor de veinte (20) ni mayor de veinticinco (25). El tiempo para realizar la entrevista se calcula alrededor de treinta (30) minutos. El tipo de muestreo será aleatorio La población de asesores es aproximadamente de ciento veinte (120) profesores.

Variables a observar

- Percepción del consejero en la entrevista inicial
- Dificultades de comunicación
- Sugerencias del consejero para mejorar el proceso

Para satisfacer el objetivo: SISTEMATIZACIÓN DE LAS RECOMENDACIONES ESTRATÉGICAS

Metodología

Búsqueda de datos en el material entregado a la Sub Unidad de Asesoramiento Académico (Planillas de entrevista) y en la Base de Datos que contiene la información académica de los estudiantes

Variables a observar

- Estrategias propuestas al inicio del semestre
- Cambios de estrategias y causas que las motivaron
- Resultado final del proceso (aprobado o reprobado)

Para satisfacer el objetivo: Percepción de los asesorados al final del semestre

Metodología

Entrevistas de profundidad.

El instrumento a utilizar es un cuestionario con preguntas cerradas y abiertas. El número de preguntas será un número no menor de treinta (30) ni mayor de treinta y cinco (35). El tiempo para realizar la entrevista se calcula alrededor de cuarenta (40) minutos. El tipo de muestreo será exhaustivo (la población de estudiantes bajo régimen para el segundo semestre del 99 es aproximadamente 250 pero es posible que al finalizar el semestre este número disminuya por los retiros voluntarios de alumnos desertores del sistema)

Variables a observar

- Percepción del estudiante sobre las entrevistas con el Profesor Consejero, dificultades de comunicación durante las entrevistas y opinión sobre el plan de recuperación sugerido por el Profesor Consejero

Para satisfacer el objetivo: Percepción de los asesores al final del semestre

Metodología

Entrevistas de profundidad.

El instrumento a utilizar es un cuestionario con preguntas cerradas y abiertas. El número de preguntas será un número no menor de treinta (30) ni mayor de cuarenta (40). El tiempo estimado para realizar la entrevista se calcula alrededor de sesenta (60) minutos. El tipo de muestreo será aleatorio La población de asesores es aproximadamente de ciento veinte (120) profesores. Se espera entrevistar un 60% de los asesores, la justificación de este tamaño de muestra será presentado en el desarrollo del trabajo

Variables a observar

- Percepción del asesor sobre las entrevistas con los estudiantes bajo régimen, dificultades de comunicación durante las entrevistas y opinión sobre el plan de recuperación.
- Experiencias que escapan a la rutina pero que los asesores refieran como un hallazgo en su trabajo

Estos métodos estarán siempre dirigidos hacia los siguientes nortes:

En cuanto al manejo de los resultados de las investigaciones

- Generalidad: Consideración de todos los aspectos susceptibles de investigación específicamente inherentes al proceso desarrollado por la UAA.
- Confiabilidad/Replicabilidad/Comprobabilidad: Documentación suficiente y amplia que genere la posibilidad de repetir los actos experimentales a fin de comprobar la confiabilidad de los resultados sobre escenarios similares o diferentes.
- Comparablidad: Realización de los actos investigativos basados en técnicas operativas que aseguren la contrastabilidad de los resultados para cualquiera de los actores homólogos del proceso de la UAA.
- Representatividad: Ejecución de los actos experimentales sobre marcos poblacionales/muestrales que aseguren la validez de los resultados para cualesquiera de los actores homólogos del proceso de la UAA.
- Aplicabilidad: Asegurar que el material instrumental y técnicas de captura de datos de la investigación sea utilizable con sencillez, sobre los distintos escenarios y actores homólogos del proceso de la UAA.
- Adaptabilidad: Concepción del material instrumental técnicas de captura de datos de la investigación a partir de criterios que aseguren la capacidad éstos para ser aplicados en distintos escenarios y sobre diferentes actores homólogos.

En cuanto a los procedimientos para la captura y acopio de datos

- Sistematización: Definición de una normativa de aplicación de los materiales instrumentales y las técnicas de captura de datos de la investigación para asegurar la replicabilidad de las condiciones experimentales.
- Exhaustividad: Recolección de todos los datos sobre las variables de interés para la investigación sobre todos los escenarios y actores homólogos del proceso de la UAA
- Rigurosidad: Aplicación de técnicas estandarizadas para la captura de datos a fin de asegurar la aceptación de los datos capturados y registrados.
- Disponibilidad/ Comunicabilidad: Preparación de un sistema de información de fácil accesibilidad, en hoja WWW para ser leído y "bajado" desde cualquier conexión a la red *internet* por todos aquellos interesados debidamente identificados que deseen consultar y/o Procesar los datos recabados.
- Legibilidad: Preparación de los datos en formatos de códigos reconocibles por una amplia gama de programas/paquetes computacionales.

En cuanto a los procedimientos para el manejo y tratamiento de datos

- Transparencia: Documentación total de la forma en la cual han sido tratados y procesados los datos crudos a fin de que los interesados puedan reproducir los procedimientos y verificar los resultados.
- Homogeneidad: Aplicación de criterios y técnicas similares a los grupos de datos para garantizar la comparabilidad de resultados.
- Calidad: Estricta vigilancia de las operaciones de codificación, transcripción y manipulación de datos crudos.
- Fidelidad: Apego estricto a los registros "duros" contentivos de los datos crudos.
- Exactitud: Definición cuidadosa de todas las variables de investigación y estadísticas para garantizar el reconocimiento y la manejabilidad de los datos crudos.
- Precisión: Utilización de criterios de medición que permitan la diferenciación de valores próximos a fin de garantizar la calidad de los contrastes sobre resultados.

En cuanto a los procedimientos para la publicación y difusión de resultados

- Amplitud: Difusión en todos los ámbitos interesados sobre los resultados de la investigación independientemente del uso (académico, experimental, aplicabilidad procedimental, etc.).
- Rapidez: Determinación de criterios que garanticen la agilidad necesaria para cumplir con el punto anterior, en lapsos breves, una vez terminados los experimentos.
- Sencillez: Uso de lenguaje técnico de fácil y amplio manejo tanto por parte de los investigadores interesados como de los públicos preocupados por la aplicación.

Conclusión

Esperamos que la propuesta de investigación esbozada en el presente documento sea lo suficientemente atractiva para alcanzar la motivación que esperamos en el profesorado y en los investigadores aquí presentes y finalizamos reiterando nuestra invitación al coloquio académico y la colaboración interinstitucional que creemos imprescindible.

Análisis y evaluación crítica del proceso enseñanza/aprendizaje de Matemática en la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela

Juana Lorenzo
Departamento de Estadística y Matemática, Facultad de Ciencia Económicas y Sociales
Universidad Central de Venezuela

Introducción

El trabajo que presento constituye un análisis y evaluación crítica de la enseñanza de la Matemática en la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela. Es producto de mi experiencia docente y representa mi concepción y posición personal sobre la situación general de la docencia en esta escuela.

El análisis que emprenderemos a continuación constituye un hecho inmerso dentro de lo que podríamos llamar una realidad estrictamente venezolana, aún cuando ella tenga similitud con la de otros países o regiones. Si mencionamos en algún momento la palabra crisis es absolutamente a propósito y responde a un condicionador que creo está presente en todo el acontecer venezolano. Basta abrir cualquier periódico de Venezuela y encontremos alguna manifestación de esta crisis. Desde todos los ángulos de la actividad usual del país, se nos manifiesta a los habitantes de esta nacionalidad. Una crisis que responde a una estructura de país dependiente, a pesar de sus grandes ingresos por la producción petrolera y con una característica de economía capitalista.

Un país con un altísimo nivel de población joven, totalmente desorientado en lo que a estudios, criterios, vida, se refiere.

El ejercicio docente. Crítica inicial a un proceso que pide reforma

Esta actividad esencial del proceso de enseñanza/aprendizaje se caracteriza en la Escuela de Administración y contaduría a nuestro modo ver, por los siguientes aspectos:

- *Preponderancia de la clase magistral*

De manera casi exclusiva, en el ejercicio docente predomina la clase magistral destinada a transmitir conocimientos ya elaborados lo que conlleva además a asumir un carácter repetitivo. En este esquema el proceso comunicativo de la enseñanza tiene una sola dirección, desde el profesor, poseedor del conocimiento, al alumno, receptor pasivo del mismo, quien de esta manera se ve compelido a memorizar el conocimiento adquirido a los fines de su posterior utilización en los procesos evaluativos de esa adquisición.

Este modelo de práctica por no favorecer la participación, la discusión, el análisis, la verificación de aquello que se pretende enseñar, no creemos que constituya un buen vinculo para garantizar una adecuada adquisición de conocimientos, ni para que el sujeto se sienta integrado de manera activa en este proceso, ni comprometido con el mismo, ni con los resultados que de él se espera.

- *Falta de sustento en la investigación*

En la práctica docente en la Escuela de Administración y Contaduría no encuentra suficiente soporte en la investigación como actividad inherente a la vida universitaria. No se genera conocimiento nuevo ni siquiera discute sobre el conocimiento ya existente, sino que sencillamente los transmite casi sin ningún tipo de revisión o adaptación, salvo algunos esfuerzos asilados.

- *Desvinculación con el contexto*

En la Escuela de Administración y Contaduría el conocimiento impartido o transmitido se ve desvinculado con las realidades del entorno (sociales, políticas, profesionales, etc.). En la actualidad se están realizando estudios para modificar su pénsum.

- *Evaluación del aprendizaje*

Esta es una actividad de gran importancia en el proceso educativo, la aplicación de exámenes a los sujetos en situación de aprendizaje que debería intentar determinar si han habido modificaciones entre el capital escolar de entrada y el de salida en cada una de las fases y etapas del proceso, para poder evaluar también su eficiencia y por lo tanto poder tomar las medidas que refuerzan o modifican el proceso mismo. La evaluación del aprendizaje que de manera generalizada se hace en esta escuela no lo apreciamos dirigido a estimular la actividad intelectual de los estudiantes y corregir los posible defectos de su formación, sino que, salvo el cumplimiento de algunos postulados formales contenidos en el reglamento general de la escuela (respetar la ponderación máxima, informar al inicio de cada período lectivo el Plan de evaluación, entre otros) no hace más que reforzar la práctica docente que hemos intentado caracterizar por lo tanto, el esquema tradicional de tres evaluaciones y alguna otra actividad evaluativa, violentando lo que supuestamente fue una conquista del proceso de renovación académica hace 29 años: la evaluación continua.

- *El rol del docente*

El rol del docente en esta escuela se sustenta sobre la base de un proceso cumunicacional unidireccional y vertical, en detrimento de una relación y proceso de comunicación más horizontal e integrado que lleve a la participación democrática y a la orientación y guía del proceso de aprendizaje de los alumnos. La docencia ejercida de esta manera no contribuye al enriquecimiento del aprendizaje y por ende a un alto rendimiento, sino a consolidar la pasividad el acriticismo y el conformismo por parte del sujeto en situación de aprendizaje, lo que a su vez se convierte en una extraordinaria justificación del modelo pedagógico del modelo que pretendemos reseñar.

- *Deficiencias pedagògicas*

En muchos casos la enseñanza de la Matemática en esta escuela es ejercida por profesionales no graduados en las Escuela de Matemática, sino que son profesionales en carreras afines pero que no cuentan con formación pedagógica previa y en muchos casos adquiere la experiencia por la práctica docente y no deriva de un proceso sistemático e institucional de formación teórico-práctico cumplido bien, antes del inicio de la docencia o simultaneamente con la práctica docente.

El ejercicio del estudiante

El primer problema con que se enfrenta un alumno a nivel universitario en este país es la desorientación, ella proviene inicialmente de un gran desconocimiento acerca del verdadero contenido y esencia de la mayor parte de la disciplina que se pueden estudiar a nivel universitario.

Superada la etapa incierta del ingreso el primer problema interno de los estudiantes universitarios es el enfrentamiento concreto de lo que es la carrera escogida. No olvidemos que muchas veces los primeros semestres son meramente introductorios de lo que en definitiva será la especialidad y el estudiante debe ser preparado a niveles de concientizaciòn para superar sin dificultades los escollos que se le presentan en el inicio de sus estudios universitarios.

Aún cuando aparentemente nos hemos alejado del problema específico de la enseñanza de la Matemática, no es cierto del todo pues muchas cosas de las planteadas tienen vinculación directa con la enseñanza en sí de esta materia. Básicamente el sistema administrativo de nuestras universidades ha creado pequeños feudos subdivididos en facultades, escuelas, departamentos y cátedras, y quizás una de las razones fundamentales que inciden negativamente sobre la enseñanza de la Matemática ha sido la incomunicación entre las diferentes escuelas, los diferentes departamentos, que se ocupan de su enseñanza. Muchos de los problemas son comunes no importa la escuela o la Facultad de que se trate. Si tuviéramos la posibilidad de centralizar un poco los criterios, de unificar esfuerzos en función de objetivos comunes, sería beneficioso. Desde luego, que las diferentes especialidades universitarias requieren de diferentes niveles matemáticos y de diversidad de enfoques y contenidos, pero *siempre existen elementos básicos comunes, en los aspectos matemáticos enfrentados y* sería deseable que bajo la coordinación, por ejemplo de la escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias, y/o de la Escuela de Educación de la Facultad de Humanidades, se pudiese trabajar en un análisis de los problemas y posibles soluciones a la enseñanza de la Matemática de la Universidad. Independientemente de la facultad o de la escuela, siempre es Matemática la materia con mayor índice de aplazados y esto nos dice que es sobre ella que se realice el mayor numero de esfuerzos por mejorar su enseñanza y encontrar y corregir las fallas existentes.

Análisis crítico de la enseñanza

- *Elementos de carácter administrativo*

En mi práctica docente de 19 años he observado que la tercera parte de los alumnos que aparecen en lista no asistían a clase, perdiendo la materia por inasistencia y si incluimos los retiros la nómina del curso se reduce de manera considerable. Comparé el porcentaje de inasistencia de mis cursos y la situación era similar en otras secciones. Si tomamos en cuenta que este alarmante porcentaje de insistencias se mantiene en los cuatro primeros semestres de estudios, no vacilaríamos en señalar los costos de funcionamiento de nuestra escuela, debido a la existencia de esta falsa matricula están severamente abultados, con lo cual se desvía recursos que podrían dirigirse a la incorporación de políticas que ayuden a superar las deficiencias. En los dos últimos años la Escuela a tomado como política que si el estudiante pierde una materia por inasistencia, no se le permite cursarla en el semestre siguiente. Sin embargo, el porcentaje sigue siendo alto, sobre todo en los cursos de horario nocturno. En matemática el 14% de los alumnos perdieron la materia por inasistencia en el semestre que recién culminó en el mes de Junio.

Es importante destacar que en la cátedra de matemáticas hay cuatro profesores a dedicación exclusiva, para atender 35 secciones con una población estudiantil de aproximadamente de 1300 alumnos.

- *Elementos de carácter estudiantil*

Existe una tendencia generalizada a medir el proceso enseñanza/aprendizaje, en término exclusivamente de rendimiento estudiantil, lo cual es no solo injusto sino equivocado como criterio de análisis. Es más fácil achacar toda la culpa a los estudiantes y eximir de responsabilidad a otros factores que muchas veces son más importantes y mucho más difíciles de transformar y mejorar. Sin embargo es justo reclamar a nuestra juventud un mayor entusiasmo y compromiso con su formación.

La dependencia del profesor en la clase y la falta de iniciativa para el autoaprendizaje es un comentario preocupante entre quienes ejercemos la docencia. En el área de Matemática, graves deficiencias se arrastran desde su formación de bachillerato y no observamos una actitud decidida en reconocer la deficiencia y buscar mecanismos para superarlos. La universidad no puede asumir los costos de reparar las fallas de la educación básica pero tampoco puede ser indiferente a la calidad de la materia prima con la que está trabajando. La inexistencia de estadística sobre las características del estudiante de nuestra escuela dificulta el reconocimiento de los supuestos que anunciaremos a continuación, pero la observación cotidiana de ellos nos permite apreciar su existencia:

- La mayor parte de loa alumnos de nuestra escuela trabajan durante el día y estudian en el horario nocturno. Esto ocasiona que les quede poco tiempo libre para otras tareas vinculadas o no con los estudios.
- Nuestros alumnos, en una gran mayoría, son el sostén económico de su núcleo familiar o realizan un gran aporte económico al mismo. Esta situación obliga a que el trabajo sea prioritario al estudio.
- Los estudiantes nocturnos, en su mayoría, ingresan a nuestra escuela después de varios años de haber terminado su bachillerato, con las consecuencias lógicas de olvido de conceptos básicos.

Investigación sobre parte de la problemática

Preocupados por los problemas que confrontan nuestros estudiantes ante la materia Matemática hemos pretendido sondear a través de algunas encuestas su opinión, dando como resultados:

- La mayoría de los alumnos reconoce la existencia de una gran dificultad con la materia que se ubican en el transcurso de todo el semestre.
- La dificultad mayor se encontró en los temas de lógica proposicional, funciones reales, álgebra y operaciones básicas.
- La mayoría (60%) enumera como principal causa de la dificultad de asimilar la materia la deficiente formación durante el bachillerato, en segundo término plantean la ejercitación insuficiente y el poco tiempo dedicado a la materia.
- Hay una permanente exigencia en la necesidad de mayor cantidad de ejercicios tanto en clase como con los preparadores.
- Cuando se solicita la emisión de juicios personales, es muy bajo(5%) el número de alumnos que lo hace.

Conclusión

La investigación sobre las causas de las fallas en el proceso de enseñanza de matemática debe ser un proceso constante. Nuestra preocupación por lograr que los estudiantes superen las fallas y reconozcan la materia como un instrumento indispensable para el ejercicio profesional debe ser una lucha permanente.

El departamento de Estadística y Matemática consciente de su responsabilidad prevé en sus próximos planes de trabajo las siguientes estrategias:

- Plan de formación de preparadores.
- Estímulo al rendimiento estudiantil, específicamente en el área de Matemática
- Talleres de capacitación pedagógica para sus profesores
- Evaluación continua de las tareas, metas y logros de cada semestre
- Concursos de oposición para profesores
- Incorporación de más profesores a dedicación exclusiva
- Cursos Intensivos(comenzó esta experiencia en la Escuela el 28/06/99)

Curso introductorio orientado a la solución de problemas y estimular el razonamiento lógico, haciendo énfasis en la importancia que tiene la matemática para la carrera.

Educación matemática y ciudadanía

María Luz Callejo de la Vega (marialuzc@yahoo.com)
Área de matemáticas, Centro Poveda
Santo Domingo, República Dominicana

Introducción

El propósito de esta comunicación es presentar cómo puede contribuir la educación matemática a la educación para la ciudadanía, en el marco de la capacitación a maestras y maestros que ofrece el Centro Poveda de Santo Domingo.

Para ello comenzaré presentando brevemente la línea de la constitución de sujetos democráticos y la ciudadanía; luego plantearé el enfoque crítico y heurístico de la matemática como medio de desarrollar una educación para la ciudadanía; por último expondré cómo se aborda desde este enfoque el módulo "Construcción de Nuevos Referentes Críticos" del área de matemáticas del "Diplomado en Formación de Ciudadanas y Ciudadanos en la Escuela" (UASD-Poveda), desde la articulación entre educación popular y educación formal.

La constitución de sujetos democráticos y la educación para la ciudadanía

El propósito de la educación para la ciudadanía es transformar democracias de espectadores en democracias de ciudadanos activos y participativos, donde los grupos excluidos y/o marginados puedan desarrollar sus iniciativas, satisfacer sus necesidades y participar en la vida política, cultural y social (Centro Poveda 1998). Para J. Osorio (1994) "la ciudadanía es una cualidad social de la democracia" y "la construcción de una ciudadanía activa, capaz de constituirse en sujeto de una democracia real, requiere substantivamente de una educación de la facultad de juzgar críticamente (...) y el desarrollo de las posibilidades comunicativas y políticas".

Se trata de formar sujetos racionales, informados, activos, en posesión de sus derechos y responsables de sus deberes. Esto requiere capacidad para comprender, analizar, interpretar y criticar los acontecimientos de la realidad social; asimismo trascender el punto de vista personal para acceder a otros puntos de vista y entrar en diálogo con ellos, deliberar, resolver conflictos, negociar y construir acuerdos. Se considera una doble perspectiva: la constitución de las personas como sujetos autónomos y como sujetos sociales. Destacamos los siguientes aspectos: autorrealización personal, iniciativa, propositividad, participación, diálogo y solidaridad (Centro Poveda 1995).

Para Castillo y Osorio (1997) la educación para la ciudadanía plantea a los procesos educativos formales y no formales el desafío de "distribuir equitativamente los conocimientos y el dominio de los códigos en los cuales circula la información social necesaria para la participación ciudadana, así como el de generar una formación en valores que desarrolle capacidades y competencias para desenvolverse responsable y críticamente en los diferentes ámbitos de la vida social". Para estos autores la educación popular para la ciudadanía se plantea dos grandes líneas:

- "La necesidad de articulación de los procesos de apropiación y producción de saberes y conocimientos desde el ámbito de la vida cotidiana de los sujetos, especialmente en los ámbitos de la economía popular y de la vida local; y

- El desarrollo de procesos de aprendizaje que integren conocimientos instrumentales, políticos y éticos a través de dinámicas constructivas que implican diálogo de saberes y la noción de negociación cultural como componente de intervención profesional de la educación popular".

Este enfoque se traduce en:

- Seleccionar objetivos como los siguientes:
- Desarrollar la capacidad de entender consciente y críticamente la realidad, la actitud de exploración de situaciones, la capacidad de comunicación, de relacionar lo concreto y lo abstracto y la creatividad.
- Desarrollar la capacidad de identificar, abordar y resolver problemas, de apropiarse de estrategias para buscar alternativas y nuevos enfoques de situaciones problemáticas.
- Determinar los contenidos mínimos necesarios para alcanzar los objetivos anteriores.
- Elegir temáticas y situaciones problemáticas relacionadas con necesidades sentidas y reales de los grupos marginados y excluidos: salud, ecología, vivienda, consumo, transporte, tecnología doméstica, justicia, paz, solidaridad, equidad,...
- Usar metodologías que favorezcan la participación y capacidad de diálogo, fomentando la comunicación en el aula a través del trabajo en grupo, la discusión de ideas y el debate, lo que implica estimular la presentación, elaboración, discusión y valoración de propuestas, así como involucrarse en la toma de decisiones que implica el proceso de aprendizaje.
- Concebir la evaluación como parte formativa del proceso educativo que ayuda a apropiarse de los aprendizajes, a revisar procesos y a mejorarlos.

Matemáticas y ciudadanía: un enfoque crítico y heurístico

En el contexto antes esbozado nos planteamos: ¿qué enfoques de la educación matemática favorecen la construcción de la ciudadanía? ; ¿podemos hablar de unas matemáticas para la ciudadanía?; en caso afirmativo, ¿qué decisiones curriculares es necesario adoptar para desarrollarlas? ; ¿cuáles son las limitaciones que presenta esta opción? ; ¿qué temáticas son relevantes en este enfoque?

Si queremos focalizar la educación matemática en la línea de la constitución de una ciudadanía democrática, estamos mirando la matemática como "instrumento de conocimiento", esto es, como herramienta al servicio de una problemática concreta, lo que no quiere decir que ignoremos que esta ciencia es también en sí misma un "objeto de conocimiento"; la matemática, además de ser una poderosa herramienta para analizar, comprender e interpretar la realidad, para predecir hechos o para comunicarse, es también juego, arte y aventura del pensamiento.

Por otra parte pensamos que la matemática no puede dirigirse a una minoría que la va a utilizar en su vida profesional; por el contrario, debe llegar a las mayorías que necesitan usarla en su vida cotidiana para ser sujetos activos y participativos en una sociedad democrática. Esto implica, por un lado, delimitar un conjunto de temáticas o situaciones problemáticas relevantes para tratarlas en un contexto interdisciplinar donde la matemática es una disciplina auxiliar; por otro lado, identificar qué aspectos básicos de esta ciencia quedan fuera de estas temáticas. Para C. Alsina (1998) "uno de los fines que justifica la obligatoriedad de estudiar matemáticas es precisamente la defensa de la sociedad democrática. Así los conceptos e instrumentos matemáticos se ponen al servicio de la formación crítica de la ciudadanía."

También creemos que la educación matemática no se debe limitar a memorizar definiciones, propiedades o reglas ni a aplicar algoritmos, sino que también requiere el dominio de procedimientos generales y procesos de pensamiento como la modelización o la resolución de problemas. Estos procesos se aplican al tratamiento de aspectos relacionados con la ciudadanía o a la resolución de situaciones problemáticas.

Dos enfoques apuntan en esta dirección: el crítico y el heurístico. El enfoque crítico sostiene que el objetivo fundamental de la educación matemática es preparar a los estudiantes para la vida tanto personal como social en cuanto ciudadanos, de modo que se apropien de las competencias necesarias en una sociedad cada vez más influenciada por la utilización tanto de las aplicaciones de las matemáticas como de la modelización de múltiples aspectos de la realidad no sólo natural sino también social. El objetivo es pues dotar a los sujetos de la competencia crítica necesaria par ver y juzgar con autonomía, para reconocer, comprender, analizar y evaluar ejemplos representativos del uso actual de las matemáticas, entre los que se incluyen soluciones a problemas sociales significativos (Werner y Niss 1991).

El enfoque heurístico pone el acento en el saber-hacer más que en el saber, en los métodos más que en los contenidos, en los procesos de pensamiento más que en los resultados. Considera que el objetivo fundamental de la educación matemática es dotar a los sujetos de las herramientas necesarias para identificar, abordar y resolver problemas (Callejo 1994). Estas dos corrientes las consideramos complementarias pues la primera pone el énfasis en los objetivos y los contenidos y la segunda en los procesos.

El punto de partida de unas matemáticas para la ciudadanía es, fundamentalmente, la realidad social; ésta se presenta compleja, con múltiples variables que inciden en ella. La matemática aparece articulada con otras áreas de conocimiento. Para poder hacer un tratamiento matemático es preciso delimitar y seleccionar ciertos elementos que parecen importantes e identificar las relaciones entre ellos: se decide lo que se ignora y lo que se tiene en cuenta, teniendo así una versión idealizada de la cuestión original que se formula matemáticamente o modelo matemático al que aplicamos los conocimientos y métodos de esta ciencia para obtener resultados. Por último se verifica si ese resultado se puede aplicar o no a la situación original; en caso negativo hay que examinar el proceso, en particular el modelo (Pollack 1997). Esto es un proceso de modelización matemática que se aplica cada vez más en nuestra sociedad en todos los campos de la actividad humana. Ante la tendencia a la matematización de todas las ciencias y a creer que "todo puede ser matematizado sin residuos" pensamos con Davis y Hersh (1989) que es necesario el cultivo de valores que se encuentran fuera de la ciencia, pues ésta no es el único principio de la vida, "el árbol de la vida es más grande que el árbol del pensamiento" dijo Kant.

La matemática aparece pues como una herramienta para:

- Representar, analizar críticamente, explicar y predecir hechos y situaciones de una forma rigurosa, concisa y sin ambigüedades;
- Tratar de identificar problemas y proponer soluciones.

Se fomenta de esta manera la autorrealización personal, la capacidad de iniciativa y la propositividad.

Esto comporta organizar un curriculum temático y no disciplinar, tanto en lo que se refiere a las distintas áreas de conocimiento como al interior de la propia matemática. Por tanto se rompe con la clásica división del conocimiento. Ello presenta como ventaja que se pueden afrontar ciertas problemáticas que actualmente no se abordan en la escuela porque trascienden el marco de una sola materia, como la economía. También presenta inconvenientes como veremos más adelante.

Los principios de aprendizaje coherentes con este planteamiento son, entre otros, los siguientes:

- Aprender es construir, para ello se parte de situaciones concretas que permiten al sujeto construir conocimientos a partir de lo que ya sabe;
- Aprender no es sólo una actividad individual sino colectiva al estar inserta en un contexto social y cultural;

- Aprender es adquirir conocimientos y habilidades estructuradas y entrelazadas que encajen con el esquema de conocimientos que ya tiene el sujeto.

En cuanto a las metodologías de trabajo se privilegia la verbalización de los razonamientos, las discusiones, la búsqueda de alternativas, la negociación y el consenso, los procesos de matematización y la resolución de problemas. De esta manera se fomenta la participación y el diálogo.

Algunas temáticas que resultan especialmente relevantes son: salud, ecología, economía, vivienda, consumo, transporte, tecnología doméstica, elecciones, solidaridad,... (Alsina, 1998). Para su tratamiento se precisan contenidos relacionados con la cantidad (números y operaciones, incluyendo la simbolización algebraica), con el tratamiento de la información, de la evolución o variación (estadística y funciones), con la incertidumbre (probabilidad), con la representación del espacio (geometría) y con la medida.

Todo este planteamiento nos remite a preguntas que no son fáciles de resolver en la práctica como las siguientes:

- ¿Qué parte de la matemática se puede enseñar de manera útil y eficaz en un contexto de educación para la ciudadanía? Este contexto aporta situaciones que permiten dar sentido a ciertos conceptos matemáticos, pero no a todos los que se consideran básicos en una formación.
- ¿Qué trabajo hay que realizar sobre los contenidos matemáticos aprendidos en un contexto dado para afianzarlos?, esto es, ¿cómo favorecer la transferencia de aprendizajes?
- ¿Cómo planificar y cuándo secuenciar las temáticas a tratar en los diferentes niveles y grados educativos?
- ¿Cómo trabajar en equipo para abordar éstas y otras temáticas desde una óptica interdisciplinar?

Esta forma de plantear el curriculum presenta dificultades de implementación:

- Un planteamiento temático y no disciplinar como el sugerido exige apertura por parte del profesorado especialista e implica un trabajo en equipo. Para hacerlo posible es necesario contar con espacios de intercambio, de discusión, de estudio y de planificación conjunta.
- El planteamiento es en sí mismo dinámico pues lo es la realidad social (elecciones, evolución de la economía, problemas ecológicos, etc.). Ello exige prestar atención a los acontecimientos y actualizar las temáticas.
- El planteamiento es flexible lo que implica una organización escolar que rompa con el esquema tradicional profesor/a, clase de matemáticas, horario establecido, y se formen en ocasiones agrupamientos flexibles de alumnos y equipos de profesores intercambiables entre sí.

Capacitación de maestros y maestras

En el Centro Poveda se está implementando como propuesta de capacitación de maestros y maestras un "Diplomado en Formación de Ciudadanas y Ciudadanos en la Escuela" en colaboración con la Universidad Autónoma de Santo Domingo.

Dicho proyecto obedece a "la necesidad de profesionalizar agentes educativos, capacitando en las teorías y mediaciones actuales para una educación de calidad de ciudadanas y ciudadanos que promueva la articulación de elementos de la educación popular a la educación formal y brinde nuevos referentes para unas prácticas de transformación que conjuguen conocimiento y vida" (Centro Poveda 1997, p. 146). Se concibe a los maestros y maestras como profesionales críticos e intelectuales tranformadores y no como aplicadores de programas y ejecutores de normas.

El plan de estudios contempla tres módulos; en el segundo "Construcción de nuevos referentes críticos", se presenta la opción del área de matemáticas, que se enfoca desde el planteamiento anterior. A continuación presentamos las tres partes en que se desarrolla este módulo: triple diagnóstico, metodología para al formación de la conciencia crítica y enfoque heurístico de las matemáticas, utilizando metodologías y propuestas de la educación popular.

Triple diagnóstico en el área de matemáticas

El punto de partida es el autodiagnóstico de los maestros y maestras acerca de su relación personal con las matemáticas, de su consciencia de la presencia de las matemáticas en la realidad social y natural y de sus propias prácticas educativas. Se trata de responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es mi relación con las matemáticas?
- como alumna/a
- como maestra/a
- como ciudadana/o
- ¿Cómo aparece la matemática en la realidad en que vivimos?
- ¿Cómo es mi clase de matemáticas?

Se hace a través de diversas actividades: carta a las matemáticas, percepción de las matemáticas en el entorno próximo, noticias de prensa, juegos y audición de un sociodrama.

Este triple diagnóstico va seguido de la confrontación entre las concepciones, el contexto y la práctica, mostrando así la coherencia y/o incoherencia entre lo que se quiere hacer, lo que se hace, cómo se hace y dónde se está haciendo

Metodología para la formación de la conciencia crítica

La educación crítica trata de construir nuevas explicaciones sobre los hechos sociales y naturales basadas en nuevas afirmaciones valorativas, lo que a su vez implica construcción del conocimiento.

Al plantearnos qué puede aportar la educación matemática a la construcción de ciudadanía, está implícito que concebimos la matemática como algo más que un saber, como una ciencia ligada a valores, a sentimientos, a convicciones y a creencias. Asumimos pues que en el quehacer matemático están estrechamente relacionados la cognición y el afecto, con lo cual aparece no sólo la dimensión científica sino también la valorativa que, junto con la dimensión política, se ponen áun más de manifiesto en la educación matemática (Medrano y Valerio 1995; Santoyo 1993).

Estas tres dimensiones, científica, valorativa y política, se trabajan a través de presentación de datos económicos extraídos de noticias de prensa. En ellas se pone de relieve la necesidad de articulación de diversos saberes de matemáticas, ciencias sociales y lengua.

Se seleccionan noticias cuyos titulares sean llamativos, por ejemplo "Ricos de RD reciben 30 veces más que las familias más pobres" (Hoy, 5-12-98), lo que parece claramente falso si no se tiene unos conocimientos estadísticos pues el estudio se ha hecho dividiendo la población en deciles (dimensión científica); de esta manera no se pone en evidencia la desigualdad económica de la población. En la noticia aparecen valores como la equidad (dimensión valorativa). Se puede hacer una apropiación de la noticia, analizando como este hecho se evidencia en la propia vida, en el barrio, en la ciudad, profundizando en sus causas, planteándose qué se puede hacer, reflexionando sobre lo que se ha aprendido y lo que se puede hacer (dimensión política).

Las noticias se trabajan con una guía (Guevara 1994) que tienes tres partes:

- Observación, identificando los elementos de la noticia.
- Identificación de las claves de sentido: Qué acontecimiento, quiénes intervienen, cuándo ocurre, dónde sucede, por qué ocurre, conceptos clave.
- Profundización para adquirir determinado nivel de apropiación, posibilitando profundizar en detalles que llevará a asumir una posición como ciudadanos/as.

Enfoque heurístico de las matemáticas

Para trabajar este enfoque seleccionamos problemas accesibles que requieran conocimientos que estén al alcance de los maestros/as, pero que al mismo tiempo supongan un reto; problemas que capten su interés; problemas relevantes desde el punto de vista matemático y ciudadano; problemas que ofrezcan la posibilidad de ser resueltos con diferentes niveles de profundización; problemas útiles cuyo método o solución se puedan aplicar a otras situaciones; problemas cuya solución o soluciones sean fácilmente verificables; problemas de búsqueda de la solución mejor que problemas de demostración; problemas que se presten a introducir variantes del mismo; se proponen también algunos problemas "mal definidos" que exijan al maestro/a tomar decisiones acerca del enunciado y luego examinar las consecuencias de esas decisiones.

Por ejemplo

Tres poblaciones A, B y C tienen 5.000, 1.200 y 15.000 habitantes respectivamente. Las distancias entre ellas son: entre A y B 15 km, entre B y C 10 km y entre C y A 20 km. ¿Dónde colocar un vertedero para las tres poblaciones?

Proponemos al profesorado un conocimiento práctico de la resolución de problemas. Para ello:

- Resuelven problemas con distinto grado de dificultad, en los que los conocimientos matemáticos que tienen que aplicar son sencillos y que se prestan a la particularización y a la generalización.
- Reflexionan sobre el proceso seguido: lo revisan, tratan de encontrar otros caminos o un camino más fácil y generalizan el problema.
- Participan en puestas en común y discusiones en grupo acerca del proceso de resolución haciendo explícitas aquellas ideas, estrategias, razonamientos, bloqueos, etc., presentes en el proceso de resolución.

A partir de esta reflexión se introducen conocimientos teóricos que tratan de explicar el proceso de resolución de problemas desde un punto de vista psicológico, tales como: la resolución de problemas como acto creativo, estrategias, procesos y fases en la resolución de problemas. También otros relativos a la didáctica de las matemáticas: modos de considerar la resolución de problemas en el curriculum de matemáticas, distintos marcos explicativos de cómo se aprende a resolver problemas, diversas maneras de enseñar a resolver problemas y aspectos a evaluar y modos de hacerlo. Los conocimientos anteriores son la antesala del diseño de experiencias para llevar al aula.

Conclusión

La educación para la ciudadanía se presenta hoy como una urgencia en la realidad dominicana a la que no puede estar ajena la educación formal. Por ello es preciso hacer un replanteamiento de las diferentes áreas de conocimiento y una reflexión articulada desde las mismas de modo que se traten de abordar temáticas relevantes como las enunciadas, que por su carácter inte disciplinar no se tratan desde ninguna de ellas.

Hemos tratado de analizar las implicaciones que ello tiene en el área de matemáticas (concepción, organización, propósitos, metodologías, temáticas) así como de esbozar los cambios que ello supondría en el curriculum. Asimismo hemos presentado una propuesta que trata de sensibilizar en esta línea a maestros y maestras, adoptando las metodologías de la educación popular e integrando un enfoque crítico y heurístico de la educación matemática.

Referencias bibliográficas

ALSINA, C. (1998). *Matemática para ciudadanos.* XXII Jornadas de Resolución de Problemas. Seminario Internacional. Mar del Plata. Material policopiado

CALLEJO, M.L. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* Col. Secundaria para todos. Narcea. Madrid

CASTILLO, A. y OSORIO, J. (1997). *Construcción de ciudadanías en América latina: Hacia una agenda de la educación ciudadana.* Ponencia presentada en el Taller de Experiencias en Apoyo a Procesos de Democratización en América Latina. Villa de Leyva, Colombia, Junio 1997

CENTRO POVEDA (1997). *Anuario Pedagógico 1.* Centro Poveda. Santo Domingo

DAVIS Y HERSH (1989). *El sueño de Descartes.* MEC-Labor. Barcelona

GUEVARA, N. (1994). "La noticia escrita: su aplicación al aprendizaje de la lengua materna". *Maestros/as: prácticas y cambios*, nº 9, pp. 1-6. Centro Poveda. Santo Domingo

CENTRO POVEDA (1998). *El currículo a debate.* Cuadernos de Sociedad y Educación nº 9. Centro Cultural Poveda. Santo Domingo

CENTRO POVEDA (1995). *Sistematización: Reflexión del equipo del Centro Poveda.* Centro Cultural Poveda. Santo Domingo

MEDRANO, A. y VALERIO, A. T. (1995). *Ensalada de frutas: Una experiencia alternativa de matemáticas en tercer grado.* Centro Poveda. Santo Domingo

OSORIO, J. (1994). La educación como formación de sujetos y la construcción de ciudadanía en América Latina: Notas para el debate. *La Piragua.* nº 8, p. 1

POLLAK, H.O. (1997). Solving Problems in the Real World. En: *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America.* L.A. STEEN (Ed.) The College Board. Nueva York

SANTOYO, L. A. (1993). *Hacia una nueva metodología de la enseñanza de las matemáticas.* Centro Poveda. Santo Domingo

WERNER, B. y NISS, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, 37-68

Resolución de problemas: las interacciones de un equipo alrededor de un gasto que se reduce gradualmente

Liliana Suárez Téllez, Pedro Ortega Cuenca, Ernesto Sánchez Sánchez
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Introducción

Cada vez hay más consenso entre los investigadores, tanto nacionales (Santos, 1996) como extranjeros (Lester, 1994; Charnay; 1994, Puig, 1994), acerca de la importancia de las actividades de resolución de problemas en las clases de matemáticas como el soporte sobre el que descansa el aprendizaje de esta disciplina. Este consenso también alcanza los documentos curriculares, tanto nacionales (Alarcón et al., 1995a; Alarcón et al. 1996; AIM-NMS-IPN, 1994-1998; Wenzelburger et al., 1994), en los principales centros de nivel medio básico y superior, como extranjeros (NCTM, 1989).

Sin embargo, como afirma Lester (1994), «Aunque los reportes de los congresos, las guías del currículo y los libros de texto insisten en que la resolución de problemas ha llegado a ser central para la enseñanza en cada nivel, la evidencia señala otra cosa. Podemos haber aprendido mucho durante los últimos veinticinco años acerca de cómo los estudiantes aprenden a resolver problemas y cómo se puede enseñar la resolución de problemas, pero no hemos aprendido lo suficiente.» En el mismo artículo, Lester identifica algunas cuestiones acerca de las que «tenemos una necesidad urgente de proporcionar a los profesores más información bien documentada». Menciona la escasez de trabajos que discutan las cuestiones específicas del papel del profesor y «En particular, ha habido una carencia de descripciones de los comportamientos de los profesores, de las interacciones profesor-estudiante y estudiante-estudiante y el tipo de atmósfera del salón de clases que existe. Es vital que se compilen estas descripciones si se quiere tener alguna esperanza de que se desarrollen programas sólidos para la enseñanza de resolución de problemas.»

Así, aunque los investigadores han identificado algunas de las características distintivas de los ambientes de resolución de problemas:

- se discuten las soluciones que obtienen los estudiantes,
- el grupo se responsabiliza de la validación de los resultados,
- se formulan conjeturas explícitamente,
- se comunican los resultados en forma oral y escrita.

No abundan los ejemplos concretos de cómo puede ocurrir esto en las clases.

En este artículo presentamos una experiencia de resolución de problemas en el marco de un 'Taller Extracurricular de Resolución de Problemas' en la que se observaron algunas actividades de los estudiantes relacionadas con la producción de significados, el uso de estrategias heurísticas y sus creencias con respecto a las matemáticas.

Un ambiente de resolución de problemas

Nuestra perspectiva es la del profesor que quiere enseñar para que todos sus alumnos logren los aprendizajes que los faculten para un uso activo de sus matemáticas. Desde esta perspectiva los ambientes de resolución de problemas son potencialmente fecundos y pueden constituir uno más de los muchos recursos que el profesor necesita para organizar los aprendizajes multidimensionales de sus alumnos. Los ambientes de resolución de problemas son complejos e incluyen planes en varios niveles y decisiones frecuentes que conducen a escenarios distintos. La posibilidad de organizar los aprendizajes curriculares en estos ambientes depende de la habilidad de los profesores para administrarlos en función de ciertos objetivos. Para lograrlo el profesor necesita incorporar una perspectiva de trabajo que le permita convertirse en productor de sus propios saberes y prácticas.

El enfoque de Resolución de Problemas ha recibido interpretaciones muy diversas en Matemáticas. Las descripciones o definiciones de *problema* con las que nos topamos en los escritos de resolución de problema abarcan también un espectro amplio. Cada una de estas *caracterizaciones presupone un punto de vista teórico, que no siempre se considera explícitamente*. Las combinaciones que se pueden hacer con las características dan lugar a concepciones de resolución de problemas con énfasis diversos.

Nosotros retomamos la visión de los ambientes constructivistas que Pirie y Kieren (1992) resumen en cuatro principios:

- Aunque un profesor puede tener la intención de impulsar a los estudiantes hacia objetivos de aprendizaje matemático, estará consciente de que tal progreso puede no ser logrado por algunos estudiantes y puede no ser logrado como se esperaba por otros.
- Al crear un ambiente o proporcionar oportunidades a los alumnos de modificar su comprensión matemática, el profesor actuará sobre la creencia de que hay vías distintas para una comprensión matemática similar.
- El profesor estará consciente de que las distintas personas tendrán modos de comprensión distintos.
- El profesor sabrá que para cualquier tema hay diferentes niveles de comprensión y que éstos nunca se alcanzan 'de una vez por todas'.

Schoenfeld (1987) discute el trabajo de varios investigadores que crean ambientes de aprendizaje con el propósito de lograr que las matemáticas que hacen tengan sentido para los estudiantes y afirma que "el desarrollo de la significatividad y la comprensión proviene de la interacción y la negociación, y que el proceso es inherentemente social. Y ya sea porque así lo han planeado o no, todos resultaron en la creación de ambientes sociales en los que las prácticas y los rituales cotidianos en los que intervienen los estudiantes vuelven algo natural para ellos la interiorización de las matemáticas de esta manera".

Schoenfeld (1992) describe así a grandes rasgos las cinco categorías de resolución de problemas que considera:

«En **«Los recursos»** se considera nuestra comprensión actual de las estructuras cognoscitivas: la naturaleza constructiva de la cognición, la arquitectura cognoscitiva, la memoria y las formas de acceder a ella. En **«La heurística»** se trata de las estrategias de resolución de problemas. **«El monitoreo y el control»** se refiere a la investigación relacionada con el aspecto de la metacognición que se conoce como autorregulación. En **«Las creencias y las emociones»** se consideran las relaciones de las personas con las situaciones en las que participan, así como las consecuencias de las perspectivas individuales acerca del desempeño y el comportamiento matemáticos. Por último, **«Las prácticas»** se concentra en el lado práctico de la cuestión de la socialización, considerando los intentos educativos para fomentar el pensamiento matemático por medio de la creación de microcosmos de práctica matemática».

En la experiencia que analizamos hay evidencias del uso de estrategias que permiten dar significado a algunas frases con contenido extramatemático, particularmente con el uso de la analogía.

El precálculo y las situaciones típicas del cálculo

La complejidad de las ideas del Cálculo suele ser un obstáculo difícil de superar para los alumnos que han desarrollado una perspectiva muy ligada a la aplicación directa de un algoritmo que conduce inmediatamente a la respuesta. De aquí la necesidad de 'prepararse' para el Cálculo, en el sentido de que los alumnos

- se hayan formulado previamente las preguntas que el Cálculo viene a responder,
- se hayan familiarizado con las problemáticas que tratan los conceptos y los procedimientos del Cálculo.

Esto nos ha llevado a diseñar situaciones,

- que incluyen un mayor grado de incertidumbre, en las que el alumno haga un uso diferente de sus matemáticas,
- que le permita desarrollar su comprensión;
- que propicien un uso que pase por la aplicación de métodos indirectos, la articulación de procedimientos que aprendió en cursos distintos, el tránsito por distintos registros de representación y la necesidad de justificar sus resultados y procedimientos.

Pues, como afirman Hiebert y Carpenter (1992), «una idea o un procedimiento o un hecho matemáticos se comprenden si son parte de una red mental interna. Más específicamente, la matemática se comprende si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea o un procedimiento o un hecho matemáticos se comprenden cabalmente si están vinculados con redes ya existentes con conexiones más fuertes o más numerosas.»

El diseño de redes de problemas establece vínculos entre un conjunto de problemas, en función de sus características, según las ideas, las nociones, los procedimientos, las heurísticas, que se ponen en juego durante su resolución. Los problemas que constituyen el eje de la red de problemas tienen como propósito preparar las situaciones que típicamente se presentan en el estudio del cálculo.

Los problemas que diseñamos se ajustan a la caracterización siguiente:

> «Un problema es una situación matemática o extramatemática de solución no inmediata pero que es potencialmente soluble para el alumno, admite varias vías de aproximación y posiblemente varias soluciones; requiere de la articulación, o combinación articulada, de conceptos y registros. Puede consumir desde una sesión de clase hasta uno o varios cursos. El problema tiene un carácter dual, puesto que es medio y fin simultáneamente, dependiendo de la relación que se establezca con los conceptos y procesos matemáticos, las heurísticas, las estrategias metacognoscitivas, las creencias y las prácticas escolares» (Alarcón, J. et al., 1995b).

Algunas de las situaciones típicas del Cálculo que consideramos son: el cálculo de razones de cambio, la optimación, el estudio del comportamiento de una función y su gráfica, el cálculo de áreas, la obtención del valor de una variable en cualquier instante cuando se conoce cómo cambia la variable con respecto al tiempo, y la interrelación que hay entre la derivada y la integral de una función.

Taller extracurricular de resolución de problemas

El escenario del estudio fue un taller extracurricular de resolución de problemas. El diseño de la red de problemas que se trabajó en el taller consta de 43 problemas relacionados con las situaciones típicas del Cálculo de diversas maneras. En las primeras cinco sesiones, que comprenden 25 problemas, se trataba de que los participantes se familiarizaran con el ambiente de trabajo y las convenciones de clase que se presentaban en los 'Materiales auxiliares para la organización del aprendizaje' (Clubes de Matemáticas de los CECyT 6, 7, 9 y 11 (1996)) Las sesiones 6 a 10 del taller, que comprenden 18 problemas, son propiamente las que preparan las situaciones típicas del Cálculo. De estos 18 problemas, cinco, los que ocupan el primer lugar en cada sesión, fueron analizados con particular detalle y constituyen la red de problemas. Los estudiantes que asistieron lo hicieron de manera voluntaria, el único requisito era estar disponible para las 10 sesiones sabatinas, se invitó principalmente a alumnos de tercer semestre pero asistieron también alumnos de primero y quinto semestres de los CECyT del IPN. Cada una de las sesiones estaba constituida por tres momentos:

- La resolución del problema,
- la presentación y discusión de las soluciones y
- los anexos y la retroalimentación.

Ejemplo de un problema de un gasto que se reduce gradualmente.

Aquí nos ocupamos de la octava sesión del taller. En esta sesión nos habíamos propuesto que el problema preparara las dos últimas situaciones típicas que listamos: 'El estudio de la obtención del valor de una variable en cualquier instante cuando se conoce cómo cambia la variable con respecto al tiempo o a alguna otra variable relacionada' y 'La interrelación que hay entre la derivada y la integral de una función'. Originalmente pensamos en un problema de movimiento, pero optamos por una situación menos familiar, la de un depósito de agua con flujos de entrada y de salida. Decidimos que la situación se presentara en un registro textual y redactamos una parte del enunciado, «el gasto se reduce gradualmente», de forma tal que muy probablemente daría lugar a la toma de una decisión y a la realización de algunas de las que Perkins (1992) llama actividades de comprensión, como la ejemplificación, la contextualización, la aplicación, la justificación, la generalización y la explicación. El problema consta de dos partes:

- En la primera, hay un flujo de entrada con características distintas en tres intervalos (gastos constante, variable, constante); planteamos preguntas locales acerca del volumen presente en el tinaco en tres instantes dados del segundo intervalo y después pedimos una respuesta general para el volumen en cualquier instante.
- En la segunda parte incluimos un flujo de salida con gasto constante y preguntamos el volumen de agua máximo que llega a haber en el tinaco.

El problema

> En el instante t = 0, se comienza a introducir agua en un tinaco vacío, con un gasto de 40 litros/minuto. Este gasto se mantiene constante durante dos minutos, hasta que el tinaco contiene 80 litros. Desde t = 2 hasta t = 4, el gasto se reduce gradualmente hasta los 5 litros/minuto. Este gasto permanece constante durante los dos últimos minutos. En el instante final, t = 6, el tinaco contiene 135 litros. ¿Cuántos litros de agua contiene el tinaco cuando t = 2.5, 3 y 3.7 minutos? ¿Y en cualquier instante t?. Supongamos ahora que se pone a funcionar una bomba en el instante t= 2 y que, durante los cuatro minutos siguientes, se extrae agua del tinaco a un gasto constante de 15 litros/minuto. ¿Cuándo alcanza el nivel del agua su máximo valor?

Propósito del problema

Además de las dos situaciones que consideramos al momento de redactarlo, se puede advertir que en su resolución se preparan también otras situaciones típicas, como el estudio de la noción de función, el uso de razones de cambio temporales y el cálculo de un máximo. Desde el punto de vista de los aprendizajes que prepara, el problema resulta ser integrador. En cuanto a los registros de representación que en su resolución se pueden articular, están, necesariamente, el textual y el de los fenómenos extramatemáticos idealizados, y, posiblemente, el numérico, el geométrico, el algebraico, el de representación gráfica y el icónico. También desde este punto de vista el problema resulta potencialmente fecundo.

Simplificando mucho el espectro de interacciones provechosas posibles con el problema, supusimos que a partir de sus experiencias previas con razones de cambio constantes, principalmente las vinculadas con el movimiento, los alumnos generarían alguna forma de manejar una razón de cambio variable del volumen con respecto al tiempo para obtener información acerca del volumen. Privilegiamos la representación gráfica para dar lugar al establecimiento del vínculo geométrico entre el área bajo la gráfica del gasto y el volumen, como la experiencia que prepara el estudio de la relación entre una función y su derivada que se da en el Cálculo. O dicho de otra forma, del estudio de la obtención del valor de una variable en cualquier instante cuando se conoce cómo cambia la variable con respecto al tiempo o a alguna otra variable relacionada. La función que asociamos a la situación constaba de tres reglas de correspondencia. En la primera y la tercera se ponía en juego el conocimiento previo supuesto y se invocaban naturalmente los esquemas correspondientes al cálculo del volumen a partir de gastos constantes, quizás por analogía con el movimiento con velocidad constante. Las primeras preguntas que se plantean piden respuestas locales, el volumen presente en el tinaco en tres instantes que corresponden a la segunda regla, en el intervalo $2<t<4$, la zona de dificultad. Cualquier tipo de respuesta con sentido, como las que los alumnos suelen dar, resulta provechosa por la experiencia que aporta, el trabajo en equipo y la discusión seguramente refinarán las explicaciones y obligarán a descartar las más toscas. La segunda pregunta, que pide el volumen en cualquier tiempo en el intervalo $0<t<6$, requiere de la explicitación de las tres reglas de correspondencia en alguno de los registros y exige la superación de dificultades mayores, sobre todo las relacionadas con la conversión de los registros gráfico y algebraico. En la última pregunta, se introduce una condición adicional, el agua sale del tinaco con gasto constante, y se pide encontrar el instante en que el agua alcanza su máximo nivel en el tinaco. Aquí se trataba de aplicar el procedimiento que sirvió para responder las preguntas anteriores, en una situación ligeramente distinta, y usarlo para calcular un máximo. Entre las posibilidades que ofrece el análisis de la representación gráfica están las relaciones que hay entre el tipo de gráfica del volumen, la gráfica de su razón de cambio con respecto al tiempo (el gasto) y la gráfica de la razón de cambio del gasto con respecto al tiempo, así como la vinculación que se puede establecer entre las características de la situación y las de cada una de estas gráficas, por ejemplo, el tipo de cambio que se da en el gasto y la concavidad de la gráfica del volumen.

Descripción de la experiencia

La caracterización que se hace del problema en términos de los objetivos de aprendizaje permite el establecimiento de hipótesis relacionadas con algunos aspectos del problema. El análisis previo y el análisis inmediatamente anterior a la experiencia permitieron la selección de tres aspectos del problema vinculados directamente con los objetivos de aprendizaje presentados en el apartado anterior.

El aspecto del problema de un gasto que se reduce gradualmente que analizaremos aquí es el que se refiere a:

- el significado a la frase "... se reduce gradualmente ..."

A continuación presentaremos los episodios del trabajo de un equipo en la resolución de este problema sobre el primer aspecto del problema. La presentación se hará relacionando los episodios con el especto del problema mencionado. Las intervenciones textuales del equipo se presentaran en cursiva. El equipo estuvo formado por dos estudiantes de tercer semestre (Juan y Clemente) y una estudiante de quinto semestre (Heidi), y contó con una monitora durante toda la resolución del problema.

Primer aspecto: el significado a la frase «... se reduce gradualmente ...»

Los monitores esperaban que surgieran dificultades en la lectura del problema porque en el enunciado aparece la palabra «gasto» y porque el equipo debía tomar una decisión sobre el significado de la expresión «...se reduce gradualmente...».

Si el equipo no reconocía el significado pertinente (técnico) de la palabra «gasto» era importante propiciar un intercambio acerca de los significados que los miembros del equipo podían atribuirle y que podían darse por consulta al diccionario, por análisis de las unidades, por el uso de la palabra en sus experiencias personales o por analogía con la velocidad. La interpretación a la palabra «gasto» podía darse en términos gráficos, si trazan rectas u otras curvas (una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo, una función escalonada, una hipérbola, etc.), en términos aritméticos o en términos algebraicos. Suponemos que la más común será la interpretación gráfica como línea recta.

Juan lee la primera parte del problema y enseguida comenta que la dificultad se encuentra en el momento en que el gasto:

Juan.- empieza a cambiar de 40 a 5 litros,

establecen un sistema de coordenadas, en el eje de las abscisas del 1 al 6 y en el eje de las ordenadas del 0 al 40. Heidi quiere comentar sobre la dificultad encontrada pero Juan los lleva primero a graficar, en los intervalos de 0 a 2 y de 4 a 6, un gasto constante de 40 y 5 respectivamente, y sólo hasta después enfrentan el intervalo de 2 a 4, en este momento Juan dice que como

> *Juan.- no nos están diciendo en qué forma están disminuyendo los litros por minuto ... lo podemos tomar como constante ... como aumento constante*

obtienen la información del volumen en t=2 y en t=4. Juan les habla de la interpretación del área bajo la gráfica del gasto como el volumen. Verifican esta idea para el primer intervalo y utilizan este resultado para encontrar volumen. Surge una confusión por el manejo simultáneo de gasto y volumen, mientras Juan y Clemente lo están discutiendo Heidi, que se desentiende de tal discusión, vuelve a la parte del enunciado en donde se describe el comportamiento en el intervalo que han identificado, como zona de dificultad, Juan y Clemente no le hacen caso hasta que Heidi comienza a obtener la ecuación de la recta. Interviene la monitora para preguntarles que justifiquen sus afirmaciones, en la justificación que da el equipo aparecen nuevas interpretaciones a la frase:

> *Juan.- si te dicen gradualmente podemos decir que disminuyen en una proporción igual... por lo menos hace más fácil el problema*

La monitora les pide que anoten lo que han trabajado en su reporte. Después Juan plantea usar las fórmulas de desplazamiento del modelo de movimiento con aceleración constante. Heidi lo cuestiona, Clemente menciona que a lo mejor sí pudiera servir. Heidi prefiere seguir el procedimiento del área bajo la curva y planea cómo hacerlo, para ello insiste en obtener la ecuación de la recta, en este momento Clemente le cuestiona el comportamiento lineal del gasto y Juan hace explícita la interpretación de la frase con un ejemplo:

Clemente.- ¿estás segura de que es una recta?, ¿por qué es una recta?

Juan.- porque se reduce gradualmente ..., digamos que se reduce gradualmente quiere decir que si pasa un minuto ... baja 5 litros por minuto menos, por minuto

Heidi detalla su plan, Juan le cuestiona el que no sea una recta sino un pedazo de recta. El procedimiento que propone Juan de usar las fórmulas del modelo del movimiento con aceleración constante tiene implícito el comportamiento lineal para la disminución del gasto.

Conclusiones

El trabajo de los estudiantes nos muestra cómo le dan significado a la expresión «disminución gradual» recurriendo a frases que sí tienen significado para ellos, tal como se hace en el lenguaje coloquial donde se utilizan palabras que sí se conocen para darle significado a otras que no se conocen. Esta atribución va más allá de la adopción de un nombre: hay una incorporación de las implicaciones que se derivan de que la disminución gradual del gasto la tomen como constante. Dentro de la amplia gama de recursos con que contaban los estudiantes del taller se encontraba el manejo de razones de cambio constantes y de disminución constante con sus correspondientes representaciones en distintos registros. Por el tipo de interacciones que tuvieron los estudiantes concluimos que hay más que una adopción de un término por otro, hay una adopción de un esquema a partir de algunos indicios. Es decir no sólo decidieron utilizar el adverbio constantemente por gradualmente, sino que adoptaron el esquema de las razones de cambio con disminución gradual que reconocieron en la gráfica del gasto.

Referencias

Alarcón, J. et al. (1995b) "Marco de análisis de problemas" Notas del Seminario Precálculo y Resolución de Problemas realizado en el DME-CINVESTAV-IPN.

Alarcón, J. et al. (1995a) Planes y programas de estudio de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM

Alarcón, J. et al. (1996) Planes y programas de estudio de matemáticas nivel medio superior. IPN

Charnay; 1994. Aprender (por medio de) la resolución de problemas, en Parra C. y Saiz I. (Comp). *«Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones»*, Paidós, 1994.

Clubes de Matemáticas de los CECyT 6, 7, 9 y 11 (1996) Materiales Auxiliares para la Organización del Aprendizaje. Club de Matemáticas del CECyT Wilfrido Massieu, México.

Hiebert & Carpenter (1992) 'Learning and Teaching with Understanding' en Grouws, D. A. (Ed.), (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NY: Macmillan.

Lester, (1994). Musing about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 25, No. 6, 660-675.

NCTM, 1989. National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation. Standars for the School Mathematics.* Reston VA: NCTM.

Pirie, S. R. B. & Kieren, T. E. (1992) Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. Educational Studies in Mathematics, 23, pp. 505-528. Kluwer Academic Publishers.

Perkins, D. (1992) La escuela inteligente. Gedisa editorial.

Puig, L. (1993). Elementos del Proceso de Resolución de Problemas. En Filloy, E. y Cordero, F. *Memorias del Quinto Simposio Internacional sobre Investigación en Matemática Educativa*.

Santos, L. (1996) La resolución de problemas. Grupo Editorial Iberoamérica

Schoenfeld, A. (1987) On Mathematics as Sense-Making. An informal Attack On the Unfortunate Divorce of Formal and Informal Mathematics. Artículo presentado en la OERI/LRDC Conference on Informal Reasoning and Education.

Schoenfeld, A. (1992) Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning*. Reston, VA: NCTM.

Wenzelburger et al., (1994) Planes y programas de estudio de matemáticas del Colegio de Bachilleres. CB

Formación de Profesores

Las ideas geométricas: eje de una propuesta de formación docente continua

Cecilia Crespo Crespo, Christiane Ponteville, José Villella
Universidad Nacional de General San Martín, Buenos Aires
Argentina

Ubicación del proyecto

La República Argentina está llevando a cabo actualmente una transformación educativa en todos los niveles a través del Programa de Reconversión Docente. Esta reforma se refleja en un proceso de capacitación docente. Cada jurisdicción realiza con este fin, convenios con Institutos de Formación Docente y Universidades. La Universidad Nacional de General San Martín (UNSAM) asumió hace dos años la responsabilidad de coordinar las acciones tendientes a la formación permanente de los docentes del tercer ciclo de la Educación General Básica (EGB) en parte del territorio de la provincia de Buenos Aires. La UNSAM, universidad de reciente creación, data de 1992 y aún se encuentra en proceso de expansión. En ella se dictan carreras de grado y de postgrado. Su zona de influencia corresponde a 199,5 km^2, con una población de más de 1.300.000 habitantes. La capacitación ofrecida por la UNSAM, a la que se refiere este reporte de investigación, está dirigida a un total de 3200 docentes de tercer ciclo de EGB en las áreas de ciencias naturales, ciencias sociales, matemática y lengua.

Los autores de este reporte idearon un trayecto de formación permanente de matemática que toma como base los contenidos conceptuales y la reflexión sobre la práctica docente y ofrece al docente en ejercicio en el tercer ciclo de la EGB (EGB3), un espacio de formación sobre tres ejes fundamentales: funciones, geometría y nociones de estadística y probabilidad. El desarrollo y resultados del primero de estos ejes fue presentado en la RELME 12. El presente reporte se refiere al segundo tramo de ese trayecto que se está llevando a la práctica en la actualidad. El material de trabajo de estas acciones de capacitación es el módulo: *Cuando la geometría es el tema de la reflexión matemática.* En éste se presentan a los docentes situaciones problemáticas diversas, en las cuales se trabajan los conceptos matemáticos paralelamente a consideraciones respecto de su enseñanza y reflexiones sobre su aprendizaje.

Destinatarios del proyecto

Los docentes a los que van dirigidas estas acciones de capacitación poseen características especiales: se trata de una población de formación heterogénea. Parte de los docentes son maestros, el resto son profesores de matemática. Esta heterogeneidad se debe al hecho de que la EGB3 está compuesta por el séptimo grado de la escuela primaria y los dos primeros años de la escuela secundaria previas a la reforma. Los maestros poseen formación docente general, no específica por áreas, que se refleja en mayores dificultades respecto del abordaje de temas específicos de la matemática. Los profesores, si bien poseen conocimientos matemáticos más acabados, presentan a veces problemas para adaptar los mismos al nivel de razonamiento de los alumnos del tercer ciclo. Esta heterogeneidad debió ser considerada a la hora de realizar la propuesta de capacitación y se ve reflejada en la selección de las actividades que se abordan.

Objetivos y metas propuestas

Entre los objetivos propuestos, los más significativos son: lograr en los docentes el desarrollo de una actitud reflexiva sobre su propia práctica escolar con el objeto de enriquecerla; releer comprensivamente los contenidos conceptuales centrales del diseño curricular de matemática de la EGB3 y adquirir técnicas y recursos para el desarrollo de situaciones de enseñanza que faciliten el aprendizaje de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales de la matemática para este ciclo.

La meta principal de esta capacitación es que lo que en ella se trabaje pueda ser transferido del aula de capacitación docente al aula de EGB, dado que aquello que el docente sea capaz de vivir como experiencia de aprendizaje, le será más fácil llevarlo posteriormente a su aula, aunque debiendo previamente adecuar los contenidos y actividades al nivel evolutivo de sus alumnos. A lo largo de esta instancia de capacitación se busca constantemente un aprendizaje activo por parte de los docentes-capacitandos. Deben ir construyendo los conocimientos de manera significativa, orientada por los capacitadores o guiados a través de las actividades propuestas. Los docentes-capacitandos son enfrentados constantemente a la resolución de situaciones problemáticas, en las que deben poner en juego sus conocimientos matemáticos, aplicar cierta cuota de intuición y sentido común y verificar sus resultados con las teorías y/o demostraciones que lo sustentan científicamente. Se hace, además, hincapié en el valor formativo y no sólo valorativo de la Matemática. Esto se traduce en el tratamiento de algunos contenidos a través de la historia de esta ciencia, para que se comprenda que las ideas matemáticas no surgen espontáneamente, sino que aparecen como consecuencia de las ideas filosóficas subyacentes en la sociedad y que su éxito depende de la madurez que tiene esa sociedad para lograr aceptarlas. Remarcar la importancia de los desarrollos históricos de los contenidos, permite ver la matemática como una ciencia viva cuya evolución no se ha detenido ni se detendrá pues es la misma naturaleza racional del hombre la que le da vida. Se insiste en las maneras de trabajo que permitan en todo momento, discutir e intercambiar información. Por esta causa, se propician durante algunos momentos de la capacitación las tareas grupales orientadas al aula taller.

Actividades propuestas

Durante las acciones de capacitación, se proponen actividades de distinto tipo, para que sea posible su abordaje de diversas maneras, aludiendo a distintos tipos de procesos de aprendizaje. En algunos casos, se solicitan trabajos individuales, orientados a la reflexión y puesta en común de ideas y conceptos. También aparecen trabajos grupales, en los que se propicia la discusión, el respeto por las ideas ajenas y la colaboración para crear secuencias de enseñanza para sus respectivos cursos. Se pide también la presentación de trabajos prácticos escritos, para permitir la expresión de ideas y realizar una constante evaluación de proceso de la capacitación. Constantemente aparecen actividades de aplicación y situaciones problemáticas tendientes a la fijación y aplicación de conceptos. Se propone la lectura de material bibliográfico con la finalidad de crear en los docentes la conciencia de la importancia de la consulta de diversos textos y autores, para que accedan a distintos enfoques de la matemática y su enseñanza y orienten estas actividades hacia una futura actualización continua desde la lectura crítica.

Organización de los contenidos

Los contenidos del módulo de trabajo se han organizado en grandes bloques temáticos que no sólo desarrollan los aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales involucrados en ellos sino que también muestran al lector un análisis de sus componentes didácticas para facilitar el proceso de reflexión sobre su práctica cotidiana y la elaboración de secuencias de enseñanza adecuadas a los respectivos proyectos educativos institucionales y realidades del aula de trabajo. Los bloques aludidos son:

a. *Los contenidos de Matemática, ¿como un cuento de hadas?*: trata sobre la ubicación de la Geometría en el abanico de los contenidos de la matemática en la EGB3.

b. *El pensamiento espacial en la EGB3*: desarrolla ideas acerca del espacio tridimensional y su abordaje didáctico en el nivel.

c. *Los alumnos frente a la geometría de la EGB3*: propone reflexionar acerca de los niveles de razonamiento en geometría propuestos por Van Hiele y cómo tomarlos en consideración en la lectura de los resultados a los que llegan los alumnos frente a las propuestas de sus docentes.

d. *Una alternativa didáctica*: propone al docente el abordaje de los contenidos relativos a la geometría de la convexidad y les ofrece material de lectura recreativa y científica sobre el mismo, desafiándolo con una pregunta final a la que se le trata de buscar respuesta: ¿puede hacerse geometría sin medida?

e. *Para tomar en cuenta a la hora de evaluar*: ofrece al lector actividades y lecturas destinadas a la reflexión sobre la evaluación de los aprendizajes geométricos.

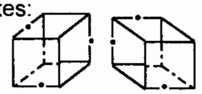
Un ejemplo de actividad propuesta

Como ejemplo, nos parece interesante acercar ésta, que sintetiza la actividad del Laboratorio de matemática que se gesta en el aula de la capacitación con los elementos del análisis didáctico de las actividades propuestas.

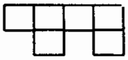
Para mostrar este enfoque en el tratamiento de los contenidos hemos elegido la actividad que titulamos: *Érase una vez un cubo* y que destinamos como secuencia de aprendizaje a los alumnos del 8° Año de la EGB. La secuencia es presentada a los docentes que participan de la capacitación para su posterior análisis.

1. Piensa en un cuerpo geométrico, identifica sus componentes, su forma, su tamaño, su posición, el material con el que está construido,...
2. Descríbelo en la hoja de trabajo y guarda esa descripción para que nadie pueda leerla.
3. Lee tu descripción a un compañero/a y pídele que te lea la que él/ella hayan producido. Responde:
a. ¿qué semejanzas y qué diferencias se dan entre ambas descripciones?
b. ¿a qué pueden deberse esas coincidencias y divergencias?
4. Es el turno de imaginar un cubo. Nuevamente descríbelo y además dibújalo.
Compara tus dibujos con el de tus compañeros/as y explica la conclusión a la que llegas después de haberlos visto.
5. Usa un cubo de telgopor u otro material que pueda ser cortado con facilidad sin deformarse (queso, por ejemplo) para averiguar qué sucede si tomando un vértice de referencia, se corta el cubo por los segmentos que forman los puntos medios de cada una de las aristas que concurren a dicho vértice.
6. Describe el trozo cortado y dibújalo en la hoja en distintas posiciones.
7. Responde:
a. ¿Coinciden las descripciones realizadas? ¿Por qué?
b. ¿Influye la longitud de las aristas del cubo en la forma, el tamaño y las propiedades del nuevo cuerpo obtenido después del corte? ¿Por qué?
c. ¿Tienen los cuerpos obtenidos por el corte algún nombre en particular?
8. Pinta con témpera no muy líquida la zona del cubo que quedó al descubierto después de realizado el corte. Estampa con este "sello" la hoja de trabajo.
9. Mientras se seca el estampado anterior, repite la misma acción con cada una de las caras del cuerpo obtenido después del corte.
10. Comparando ambos estampados, responde:
a. ¿Qué puede decirse de su forma?
b. ¿Y de su tamaño?
c. ¿Hallaron tus compañeros/as las mismas respuestas? ¿A qué puede deberse?
d. Describe geométricamente las figuras obtenidas por el estampado. Relaciona tu descripción con la realizada respecto del cubo y del otro cuerpo. ¿Cuál es tu conclusión?
(Para responder a esta pregunta es conveniente que uses libros de matemática que te darán argumentos para tu redacción)
11. Llamaremos *sección* a la zona por donde cortamos al cubo.
a. Corta el cubo para que la sección resulte un triángulo equilátero de superficie equivalente al 50% de la de la sección obtenida en el corte anterior.
b. Enuncia los pasos seguidos para hacer dicho corte.

c. Comprueba la eficacia y la eficiencia de tu "método" dictándoselo a un compañero/a. Hazle las modificaciones que estimes pertinentes. No olvides registrarlas para cuando pongas en común tu trabajo en clase.
12. Repite las acciones de la pregunta 11 pero buscando un triángulo de superficie igual al doble de la de la sección original.
13. Responde:
a. ¿Por dónde debe realizarse el corte para obtener la sección triangular de mayor superficie?
b. ¿Por qué?
14. Como de secciones se trata, te proponemos realizar los siguientes estudios sobre las mismas. En todos los casos debes describir y poner nombre -geométrico si lo tiene- a la sección obtenida al cortar el cubo por los segmentos que delimitan los puntos marcados en las aristas. En la medida de tus posibilidades, discute tus hallazgos con los de tus compañeros/as pero no realices los cortes a menos que sea muy necesario. Imagina las respuestas sin cortarlas!!!!!!!
Las figuras de referencia son las siguientes:



(otros modelos pueden darse colocando los puntos en distintas aristas, en distintas caras, variando la cantidad de puntos...)
15. Compara cada una de tus secciones con las de tus compañeros/as.
a. ¿Coinciden sus apreciaciones? ¿Por qué?
b. ¿Cuál es el mínimo número de puntos que se necesita para que todos obtengan la misma sección? Justifica.
16. ¿Son válidas tus conclusiones si el cuerpo a cortar es:
a. una vela cilíndrica?
b. una pelotita de melón?
c. un bombón con forma de prisma de base triangular?
Fundamenta cada respuesta anterior. Escribe un informe de no más de 200 palabras con tus conclusiones.
17. Se llama *hexominó* al conjunto de seis cuadrados que tienen en común, cada uno de ellos, un lado. Por ejemplo:



Algunos hexominós pueden generar un cubo.
a. Dibuja hexominós que puedan generar un cubo.
b. ¿Cuántos cuadrados coinciden en cada vértice? ¿Sucede lo mismo en los hexominós que no forman cubo?
c. ¿Dónde conviene colocar las pestañas para que la construcción del cubo sea más fácil? ¿Cuál es el número mínimo de pestañas que deben colocarse?
18. Al seccionar un cubo pueden obtenerse distintos cuadriláteros.
a. Muestra qué cortes se deberían hacer al cubo para obtener los distintos cuadriláteros estudiados.
b. Muestra qué cortes se deberían hacer al cubo para obtener polígonos no cuadriláteros.

Esta secuencia de actividades se analiza conjuntamente con los docentes-capacitandos de la siguiente manera:

Tiene como punto de partida la imaginación y como hilo vertebral el desarrollo del sentido espacial. Se trata de lograr en los alumnos de EGB, el desarrollo de su capacidad de sentido espacial creando imágenes que no sólo son copias de cuerpos de la realidad, sino que en tanto invenciones, admiten la posibilidad de ser transformadas dinámicamente sometiéndolas a control y organizando sus resultados. Entendemos por sentido espacial la posibilidad de comparar las formas de las figuras con diferente orientación, reconocer las simetrías de ciertas figuras, relacionar formas y tamaños, dibujar un diagrama para ayuda al análisis... Este sentido no sólo es desarrollado por la matemática, sino por varias de las áreas curriculares, lo que le confiere un lugar destacado en la interdisciplinariedad. A lo largo de toda la secuencia, la conceptualización matemática de los hallazgos obtenidos, se constituye en objetivo fundamental de la misma, en tanto ésta será el medio del que disponemos para lograr que aquélla se produzca en clase y habilite a los alumnos en la posesión de los contenidos matemáticos que los diseños curriculares priorizan en la EGB3. Por ello, el tratamiento de los distintos contenidos que intervienen en la secuencia, tanto por ser vertebradores de la misma o por aparecer en forma de herramientas para su desarrollo, admiten distintos niveles de profundización, acordes con el dominio que sobre los mismos tengan los destinatarios. Así, los grupos que presentan habilidades para el uso de técnicas analíticas y procedimientos algebraicos podrán utilizarlos para la obtención de resultados y aquellos que todavía no los tengan podrán acceder a las respuestas a través de métodos manipulativos. Sin embargo, es de esperar que todos, partiendo de los conocimientos previos que poseen, adquieran paulatinamente las herramientas de los contenidos que se enuncian como óptimas para el ciclo.

Los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de la secuencia son mínimos y pueden listarse, sin por ello suponer jerarquía o exhaustividad alguna, de la siguiente manera: elementos y propiedades de los cubos y los polígonos; relaciones entre propiedades; elementos de dibujo en perspectiva; construcción de desarrollos planos de sólidos; habilidad para el debate; estrategias de argumentación y validación.

Las actividades seleccionadas barren un gran abanico de contenidos, pero tal diversidad enriquece su estructura que intenta basarse en el análisis de situaciones geométricas. Pueden agruparse en tres tipos: las que intentan trabajar con la imaginación y visión espacial en forma específica (1, 2, 3, 16, 18), las que toman objetos geométricos específicos y los someten a análisis (4, 5, 6, 7, 8, 9, 18) y, las que se proponen consolidar los conocimientos adquiridos (10 a 18).

En términos de la teoría de las situaciones (Brousseau), las número 1, 2, 4, 6, 8, 9 son del tipo acción, las 3, 4, 7, 13, 18 son del tipo de formulación de hipótesis, la 7 es de validación, mientras que la 10 es de institucionalización, las 11, 12, 15 de consolidación y las 14, 16 ,18, de aplicación. La asignación de categorías a cada actividad no es definitiva, pudiendo una de ellas pertenecer a más de un tipo de los descriptos.

Entre los contenidos que la secuencia permite trabajar, encontramos: ángulos, búsqueda de regularidades y generalización de resultados, construcciones con regla y compás, elementos y propiedades de los polígonos, estimación de medidas, formulación y comprobación de conjeturas, reconocimiento y utilización de la geometría para interpretar y resolver problemas del entorno, sección de un sólido, utilización y análisis de representaciones planas de sólidos, valoración del sentido espacial como una componente importante de la experiencia matemática, valoración del trabajo colectivo en la resolución de problemas, volúmenes, áreas, perímetros...

Con respecto a la metodología empleada, en aquellas actividades de la secuencia que se apunta a la imaginación, el rol del docente cobra vital importancia por el tipo de matices que puede darle a la pregunta. Por ello, aunque la secuencia aparece escrita en términos de alumnos, es conveniente readaptarla a cada aula en particular, presentando algunas de las actividades en forma oral dando lugar a la aparición del intercambio y el "diálogo desafiante" del docente. Los alumnos ocupan roles alternativos durante el desarrollo de la secuencia y su participación puede ser resumida en la siguiente descripción:

Acción $\Longrightarrow$ *Reflexión sobre lo actuado* $\Longrightarrow$ *Conceptualización*

Durante la acción, los alumnos harán aparecer sus preconcepciones acerca del contenido que sustenta la actividad. Esto se manifestará en las hipótesis que querrán validar al igual que en los comentarios que la acción les provoca. Lo interesante, en todos los casos, es cómo refutarán las hipótesis cotejando sus conocimientos con los que deben adquirir y que se constituye en la etapa de indagación y posterior construcción de la teoría matemática de la que debe disponer como cierre de su trabajo. El saber matemático aparece sustentando toda la secuencia y debe ser evaluado en términos de su adquisición por parte de los alumnos. Para ello es necesario determinar si los alumnos lograron imaginar, observar diferencias y establecer analogías, buscar y poner de manifiesto regularidades, hacer conjeturas y comprobarlas, analizar las condiciones iniciales y finales de una situación, hacer previsiones, etc. Se puede hacer presentándoles hojas con dibujos de cubos en posiciones y perspectivas distintas a las trabajadas usualmente y pedirles que en ellas identifiquen las cualidades estudiadas durante el desarrollo de la secuencia; discutiendo con ellos por qué una cualidad se mantiene invariante después de una transformación o no; aplicar las transformaciones estudiadas a otros sólidos, etc.

La actividad 1 intenta que los alumnos describan , utilizando la terminología adecuada las propiedades o relaciones entre los elementos geométricos de las imágenes que han creado. Junto con las actividades 2 y 3 permite que el alumno asuma que la descripción aludida no es unívoca en el sentido de generar en quien la escucha una imagen mental distinta a la que la generó. Para el dibujo que se propone en la actividad 4 se pueden usar tanto las tramas cuadradas como las isométricas. Se busca que docentes y alumnos discutan acerca del sentido de la imagen, de lo que esta constituye y de su diferencia con la realidad. Para ilustrar los argumentos, se puede recurrir, entre otros, a los dibujos de Escher o de Magritte que analizados junto al colega de educación plástica le dan al tema una visión interdisciplinaria.

La actividad 5 es importante por la aparición de lo manipulativo, y junto a las actividades 6 y 7 generan en los alumnos la necesidad de hacer conjeturas sobre las preguntas que se le formulan y comparar respuestas entre pares respecto de lo solicitado en búsqueda de la respuesta correcta. Esta contrastación de argumentaciones debe preceder e incluso estar presente durante la lectura de material bibliográfico que sustente las conclusiones a las que se va arribando. El conjunto de actividades que complementa a las anteriores y numeradas desde el 8 hasta el 13 intenta que los alumnos identifiquen las variaciones de tamaño respecto del área, volumen o perímetro y puedan , en los casos en que así lo requiera la planificación del curso, recurrir al lenguaje algebraico para establecer las funciones que determinan dichas variaciones. Por ejemplo: la dependencia del área respecto de la longitud de la arista. En el desarrollo de la actividad los preconceptos hacen su aparición rápidamente y es común escuchar afirmaciones tales como: "el aumento de área hace aumentar el perímetro". Es el momento oportuno para poner en práctica el perfil de docente al que se hacía alusión en párrafos anteriores y relacionar el trabajo con preguntas del tipo: "¿siempre sucede esta relación? ¿en un rectángulo también? ¿en cualquier polígono regular? ¿en todos los cuerpos poliédricos? ¿y en los redondos?" Las actividades 14 a 16 ponen al alumno en la situación de comprobar experimentalmente o no la sentencia "tres puntos determinan un plano", dado que en muchos casos ellos solicitan colocar un cuarto punto antes de resolver los problemas planteados. La búsqueda de argumentos para los supuestos planteados y la necesidad de relectura de los textos que tratan el tema, permiten la conceptualización de los contenidos trabajados. La actividad 17 busca llevar al alumno de la visualización a la representación. La búsqueda de todas las formas posibles de hexominós que generan un cubo llevará a la necesidad de trabajar con los conceptos de geometría métrica conocidos: perímetro, superficie, ángulo, arista, apotema... Además pone en evidencia el orden 3 de los vértices de un cubo, lo que significa que en cada vértice concurren tres caras. La actividad 18 ofrece la posibilidad de extender las conclusiones a otros sólidos distintos al cubo. Su realización puede ser disparadora de nuevas secuencias de trabajo cada una de las cuales se refiera a un cuerpo en particular.

Conclusiones

A modo de cierre, transcribimos una frase de Julio Rey Pastor: *"La idea de que para aprender una ciencia hay que partir de sus fundamentos para ir construyendo paso a paso todo el edificio con todo el rigor es didácticamente absurda, conceptualmente hipertrófica y científicamente inútil"*. En efecto, es a través de la intuición y de la experimentación que se construyen los conceptos geométricos significativos; en esta construcción debe intervenir el rigor propio de la matemática, pero en esta etapa es aún innecesario el tratamiento formal característico de la axiomática.

Referencias bibliográficas

ALSINA, C. y otros (1996). *Enseñar matemática.* Barcelona, España: Grao.

ARTIGUE, M. (1995). *Ingeniería Didáctica.* Bogotá, Colombia: Iberoamericana.

BROUSSEAU, G. (1996). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* París, Francia.

CRESPO CRESPO, C.- PONTEVILLE, Ch.- VILLELLA, J. (1998). *El concepto de función: eje de una propuesta de formación docente continua.* RELME-12. Santafé de Bogotá, Colombia.

CRESPO CRESPO, C. - PIZZO, A. - PONTEVILLE, Ch. - VILLELLA, J. (1998). *Thinking about geometry teaching.* ICM-98 International Congress of Mathematics - Berlín, Alemania.

VILLELLA, J. (1998). *Piedra libre para la matemática.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

VILLELLA, J. - CRESPO CRESPO, C. - PONTEVILLE, C. (1998). *Cuando la geometría es el tema de la reflexión matemática.* Buenos Aires: Argentina: UNSAM.

El desarrollo de habilidades matemáticas y la formación de profesores de Educación Secundaria[1]

Santiago R. Velázquez, Enrique Gómez O.
Universidad Autónoma de Guerrero
México

Carlos Flores Lozano
Centro de Maestros, Acapulco, Gro.
México

Gerardo García L.
Centro de Actualización
del Magisterio, México

Introducción

El trabajo que se presenta consiste en un proyecto de investigación perteneciente al Sistema de Investigación Benito Juárez, SIBEJ - CONACYT, que aborda un tema prioritario en el campo de la Matemática Educativa, como es la formación de profesores. Particularmente, se ubica en la formación de docentes de educación secundaria en el marco del desarrollo de las habilidades matemáticas. A su vez, las habilidades matemáticas se enmarcan en las habilidades conformadoras del desarrollo de la personalidad (Fariñas, G. 1995), que están organizadas en grupos y asocian a las habilidades específicas de cada asignatura. Las actividades del proyecto se están iniciando y se desarrollarán durante dos años, por lo que en esta presentación solo se expone el protocolo respectivo.

Protocolo del proyecto

Objeto del proyecto

La enseñanza de la Matemática en la educación secundaria, enfrenta una serie de dificultades que se reflejan en una actuación puntual, mecanicista y de desinterés de los alumnos. Esta es una razón para que los profesores de Matemática de este nivel educativo, tengan una preparación que les asegure inovar el proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura. En esta preparación es relevante el desarrollo de habilidades matemáticas, ya que constituyen formas de actuar y de pensar, que aseguran un desempeño exitoso en diversas actividades.

Estas ideas inducen a precisar como objeto de esta investigación, el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en las escuelas responsables de formar y actualizar a los profesores de Matemática de la educación secundaria. Además, es materia de investigación el diseño de un sistema de situaciones didácticas y las acciones apropiadas, para promover el desarrollo de habilidades matemáticas. En la práctica, el desarrollo de habilidades matemáticas es muy limitado, por lo que esta investigación se propone contribuir a la solución del problema ¿Por qué los profesores de educación secundaria no desarrollan habilidades matemáticas?

Antecedentes técnicos y referencias

El presente trabajo se ubica en la Matemática educativa, disciplina que tiene como un objeto de estudio el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. El tema de esta investigación es la formación de profesores de Matemática de educación secundaria, en el marco del desarrollo de habilidades matemáticas.

La formación de profesores y el desarrollo de habilidades matemáticas, constituye un aspecto relevante para que la matemática escolar cumpla con sus funciones. Una de ellas es la de promover el desarrollo de formas de trabajo, que son necesarias en la actividad matemática y que aseguran un desempeño exitoso en las diferentes esferas de la vida.

---

[1] 98 - SIBEJ - 03 - 024 - CONACYT

La formación de profesores de Matemática, conforma una línea de investigación, considerando, que como afirma el Colegio Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos: los docentes deberán ser enseñados en forma análoga como ellos habrán de enseñar, explorando, elaborando conjeturas, comunicando y razonando (NCTM, 1989). Además, si se es consecuente con lo que afirman Davidov y davodchikov citados por (Fariñas, G. 1995) en el sentido de que " la sociedad vive y se desarrolla tal como aprende y aprende tal como quiere vivir", deben promoverse aprendizajes significativos, en los que los profesores desempeñan un papel esencial.

En México esta línea de investigación se fortalece en 1984, con la creación del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, PNFAPM. El objetivo de este programa es la profesionalización del profesor universitario, pero impulsa la formación de los profesores de educación secundaria. Considerando que algunos de estos profesores se incorporan al programa, en el que se ofrece una licenciatura en matemática educativa. Más tarde, en 1994 con la creación del Programa Nacional para la actualización permanente de los Maestros de Educación Básica, PRONAP, se da un nuevo impulso a esta actividad en la República Mexicana. Instrumentándose talleres generales y cursos nacionales, a través de los Centros de Maestros. Con este programa se inicia una búsqueda continua, de diferentes alternativas que favorezcan la profesionalización de los docentes en general y en particular los de Matemática de educación secundaria. En el mismo sentido el Centro de Actualización del Magisterio, CAM, redefine sus funciones a partir de 1990, instituyendo la licenciatura en educación media.

La Universidad Pedagógica Nacional de la ciudad de México, ha realizado diversos estudios sobre formación y actualización de profesores de Matemática. Uno de ellos es el de Eréndira Valdez (Valdez, E. 1998), en el que se constatan algunas deficiencias de los profesores referentes a su formación matemática y a las actividades para dirigir la actividad de sus alumnos, con formas didácticas inovadoras. En este estudio, es importante la tesis de que la actualización del profesor se inicia a partir de que reflexiona sobre su labor, de modo que es necesaria la búsqueda de acciones que promuevan dicha reflexión.

En este sentido la Universidad Autónoma de Sinaloa instrumenta una propuesta, para actualizar a los profesores de Matemática del nivel medio superior (Rafael, S. 1995). En la que se hace una profundización en contenidos de Matemática, Didáctica e Investigación Pedagógica. Por su parte Juan Carlos Piceno (Piceno, J. 1998) en un estudio sobre formación de profesores de educación primaria, considera la necesidad de que los maestros desarrollen habilidades mentales. De ese modo estarán en condiciones de promover, la formación de este tipo de habilidades en sus alumnos. Esta idea es orientadora para abordar el tema que se investiga, ya que refleja una correspondencia entre el enfoque de la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria y la formación de profesores.

Luis Rico (Rico, L. 1998) explica las necesidades formativas del profesor de Matemática de su país, España. Esta explicación expresa que una tarea fundamental del profesor es dirigir la actividad de sus alumnos, para que se apropien de un conjunto de saberes y capacidades matemáticas. Para el cumplimiento de esta tarea requiere de una formación sólida en la enseñanza de la Matemática, que le asegure el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de esta asignatura.

Un trabajo importante en este campo es el de Lorenzo J. Blanco (Blanco, L. 1996), que compara y relaciona la formación teórica del maestro y su práctica de pregrado. En la que se manifiesta que una buena preparación teórica no necesariamente se corresponde con una buena práctica. El análisis de esta comparación posibilita a los futuros profesores, reflexionar sobre su desempeño para encaminarse a la construcción de propuestas didácticas eficaces. Un grupo de trabajo dirigido por Leonel enriquez (Enriquez, L. 1998) hace una propuesta, para la formación de profesores de su país, Chile. En la que se refleja la tesis de la unidad de lo cognitivo, metacognitivo y afectivo en la enseñanza aprendizaje de la Matemática. De modo que los docentes al apropiarse de estos saberes, podrán promoverlos en sus alumnos.

Hans Freudenthal (Freudenthal, H. 1992) considera la formación de profesores, en su relación con los denominados problemas mayores de la educación matemática. Estos problemas mayores, Freudenthal los resume en: ¿Cómo diseñar el desarrollo educacional como una estrategia para el cambio?. Este investigador explica que el profesor necesita reaprender, analizando los proceso cognitivos de los alumnos en el aprendizaje de la Matemática, para lo que requiere de una preparación que le asegure el estudio sistemático de los referidos procesos.

Un grupo de investigadores dirigido por José B. Rodríguez (Rodríguez, J. 1995) hace un análisis de las deficiencias, de la formación de profesores de su país, Cuba. Argumenta que una alternativa para mejorar esa formación, es por medio de cursos y seminarios, en los que se profundicen, articulen y generalicen contenidos matemáticos.

Una de las tendencias actuales de la enseñanza de la Matemática, sostiene que hay que formar al hombre en lo perdurable. En este sentido Gloria Fariñas (Fariñas, G. 1995) hace novedosos aportes, al explicar que la escuela tiene como función principal, promover la formación de las habilidades conformadoras del desarrollo de la personalidad, HCDP. Dichas habilidades están caracterizadas en 4 grupos y consisten en el planteamiento y logro de metas personales, la distribución del tiempo en actividades útiles y en las acciones de comprender, comunicar, plantear y resolver. Tesis similares sostiene Albertina Mitjans (Mitjans, A. 1995) al explicar que en la escuela es fundamental, la implicación personal del alumno, en su proceso de aprendizaje y propone un sistema didáctico integral basado en los recursos de la personalidad del estudiante. En dichos recursos se considera esencial la unidad de lo cognitivo, afectivo e histórico-social. Estos recursos se manifiestan en formaciones motivacionales, autovaloración, autodeterminación, tendencias orientadoras, la problematización y reconceptualización del saber y en la búsqueda de nuevas estrategias de solución.

En base a esta concepción las habilidades matemáticas como: recodificar, modelar, fundamentar, demostrar y resolver problemas, se corresponden con los diferentes grupos de las HCDP. En estas ideas se refleja la importancia de comprender y comunicar diversos saberes, promoviendo el desarrollo del pensamiento y el lenguaje. De este modo la formación de habilidades matemáticas en el marco de las habilidades conformadoras del desarrollo de la personalidad, constituye un enfoque didáctico, que puede ser instrumentado en la formación y actualización de profesores de educación secundaria.

Objetivo técnico

- Analizar el estado actual de las habilidades matemáticas en profesores de Matemática de educación secundaria.
- Elaborar un sistema de situaciones didácticas y las acciones apropiadas, para promover el desarrollo de habilidades matemáticas, de modo que pueda ser aplicado en la formación y actualización de profesores.

Metas del proyecto

- Realización de 3 tesis de licenciatura y 3 de maestría.
- Elaboración de 3 artículos científicos donde se expongan los resultados esenciales de la investigación.
- Estructuración de un material impreso que refleje los resultados principales de la investigación, donde se sistematicen las situaciones didácticas, para promover el desarrollo de habilidades matemáticas en profesores de educación secundaria.

Metodología

1. Estudio de la bibliografía referente al tema.

Se hará un análisis de la guía para el asesor y de los libros para los docentes, que dirigen la formación y actualización de profesores de Matemática de educación secundaria, de igual modo se revisarán los libros de estos últimos, con el fin de determinar los aspectos relevantes sobre la formación de los referidos profesores en el marco de las habilidades matemáticas. Con igual propósito se analizarán los programas para su formación y actualización.

Además, se hará un estudio de diversos textos de Matemática, trabajos de investigación y material científico para determinar los aspectos esenciales que orientan hacia la elaboración de los instrumentos de investigación y el diseño del sistema de situaciones didácticas, que promuevan el desarrollo de las habilidades matemáticas en los profesores.

2. Elaboración, validación y aplicación de pruebas.

Se elaborarán y aplicarán diversas pruebas, para determinar el estado actual de las habilidades matemáticas de los profesores de educación secundaria, así como su concepción acerca de la enseñanza de la Matemática. Este estudio aportará criterios para definir y estructurar algunos aspectos del sistema de situaciones didácticas y las acciones apropiadas, para promover el desarrollo de las habilidades matemáticas. En esta actividad participarán profesores de 3 zonas escolares de educación secundaria, de la región Acapulco Coyuca de Benítez, Gro.

3. Elaboración, validación y aplicación de entrevistas.

Una vez que se haya determinado el estado actual de las habilidades matemáticas de los profesores de educación secundaria y sus concepciones acerca de la enseñanza de esta asignatura, se harán entrevistas a estos educadores para ampliar la razón de sus respuestas y precisar la información obtenida. Estas entrevistas se harán en diversos momentos.

4. Diseño del sistema de situaciones didácticas y las acciones apropiadas, para promover el desarrollo de habilidades matemáticas.

En base al análisis de las diversas actividades de este proyecto, se diseñará un sistema de situaciones didácticas y las acciones apropiadas, para promover el desarrollo de habilidades matemáticas. De modo que pueda ser instrumentado por los docentes, que dirigen la formación y actualización de los profesores, de Matemática de educación secundaria.

5. Desarrollo de talleres y cursos.

Estos talleres y cursos estarán dirigidos a los docentes de instituciones formadoras y actualizadoras, de los profesores ya mencionados. Estas actividades tienen el propósito, de que los docentes se apropien del sistema de situaciones didácticas y generen sus propias estrategias, para instrumentarlas en su labor.

6. Desarrollo de la investigación acción.

En esta actividad los docentes ya referidos, trabajarán con sus estudiantes que son los profesores de Matemática de educación secundaria. De modo que apliquen el sistema de situaciones didácticas para promover el desarrollo de habilidades matemáticas, las dificultades que se presentan en este sentido, vayan generando sus propias estrategias didácticas y evalúen los efectos de esta nueva forma de trabajar.

7. Elaboración e instrumentación de la propuesta.

Considerando el análisis de los diferentes resultados de esta investigación, se elaborará un material impreso que contenga el sistema de situaciones didácticas y las acciones apropiadas, para promover el desarrollo de habilidades matemáticas en los profesores de educación secundaria. Este material se estructurará, de modo que constituya una base de orientación para que los docentes generen, sus propias situaciones didácticas y las instrumenten en su labor.

8. Evaluación de los resultados.

Se hará un análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados de la investigación. A los efectos de esta actividad se aplicarán pruebas de entrada, a lo largo del desarrollo del proyecto y de salida, a fin de disponer de la información necesaria. Además, se hará un seguimiento de las diversas actividades de la investigación.

Contribución técnica

La formación de profesores en el marco del desarrollo de habilidades matemática, es una actividad esencial para inovar el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Esta afirmación se fundamenta, en el hecho de que al desarrollar habilidades matemáticas, se contribuye al desarrollo de formas de aprender a aprender y de aprender a pensar. Además, el profesor que desarrolla habilidades matemáticas, asegura condiciones para vincular la docencia con la investigación y tiene una concepción integradora de la Matemática. Estos aspectos se reflejan en la correspondencia que se puede establecer, entre las habilidades matemáticas y las habilidades conformadoras del desarrollo de la personalidad, HCDP.

La práctica demuestra que esta forma didáctica, se instrumenta muy poco en la escuela. Una de las razones de esta situación, puede ser la insuficiente formación de los profesores, por lo que eta investigación se propone hacer los siguientes aportes:

- Artículos científicos donde se expliquen, los resultados fundamentales de la investigación.
- Capacitación a docentes en las situaciones didácticas y las acciones apropiadas , para promover el desarrollo de habilidades matemáticas.
- Una guía didáctica que puedan aplicar los docentes, para promover el desarrollo de habilidades matemáticas.
- Una colección de tareas, ejercicios y problemas matemáticos, referente a cada una de las habilidades motivo de estudio.

Bibliografía

Cabañas, G. y Velázquez, S. 1998, La resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática De la escuela secundaria, proyecto de investigación en proceso, SIBEJ-CONACYT, Chilpancingo.

Cantoral, R. 1997, acerca de la intuición del rigor: notas de una reflexión didáctica, Antologías 1, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Duval, R. 1993, Registros de representación y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en memorias de Didáctica y Ciencias Cognitivas, traducción del Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México, 1997.

Fariñas, G. 1995, Maestro, una estrategia metodológica, Academia, Habana.

Freudenthal, H. 1992, Problemas mayores de la educación matemática, en antología de educación matemática, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.

Hitt, F. 1998, Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum, revista de Educación Matemática, Vol. 10, No. 2, Iberoamérica, México.

Mitjans, A. 1995, Personalidad, creatividad y educación, Pueblo y Educación, Habana.

Placencia, I. et al, 1998, Creatividad y visualización, Revista de educación matemática, Vol 10, No 2, Iberoamérica, México.

Polya, G. 1976, Cómo plantear y resolver problemas, Trillas, México.

Rico, L.1998, Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Thonson Editores, México.

SEP, 1996, La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria, guía de estudio, PRONAP, México.

SEP, 1994, Libro para el maestro de educación secundaria, México.

Schoenfeld, A. 1985, Ideas y tendencias de la solución de problemas, del libro La enseñanza de la Matemática a debate, Madrid.

Rizo, C. y Campistrous, L, 1976, Aprende a resolver problemas aritméticos, Pueblo y Educación, Habana.

Waldegg, G. et al. 1998, Matemáticas en contexto, serie de libros para secundaria, Iberoamérica, México.

Velázquez, S. 1996, Una estructuración de la enseñanza de los dominios numéricos en la escuela secundaria del estado de Guerrero, tesis de doctorado, Chilpancingo.

Vygotsky, L. 1997, Pensamiento y lenguaje, Quinto sol, México.

La Resolución de Problemas, su relación con las prácticas docentes

Nélida Haydée Pérez, Norma Rosa Cerizola
Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de San Luis
Argentina

Resumen

La resolución de problemas es uno de los temas que ocupa un lugar importante en la enseñanza de la matemática.

A efectos de contribuir a la formación de profesores de matemática consideramos un instrumento útil para favorecer la práctica docente en cuanto a la enseñanza de Resolución de Problemas, poner en relación las dificultades que tienen los alumnos en la actividad de resolver problemas en forma independiente, con las prácticas docentes, entendiendo las últimas como la relación existente entre docente, alumnos y el conocimiento en la situación aúlica.

En este trabajo se analizan algunos problemas resueltos por alumnos de nivel medio en situación de examen. Las dificultades mostradas y los procesos involucrados explicitan características de esas prácticas. El análisis nos permite concluir sobre temáticas cuyo abordaje en forma reflexiva estimamos son de utilidad para una transformación de las prácticas.

Introducción

La resolución de problemas es uno de los temas que ocupa un lugar importante en la enseñanza de la matemática. Lo que está íntimamente relacionado con la concepción de ciencia más como un proceso que como un producto, privilegiando los procesos involucrados en las etapas de creación por sobre los resultados.

En este trabajo ponemos en relación las dificultades que tienen los alumnos en la actividad de resolver problemas en forma independiente, con las prácticas docentes.

Si bien nuestros problemas de análisis fueron resueltos por alumnos interesados en la matemática, en situación de examen, estos alumnos forman parte de las aulas, y no recibieron entrenamiento especial, por lo cual creemos revelan mucho de las prácticas docentes. El estudio toma como base problemas resueltos en las pruebas clasificatorias y finales dadas por alumnos en la primera y segunda olimpíada Matemática de la Provincia de San Luis, Argentina.

El proceso de resolución de problemas tiene un carácter tan complejo debido a los múltiples factores que interactúan en él, que resulta prácticamente imposible hacer un análisis exhaustivo de todas las dificultades que pueden presentarse, decidimos por lo tanto centrar nuestra atención en dificultades relativas a:

a) Los conocimientos.

b) Análisis y comprensión del texto. Determinación de la vía de solución.

Presentamos consideraciones sobre cada tipo de dificultad, ejemplificamos dichas situaciones y finalmente emitimos las conclusiones.

Análisis

a) Los conocimientos.

¿Qué papel juegan en la solución de problemas? ¿Son cruciales? ¿Es lo único que importa?

El conocimiento del tema específico puede resultar una condición absolutamente esencial para poder pensar en tener acceso a la resolución de un cierto problema, sobre todo cuando nos ubicamos en cierto nivel de complejidad, la necesidad de información más profunda se hace patente. Si el conocimiento de la geometría es escaso, problemas de tal tema se transformarán en irresolubles, de difícil interpretación, no se comprenderá el enunciado, no se logrará determinar un camino de solución.

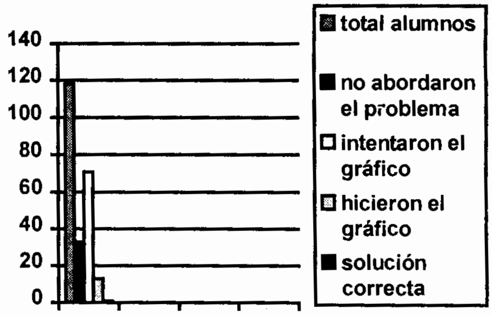
El conocimiento del tema permitirá alternativas: formular el problema de manera más simple, recordar alguna situación similar, hacer un dibujo, etc. Lo que importa y debería estar en la base del aprendizaje es poder entresacar del conocimiento acumulado de una cierta área, las situaciones, hechos, técnicas que sirven de modelo para resolver problemas que aparezcan en ese campo específico.

Distinguir entre propiedades y conocimientos importantes dentro de un tema y las estrategias o técnicas apropiadas y más utilizadas dentro de un campo no siempre es posible, en general están íntimamente relacionadas. Por ejemplo que un número entero cualquiera admita descomposición única en factores primos, es una propiedad central de la teoría de números, pero al mismo tiempo constituye una de las estrategias más útiles en la resolución de problemas que aparecen en dicho campo, este es un caso donde la estrategia apropiada es aportada por el conocimiento.

Problema 1: *ABCD es un trapecio de bases AB=10 y CD=6. La altura mide 4. Sea P el punto medio del lado AD y Q el punto medio de PB. Hallar el área del triángulo PQC.*

(Pruebas clasificatorias, alumnos de 13-14 años, Olimpíadas Provinciales en San Luis, Arg.)

Total de alumnos: 118; intentaron hacer el gráfico: 71; Hicieron el gráfico correcto: 13; No abordaron el problema: 33; Solución correcta:1.



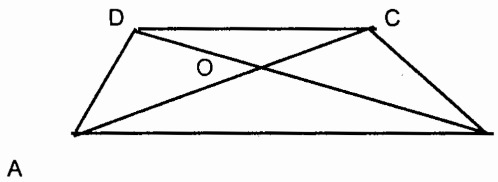
De estos datos se desprende que este problema representó para el 88% de los alumnos un obstáculo, creemos que fundamentalmente producto de la falta de conocimiento de los contenidos en los se encuadra el problema: familiarización con propiedades geométricas y relaciones, se requiere el conocimiento básico de área de triángulo, área de trapecio, área de triángulos de igual base e igual altura, o capacidad para deducir alguna otra propiedad que permita arribar a la solución.

En la solución que dio el único alumno que lo resolvió, está presente que logró armonizar el conocimiento geométrico con las estrategias de pensamiento y arribar a una solución ingeniosa. A este estudiante le resultó aparentemente sencillo calcular el área del triángulo PRC ya que PR=(AB+DC)/2=(10+6)/2=8; y luego trató de utilizar el área encontrada, por lo cual centró su deducción en demostrar que el área del triángulo PRC es igual al área del triángulo PCQ. Al lograrlo tuvo el problema resuelto.

La traducción del texto a la representación geométrica, evidentemente representó una dificultad, que pudo ser por falta de ejercitación en este sentido.

Por otra parte los alumnos no tenían presente que: "triángulos de igual base e igual altura tienen la misma área", hacer funcionar ésta afirmación aparentemente obvia en el contexto de resolución de problemas geométricos, constituye una estrategia que a veces aporta con soluciones sencillas que no son visualizadas por los estudiantes. Creemos que si los alumnos hubiesen visto el funcionamiento de la propiedad anteriormente, hubiesen tenido más elementos para resolver el problema planteado en la prueba, por ejemplo si con anterioridad hubieran analizado cómo demostrar algo similar a:

Trazando las diagonales de un trapecio ABCD, queda dividido en 4 triángulos. ¿Puedes demostrar que las áreas de los triángulos AOD o COB son iguales?



Solución:

Área del triángulo ABC= Área del triángulo ABD por base común, AB e igual altura , altura del trapecio. De donde se deduce que Área del triángulo AOD es igual al Área del triángulo COB, ya que geométricamente si a dos triángulos de igual área le quito una parte común AOB, las partes restantes son iguales.

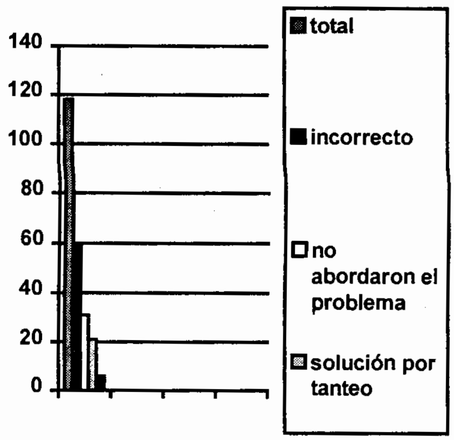
También se puede pensar así:

(1) A(ABC)=A(ABO) + A(COB) (2) A(ABD)=A(ABO) + A(AOD), de igualar (1) con (2) resulta A(AOD) = A(COB).

***Problema 2**: Hallar dos números de tres dígitos cuyo producto sea 555555.*

(Pruebas clasificatorias, alumnos de 13-14 años, Olimpíadas Provinciales en San Luis, Arg.)

Total de alumnos: 118; No abordaron el problema: 31; Lo resolvieron en forma incorrecta: 60; lo resolvieron por tanteo: 21; Lo resolvieron usando factorización: 6.



Es significativo el número de alumnos que intentó la solución (87 alumnos) de los cuáles dieron la solución correcta 27 alumnos.

El enunciado es más amigable, permite trabajar con números, usar la calculadora, tantear una solución. Evidentemente este problema llamó a utilizar la experimentación como camino de solución. Dentro de los alumnos que lo resolvieron por tanteo usaron como recurso para iniciar la aproximación obtener la raíz cuadrada de 555.555

Otros alumnos dieron la respuesta sin dejar rastros de cómo lo obtuvieron, a través de entrevistas la mayoría respondió que encontraron la respuesta haciendo pruebas con la calculadora. Otros se basaron en un truco aritmético que habían analizado en clase con su profesora.

"Escribe un número de tres cifras, a continuación lo repites, queda uno de seis cifras, divídelo por 7, a este resultado por 11 y finalmente por 13." Resultado: Número de tres cifras inicial.

Con un ejemplo mostramos la clave del truco: supongamos que el número inicial es: 345. Formamos 345345, pero se puede descomponer así: 345=345+345000=345x1001 y 1001=7x11x13.

Problema 3:*Se consideran número racionales entre 0 y 1 escritos en forma de fracción irreducible. Si se multiplica el numerador por el denominador, ¿en cuántos casos el resultado será 10!? (10!=10.9.8.7.6.5.4.3.2.1)*

(Pruebas finales, alumnos de 17-18 años, Olimpíadas Provinciales en San Luis, Arg.)

Total de alumnos: 24;

No abordaron el problema: 7;

Resolvieron por tanteo algunos casos: 5;

Incorrecto, solución por tanteo sin tener en cuenta la hipótesis de fracción irreducible: 11;

Solución correcta, usando factorización: 1.

Es evidente que una dificultad fuerte la produjo la hipótesis de fracción irreducible, el desconocimiento del significado de ella condujo a los alumnos a que el tanteo no fuera un método efectivo. Otro factor importante de dificultad fue trabajar con 10!, no llegando a visualizar que la estrategia adecuada era utilizar la descomposición en factores primos.

¿Para qué enseñar descomposición de un número en factores, si no mostramos que constituye una estrategia usual para resolver problemas de números?.

b) Análisis y comprensión del texto. Determinación de la vía de solución

La dificultad en el análisis y comprensión del texto del problema es una de las causas principales por la que los alumnos no llegan a resolverlo, determina, en gran medida, el destino del resto de las etapas se la solución.

No puede hacerse una marcada división entre la etapa preliminar de interpretación del enunciado y determinación de la vía de solución, la diferencia se hace notoria en problemas complejos donde elucidar el camino de solución no es consecuencia directa de la comprensión del texto, sino que requiere esfuerzos y conocimientos teóricos adicionales.

Problema 4 : *Sobre los lados de un triángulo rectángulo isósceles de cateto b, se construyen hacia el exterior, tres cuadrados; se unen los centros de los tres cuadrados con líneas rectas.*

Calcular el área del triángulo así formado.

(Pruebas finales, alumnos de 14-15 años, Olimpíadas Provinciales en San Luis, Arg.)

Total de alumnos: 18;

No abordaron el problema: 3;

Interpretan mal: 8;

Interpretan bien 7, de los cuales resuelven correctamente 4.

En las figuras 1 y 2 mostramos dos de los gráficos correctos que dibujaron los alumnos

En las fig. 3,4,5, 6 y 7 algunos de los curiosos gráficos que aparecieron en las pruebas.

fig.1

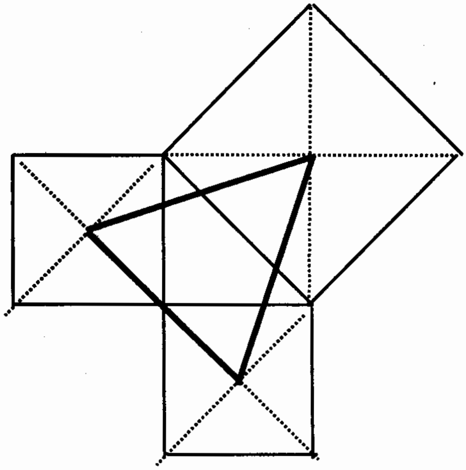
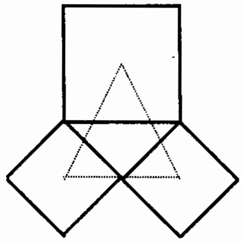


fig. 2



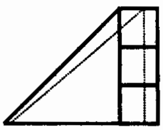


fig. 3

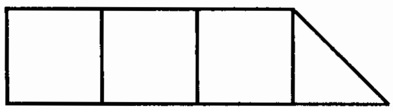


fig. 4

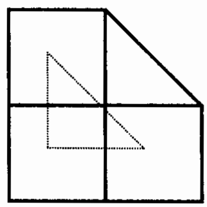


fig. 5

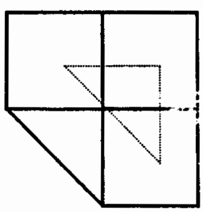


fig. 6

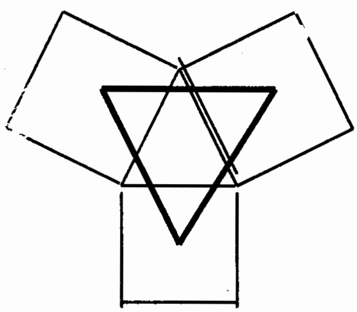


fig. 7

Analizando exhaustivamente los gráficos intentamos explicar algunas de las posibles causas que llevaron a representaciones como las de las figuras 3,4,5 y 6: a)La mala interpretación del texto unido probablemente al desconocimiento de que la hipotenusa del triángulo rectángulo también es un lado, b) no estar familiarizados con ubicar cuadrados en posiciones inclinadas, c) poca claridad respecto de los conceptos involucrados.

En otros, como el de la fig. 7, no tomaron en cuenta la exigencia de triángulo rectángulo isósceles. Este es un problema donde claramente la buena interpretación del enunciado plasmada en una correcta representación gráfica que refleje las condiciones pedidas, conducirá a alcanzar la solución.

Problema 5 *:El duplo del dígito de las decenas restado del dígito de las unidades de un número de dos cifras es mayor que 5. La diferencia entre catorce veces el dígito de las unidades y el dígito de las decenas es menor que 12.*

Encuentre todos los números que satisfagan las condiciones dadas.

(Pruebas finales, alumnos de 14-15 años, Olimpíadas Provinciales en San Luis, Arg.)

Total de alumnos: 18;

Interpretaron mal: 12;

No lo intentan: 3;

Interpretan y resuelven correctamente haciendo análisis: 2;

Interpreta bien y resuelve la inecuación que plantea: 1.

Entre los alumnos que interpretan mal el problema, se encuentran ocho de ellos que plantearon el siguiente sistema de inecuaciones que no refleja las condiciones del problema:

$2x-y>5$

$14y-x<12$

Tomaron como vía de solución resolver este sistema; encontraron los valores que satisfacen el mismo, pero el punto de partida erróneo les condujo a soluciones incorrectas.

De 18 alumnos solamente interpretaron bien el enunciado 3 alumnos, los cuales dieron la solución. Dos de ellos no plantearon específicamente las inecuaciones, sino que la vía de solución que emplearon fue por análisis de casos y descarte de posibilidades, siguiendo las exigencias del enunciado. Evidentemente no estaban familiarizados con resolución de desigualdades, pero esta falta fue suplida con éxito, seguramente se trataba de estudiantes acostumbrados a resolver problemas, sin miedo a la experimentación y al razonamiento.

Solamente un estudiante representó el enunciado por un sistema de inecuaciones, y lo resolvió correctamente.

Analizando los trazos dejados en las hojas por los alumnos, creemos que uno de los factores que influyeron en el planteo erróneo del sistema, pudo haber sido que la respuesta del problema es: "no hay ningún número que satisface las condiciones", se observaron tachadas las inecuaciones correctas, parecería que las cambiaron para poder obtener una solución numérica.

Problema 6 *:¿Cuántos números naturales menores que un millón son múltiplos de 9 y están formados exclusivamente por los dígitos 5 y 8?*

(Pruebas clasificatorias, alumnos de 14-15 años, Olimpíadas Provinciales en San Luis, Arg.)

Total de alumnos: 56;

No lo intentan: 15;

Mal interpretado: 13;

Usan procedimiento de tanteo: 21;

Usan criterios de divisibilidad: 5, (2 correctamente).

Usan diagramas de árbol: 2.

Destacamos la variedad de procedimientos que los estudiantes usaron para acercarse a la solución, sin embargo solamente 6 alumnos obtienen la solución completa. ¿Cuál fue la dificultad?. Creemos que el análisis superficial del enunciado; la mayoría de los alumnos que disponían de una estrategia de solución, resolvieron el problema sin considerar los casos de números de 3, 4 o 5 cifras, se limitaron a los de 6 cifras.

Conclusiones

Formar la actividad cognoscitiva del alumno a través de la resolución de problemas significa emplearlos de una manera consciente, organizada y dirigida para obtener de cada estudiante el desarrollo de un pensamiento matemático, el cual se consigue fundamentalmente generando actitudes interrogadoras, desafiantes y reflexivas, que son los momentos destacados en la solución de un problema matemático.

Respecto de los Conocimientos

Los problemas y ejercicios dados en clase deben contribuir a la fijación del conocimiento impartido, el docente en este sentido debería incluir actividades que: exijan pasar del lenguaje verbal al gráfico geométrico, que incluyan elementos esenciales elegidos con cuidado de modo que los conceptos básicos deban relacionarse y combinarse, que sea imprescindible hacer comparaciones, que los alumnos tengan la oportunidad de exponer y cotejar diferentes maneras de solucionar un mismo problema, que se muestre la potencia del conocimiento de una propiedad matemática que puede transformar un problema difícil, en algo sencillo si se dispone del mismo. Toda esta actividad por cierto dotará de significación al conocimiento matemático y permitirá el desarrollo en los alumnos de habilidades conducentes a la formación de destrezas cognitivas y crearle una actitud crítica, interrogadora, de desafío y a la vez de reflexión ante cualquier situación.

En la resolución mostrada por los alumnos en el problema 2 queda explícito que es necesario valorizar la experimentación como camino de solución, permitir el acercamiento a los problemas desde esta perspectiva produce un desbloqueo mental.

En este caso también se muestra que los alumnos recurrieron naturalmente a técnicas usadas en clase para resolver otras situaciones, queda expuesta una de las estrategias aconsejada por *Polya ¿conoces algún problema relacionado?.*

Creemos que durante la actividad cotidiana el profesor debe plantear situaciones que promuevan el pensamiento independiente, el trabajo creador acompañado de una aplicación de los conocimientos, de este modo el proceso de apropiación del conocimiento estará garantizado.

En resumen, el docente mediante la actividad de resolución de problemas debe asegurar el paso del conocimiento a su utilización en contextos variados, debe propiciar las preguntas de los alumnos proponiendo actividades adecuadas, ya que el esfuerzo consciente de preguntarse y preguntar genera una actitud inquisitiva que es la base de todo conocimiento.

Respecto de la comprensión del texto y determinación de la solución

A partir de lo mostrado en el problema 4, ¿Qué podemos extraer como sugerencia para nuestros profesores?.

En la clase de geometría dibujar los triángulos, los cuadrados y otras figuras en variadas posiciones. Hacer notar que la hipotenusa es un lado del triángulo rectángulo; que hay triángulos rectángulos isósceles, etc. La comprensión de un texto va acompañada del grado de fijación que tengan los alumnos sobre los conceptos que el texto involucra.

En una primera etapa la descripción y la explicación de los conceptos geométricos debe estar apoyada fuertemente en visualizaciones: construcción de modelos, dibujos y objetos reales, para luego comprender las definiciones como enunciados que describen entes matemáticos a través de sus propiedades características y esenciales, más adelante debe ser posible que los alumnos puedan reproducirlos con sus propias palabras y también aplicarlos en la resolución de problemas.

Las acciones a realizar para la formación y asimilación de conceptos matemáticos son variadas y se pueden centrar en el planteo y solución de situaciones diversas y graduadas, que contemplen diferentes aspectos, donde estén presente: aspectos gráficos, simbólicos, de enunciados con texto, etc., por ejemplo poder describir una figura, o partir de un texto hacer un dibujo, verificar una propiedad con modelos.

¿Que nos deja el problema 5?

Observamos que si las ecuaciones planteadas hubieran respondido al problema, un 60% de los alumnos hubieran obtenido la solución. La dificultad no estuvo centrada en resolver sistemas de inecuaciones, sino en la interpretación y la desconfianza de la respuesta. En el contexto de resolución de problemas es importante presentar situaciones que no tengan solución, no acostumbrar al alumno a que todo tiene una respuesta numérica. En el caso que nos ocupa algunos cambiaron las condiciones para obtener respuesta.

En la solución de este problema también notamos que ninguno de los alumnos utilizó el recurso gráfico, ni como proceso de solución ni como control. Evidentemente ninguno de los alumnos disponía de esta estrategia, graficar las regiones del plano y analizar lo que ocurre.

El trabajo del alumno en la etapa de comprensión del enunciado consiste en enterarse de la información que se da, determinar qué es lo que se pregunta y hacer algunos preparativos para la abordar la solución, como por ejemplo decidir notación, hacer un diagrama y señalar la información conocida, encontrar una relación entre lo que sabe y lo que quiere. Por lo cual es importante acostumbrar a los alumnos a la lectura cuidadosa del problema. Hacer ejemplos, particularizar para adquirir familiaridad en el tema.

Para comprobar si ha entendido bien la información que proporciona el problema es útil que hagan un esquema o un gráfico de la situación, que lo cuenten o lo escriban usando sus propias palabras. Cuando la información es larga y compleja conviene dedicar tiempo a clasificar, relacionar, es decir organizar la información siempre con ayuda del trazado de dibujos, construcción de tablas etc, de modo que los hechos y relaciones queden transformados en imágenes que resuman la situación de visualmente y que se presenten los datos de manera clara para contribuir a entender el problema y conducir al trazado de un plan para resolverlo.

En los ejemplos que presentamos vimos que los alumnos que efectuaron un análisis superficial o poco cuidadoso, *dirigieron su atención hacia algunas componentes del enunciado, tomaron en cuenta solamente algunas de las condiciones lo que los llevó a soluciones incompletas o erróneas. (Ver problema 6).*

En la mayoría de las pruebas analizadas los alumnos abordan los problemas, se acercan a la solución, o llegan a ella, sin justificaciones, con poca o nada de explicación. Una parte del el trabajo diario del docente debe dedicarse a incentivar las explicaciones, tanto en forma oral como escrita, con lo que creemos se contribuirá efectivamente a que los alumnos construyan conocimiento, comprueben los que poseen, tengan independencia intelectual y desarrollen cualidades de personalidad, como confianza en sí mismo, perseverancia y espíritu crítico.

Por cierto que la etapa de reconsideración de la solución, mirar hacia atrás y reflexionar sobre lo hecho también debe incentivarse. Cada tipo de problema requiere de procedimientos de control que pueden ser variados, un tipo de control útil puede ser emplear una vía alternativa de solución. Por ejemplo cotejar una solución algebraica con una gráfica.

En general creemos que realizar una práctica reflexiva también pasa por analizar exhaustivamente el trabajo de los alumnos, actuación en clase, trabajos grupales, defensas orales de problemas y exámenes, las actividades de ellos no sólo reflejan el aprendizaje, sino la enseñanza como proceso distinto del aprendizaje. Estamos convencidas que la resolución de problemas no debe ser un tópico distinto, sino un recurso metodológico que debe penetrar todo el diseño curricular y proveer el contexto en el cual los conceptos y actitudes puedan ser aprendidos.

Referencias Bibliográficas:

Almeída, Alvarez y otros (1995).*"Metodología de la Enseñanza de la Matemática"*. Tomo I. Univ. Aut. de Sinaloa, Cuba.

Guzmán, M. de. (1991). *"Para Pensar Mejor"*. Edit. Labor.

Guzmán, M. de. (1992). *"Tendencias innovadoras en Educación Matemática"*. OMA .Arg.

Labarrere Sarduy A. (1987) .*"Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria"*. Edit. Pueblo y Educación.

Mason-Burton-Stacey. (1989). *"Pensar Matemáticamente"*. Edit. Labor.

Polya G. (1989). *"¿Cómo Plantear y Resolver Problemas"*. Edit. Trillas.

Educación a distancia: una visión desde la didáctica de las matemáticas[1]

Rosa María Farfán
AES- Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav – IPN
México

Resumen

En este escrito presentamos nuestras investigaciones (Cantoral y Farfán, 1998) que en el contexto de programas de formación de profesores a distancia realizamos, en dos modalidades: haciendo uso de teleconferencias e internet (universidad virtual) y a partir de un conjunto de asesorías periódicas con grupos organizados. En ambos casos los involucrados son docentes en servicio que cursan una actualización o un posgrado formal. Asimismo discutiremos cómo utilizamos la virtualidad así como las posibilidades que ofrece el recurso para hacer matemáticas y discutir sobre su comprensión.

Introducción

¿Porqué enseñamos matemáticas en la escuela y en la universidad? ¿Cómo preparamos las matemáticas para los estudiantes? ¿Cuál es la función del docente en el desarrollo de una cultura matemática? Estas cuestiones, entre otras, preocupan a la comunidad académica. En este escrito intentaremos analizar tal problemática y proponer, en la medida que permite este espacio, un esquema de formación de profesores que incorpora por una parte la experiencia desarrollada a lo largo de tres lustros en la formación de docentes y que atiende por otra, sistemáticamente a los resultados que arroja la investigación contemporánea. Esta interacción nos permite pensar con los maestros y no pensar por los maestros.

Sabemos que la matemática se desarrolló socialmente fuera del ámbito escolar, de modo que su incorporación en el sistema didáctico introduce complejidades no previstas hasta hace pocos años y que precisan del estudio sistemático en tanto fenómeno educativo de naturaleza social. Nos interesa analizar la problemática que plantea la incorporación de la matemática en el sistema didáctico. Específicamente nos interesa examinar el problema que plantea la constitución del saber matemático que habita en la educación superior y de su incorporación al sistema didáctico, pues como dijimos, este saber se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su introducción al sistema de enseñanza le obliga entonces a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento; de manera que afectan también, las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. Este proceso de incorporación del saber matemático al sistema didáctico plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados. El desarrollo de tales aproximaciones se lleva a cabo mediante estudios que nos permiten entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático a las prácticas de profesores y estudiantes.

Esta particular orientación teórica nos ha llevado al estudio de los procesos de construcción del Discurso Matemático Escolar y al efecto que éste produce en las interacciones entre estudiantes y profesor. Desde nuestro punto de vista, la vida del saber en la escuela se ve determinada por la estructura y articulación de dicho discurso, de modo que muchos de los principales conflictos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática avanzada encuentran ahí su razón de ser.

---

[1] *Este artículo forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología,* Construcción Social del Conocimiento Matemática Avanzado. Estudios sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.

Un concepto matemático no puede reducirse a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza. A través de situaciones y problemas por resolver es como un concepto adquiere sentido entre los estudiantes, este proceso de elaboración pragmática es esencial para el aprendizaje y para la enseñanza. Si se desea movilizar adecuadamente la función adaptativa del conocimiento, debemos dar un papel central a las formas en que ésta opera en la acción del que aprende. En nuestra opinión, el respaldo de esta postura no ha sido generalmente llevado al aula universitaria donde todavía domina una enseñanza del conocimiento matemático discursivo que atiende mas a los supuestos de rigor que al legítimo entendimiento de los estudiantes. Empero algunas cuestiones siguen aun sin responder; ¿cuál es la función del profesor y de los diseñadores del currículo en la escasa apropiación del conocimiento por parte del alumno? ¿Qué papel habría que dar a las contribuciones de la investigación educativa en los procesos de mejoramiento de la calidad de la educación superior?

La tesis que sostenemos es que, en el ámbito de la educación superior aunque no sólo en este caso, la investigación educativa debe anteceder a las acciones didácticas propiamente dichas y debe atenderse a la profesionalización del docente de matemáticas. Dicha estrategia, es en nuestro caso un producto de la investigación sobre las condiciones de formación de profesores para la educación superior y de la preparación de matemáticas para los estudiantes, que se caracterice por ser a la vez fundamental y accesible para quien las aprende y las emplea.

El papel de la innovación

En los últimos años, específicamente en las dos décadas anteriores, ha habido un notable incremento de investigaciones concernientes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, una de las razones es el aumento en el número de estudiantes de todas las áreas que cursan matemáticas como consecuencia de los cambios que los gobiernos establecen; aunque los objetivos que señalan están lejos de cumplirse. Las reformas se suceden unas a otras generando la sensación de que el fondo de los problemas no se ha afrontado realmente.

Un ejemplo es la experiencia de los años 70's, la famosa "reforma de las matemáticas modernas" en donde el punto nodal estuvo en la introducción del rigor ligado a la consideración del "alumno - niño" conllevó a que los reformadores la impulsaran sobre dos supuestos ilusorios:

- Primero, la *ilusión lírica*. Las ciencias y las matemáticas podrían introducirse poco a poco sobre una espléndida arquitectura simple y elegante. Esta "belleza" era ocultada a las jóvenes generaciones por una "mala" pedagogía que les ocultaba su potencia. Luego entonces, la profunda estructura de la ciencia se presentaría a los estudiantes tan pronto fuese posible y todo iría mejor.

- Enseguida la *ilusión romántica*. Concerniente a la manera en cómo aprenden los alumnos. Por analogía, ellos son como la planta que "crece sola" si se le coloca en un "buen ambiente", es decir, el movimiento espontáneo de la evolución cognitiva del estudiante dirige y se antepone al conocimiento científico. Las dificultades se atribuyen al arcaísmo pedagógico que cultiva "la ruptura con la vida real", el "formalismo" y el "dogmatismo" y por tanto criticado sin consideración.

Los resultados son bien conocidos y puede desprenderse como lección histórica, que siempre que las reformas implementadas se basan en presupuestos *a priori*, lo que sucede mas frecuentemente de lo que se piensa, han provocado grandes decepciones. Producto del fracaso de la reforma de las matemáticas modernas, surgió otro punto de vista "fatalista" de retorno al pasado como el movimiento norteamericano "back to basis".

La matemática educativa nace como disciplina científica sobre presupuestos radicalmente opuestos a otras aproximaciones que conciernen a la enseñanza: la voluntad (y la afirmación de la posibilidad) de abordar razonablemente, sistemáticamente, científicamente y con especificidad los fenómenos de enseñanza de las matemáticas. Lo que por supuesto es contrario a este tipo de innovaciones que se presentan y cuya argumentación reposa sólo en la "novedad" de la propuesta sin el soporte de la investigación. Tal es el caso de algunas propuestas actuales que incorporan nuevas tecnologías, sin un estudio previo mínimo de las condiciones de aprendizaje en tales ambientes.

Aspectos de la realidad actual

Diversos autores coinciden en que con la introducción de la tecnología al ámbito escolar estamos ante un nuevo escenario similar al de la introducción de la imprenta cuyo impacto generó una profunda transformación de la cultura occidental. Ya que al producirse libros en forma masiva, éstos se hicieron accesibles, lo que permitió la estandarización del lenguaje y por ende el desarrollo de la literatura y de otros campos del saber humano. Actualmente las nuevas tecnologías plantean una perspectiva de cambios sociales semejantes a los que produjo la imprenta dado que éstas modifican los entornos clásicos de comunicación generando nuevas posibilidades de expresión y extensión. Por ejemplo, la noción de autenticidad que solemos usar cotidianamente en la educación contemporánea, reposa en la noción de educación presencial. Es decir, se requiere de la presencia simultánea del que evalúa y del que es evaluado, de la misma manera que para que una clase tenga lugar se requiere del encuentro del profesor y sus alumnos: mismo tiempo y mismo lugar. Esta característica de la educación presencial nos ha acostumbrado a diseñar actividades, exámenes, clases, etc., en un formato que precisa inevitablemente de la relación digamos que "de cara a cara". Sin embargo, esto ha venido cambiado en los últimos tres lustros con la incorporación de nuevas tecnologías que posibilitan lo que se ha llamado la desescolarización de la enseñanza. Esto es, se trata de que el saber esté disponible en todo momento y en cualquier lugar. De modo que nuevos conceptos emergen para organizar las nuevas prácticas humanas. Por ejemplo, es usual escuchar entre los estudiantes de los sistemas a distancia, "nos vemos en el web". Metodológicamente este nuevo escenario nos ha planteado, en el ámbito mundial, nuevos retos, como descifrar el significado de las frases: aprender en red, aprender en cooperación, evaluar a distancia, enseñar en línea, etc.

Por supuesto las instituciones educativas participan en este proceso generando propuestas y diversos acercamientos para abordar los proyectos educativos usando nuevas tecnologías. El consenso que se ha establecido para los diferentes programas es el de utilizar las nuevas tecnologías interactivas como un "medio", un auxiliar, entre el conocimiento y la experiencia del profesor y las expectativas de los alumnos a fin de que el estudiante no sólo reciba información, sino que se vea obligado a desempeñar actividades que proporcionen mejores condiciones para el aprendizaje. De esta manera, el alumno estará mas involucrado con el proceso de aprendizaje y no sólo con el producto de su aprendizaje, así que podrá prepararse para la toma de decisiones y la elección de una ruta de aprendizaje.

Formación de profesores a distancia

Presentamos una propuesta de formación de profesores que hemos desarrolla con el propósito de contribuir al avance del conocimiento y a la formación de profesores e investigadores altamente especializados para enfrentar, en un sentido amplio, la problemática que plantea la incorporación de saberes matemáticos al sistema didáctico y con ello favorecer que la enseñanza produzca efectivamente aprendizaje.

Este programa de Maestría y Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa ofrece una alternativa de formación profesional de la labor docente y a la investigación de frontera, tanto básica como aplicada, de los procesos del aprendizaje y de enseñanza. En este contexto el objetivo es formar a los y las profesionales que trabajan como profesoras y profesores de matemáticas para:

- Planear, instrumentar y evaluar profesionalmente la docencia en matemáticas.
- Desempeñar eficazmente investigación en matemática educativa en los niveles medio superior y superior.
- Diseñar e implementar alternativas metodológicas para la enseñanza de los procesos de construcción del conocimiento con base en la investigación científica contemporánea.
- Usar redes, sistemas de telecomunicaciones, tecnologías de información y modelos de enseñanza y aprendizaje a distancia, mediante diseños sistémicos, que articulen el saber con los actores educativos.
- Anticipar el curso de las innovaciones mediante la investigación científica de los fenómenos educativos.
- Divulgar entre la población una visión científica del mundo.

Para este programa se contará con la asesoría académica de los investigadores activos. En este colectivo académico se conjuntan diversos proyectos de investigación con una característica común, a saber, la identificación del fenómeno educativo como de naturaleza eminentemente social y por tanto, la investigación atiende a los protagonistas principales del hecho educativo: el saber matemático, el maestro y los alumnos así como sus relaciones desde una perspectiva sistémica. De modo que la cuestión que guía las acciones del colectivo académico ha sido: el buscar una adecuada articulación de los saberes matemáticos de manera que los estudiantes logren un aprendizaje en el ámbito escolar. La siguiente estructura básica, está siendo ensayada en algunos sitios de nuestro país y se estima que podrá ampliarse durante los siguientes años. Básicamente, asumimos que el profesor no es un técnico que domina una porción de conocimiento y destrezas, sino un profesional, que desarrolla conocimiento didáctico con el sólo ejercicio de su práctica. Este profesor, sin abandonar su práctica docente estará en condiciones de acceder a un equipo dinámico de investigación en el que podrá, sin desatender sus funciones docentes, desarrollar productos y explicaciones del hecho educativo. Presentamos pues una versión sumamente resumida de lo que hemos propuesto.

Descripción del plan de estudios

El programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa se ocupa de estructurar una oferta de profesionalización de la labor docente al nivel de posgrado, a partir de la investigación básica y aplicada sobre los procesos de enseñanza, aprendizaje y de construcción social del conocimiento matemático. Las alumnas y alumnos de este programa de maestría, habrán de transitar por tres fases que lo articulan.

Fase I. Formación básica

En el transcurso de esta fase se proporcionan los elementos básicos del campo de estudio, sus modelos teóricos, métodos y técnicas, así como una visión de los alcances actuales, tanto en el ámbito nacional como internacional de la investigación en Matemática Educativa. Adicionalmente se inicia con el análisis del discurso matemático escolar.

Fase II. Desarrollo de la investigación

Durante este período, las actividades están dirigidas al diseño y desarrollo de la investigación en el aula en estrecha relación con las líneas y proyectos de investigación que desarrollan los investigadores adscritos al programa. En las actividades académicas se realiza un análisis de temas centrales del discurso matemático escolar a través de la revisión de libros: antiguos, de texto, especializados, así como también de artículos de investigación. Asimismo se discuten alternativas de presentación de tales temas.

En las actividades académicas se busca estudiar aquellos elementos que, ubicados en los contextos del contenido matemático y de su construcción, permiten abordar problemas como la construcción del conocimiento matemático en el salón de clases y la incorporación de las representaciones espontáneas de los y las estudiantes en la didáctica de la matemática. En este sentido, las actividades se orientan a explorar reconstrucciones didácticas de conceptos matemáticos, favoreciendo por ejemplo, argumentos de visualización y de representación verbal.

Otra característica de las actividades académicas de esta fase es que se profundiza en la problemática específica del grupo de investigación correspondiente, al cual se ha incorporado al estudiante. El estudiante deberá presentar su problema de investigación en algún foro de discusión en donde confluyan los investigadores y profesores alumnos y alumnas del colectivo académico; entre estos foros se encuentran la Escuela y Seminario de Invierno en Didáctica de las Matemáticas que se organiza a nivel nacional cada año y las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (Relme) de dimensión internacional con periodicidad anual. Cabe señalar que se busca que los proyectos realizados sean competitivos según los estándares internacionales y, a la vez, pertinentes con la problemática de nuestro sistema educativo nacional.

Fase III. Producto de la investigación y obtención de grado

En esta fase final, el estudiante deberá presentar en la modalidad de Tesis, los resultados de la investigación, misma que defenderá en un examen para la obtención del Grado de Maestro en Ciencias.

Para el logro de estas fases se considera como eje rector del diseño curricular las diversas componentes que confluyen en el estudio del fenómeno educativo de la disciplina de referencia, esto es, el saber matemático escolar. Este se enfoca desde una perspectiva múltiple que contempla cuatro componentes: la cognitiva referida a los procesos mentales que experimenta el aprendiz para apropiarse del saber matemático; la epistemológica que da cuenta de la construcción de significados asociados al saber de referencia; la didáctica que proporciona el cómo vive y se reproduce ese saber y finalmente la componente sociológica en tanto que la naturaleza del fenómeno es eminentemente social, en particular toca al carácter de la institución que hospeda a las anteriores al seno de la cual ellas interaccionan. Cabe señalar que estas componentes atienden a cuatro dimensiones de lo humano: la mental, la conceptual, la institucional y la social.

En una de las modalidades de este programa que ha sido abordado en forma semipresencial (con asesorías cada 15 días), las fases antes descritas se han agrupado en contenidos temáticos que llamaremos "Diplomados" con los que se posibilita la obtención de seis diplomas (cada uno de 80 horas) previa a la acreditación del grado de maestría en ciencias. Se estructuran en torno a las seis temáticas siguientes:

Introducción a la Matemática Educativa[1]

Panorama global de la educación superior contemporánea

Epistemología de las matemáticas

Didáctica de las matemáticas

Cognición de las matemáticas

Enseñanza de las matemáticas con el uso de nuevas tecnologías

---

[1] Dadas las características de los profesores alumnos, en este nivel se hará especial énfasis a la homogeneización de conocimientos matemáticos y habilidades propias para la investigación, tales como análisis de información, redacción de textos científicos, capacidad de síntesis, etc.

En otra de las modalidades cubrimos las fases indicadas en un mapa curricular que organiza los cursos del programa y que se compone de tres bloques de cursos y/o seminarios, y un bloque más para el Seminario de Tesis, cada uno de ellos con una duración de seis meses. En esta modalidad usamos un modelo educativo basado en redes, sistemas de telecomunicaciones, tecnologías de información y modelos de enseñanza y aprendizaje a distancia en la que colaboran investigadores en diversos campos de especialidad ubicados en centros de investigación y universidades.

Mapa curricular del Plan de Maestría

<table>
<tr><td>Teoría y perspectivas de la Didáctica de las Matemáticas
Duración de 2 meses</td><td rowspan="2">Procesos de institucionalización de la matemática escolar
Duración de 4 meses</td></tr>
<tr><td>Análisis del discurso matemático escolar I
Duración de 2 meses</td></tr>
<tr><td colspan="2">Seminario de Matemática Educativa I
Duración de un mes</td></tr>
<tr><td>Perspectivas epistemológicas de las Matemáticas
Duración de 2 meses</td><td rowspan="2">Análisis del discurso matemático escolar II
Duración de 4 meses</td></tr>
<tr><td>Naturaleza del pensamiento matemático
Duración de 2 meses</td></tr>
<tr><td colspan="2">Seminario de Matemática Educativa II
Duración de un mes</td></tr>
<tr><td>Teoría de las situaciones didácticas
Duración de 2 meses</td><td rowspan="2">Metodologías de investigación en la clase de matemáticas

Duración de 4 meses</td></tr>
<tr><td>Innovaciones tecnológicas para la enseñanza de las Matemáticas
Duración de 2 meses</td></tr>
<tr><td colspan="2">Seminario de Matemática Educativa III
Duración de 1 mes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Seminario de Tesis
Duración máxima de 12 meses</td></tr>
</table>

El programa tanto de maestría como de doctorado se ofrece en una modalidad combinada de teleconferencias, asesorías y prácticas de investigación, preferentemente en el sitio de residencia de los alumnos y alumnas. Para cada una de las asignaturas se contemplan las actividades siguientes:

- teleconferencias
- asesoría presencial
- comunicación vía internet
- trabajo independiente

Breve bosquejo de los resultados

De la modalidad semipresencial y en el marco de un estudio sobre la implementación y adaptación de una situación didáctica diseñada ex profeso (Lezama, 1999) cuyo objetivo era la construcción, en tanto lenguaje gráfico, de la función exponencial 2^x que se realizó en cuatro diferentes escenarios con estudiantes y profesores fue posible establecer los siguientes resultados preliminares: si bien la evaluación de la situación didáctica resultó satisfactoria según la validación metodológica empleada (ingeniería didáctica) pudimos observar que los profesores son dependientes del saber institucional, en la medida que no se asumen en condiciones de modificar la situación para apropiársela. Ello que es parte del ámbito, digamos ideológico condiciona fuertemente la práctica docente y también la posibilidad de reproducir una situación didáctica.

En lo que toca a la modalidad vía la tecnología (con el uso de teleconferencias e internet) hemos anotado algunos aspectos: la dinámica que se establece entre el profesor y los alumnos al no descansar en la oralidad obliga a la coherencia del discurso escrito; el intercambio de mensajes excluye las inquietudes espontáneas pues al pedir dudas por escrito, lo que se obtiene es el producto de una reflexión; este medio reduce la negociación de los criterios de evaluación; también la negociación de los saberes. Un aspecto importante es que el estudio del cómo se aprende a través de este escenario nos coloca ante una tarea teórica singular: ¿cómo transferimos las nociones de la teoría didáctica ante este nuevo escenario?, es decir, nociones como contrato didáctico, negociación de saberes, etc. son invariables del fenómeno educativo o depende de una situación presencial

Referencias bibliográficas

Cantoral R. y Farfán R. (1998) Investigación en didáctica de las matemáticas y profesionalización docente: retos de la educación superior. En F. Cordero (ed.) Antologías No. 3, pp. 47-104, Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior, Cinvestav: México.

Lezama J. (1999) Un estudio de reproducibilidad: el caso 2^x . Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav: México

Resolución de problemas: investigar sobre la propia práctica

María Luz Callejo de la Vega (marialuzc@yahoo.com)
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas[1], Madrid
España

Introducción

Entre las diversas tendencias de desarrollo profesional del profesorado, algunas como la investigación-acción o el profesor investigador, hacen hincapié en la función investigadora del profesor (Elliot, 1993).

En este trabajo voy a presentar una propuesta sistemática de formación permanente del profesorado que aúna la práctica docente y la investigación; se trata de una Maestría en Educación Secundaria Obligatoria[2] en la especialidad de Didáctica de las Matemáticas que se ha desarrollado en España. Primero presentaré algunas características del programa de la Maestría; luego describiré cómo se plantea la resolución de problemas en este marco, tanto en su vertiente didáctica como de investigación.

1. Un programa sistemático de formación de profesores

El programa de Maestría en Educación Secundaria Obligatoria es una propuesta sistemática de formación permanente del profesorado que se inscribe dentro del enfoque del profesor reflexivo (Schön 1992).

Esta propuesta parte de la idea de que la educación es un arte y que como todo arte necesita conocimiento de la teoría y conocimiento de la práctica. En el campo de la formación permanente de profesores se podría presuponer que un docente de matemáticas de secundaria con algunos años de experiencia tiene ambos tipos de conocimientos, sin embargo no siempre sucede así: por un lado la formación del profesorado de secundaria suele ser buena en España en lo que al conocimiento de las matemáticas como disciplina se refiere, pero adolece de otros conocimientos considerados "profesionales" como el de las matemáticas escolares, la filosofía de las matemáticas escolares, el pedagógico, el pedagógico específico de la materia o la integración cognitiva del conocimiento desde distintas disciplinas, según la clasificación de Bromme (1994); por otro lado su competencia práctica necesita adaptarse a nuevos escenarios en los que cambia el papel del profesor y de los alumnos, las interacciones en la clase, la concepción de la materia o el objeto del conocimiento. Para ello hay que modificar ciertas teorías y prácticas en torno a la actividad matemática, su enseñanza, aprendizaje y evaluación.

Articulación del programa

En el programa del Maestría se contemplan conocimientos relacionados con las Ciencias de la Educación y con la Didáctica de las Matemáticas, que se articulan en tres bloques: el primero plantea el enfoque de una propuesta educativa en clave de responsabilidad social; el segundo y el más extenso, trata de la práctica educativa y el tercero de la investigación.

El programa se desarrolla en 600 horas, equivalentes a 60 créditos, de los cuales 45 son presenciales y 15 corresponden a la elaboración de una Tesis de maestría. La fase presencial se desarrolla en períodos intensivos, durante dos años académicos.

---

[1] Vizconde de Matamala, 3, 28028 – Madrid (España)

[2] Master en Educación Secundaria Obligatoria, especialidad en Didáctica de las Matemáticas, organizado por el Instituto de Estudios Pedagógicos y la Universidad Carlos III de Madrid. Primera y segunda edición: 1992-1994 y 1994-1996.

En el diseño del programa se contemplan cuatro funciones del profesor: la didáctica, la investigadora, la tutorial y la organizativa, poniendo especial énfasis en la primera; en este trabajo nos referiremos a las funciones didáctica e investigadora. Estas funciones implican la consideración de distintos ámbitos de intervención y trabajo del profesor como son el aula, el departamento, otros equipos de trabajo del centro educativo y los grupos profesionales como, por ejemplo, las asociaciones de profesores.

Metodología

En el planteamiento metodológico se tienen en cuenta las cuatro afirmaciones siguientes (Callejo, 1999):

1. Es preciso tener en cuenta las necesidades tanto sentidas como reales del profesorado en ejercicio y tratar de darles respuesta a través de la planificación y realización de las actividades de formación permanente.
2. Los profesores construyen activamente concepciones sobre la enseñanza/aprendizaje basadas en sus propias experiencias personales, tanto de cuando fueron alumnos del nivel y materia que imparten como de su función docente.
3. Los profesores necesitan trabajar estrechamente con sus colegas.
4. Es importante que los profesores experimenten en la propia dinámica de las actividades de formación las orientaciones de enseñanza/aprendizaje preconizadas en las mismas.

Estas afirmaciones reflejan la perspectiva constructivista del aprendizaje, propugnada por diversos autores para la formación inicial y permanente del profesorado (Blanco, 1991 ; Simon y Schifter, 1991; Gunstone y otros, 1993; Cooney y Krainer, 1996) y son la base para un marco amplio de la formación permanente de profesores.

2. La resolución de problemas en el Programa de la Maestría

La resolución de problemas se trabaja como una parte del enfoque del programa, del planteamiento didáctico y de la investigación. De entre las distintas visiones de esta tendencia:

- consolidación y refuerzo de aprendizajes;
- método de enseñanza de conceptos y destrezas;
- actividades diferenciadas centradas en estrategias generales del pensamiento, complementarias con el aprendizaje de destrezas y de conceptos;

se trabaja prioritariamente la última, esto es, la enseñanza de estrategias heurísticas, modos de razonamiento, procesos de pensamiento y bloqueos, que se pueden aplicar a cualquier tipo de problema y, por tanto, son independientes del contenido matemático de los mismos.

2.1 Planteamiento didáctico de la resolución de problemas

El conocimiento de la teoría y de la práctica (cf. cuadro 1) lo situamos a dos niveles, plateándonos dos tipos de objetivos dirigidos a los profesores participantes en las actividades:

- aprender a resolver problemas
- enseñar a resolver problemas

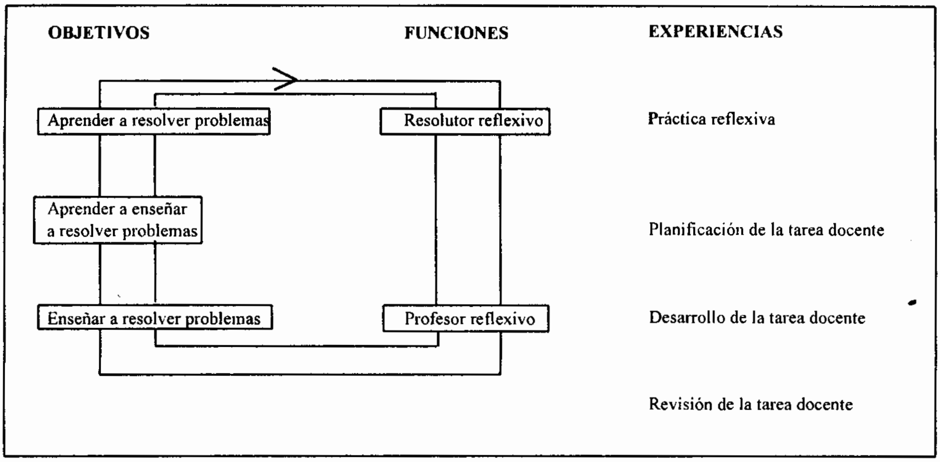
y entre ambos un objetivo intermedio:

- aprender a enseñar a resolver problemas.

2.2.1. Aprender y enseñar de forma reflexiva

Con relación a los dos primeros objetivos el profesor adopta a lo largo del proceso de formación los papeles de resolutor o aprendiz de la resolución de problemas y de profesor que enseña a resolver problemas. En ambos casos añadimos el adjetivo reflexivo: resolutor reflexivo y profesor reflexivo (Schön, 1992), considerando que la reflexión tiene lugar antes, durante y después de la acción de resolver o de enseñar a resolver problemas. Así destacamos:

- la reflexión en la fase de planificación tanto del proceso de resolución de problemas como de la intervención docente;



Cuadro 1: Marco para la formación de profesores

- la regulación y control de la acción durante la resolución de problemas o el desarrollo de la tarea docente;

- la reflexión tras la acción de resolver un problema o de la intervención docente a varios niveles: individual y en grupo, revisión global de la acción, posibilidad de mejorarla y de extenderla a otras situaciones.

a) Aprender a resolver problemas

Proponemos al profesorado en primer lugar un conocimiento práctico de la resolución de problemas (Guzmán, 1987) siguiendo las mismas orientaciones de la propuesta que ofrecemos para llevar al aula (Callejo, 1994). Para ello los participantes en la Maestría:

- Resuelven problemas con distinto grado de dificultad, en los que los conocimientos matemáticos que tienen que aplicar son sencillos y que se prestan a la particularización y a la generalización.

- Lo hacen registrando por escrito el proceso de resolución con la mayor cantidad posible de datos, realizando así un protocolo.

- Reflexionan sobre el proceso seguido: lo revisan, tratan de encontrar otros caminos o un camino más fácil y generalizan el problema.

- Participan en puestas en común y discusiones en grupo acerca del proceso de resolución, haciendo explícitas aquellas ideas, estrategias, razonamientos, bloqueos, etc., presentes en el proceso de resolución.

A partir de esta reflexión se introducen conocimientos teóricos que tratan de explicar el proceso de resolución de problemas tales como: la resolución de problemas como acto creativo; estrategias, procesos y fases en la resolución de problemas; los trabajos de G. Polya (1945, 1981) en el marco de la teoría de la Gestalt; los trabajos de A. Schoenfeld (1985, 1992) en el marco de la Psicología del Procesamiento de la Información.

b) Aprender a enseñar a resolver problemas

Tras la inmersión reflexiva en el proceso de resolución de problemas los participantes hacen sus observaciones del desarrollo de las sesiones de trabajo personal y en grupo resolviendo problemas, adoptando el doble papel de alumnos y profesores. El facilitador de la sesión introduce así conocimientos teóricos relativos a la Didáctica de la resolución de problemas (cf. Callejo, 1994): modos de considerar la resolución de problemas en el curriculum de matemáticas; distintos marcos explicativos de cómo se aprende a resolver problemas; diversas maneras de enseñar a resolver problemas; aspectos a evaluar y modos de hacerlo.

Los conocimientos anteriores son la antesala del diseño de experiencias para llevar al aula. Para ello se proponen diversas tareas relacionadas con tres de los protagonistas de las situaciones didácticas: los problemas, los alumnos y el profesor.

Así, en relación con la *planificación* de la tarea docente, se proponen las siguientes actividades: análisis didáctico de problemas (cf. Polya, 1981); estudio de procesos de alumnos en cuanto a la comprensión del enunciado, comprensión del problema, la búsqueda y el desarrollo de estrategias y la revisión; análisis de experiencias de aula desde dos puntos de vista: primero, con relación a la materia, el profesor y los alumnos (orientación de la actividad, modo de trabajo de los alumnos, intervención del profesor, tipos de interacciones en la clase entre alumnos y con el profesor, etc.); segundo, en relación con las fases en que se desarrolla la sesión; análisis de unidades didácticas sobre resolución de problemas (Callejo, 1992).

Para realizar estas actividades se utilizan materiales publicados sobre resolución de problemas, hojas de resolución de los alumnos, registros en video de sesiones de clase, transcripciones de diálogos entre profesor y alumnos, etc.

Con estos elementos consideramos que los profesores participantes están preparados para seleccionar, adaptar o elaborar una unidad didáctica y ponerla en práctica.

c) Enseñar a resolver problemas

Con relación al *desarrollo* de la actividad docente, proponemos a los profesores que durante la puesta en práctica de la unidad didáctica presten atención a los siguientes aspectos: la recogida de la opinión de los alumnos sobre la experiencia; la recogida de los trabajos de los alumnos y la valoración de los mismos; los aspectos más positivos o más negativos, facilidades o dificultades encontradas, en qué medida se han alcanzado los objetivos, etc; la recogida de opiniones de otros profesores del centro implicados en la experiencia; la elaboración de un diario de las sesiones.

Los datos anteriores ayudan a hacer una *reflexión* sobre la experiencia docente y se pide la elaboración de un informe con el siguiente guión:

- contexto: descripción somera del centro y de los alumnos;
- motivación: por qué se hace la experiencia;
- objetivos: qué se desea conseguir;
- contenidos;

- metodología: cómo se ha realizado la experiencia y quienes han intervenido: tiempo y lugar, materiales empleados, motivación de las sesiones, orientación del trabajo, agrupamientos de los alumnos, intervención del profesor, etc.;
- evaluación: cómo ha resultado la experiencia y en qué medida se han cubierto los objetivos;
- conclusiones.

También se hace una puesta en común de las experiencias, se discuten las mismas y, en su caso, se comentan registros en video de alguna sesión de clase.

2.2. Planteamiento de la investigación en resolución de problemas

Como ya indicamos en la introducción, se puede plantear un acercamiento entre la investigación y la práctica educativa. Por ello nos preguntamos por la "utilidad" de la investigaciones que se realizan en este tema para los profesores y por los tipos de investigaciones que éstos pueden realizar.

En este apartado vamos a hacer algunas consideraciones sobre las investigaciones que realizan los profesores, las temáticas que son de su interés, las metodologías que les resultan asequibles y lo que les pueden aportar los trabajos de investigación en su vida profesional.

¿Quiénes investigan?

Recordemos que en nuestro caso el investigador es el profesor, que la problemática de la investigación es su propia práctica educativa y que estamos considerando a la vez las funciones docente e investigadora, que no se confunden, pues cada una tiene su especificidad, esto es, su teoría y su práctica; ambas se interfieren cuando el profesor las simultanea.

Al tratarse de profesores de matemáticas cuya función principal es la docente y a los que la mayoría de las veces no les resulta fácil encontrar ayuda de otros compañeros para innovar, el profesor-investigador padece cierto aislamiento en su propio centro educativo; el trabajo de investigación le resulta a veces árido, al no contar con un equipo con el que compartir la problemática y tratar de delimitarla, contrastar la metodología empleada o los resultados encontrados y considerar sus implicaciones para la práctica educativa.

¿Qué se investiga?

El origen de la problemática y de las preguntas es, como hemos dicho, la propia experiencia docente. La primera formulación de la misma suele ser general y excesivamente amplia para la realización de una investigación, por ello es necesario acotarla.

La actividad investigadora se concreta en: identificar problemas, delimitarlos y definirlos; formular preguntas y elaborar hipótesis; ejercitarse en la recogida, análisis y resumen de datos y obtener resultados relativos al contexto en que trabaja el profesor.

Para poder centrar el problema de investigación es necesario que el profesor lea y estudie trabajos de investigación realizados sobre esta temática particular. Aunque la mayoría de las revistas y libros de investigación no son accesibles a muchos profesores porque tratan problemas muy puntuales y utilizan un lenguaje muy técnico, consideramos que algunas investigaciones son de especial interés, por ejemplo, las que resumen los resultados de un determinado aspecto de la resolución de problemas que los profesores pueden utilizar o contrastar con sus observaciones; aquéllas que ayudan a formular hipótesis sobre el modo de intervención en el aula, verificarlas y examinar sus consecuencias; las que ofrecen marcos teóricos para aplicar al propio contexto; o aquellas otras que aportan ideas y materiales o sugieren actividades de enseñanza/aprendizaje o de evaluación.

¿Cómo se investiga?

El *diseño de la investigación* supone, como hemos dicho, una ruptura con el paradigma científico y una apertura a las técnicas de investigación cualitativas. La propuesta presenta los siguientes rasgos:

- El diseño no es experimental.
- Las experiencias que se realizan no son de laboratorio sino que están integradas en la práctica educativa del profesor que realiza la investigación.
- Cuando se hacen estudios de evolución[3] de los alumnos se contempla la recogida de datos iniciales, finales y del proceso. Los iniciales y finales permiten hacer una comparación de los comportamientos de los alumnos en un segmento de tiempo; los del proceso ayudan a explicar los resultados encontrados.
- Se ha desestimado trabajar con un grupo de control pues consideramos que por tratarse de una investigación de ciencias humanas, hay muchas variables no controlables que impiden hacer una comparación entre dos grupos de alumnos sometidos a distintos procesos de instrucción.
- Se da relevancia a la interpretación subjetiva de datos cualitativos.

3. Conclusión

En España la investigación en Didáctica de las Matemáticas es tardía con relación a otros países, pues ésta no se ha reconocido como área de conocimiento universitario hasta hace unos años. Esto ha privado a la educación matemática en este país de analizar en profundidad los problemas que continuamente se presentan en esta materia, de arrojar luz sobre ellos, así como de conocer las repercusiones de los continuos cambios que se producen en el curriculum.

Sin embargo en España no se ha producido una gran separación entre investigación y práctica, que ha habido en otros lugares en los que los mundos de la investigación universitaria y de la docencia no han tenido apenas conexión, gracias a los trabajos de investigación realizados por los propios docentes, tanto Tesis doctorales como Tesis de maestría u otros trabajos fuera del ámbito académico de los postgrados, como pueden ser las convocatorias de investigación realizadas por el propio Ministerio de Educación.

Creemos que este programa de Maestría en Educación Secundaria Obligatoria y otros programas de postgrado son ámbitos en los que los profesores que quieren aunar en su trabajo investigación y docencia se puedan iniciar, a favor de una mayor calidad a su trabajo docente desde la óptica del profesor reflexivo.

[3] Los estudios de evolución se han inspirado en el trabajo de Schoenfeld (1982) "Measures of Problem-Solving Performance and Problem-Solving Instruction".

Referencias bibliográficas

BLANCO, L. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de E.G.B. y estudiantes para profesores.* Tesis doctoral. Servicio de Publicaciones. Universidad de Extremadura.

BROMME R. (1994). Beyond Subject matter: A Psychological Topology of Teachers' Professional Knowledge. En: *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* R. BIEHLER et al., Klüwer, Dordrecht, pp. 73-88.

CALLEJO, M.L. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* Col.: Secundaria para todos. Narcea, Madrid.

CALLEJO, M.L. (1992). *Orientaciones para la elaboración de Unidades Didácticas. Area de matemáticas.* Col.: Documentos IEPS. Monografía nº 13. IEPS, Madrid.

CALLEJO, M.L. (1999). "Un marco para actividades de formación permanente centradas en la resolución de problemas". *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* Nª 20. Abril

COONEY Y KRAINER (1996). Inservice Mathematics Teacher Education: The Importance of Listening. En: *International Handbook of Mathematics Education.* A. BISHOP y otros (Eds.). Kluwer Academics Publishers. Dordrecht

ELLIOT, J. (1993) *El cambio educativo desde la investigación-acción.* Morata, Madrid.

GUNSTONE, R.F., SLATTERY, M., BAIRD, J.R. y NORTHFIELD, J.R. (1993). A Case Study Exploration of Development in Preservice Science Teachers. *Science Education*, Vol. 77(1), 47-73.

GUZMAN, M. de (1987). Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. Esquema de un curso inicial de preparación. *Educación Abierta* nº 71, ICE de la Universidad de Zaragoza.

POLYA, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton University Press.

POLYA, G. (1981). *Mathematical Discovery*, Wiley, Nueva York (edición combinada, Or. 1962).

SCHOENFELD, A.H. (1982). Measures of Problem-Solvving Performance and Problem-Splving Instruction. *Journal fior Research in Mathematics Education.* Vol. 13, 312-349.

SCHOENFELD, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press. Orlando

SCHOENFELD, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-making in Mathematics. En: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* D.A. GROUWS (ed.), McMillan, Nueva York, 334-389.

SCHÖN, D.A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos.* Col.: Temas de educación. Paidós-MEC, Barcelona, 1992 (Or. 1987).

SIMON, M.A. y SCHIFTER, D. (1991). Towards a Constructivist Perspective: An Intervention Study of Mathematics Teacher Development. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, 309-331.

La superación del profesor de matemática en la universidad de hoy. Una experiencia cubana

Eugenio Carlos Rodríguez
Depto. de Matemática Gral, Fac.de Ing.Industrial, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría"
Cuba

Una gran cantidad de eventos científicos relacionados con la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje, tienen lugar en la actualidad, reuniones, congresos, simposios, con carácter nacional, regional, internacional, mundial. Todos reúnen gran cantidad de maestros, profesores e investigadores, la inmensa mayoría de ellos buscando soluciones o exponiendo sus experiencias para dar solución a los problemas que enfrenta el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática.

Se trata de dar respuesta a muchas interrogantes:

- ¿Qué se enseña en las clases de Matemática?.
- ¿Cómo se enseña la Matemática?
- ¿Qué se aprende de todo lo que se enseña?

Se puede buscar una infinidad de interrogantes que motivan a los que participamos en estas reuniones, pero si buscamos en las verdaderas raíces una gran realidad nos mueve a todos: el rendimiento académico. ¡Qué felices serían los maestros y profesores de Matemática si ésta no fuera la causa fundamental del fracaso académico de tantos estudiantes!.

Si nos limitamos al caso de la Matemática en las carreras de Ingeniería, por ejemplo, vemos que existe un abismo, muchas veces insalvable, entre la Matemática que se aprende en el bachillerato y la que se necesita para comenzar a estudiar ingeniería. Este problema, conocido como el "nivel de entrada" o el "nivel de partida", se manifiesta en temas tales como trigonometría, álgebra elemental, trabajo con variables, geometría analítica, etc. y las soluciones clásicas han sido los exámenes de ingreso y los cursos propedéuticos.

Los exámenes de ingreso no son una solución al problema, simplemente sacan del juego a los alumnos que no alcanzan el nivel mínimo indispensable para ingresar a la universidad. Los cursos propedéuticos tampoco son una solución, en este caso lo que se hace es complementar lo que el estudiante aprendió o insistir en lo que debió aprender, para que puede enfrentarse a los cursos de Matemática de la Universidad, o para que pueda enfrentarse a una examen de ingreso.

Hasta ahora tenemos una buena parte de los estudiantes que se quedan fuera de la Universidad gracias al nivel de entrada en la Matemática. Los que logran entrar pasan entonces por un filtro: "La Matemática". La Matemática en las carreras de ingeniería constituye uno de los obstáculos fundamentales para sobrepasar los primeros semestres y muchos la consideran como un medio para decantar la matrícula en estas carreras.

Aquí surgen entonces las preguntas que ya mencionamos:

- ¿Qué Matemática se enseña en las carreras de ingeniería?
- ¿Cómo se enseña esta Matemática?

Adicionalmente a los problemas relacionados con los Programas de Matemática y aquellos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje, hay otros tales como:

- La comunicación alumno-profesor.
- Los sistemas de evaluación

Para algunos profesores lo importante es cumplir un programa, sin detenerse a pensar si el alumno aprende. Para otros lo más importante es demostrar que él sabe Matemática.

Los exámenes difíciles son parte del problema de la decantación.

Si nos preguntáramos ¿qué debe saber el profesor de Matemática, además de saber Matemática? tendríamos que dar una única solución: El profesor debe sabe cómo hacer que los alumnos aprendan.

Tratando de dar solución a las preguntas de qué enseñar y cómo enseñar Matemática a los estudiantes de ingeniería el profesor de Matemática en la Universidad de hoy tiene que enfrentar tres grandes retos:

- Las nuevas teorías Matemáticas.
- Las nuevas concepciones psicopedagógicas.
- Las nuevas tecnologías.

Estos no son los únicos retos, la realidad es que el conocimiento humano está creciendo a una velocidad que es imposible de seguir. No es posible incluir en un programa de estudio todo lo que se descubre, ni siquiera todo lo que se publica en una temática.

La Matemática que se enseñe al ingeniero del Siglo XXI requiere de un profesor capaz de enfrentar los retos de esta época, para ello el mismo debe superarse sistemáticamente, no solamente para actualizarse en todas las técnicas que requiere su profesión sino, sobre todo, para lograr que sus alumnos no sólo aprendan nuevos conocimientos sino que "aprendan a aprender".

¿Cómo lograr que el profesor de Matemática alcance ese estadío? El ingeniero del Siglo XXI ya está en nuestras aulas y los profesores de Matemática seguimos siendo los mismos del siglo XX.

¿Cómo organizar la superación de los profesores de Matemática? ¿En qué se tienen que superar para lograr este objetivo?

Pensemos que primero debemos estar seguros de que estamos trabajando por lograr que la Matemática alcance los objetivos que se propone en las carreras de ingeniería:

- La Matemática como herramienta de cálculo.
- Como herramienta para modelar y resolver problemas de ingeniería.
- Como lenguaje universal capaz de contribuir al conocimiento y desarrollo de otras disciplinas propias del perfil profesional.
- Como herramienta para lograr el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonar, de enfrentarse a situaciones nuevas.

Si no lo hemos logrado hasta ahora, o lo hemos logrado a medias, ahora es más necesario aún.

A nuestro juicio la superación del profesor de Matemática debe estar dirigida en cuatro vertientes:

- La superación en la Matemática, incluyendo sus nuevas teorías.
- En las técnicas y teorías que contribuyan a mejorar el aprendizaje de la Matemática.
- En la Informática.
- En el conocimiento del perfil del estudiante.

Superación en Matemática

En aquellos lugares donde una parte de los profesores de Matemática para ingeniería son ingenieros, una parte de la superación de éstos debe estar dirigida hacia un conocimiento más profundo de la Matemática.

Evidentemente en cualquier caso la superación en la propia Matemática debe ser sistemática, más aún si se tiene en cuenta el desarrollo de nuevas teorías que están teniendo un impacto en la actualidad, tales como la lógica difusa, los fractales y otras.

La aplicación de las nuevas tecnologías en muchas ramas de la ingeniería está obligando a muchos profesionales a enfrentarse a un nivel de Matemática, fundamentalmente en cursos de postgrado, por encima del que adquirieron durante la carrera. Esta realidad está obligando a redefinir la Matemática que necesita cada carrera de ingeniería, hasta dónde llega el pregrado y dónde comienza el postgrado, constituyendo un reto para los profesores de Matemática.

La superación en teorías psicopedagógicas

Un grupo numeroso de profesores de Matemática dedican gran parte de su tiempo a estudiar, aplicar y a investigar en distintas teorías y tendencias psicopedagógicas, ese grupo es cada vez mayor.

¿Qué sucede con el resto? No quiere decir que los que no estudian estas teorías sean todos malos profesores, hay excelentes profesores de matemática entre ellos, que por su experiencia y su maestría pedagógica ocupan un lugar entre los mejores. Quizás pudieran ser mejores aún si fundamentaran teóricamente lo que hacen.

Muchos de los problemas que se confrontan en la actualidad pudieran resolverse si todos los profesores conocieran que el alumno debe ser el centro del proceso de enseñanza – aprendizaje, si conocieran métodos de enseñanza activa, si enseñaran a sus alumnos a resolver problemas, sólo por poner algunos ejemplos.

Entonces, estos elementos deben formar parte de la superación del profesor de Matemática, lo que no quiere decir que todos se dediquen a investigar en esta dirección.

La Informática

El vertiginoso desarrollo de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones ha tenido un gran impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las disciplinas propias del perfil profesional y de las ciencias básicas en las carreras de ingeniería, incluyendo la Matemática.

Ya existe en el mercado un gran número de paquetes profesionales capaces de resolver cualquier tarea que hasta hace poco requería de cálculos muy engorrosos (DERIVE, MATLAB, MATHEMATICA, etc.), además de los cientos de software diseñados especialmente para la enseñanza de la Matemática en los más disímiles temas, tales como tutoriales, entrenadores, evaluadores, libros electrónicos, etc.

Las primeras aplicaciones enseñantes desarrolladas en computadoras tuvieron desde el punto de vista de las teorías del aprendizaje su base científica en el conductismo. Las generaciones siguientes recibieron la influencia de la psicología cognitiva y las actuales aportan los elementos indispensables para la modelación del estudiante. Las más ambiciosas pretenciones de la Enseñanza Asistida por Computadoras (EAC) se presentan hoy por el uso de las técnicas de la Inteligencia Artificial (IA).

Las primeras aplicaciones inteligentes para la enseñanza aparecieron en los inicios de la década del 70. Fueron producto de investigaciones que tenían como objetivos superar las deficiencias de los programas adaptativos, proponiendo la representación del dominio del conocimiento, los conocimientos del estudiante, el interfaz hombre-máquina y las decisiones de enseñanza mediante modelos psicológicos y complejas técnicas de Inteligencia Artificial. Durante los ´70 y los ´80 se obtuvieron importante logros y descubrimientos en este campo y se realizaron validaciones de estas teorías en ambientes educacionales.

A pesar de lo expuesto con anterioridad, las aplicaciones actuales no siempre consideran los avances pedagógicos, ni los cambios psicológicos que influyen en la educación. Simplemente perpetúan con tecnología avanzada estructuras anteriores, incapaces de asumir nuevas demandas y técnicas docentes. Por tanto, es necesario una nueva versión de la interacción entre el alumno y la computadora de un nuevo paradigma para soportar nuevas técnicas. En relación con lo planteado "no tiene sentido que un programa de formación se limite a pasar el texto por la pantalla, porque así no saca partido a las mejores cualidades del ordenador; es absurdo utilizar un aparato caro para hacer lo que esté al alcance de la sencilla técnica del libro".

De todo lo anterior, se deduce la necesidad de perfeccionar los métodos de enseñanza – aprendizaje de manera que el proceso de instrucción trasmita lo mismo en menos tiempo, sin sacrificar la amplitud, la profundidad y la calidad de la enseñanza. Se requiere una actualización y adecuación de los conocimientos de los individuos de acuerdo con sus necesidades (reentrenamiento de la fuerza de trabajo) en aras de mantener su potencial profesional y aumentarlo, dando respuesta a los requerimientos de la sociedad ante los procesos de reestructuración, reconversión o desarrollo.

En la actualidad, existe y se consolida un modelo de enseñanza en el cual, el papel de la Informática ocupa un lugar bien definido. Este modelo responde al entorno tecnológico en que se desarrolla la sociedad y se encuentra en constante evolución. En el marco de este modelo la computadora se utiliza principalmente en tres vertientes:

La computadora.

- Como medio de enseñanza.
  - ⇒ Para motivar al alumno.
  - ⇒ Mostrar interpretaciones geométricas.
  - ⇒ Hacer demostraciones.
  - ⇒ Hacer ejemplos cercanos a la realidad (uso de paquetes Profesionales: DERIVE, MAATLAB, etc. o SW especialmente desarrollados).

- En el trabajo independiente del alumno.
  - ⇒ Tutoriales
  - ⇒ Entrenadores } ¿Conductismo?
  - ⇒ Evaluadores

- Como herramienta de cálculo: Se elimina el desarrollo de habilidades de cálculos engorrosos dejando esto a la computadora.

Emplear este tiempo en otras habilidades como: modelación, resolución de problemas, desarrollo del pensamiento lógico, enfrentarse a situaciones nuevas. Esta transformación requerirá del rediseño total de las asignaturas, incluyendo sistemas de objetivos, conocimientos, habilidades y de evaluación, así como la revisión de los textos y elaboración de software educativo.

Evidentemente dentro de la superación del profesor la Informática jugará un papel importante.

El perfil del estudiante

Sin lugar a dudas conocer el perfil del estudiante es una gran ventaja para el profesor a la hora de desarrollar ejemplos, de motivar a los alumnos, de mostrar el papel de la Matemática en la carrera.

Conocer el perfil del estudiante forma parte de la articulación lógica entre la Matemática y las demás disciplinas de la carrera, el profesor debe conocer qué otras disciplinas utilizan la Matemática, qué herramientas utilizan, las notaciones, los métodos, lo que ayudará a motivar a los alumnos en la Matemática y en su carrera.

Formas de Superación

Desde la autosuperación del profesor tiene que partir el sistema de superación del profesor, es decir partimos del interés personal y del estudio individual.

La actividad metodológica en el Departamento docente, o la Cátedra, juega también un papel importante, donde los docentes colectivamente estudian, analizan discuten cómo mejorar la calidad del proceso de enseñanza – aprendizaje, a modo de ejemplo se puede mostrar el plan de desarrollo metodológico propuesto este curso 98-99 en el Dpto. de Matemática General de la Facultad de Ingeniería Industrial del Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", en La Habana, Cuba.

El Plan de Desarrollo Metodológico del Departamento integra los Planes de Desarrollo Metodológico elaborados por los Jefes de Disciplina para cada carrera cuya estrategia a nivel del Departamento contempla las siguientes tareas:

1. Concepción y desarrollo del Modelo Educativo que rige el Diseño Curricular para la disciplina en las diferentes carreras, en correspondencia con la estrategia metodológica trazada por el Ministerio de Educación Superior de Cuba en función de los objetivos a lograr en la formación del ingeniero.

2. Perfeccionamiento de la disciplina para cada carrera, que incluye:

   - Reelaboración de los objetivos en función del Modelo del Profesional y el Plan de Estudio.
   - Reestructuración de los contenidos en función del Modelo del Profesional, el Plan de Estudio y la lógica de la Ciencia, atendiendo a la articulación interdisciplinaria, la articulación intermaterias, las precedencias, las redundacias, los asistentes matemáticos necesarios y la bibliografía de la carrera, entre otros.
   - Reelaboración del Sistema de Conocimientos, de Habilidades, el Sistema de Tareas y el Sistema de Evaluación.
   - Actualización de la bibliografía.

3. Uso y desarrollo de los medios Informáticos en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje.

4. Uso de los métodos activos de enseñanza que se correspondan con los objetivos propuestos y en función del Modelo Educativo planteado.

5. Aplicación de las teorías pedagógicas que permitan lograr la formación de estrategias de aprendizaje y en particular la habilidad de Resolver Problemas.

6. Introducción en el diseño de las asignaturas de actividades encaminadas a fomentar la creatividad de los estudiantes.

7. Uso de adecuados medios de enseñanza en función de los objetivos propuestos.
8. Comparación de los Programas de las disciplinas con otros en el ámbito internacional.
9. Búsqueda, revisión y análisis de bibliografía actualizada, en el extranjero.
10. Análisis de la posibilidad de introducir los nuevos contenidos matemáticos necesarios para cada carrera, de forma paulatina, en los diferentes niveles de enseñanza: Doctorados, Maestrías, postgrado y pregrado, trabajando así en la formación y actualización de los docentes y de estudiantes de alto rendimiento.

Para el logro de este plan se concibió un conjunto de reuniones metodológicas con todo el claustro del Departamento, entre estas se pueden mostrar los siguientes:

Semestre	Temática	Objetivos
I	Modelo Educativo	Promover el debate entre los profesores para interiorizar y asumir un Modelo Educativo a partir del análisis, discusión y reflexión de diferentes experiencias de los profesores del Departamento.
	Resolución de problemas	Promover el debate entre los profesores acerca de la enseñanza heurística para la resolución de problemas, a partir de sus fundamentos teóricos y de los resultados de su implementación en la práctica.
	Uso sistémico de la computadora como medio de enseñanza.	Exponer las experiencias y promover la discusión acerca del uso de la computadora como medio de enseñanza en el Diseño Sistémico de una asignatura.
	La comunicación en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje	Promover el debate entre los profesores acerca de la comunicación en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje, a partir del análisis, discusión y reflexión de diferentes experiencias de los profesores del Departamento y de los fundamentos teóricos para el Modelo Educativo asumido.
II	Habilidades generales Matemáticas.	Trabajar a través de métodos activos las habilidades generales matemáticas y la ventaja de su utilización en la resolución de problemas.
	Utilización del DERIVE como Asistente Matemático.	Discutir las experiencias de la aplicación del DERIVE en la Matemática I y II. Ventajas y desventajas. Llegar a proponer las nuevas habilidades a formar.
	Estrategias de aprendizaje	Aplicar a los estudiantes un instrumento para evaluar algunos indicadores del desarrollo de la personalidad y el aprendizaje significativo.

Otras formas de superación son lo cursos cortos, los entrenamientos, los Diplomados, los Maestrías y los Doctorados, alcanzándose distintos estadíos en la especialización.

El curso posibilita la formación básica y especializada de los graduados universitarios; comprende la organización de un conjunto de contenidos. Aquellos que aborden resultados de investigación relevantes o aspectos trascendentes de actualización podrán ser impartidos como cursos de postgrado. El curso debe tener una duración mínima de 20 horas y responder a las necesidades de complementar o actualizar los conocimientos de los profesionales que los reciban. El entrenamiento posibilita la formación básica y especializada de los graduados universitarios, particularmente en la adquisición de habilidades y destrezas, y en la asimilación e introducción de nuevas técnicas y tecnologías.

Los entrenamientos responden a las necesidades de complementar o actualizar, así como el perfeccionamiento y consolidación de conocimientos y habilidades prácticas. Su duración nunca será menor de 40 horas. El diplomado posibilita la formación especializada de los graduados universitarios, al proporcionar la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades en aspectos de un área particular de la ciencia o del arte. El diplomado está constituido por un grupo de cursos articulados entre sí, que deben incluir, además, la realización de un trabajo teórico y (o) práctico adicional, no comprendido en los cursos que lo integran. Su duración mínima será de 200 horas.

La Maestría es el proceso de formación posgraduada que proporciona a los graduados universitarios dominio profundo de los métodos de investigación, amplia cultura científica y conocimientos avanzados en un campo del saber, desarrollando habilidades para el trabajo docente de investigación y desarrollo. El doctorado es el proceso de formación postgraduada que proporciona a los graduados universitarios un conocimiento profundo y amplio en un campo del saber; así como madurez científica, capacidad de innovación, creatividad para resolver y dirigir la solución de problemas de carácter científico de manera independiente y que permite obtener un grado científico.

EJEMPLOS DE DIPLOMADOS Y MAESTRÍAS

DIPLOMADO EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Didáctica de la Matemática.

Diseño curricular.

Evaluación del aprendizaje.

Metodología de la investigación educativa.

Estructuración del conocimiento.

La resolución de problemas.

La heurística y la enseñanza de la resolución de problemas.

Métodos activos y medios de enseñanza.

Formación de habilidades matemáticas.

El uso de Asistente Matemáticos en la enseñanza de la Matemática.

Trabajo de Diploma.

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Bloque básico:

Didáctica de la Matemática.

Diseño curricular.

Evaluación del aprendizaje.

Metodología de la investigación educativa.

Tendencias pedagógicas contemporáneas.

Asistentes Matemáticos I y II.

Ingeniería del Software I y II.

Informática Educativa.

Seminario de Proyectos I.

Métodos estadísticos

Bloque de asignaturas optativas:

Estructuración del conocimiento.

La resolución de problemas

Psicología de enseñanza de la Matemática

Elementos de Inteligencia Artificial

Herramientas para elaborar Software educativo.

Fundamentos de la Instrucción Asistida por Computadoras.

Sistemas inteligentes para la Instrucción Asistida por Computadoras.

Seminario de Proyectos II.

Tesis de Maestría.

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA AVANZADA PARA INGENIERÍA

Bloque básico:

Metodología del Trabajo Científico.

Informática para el trabajo científico.

Asistentes Matemáticos I.

Asistentes Matemáticos II.

Análisis Numéricos en la Ingeniería.

Modelación Matemática.

Optimización en Ingeniería.

Educación Matemática.

Didáctica de la Matemática.

Bloque de asignaturas optativas:

Informática Educativa.

Psicología de la Enseñanza.

Diseño Curricular.

Enseñanza de la Resolución de Problemas.

Estadística.

Métodos Numéricos Avanzados.

Métodos Analíticos para la resolución de Ecuaciones Diferenciales.

Métodos Numéricos para la resolución de Ecuaciones Diferenciales.

Técnicas de Aproximación de Funciones.

Cálculo Operacional.

Investigación de Operaciones.

Tesis de Maestría.

Como puede observarse muchas formas de superación están asociadas a la investigación, por otra parte muchas personas con un alto nivel científico, por ejemplo teniendo ya el Grado Científico de doctor, continúan superándose a través del desarrollo de investigaciones, no es posible concebir una investigación que no lleve intrínsecamente asociada la superación del personal que investiga. Como mismo no es posible concebir la investigación sin su aplicación práctica en el aula.

Partiendo de la maduración de todas estas ideas, los representantes de los Departamentos de Matemática para las carreras de Ingeniería en Cuba, reunidos en La Habana en noviembre de 1998, decidimos crear un Centro de Investigación en Matemática Educativa, con carácter nacional y ramificaciones en todo el país, el CLAME ha apoyado esta idea con el fin de que este centro forme parte de una red de Centros de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE), de lo cuales ya existen dos en México, en la Universidad Autónoma de Guerrero y en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (Campus Monterrey), el CLAME considera que el CIMATE de Cuba constituya un centro regional para el área de Centroamérica y el Caribe con la colaboración de los mejores especialistas de Cuba y de América Latina.

Esperamos que este sueño se haga realidad.

El papel del profesor en la actividad de reproducir una ingeniería didáctica*

*Rosa María Farfán, Javier Lezama***
AES-Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Este reporte complementa el presentado en las actividades de Relme-12 celebrada en la ciudad Bogotá, Colombia, en agosto de 1998, y que lleva por nombre *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial.* [2] Puede consultarse si se desea conocer los propósitos de la investigación, la metodología empleada y conclusiones.

En este trabajo mostraremos el papel jugado por los profesores participantes en la actividad de reproducir una situación didáctica, ya que a lo largo del desarrollo de la investigación se ha ido revelando de forma importante que la intervención del profesor determina en gran medida el logro o no del propósito didáctico de la situación didáctica llevada a escena.

Nuestro trabajo de investigación se proponía entre otros, m*ostrar el papel que juegan en el ejercicio de reproducir la situación didáctica correspondiente a una Ingeniería Didáctica cuyo funcionamiento ya se conocía,*

- *los profesores,*
- *las interacciones equipo – profesor,*
- *las discusiones grupales (coordinadas por el profesor)*

Las observaciones hechas nos permitieron elaborar las siguientes Conclusiones en relación al papel desempeñado por los profesores en la actividad de reproducir una misma situación didáctica en tres distintos grupos

Conclusiones en relación a la actividad del profesor

- En todos los casos la participación del profesor fue importante y determinó el desempeño del equipo. La participación moderada, dependió de la independencias de los equipos para trabajar la secuencia.

- En el caso en que la participación de profesor fue baja, propició desviaciones importantes en la estrategia de resolución de la secuencia, llevándolos a soluciones equivocadas, pero no afecto el nivel de discusión de los estudiantes.

- Un alta intervención del profesor no garantiza la reproducibilidad interna y externa.

No siendo el objetivo de la tesis estudiar únicamente el papel del profesor, retomamos el análisis de la participación del profesor en la puesta en escena de la situación didáctica para profundizar los distintos planos de su actividad.

---

* Este reporte forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología "Construcción social del conocimiento matemático avanzado. Estudio sobre el pensamiento y lenguaje variacional": 26345-S

** Becario de Conacyt

[2] Lezama, J. y Farfán, R. Ma. Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. En Farfán R. (Ed.) Acta Latinoamericana de matemática Educativa, Vol. 12, tomo 1, (pp.15-19). México D. F. 1999. Editorial Iberoamericana.

Preparación de la puesta en escena de la situación 2^x

El propósito es reproducir la situación didáctica correspondiente a la ingeniería *Un estudio de la función 2^x* (Aguilar, P., et. al.,1997) en distintos grupos. Estos grupos podrían ser de una misma institución y nivel, finalmente se decidió llevarla a estudiantes de instituciones y niveles distintos por razones que a continuación se dan.

Desarrollar la secuencia en un grupo en situación escolar, es decir en su aula, en el contexto del desarrollo del programa, respetando los horarios de la clase de matemáticas y contando con el compromiso del profesor, constituían condiciones que acercarían a nuestro estudio a una situación real de clase pero, se enfrentaba estos hechos a la complejidad de desarrollar un método efectivo de observación que lograse retener, la dinámica de la clase, su evolución en el desarrollo de las actividades, las dificultades que enfrentan los estudiantes, el modo en que las superan, el papel de la interacción con sus compañeros y el profesor en la superación de tales obstáculos, el cómo se difunden las ideas y procedimientos que llevan a la solución de los problemas planteados y la forma en que se validan las soluciones, etc.

Tres factores son los indispensables para el desarrollo de la experiencia, los estudiantes, los profesores y instrumento a reproducirse (el diseño de la situación didáctica), de estos tres factores el que esta siendo puesto a prueba es el instrumento, pero es indispensable determinar el papel de los profesores en este ejercicio de reproducción (en este aspecto podemos señalar los siguientes puntos: apropiación por parte del profesor de la propuesta didáctica dada por la situación, tener claro el objetivo, el sentido de las actividades, la profundización del contenido matemático de la misma), así como así como el efecto producido en los estudiantes como resultado de la interacción con la secuencia y los profesores.

La estrategia que se siguió fue seleccionar a los profesores, desarrollar un proceso de apropiación (conocimiento y familiarización) de la secuencia y apoyarlos para la preparación del experimento de reproducción en de clase (puesta en escena) delegando en ellos la selección de los alumnos.

Profesores y Estudiantes

El ejercicio de reproducción se llevaría a cabo en tres escenarios, desarrollados por tres grupos de profesores, que en esa época estaban cursando la Maestría en Enseñanza con especialidad en Matemática Educativa en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Para estos profesores agrupados en equipos, la actividad constituyo la parte experimental de su trabajo de tesina para obtener la especialidad. Se constituyeron tres grupos: Oaxaca, por cuatro profesoras del Instituto Tecnológico de Oaxaca. Grupo Pachuca, por cuatro profesores de distintas instituciones de nivel medio superior del Estado de Hidalgo. Grupo de Toluca, por una profesora y otros dos profesores de distintas instituciones del Estado de México.

Los tres grupos realizaron el mismo ejercicio de reproducción, tanto la preparación de puesta en escena como el respectivo reporte de resultados era responsabilidad de cada uno de los equipos.

Preparación de la experiencia

Dentro de las actividades a desarrollar por los profesores se encontraban:

Hacer una exploración previa sobre lo que piensan los estudiantes en relación a la expresión 2^x, por medio de un cuestionario hecho a algunos de los estudiantes de sus respectivas instituciones. Seleccionar 15 estudiantes, que de forma voluntaria participarían en ella y como una actividad extracurricular.

Proporcionar a los estudiantes los conocimientos geométricos indispensables para desarrollar la situación 2^x, como son algoritmos para obtener raíces cuadradas de segmentos empleando el trazo de la media geométrica y multiplicación de segmentos empleando semejanzas de triángulos.

Conocer a profundidad la situación. (Antecedentes y el contenido matemático de la misma así como reconocer que partes de la misma podrían causarles dificultades a los estudiantes y generar estrategias para apoyarlos a superarlas).Hacer sugerencia en relación a la redacción de la situación y elaborar predicciones sobre el desempeño de los estudiantes. Conocer, comentar y completar las guías de observación sobre el desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes.

La cultura institucional del lugar donde se realiza el ejercicio

Este aspecto es muy importante, pues les permitiría a los profesores tomar conciencia de cuales son las características de las prácticas de clase en sus respectivas instituciones, ya que la dinámica a desarrollarse durante la puesta en escena seria en algunos casos muy distinta las prácticas institucionales. Para ello solicitamos a los profesores que discutieran y precisaran en términos de su experiencia las:

- Características de la institución donde se desarrollará la experiencia.
- Características de los estudiantes.
    - establecimiento de los antecedentes matemáticos de los estudiantes
- Costumbres de los estudiantes en relación a:
    - el trabajo en equipo,
    - elaborar reportes de actividades,
    - discusión matemática en grupo

Trabajo de preparación de la experiencia con los profesores.

Los profesores de los tres equipos "vivieron" la secuencia "Un estudio didáctico de la función 2^x", como parte de las actividades de la Escuela de Invierno, efectuadas en el mes de enero de 1998 en la Universidad de Autónoma de Hidalgo. Se desarrollaron las tres etapas de la secuencia, se trabajaron en equipos de 5 y hasta 6 profesores (14 equipos en total), se grabó el desarrollo de la secuencia y además los profesores entregaron por escrito su trabajo. Después de cada etapa se llevó a cabo una actividad grupal, a fin de poder ver y discutir algunas de las soluciones propuestas por los equipos.

Para concluir la actividad se le asignó a cada uno de los equipos la hoja de trabajo y la grabación magnetofónica de otro equipo, con el fin de que elaboraran el análisis de la actividad del equipo asignado para luego redactaran un reporte con dicho análisis. Este trabajo incluía la transcripción del cassette y efectuar el análisis del trabajo del equipo asignado apoyándose en las siguientes preguntas: ¿En dónde hubo conflicto? ¿Qué asuntos dieron lugar al conflicto? y ¿Qué hicieron o cómo salieron del conflicto?

Hasta este momento, se esperaba que los profesores comprometidos con la actividad de reproducción de la secuencia, conocieran ampliamente la estructura de la secuencia, el contenido matemático en juego, identificaran los puntos de conflicto a que da lugar su solución tanto en ellos como en otros profesores, además de permitirles desarrollar una técnica para lectura y análisis de reportes producto de la solución de la secuencia.

En una reunión posterior se les dio a los once profesores participantes, el documento con la ingeniería completa, así como el reporte con el análisis y conclusiones de la primera puesta en escena para su estudio y con el fin de ampliar el conocimiento en ellos de la ingeniería desde una perspectiva más estructural. Con este estudio se pretendía que los profesores lograran apropiarse del sentido de las actividades y preguntas contenidas en la secuencia así como dar elementos para establecer la pertinencia de efectuar un estudio de esta índole en su institución.

En una última reunión, se retomó la discusión de la secuencia y ahí los profesores plantearon dudas que se sujetaron básicamente al contenido matemático de la secuencia. Las preguntas estuvieron dirigidas a asuntos de tipo geométrico como:

- Justificación de que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
- Justificación de que la altura a la hipotenusa es media geométrica de las magnitudes en que la altura divide a la hipotenusa.
- A la manera de proceder con el algoritmo geométrico para encontrar raíces.
- A la justificación del algoritmo geométrico para multiplicar segmentos.

En estas reuniones se acordaron dos actividades indispensables para la puesta en escena de la secuencia con los estudiantes:

1) Una exploración previa con estudiantes de su institución en relación a lo que piensan con respecto a la función exponencial. El contenido de la exploración y la forma de hacerlo es responsabilidad de cada grupo de profesores. Estas preguntas darán a los profesores elementos para la predicción del desempeño de los estudiantes cuando enfrenten la secuencia.

2) Desarrollar la primera etapa de la secuencia en una sesión aparte, previa a las etapas dos y tres que se desarrollarían en una sola sesión. Se recomendó a los profesores encargados en reproducir la secuencia, efectuarla en la forma que más conviniera a ellos y sus estudiantes.

Estrategia de observación

La actividad de un grupo en situación de clase pone en juego muchos factores, discriminarlos con motivo de poder llevar a cabo la observación de lo que allí sucede puede resultar arbitrario, pero resulta indispensable ante el reconocimiento de la complejo que resultaría pretender retenerlo todo. De estas consideraciones se desprendió el diseño de nuestra estrategia de observación.

La nuestra será una observación participativa, estaremos integrados al grupo de estudiantes, interactuaremos con ellos, responderemos sus preguntas y nos verán hacer anotaciones.

Se observaría :

El desarrollo de la actividad en el equipo.

Anotando la actividad matemática desarrollada por los estudiantes.

Identificando los bloqueos de los estudiantes y la forma en que los superan.

Anotando todas las intervenciones del profesor.

La dinámica del equipo.

La dinámica de las discusiones grupales.

Anotando las intervenciones del profesor.

Secuencia de antecedentes

En cada grupo de profesores recayó la responsabilidad de desarrollar en una o varias sesiones los antecedentes geométricos para poder realizar la puesta en escena de la secuencia en sus dos etapas. Ellos elaboraron los materiales y decidieron la forma de presentar a los estudiantes los algoritmos geométricos para obtener la media geométrica y el producto de segmentos a través de semejanza de triángulos.

Exploración previa

Cada grupo de profesores realizó una exploración sobre lo que los estudiantes piensan con relación a la función 2^x. En la mayoría de los casos se efectuó a través de un breve cuestionario, el cual se aplicó a varios estudiantes que no participaron en la actividad y que arrojó los siguientes hechos.

- Es una expresión algebraica.
- Es una operación que equivale a multiplicar el 2 tantas veces como lo indica la x.
- La x puede tomar cualquier valor.

Todos los valores positivos

Infinitos valores

- Es un número real que puede ser elevado a cualquier potencia.
- Una función donde la x puede ir cambiando de menos infinito a mas infinito.
- Algunos estudiantes no respondieron.

Predicciones de los profesores sobre el desarrollo de la secuencia.

Con base a la exploración previa y el desarrollo de la sesión de antecedentes los tres grupos de profesores conservaron las predicciones establecidas en el diseño inicial:

- Los estudiantes evaluarán a 2^x, cuando x no es entero, asociándola con magnitudes de segmentos rectilíneos.
- Los estudiantes identificarán la naturaleza creciente de la función al comparar los segmentos rectilíneos obtenidos por métodos geométricos.

Pero identificaron dos elementos que desde su punto de vista constituirían obstáculos significativos para el logro de las predicciones de la secuencia: el manejo de las reglas de los exponentes, en especial los exponentes fraccionarios y el uso de procedimientos geométricos junto con el manejo de escuadras y compás.

Algunos ejemplos de la intervención de los profesores en el trabajo de los equipos

Equipo 1

Comentario

La pregunta sugiere el buscar la solución empleando el mismo procedimiento que para $2^{1/2}$.

A5 Localización del segmento $2^{1/4}$.
EQUIPO1:

- Un miembro del equipo se da cuenta que puede emplear la misma secuencia geométrica para hallar $\sqrt{\sqrt{2}}$ y que saben que equivale a $\sqrt[4]{2}$.

PROFESOR:

- Pregunta si se puede aplicar el método desarrollado para encontrar $2^{1/2}$ en el caso de $2^{1/4}$.

Equipo 2

Comentario

El profesor sugiere a los estudiantes, exploren el producto $2^{1/2}$ por $2^{1/4}$. En este caso los estudiantes tenían dificultades con las reglas de los exponentes y por ende no podían asociar el procedimiento geométrico correspondiente.

A6 Localización del segmento $2^{3/4}$.

EQUIPO 2:

- Encontrar este segmento suscitó mayor discusión.
- Propusieron sumar los segmentos $2^{1/2}$ y $2^{1/4}$, lo desecharon pues les daba un segmento muy grande
- Quisieron aplicar el algoritmo de la media geométrica, a ¾ sumarle la unidad para así encontrar $2^{3/4}$; se dan cuenta de su error.
- Escribieron $\sqrt{\sqrt{2^3}} = \left(2^{3/2}\right)^{1/2} = 2^{3/4}$, finalmente ven $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = (2)^{1/2}(2)^{1/4} = 2^{3/4}$ y aplican inmediatamente el algoritmo para el producto de segmentos.

PROFESOR:

- Sugirió el producto de segmentos, es decir, $2^{1/2}$ por $2^{1/4}$. Los estudiantes rápidamente lo comprendieron y procedieron a realizar el producto de segmentos.

Equipo 7

Comentario:

En este equipo la maestra fue sujeta a mucha presión por parte de los estudiantes para que los orientara y validara las exploraciones que ellos hacían. El profesor asumió su papel y guió el trabajo de los estudiantes de una manera convencional, pensando en términos de que sus estudiantes cumplieran completamente con la actividad.

A4 Localización del segmento $2^{1/2}$.

EQUIPO 7:

- Reconstruyen el procedimiento de la media geométrica paso a paso para obtener $2^{1/2}$ con una actitud de descubrimiento y logran encontrar el segmento de magnitud $2^{1/2}$.
- Los estudiantes piden continuamente la aprobación del profesor.

PROFESOR:

- *El profesor asiente y devuelve las preguntas a los estudiantes y en otros casos es directiva*
- ¿Qué es lo que tienes que localizar? ¿Qué valores tienen ahí?, ¿Qué relación puede haber con ese...? *No se*

¿Qué punto es el que vas a localizar?

Hace falta localizar el segmento $2^{1/2}$, entonces ¿qué podrían hacer aquí para calcular $2^{1/2}$?

Esto mide la unidad y esto a ¿cómo sabes cuanto es a?, pero aquí, ¿qué valores tienes que obtener?

Con calculadora no, geométricamente.

Comentario:

El profesor se convierte en el maestro del equipo, un elemento más, pero con mucha autoridad

A5 Localización del segmento $2^{1/4}$.

EQUIPO 7:

- Los estudiantes llevan a cabo una amplia discusión para aplicar el procedimiento desarrollado para obtener $2^{1/2}$, y ahora para encontrar el segmento $2^{1/4}$.
- L: *A ver, a ver ... ahora tenemos que hacer esto, ¿no miss?, porque vea, supongamos que este es x , ¿no?, entonces $2^{1/2}$ por $2^{1/2}$... es $2^{1/4}$, ¿no?.*
- Finalmente logran encontrar el segmento de magnitud $2^{1/4}$, geométricamente. Emplean el segmento $2^{1/2}$, de una manera completamente distinta a todos los demás equipos.

PROFESOR:

- *Este $2^{1/4}$ ¿de que otra manera se puede escribir, a parte de cómo lo indicaste?*
- *No, no. ¿De qué otra manera analíticamente?, acuérdense del exponente.*

Las actitudes de los profesores

Una de las funciones principales fue la de estudiar en su totalidad la ingeniería y muy especialmente la secuencia y a partir de ello elaborar sus predicciones sobre el trabajo de los estudiantes. El conocimiento de la secuencia era importante en términos de poder realizar la actividad de observador y desempeñar una función de apoyo y orientadora en el caso de que los estudiantes se atoraran en algún punto de la situación para lograr que éstos avanzaran en la resolución de la secuencia.

En términos de estas responsabilidades podemos reportar los siguientes hechos:

- Los tres grupos de profesores convocaron y efectuaron la sesión de antecedentes lo mismo que la exploración previa oportunamente, de tal manera que las puestas en escena pudieron desarrollarse en los tres grupos, los días establecidos.
- Todos los profesores elaboraron sus reportes de observación y la transcripción de la grabación de la actividad de los estudiantes.
- En relación a las actividades de centración y desbloqueo, los profesores manifestaron desconcierto, ya que los estudiantes les hacían preguntas o buscaban su aprobación y ellos se sentían obligados a responder, pero les preocupaba estar interviniendo más de lo acordado.
  - *En dos de los equipos de Toluca, la interacción con el profesor fue muy intensa, pero éstos vigilaron cuestionar, devolver las preguntas o llamar la atención sobre las afirmaciones hechas tanto habladas como escritas.*
  - En tres equipos la interacción con el profesor fue mínima, precisamente fueron los que menor avance tuvieron en la secuencia. Dos de esos equipos generaron soluciones alternas pero equivocadas en la etapa I.
  - Solamente hubo un equipo, que mantuvo una fuerte interacción con el profesor, las intervenciones de este fueron en varias ocasiones francamente directivas sin embargo el avance en la secuencia fue regular.
- La responsabilidad de administrar el tiempo de trabajo recayó en el profesor, y tuvo libertad para decidir cuándo intervenir en términos del tiempo con el que se contaba.
- Hubo dudas sobre en qué aspectos se podía intervenir sin correr el riesgo de desvirtuar la secuencia, como fue el caso de recordar las reglas de los exponentes.
- Las actividades plenarias fueron conducidas por los profesores, en todos los casos, coordinaron las intervenciones de los estudiantes, intervenían preguntando si había dudas, y solicitaban a los expositores las respondieran y si no lo podían hacer, le regresaban al grupo la pregunta. En ningún grupo, tuvo el profesor la necesidad de ser el expositor.
- Los profesores se sintieron evaluados a través de sus estudiantes, hecho que se reflejó por preguntas tales como: ¿cómo viste al grupo?, o se sentían apenados porque sus estudiantes se habían equivocado con 2^0, o las reglas de los exponentes.
- Después de haber visto trabajar al grupo, algunos profesores tuvieron diversas reacciones como las que a continuación se enuncian:
  - Si hubiera conocido mejor la secuencia le hubiera podido sacar más provecho.
  - *Me faltó dominar mejor el contenido matemático de la secuencia, para poder orientar mejor a los estudiantes.*
  - *No conocía todas las alternativas de solución y en ocasiones no entendía lo que hacían los estudiantes.*
  - *Me faltó estudiar más para entender el sentido de las preguntas.*
  - *Me faltan conocimientos matemáticos.*
- Manifestaron la necesidad de mayor entrenamiento y más asesoría para poder desarrollar una actividad como ésta.
- Algunos profesores manifestaron preocupación de que los estudiantes no se presentaran al evento, ya que su participación era voluntaria y tradicionalmente no se puede confiar mucho de los compromisos de los estudiantes.

Bibliografía

Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J. Moreno, J. (1997). Un estudio didáctico de la función 2^x. *Actas de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Morelia, Michoacán, México.

Artigue, Michèle. (1984). *Contributions à l'étudede la reproductibilité des situations didactiques –Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques.* These de Doctorat d'etat. Univessite Paris VII. Sin publicar.

Artigue, Michèle. (1986). Etude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recrerches en Didactique des Mathématiques*, 7(1), (pp. 5-62).

Artigue, Michèle. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-59) Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, Guy (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En Sánchez, E. y Zubieta, G. (Eds.) *Lecturas en didáctica de las matemáticas, Escuela francesa.* DME, Cinvestav-IPN. México. Traducción de: Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recrerches en Didactique des Mathématiques.* 7(2), (pp. 33-115). 1986.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Edit. Aique. Argentina.

Farfán, R. Ma. (1991). *El curso de precálculo: un enfoque gráfico.* Publicaciones Centroamericanas, 5(1) (pp.206-211).

Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un <<Résultat>> en didactique des mathématiques? *Recrerches en Didactique des Mathématiques*, 16 (2), pp197-220.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico.* Tesis de maestría. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. México.

Desarrollo del Currículum

El enfoque sistémico versus investigación - acción en "una estrategia de diseño curricular"

Bertha Fdez. De Aalaiza García-Madrigal (bertha@ind.ispjae.edu.cu)
Dpto. Matemática general, ISPJAE
Cuba

Introducción

El presente trabajo surge como consecuencia de la investigación desarrollada durante un período de ocho años en el perfeccionamiento del programa de la disciplina matemática en la carrera de ingeniería en automática en el ispjae, a partir del cual se llega a la construcción de una estrategia de diseño curricular basada en la articulación interdisciplinaria que pretende aprendizajes significativos de la disciplina en la carrera en que está inmersa.

La concepción de esta estrategia de diseño curricular[1], se produce luego de un tránsito histórico en el que se hizo necesario integrar dos métodos de investigación aparentemente contradictorios, pero necesarios, ya que aportaban aspectos diferentes e imprescindibles en el diseño curricular, a los que no era posible llegar utilizando cada uno de ellos por separado, sino en una integración dialéctica. Estos métodos son el enfoque sistémico y la investigación en la acción.

El enfoque sistémico y la investigación en la acción. Presupuestos y contradicciones

En el transcurso de la investigación acerca de la articulación entre la disciplina matemática y las restantes del plan de estudio de la carrera de ingeniería en automática se presentó la siguiente dificultad: cada análisis de la disciplina aportaba nueva información y a veces hasta contradictoria con la anterior. ¿cómo lograr una solución que no dependiera exclusivamente del investigador y de sus criterios, sino fundamentalmente del plan de estudio y del perfil profesional de la carrera, que integrara y compatibilizara todos los requerimientos de una manera abierta, flexible, dinámica, y permitiera la constante actualización y enriquecimiento del diseño curricular?

En este sentido resultó de especial interés el trabajo que reporta las experiencias de la estructuración de las disciplinas en la lógica del análisis sistémico (reshétova, 1988), a partir del cual fue necesario precisar la definición de sistema. Un sistema es un todo organizado o complejo: un conjunto o una combinación de cosas o partes que constituyen una totalidad compleja o unitaria.

A partir de los principios esenciales del enfoque sistémico (carnota, 1985), estudiar la disciplina matemática como un sistema implica las siguientes consideraciones:

- Estudiar la disciplina objeto de investigación como un todo y al mismo tiempo como una composición de partes llamadas subsistemas, entre las que se seleccionaron por su importancia: los objetivos, los contenidos y el proceso de asimilación.
- Identificar el papel relativo de cada uno de los subsistemas dentro del sistema total, es decir el papel rector de los objetivos, los que a su vez se reajustan en cierta medida con las otras componentes del sistema.

---

[1] La estrategia a la que se hace referencia fue defendida como tesis de la Maestría en Ciencias de la Educación Superior, con mención en Docencia Universitaria e Investigación Educativa en el CEPES, con el título "Una estrategia de articulación interdisciplinaria para el perfeccionamiento curricular en la Educación Superior", en diciembre de 1998.

- Identificar las propiedades y los objetivos del sistema, sus subsistemas y elementos, así como la interrelación positiva o negativa de esa red de propiedades. Para identificar y expresar los objetivos y contenidos de la disciplina matemática se parte de las necesidades del plan de estudio y del perfil profesional de la carrera, respetando siempre la lógica e integridad de la ciencia.
- Estudiar e identificar las leyes y los principios que rigen el comportamiento del sistema y revelar cómo lograr respuestas dadas en el mismo, a partir de la introducción de determinados estímulos. El estudio de estos principios que rigen el diseño de la disiciplina se realiza adecuándose a las necesarias transformaciones del plan de estudio y del perfil del profesional de la carrera, identificando qué debe aportar la disciplina a la carrera en un momento dado.
- Estudiar la interacción del sistema con el medio, o sea aquellos elementos, propiedades y relaciones que estando de alguna forma conectados con el sistema no pertenecen a él, es estudiar cómo se establecen las relaciones troncales, horizontales y verticales con las restantes disciplinas del plan de estudio, teniendo en cuenta las necesidades de la práctica profesional.
- Estudiar la estructura y las características del sistema, sus subsistemas y elementos en el tiempo y en el espacio significa establecer la estructura de la matemática, de sus asignaturas y temas, en sus tres componentes principales, a partir de los nodos de articulación con las restantes disciplinas y de las invariantes de contenido que se puedan precisar, teniendo en cuenta las precedencias necesarias, para lograr así una organización lógica, integrada, articulada y sistémica de la disciplina.
- Introducir la posibilidad de estudiar el propio sistema como parte de un sistema mayor, el plan de estudio y al mismo tiempo estudiar las asignaturas y los temas que la componen como si fueran sistemas, siguiendo todos una estructuración articulada que respete la jerarquía, teniendo en cuenta los requerimientos de acuerdo a la precedencia y a la lógica de la disciplina para esa carrera.
- Introducir la posibilidad de descripción del sistema empleando distintos niveles o enfoques, con infinidad de puntos de vista, cada uno de los cuales reflejan una parte de la estructura compleja del sistema y de sus relaciones, como por ejemplo: el modelo pedagógico de referencia, la articulación interdisciplinaria, la articulación intradisciplinaria, las relaciones de la carrera con la disciplina, las componentes académica-laboral e investigativa, etc. Todas estas descripciones del sistema resultan muy útiles para profundizar en el conocimiento del objeto de investigación.

En el enfoque sistémico se opera mediante aproximaciones sucesivas las cuales, en determinado momento del proceso, pueden ser descripciones intencionadas y necesariamente incompletas, pero que constituyen solo un paso intermedio hacia descripciones más completas e integrales (Carnota, 1985). Si se tiene en cuenta que el conocimiento obtenido acerca del sistema en cada paso de la investigación se diferencia de las representaciones utilizadas en la etapa previa, se puede considerar exitosa la investigación en la medida en que disminuye la diferencia entre los conocimientos obtenidos sobre el sistema para dos representaciones sucesivas. Es a partir del estudio de las bases del método sistémico que se decidió utilizar sus principios generales para el análisis de la articulación interdisciplinaria en el perfeccionamiento curricular. Sin embargo en el transcurso y desarrollo de la investigación fue necesario tomar partido respecto a la concepción de curriculum que se estaba considerando, lo que llevó a la búsqueda y el análisis de las diferentes concepciones de curriculum entre las que se seleccionó la siguiente:

- Curriculum como un proyecto sistematizado de formación y un proceso de realización, a través de una serie estructurada y ordenada de contenidos y experiencias de aprendizaje, articulados en forma de propuesta político-educativa que propugnan diversos sectores sociales interesados en un tipo de educación particular, con la finalidad de producir aprendizajes significativos que se traduzcan en formas de pensar, de sentir, valorar y actuar frente a los problemas complejos que plantea la vida social y laboral en un país determinado. El curriculum, desarrollado en dos planos fundamentales: el estructural-formal y el procesual-práctico, que consiste para la universidad de tres momentos fundamentales: el perfil profesional, el plan de estudio y el programa docente (González O., 1994).

Sin embargo, la propia autora refuerza la actualidad que tiene la búsqueda de la necesaria interrelación dialéctica entre teoría, diseño y desarrollo en la práctica de un curriculum y el fortalecimiento de las investigaciones en este campo, de modo que se alcance una mayor comprensión de las particularidades de su ejecución en las diferentes carreras, niveles educativos y modalidades, y la elevación del nivel académico de profesores y funcionarios que enfrentan la problemática de formación (González, 1994).

Desde este momento se empiezan a establecer las pautas de la contradicción con el método empleado, pues aunque el enfoque sistémico aportaba todo lo necesario para un diseño curricular en su carácter de proyecto, no ofrecía aquellos elementos del diseño curricular como proceso que permitieran llevarlo a la práctica con efectividad, a partir de los intereses y realidades del grupo de estudiantes y del claustro de profesores en los que la motivación, la preparación y el compromiso eran imprescindibles para el logro de los objetivos propuestos. Fue entonces necesario buscar información en esta otra dirección a partir de las diversas experiencias que ya existían acerca de la reformulación del curriculum, y entre ellas se profundizó en la propuesta de stenhouse, de la que se considera importante señalar los siguientes aspectos extraídos del prólogo de josé gimeno sacristán al libro "investigación y desarrollo del curriculum" (Stenhouse, 1991)

- La necesidad de un marco flexible para la experimentación e innovación del curriculum.
- El concepto de curriculum como proyecto a experimentar en la práctica.
- El proceso de desarrollo del curriculum en un marco estimulante de energías creadoras y de compromiso de los profesores.
- La diferenciación entre programas curriculares ceñidos a una selección y secuencia de contenidos a diferencia de proyectos curriculares como una síntesis de posiciones epistemológicas, psicológicas y educativas.
- El curriculum como palanca de transformación y de formación del profesorado.
- Si se quiere que una determinada visión de lo que es una parcela del conocimiento y de la cultura se plasme en el aprendizaje de los alumnos, si quiere modelarse una práctica educativa de acuerdo con una concepción psicológica del alumno y del aprendizaje, si se pretende engarzar el aprendizaje escolar con el contexto social, estas ideas tienen que estar plasmadas en la selección, presentación y estructuración de los propios contenidos del curriculum, pues este es el instrumento inmediato que condiciona la actividad didáctica.
- La perspectiva integradora de stenhouse, tan sensible además al objetivo de que curriculum y desarrollo del propio profesor vayan unidos, no podía ser sino crítica al modelo curricular de objetivos que confunde la naturaleza del conocimiento y no puede ser instrumento para el perfeccionamiento profesional del profesor (gimeno, 1983).
- El curriculum, según stenhouse, es el medio por el que el profesor puede aprender su arte. Es el medio a través del que puede adquirir conocimiento, es el medio gracias al que puede aprender sobre la naturaleza de la educación. Es recurso para poder penetrar en la naturaleza del conocimiento. Es, en definitiva, el mejor medio por el que el profesor, en cuanto tal, puede aprender sobre todo esto, en tanto el curriculum le capacita para probar ideas en la práctica, gracias más a su propio discurso personal que al de otros.
- El desarrollo curricular debe ser tratado como un proceso de investigación educativa siendo la evaluación el proceso de descubrir la dinámica, y no solo los resultados pretendidos *a priori por el modelo de objetivos,* de todo ese proceso.

El centro de esta reformulación del curriculum planteada y practicada por stenhouse cubre precisamente aquellos aspectos de los que adolecía la propuesta que se había presentado anteriormente bajo el método del enfoque sistémico, pero no solo eso, sino que además niega prácticamente los principios de jerarquía, integridad y diversidad de descripciones que se habían utilizado como referencia, su método de investigación entra en contradicción de manera esencial con el enfoque sistémico. Todo el tratamiento del curriculum de stenhouse se basa en un modelo de investigación en la acción que llevó a cabo en un proyecto de humanidades, al que se le critica precisamente la libertad en demasía que le otorga a la reformulación del curriculum.

¿en que consiste la estrategia que se defiende y cuáles son los presupuestos que se deben tener presentes?

Se considera el enfoque histórico-cultural como la base psicopedagógica fundamental de un diseño curricular que se propone aprendizajes significativos de una disciplina en una carrera dada, en el que estén presentes un conjunto de relaciones: la interrelación entre las disciplinas del plan de estudio de la carrera con los profesores, los expertos y los estudiantes, la interrelación entre los profesores de las diferentes disciplinas, los expertos y los estudiantes, la relación entre las propias disciplinas, la relación entre cada sujeto consigo mismo, y la relación entre los objetos, los sujetos y los métodos utilizados en la investigación. Se produce así esta nueva concepción a partir de una integración dialéctica que de forma relativa, en esta fase de la investigación, cubre las expectativas planteadas. La estrategia consiste en constituir un grupo de profesores y estudiantes que sientan el problema del diseño curricular como propio, en la medida en que se hacen conscientes de que el diseño en curso puede mejorarse, esto los compromete con la necesidad de la transformación no solo del diseño curricular sino de ellos mismos y de sus concepciones, como principales ejecutores de este proceso.

A partir de la creación del grupo de investigación en la acción, luego de establecer la descripción del sistema que se va a considerar y teniendo en cuenta la necesidad de integrar los resultados obtenidos en cada una de las descripciones anteriores respetando los principios de jerarquía e integridad, quedan establecidas las pautas para el perfeccionamiento del diseño curricular en el plan de estudio de la carrera, en un proceso continuo de construcción que se lleva a efecto mediante el intercambio y discusión, en el que se realimenta y reajusta constantemente la ejecución de lo acordado, lo que permitirá desarrollar no solo la disciplina, sino también y esencialmente a los docentes y estudiantes que participan directamente en la investigación que son al mismo tiempo los sujetos y conjuntamente con el curriculum, objeto de transformación en este proceso.

Conclusiones

En el trabajo se presentan los elementos esenciales que se han tenido en cuenta en el proceso construcción de una estrategia de diseño curricular de una disciplina en un plan de estudio de una carrera dada, como consecuencia y de manera simultánea al desarrollo histórico del proceso de investigación, a partir de la necesidad de abarcar nuevos aspectos del problema.

1. Se identificó el método del enfoque sistémico como el que aporta los elementos fundamentales (el principio de jerarquía, el principio de integridad y la diversidad de descripciones del sistema) para el perfeccionamiento curricular de una disciplina en una carrera dada teniendo en cuenta la articulación interdisciplinaria, cuyos resultados se fueron corroborando en la práctica.

2. A partir de la utilización del enfoque sistémico en el diseño curricular surgió la necesidad de hacer una nueva descripción de la disciplina como sistema; la descripción desde el modelo educativo que sirve de referencia al diseño curricular a partir de las exigencias del profesional que se quiere formar y de la necesaria capacitación e implicación de los

docentes, lo que trajo aparejado el compromiso con una concepción de curriculum acorde a estas exigencias. Del análisis de diferentes experiencias y propuestas curriculares apareció utilizado un nuevo método: la investigación en la acción, que aportaba todos aquellos elementos que se necesitaban, pero que entraba en franca contradicción con el método anteriormente utilizado.

3. Se hace necesario profundizar en cada uno de ellos, cuál es su esencia, en que medida se contraponen. ¿puede ser sustituido uno por otro? ¿en qué medida se presuponen? ¿es necesaria y posible una conciliación?

Se produce así una estrategia que concilia, a partir de una integración dialéctica, los métodos del enfoque sistémico y la investigación en la acción, como necesarios y suficientes para un diseño curricular que contemple los presupuestos considerados. En ella se considera un análisis de la disciplina como sistema que respete la jerarquía del modelo del profesional y su integridad a partir de una diversidad de descripciones del mismo, pero esta búsqueda de las diferentes descripciones del sistema se concibe bajo el método de la investigación en la acción por un grupo comprometido con la problemática del diseño curricular, que a través de la construcción colectiva deje una huella significativa en los profesores, los estudiantes y los expertos involucrados, al mismo tiempo que logra como resultado la construcción de un curriculum que los compromete a todos.

La estrategia propuesta que ha sido concebida en la investigación realizada para la disciplina matemática en la carrera de ingeniería en automática continúa en este momento en una nueva fase de experimentación en la práctica.

Referencias y bibliografía

Bertalanffy, I. Von teoría general de los sistemas. Fundamentos, desarrollo, aplicaciones. Fondo de cultura económica. México, 1976.

Castañeda, A. E. Enfoque sistémico del diseño curricular. Síntesis metodológica. Conferencia sobre diseño curricular del II taller iglu-caribe. Universidad Simón Bolívar, Venezuela, 1998.

Carnota, O. Proyección de sistemas automatizados de dirección. Academia de ciencias. Cuba, 1985.

Colectivo de autores. Investigación participación. Cuarto seminario latinoamericano ceaal, 1989.

Fdez. De Alaiza, B. La articulación interdisciplinaria en una estrategia de perfeccionamiento curricular para la educación superior. Tesis de maestría, Cepes, Universidad de la Habana, 1998.

Gimeno-Sacristán, j el curriculum: una reflexión sobre la práctica. Universidad de Valencia. Morata, madrid, 1989.

González, O. Currículo: diseño, práctica y evaluación. Cepes, Universidad de la Habana, 1994.

Reshetova, Z. A. Selección de lecturas "análisis sistémico aplicado a la educación superior", universidad .entral de las villas, 1988.

Sadovsky, V. N. Y otros. Teorías del conocimiento científico. Ciudad de la Habana, 1971.

Stenhouse I. Investigación y desarrollo del curriculum. Tercera edición, Ediciones Morata, Madrid, 1991.

Nuevas razones para la introducción de la Lógica Matemática en los planes de estudio de ingeniería: Un ejemplo elocuente

Rafael Espín Andrade (espin@ind.ispjae.edu.cu)
Depto. de Matemática, Facultad de Ing. industrial
ISPJAE – Cuba

Eduardo Fernández González (eddyf@uas.uasnet.mx)
Universidad de Sinaloa
México

Resumen

El profesor de la Universidad de Barcelona y presidente de la SIGEF Dr. Jaime Gil Aluja expresó la esencia de la Matemática Difusa a través de lo que llamó el principio de la simultaneidad gradual:

``...el principio del tercio excluso aparece, junto con otros, dominando el pensamiento investigador que ha ido utilizando un lenguaje matemático derivado del mismo y cuyo máximo exponente (pero no el exclusivo) ha tenido como sustento el sistema binario y la matemática mecanicista. La superación de este principio y su sustitución por otro que hemos denominado ``Principio de simultaneidad gradual, ha permitido pasar de ``la'' lógica booleana a ``unas'' lógicas multivalentes, entre las cuales se destaca la lógica borrosa. ''

La aplicación de este principio ha dado lugar a un abundante material teórico que se da en llamar ``Matemática Borrosa o Difusa'' y a toda una tecnología de aplicación en las mas diversas ramas incluyendo la economía. La utilización del Paradigma de la Matemática Difusa en cada vez mas ramas de la ciencia fundamental y aplicada, constituye una auténtica revolución científica que esta teniendo lugar en nuestros tiempos.

Con el propósito de dar elementos nuevos sobre la necesidad de la introducción de la Lógica Matemática en los planes de estudio de ingeniería el presente trabajo explica la esencia y la necesidad de la Matematica Difusa e ilustra a través del proyecto de investigación ``Pronóstico del resultado distributivo de una negociación'' las posibilidades de este nuevo paradigma científico.

Bibliografía Fundamental

1. Gil Aluja, J. ``Lances y Desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la Decisión''. Comunicaciones del Congreso de la Sociedad Internacional de gestión y economía fuzzy, Buenos Aires.1996.
2. Aranda, J y otros. ``Lógica Matemática''.Sanz y Torres.1993.
3. Dubois, D and H.Prade .``Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications''. Academic Press Inc''.1980.
4. Mc Neil, D and P.Freiberger.``Fuzzy Logic''. Simon & Schuster.1993.
5. Von Altrock, Constantin.``Fuzzy Logic and Neurofuzzy Applications in Bussines and Finance. Prentice Hall.1995.
6. Bazerman, M and M.Neale.``Negotiating Rationally''.The Free Press.1992.

8 Roth, Alvin E. "Bargaining Experiments", Handbook of Experimental Economics,253-348. John Kagel & Alvin E. Roth, editors, Princeton University Press.1995.

9 Kuhn,T. S.La Estructura de las revoluciones científicas. Fondo de cultura económica.México.1995.

10 Nickelson, B y otros. Enseñar a pensar. Editorial Paidós. Barcelona.1993

11 Resnick, L y W. Ford. La enseñanza de la Matemática y su fundamento psicológico.Editorial Paidós.Barcelona.1990.

Esencia y necesidad de la Matemática Difusa

El desarrollo de disciplinas y tecnologías como la inteligencia artificial, el control automático, la psicología, la biología, la sociología, la economía, las finanzas y la administración de negocios, reclama la necesidad de formalización del conocimiento impreciso, vago, o expresado exclusivamente de manera lingüística. Lo que se ha dado en llamar Matemática Difusa o Borrosa es un resultado de esa necesidad.

Un Paradigma Científico es el conjunto formado por una o más realizaciones científicas pasadas, que una comunidad científica reconoce durante cierto tiempo, como fundamento para su practica posterior. La transición sucesiva de un paradigma a otro mediante una revolución es el patrón usual de desarrollo de la ciencia madura.(1)

La utilización del Paradigma de la Matemática Difusa en cada vez mas ramas de la ciencia fundamental y aplicada, constituye una auténtica revolución científica que esta teniendo lugar en nuestros tiempos(2-8). La primera publicación sobre el tema corresponde a quien se considera el creador de esta disciplina, el profesor Lofti A. Zadeh de la Universidad de Berkeley, natural de Bakú, capital de Azerbaidzhan, en el año 1962 con el título ``De la Teoría de circuitos a la Teoría de sistemas´´ en las comunicaciones de una conferencia de Radioingeniería(5).

Hasta el año 1970 solo se habían publicado 69 artículos. Sin embargo la cifra ya ascendía a 600 en 1975 y a 1500 en 1979(5).En el año 1978 se creó la revista especializada en el tema ``Fuzzy sets and Systems´´ de la editorial North Holland. En la actualidad son virtualmente imposibles tales cómputos. Su utilización profusa y exitosa en la automatización de procesos disímiles, con presencia en la industria y sobre todo en el mercado,le dan a esta Teoria el aval de la aplicación práctica. Actualmente proliferan los congresos, asociaciones e iniciativas diversas como la ``Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy´´(SIGEF) y el ``Grupo Iberoamericano de Aplicaciones con Lógica Difusa´´ (GIAL),que celebró el pasado año un seminario internacional con la participación por vía satélite de 21 países.

El profesor de la Universidad de Barcelona y presidente de la SIGEF Dr. Jaime Gil Aluja expresó la esencia de la Matemática Difusa a través de lo que llamó el principio de la simultaneidad gradual:

``...el principio del tercio excluso aparece, junto con otros, dominando el pensamiento investigador que ha ido utilizando un lenguaje matemático derivado del mismo y cuyo máximo exponente (pero no el exclusivo) ha tenido como sustento el sistema binario y la matemática mecanicista. La superación de este principio y su sustitución por otro que hemos denominado ``Principio de simultaneidad gradual´´, ha permitido pasar de ``la´´ lógica booleana a ``unas´´ lógicas multivalentes, entre las cuales se destaca la lógica borrosa (2). ´´

La aplicación de este principio ha dado lugar a un abundante material teórico que se da en llamar ``Matemática Borrosa´´ y a toda una tecnología de aplicación en las mas diversas ramas incluyendo la economía(2-8).

En la lógica booleana un predicado es una función p definida sobre un universo X que toma valores en el conjunto {0,1} , por ejemplo la frase declarativa ``x es amigo de y´´ se modela de acuerdo a esta lógica como el predicado p definido sobre el conjunto de pares (x,y) tal que p(x,y) es igual a 1 si x es amigo de y , y en el caso contrario es igual a 0.En lo adelante se identifican los predicados con cualquiera de las frases que modelan. Las operaciones $\wedge$, $\vee$, y $\neg$ entre predicados permiten modelar respectivamente afirmaciones compuestas de la manera siguiente:

- $p \wedge q$ modela p y q y se denomina conjunción.
- $p \vee q$ modela p y/o q y se denomina disyunción.
- $\neg p$ modela no p y se denomina negación.

Su definición viene dada por ``tablas de verdad'' que establecen el valor veritativo de $p \wedge q$, $p \vee q$ y $\neg p$ a partir de los valores correspondientes a p y q , son por lo tanto funciones cuyo dominio es {0,1}x{0,1} ({0,1} para $\neg p$) y su imagen {0,1}(3).

Por ejemplo, si p(x,y) es el predicado correspondiente a la frase ``x es amigo de y '' , entonces la frase ``x es amigo de y , pero y no es amigo de x'' se modela a través del predicado $p(x,y) \wedge \neg p(y,x)$.

El conjunto de los predicados así definidos con las operaciones $\vee$,$\wedge$,y $\neg$ satisface una serie de propiedades que lo dotan de una estructura que recibe el nombre de Algebra de Boole, una de ellas es el llamado Axioma del tercio excluso (tercero excluido) que plantea la validez de $p \vee \neg p$ cualquiera sea el predicado p, equivalente al llamado Axioma de no contradicción que plantea la veracidad de $\neg (p \vee \neg p)$ para todo p.

Para poner en practica el llamado ``Principio de simultaneidad gradual'' se definen nuevas lógicas donde un predicado es ahora una función del universo X en el intervalo [0,1], y las operaciones $\wedge$,$\vee$,y $\neg$ se definen de modo que restringidas al conjunto {0,1}x{0,1} ({0,1} para $\neg$) se obtengan las operaciones de la lógica booleana y se satisfagan parte de los axiomas de Algebra de boole sin incluir por supuesto el Axioma del tercio excluso (4).

Una de estas lógicas se obtiene definiendo las operaciones del siguiente modo:

- $u(p \wedge q)=u(p).u(q)$
- $u(p \vee q)=u(p)+u(q)-u(p).u(q)$
- $u(\neg p)=1-u(p)$

donde u(p) es el valor de verdad del predicado p.

La lógica así definida no es distributiva y satisface las propiedades conmutativa, asociativa, identidad y las leyes de De Morgan y suele llamársele lógica probabilística(9).

Si se establece:

- $u(p \wedge q)=\min(u(p),u(q))$
- $u(p \vee q)=\max(u(p),u(q))$
- $u(\neg p)=1-u(p)$

se obtiene la lógica mas utilizada y por ello llamada en sentido estrecho Lógica Difusa.

Desde un punto de vista conjuntista la idea básica es la sustitución de la función indicadora o característica de un conjunto con imágenes en {0,1},por el mas general de función de pertenencia con imágenes en [0,1].O sea un conjunto difuso sobre el universo X es una función definida en X con imágenes en [0,1].

Las definiciones de las operaciones unión, intersección y complemento de conjuntos difusos son operadores que se seleccionan análogamente a la forma en que se escogen las conectivas lógicas. Clásicamente suelen seleccionarse los operadores máximo, mínimo y la resta de 1,respectivamente.

Esta generalización de la teoría de conjuntos, que se corresponde con las lógicas asociadas al principio de simultaneidad gradual, del mismo modo que la teoría clásica con la lógica booleana, traza a su vez el camino para una generalización de los mas diversos campos de las matemáticas, en consonancia con las necesidades anteriormente planteadas y por tanto amplía las posibilidades de aplicación de las mismas a terrenos donde antes no era posible hacerlo o se hacía de manera poco efectiva.

El hecho de que las ideas básicas de este nuevo paradigma y su aplicación tecnológica partan de la comprensión y la superación dialéctica de la lógica booleana apunta junto a otras realidades hacia la introducción de la lógica matemática en los planes de estudio de ingeniería, en momentos en que otros hechos tecnológicos posibilitan y hacen necesaria la reformulacion de los objetivos y por ende de los contenidos de tales planes(10,11).

A partir de estos conocimientos en muy poco tiempo es posible el aprendizaje de los elementos fundamentales de la Matemática Difusa incluso en la enseñanza de pregrado. La experiencia acumulada por los autores en la impartición del tema en cursos de postgrado y maestrías les ha formado la opinión de que en caso contrario es necesario dedicar mucho tiempo o conformarse con una comprensión superficial del material que no permite ni su aplicación practica ni la posterior profundización en el tema.

El problema del pronóstico del resultado distributivo de una negociación

El proceso negociador transcurre en dos dimensiones inseparables, pero que necesitan de un estudio independiente para luego ser interrelacionados con vistas a la proyección estratégica y la toma de decisiones durante la negociación, la dimensión integrativa que busca soluciones ventajosas para todas las partes basándose en sus diferencias en prioridades, creencias, actitud hacia el riesgo, ansiedad, etc., y la distributiva que busca un acuerdo en situaciones donde las ventajas para una de las partes, son desventajas para las restantes (9).

Los modelos matemáticos relacionados con la negociación pueden dividirse en tres de acuerdo al objetivo que persiguen:

Normativos: Pretenden normar el comportamiento de las partes y por lo tanto dictaminan cual ``debe ser´´ el resultado de la negociación.

Descriptivos: Pretenden describir tal comportamiento y por lo tanto prever el resultado.

Consensuales: Pretenden lograr el consenso, sin proponerse describir o normar el proceso, generalmente a través de la generación de posibles soluciones basándose en diversas técnicas y resultados de la teoría de la decisión, la inteligencia artificial, etc. Aquí se incluyen los modelos tácticos y los modelos de agregación.(12)

Los modelos existentes, y los sistemas de soporte a la negociación frecuentemente tienen propósitos combinados, como es el caso de los modelos asimétricos(10), pero generalmente pueden clasificarse de acuerdo al propósito predominante. Este es el caso también de los llamados modelos tácticos que son esencialmente consensuales, pero tienen generalmente en cuenta de algún modo ciertos efectos de aprendizaje en el conocimiento del problema y de los negociadores(12).

Los modelos de regateo que son los que abordan la dimensión distributiva de la negociación son muy útiles, pues prever que ``porción´´ de los beneficios debe corresponder o corresponderá a cada parte facilita la decisión de los posibles ``partners´´ y la evaluación y decisión de propuestas y contrapropuestas. Puede ser también una herramienta consensual valiosa para la obtención de un acuerdo.

Los llamados modelos económicos de regateo asumen que existe una zona de compromiso, que puede ser identificada y permanece estable en el tiempo lo que constituye una seria limitación(12-14). El resto de los modelos existentes se basan en la teoría de juegos. En ellos cada una de las partes involucradas reciben el nombre de jugadores.

La expresión de un juego en forma normal a través de una matriz de pagos, y la utilización de conceptos como el de punto de equilibrio, en sus diversos casos y acepciones han extendido el criterio de que las respuestas proporcionadas por la teoría de juegos son frecuentemente confusas y ambiguas(14-17).

La Teoría de Von-Neumann y Morgenstern sobre juegos n-personales a partir del concepto de función característica, y el mas general de función superaditiva, y sus posteriores desarrollos no escapa a estas dificultades, pero se aviene mas al proceso de regateo. Han surgido y siguen surgiendo en este marco conceptos de solución que no logran el consenso de los estudiosos de la Teoría de Juegos y mucho menos se aplican en la práctica, cuya principal dificultad está o bien en la inexistencia frecuente de solución en el caso del llamado Core o la existencia de un conjunto muy amplio de tales soluciones(14-17).

Partiendo de la función característica de se han propuesto ``valores´´ como soluciones únicas para los juegos n-personales a partir de diversas consideraciones y se propone su uso combinado o selectivo según el caso, pues no son satisfactorios en todos los ejemplos(11); el concepto mas elaborado, extendido y utilizado de este tipo es el Valor de Shapley, cuya justificación axiomática e intuitiva ha sido criticada(16).

La generalidad de los conceptos de partida de la teoría de juegos n-personales no ha sido aprovechada pues los enfoques deterministas o probabilísticos no han permitido brindar modelos de solución que se acerquen a una racionalidad simple y real de la dimensión distributiva del proceso negociador. Esto se refleja en los modelos de manera diferente, mientras el carácter determinista del Core no le permite tener en cuenta las posibilidades de concertación de un acuerdo en cada uno de los distintos conjuntos de jugadores, la interpretación probabilística del valor de Shapley le da gran importancia al orden en que los jugadores ``llegan´´ a la negociación considerándola aleatoria y uniformemente distribuida, lo que beneficia inapropiadamente a los jugadores cuyas circunstancias objetivas le confieren menor capacidad de regateo. De modo, que no existen modelos matemáticos que permitan atrapar la lógica del regateo y por lo tanto predecir razonablemente el resultado distributivo de una negociación.

A juicio del los autores el propósito de alcanzar un concepto consensual de solución de un juego n-personal a partir de una funĉión superaditiva debe pasar por un cambio importante en la perspectiva metodológica que permita atrapar la lógica del regateo y consecuentemente permitir el pronóstico distributivo de una negociación.

Proyecto de Investigación ``Pronóstico del resultado distributivo de una negociación"

La utilización del paradigma de la Matemática Difusa permite abordar eficientemente el problema del pronóstico del resultado distributivo de un proceso negociador como explican por si mismos, el problema, la hipótesis y los objetivos de este proyecto:

Problema

¿Cómo puede obtenerse un modelo matemático que partiendo de una estructura dada de un negocio y las circunstancias objetivas que lo caracterizan, permita pronosticar el resultado distributivo de una negociación, y por tanto facilitar la toma de decisiones antes del proceso y durante el mismo?

Objetivo General

Crear un modelo matemático que partiendo de una estructura dada de un negocio y las circunstancias objetivas que lo caracterizan, permita pronosticar el resultado distributivo de una negociación, y por tanto facilitar la toma de decisiones antes del proceso y durante el mismo.

Hipótesis

El empleo de la Matemática Difusa, a partir de las ideas básicas de la teoría de Vonn Neumann y Morgestern para juegos n-personales permite obtener un modelo matemático para pronosticar el resultado distributivo de una negociación.

Objetivos Específicos

1. Elaborar a partir de la bibliografía un grupo de presupuestos que caracterice a nivel lingüístico la lógica del proceso de regateo.
2. Validar los presupuestos obtenidos, a través de la consulta a expertos.
3. Crear un modelo lógico difuso que se adapte a tales presupuestos.
4. Elaborar un programa que implemente el modelo lógico obtenido.
5. Validar el modelo lógico mediante la realización de experimentos de regateo entre negociadores.
6. Aplicar el modelo lógico obtenido a problemas reales de negociación.

Proposiciones que caracterizan la lógica del regateo

Las siguientes proposiciones son los presupuestos básicos del modelo elaborado y expresan una lógica simple y real del regateo que puede apreciarse en las ideas de Fisher y Ury sobre la negociación por méritos y el papel del BATNA y encuentran apoyo en otros clásicos que abordan integralmente la negociación (9,13,18):

1. Un negociador tiene capacidad de regateo si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:
   - El aporte de la institución que representa al negocio en discusión es importante.
   - Tiene alternativas ventajosas y posibles si no se obtiene un acuerdo, o en su lugar el aporte de la institución que representa es muy importante.
2. Cualquier incremento en el aporte de una de las partes al negocio, o el acrecentamiento del beneficio que reportarían sus alternativas al mismo produce un incremento en su capacidad de regateo.
3. El beneficio que obtiene cada parte es igual a la cantidad que puede obtener sin la cooperación de las partes restantes mas otra aproximadamente proporcional a su capacidad de regateo.
4. Un acuerdo es posible si y solo si todas las partes son importantes para el negocio y el beneficio que cada cual recibe es también importante para él.

Conclusiones y Recomendaciones sobre el proyecto de investigación

La lógica seleccionada para traducir los presupuestos fue la lógica probabilística pues ciertas propiedades de la misma se corresponden con el presupuesto número 2 (19).

El presupuesto número 3 conduce a una ecuación de la forma $g(X)=X$, donde X es la matriz de los beneficios del jugador i en el marco de negociación j. La forma de solución implementada en el programa es un proceso iterativo que supone que g es una aplicación contractante para resolver la ecuación, tal hipótesis no ha podido ser demostrada por lo que fue necesaria la realización de corridas experimentales para comprobar la convergencia del proceso(19).

La validación del modelo a través de experimentos de regateo fue llevada a efecto en el seno de un curso para negociadores que se realizó recientemente. Se trabaja simultáneamente en la aplicación del modelo a tres negociaciones diferentes correspondientes a la industria farmacéutica, la industria pesquera y los servicios internacionales.

Después de cumplidos los objetivos específicos hasta el número 5 se pueden establecer las siguientes conclusiones y recomendaciones:

1. El trabajo científico realizado permite afirmar que el modelo propuesto es un modelo eficiente de pronóstico de la negociación, y por lo tanto una herramienta útil para facilitar las decisiones antes del proceso y durante el mismo.

2. La racionalidad simple y real que sustenta lo hacen a juicio de los autores un candidato importante a paradigma consensual de solución de un juego n-personal para lo cual es sumamente importante el trabajo encaminado a la demostración formal de su existencia y unicidad para cualquier juego. Se trabaja en una comprobación experimental de mayor alcance utilizando un algoritmo genético para verificar la inexistencia de juegos sin solución.

Conclusiones

1. La Matemática Difusa constituye ya un nuevo paradigma científico y tecnológico que debe ser tenido en cuenta para la confección de los nuevos planes de estudio de ingeniería.
2. El presente trabajo ilustra la necesidad de la habilidad de traducción de frases declarativas al lenguaje de la lógica matemática, y de la comprensión de las ideas fundamentales del paradigma de la matemática borrosa para lo cual es imprescindible la comprensión de las ideas de la teoría interpretativa del calculo de predicados.
3. A partir de la introducción en los planes de estudio de ingeniería de los conocimientos anteriormente enunciados se facilita la comprensión de las ideas básicas de la Matemática Difusa.
4. Es conveniente la elaboración de propuestas concretas de modificaciones en los planes de estudio de cada una de las carreras de ingeniería que permitan la apropiación por parte de los futuros ingenieros de este paradigma.

Referencias Bibliográficas.

Kuhn,T. S.La Estructura de las revoluciones científicas. Fondo de cultura económica.México.1995.

Gil Aluja, J. ``Lances y Desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la Decisión´´. Comunicaciones del Congreso de la Sociedad Internacional de gestión y economía fuzzy, Buenos Aires.1996.

Aranda, J y otros. ``Lógica Matemática´´. Sanz y Torres.1993.

Dubois, D and H.Prade .``Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications´´. Academic Press Inc´´.1980.

Mc Neil, D and P.Freiberger.``Fuzzy Logic´´.Simon & Schuster.1993.

Von Altrock, Constantin.``Fuzzy Logic and Neurofuzzy Applications in Bussines and Finance. Prentice Hall.1995.

Communications of International Conference on Intelligent Technologies in Human-Related Sciences.León.Spain. 1996.

Kaufmann, A and J. Gil Aluja. ``Las matemáticas del azar y de la incertidumbre´´. Centro de Estudios Ramón Areces.1990.

Bazerman, M and M.Neale.``Negotiating Rationally´´.The Free Press.1992.

Nickelson, B y otros. Enseñar a pensar. Editorial Paidós. Barcelona.1993

Resnick, L y W. Ford. La enseñanza de la Matemática y su fundamento psicológico.Editorial Paidós.Barcelona.1990.

Jelassi, T y otros.``An Introduction to Group Decision and Negotiation Support´´. ------1991.

Raiffa,H. ``The Art and Science of Negotiation´´.Harvard University Press.1982.

Roth, Alvin E.(editor) ``Game -Theoretic Models of Bargaining´´, Cambridge.1985.

Roth, Alvin E. "Bargaining Experiments", Handbook of Experimental Economics,253-348. John Kagel & Alvin E. Roth, editors, Princeton University Press.1995.

Thomas, L.C.:``Games , Theory and Aplications´´.Ellis Horwood Series. Mathematics and its applications.1983.

Osborne, M and A.Rubinstein. ``Games with Procedurally Rational Players´´. American Economics Review.Vol 88.1998.

Fisher, R and W.Ury.``Getting to Yes´´. Boston.Editorial Houghton-Mifflin.1981.

Espin,R y E.Fndez.``La Matemática Difusa: Nuevo paradigma científico´´. Comunicaciones del III Taller internacional de enseñanza de la matemática para ingenieria y Arquitectura.ISPJAE. La Habana.1998.

Rediseño de un curso de Matemáticas Remediales

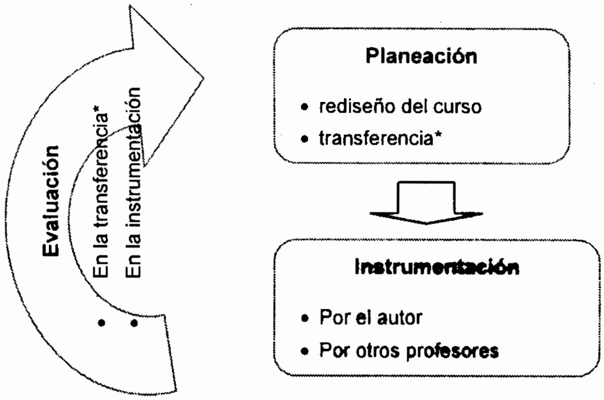
Blanca R. Ruiz Hernández, Francisco J. Delgado Cepeda
Departamento de Matemáticas, ITESM Campus Estado de México
México

Introducción

A medida que los objetivos de la educación han evolucionado hacia un aprendizaje multidimensional, el énfasis se ha desplazado del conjunto de conocimientos rígidos centrados en el dominio de técnicas y en el desarrollo de habilidades mecánicas, hacia el desarrollo de las llamadas habilidades intelectuales de alto nivel y la formación de actitudes que favorezcan la independencia, la autonomía y la toma de decisiones racional en situaciones cambiantes y de incertidumbre, como las que enfrenta el individuo actualmente en los ámbitos personal, ciudadano y profesional.

El compromiso que las instituciones educativas tienen con la sociedad se ha vuelto terriblemente difícil de cumplir a causa de la complejidad de los fenómenos a los que hoy se tienen que enfrentar. El Sistema ITESM ha plasmado su preocupación en un plan con objetivos a corto, mediano y largo plazos, en donde integra una serie de habilidades, definidas en una consulta con sus egresados, con un conjunto de valores y actitudes orientadas a formar personas comprometidas con el desarrollo de su comunidad, que a su vez sean competitivas internacionalmente en su área de conocimiento. La Misión 2005 del ITESM ha dado lugar a una serie de acciones que involucran una transformación en el perfil de sus profesores, de sus directivos y de su personal administrativo, así como a un rediseño de los currículos de las materias que se imparten enfocándolos al cumplimiento de sus objetivos a largo plazo.

En este contexto, el Proyecto Diálogo tiene como propósito concretar los objetivos de la Misión 2005 del ITESM dentro del salón de clases y en el ambiente académico mediante la incorporación de sus profesores al rediseño de los cursos que se imparten en la institución. El Proyecto Diálogo comprende un Programa de Desarrollo de Habilidades Docentes aunado a una serie de etapas en las que se definen el rediseño del curso, su instrumentación paulatina en el salón de clases, la transferencia* del curso a otros profesores y la evaluación y mejora constante del rediseño del curso.



* Por el término 'transferencia' nos referiremos a la adopción del rediseño de un curso por parte de un profesor que no participó en la elaboración del rediseño. La transferencia exige la construcción de marcos de referencia y el uso de herramientas conceptuales y metodológicas que sustentan los cambios propuestos, de manera tal que el profesor pueda adaptarlo a sus concepciones sin perder de vista los objetivos principales del rediseño y del curso.

Las etapas por las que un curso en rediseño debe pasar (que se resumen en la terna dorada de planeación-instrumentación-evaluación) no necesariamente se dan de manera lineal, una detrás de otra, sino que pueden ocurrir de manera simultánea e integral y se retroalimentan unas con otras.

En este espacio nos referiremos sólo a la descripción del rediseño (es decir a la planeación del curso por parte del autor) de un curso de Matemáticas Remediales, entendido como el curso que se ofrece a aquellos alumnos que no habiendo aprobado el examen de selección en el área de Matemáticas, desean cursar cualquier licenciatura en el ITESM. En el campus Estado de México, aproximadamente el 80% de los estudiantes que presentan ese examen tienen necesidad de cursar esta materia.

El Rediseño de curso

En el rediseño se contempla la incorporación de otras dimensiones del aprendizaje: además de los conocimientos, el profesor deberá considerar el desarrollo de habilidades actitudes y valores a su práctica cotidiana dentro del salón de clases. La organización de un curso con tales características se convertiría en algo sumamente complejo si no contáramos con un paquete computacional que nos permita organizar actividades a diferentes niveles y con diferentes aproximaciones, tener un acceso rápido y fácil a las actividades propuestas por los profesores y a los trabajos y proyectos que elaboren los estudiantes, establecer una comunicación efectiva fuera del salón de clases y hacer conexiones a otros paquetes o a archivos de la red. Es por ello que el rediseño se enmarcó con un fuerte impulso de la tecnología en el salón de clases y en el uso extendido de una base de datos inserta en una plataforma.

La adquisición y el desarrollo de las habilidades, actitudes y valores mencionados en la Misión no son propósito exclusivo de una sola materia o de una sola área dentro del ITESM. Cada materia en particular tiene la labor de identificar cuáles son las habilidades dentro de las que puede incidir de manera natural y vincularlas con la labor de otras áreas del conocimiento. Dentro del ámbito de nuestra materia, la dimensión matemática de la Misión 2005 está de acuerdo con el propósito de la matemática educativa, que es lograr que el estudiante desarrolle una cultura matemática dinámica, que le permita enfrentar situaciones, tanto familiares como inéditas, en las que se requieran la producción o la utilización de ideas matemáticas, que pueda hacer una valoración global de estas situaciones, y que logre definir varias opciones con sus respectivos costos y beneficios.

En matemáticas, el uso de la tecnología no sólo permite que los estudiantes y profesores tengan oportunidad de organizar sus propios avances bajo sus propias perspectivas, sino que también favorece la incorporación de herramientas tecnológicas a la práctica docente, en un aprendizaje que potencie la comprensión, aprovechando la conversión de diversos registros de representación en un ambiente de resolución de problemas. Utilizamos la resolución de problemas como una palanca para poner en movimiento una reflexión amplia que lleve a los estudiantes a considerar la pertinencia del desarrollo de una cultura matemática robusta.

Bajo ese objetivo, y puesto que nuestra perspectiva es la del profesor, definimos el rediseño desde los cuatro componentes generales que surgen cuando se considera el aula como espacio de trabajo y al profesor como el agente principal del proceso educativo: los objetivos, los aprendizajes, la metodología y la evaluación *(Rico, L.,1998)*.

Aprendizajes

El rediseño de Matemáticas Remediales se centra en desarrollar las habilidades mencionadas en la Misión 2005 sobre las que las experiencias de aprendizaje en matemáticas puedan incidir. Es decir sobre: la capacidad de aprender por cuenta propia, la capacidad de análisis, síntesis y evaluación el pensamiento crítico, la capacidad de identificar y resolver problemas, la capacidad de tomar decisiones, la creatividad, el trabajo en equipo, el aprecio por la cultura y la buena comunicación oral y escrita.

El contenido del programa no está concebido como una progresión de temas que deban estudiarse uno a continuación del otro. El profesor podrá modificar el orden de los contenidos y organizar la enseñanza en la forma que considere más adecuada para el aprendizaje de los estudiantes. Los módulos se enfocan a Álgebra, Geometría, Trigonometría y Funciones y Modelación. En cada módulo se dan indicaciones acerca de la forma de implementarlo, en general se recomienda:

* Diseñar su curso de manera que ningún contenido sea sacrificado o se deje en su totalidad para el final.
* Procurar que los estudiantes utilicen con frecuencia los conocimientos adquiridos con anterioridad.
* Contemplar el contenido del curso no necesariamente de manera explícita ni puntual, y manejarlo de forma que, junto con la metodología y los lineamientos, apunten a cumplir con los objetivos del curso.

Objetivos

* Facultar para un uso activo de las matemáticas (en particular de la Aritmética, el Álgebra, la Geometría y la Trigonometría) con un énfasis en la modelación de situaciones complejas y preparar para enfrentar con éxito los desarrollos más formales de los cursos de matemáticas posteriores.
* Articular los conocimientos de las áreas previas al Cálculo y al razonamiento estadístico para enfrentar situaciones con un alto grado de incertidumbre.
* Desarrollar una actitud de independencia, a partir de la valoración del trabajo propio, que permita el reconocimiento o la imposición de patrones matemáticos en situaciones familiares o novedosas.

Esto significa que el curso de Matemáticas Remediales tiene un carácter dual de medio y fin. Esto es, trata de:

a) **preparar** el estudio de las situaciones típicas del cálculo y el razonamiento estadístico, propiciando el planteamiento de preguntas que se responderán de manera formal en sus cursos posteriores dentro del ITESM

b) así como de hacer un **uso inmediato** de las matemáticas propias del curso en la toma de decisiones responsable en situaciones con un alto grado de incertidumbre.

Pero además, dentro de los objetivos está el de garantizar una comprensión de los temas matemáticos, que faculte para su uso, mediante el desarrollo de conocimientos y destrezas intelectuales que favorezcan la articulación de los aprendizajes de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría para resolver problemas, matemáticos y extramatemáticos, y profundizar en el estudio de los objetos propios de las áreas previas al Cálculo y al razonamiento estadístico. Así mismo, al crear estrategias propias para enfrentar problemas dentro y fuera de las matemáticas, conocidos o desconocidos, hace que se favorezca la decisión y la confianza para tener una actitud de independencia al resolver problemas.

Metodología+

Los **principios o lineamientos** del curso son las acciones que harán posible la concreción de los objetivos del curso y que justifican la metodología que estamos utilizando. Los principios son líneas que de manera longitudinal atraviesan todo el curso, que establecen

+ La metodología que aquí presentamos tiene como base la creación de un ambiente de resolución de problemas, tomada de *Ortega, et al (1998).*

vínculos entre las actividades y que se retoman en diferentes niveles en las actividades que se realizan durante todo el curso.

* Identificación, formulación y resolución de problemas a partir de situaciones complejas, dentro y fuera de las matemáticas, que impliquen un alto grado de incertidumbre, la aplicación de criterios múltiples y que pongan en juego un dominio de los estados de ánimo y la aceptación de tensiones no resueltas.
* Uso de enfoques y estrategias articuladas de resolución de problemas para generar e integrar conocimiento matemático, favorecer su asimilación y ayudar a distinguir lo esencial de lo menos importante.
* Estudio del comportamiento de las funciones favoreciendo su comprensión intuitiva y operacional, así como la transferencia y la representación e interpretación de una misma situación en diferentes registros.
* Exploración informal de las situaciones típicas del Cálculo y del razonamiento estadístico desde una perspectiva tanto gráfica como numérica y algebraica.
* Aplicación y valoración de las conexiones y las interacciones entre diversos temas matemáticos y entre las matemáticas y otras materias de las carreras de ingeniería y administración.
* Uso continuo del lenguaje y el simbolismo para comunicar, comprender, justificar y argumentar ideas matemáticas en diferentes modalidades de participación: individual, por equipo y grupal.
* Uso de paquetes computacionales como herramientas para hacer matemáticas.
* Evaluación y autoevaluación continua del aprendizaje con uso de perspectivas múltiples y poniendo énfasis en el proceso.

El contraste entre el análisis previo de las actividades propuestas basado en estos ***principios*** y un análisis posterior del curso logrado permitirán evaluar el logro de los objetivos del curso.

¿Qué entendemos por enseñar y aprender?

Nuestro enfoque metodológico es afín con el de la ingeniería didáctica de la escuela francesa de educación matemática en la que consideran que la práctica docente es «un trabajo comparable al de un ingeniero que, para llevar adelante un proyecto, usa el conocimiento científico y acepta someterse a un tipo de control científico, pero que al mismo tiempo se ve obligado a trabajar con objetos que son mucho más complejos que los refinados objetos de la ciencia y a los que debe atacar de una manera práctica con todos los medios a su disposición, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede ocuparse» *(Artigue & Perrin-Glorian, FLM, 1991)*. Así mismo, la perspectiva de Brousseau *(1986)* de la didáctica como «la descripción y la explicación de las actividades relacionadas con la comunicación de los saberes y las transformaciones, intencionales o no, tanto de los protagonistas de esta comunicación como del conocimiento mismo» nos da un marco de naturaleza distinta para concebir y realizar nuestro trabajo docente. El profesor ya no es el que tiene un conocimiento acabado y lo transmite fielmente.

En el ITESM el nuevo reto es convertirnos en una organización que aprende para cultivar conjuntamente habilidades intelectuales de alto nivel en todos sus integrantes y niveles. El rediseño es una invitación a emprender una reforma educativa imaginativa y muy exigente, que requiere una reconceptualización de lo que significa «tener clase». Para un profesor, 'enseñar' se referirá a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, condiciones que ayuden a cambiar su papel dentro de la clase, de pasivo a activo. Para un estudiante, 'aprender' significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento en su doble condición de herramienta y objeto *(Artigue, Douady et al., 1995)*. Para ambos, 'saber matemáticas' implicará atender esos dos aspectos del conocimiento:

- Como herramienta, los conocimientos matemáticos están inscritos en un contexto, influido por alguien, en un momento determinado: el estudiante debe tener disponibilidad funcional de las nociones y teoremas matemáticos que contempla el programa de estudio para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones.

- Como objeto, los conocimientos están descontextualizados y son atemporales: el estudiante debe ser capaz de formular definiciones, enunciar y demostrar teoremas e identificarlos como elementos de una ciencia: las matemáticas.

(Douady, 1995). Así pues, la clase ya no será labor exclusiva del profesor, el estudiante será un factor importante: lo queremos más participativo y más crítico, consciente de que todos los que estamos en la clase contribuimos a formarla pero también de que cada uno es determinante en sus propios aprendizajes y en los tiempos para lograrlos.

Una clase de matemáticas

El conocimiento debe ser uno de los principales elementos que determinan la relación entre un profesor y sus alumnos, pero la clase también es un sitio de interacción de costumbres y creencias de cada uno de sus participantes, es conveniente que se establezca un lenguaje común que nos proporcione un medio de referirnos a los aspectos importantes del aprendizaje en un ambiente propicio para la enseñanza y el aprendizaje desde la perspectiva descrita. Así, cada una de nuestras experiencias de aprendizaje dentro del salón de clases tendrá un doble propósito: aprender a crear y fomentar un ambiente de trabajo y aprender matemáticas. La planeación de una experiencia de aprendizaje, aunque integral, destaca estos dos niveles.

En cuanto al **Ambiente**, los profesores debemos poner en acción un conjunto de creencias que Pirie y Kieren *(1992)* resumen en cuatro principios:

- Aunque un profesor puede tener la intención de impulsar a los estudiantes hacia objetivos de aprendizaje matemático, estará consciente de que tal progreso puede no ser logrado por algunos estudiantes y puede no ser logrado como se esperaba por otros.
- Al crear un ambiente o proporcionar oportunidades a los alumnos de modificar su comprensión matemática, el profesor actuará sobre la creencia de que hay vías distintas para una comprensión matemática similar.
- El profesor estará consciente de que las distintas personas tendrán modos de comprensión distintos.
- El profesor sabrá que para cualquier tema hay diferentes niveles de comprensión y que éstos nunca se alcanzan 'de una vez por todas'.

Así mismo hay una propuesta para la organización del aprendizaje que se plantea en una serie de materiales *(Clubes de Matemáticas de los CECyT 6, 7, 9 y 11, 1995*) que se comentan con los alumnos. Estos auxiliares sirven como marcos de referencia compartidos que se usan y comentan constantemente durante las experiencias de aprendizaje. En la medida en que tanto el profesor como los alumnos se familiaricen con ellos pueden llegar a constituir un lenguaje común, en el que se pueden expresar algunas de las dimensiones de aprendizaje más importantes.

En términos generales, todos esos auxiliares concretan la expresión «responsabilizarse de su aprendizaje» y contribuyen al logro de la autonomía de los alumnos en la organización de sus propios aprendizajes. Los materiales que se proponen son:

- Para entrar en materia: Es un texto breve en donde se discute el aprendizaje de la resolución de problemas en el contexto de las habilidades intelectuales de alto nivel y propone un modelo de aprendizaje esquemático, «hacer, reflexionar, comunicar» que contrasta con el tradicional «oír, ver, reproducir».

- El modelo PER: En el modelo de organización del aprendizaje PER (Propósito, Estrategia, Resultado) de Selmes se presenta un marco de referencia para estructurar las actividades de aprendizaje. Se invita a administrar los dos enfoques que se proponen, el superficial y el profundo, con el objeto de formarse un estilo independiente.
- La Heurística: En este documento de Schoenfeld se presenta una estrategia de resolución de problemas, acompañada de un diagrama de flujo y de una tabla que incluye las heurísticas de uso más frecuente.
- Las fichas: Son comentarios y sugerencias sobre la elaboración del reporte, el trabajo en equipo, la discusión matemática y el control durante las sesiones.
- El portafolios: Es un recipiente en el que se acumula, organiza y reorganiza todo lo que se produce en las actividades, en forma individual o en equipo, así como los comentarios y extensiones de estos productos.

Dentro de las **Experiencias de Aprendizaje** consideramos tanto la experiencia misma como la base de un aprendizaje, como su relación con un complejo conjunto de experiencias con un propósito común (la atención a las ideas de precálculo y al razonamiento estadístico). Los tipos de actividades están planeadas para que el estudiante y el profesor interactúen con diferentes elementos (los problemas, las actividades guiadas, los algoritmos, los ejercicios, las lecturas y las exposiciones) necesarios para el cumplimiento de los objetivos del curso, bajo una estrategia de aprendizaje diferente, con un uso de la plataforma tecnológica en particular y en diferentes momentos. Las redes de actividades permiten que el estudiante retome una y otra vez el mismo concepto a lo largo del curso en diferentes grados de aproximación y vinculándolos con otros elementos de las matemáticas mismas, de otras materias y de su entorno en particular. Así se establecen vínculos entre las actividades, en función de sus caracterizaciones, según las ideas, nociones, procedimientos, heurísticas, que se ponen en movimiento durante su resolución. De esta manera se puede diseñar una red orientada al logro de aprendizajes de distintos niveles y dimensiones. Por ejemplo, si en un problema se opta por una solución gráfica, se puede explorar, de manera más o menos natural, la relación que hay entre las características de las gráficas de una función (el volumen, la distancia) y su derivada (el gasto, la velocidad), se puede diseñar otro problema en el que se retome y profundice esta exploración. Para describir la forma en que las actividades constituyen una red partimos, por un lado, de la idea de problemática y, por otro, de la información que arrojó la aplicación de un marco para el análisis de problemas *(Ortega, et al, 1998)*. El éxito de una actividad está en concretar la planeación de su instrumentación y realimentarla en cada puesta en escena, de tal forma que la información que se tiene con respecto a ella (cómo funciona, cuáles son sus dificultades, cuántas interpretaciones tiene, cuántas variantes puede aceptar, cuáles son sus alcances, cómo la voy a evaluar, ...) se vuelva cada vez más robusta y por lo tanto se tenga mayor probabilidad de lograr una cierta estabilidad al intrumentarla en diferentes grupos de estudiantes.

Los tipos de experiencias de aprendizaje que se proponen son:

- La discusión de lecturas de temas matemáticos
- La discusión del uso y manejo de los materiales auxiliares.
- Las exposiciones:
- de los alumnos.
- del profesor.
- La generación de algoritmos.
- La realización de actividades guiadas con exploración.
- La resolución de ejercicios.
- La resolución de problemas.

Las actividades se desarrollan en un ambiente que favorece el autoaprendizaje, la autoevaluación, el trabajo en equipo, el manejo de la incertidumbre, la apropiación de estrategias personales para el manejo de situaciones no familiares y el empleo flexible de formas de pensamiento lógico. El trabajo de un grupo de estudiantes se somete al juicio del grupo con la finalidad de propiciar una discusión matemática que los conduzca a validar una solución como grupo. Las exposiciones del profesor son más bien escasas y se manejan partiendo del trabajo de los estudiantes. Las discusiones sobre el uso de los materiales auxiliares contribuyen a que el estudiante precise su papel dentro del ambiente del salón de clases.

La plataforma tecnológica contribuye a ese ambiente de trabajo, apoyando el uso de los paquetes matemáticos para la realización de las actividades, permitiendo una comunicación extraclase, como recibir aportaciones individuales al trabajo de la clase o crear grupos de discusión alrededor de alguna lectura o problema en particular y manteniendo informado al estudiante de sus próximas actividades.

Cada unas de las tres modalidades de participación: individual, grupal o por equipo nuevamente tienen un carácter dual: en las matemáticas y en la modalidad de participación propuesta. Así, se tiene un objetivo en la actividad misma (en la herramienta conceptual que se requiere) pero también hay una contribución al aprendizaje de cómo trabajar en equipo, cómo discutir, plantear y validar argumentos o cómo apropiarse de nuevas estrategias de resolución de problemas. Todas las Experiencias de Aprendizaje planteadas tienen en común un rasgo: generan aprendizajes multidimensionales, sin embargo las más propicias, puesto que el problema es el instrumento que permite la integración, la profundización y el uso de las matemáticas, son las de resolución de problemas. De modo que utilizaremos los problemas para ejemplificar la idea de una red de actividades.

De acuerdo a los objetivos planteados del curso de Matemáticas Remediales, algunos de las líneas que se recorren son: La modelación matemática, La función y la aproximación de funciones, La función a partir de sus cambios, Las interpretaciones intuitivas de la derivada, La función a partir de sus cambios. De tal forma, que la caracterización de tres de los problemas que constituyen una red de problemas del curso en cuestión es:

Problema *Línea*	*Dédalo y Calipso*	*Voi che sapete*	*El negro que no se raja*
Interpretaciones de la derivada	Noción de tangente en la representación gráfica de la situación.	Noción de tangente en la representación gráfica de la función racional.	Manejo de razones de cambio temporales: constantes y variables.
Optimación		Cálculo de la ganancia máxima en una función cuadrática y en una función racional.	Cálculo del volumen máximo con flujos de entrada y salida.
Función y aproximación de funciones	Caracterización de la función como: creciente, acotada por arriba y con un valor límite superior o decreciente, acotada por abajo y con un valor límite inferior. Planteamiento de funciones recursivas.	Estudio del comportamiento de las funciones que dan la ganancia: una función cuadrática y una función racional.	Planteamiento de funciones definidas por trozos. Decisión de considerar la disminución de los cambios en el gasto en forma lineal, u otra.

Modelación matemática	Dicotomía modelo matemático vs situación. Modelación de un comportamiento de poblaciones.	Modelación en un contexto económico.	Aplicación del modelo de movimiento (velocidad constante, aceleración constante) o del cálculo del área bajo la curva para la obtención del volumen.
Función a partir de sus cambios	Identificación del comportamiento exponencial.	Relacionar la información de la ganancia con los incrementos en el precio y en el número de artículos.	Identificación del volumen con el área bajo la curva del gasto. Identificación del gasto como la pendiente en la gráfica del volumen.

Evaluación

Destacamos varios dos niveles de evaluación:

De los aprendizajes

Se consideran desde los productos que se generan en la realización de cada tipo de actividad hasta la participación en clase, la entrega de tareas constante, el uso provechoso de los materiales auxiliares para la organización del aprendizaje y de la tecnología, la participación en grupos de discusión y la entrega de anexos individuales en los que profundicen en las actividades realizadas en clase. En particular para cada modalidad de participación (individual, por equipo y grupal) se diseñaron o adaptaron formatos de evaluación y autoevaluación. Así, los estudiantes recibieron constantemente una realimentación sobre su progreso en cuestiones como la discusión matemática y el trabajo en equipo.

Se realizaron preceptos de evaluación para cada tipo de actividad y en general se utilizó la escala analítica para la evaluación de reportes que considera la comprensión, la planeación y los resultados. Además, entre las actividades varias dieron oportunidad a los estudiantes para que manifestaran y discutieran sus creencias con respecto a las matemáticas, su importancia social y su aprendizaje. Gracias a la diversidad de registros que se consideran en la evaluación se tienen evidencias más precisas de los obstáculos que enfrentaron los estudiantes de las formas que utilizaron para superarlos y de sus logros auténticos en los aprendizajes previstos en los objetivos.

De la Transferencia

Además de los problemas técnicos a los que un profesor con un curso rediseñado se enfrenta (en cuestiones como el uso de paquetes computacioneles y la disponibilidad de equipo), este rediseño contempla diferentes aproximaciones y complejidades que el profesor que lo adopta no alcanza a visualizar en un plazo corto. Se está realizando un seguimiento a lo largo de todo el semestre que contempla la discusión, la planeación, la evaluación y el análisis de actividades instrumentadas por todos los profesores que están interesados en profundizar en el curso rediseñado de Matemáticas Remediales, así como el conocimiento sobre los avances en matemáticas educativa que nos permitan tener nuevos enfoques de enseñanza con la finalidad de detectar los puntos contemplados en el rediseño sobre los que los profesores tienen ,más dificultades en adoptar e instrumentar.

Este seguimiento no sólo tiene el objetivo de mejorar la transferencia, sino también de generar y organizar información que nos permita evaluar y mejorar el rediseño.

Conclusiones y Recomendaciones

Se cuenta con evidencias de que una buena cantidad de alumnos lograron objetivos vinculados con la Misión y que no estaban presentes en los objetivos originales del curso y que sin embargo, mayores logros en estos objetivos requieren de la participación de las otras materias, dado que se refieren a competencias complejas que se desarrollan continuamente y que la contradicción entre una práctica que propicia dependencia y pasividad en la que están ausentes la toma de decisiones dificulta el qúe el ITESM pueda cumplir con sus alumnos lo que les promete en la Misión. Experiencias de aprendizaje en las que el protagonista es el alumno y no el profesor, el alumno genera expectativas con respecto a lo que espera de la clase.

El diseño de estas experiencias de aprendizaje requiere una inversión de tiempo, de recursos y la participación de expertos en distintas áreas, por lo que es necesario que se den las condiciones para que los profesores puedan hacer un rediseño responsable de los cursos que reduzca la distancia que hay entre el currículo declarado en la misión y el currículo realmente logrado por los alumnos. La falta de concreción en las experiencias de aprendizaje cotidianas de los objetivos de la misión provoca en algunos alumnos rechazo por el manejo indispensable del alto nivel de incertidumbre y la complejidad de los aprendizajes mismos y la corresponsabilidad de profesores y alumnos indispensable para el logro de los objetivos de la misión. Como los objetivos de la misión son objetivos integradores y complejos es necesario que haya una coordinación efectiva y una planeación explícita de la articulación de los objetivos de las distintas materias para diseñar experiencias de aprendizaje que incluyan estos objetivos y cuyos productos se puedan evaluar en cada una de las materias propiciando un menor trabajo en cantidad y la posibilidad de tener una mayor exigencia en calidad.

Bibliografía

Rico, L., Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. RELIME: Revista de Investigación en Matemática Educativa: No. 1, CLAME, México: Thompson Editores, 1998.

Ortega, et. al. La resolución de problemas en las clases de matemáticas ilustrada: Una red que prepara algunas situaciones típicas del Cálculo. México: IPN, 1998.

Alarcón, J. (1995) Notas del Seminario Precálculo y Resolución de Problemas realizado en el DME-CINVESTAV-IPN.

Artigue, Douady et al. (1995) Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986) Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En Sánchez, E. y Zubieta, G. (1993) Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa. DME-CINVESTAV-IPN.

Clubes de Matemáticas de los CECyT 6, 7, 9 y 11 (1996) Materiales Auxiliares para la Organización del Aprendizaje. Editado por el Club de Matemáticas del CECyT Wilfrido Massieu, México.

Grouws, D. (Ed) (1992) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan Publishing Company. New York.

Perkins, D. (1992) La escuela inteligente. gedisa editorial.

Pirie, S. R. B. & Kieren, T. E. (1992) Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. Educational Studies in Mathematics, 23, pp. 505-528. Kluwer Academic Publishers. (Hay traducción al español editada por el Club de Matemáticas del CECyT Wilfrido Massieu)

Teoría y Metodología

Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares standard [1]

Berta Martini
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
Italia

Resumen

En este trabajo se estudia la influencia y el papel de una "cláusula" del contrato didáctico que hemos llamado "de delegación formal". Se estudia además la influencia y el papel del modelo general de problema y de los modelos intuitivos de las operaciones en la resolución de problemas escolares standard. Todos estos estudios se centran en un caso particular, tomado de los célebres experimentos de Schoenfeld. El texto completo de la investigacion es: D'Amore & Martini (1997). Vamos aquí a presentar solo un resumen.

1. Un artículo de Schoenfeld sobre la metacognición

En su celebre artículo sobre la metacognición, Alan H. Schoenfeld cita, de forma breve, un problema escolar definido por el mismo «de división no entera» ([Schoenfeld, 1987], en las páginas 195-196) (el texto y los resultados se han extraído de *Third National Assessment of Educational Progress* [Carpenter, Lindquist, Matthews, Silver, 1983]). Adjuntamos el texto de ese problema (que el autor insiere en un discurso relativo a los «preconceptos» y «misconceptos» por parte de los estudiantes y a las consiguientes «misinterpretaciones de procedimientos que aprenden en sus clases».

Un autobus del ejercito transporta 36 soldados. Si se tiene que llevar a 1128 soldados al campo de entrenamiento, ¿cuántos autobuses son necesarios?

De los 45000 estudiantes de escuela secundaria a los que se sometio a la prueba, el 30% hizo mal la división y sólo el 70% la hizó correctamente. De este 70%:

- el 29% dice que hacen falta 31 autobuses y que hay un resto de 12
- el 18% dice que hacen falta 31 autobuses
- sólo el 23% controla el resultado de la división, en base a lo que pide el problema, y responde que se necesitan 32 autobuses.

En muchas pruebas, con estudiantes de todos los niveles y con enseñantes de escuela infantil y elemental pero con un número de sujetos netamente inferior, algunas de nuestras preliminares experiencias informales han dado resultados un poco diferentes. Cuando se permitía el uso de la calculadora, como la operación que se realiza normal y obviamente es la división 1128:36 que da, con tal instrumento, el resultado 31,333333, obtuvimos respuestas del tipo 31,3 o $31,\bar{3}$, respuestas no explicitamente citadas por Schoenfeld. El trabajo de este autor, centrado en la metacognición, lo lleva a concluir que: «No obstante la "historia de introducción" sobre el autobus, el cálculo tiene poco o mejor nada que ver con el mundo real».

Las charlas informales mantenidas con los individuos que no habían respondido a nuestra prueba, de forma pertinente «32», especialmente con los más adultos, nos han convencido

[1] Trabajo realizado con la subvención económica del M.U.R.S.T. (60%) y del C.N.R. (contrato n° 96.00196.CT1).
Trabajo presentado en la Relme 12, celebrado en la Universidad Nacional de Colombia, del 6 al 10 de julio de 1998

que en la base de las respuestas enteras, de cualquier tipo, hay dos cláusulas del contrato didáctico: una que podríamos llamar de "delegación formal"; la otra consistente en no sentirse autorizados a escribir lo que no se pide explícitamente: si se obtiene 31,333333, no es lícito escribir 32, ya que es otra cosa que no se ha obtenido de forma explícita. Puesto que esta segunda cláusula es muy conocida y aparece bajo diversos aspectos, ligados en general a la problemática de los datos implícitos [Castro, Locatello, Meloni, 1996], trataremos de explicar lo que entendemos por *cláusula de delegación formal. Resolver* un problema escolar standard *coincide* con *el hallazgo de la operación o las operaciones más adaptadas*; se trata pues de interpretar aritméticamente el texto, pasando de su formulación en lengua natural a la expresión aritmética que lleva de los datos al resultado[2]. Una vez cumplido este paso-delegación de traducción y formalización, se puede olvidar el texto que no sirve ya, ni es objeto de ningún control crítico, lógico o semántico, y toda la concentración y atención del resolutor se centran en la ejecución de la operación, por escrito o con la calculadora. Cuando esto se termina, produciéndose de alguna forma un resultado, **este resultado** se interpreta automáticamente como **la respuesta** al problema, justamente por la *cláusula de delegación formal* a que nos venimos refiriendo.

La problemática suscitada por Schoenfeld es de extraordinaria importancia: interviene la metacognición pero también la capacidad de control de la estrategia de resolución adoptada, de la respuesta encontrada y del texto del problema [Pellerey, 1990].

Sin embargo el análisis hecho hasta ahora no nos parece demasiado profundo.

2. Posibles causas del comportamiento de los resolutores.

Citamos posibles campos de investigación por si se quisiesen buscar las causas que pueden explicar el comportamiento de los resolutores de frente al problema del autobus y de los soldados:

1. cláusula del contrato didáctico «de delegación formal»;
2. modelo general de problema y modelo general de resolución de problemas;
3. modelo mental que uno se hace de la situación descrita en el texto;
4. modelos intuitivos de las operaciones;
5. intervención de la lengua natural en todo ello.

En D'Amore & Martini (1997) estos puntos son examinatos uno a uno, con bibliografía específica. Aquí consideramos solo el punto 2.3: Modelo mental que se hace el resolutor de la situación descrita en el texto.[3]

Cuando se resuelve un problema cuyo texto se ha dado escrito, lo primero que se hace es un modelo mental de la situación descrita en el texto, ...o, al menos, se usa decir esto. En relación al hecho de que este modelo sea más o menos confuso o preciso, el discurso se complica pero lo tendremos que afrontar, al menos en parte. Sin embargo el que el modelo que se ha hecho el resolutor sea, en realidad, una ayuda para resolver el problema, como se pensaba normalmente, ha sido contestado, al menos en parte, en [D'Amore, 1997]. En base a tales resultados, es lícito plantearse hasta que punto es necesario hacerse modelos mentales *detallados* de las situaciones descritas en los textos, cuando se trata de resolver problemas. O mejor, más específicamente: ¿Qué imagen se hace de la situación el sujeto al que se le plantea la resolución del problema del autobus y de los soldados? ¿Imagina *realmente* a

[2] No nos adentraremos en la compleja problematica siguiente: ¿se usa realmente el lenguaje natural en las horas de matemáticas y, en particular, en la formulación del texto de un problema? Véase [Maier, 1993], [Laborde, 1995] y [D'Amore, 1996b].

[3] Podemos permitirnos aquí considerar como sinónimos las locuciones: imagen mental y modelo mental [D'Amore, Frabboni, 1996].

los 1128 soldados? ¿Los imagina en formación, ordenados todos o amontonados? ¿Dónde? ¿En una plaza, por una carretera o en el campamento? ¿Vestidos cómo? ¿Con el uniforme mimético? ¿Qué experiencia tiene el estudiante sobre cosas de este tipo? ¿Cómo se imagina el autobus? ¿Son todas estas preguntas fútiles y, realmente, la situación imaginada es imprecisa caótica y no detallada? ¿No se puede creer que el potencial resolutor delegue a la operación de división *también* la imagen mental de la situación? ¿O que la imagen mental se limite a una pincelada, a una parte del total? Por ejemplo, ¿a un grupo de soldados que está subiendo, en fila, a un autobus?

Estas preguntas no son ociosas. Si la imagen mental es necesaria para resolver el problema, entonces, dada la imposibilidad de imaginar 1128 soldados, para cualquiera, la delegación es un hecho *obligado*, de tal modo que ello podría explicar la no lectura hacia atrás (es decir la falta de control semántico) una vez encontrado el cociente entre 1128 y 36. Surge espontáneamente, entonces, la realización de una prueba que tenga como características:

- un problema del mismo tipo, pero en una situación fácilmente imaginable, digamos en contextos de *script* ya vividos o potencialmente tales;
- con datos numéricos tan bajos que no hagan necesaria una delegación de la imagen mental en la expresión aritmética resolutiva.

Elaboramos entonces la prueba siguiente:

Un automóvil transporta a 4 niños. Si se debe transportar a 6 niños a la escuela, ¿cuántos automóviles se necesitan?

Se puede esperar que, de frente a un texto como éste, se pueda imaginar fácilmente la situación descrita, gracias a la influencia vivencial, de tal forma que no sea necesaria ni la delegación descrita, ni se haga prácticamente operación alguna: la resolución debería llegar por tanto más porque se imagina la situación, que ejecutando la división 6:4. La respuesta «2 automóviles» debería ser dada por la totalidad o casi por todos los resolutores, pero no a través de un control semántico de la pregunta-respuesta, sino más bien por validación (sólo imaginada) y experiencia.

Si esto tuviese lugar:

- quedaría demostrado que la cláusula de delegacion formal interviene sólo cuando el problema implica números grandes o, en cualquier caso, situaciones problemáticas no dominables si no es a través de operaciones formales;
- quedaría demostrado que el modelo general de problema tiene que ver sólo con problemas de un cierto grado de complejidad formal;
- quedaría demostrado que el modelo mental de la situación puede coincidir, en ciertos casos, con la misma resolución del problema.

Obviamente, hemos realizado la prueba anunciada apenas y aportaremos los particulares y los resultados en **3.**

1. Modalidades y resultados relativos al problema de Schoenfeld y al de los niños y los coches

Las pruebas se efectuaron en V elemental (10-11 años), en II media (12-13 años) y en segundo de liceo clásico (17-18 años). En cualquier caso, disponíamos de dos test distintos, el de Schoenfeld y el de los niños y los coches, escritos cada uno en la parte superior de un folio A4, en el que había un pequeño espacio para escribir el nombre y un gran recuadro para escribir la resolución y la respuesta. Al final del test de Schoenfeld se pedía: «¿Has usado la calculadora?». Al final del test de los niños y los coches se pedía: «Explica cómo has hecho para resolverlo». La consigna, común para todos, era que trabajasen solos, en completo silencio, escribir todo lo que se quisiese durante 10 minutos. Se advertía explicitamente en cada ocasión que se podía usar la calculadora. En algunos casos el enseñante habitual salía del aula, en otras se quedaba, con la consigna de permanecer al margen de la prueba.

Al final de la prueba escrita, mientras el profesor entraba de nuevo o retomaba el mando de la clase, el investigador escogía rápidamente, según las respuestas dadas, algunos alumnos que se convocaban, uno cada vez, en un aula cercana para una entrevista personal. Se invitaba al enseñante a procurar que no se diese un intercambio de informaciones entre el que había sido ya entrevistado y el que todavía no lo había sido, cuando los alumnos regresaban a clase.

Los resultados, diferenciándos por el nivel escolar, y con muchos protocolos auténticos, estan examinados con muchos dettailles en D'Amore & Martini (1997). Aquí nos limitamos a un resumen final esquematico.

	test de Schoenfeld		**test de n. y a.**
	sin calculadora	con calculadora	
V elemental	36%	0%	88%
II media	37%	12%	83%
II liceo clásico	70%	38%	92%

2. Consideraciones generales y conclusiones.

En D'Amore & Martini (1997) se encuentran las consideraciones generales y las conclusiones sobre los puntos 2.1-2.5. Aquì nos limitamos en discutir el punto 2.3.

Como hemos dicho ya, se ha confirmado el hecho de que en algún caso (y de forma específica en el test de los niños y de los automóviles) el modelo mental coincide con la solución y la ofrece inmediatamente, *d'emblée*. El resolutor tiene la impresión de no tener enfrente un problema, porque la respuesta está ligada a la experiencia (real o potencial), a *script*, y no se pasa por ningún tipo de delegación formal.

Nos parece confirmado también que en el segundo test la escena se sienta más próxima, más inmediata, más simple de imaginar. Lo demuestran muchos comentarios muy difundidos, a *cualquier* nivel escolar, sobre la comodidad de los puestos, etc.; la distribución en el coche deducida de la imagen y no de las operaciones; la intervención de papá y demás parientes en el *script*. Es un hecho no registrado en el test de Schoenfeld.

Referencias bibliográficas

Carpenter T. P., Lindquist M. M., Matthews W., Silver E.A. (1983), *Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary School*, «Mathematics Teacher», 79 (9), 652-659.

Castro C., Locatello S., Meloni G. (1996), *Il problema della gita. Uso dei dati impliciti nei problemi di matematica*, «La matematica e la sua didattica», 2, 166-184.

D'Amore B. (1996a), *Problemas. Pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas*, Editorial Sintests, Madrid.

D'Amore B. (1996b), *Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme*, Journal für Mathematik Didaktik, 17, 2, 81-97.

D'Amore B. (1996c), *El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas*, Epsilon, 36, 341-360 [prolusione al TGXIV en ICME 8, Sevilla julyo 1996].

D'Amore B. (1997), *Lápices-Orettole-Przxetqzyw. ¿La imágenes mentales de los textos de las situaciones-problemas influencian su resolucion?*, Suma, 26, 111-116.

D'Amore B., Frabboni F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore B., Martini B. (1997), *Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos*, Números, 32, 26-32.

D'Amore B., Zan R. (1996), *Italian Research on Problem Solving 1988-1995*, in: Gagatsis A., Rogers L. (eds.) (1996), *Didactics and history of mathematics*, Thessaloniki, 35-52.

Laborde C. (1995), *Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica?*, in: Jannamorelli B. (ed.), *Lingue e linguaggi nella pratica didattica*, Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona marzo-aprile 1995, Qualevita, Sulmona.

Maier H. (1993), *Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves*, «Caiers de didactiques des mathématiques», 3, 86-118.

Schoenfeld A. H. (1985), *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, New York.

Schoenfeld A. H. (1987), *What's All the Fuss About Metacognition?*, in: Schoenfeld A. H. (ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Ass., Hillsdale (N.J.), 189-215.

Los campos lógicos[1]
Consideraciones sobre el comportamiento lógico y estratégico de los estudiantes ante la resolución de problemas en el ámbito escolar

Bruno D'Amore
N.R.D. Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna (Italia)

Resumen

En este artículo se presentan los "campos lógicos", con los que se pretende explicar el comportamiento y la lógica utilizados por los estudiantes en el momento de la búsqueda de estrategias de resolución de problemas escolares. Para su definición y ejemplificación se utilizan protocolos recogidos, durante años, en varias investigaciones del autor, protocolos cuyo análisis sugiere la existencia de una idea diferente de las conocidas hasta ahora.

Desde hace algunos años, reflexionando sobre los resultados de diferentes investigaciones mías sobre la solución de problemas en cualquier nivel escolar, conservo protocolos de estudiantes que juzgo sorprendentes. Este estupor se debe casi siempre al hecho de que no logro explicarme las motivaciones de la respuesta, incluso cuando busco de diferentes maneras de usar los instrumentos más clásicos, desde el contrato didáctico (en sus varias formas y matices) hasta la teoría de los obstáculos. La rica colección que ahora poseo, me ha convencido poco a poco de que además de los factores usuales que constituyen la solución de un problema escolar, se podrían considerar otros. La definición de estos últimos me ocupa desde hace algunos años en la intención de agruparlos bajo una única explicación.

En mi conferencia de Bogotá, busqué de explicar el sentido de la investigación y los primeros resultados de la teorización. En estre breve resumen me limitare solo a algunas consideraciones.

1. Sobre los factores que constituyen la resolución de un problema escolar

Existe una opinión general, consolidada y ampliamente consensuada, según la cual la elección de las estrategias para resolver problemas, en la fase *siguiente* a la lectura del texto y en la *precedente* al inicio de la actividad de resolución, está constituida por varios *factores*, de naturaleza diversa, en los que concurren elementos difíciles de distinguir y difíciles de definir específicamente.

En otros términos: es prácticamente *imposible* distinguir y definir los diversos factores que intervienen en esta fase ya que resultan entrelazados en forma extremamente compleja; sin embargo, se puede intentar, con el único objetivo de analizarlos, una distinción que resultará artificial pero que facilitará, al menos preliminarmente, la referencia a tales factores. Resulta obvio que, sea en la praxis didáctica sea en la actividad de investigación, la complejidad de los vínculos entre ellos es tal que sería irreal pensar en actuar por separado sobre cada uno. Por ello, el siguiente elenco no es (no podría ser y, por tanto, no quiere ser) exhaustivo y sin embargo engloba bastantes factores, elegidos entre los más interesantes en lo que sigue:

- El contexto de referencia del estudiante que resuelve, tanto desde el interior [Cobb 1988] (comprende distintas componentes y se plantea explícitamente "desde el lado del resolutor"), como desde el exterior [Lesh 1981] [Lesh 1985];

[1] Trabajo subvencionado por el C.N.R. (contrato número 97.00875.CT01) y por el M.U.R.S.T.
Trabajo presentado en la Relme 12, celebrado en la Universidad Nacional de Colombia, del 6 al 10 de julio de 1998

- varias claúsulas del contrato didáctico [Brousseau 1984] [Brousseau 1986], sean estas implícitas o explícitas; sobre el recurso a la idea de "clausulas" simples, véase [Chevallard 1988];

- el campo conceptual [Vergnaud 1981] [Vergnaud 1990] en cuyo ambito se emplaza, según el enseñante o según el investigador, el problema desde el punto de vista matemático;

- el contexto lingüístico *específico* del estudiante que resuelve; ésta es una idea un poco vaga que necesita algún otro comentario, porque encierra demasiadas variables; algunos ejemplos me ayudarán a hacer comprender al lector qué es lo que yo entiendo por tal contexto. Quiero incluir aquí: los significados simples que el estudiante atribuye a cada una de las *palabras* del texto, la tipología de la construcción de las *frases*, las imágenes mentales que evoca la *semántica del texto* en la mente del estudiante, la capacidad que pose el estudiante para *reescribir el texto*, por decisión propia, para mejorar la posibilidad de imaginarse la escena y resolver el problema [D'Amore et alii 1995]; etc; en resumen, todo *lo interno* que tiene que ver con la semántica del texto y que, sin embargo, es un hecho externo. Para ser más explícito: en D'Amore y Martini [1998] hemos visto cómo se puede construir artificialmente, desde las primeras preguntas de un test, un ambiente cognitivo (semántico) de referencia y forzar entonces al estudiante a buscar en él las respuestas a las siguientes preguntas del test; se puede hipotizar que lo que hemos hecho a propósito, en aras de la investigación, podría obtenerse involuntariamente mediante el texto de un problema, por tanto la semántica del texto podría inducir al que resuelve a buscar la resolución en el ámbito de un contexto cognitivo o estratégico de referencia, forzado o convertido en obligatorio por tal semántica, incluso sin que el que propone el test se dé cuenta de ello.[2]

- ...

En esta lista se han operado muchas simplificaciones ingénuas, en aras de una mayor brevedad. Veámoslas de forma explícita.

- Dentro del campo conceptual (que está a nivel del enseñante) incluyo los modelos de los conceptos matemáticos (incluso las operaciones matemáticas como objetos y no como instrumentos para completar procesos), y cómo aquellos (los modelos), determinando la elección del enseñante, repercuten también, necesariamente, en los comportamientos resolutivos de los alumnos. Muy importantes, en este punto, son los "modelos intuitivos" que los estudiantes tienen de los conceptos, o más generalmente, de los "objetos matemáticos"; no daré más detalles, enviando a los trabajos clásicos [Fischbein et alii 1981] [Fischbein 1985 a, b].
- El contexto de referencia puede ser totalmente ajeno a la escuela, o bien puede constituir un fundamento de la didáctica a través de los campos de experiencia y semánticos [Boero 1989 a] [Boero 1992] [Boero 1994], elegidos directamente por el enseñante para su propio proyecto didáctico.
- Admito además que el modelo de la situación descrita se forma, por así decirlo, como *límite de las imágenes mentales* (véase [D'Amore-Frabboni 1996], páginas 108-110), es

[2] Se hace necesaria una breve clarificación acerca de la idea de situación problemática, de frente al problema y a su propio texto. Según Borasi [1986], la situación problemática es "el contexto en que adquiere sentido el problema planteado"; según Boero y Ferrari [1988] la situación problemática es "el sentido del texto", mientras el texto es "un sistema de signos" que lo codifica; según D'Amore [1993a] "la situación problemática es el sistema de competencias reales en que se puede imaginar todo lo que describe un texto o su significado (semántica), como parte integrante de las experiencias del que resuelve (el sistema es específico del problema dado)".

decir, que las imagenes mentales se forman de modo incontrolado y autónomo, independiente de la voluntad del sujeto, y tienen como característica una especie de inestabilidad, mientras se pueda hablar de modelo mental de un concepto como aquel para el que la imagen mental evocada se transforma en estable.

- Debo mencionar aquí el hecho consumado según el cual, más allá de la comunicación "oficial", "legal", existe, en la práctica, una *metacomunicación* que informa sobre (y por tanto se refiere a) otras cosas, debida sin duda al c.d., al clima de la clase, etc, pero no sólo a esto. Me parece que estaría ligada a hechos específicos como la estructura lingüística del texto y el ámbito en que se propone ese texto o el ambiente cognitivo evocado por tal texto. Es como si el texto activase, en el sujeto, esquemas específicos elegidos, sin voluntad propia, entre un "repertorio" de esquemas de comportamiento disponibles [explicables acudiendo a teorías ya clásicas (c.d., modelos conceptuales, modelos intuitivos, etc.)].
- Y, para terminar, exijo que se pueda operar una selección (aunque sea artificial) entre las clausulas del contrato didáctico [Chevallard 1988], como si estas actuasen autónomamente y no como un complejo único fuertemente interrelacionado; aquí incluyo todo el discurso sobre el modelo general de problema que los estudiantes se hacen en el curso de sus estudios [Zan 1991-92] y sobre las varias componentes del problem-solving "escolástico" [D'Amore 1993 a].

Tengo la impresión de que, en la investigación actual sobre resolución de problemas en las actividades escolares estandar, existe un vacío a rellenar, inherente a *los procedimientos de determinación de la lógica a utilizar en la elección estratégico-resolutiva y a caballo de la misma*. Intentaré servirme de resultados, ejemplos y protocolos para introducir una idea que llamaré "campos lógicos", idea que, según mi punto de vista, puede contribuir a justificar ciertos comportamientos recurrentes y que obliga a revisar detalladamente, retocándolo de forma drástica, el esquema visto anteriormente.

Una eventual utilización didáctica de la idea que expondré a continuación deberia contar con la complejidad real y con la imposibilidad de seleccionar, de hecho, factores tan distintos pero a la vez fuertemente correlacionados y extrechamente conexos.

2. Lógica de elección lingüística y lógica metodológica incluidas en el texto de un problema (L1)

2.1. Introduciré, de entrada, la idea de "lógica de elección lingüística sugerida por el texto del problema". Dado el texto de un problema, hay en él una componente que implica, o a través del contexto creado por el mismo texto o a través de algunas clausulas del c.d. impuestas por el propio texto o a partir de las experiencias del sujeto (incluso sólo las lingüísticas) reclamadas por el mismo texto, una lógica de actitud-comportamiento que queda explícita, sobre todo, en la selección de los determinados lenguajes que se usan.

2.2. Propondré ahora la presencia de una «lógica metodológica incluida en el texto». Parece indudable que existe una lógica determinada por el mismo texto del problema, es decir una lógica metodológica que el propio texto del problema sugiere aplicar para la resolución. En otras palabras, hay textos que sugieren (o parecen sugerir) al que resuelve, más o menos explícitamente, qué tipo de lógica es, metodológicamente hablando, la preferible para la resolución. Entiendo lógica deductiva, inductiva, abductiva, de ensayo y error u otra cualquiera. La elección de una lógica tal (o quizás sólo de la actitud lógica) varía notablemente con la edad y, por tanto, con el nivel escolar. Por ejemplo, si se da como tarea la demostración del teorema de Pick,[3] después de dar el enunciado (de distintas formas según el nivel de ense-

[3] Dado, en una cuadrícula, un polígono con los vertices en los nudos de la cuadrícula, sea C el número de nudos en la frontera, I el número de nudos internos; entonces el área del polígono, expresada en

ñanza),la actitud de los estudiantes de cualquier nivel es, en principio, muy similar: verificar la validez de la fórmula en algún caso particular. Sólo que para los niños de escuela elemental, de media, y para muchos de superior (al menos para los de 14-16), esa verificación coincide con la demostración; por tanto la lógica metodológica, pedida por el texto del problema propuesto, es sin duda del tipo: *ensayo y error*. Según esos alumnos, si, después de hacer 2 ó 3 pruebas particulares, se obtiene en todas la confirmación del teorema, entonces la regla vale; si, viceversa, existiese un solo caso de no validez, entonces la regla no sería válida. La confirmación de que, para los alumnos, las cosas discurren así la tenemos cuando un alumno se equivoca al aplicar la fórmula; en tal caso dice que la fórmula no sirve, pero está dispuesto a corregirse cuando se le muestra su error. Pocos estudiantes de enseñanza superior (16-19 años) muestran comprender que las solas verificaciones, por muy numerosas que sean, no constituyen una demostración de la fórmula. Y sólo los estudiantes de la licenciatura de Matemáticas ponen en juego explícitamente la palabra "inducción".

Un comportamiento idéntico se obtiene si se trabaja sobre la fórmula de Euler para poliedros convexos,[4] sobre el enunciado del teorema de los 4 colores,[5] sobre el principio de la palanca, sobre la conjetura de Goldbach.[6] Sobre todos estos ejemplos volveré con más detalle a continuación.

El comportamiento lógico metodológico no tiene sólo que ver, directa y únicamente, con la *complejidad* de la tarea (a menos que se trate de una banalidad), sino también con el *tipo* de tarea. Por ejemplo a la tarea de verificar que la suma de tres naturales consecutivos es siempre múltiplo de 3, más allá de las obvias y muy conocidas dificultades de simbolización,[7] el comportamiento es todavía el de ensayo-error en la escuela obligatoria, vagamente deductivo en los dos primeros años posteriores y deductivo sólo después.

Lo que sostengo es que existe algo que da pie, en ciertos textos de problemas o, mejor, en ciertas tipologías de textos de problemas, a un mismo comportamiento resolutivo, que llamaré *logica metodologica incluida en el texto.*

2.3. Llamaremos L1 al conjunto de las dos lógicas evidenciadas hasta ahora, dado que se refieran solamente al texto del problema en si mismo: la lógica de elección lingüística sugerida por el texto (ap. **2.1.**) y la logica metodológica (ap. **2.2.**). Distinguir netamente entre las dos

---

las unidades de medida de la cuadrícula, viene dada por la fórmula: C:2+I-1. He experimentado la *comprensión* de esta fórmula en todos los niveles de enseñanza, de la escuela elemental a la universidad.

[4] Dado un poliedro convexo cualquiera, sean: v el número de vértices, c el número de caras y a el número de aristas. Se verifica que v+c-a=2. He experimentado sobre la comprensión de esta fórmula en todos los niveles de enseñanza, desde la elemental a la universidad.

[5] Lo he usado siempre en la versión del mapa geográfico. En un mapa, llamaremos confinantes a dos regiones que tienen una linea (no un punto solo) de frontera en común. Cualquiera que sea la complejidad del mapa, es siempre posible colorearla de forma que dos regiones confinantes tengan colores distintos y usando no más de 4 colores. Lo he experimentado en todos los niveles, incluso en la escuela infantil.

[6] Cualquier número par mayor que 2 se puede expresar como suma de dos números primos. He experimentado sobre la comprensión de este enunciado en todos los niveles de enseñanza, desde la elemental a la universidad.

[7] Por ejemplo, bastantes muchachos de la superior (14-19 años) formalizan este enunciado con escrituras como m+n+p, suponiendo que m, n, p son naturales consecutivos..., con las obvias dificultades de gestión sucesivas. Por otra parte, estos comportamientos han sido ya descritos en [Arzarello, Bazzini, Chiappini 1994].

componentes de L1 (tan relacionadas entre si) es difícil y quizás inútilmente sotil: presentan muchas características comunes y por ello las fundiré en una única lógica L1.

3. Lógica teleológica implícita en el tipo de respuesta esperada (L2).

Introduciré ahora lo que llamaré «lógica teleológica». Hay actitudes en la propuesta de estrategias de resolución, por parte de los alumnos, que imponen reflexiones sobre la lógica empleada en la resolución del problema, lógica que es sugerida por algo implícito en las expectativas relativas a la pregunta y por tanto en la respuesta esperada o en el tipo de respuesta esperada.

Lo que me interesa, en este momento, es sostener que existe una lógica incluida en la semántica del texto (escondida entre sus componentes) que tiene mucho que ver con la expectativa evocada por la respuesta que el estudiante proyecta y exterioriza, de forma inconsciente, *antes* de ejecutar las operaciones o de pensar en la resolución, es decir, en la fase que queda entre la lectura del texto y la decisión de elegir un comportamiento estratégico para resolver el problema (para muchos alumnos tal comportamiento coincide con la elección de la operación a elegir).

Llamaré L2 a la lógica teleológica y L al complejo formado por L1 y L2. Diré que globalmente L es la lógica implícita o incluida en el texto de un problema dado.

4. Presencia "transversal" de la lógica incluida en el texto de un problema

Por tanto, en el momento de prepararse para la elección de una estrategia resolutiva ante un problema dado, el estudiante podría resultar condicionado por esta componente "lógica" que se podría considerar "transversal", que ejerce una notable influencia emotiva y que parece condicionar fuertemente cualquier decisión resolutiva propia.

A continuación sostendré la tesis siguiente: existe una idea, la de "**campo lógico**", determinada decisivamente por L, en función de la cual se deben hacer pruebas para comprender de forma profunda y específica el comportamiento del estudiante cuando debe elegir una estrategia de resolución de los problemas escolares.

5. Los campos lógicos

El campo logico está definido por L.

Estoy tentando de mostrar como, una vez aceptada la idea de campos lógicos, para un problema dado P y para un conjunto de problemas muy análogos a P, la búsqueda de analogías que los originan resulta más fácil. In este sentido, estoy ententando de definir el campo lógico de la analogía y lo de la inducción.

Esta idea de los campos lógicos no sustituye, sino que integra, teniéndolas en cuenta, otras ideas e hipótesis conexas a la problemática de la resolución de problemas de matemáticas (y se ha visto que aunque no se trate de verdadero y propio problem solving, la tipología de las situaciones problemáticas tenida en cuenta es bastante vasta y amplia).

Con más precisión, el interés de esta idea no se situa tanto en el momento en que aquel que resuelve da la solución, sino en el paso entre el momento de la lectura del texto y el momento en que uno se prepara a decidir (más o menos conscientemente) qué estrategia adoptar para la resolución misma: es el momento mágico en que el resolutor se lo juega todo y puede durar un solo instante...

Bibliografía

Arzarello F., Bazzini L. & Chiappini G. (1994), *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*, Quaderni del C.N.R. - Tecnologie e innovazioni didattiche, 6, Pavia.

Boero P. (1989), *Campi semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni su problemi di concettualizzazione e mediazione linguistica connessi ad esperienze di innovazione curricolare*, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, 6, Report, Pisa 18-20 maggio 1989.

Boero P. (1992), The crucial role of semantic fields in the development of problem solving skills in the School Environment, in: Pedro Ponte J.P., Matos J.F. and Fernandes D. (eds.) (1992), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*, Springer-Verlag, 77-91.

Boero P. (1994), Experience fields as a tool to plan mathematics teaching from 6 to 11, in: Proceedings II German-Italian Joint Symposium on Mathematics Education, IDM Bielefeld, 1994, 45-62.

Boero P. & Ferrari P.L. (1988), Rassegna di alcune ricerche sul «problema dei problemi». *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 7-8, 11, 659-684.

Borasi R. (1986), On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 125-141.

Brousseau G. (1984), Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage, Actes du colloque de la troisième Université d'été de didactique des mathématiques d'Olivet.

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.

Chevallard Y. (1988), *Sur l'analyse didactique*, IREM Aix-Marseille.

Cobb P. (1988), Multiple Perspectives, Proceedings ICME VI, Budapest July-August 1988.

D'Amore B. (1992), Novità nella didattica della matematica (titulo del editor), *L'educatore*, 4, 62-67.

D'Amore B. (1993a), *Problemas. Pedagogia y Pricolopgia de la Matematica en la actividad de resolucion de problemas.* Madrid, Ed. Sintesis.

D'Amore B. (1993b), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico, *La Matematica e la sua didattica*, 3, 289-301. Una versión, en alemán, en: Gagatsis A. und Maier H.(eds.) (1996), *Texte zur Didaktik der Mathematik*, Erasmus, Thessaloniki-Regensburg, 105-125. Una versión más amplia, en alemán, en: *Journal für Mathematik Didaktik*, 17, 1996, 81-98.

D'Amore B. & alii (1995), La riformulazione dei testi dei problemi scolastici standard, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A, 2, 131-146. Una versión en inglés, en: Gagatsis A. & Rogers L. (eds.) (1996), *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus ICP 854 G 2011-11, Thessaloniki, 53-72.

D'Amore B. & Frabboni F., *Didattica generale e didattiche disciplinari.* Milano, Franco Angeli ed.

D'Amore B. & Sandri P. (1993), Il problema nella pratica didattica educativa, *L'Educatore*, 1, I-X. Ristampato su: Gagatsis A. (ed.) (1993), *Didaktiké ton Mathematikon*, Dept. of Math., Univ. of Thessaloniki, 97-118 e 415-446.

D'Amore B. & Sandri P. (1996), Fa' finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19A, 3, 223-246.

D'Amore B. & Sandri P. (1998), Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante, *La Matematica e la sua didattica*, 1, 4-18.

Deri M, Sainati Nello M & Sciolis Marino M. (1983), Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6, 6, 6-27.

Duval R. (1992-93), Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?, *petit x*, 31, 37-61. Trad. it. en: *La Matematica e la sua didattica*, 2, 1996, 130-152.

Fischbein E., Tirosh D. & Melamed U. (1981), Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 491-512.

Fischbein E. (1985a), Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica, in: Chini Artusi L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bologna, Zanichelli-UMI, 8-19.

Fischbein E. (1985b), Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari, in: L. Chini Artusi (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bologna, Zanichelli-UMI, 122-133.

Lesh R. (1981), Applied mathematical problem solving, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235-264.

Lesh R. (1985), Conceptual analysis of mathematical Ideas and problem solving processes, Proceedings PME IX, London.

Schubauer-Leoni M.L. (1988), L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: la situation de test revisitée, in: Perret-Clermont A.N. & Nicolet M. (eds.), *Interagir et connaitre: Enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif*, Cousset, Del Val, 251-264.

Schubauer-Leoni M.L. & Ntamakiliro L. (1994), La construction de réponses à des problèmes impossibles, *Revue des sciences de l'éducation*, 1, 87-113.

Vergnaud G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang ed. Trad. it. Roma, Armando Armando ed., 1995.

Vergnaud G. (1985), Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche, in: Chini Artusi L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli-UMI, Bologna, 20-25.

Vergnaud G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10, 133-169. Trad. it. in: *La Matematica e la sua didattica*, 1, 1992, 4-19.

Zan R. (1991-92), Il modello concettuale di "problema" nei bambini della scuola elementare, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 14, 7, 1991, 660-677; 14, 9, 1991, 807-840; 15, 1, 1992, 40-53.

Zan R. (1995), Chi non riesce in matematica?, in: D'Amore B. (ed.), *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*, Bologna, Pitagora, 77-86.

Documentos de los Grupos de trabajo y discusión

CALCDIFE-II, Propuesta de un entorno computacional inteligente para la enseñanza del cálculo diferencial

Ma. Eugenia Andreu Ibarra
Depto. de Ciencias Básicas, CBI.
Universidad Autónoma Metropolitana-Azc. México

Carlos Armando Cuevas Vallejo, Hugo Mejía Velasco
Cinvestav-IPN
México

Resumen

Hoy en día, se contempla como un hecho, la incorporación de la microcomputadora en gran parte de las tareas usuales del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Una línea importante de trabajo en esa dirección, es el desarrollo de entornos de enseñanza-aprendizaje inteligentes y dentro de ella la elaboración de Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI). En este artículo se introduce y propone un tipo de STI, que en su concepción difiere de los sistemas tradicionales, fundamentalmente, en dos premisas: no pretende substituir al profesor en forma total y no pretende crear o elaborar un modelo de estudiante que se anticipe a todas las respuestas posibles. En cambio este sistema se propone como un colaborador del profesor que comparte con él las tareas docentes con un planteamiento didáctico transparente en su diseño. Este STI incluye la creación de un banco inteligente de problemas adecuados, bajo el punto de vista didáctico. El STI que se propone está enfocado para apoyar la enseñanza de un curso tradicional de cálculo diferencial.

Antecedentes y justificacion

El Cálculo Diferencial e Integral se ha considerado como parte medular en el desarrollo de la matemática y actualmente se encuentra presente en la currícula de un gran número de planes de estudio de escuelas de nivel medio-superior y superior (aun en carreras ajenas a las ciencias físico-matemáticas) esto se debe a que el Cálculo es una de las herramientas matemáticas básicas para poder analizar y establecer modelos de fenómenos de muy diferentes ciencias como son: la física, la economía, la biología, la sociología, etc.

El cálculo es la primera historia con la que el mundo, contó para llegar a convertirse en el mundo moderno (Berliski, 1995).

Los resultados de aprobación que se obtienen en el curso de cálculo diferencial en las carreras de ingeniería son deplorablemente bajos (en la Universidad Autónoma Metropo-litana Azc. se reporta que más del 50% de los estudiantes fracasan al llevar la materia de cálculo, (UAM, 1997), mientras que Confrey (1996), reporta que aún en universidades con alumnos muy seleccionados fallan en un porcentaje del 17 al 22% en la misma materia). En efecto, Tall (1996) nos menciona, citando a Anderson & Loftsgaarden (1987) y a Peterson (1987), que a pesar de que los alumnos se someten a un duro régimen de ejercicios de cálculo el porcentaje de fracasos en este tema oscila entre el 30% y 50%. Este es un problema que nos ha inquietado a muchos profesores, y sabemos, por experiencia, que hay muchas posibles causas de esta situación, causas que van desde problemas de tipo social en general, hasta problemas de hábitos de estudio y académicos.

Dentro de las causas de orden académico de este bajo rendimiento, se puede mencionar la carencia de un planteamiento didáctico adecuado en la enseñanza de las matemáticas puesto que, fundamentalmente, los cursos se imparten bajo el esquema de una didáctica tradicional. Balacheff (1994) menciona que los esquemas actuales de enseñanza, siguen un proceso discursivo. Es decir el docente expone el tema y realiza uno o dos ejemplos esperando que con ello el estudiante adquiera el conocimiento impartido. Otra dificultad que se presenta frecuentemente en los cursos de matemáticas, es la desarticulación del registro algebraico y los diferentes registros o sistemas de representación asociados a los diferentes conceptos (Duval, 1988). En el cálculo diferencial, esta desarticulación, generalmente crea una concepción errónea en los estudiantes que la consideran como una asignatura llena de fórmulas y datos ininteligibles; y totalmente ajena a sus propios intereses e inquietudes. Esto conduce a los alumnos hacia una memorización absurda, ya sea de fórmulas o de procedimientos en los que se pierde su significado y se tiene como consecuencia el establecimiento de hábitos o esquemas rígidos de asimilación; de los que después es muy difícil servirse para poder evolucionar y aplicarlos en la solución de problemas diferentes a los que en su momento se estudiaron.

Para la abrumadora mayoría de los estudiantes, el cálculo no es un cuerpo de conocimientos, sino un repertorio de patrones imitativos de comportamiento (E. E. Moise, 1984, citado por Tall,1996).

Por todo lo anterior y fuera del problema social que esto implique, es muy importante pensar en los posibles apoyos técnicos de calidad que puedan aportarse al proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial, para mejorar, en parte, el porcentaje de aprobación, pero sobre todo, para mejorar la calidad del aprendizaje. Dentro de estos posibles apoyos, destaca por su potencialidad el uso de la microcomputadora.

La computadora en la educación

Sobre el uso de la computadora en los procesos de enseñanza y de aprendizaje ha habido gran variedad de acercamientos, y se han desarrollado, por lo tanto, diversas clasificaciones. Los sistemas tutoriales son un apartado importante en ellas y se crean con la idea de utilizar la computadora como un instructor particular, lo que puede representar una serie de ventajas como son, principalmente:

(a) La posibilidad de que la instrucción sea individualizada e interactiva, lo que permitiría a cada alumno avanzar a su propio ritmo, dependiendo de sus necesidades particulares, con amplia disponibilidad del tutor.
(b) Poder trasladar la experiencia de un grupo interdisciplinario de profesionales y científicos de la enseñanza a un programa de computadora, que un estudiante-usuario puede ejecutar en cualquier parte en donde se cuente con el equipo necesario.
(c) Eliminar algunos problemas causados por la comunicación directa entre el alumno y el profesor.

Los Sistemas Tutoriales Inteligentes (Intelligent Tutoring Systems, ITS), en su forma más general, son programas que apoyan la enseñanza y que exhiben inteligencia en su ejecución.

Los sistemas tutoriales inteligentes, como su nombre lo indica, se supone que brindan inteligencia, de alguna manera, a la tarea de la instrucción basada en la computadora (Anderson, 1988).

Para algunos autores, los ITS vienen a ser una evolución de la enseñanza asistida por computadora (Computer Assisted Instruction, CAI) Burns y Capps (1988). Para otros, evolucionan de los tutores con capacidad generativa. En nuestra concepción los sistemas tutoriales inteligentes vienen a ser un desarrollo ulterior de las lecciones tutoriales, que sin lugar a dudas, parten del proyecto PLATO desarrollado por Davis (1979) y su equipo de colaboradores (Cuevas, 1996).

Para Burns y Capps (1988), la arquitectura básica de un ITS está definida por: Un módulo experto que contiene el conocimiento del tema; Un módulo estudiante que realiza un diagnóstico de lo que el estudiante sabe o conoce; Un módulo instruccional, que a partir de las deficiencias que el estudiante tiene, establece la estrategia para presentar el conocimiento; y Un ambiente instruccional y una interfase humano-máquina que canalizan la comunicación tutorial.

Podemos decir sintéticamente que las premisas de las que parten los ITS son dos, la primera consiste en la substitución total del profesor y la segunda, es implementar en la computadora un modelo de estudiante, que contenga todos los posibles errores y todos los posibles aciertos que un estudiante tenga al intentar o resolver un determinado problema (Anderson, Corbett and Patterson, 1987; O'Shea and Self, 1983). Ciertamente, la primera condición, obliga al sistema a contener un modelo del aprendizaje y la segunda, el modelo de estudiante, a una teoría del conocimiento. Numerosas críticas se han desarrollado alrededor de esta posición, que en muchos de los casos nos lleva a problemas filosóficos abiertos y a una definición del significado de conocimiento, enseñanza y aprendizaje (véase Self, 1990; Balacheff, 1994 y Balacheff & Kaput, 1996 y Cuevas, 1996).

En ese sentido, Balacheff & Kaput (1996) nos advierten por una parte, de la carencia de una heurística en los ITS y por otra, de la importancia de determinar en cada ambiente inteligente de enseñanza, por medio de la computadora, el contrato didáctico subyacente. Esto es, definir con claridad el planteamiento didáctico del sistema y el papel o rol que tienen los diversos participantes de estos ambientes. Esto, desde luego, nos compromete a exponer con claridad el planteamiento didáctico en que se apoya nuestro sistema.

Modelo propuesto de un entorno computarizado inteligente para la enseñanza de las matemáticas

Se propone la creación de un modelo alternativo de ITS para la enseñanza de las matemáticas que a grandes rasgos consta de tres grandes componentes: La primera es la componente tutorial que a grosso modo contiene:

a) El dominio de conocimiento que se refiere, en general, al conocimiento matemático necesario para desarrollar un tema. Este conocimiento se estructura en base a la resolución de problemas específicos.
b) El planteamiento o estructura didáctica del sistema, que dadas la características del ITS a proponer, es la parte fundamental del sistema y se responsabiliza del tipo y la dosificación de los problemas que se presentarán al estudiante. Así como también de revisar y apoyar al estudiante en su trabajo de solución, mediante observaciones, ejemplos, explicaciones breves sobre el significado o definición de algunos de los conceptos involucrados en las diferentes etapas del proceso de solución. Nuestro sistema intenta seguir el modelo didáctico propuesto por Cuevas (1998) el cual se basa y parte de la didáctica propuesta por Aebli (1958/1995), adecuándola y extendiéndola específicamente para la enseñanza de las matemáticas en los niveles medio superior y superior.
c) Un tipo de modelo de error del estudiante, formando un banco de errores, en base a los que estadísticamente son más frecuentes. Desde luego este apartado tiene un sentido muy diferente, y mucho más limitado, al modelo de estudiante propuesto por Anderson et al (1990) o VanLehn (1988).

La segunda componente contiene:

a) El ambiente instruccional que consta del diseño de la pantalla, con todos los elementos con los que cuenta un estudiante al interaccionar con el sistema. A grandes rasgos, en el ambiente que se propone se dispone de: El tema y subtema en donde se encuentra. Un menú que le permite navegar o dirigirse a la parte que él considere pertinente. Otro menú barra, dispuesto en iconos que le permiten el acceso a:

- Una ayuda, que fundamentalmente le indica qué tipo de respuesta espera el sistema así como algunas instrucciones de edición.

- Un apoyo que consiste de breves hechos teóricos y ejemplos necesarios para resolver la parte del problema en donde se encuentre. Este apoyo es como un "ligero empujón" para ayudar al estudiante a resolver el problema propuesto. Por supuesto éste es variable y depende del problema y nivel de solución en que el estudiante esté.

- Un texto sobre los temas que se tratan, dispuesto en forma de hipertexto para consulta más detallada.

- Una lección, en donde en forma interactiva se introducen los conceptos más importantes del tema.

- Algunas herramientas generales como son la calculadora, etc.

- Y dependiendo del problema alguna herramienta particular como: evaluación puntual o por intervalo de una función, etc.

Desde luego todo lo anterior se diseña o propone de acuerdo al planteamiento didáctico del sistema.

b) La interfase de comunicación entre la computadora y el estudiante, que tiene la responsabilidad de la aceptación de la respuesta a un problema por parte del estudiante y de la presentación de problemas, ecuaciones, etc. Esta interfase de comunicación cuenta además, con un editor bien estructurado, que le permite al usuario corregir con libertad su respuesta antes de darle entrada para que la analice el tutor, el cual, toma la respuesta hasta que el estudiante lo indica. En resumen esta interfase se responsabiliza, esencialmente, de la presentación de información que el sistema suministra al estudiante y de la aceptación de entrada de información haciendo una primera revisión inmediata, de tipo sintáctica.

La tercera y última componente del sistema es el estudiante humano.

Es necesario señalar el hecho de que, en este modelo de tutor, existen diferencias substanciales con respecto al ITS tradicional. En primer término, no se pretende substituir al maestro. Esto es, el ITS propuesto es un tutor que pretende ser un apoyo para el profesor en sus cursos tradicionales de matemáticas, permitiéndole descargar una parte considerable de su labor docente. En segundo término, no se pretende proponer un modelo de estudiante completo, que se anticipe a todas las respuestas posibles de un alumno, en cambio se trata de implementar una componente que en base a nuestra experiencia docente, tenga la posibilidad de hacer un análisis de los errores más frecuentes, que comete un estudiante cuando resuelve un determinado problema de matemáticas.

Es importante hacer notar como punto de reflexión, que desde nuestro punto de vista, posiblemente las dos premisas: substitución total del profesor y modelo de estudiante, son las que más han detenido el proceso de desarrollo de los sistemas tutoriales. Creemos, que la modificación de esas dos premisas nos permitiría tener sistemas tutoriales, que si bien son sistemas más limitados en el desarrollo teórico del conocimiento, al no elaborar teorías acerca de cómo aprende un individuo, o en general, una teoría del conocimiento, sí podrían arrojar resultados positivos en la educación (Moreno, 1997).

Desde luego, esta propuesta de sistema tutorial no pretende crear el paradigma de un ITS, ni mucho menos, pero sí contribuir con una propuesta alternativa en la producción de entornos computarizados inteligentes que apoyen la enseñanza de las matemáticas.

El antecedente más inmediato de este tipo de modelo se encuentra en LIREC un sistema tutorial sobre la línea recta desarrollado por Cuevas (1994), el cual ha probado su eficacia en el salón de clases de un curso de matemáticas en preparatoria (Moreno 1997), elevando el promedio de 6.0 a 8.0 en una escala de 0 a 10 y en CalcDife.

En la propuesta de CALCDIFE-II, se agrega al modelo anterior, la creación de un banco de problemas inteligente que da la posibilidad de generar funciones con características particulares que el estudiante o usuario puede seleccionar. Por ejemplo, en el caso de polinomios, éstos se clasifican en forma parametrizada, de acuerdo a una serie de características como son: su grado, por tener o no, el tipo de paridad correspondiente (lo que implica simplicidad en el manejo algebraico) y por el número de puntos críticos y puntos de inflexión posibles, de acuerdo a sus características anteriores.

Planteamiento o estructura didáctica del sistema

El planteamiento o estructura didáctica del sistema sigue fundamentalmente, el modelo didáctico propuesto por Cuevas (1998) el cual se basa y parte de la didáctica propuesta por Aebli (1958/1995), adecuándola y extendiéndola específicamente para la enseñanza de las matemáticas en los niveles medio superior y superior. Ambas didácticas se fundamentan en una epistemología constructivista derivada de la psicología de Jean Piaget. quien propone como algo fundamental en el proceso de la formación de la inteligencia a la acción (Piaget, 1947).

El principio fundamental de esta didáctica es la acción por parte del educando, de acuerdo a ello hemos diseñado nuestro sistema sobre la base de que el estudiante al interactuar con el sistema, esté siempre resolviendo o planteando algún problema; por lo que podemos decir, que nuestro sistema se basa en la acción. El sistema es fundamentalmente interactivo. Pero esto no es suficiente, para que un estudiante adquiera un determinado concepto, como se marca en esta didáctica, es necesario plantear diferentes ejercicios de tal manera que se desarrollen operaciones efectivas, primero en un sentido y después en el sentido inverso, con el propósito de interiorizar las acciones y llegar finalmente a las operaciones intelectuales, con el fin de lograr la adquisición del concepto deseado.

Además, sería deseable para promover la asociatividad de las operaciones, poder brindar en cada problema la posibilidad de varias formas de solución, pero ante las limitaciones en la elaboración de un ITS de tiempo real, esto no siempre se puede ofrecer. Sin embargo, el sistema no impone en ningún momento una determinada forma de solución, con lo que si bien, no la promueve tampoco se opone a la asociatividad. Esto le impone al sistema la necesidad de crear estructuras que le permitan revisar expresiones matemáticas, escritas de muy diversas formas que pueden ser matemáticamente equivalentes.

Siguiendo adelante en este orden de ideas dentro de la propuesta didáctica se sugiere que cada vez que se enseñe un concepto trascendente en el curso, se propongan actividades posteriores en las cuales ese concepto recién adquirido, sea un elemento de análisis para la comprensión de otros conceptos o problemas más complejos, esto desde luego se deriva de la teoría del equilibrio de Piaget(1964).

Una parte importante de esta propuesta didáctica es intentar situar ese concepto en diferentes registros o sistemas de representación que le sean propios, así como promover la articulación entre ellos.

Puntualicemos lo anterior con un ejemplo, dentro del sistema se solicita al estudiante el cálculo de las raíces reales de un polinomio: Orientar las operaciones en el sentido directo, sería el cálculo de las raíces del polinomio, en forma exacta para los casos sencillos o cuando no lo sean tanto, por medio de algún método de aproximación, que puede ser por tanteo. En este caso se puede ofrecer al estudiante como herramienta particular, la posibilidad de evaluar al polinomio: por rango, esto es, en varios puntos de un intervalo o por evaluación puntual; también se tiene la posibilidad de visualizar una porción de gráfica.

Orientar la operación en el sentido inverso sería dar raíces y solicitar al estudiante un posible polinomio asociado a ellas. Darle asociatividad a la operación consistiría en ofrecerle al estudiante métodos alternativos para encontrar las raíces de un polinomio cúbico, por ejemplo, se puede realizar encontrando la primer raíz mediante el método de Newton, y posteriormente dividir mediante la división sintética y repetir el proceso, o bien mediante el método de Tartaglia.

Ofrecer, al estudiante, diversos sistemas de representación podría ser: Geométrico, visualizar en un plano coordenado las raíces encontradas; Real o físico, encontrar el nivel de flotación de un objeto; Aritmético, mostrar en una tabla los acercamientos a la raíz con valores aparejados de la variable independiente y la función; Algebraico, factorizar al polinomio con sus raíces encontradas.

Para establecer la interiorización podría pedirse el cálculo de puntos críticos de la función definida por el polinomio, aquí las raíces se constituyen en un elemento necesario para poder determinar esos puntos críticos. Procesos de optimización, máximos y mínimos en donde, en general, el cálculo de las raíces viene a ser un medio para lograr la operación deseada.

Adicionalmente, se propone al estudiante desarrollar operaciones (en el mismo sentido piagetiano) entre dos o más registros que intenten promover la articulación entre ellos. Así por ejemplo, si un alumno calcula las raíces de un polinomio se le pide la factorización del mismo y la ubicación de las raíces en el plano coordenado y a su vez, en otro ejercicio, se le da un plano coordenado con las raíces de un polinomio dibujadas y se le solicita escriba un polinomio que posea esas raíces y su factorización, también se le puede dar el polinomio factorizado y pedirle el valor de las raíces y su ubicación en el plano coordenado.

Por otra parte la ayuda que el tutor proporciona nunca es impuesta. La experiencia docente nos lleva a implementar el principio de mínima ayuda (Aebli, 1995), es decir a que el STI proporcione ayuda o auxilio sólo si el estudiante lo solicita y a implementar esta ayuda en forma dosificada y a varios niveles, con la idea de que a veces basta un "ligero empujón" para que el estudiante resuelva por sí mismo el problema planteado. De no ser así, el estudiante puede recurrir al siguiente nivel de ayuda. O regresar en el sistema a problemas previos que le ayuden en la tarea actual. En este sentido el ITS jamás resuelve por el estudiante el problema planteado.

Otro aspecto consiste en marcar con precisión el error que se cometa al intentar resolver un determinado problema, dando en el mensaje correspondiente un ligero "tip" para la corrección del mismo o cuando proceda, mostrando sus consecuencias. Todo lo anterior a excepción del error se proporciona sólo si el estudiante lo solicita, adaptando de este modo la enseñanza a las necesidades del alumno.

Propuesta especifica: CALCDIFE II

Se denomina CALCDIFE II de CALCulo DIFErencial y por que tiene como uno de sus antecedentes al sistema semitutorial CALCDIFE elaborado por Andreu y Cuevas, 1997 en prensa.

De acuerdo con el planteamiento didáctico propuesto se recomienda que para iniciar un determinado tema o introducir un concepto de matemáticas, es conveniente hacerlo partiendo de un proyecto de acción. Esto es, de proponer un problema o varios, que constituyan ese proyecto de acción y cuya resolución lleve a los estudiantes a la adquisición de los conceptos matemáticos en cuestión.

En ese sentido se ha elegido, como proyecto de acción, la construcción justificada de la gráfica de una función en un sistema de ejes coordenados cartesianos. Las características fundamentales de una función en su representación gráfica, quedan determinadas por las variables significativas que, en este caso, se considera que son las siguientes: dominio, límites (o valores según sea el caso) en los extremos del dominio, raíces, continuidad, asíntotas horizontales y verticales; máximos y mínimos locales; monotonía, concavidad, puntos de inflexión y rango.

Así, nuestro problema inicial de obtener justificadamente la gráfica de una función, implica que se haga aplicando el cálculo diferencial y además, de acuerdo con el enfoque didáctico, queda referenciada una posible división del problema para poder abordarlo por partes. Otro aspecto importante del planteamiento didáctico es la dosificación y graduación de la dificultad de los problemas y consecuentemente los conceptos a enseñar. Esto condujo a seleccionar los tipos de funciones que se tomarían para introducir los conceptos y elementos antes señalados, por lo que se decidió empezar con el modelo de función más sencillo de analizar, tanto desde el punto de vista gráfico como desde el analítico, que es el polinomio. Después se consideran funciones definidas por partes o intervalos (donde la función en cada parte es un polinomio) y por último funciones racionales. Así, se pueden ir introduciendo los conceptos antes señalados de manera interesante y natural.

A grandes rasgos CALCDIFE II ofrecerá al estudiante la posibilidad de que él proponga una función o que la proponga el sistema de su banco inteligente de problemas, en el que si el estudiante quiere, puede escoger sus características. Una vez que se tenga la función se ofrece:

1. La opción de ir obteniendo y evaluando paso a paso cada uno de los conceptos de la función antes mencionados según sea su tipo, con asesoría disponible. Esta asesoría, disponible en todo tiempo, se clasifica en cinco niveles: Ayuda, Apoyo, Texto, Lección, (descritas anteriormente) y el Error.- que es la información específica que se señala cuando se comete una equivocación. Además de la herramienta general como la calculadora y otra especializada o particular como la evaluación de la función que se está trabajando etc.

2. La posibilidad de pasar directamente a la representación gráfica de la función y de ahí, evaluar o reconocer cada uno de los conceptos correspondientes a ese tipo de función.

Se hace hincapié en que habrá un cierto orden sugerido para ir enfrentando las cuestiones, pero el usuario siempre tiene libertad de movimiento dentro del sistema. La idea general de todo esto puede apreciarse en el sistema semitutorial CALCDIFE I (Andreu y Cuevas, 1997 en prensa) que es el antecedente inmediato de CALCDIFE II.

Bibliografia

Aebli, Hans. (1958). Una Didáctica Fundada en la Psicologia de Jean Piaget, decimonovena edición. Kapelusz, Argentina.

Aebli, Hans. (1995). 12 Formas Básicas de Enseñar. Una Didáctica basada en la Psicología, segunda edición. Narcea, España.

Anderson, J., Corbett, A., Patterson, E. (1990). Student Modeling and Tutoring Flexibility in the LISP, edited by C. Frasson, G. Gauthier: Intelligent Tutoring Sistem; at the Crossroad of Artificial Intelligense and Education, Ablex Publishing Corporation. USA.

Andreu, Ma. Eugenia, Cuevas, Armando. (1997). CALCDIFE un Programa Computacional y Libro de Ejercicios de Apoyo Didáctico a un Curso de Cálculo Diferencial, Iberoamérica (En prensa), México

Balacheff, N. (1994). Artificial Intelligence and Real Teaching, Learning From Computers: Mathematics Education and Technology, edited C. Keitel and K. Ruthven. Springer Verlag, Berlin.

Balacheff, N. and Kaput, J. (1996). International Handbook of Mathematics Education; Eds. Bishop et al. Kluwer Academic Publishers. Holanda.

Berliski, David (1995). A Tour of the Calculus, Vintage Books Edition 1997.

Burns, Hugh L. and Capps Charles G. (1988). Foundations of Intelligent Tutoring Systems: An Introduction. Foundations of Intelligent Tutoring Systems; edited by M. Polson and J. J. Richardson, Lawrence Erlbaum Assosiates Publishers, USA.

Cuevas, Armando. (1994). Sistema Tutorial Inteligente LIREC, Tesis doctoral, Centro de Investigacion y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cuevas, Armando. (1996). Sistemas Tutoriales Inteligentes. Investigaciones en Matemática Educativa, Editor F. Hitt, Iberoamérica, México.

Cuevas, Armando. (1998). Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Matemáticas, basada en la Psicología de Jean Piaget, Iberoamérica (En prensa), México.

Duval, Raymond. (1988). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros, Antología en Educación Matemática., Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.

Moreno, Salvador. (1997). Experimentación educativa en el aula: Uso del Sistema Tutorial Inteligente LIREC versus la enseñanza tradicional en el curso de Matemáticas III del sistema CCH-UNAM. Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

O'Shea, Tim Self John. (1983). Learning and Teaching with computers, Artificial Intelligence in Education. Aspectrum Boock, USA.

Piaget, Jean, (1964). Seis Estudios de Psicología. Planeta-Agostini,1993.

Piaget, Jean. (1947). Psicología de la Inteligencia. PSIQUE, Ed. 1987, Argentina.

Tall, David. (1996). Functions and Calculus; International Handbook of Mathematics Education, chapter 8. Kluwer Academic Publishers. Holanda.

UAM-Azc. (1997).1er informe de actividades de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM-Azc. Correspondiente al año de 1997.

Usando tablas y gráficos para estudiar situaciones modelables con sucesiones recursivas

Gilda de La Rocque Palis
Departamento de Matemática, Puc-Rio
Brasil

Lynne Ipiña
Department of Mathematics, University of Wyoming
Estados Unidos

En este Taller fueran propuestas a los participantes "situaciones-problemas" que pueden ser modeladas usando sucesiones recursivas (ecuaciones en diferencias finitas de primer orden) y analizadas con los recursos que proveen las hojas de cálculo Excel y la calculadora TI-83. Discutimos con los asistentes los diferentes abordajes posibles de un mismo problema - algebraico, tabular y grafico. También fueron contemplados los procesos de generalización realizados a partir del análisis de algunos resultados numéricos. Concluimos el taller dando una estructura matemática de puntos fijos para explicar graficamente algunos casos investigados por los participantes. Las hojas de cálculo son consideradas como de fácil aprendizaje y han ganado una gran aceptación de la comunidad mundial. En los últimos años, han sido objeto de estudio de muchos investigadores en Educación Matemática porque permiten manipular datos numéricos generados por funciones algebraicas y transcendentales, relacionar datos creados por diferentes expresiones y construir representaciones gráficas.

Los participantes llegaron a explorar dos ejercicios. El primero fue diseñado para recordarles las sucesiones definidas tanto en forma recursiva como cerrada. También sirvió para familiarizarlos con las hojas de cálculo, especialmente con procedimientos para entrar y obtener tablas y gráficas. El segundo ejercicio brindó más oportunidad para investigar como el comportamiento de una sucesión puede depender de los valores de sus parámetros.

A continuación presentamos las actividades tal como fueron propuestas a los participantes.[1] Incluimos un resumén de la información sobre puntos fijos. Agregamos algunos comentarios sobre el trabajo de los participantes además de posibles extensiones programados pero no realizados aquí por falta de tiempo. El taller fue realizado en 3 horas.

Actividad 1 Número de dobleces: Suponga que se puede doblar a la mitad una hoja de papel de 1mm de espesor un número ilimitado de veces. ¿Cuál es el número de dobleces que es necesario hacer, en esta hoja, para obtener un espesor de papel de 380.000 Km (medida aproximada de la distancia de la Tierra a la Luna)?

Para empezar, intente resolver el problema sin usar la hoja de cálculo. Puede usar la calculadora que ofrece Windows. Después resuelva el problema numéricamente empleando Excel, o sea defina dos columnas, una para valores de n y otra para los valores de su sucesión. A continuación practique la producción de un gráfico con esta sucesión.

Actividad 2 Una persona pide un financiamiento bancário de R$ 30.000,00 para comprar un departamento.[2] El banco cobra una tasa de interés mensual de 1%. ¿Cuántos meses serán necesarios para el pago total del financiamiento si esa persona paga: a) R$400,00 por mes? b) R$350,00 por mes? c) R$250,00 por mes? d) R$300,00 por mes?

---

[1] Eliminamos aqui la major parte de las instruciones referentes a las hojas de cálculo

[2] R$ es la moneda brasileña y se llama Real.

Trabajo presentado en la Relme 12, celebrado en la Universidad Nacional de Colombia, del 6 al 10 de julio de 1998

1. Implemente el problema en la hoja de cálculo sabiendo que **Xn+1** = **Xn** . (**1** + **j**) - **p** donde **X0** es el valor del préstamo, **j** es la tasa de interés mensual, **p** es la cuota mensual y **Xn** es el saldo del deudor después del pago de la n-ésima cuota mensual. ¿Qué se observa sobre la evolución del saldo deudor?. ¿Puede justificar sus observaciones?. ¿Cuáles son las respuestas a las preguntas anteriores?.

2. Encuentre una expresión, para la misma sucesión, que dé el saldo del deudor **Xn** en función de **n**. (Esta es una fórmula "cerrada" para la sucesión (**Xn**) que fue dada en forma recursiva en el inciso 1). ¿Puede justificar lo que observó al trabajar con el inciso 1) usando esa nueva descripción de la evolución del saldo del deudor?.

La ecuación **Xn+1** = **1,01 Xn - p** modela la situación planteada en la actividad 2. Pedimos a los participantes experimentar con diferentes valores de p y observar los diferentes comportamientos de esta sucesión. Un valor particular, p = 300, fue sorprendente; pues genera una sucesión constante. Esto se explica analizando la función subyacente f(x) = 1,01 x - p que tiene un punto fijo **X0 = 30 000**.

Para que los participantes pudieran hacer este análisis con f, presentamos un método gráfico. Este método emplea una recta auxiliar y = x, y presenta la sucesión **Xn+1 = f (Xn**) en dos formas: 1) como puntos sobre el eje horizontal y 2) como una tela de telераña ("web") alrededor de la linea y = x. Ambas formas nos permiten visualizar el límite de la sucesión a medida que $n \to \infty$. En los últimos minutos del taller observamos gráficas del ejercicio 2 usando imágenes proyectadas de una calculadora, TI-83.

Realizamos el taller en forma tradicional de grupos. O sea, los participantes se repartieron en un laboratorio de computadoras, uno o dos por máquina. Ellos se apoyarom em policopiados. Mientras ellos trabajaron nosotras dirigimos su atención a aspectos críticos de las tablas, gráficos y a las ecuaciones dando énfasis a estructura global de la actividad. De vez en cuando compartimos con ellos los propósitos tanto de las preguntas como de su presentación. Los participantes trabajarón intensivamente durante el tiempo dedicado al uso de Excel

Con relación a la primera actividad, la mayoria de ellos modeló la situación usando la desigualdad 2^n ≥ 3,8 * 10^5. Una vez concientes de las unidades de las medidas del problema, ellos modificaron inmediatamente para 2^n ≥ 3,8 * 10^11. Algunos de ellos buscaron, inicialmente la respuesta de la pregunta calculando potencias de 2 con la calculadora. Otros transformaron la desigualdad arriba en otra desigualdad **N** log 2 ≥ log (3,8 * 10^11). Luego todos resolvieron el problema empleando Excel.

Encuanto a la segunda actividad, algunos participantes hallarón la respuesta al inciso 1) correspondiente a p = 400 y pasaron inmediatamente al inciso 2). Ahí sugerimos que intentaran resolver el resto del inciso 1), pues que aquello no se restringía a una mera repetición del mismo cálculo. Una vez vistos los resultados de 1b) – 1d) ellos empezaron a preguntarse sobre el por qué de las diferencias en el comportamiento producidas por los diferentes valores del parámetro p.

En el caso de p = 250, algunos producieron tablas bastante largas antes de darse cuenta que la sucesión es cresciente en este caso. En el inciso 2 solo pudimos observar que los participantes se encontraban en diferentes etapas. Algunos hallaron una fórmula cerrada tan inconveniente que ellos no llegaron a verificarla con Excel, Otros tuvieran más éxito y estaban en pleno proceso de la verificación de sus fórmulas.

Otra actividad que pensamos realizar en el taller consiste en una situación modelada por una ecuación del tipo **Xn+1** = 0,8 **Xn** + 50, con varios valores iniciales **X0.** En este problema la sorpresa, o sea, el factor desequilibrante, es que la sucesión converge a 250 para todo valor inicial.

Los participantes considerón los ejercicios realmente interesantes y prometan ponerse en contacto com nosotras para relatarnos sus propias experiencias al aplicar estos ejercicios asi como para solicitar información sobre otras posibles aplicaciones de las hojas de cálculo en la enseñanza de la matemática. Con el fim de informarles a los interesados en este tema, adjuntamos algunas referencias al final de esta comunicación.

Referencias Bibliograficas

Arganbright, D. (1984a). The electronic spreadsheet and mathematical_algorithms. The College Mathematics Journal ,15, 148-157.

Arganbright, D. (1984b) Mathematical applications of electronic spreadsheet. In V. Hansen & M. Zweng (Eds.), Computers in Mathematics Education (pp.184-193). NCTM.

Bannard, D. N. (1991). Making Connections through Iteration. In M.J.Kenney & C.R. Hirsch (Eds.), Discrete Mathematics Across the Curriculum K - 12 (pp.178-183). NCTM.

Botelho, C.G.M. (1998). Estudo de seqüências numéricas através da resolução de situações problema e do uso de planilha eletrônica: Investigação com professores. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática. Puc-Rio.

Cornell, R.,H. & Siegfried, E. (1991). Incorporating Recursion and Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum. In M.J. Kenney & C.D.Hirsch (Eds.), Discrete Mathematics Across the Curriculum K - 12 (pp.149-157). NCTM.

Dugdale, S.(1994). K-12 teacher's use of a spreadsheet for mathematical modeling and problem solving. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 13 (1), 43-68.

Heid, M.K., Choates, J. Sheets, C. & Zbiek, R.M. (1995). Algebra in a Technological World. NCTCM Addenda Series.

Maxim, B. & Verhey, R. (1991). Using spreadsheet to introduce recursion and difference equations in High School Mathematics. In M.J. Kenney & C.D.Hirsch (Eds.), Discrete Mathematics Across the Curriculum K - 12 (pp.158-165). NCTM.

Palis, G.D.L. (1998) Let' s Ask "Why?" After "What if?". Pré print. Departamento de Matemática. Puc-Rio, Brazil, Série C – 01/98.

Ponte, J. P., Nunes, F. & Veloso, E. Computadores no Ensino de Matemática, *Estudos de Caso*, Projeto Minerva, Universidade de Lisboa, Portugal.

Quesada, A . R. (1996). On the Impact of the First Generation of Graphing Calculators on the Mathematics Curriculum at the Secondary Level. Paper presented for the Topic 18 Roles of Calculators in the Classroom at the 8th International Congress of Mathematical Rducation, Sevilla, Spain.

Sandefur, J.(1992).Technology, linear equations, and buying a car. The Mathematics Teacher , 85, 562-567.

Sullivan, M.M. & Yarema C.H. (1996) Patterns, Fuctions, and Recursion for the Muddle School Teacher. Joint Mathematics Meeting, January10-13, 1996, Orlando, Florida.

Carteles Ganadores

Innovaciones en la enseñanza de ecuaciones diferenciales para Ingeniería Química e Ingeniería de Alimentos

Víctor Martínez Luaces, Arturo Gómez, Ricardo Acher, Lorena Francini[1]
Cátedra de Matemática de la Facultad de Química, Universidad de la República,Montevideo Uruguay

Objetivo

En el año 1996 se propuso a la Cátedra de Matemática el dictado de un curso denominado Matemática III para Ingeniería de Alimentos. Si bien dicho curso figuraba en el plan de la carrera, creado algunos años atrás, el mismo nunca se había dictado. De modo que el curso iba a ser dictado por primera vez en el país y por lo tanto la población estudiantil inevitablemente iba a constituir un núcleo sumamente heterogéneo. En efecto, al no haberse dictado desde la creación de la carrera, en esa ocasión se reunieron estudiantes de más de diez generaciones.

Desde un comienzo se planteó como un objetivo que el curso tuviera una profunda articulación con otras materias de la carrera y que se plantearan en lo posible problemas de la vida real y profesional.

El programa contenía temas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y en Derivadas Parciales (EDO y EDP) y Transformada de Laplace (T de L). Estos temas facilitaban, en principio, el logro del objetivo propuesto ya que aparecen naturalmente en materias como Física, Química General, Fisicoquímica, Diseño de Reactores, Procesos Físicos, Electrotecnia, etc.

Sin embargo, las experiencias realizadas en otros cursos de Matemática de Facultad de Química y de otras facultades como Ingeniería y Ciencias Económicas, nunca habían logrado cumplir ese objetivo en forma efectiva. Más aún, un trabajo realizado en ese mismo año 1996, mostró que el reclamo mayoritario de estudiantes, egresados y autoridades respecto a los cursos de Matemática en las distintas ramas de la Ingeniería, iba en esa misma dirección. De hecho, sólo los matemáticos profesionales (y no todos) defendieron la práctica usual de dar cursos de Matemática sin prestar atención al contexto (ver [1]).

Metodología

Visto el fracaso de propuestas anteriores, se prestó especial atención a la conformación del equipo docente a cargo de la tarea, a la redacción de los repartidos de ejercicios, la selección de los problemas de aplicación y en general a la metodología a seguir en la búsqueda de los objetivos propuestos.

En cuanto el equipo docente, se optó por respetar la opinión mayoritaria de los expertos consultados en las entrevistas realizadas en el trabajo antes mencionado [1]. Dicha opinión mayoritaria se expresó favorablemente hacia la conformación de un equipo multidisciplinario. En los hechos, se constituyó un equipo que contemplara ambos perfiles, el matemático y el correspondiente a Ingeniería Química (no se incluyeron Ingenieros en Alimentos, ya que al ser nueva la carrera aún no hay egresados).

Antes de empezar el curso, el equipo antes mencionado realizó una búsqueda bibliográfica que concluyó con un conjunto de repartidos de ejercicios de Matemática a los que e intercalan problemas de aplicación tomados muchos de ellos de asesoramientos realizados a

[1] victor@bilbo.edu.uy / victor@elmer.fing.edu.uy / rjacher@bilbo.edu.uy / francini@adinet.com.uy

otras cátedras o institutos y en algún caso de auténticos trabajos de investigación en Matemática Aplicada.

Muchas veces, el proyecto de juntar las clases de Matemática con las aplicaciones no funcionó porque al momento de realizar las evaluaciones no se tuvo en cuenta esa parte fundamental de la asignatura, que es la aplicación de la misma. Para corregir este error se planteó desde un comienzo que la evaluación de la asignatura contendría ejercicios puramente matemáticos y problemas de aplicación que incluían la modelación, la resolución de la parte estrictamente matemática y la interpretación de los resultados tanto matemáticamente como desde el punto de vista de otras ciencias.

Con respecto a la forma de dar las clases, se adoptaron distintas modalidades. Por ejemplo, el curso teórico se hizo de manera expositiva, aunque con continuas interrupciones para dar cabida a las intervenciones de los estudiantes. Cada tema nuevo era introducido a partir de un problema real, no matemático, tal que su modelación llevaba hacia el nuevo concepto a explicar. Una vez llegado a ese punto se planteaban las definiciones y teoremas matemáticos, luego de escuchar las ideas provenientes de los estudiantes tratando de formalizarlas y ver sus posibles aciertos y también sus limitaciones. Para terminar la exposición de los conceptos teóricos se presentaba como ejemplo la solución del propio problema que había originado todo el planteo.

El curso práctico en 1996 era dictado al menos por dos docentes simultáneamente: un Ingeniero y un matemático. La dinámica era la siguiente: el Ingeniero planteaba un problema concreto, tomado de otra asignatura o de la práctica profesional, luego, con la ayuda de los estudiantes el mismo era modelado y transformado en un ejercicio matemático. Este ejercicio matemático a veces era resuelto por el docente de formación matemática y en otros casos era resuelto por los propios estudiantes, que trabajaban en pequeños grupos. Mientras los grupos trabajaban en el ejercicio, los docentes recorrían el salón contestando dudas y planteando preguntas relacionadas. Una vez que el ejercicio había sido convenientemente trabajado se hacía una discusión de los resultados obtenidos los cuales eran interpretados en términos del problema original. Esa discusión que incluía la modelación, la resolución matemática, la interpretación de los resultados y la validez de los mismos era realizada conjuntamente por toda la clase con ambos docentes. En casi todas las clases prácticas se llegó a trabajar con todo el equipo (es decir, con tres docentes) para un total aproximado de 30 alumnos lo que daba una relación personalizada que permitía lograr un excelente aprovechamiento.

A los horarios de prácticos se agregaban clases de consulta (una por cada docente y a veces más) que permitían aclarar dudas y reforzar las ideas desarrolladas en teóricos y prácticos.

Al año siguiente, con más tiempo para preparar el curso se dividieron los horarios de clases prácticas en ejercicios y aplicaciones. En efecto, la población estudiantil de 1997 triplicó a la del año 1996 obligando a crear dos grupos prácticos. En uno de ellos se hacían ejercicios en la primera mitad y aplicaciones en la segunda y en el otro se hacía al revés. Esto se hizo de esta manera debido a la superpoblación, ya que era imposible continuar con un solo grupo atendido por los tres docentes siendo que el alumnado superaba los 90 estudiantes. Entonces, se dividió en dos grupos de 45 estudiantes aproximadamente y el docente de formación matemática trabajaba los ejercicios mientras que el docente con formación en Ingeniería trabajaba las aplicaciones en el otro grupo, apoyado por el otro docente matemático. Una vez llegado a la mitad del tiempo el docente ingeniero se trasladaba al salón del otro grupo y se repetía el procedimiento.

Esta metodología, planteada para mantener el esquema de trabajo pese a la masificación tenía ciertos inconvenientes. Por ejemplo, resultaba difícil llegar justo hasta la mitad de la clase para ir al otro grupo sin interrumpir bruscamente lo que se estaba realizando. A su vez para el docente de ese otro grupo resultaba difícil terminar lo que estaba haciendo justo a tiempo para la llegada del docente que iba a trabajar con las aplicaciones.

Estos inconvenientes aunados a u nuevo aumento de la población a más de 120 estudiantes llevó a una nueva modificación para 1998. En el curso de ese año se decidió separar las clases de ejercicios, dadas por los docentes de matemáticas de las clases de aplicaciones que se seguían dando de manera conjunta por docentes de distinta formación.

Además de esas clases de ejercicios y las clases de aplicaciones, se agregaron clases de laboratorio en que se volvían a resolver los ejercicios y problemas ya vistos pero ahora mediante técnicas computacionales.

El trabajo de curso, que solía ser una pequeña prueba escrita tradicional, se sustituyó para aquellos estudiantes que así lo deseaban por un pequeño trabajo especial realizado con computadora.

En resumen, el curso 1998 contaba con 5 módulos diferentes: teóricos, prácticos, aplicaciones, laboratorio y consultas.

Para el curso próximo, a realizarse en el segundo semestre de 1999 se piensan editar librillos separados con los ejercicios puramente matemáticos y los problemas de aplicación de modo que los estudiantes cuenten con todo el material desde el primer día del curso.

En cuanto a los exámenes suelen tener cuatro ejercicios o problemas de aplicación, según el caso, y abarcan los temas EDO, T de L y EDP. Las cuestiones de Estabilidad y Estudio Cualitativo suelen aparecer ligadas a los sistemas de EDO, los que frecuentemente se originan en problemas sencillos de Cinética Química (ver [2], por ejemplo). De igual modo. La T de L suele aparecer ligada a problemas de Diseño de Reactores, ya que es la herramienta que habitualmente se utiliza en el tema Reactores Reales [3] Las EDO que aparecen en las evaluaciones por lo general corresponden a problemas de oscilaciones mecánicas o de circuitos eléctricos, como por ejemplo [4].

Finalmente, las EDP que se plantean en el curso y en su evaluación suelen estar ligadas a problemas de Transferencia de Calor y de Transferencia de Masa, en su mayoría problemas de la vida real tomados de asesoramientos realizados a distintos departamentos del Instituto de Ingeniería Química de la Facultad de Ingeniería. Por ejemplo, en los últimos exámenes aparecieron adaptaciones de problemas reales de difusión de glucosa en una fruta, secado de alimentos, tiempo de respuesta de un electrodo e oxígeno disuelto, etc.

Finalmente, cabe destacar que además de los librillos de ejercicios y de aplicaciones y de las carpetas con exámenes resueltos, existen notas del curso teórico en Internet [5]. Es más, este curso fue el segundo curso universitario en Uruguay que apareció en Internet (el primer curso fue "Computación y Cálculo Numérico" también dictado por la Cátedra de Matemática de la Facultad de Química, conjuntamente con la Cátedra de Química Cuántica).

Resultados

El curso de Matemática III, pese a las dificultades antes mencionadas y al hecho de haber empezado con una población estudiantil extremadamente heterogénea logró una gran receptividad y muy buenos resultados, tanto en lo que hace a las evaluaciones de los estudiantes como a las evaluaciones docentes.

Con respecto a los exámenes, se propusieron problemas de nivel similar y aún mayor a los de otros cursos parecidos dictados años atrás en Facultad de Química. También se propusieron, con cierta frecuencia, problemas y ejercicios tomados de otras facultades y en todos los casos los porcentajes de aprobados fueron mejores en el curso mencionado Algo similar puede decirse de las calificaciones obtenidas por los alumnos.

En cuanto a la evaluación docente, ésta se realiza de manera anónima, a través de formularios que luego son procesados por un scanner sin participación de los docentes. Estas evaluaciones muestran resultados inusualmente buenos y en particular en preguntas referidas a la motivación, la inclusión de ejemplos de la vida real, la aplicabilidad a otras asignaturas, la utilidad en cuanto a la formación, etc., se lograron guarismos sin precedentes. En efecto, en todas esas preguntas la evaluación superó los nuevo puntos sobre escala de diez, mientras que en otros cursos de Matemática nunca supera un seis en diez.

El propio incremento de la matrícula (35 estudiante en 1996, 96 estudiantes en 1887 y 121 en 1998) muestra el nivel de aceptación del curso. Más aún, en 1998 se realizó una encuesta que permitió comprobar que un tercio de los estudiantes estaban realizando la materia en forma extracurricular, ya que la misma no estaba en su plan de estudios. No es frecuente en ningún lado, y menos entre estudiantes de Química, que uno de cada tres anotados en un curso de Matemática lo haga por propia voluntad y no porque así lo indica el plan de estudios.

Otro aspecto a destacar es que por primera vez los estudiantes que ingresan a Fisicoquímica III (asignatura del sexto semestre que trata temas de Cinética Química) ya sabían modelar cinéticas de primer orden en varias etapas, con y sin equilibrio y resolver el correspondiente problema matemático por distintos métodos, incluyendo el análisis de estabilidad de las soluciones obtenidas.

De igual modo, se espera que en unos años, cuando lleguen a los cursos de quinto y sexto año, suceda lo mismo con las T de L aplicada al Diseño de Reactores.

Es particularmente significativo que estos conocimientos los hayan adquirido en el curso básico de Matemática.

Finalmente, cabe destacar que en contactos verbales al final del curso algunos alumnos dijeron que "todos los cursos de Matemática deberían ser como éste". Esta misma opinión la sustentaron los delegados gremiales estudiantiles en conversaciones con la cátedra.

Conclusiones

En los planes de estudio de las diversas carreras suele plantearse como objetivo de los cursos de Matemática, el proveer herramientas para otras disciplinas y crear ciertas habilidades en los estudiantes que les permitan afrontar con éxito las exigencias de otros cursos superiores. Es bastante común en Uruguay que en los cursos de Matemática tradicionales estos objetivos se cumplan muy escasamente o sencillamente no se cumplan en lo más mínimo.

De más está decir que estas situaciones deben ser desterradas. Los cursos con excesivas demostraciones y desarrollos formales, con un fuerte énfasis en cuestiones técnicas o incluso de notación, no deberían tener lugar en las carreras técnicas. Por el contrario, los cursos deben ser útiles para los estudiantes, formativos y profundamente motivadores.

Una buena forma de lograr la motivación e los estudiantes es presentar aplicaciones de los conceptos matemáticos vinculados con sus verdaderos intereses. De igual modo los conceptos deben ser presentados teniendo en cuenta su génesis histórica y los problemas (muchas veces de otras ciencias) que les dieron origen.

Volviendo al tema de cómo se presentan los conceptos matemáticos, un desarrollo gradual, con presentaciones sucesivas de profundidad creciente, en espiral, y con constantes alusiones a la aplicación en la carrera es el mejor medio para que el estudiante comprenda, fije y aplique estos conocimientos. En tal sentido, los cursos de Matemática deben adaptarse a la o las carreras para los cuales se dictan, en particular en este caso a la Ing. Qca. y la Ingeniería de Alimentos.

Esta adaptación de los cursos, los programas y hasta los temas puntuales a las necesidades de las distintas carreras exige un gran esfuerzo de estudio de programas de Matemática y otras materias, planteo de problemas interesantes y aplicados, articulación con otras asignaturas, etc.

El diseño de esos planes, programas y situaciones didácticas es una tarea muy importante que sólo un equipo multidisciplinario integrado por matemáticos, ingenieros y expertos en Matemática Educativa pueden realizar con éxito.

Bibliografía

MARTÍNEZ LUACES, V. Y CASELLA, S. ; "La Educación Matemática en las diferentes ramas de la Ingeniería en el Uruguay hoy", *Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*, La Habana, Cuba, 1996, págs 386-391.

MARTÍNEZ V., (1997), "Las Ecuaciones Diferenciales y su Estudio Cualitativo", *Educación en Física*, 3 (2), 32-35

WESTERTERP, K.R. Y OTROS, (1984), *Chemical Reactor Design and Operation*, 2ª. Edición, Manchester, John Wiley & Sons.

COURANT R., JOHN F., (1993), *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Vol. I y II, 1ª. Edición, México, Editorial Limusa S.A.

MARTÍNEZ V., (1996), *Notas para el curso de Matemática III de Ingeniería de Alimentos*, Montevideo, Uruguay, http://bilbo.edu.uy/~math/mathIII.html

La motivación al cambio: una propuesta de formación docente dirigida a catedráticos del área de matemáticas del nivel medio superior y superior

Rosa María Farfán
AES-Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Carlota Andrés, Silvia Castellanos, Luz María Mingüer, Eva Rubio
Instituto Tecnológico de Oaxaca
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
México

Es importante buscar la motivación al cambio en el estilo de enseñanza de la matemática, ya que existe una problemática a este respecto que se traduce en: altos índices de reprobación y de deserción en todos los niveles de educación. Esta problemática está relacionada en los niveles medio superior y superior, entre otras cosas, con la formación docente de los catedráticos, ya que en ellos la planta docente está constituida por profesionistas en diferentes áreas del saber pero sin una formación pedagógica, lo cual plantea de entrada, un grave problema, pues la gran mayoría se limita a reproducir un estilo de enseñanza que les fue transmitido por sus profesores en otros tiempos, para el caso de los maestros de matemáticas, este estilo "tradicional" de enseñanza consiste en la reproducción de un discurso centrado en la algoritmización, repitiendo el esquema: maestro expositor - alumno receptor, privilegiando con esta práctica, la memorización, así como una actitud pasiva en los alumnos, en los que se observa la ausencia de análisis y reflexión en torno a los problemas. En esta enseñanza tradicional se plantea un orden en la exposición de los contenidos, que no toma en cuenta las etapas que contempla el proceso cognitivo del estudiante

Como parte de esta problemática identificamos que en general, la enseñanza de los conceptos matemáticos por la mayoría de los catedráticos de los niveles mencionados, es superficial, y considerada como algo intrascendente, dando prioridad a la resolución de ejercicios. Este es un problema que se refuerza con la presentación de los contenidos de los libros de texto, ya que un gran número de profesores basa su enseñanza en los contenidos sugeridos por los libros de texto, los cuales, cuando presentan los temas, lo hacen de manera superficial y limitada sin llegar a "profundizar", de tal forma, que el lector llegue a conocer la naturaleza de los conceptos matemáticos ahí planteados.

En este contexto, la matemática educativa, disciplina que estudia los procesos de transmisión, adquisición y construcción de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar, constituye el marco referencial por excelencia, que nos va a permitir atacar la problemática de la enseñanza de las matemáticas en nuestras instituciones. Pretendemos, a través del diseño un curso - taller con situaciones didácticas concebidas en el marco teórico que plantea la matemática educativa, generar un cambio de actitud en los profesores, frente a la enseñanza de las matemáticas. Con el objeto de que, más adelante, los profesores mismos busquen la información que les permita estar mejor equipados para desarrollar su función docente.

Pretendemos trabajar con la siguiente metodología:

- Diseño del curso - taller "Una propuesta diferente para aprender matemáticas" (utilizando 4 situaciones didácticas ya validadas)
- Diseño de los instrumentos de medición: cuestionario diagnóstico y cuestionario de contraste.
- Se conformarán 4 grupos de catedráticos del área de matemáticas de cuatro instituciones diferentes de los niveles medio superior y superior.
- Aplicación del cuestionario diagnóstico a cada grupo de trabajo.
- Desarrollo del curso- taller (puesta en escena de las situaciones didácticas)
- Aplicación del cuestionario de contraste.
- Análisis de resultados.

Diseño del curso taller: introducción a la matemática educativa.

Tomando como base una serie de actitudes observadas en el ejercicio de la labor docente de los catedráticos del área de matemáticas del Instituto Tecnológico de Oaxaca, mismas que pueden ser clasificadas como las correspondientes a un "estilo tradicional de enseñanza", nos proponemos observar las actitudes de los profesores en un ambiente de resolución de problemas, presentándoles al mismo tiempo, una alternativa más, de trabajo en el aula, esperando con esto, motivar a los profesores al cambio hacia una forma diferente de manejo de su ejercicio docente.

La matemática educativa, disciplina que estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar (Cantoral, R, 1995), ofrece una alternativa de trabajo docente que nos proporciona elementos para describir y explicar los fenómenos que se presentan en la enseñanza y en el aprendizaje, es en este marco conceptual en el que deseamos trabajar.

Pretendemos a través del diseño del presente curso, introducir a los catedráticos en el contexto de la matemática educativa, apoyándonos, en el aspecto teórico, en lecturas que dan una idea de los contenidos que esta disciplina maneja, y en el aspecto práctico, en la resolución de situaciones didácticas diseñadas en este mismo marco conceptual y aplicadas, siguiendo la metodología establecida (ingeniería didáctica).

La realización de estas situaciones didácticas en un ambiente de trabajo en equipo, al interior del curso-taller, permitirá a los docentes *vivir* este aspecto de la matemática educativa, rescatando entre muchas cosas, que en este estilo de trabajo:

❑	Se llega a conocer la naturaleza del concepto, a través de una estructuración de los temas tratados, que toma en cuenta las etapas importantes de los procesos cognitivos.
❑	El maestro no posee la verdad absoluta y que el alumno también posee conocimiento.
❑	El maestro no es el actor principal, es sólo un guía.
❑	En la discusión grupal el alumno y el maestro confrontan sus opiniones, adquiriendo seguridad y construyendo el conocimiento. En la resolución de situaciones didácticas, los equipos de trabajo, construyen argumentos, leyendo críticamente, comunicándose eficazmente y participando activamente en la construcción de su propio aprendizaje
❑	Se realiza una revisión de la forma en que concebimos nuestro trabajo, así como una redefinición de las relaciones entre los actores del proceso educativo (alumnos, maestros, contenidos.)

Bibliografía

Cantoral, R. 1990. *Matemática educativa. Programa editorial. Serie: Antologías. No.1.* Area de educación superior del DME-CINVESTAV-IPN. Méx.

Chevallard, I. 1997. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Edit. ICE- Horsori. Universidad de Barcelona.

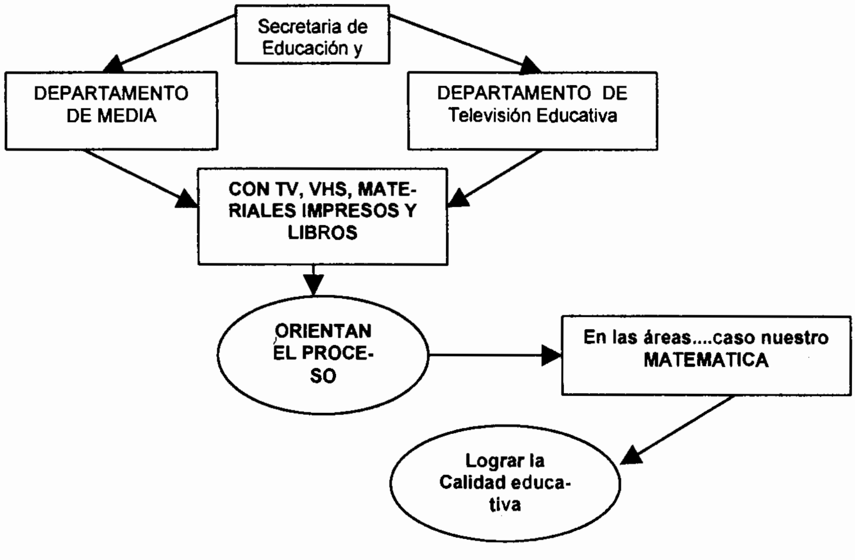
Enseñanza de la Matemática en la Teleducativa Dominicana: Proceso y algunos Resultados en la Educación Media

Miledys Teresa Tavárez Marzán
Sria. de Estado de Educacion y Cultura, Dpto. de Televisión Educativa, Dpto. de Pedagogia - UASD
República dominicana.

Resumen

En la República Dominicana se viene implementando desde 1998 un Programa de Educación Regular mediante el uso del vídeo como herramienta fundamental de motivación en cada una de las áreas curriculares del nivel Medio o Secundario. Dicho programa es asesorado por la telesecundaria de México, la cual ha facilitado orientación metodológica y técnica para su implementación mediante un convenio realizado entre los dos países. Dada la realidad dominicana los/as Técnicos/as y Directivos/as han planificado unas estrategias para adecuar la nueva metodología con los contenidos, recursos y evaluación que se privilegian en el Currículo dominicano. Partimos de una comparación curricular con la telesecundaria mexicana y una adecuación de los materiales impresos dominicanos y el uso de los vídeos mexicanos que se reciben vía satelital y otros que se adecuen a nuestra realidad. Queremos destacar, la metodología de planificación y el proceso que se ha venido creando e implementando así como la vivencia que hasta ahora se ha tenido con el nuevo Programa y los resultados en sus primeros meses. Usaremos gráficos, modelos y fotografías reales de cada momento del proceso de enseñanza y de aprendizaje, así como una muestra en vídeo de los mismos. Actualmente contamos con más de 50 Tevecentros, distribuidos en toda la geografía nacional, en zonas donde había dificultades para la creación de centros regulares, facilitándoles equipos, capacitación de los profesores/as, las guías del proceso, libros de texto y los videos correspondientes de cada unidad temática, así como apoyo permanente por diferentes vías. En lo que va de programa existe la impresión de que los resultados en el aprendizaje de la Matemática han mejorado tanto en los conocimientos, las actitudes como en los procedimientos de los /as alumnos/as. Algo favorable en torno a la enseñanza es que dicho programa ha integrado maestros/as a los cuales les gusta la enseñanza de la Matemática, pues las áreas son distribuidas entre uno o dos Profesores por centros, sin ser especialistas y hasta ahora el desempeño parece favorable.

Veamos en gráfica la implementación del Programa en la Teleducativa dominicana:



Infraestructura del Programa

El Programa de la Teleducativa dominicana es impulsado por la Secretaria de Educación y Cultura a través de su Departamento de Televisión Educativa, el cual brinda el servicio técnico al Departamento que desarrolle el mismo. Hasta ahora aunque se proyecto iniciar con Educación Básica y Media , solo media ha desarrollado el Programa con mucho éxito. Estos Departamentos con su personal especializado por áreas orientan toda la implementación y la filosofía del Programa.

El Departamento de Telesecundaria de México participo junto a los técnicos/as nacionales en la conformación del Programa Dominicano de la Teleducativa Dominicana, en el se plantearon los propósitos, formas de implementación, población meta , materiales, calendarios , evaluaciones y metodología así como la infraestructura necesaria para el montaje del primer año de implementación. Se realizaron talleres de capacitación con el uso del video compartiendo experiencias con los maestros que iniciarían su nueva labor.

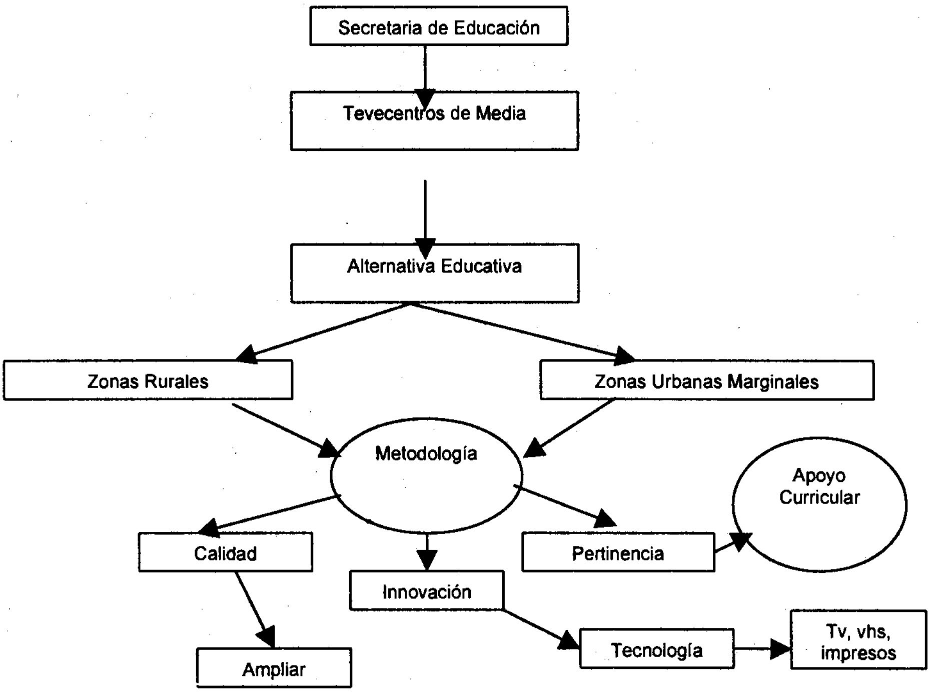
El Departamento de Televisión Educativa graba los programas que son transmitidos diariamente en vivo desde la Telesecundaria Mexicana para luego ser seleccionados de acuerdo a los contenidos del Currículo dominicano para la Educación Media por un equipo de Profesionales de distintas areas del conocimiento, los cuales elaboran para cada contenido o unidad de aprendizaje una guía de aprendizaje que orienta el quehacer del alumno y una guía didáctica que orienta la labor del docente del PROGRAMA.

Todo ello facilita tener una orientación mas o menos homogénea general del nuevo proceso , tomando en cuenta que se ha reclutado un personal no necesariamente especialista en las áreas que laboran o el nivel , pero que demostraron interés en el nuevo método de trabajo y expresaron su deseo de hacer algo nuevo, con mínima experiencia docente.

Mensualmente se envían los documentos como videos, libros o materiales complementarios de las unidades de aprendizaje a cada rinconcito del Programa que viene a resolver un importante función dentro del sistema educativo general ya que llega a lugares donde no era posible instalar un liceo de Educación Media regular. Los lugares fueron seleccionados atendiendo a los criterios lejanía, dificultad de acceso y principalmente el apoyo de la comunidad al programa.

Ha sido un éxito este último criterio ya que la misma se ha integrado hasta para resolver el problema de energía y cuido de los equipos que se les entrega, como vhs y televisión. Veamos las metas proyectadas para el primer año:

- Ofertar el 7mo y 8vo grados en escuelas rurales y urbanas aisladas.
- Ofertar el primer y segundo grado de la secundaria
- Tener una matricula de 3,000 estudiantes
- Instalacion de 50 tv y vhs
- Producir el 100%del material a usar como guias de trabajo
- Identificar los videos que sean necesarios



Colaboracion en la Teleducativa Dominicana

Telesecundaria de México
Televisión iberoamericana
Videos del mercado reproducibles
Alumnos/as
Profesores/as
Comunidades
Técnicos/as de la seec

Logros del primer año

- Instalación de 50 centros a nivel nacional
- Uso del material en un 85%
- Impacto en los liceos tradicionales
- Impresión de las guías de aprendizaje y del profesor/a
- Implementaron del programa en 1ro y 2do de educación media
- En la actualidad estamos iniciando con el tercer grado de media
- Impacto en alumnos/as y profesores/as
- Uso de diversos textos

Metodología del Proceso de Aprendizaje de la matemática

La metodología aplicada en el Programa plantea el trabaja de los ejes transversales y los estándares matemáticos que se plantean en nuestro Currículo para todos los niveles y modalidades. Osea que la nueva metodología en pertinente a nuestros lineamientos y nos permite utilizar y aprovechar los recursos tecnológicos tan necesario en la cotidianidad de hoy. El proceso de aprendizaje mediante las guías contemplan varias fases:

1. Conocimientos Previos

Donde se revisan objetivos anteriores y del sujeto

2. Experiencia Audiovisual

Observan, imaginan, comentan, relacionan, se motivan y disfrutan el Video

3.Lectura

Identifican, relacionan con el video, razonan......

4. Análisis y Síntesis

Analizan, comparan, identifican, resumen, comunican....

5. Aplicación

Relacionan, concretizan, resuelven, ejercitan.....

6. Evaluación

Retroalimentan, demuestran y operan

Qué buscamos con estas fases? , pues que en todo el proceso se revisen los conocimientos de todos antes de iniciar un proceso , se vivencie con el video nuevas acciones a través de la imagen el sonido y el concepto manejado en el, se realicen abstracciones duraderas mediante la lectura de fuentes diversas para luego sistematizar el conocimiento en diferentes actividades de síntesis y aplicación de lo aprendido para luego entre todo evaluar los aprovechamientos y limitaciones.

En matemática hemos recibido informes de que en el primer año nuestros estudiantes han concursado en olimpíadas de matemática obteniendo el segundo lugar y otros han recibido medallas al mérito estudiantil. Según encuesta realizada entre los actores del proceso la metodología del Programa en Matemática ha motivado mas a los alumnos ya que pueden ver de nuevo los videos , discuten mas los contenidos , se reúnen en grupos , aplican en la comunidad sus conocimientos y leen en diferentes textos para afianzar los conceptos.

Los docentes dicen que aunque no son especialistas del área , la seleccionan por que siempre les ha gustado y viendo los videos antes y leyendo las guías y los libros preparan sus trabajos mejor que antes, dicen que los alumnos responden mejor y que la comunidad valora el programa y siempre los ayudan en cualquier dificultad que se presenta en el centro.

Las guías de matemática y sus videos permiten realizar un aprendizaje dinámico, pues se presentan canciones, conexiones, aplicaciones y solución de problemas generales de lo contexto latinoamericano. Además se orientan hacia un trabajo colaborativo, de confianza y de evaluación para mejorar .

Una de las asignaturas que mejores resultados ha obtenido ha sido La matemática, ya que la actitud tanto de los docentes como de los alumnos esta cambiando y existe una motivación permanente con el uso de la tecnología diariamente y eso para nosotros ya significa un gran logro del primer año destacable. Nos aprestamos a completar paulatinamente el nivel medio incluyendo este año el tercer grado y el próximo el cuarto.

Conclusiones

Compartimos en esta ocasión nuestra experiencia no para que sea utilizada como modelo sino como parte del quehacer educativo que esta dando resultados tanto para llegar a zonas aisladas como para darle vida al proceso de aprendizaje de la matemática rompiendo el mito de que en la matemática no se puede....esto o no se puede lo otro.

Es para nosotros una experiencia que aunque ha recibido la experiencia de 30 años de México en su telesecundaria, se ha conformado con bases propias y atendiendo a nuestras necesidades ya que contamos con nuestros propios materiales apoyados por los videos que podamos usar o elaborar acorde con la necesidad curricular. Realmente hemos construido una experiencia a lo dominicano y en la actualidad recibimos la demanda de todos los programas regulares.

Diseño de una ingeniería didáctica para la función 2^x •

Rosa María Farfán, Marcela Ferrari, Gustavo Martínez[1], Amelia Villalobos*
AES-Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Resumen

Esta investigación consiste en el diseño, puesta en escena y análisis de los resultados de una secuencia de actividades en donde se avanza en la construcción de una ingeniería didáctica para la función 2^x, la cuál le permita al estudiante construir la noción de función exponencial en situación escolar. Para ello partimos del análisis de trabajos de investigación realizados anteriormente (Aguilar,1998), (Lezama J.,1998) en los cuales se ha llegado a diseñar una ingeniería didáctica para construir geométricamente segmentos que tienen por longitud números de la forma 2^r, donde $r = \frac{p}{2^q}$ (p entero y q natural).

Observamos que no se ha reportado la construcción de números tales como $2^{\frac{1}{3}}$ o $2^{\sqrt{2}}$; es decir, 2^x siendo x cualquier real. Hemos logrado construir $2^{\frac{1}{3}}$ basándonos en la idea de aproximación de números a través de sucesiones cuyo término general es de la forma anteriormente citada.

Características de la secuencia

La secuencia diseñada consiste en una extensión de la utilizada en (Lezama J.,1998), en la cual se propone romper con la idea de que 2^x solo es evaluable cuando x es entero y reconocer la naturaleza creciente de 2^x.

Nuestro diseño retoma la idea de aproximación geométrica de un número, $2^{\frac{1}{3}}$ en este caso, mediante una sucesión de números de la forma $2^{\frac{p}{2^q}}$, atendiendo por tanto a elementos geométricos y gráficos requeridos en las actividades de localización de puntos en un sistema de coordenadas rectangulares, así como también, a elementos numericos requeridos en las actividades de construcción de tablas. Por otra parte al solicitar argumentaciones sobre la posibilidad de construir otros números tales como 2^{π}, se intenta provocar la generalización de resultados.

Hasta el momento ha sido llevada a escena con tres estudiantes que cursan el último año universitario, a los que, como actividad preliminar, se les pidió resolver la secuencia utilizada en (Lezama J.,1998), para después aplicar la secuencia que en esta ocasión presentamos.

• Este cartel forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado. Estudio sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.

* U.N.S.L, Argentina.

[1] Becarios de Conacyt.

Objetivos

- Confrontar la concepción espontánea de que 2^x no es evaluable en números tales como π o 1/3.
- Hacer surgir la noción de número real como una aproximación, en este caso para el valor de la función 2^x para todo x real.

Análisis a priori

Los estudiantes establecerán una aproximación para evaluar a la función 2^x, cuando x es un número arbitrario, asociándola con magnitudes de segmentos rectilíneos.

Presentación del diseño

El diseño se compone de siete actividades:

Actividad 0

¿Será posible construir un segmento de longitud $2^{\frac{1}{3}}$ con el método que utilizaste en la secuencia de partida? Explica ampliamente.

Actividad 1

Esta actividad se proporciona un procedimiento para bisectar segmentos, lo que permitirá realizar las aproximaciones que se pretende haga el alumno.

Actividad 2

En esta actividad se les pregunta sobre el significado numérico de bisectar el intervalo $[0,1]$ y de bisectar nuevamente los segmentos resultantes.

Actividad 3

Se les pide que retomen la actividad anterior para acotar el $\frac{1}{3}$ a través de números de la forma $\frac{p}{2}, \frac{p}{4} y \frac{p}{8}$.

Actividad 4

Se les pide el llenado de una tabla en donde incluyan las acotaciones de $\frac{1}{3}$ encontradas en la actividad anterior,, así como con números de la forma $\frac{p}{32}, \frac{p}{64} y \frac{p}{128}$. Además se les pregunta sobre la factibilidad de seguir encontrando números mayores y menores de $\frac{1}{3}$.

Actividad 5

Se les pide que grafiquen en un sistema cartesiano los puntos $\left(x,2^x\right)$ donde x corresponde a los números que determinaron en las actividades anteriores.

Actividad 6

Se les pide el llenado de una tabla en donde incluyan las acotaciones de $2^{\frac{1}{3}}$ encontradas en la actividad anterior. Además se les pregunta sobre la factibilidad de seguir encontrando números mayores y menores de $2^{\frac{1}{3}}$.

Actividad 7

¿Cómo harías para evaluar la función 2^x cuando $x = \sqrt{2}$?

Comentarios de las actividades

En la actividad 0 se espera que los estudiantes, que ya han resuelto la secuencia de partida, reflexionen sobre la imposibilidad de la construcción de un segmento de longitud $2^{\frac{1}{3}}$ utilizando los procedimientos geométricos con que fueron provistos.

Las siguientes actividades 1, 2 y 3, que corresponden a la fase de acción de la situación, se concentran en la construcción de la aproximación de un segmento de longitud $2^{\frac{1}{3}}$.

Actividad	**Comentarios**
1	No se esperan dificultades. Pero si las hubiere el profesor puede explicar el método.
2	Con esta actividad se espera que el alumno establezca el significado del procedimiento geométrico de bisectar un segmento en el marco numérico. No se esperan problemas significativos debido a que los estudiantes ya trabajaron con la secuencia utilizada en (Lezama J.,1998).
3	Se espera que los estudiantes comiencen a aproximar $\frac{1}{3}$, geométricamente, a través de números de la forma $\frac{p}{2^q}$ y que haya dificultades en la precisión de las construcciones geométricas; para evitar esto se les pedirá que sean cuidadosos en sus trazos.

Las actividades 4, 5, 6 y 7 corresponden a la fase de acción y formulación de la situación.

Actividad	Comentarios
4	Se espera que los estudiantes encuentren números de la forma $\frac{p}{2^q}$ cada vez más cercanos a $\frac{1}{3}$ y que se percaten de la existencia de dos sucesiones que se aproximan a $\frac{1}{3}$, una por la derecha y otra por la izquierda. Se espera que se percaten de la posibilidad de seguir aproximando a un tercio de manera indefinida. Debido al mecanismo geométrico sugerido. Se espera que los estudiantes establezcan las limitaciones del método geométrico para realizar lo que se les pide.
5	Se espera que los estudiantes, que ya encontraron números de la forma $\frac{p}{2^q}$ cada vez más cercanos a $\frac{1}{3}$, utilicen la existencia de dos sucesiones que se aproximan a $\frac{1}{3}$ (por la izquierda y por la derecha), para así aproximar geométricamente por abajo y por arriba su imagen ($2^{\frac{1}{3}}$). Se espera que se percaten de la posibilidad de seguir aproximando de manera indefinida. Se espera que los estudiantes establezcan las limitaciones del método geométrico para realizar lo que se les pide. En este momento es cuando se pretende que el estudiante utilice el hecho de que la función exponencial es creciente (esto queda establecido en la secuencia de referencia).
6	Se espera que los estudiantes reflexionen más profundamente sobre las acciones que realizaron con anterioridad. Se espera que a la imagen de $\frac{1}{3}$ la conciban como el límite de las imágenes de los números con que aproximaron $\frac{1}{3}$.
7	Se espera que los estudiantes reflexionen sobre la posibilidad de realizar el mismo procedimiento al utilizado en el caso de un $\frac{1}{3}$. Esto debido a que en la secuencia utilizada en (Lezama J., 1998), implícitamente se establece la densidad de los números de la forma $\frac{p}{2^q}$.

Resultados obtenidos

Los siguientes puntos presentan a grandes rasgos los resultados obtenidos.

- No se analizó por separado, al contrario de lo que esperábamos, lo que ocurría derecha e izquierda de $\frac{1}{3}$, sino que identificaron un patrón que les permitió crear una única sucesión para aproximarse a $\frac{1}{3}$.

- La idea de densidad de números de la forma $\frac{p}{2^q}$ surgió implícitamente para acotar $\frac{1}{3}$ y $\sqrt{2}$; generándose la idea de factibilidad de la construcción de 2^x para todo número x mediante la noción de número real como una aproximación. Pues se establecieron argumentos que explicitaban que $\frac{1}{3}$ era sólo un caso particular para la construcción propuesta, y que esta podría ser usada para aproximar el valor de la función 2^x.

- A los participantes en la puesta no les interesó la precisión de su construcción, sólo la factibilidad de hacerla, pues no utilizaron de manera precisa el método geométrico para obtener el punto $\left(\frac{1}{3}, 2^{\frac{1}{3}}\right)$ y sólo trazaron algunos segmentos a instancias del entrevistador. Los participantes hacían aproximaciones decimales con la regla graduada que se les proporcionó.

- El reconocer la naturaleza creciente de la función 2^x les permitió superar algunos problemas que surgieron de la mala construcción de algunos segmentos.

Después de esta puesta en escena se espera aplicarla, con algunas modificaciones, en un grupo de estudiantes en situación escolar; ello con el objetivo de validarla en términos de la metodología que nos proporciona la Ingeniería Didáctica.

Referencias bibliográficas

Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J.; Moreno, J. (1997). Estudio didáctico de la función 2^x. Rosa Ma. Farfán (Ed.), *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. pp.19-23, Morelia, Michoacán, México.

Lezama J. (1998) *Un estudio de reproducibl̶idad: El caso de la función exponencial,* Tesis de Maestría, DME del Cinvestav-IPN, México.

La noción del Comportamiento Tendencial de las Funciones en las ecuaciones diferenciales a través de un contexto físico

Francisco Cordero[1], Héctor Márquez, Jaime Martínez, Bonifacio Mora, Adriana Zúñiga
AES-Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Introducción

El cartel exhibió las actividades en torno a un proyecto de investigación realizadas en el laboratorio de Didáctica y Cognición en un seminario correspondiente al Programa de Maestría en Matemática Educativa del Cinvestav. Dichas actividades consistieron en diseñar una situación de estabilidad de las ecuaciones diferenciales en un contexto físico, en seleccionar la caída libre de un objeto en un medio viscoso como el contexto físico y en implementar las actividades con nueve estudiantes de ingeniería. La hipótesis del proyecto de investigación consistió en formular que es la situación de estabilidad el marco de referencia que permite al estudiante modelar y entender la ecuación diferencial en el contexto físico.

A continuación explicamos el objetivo del experimento, la estructura del diseño de situaciones, el fenómeno físico, la implementación, los logros y comentarios finales.

Objetivo

La problemática fundamental que atendemos en el proyecto de investigación consiste en asumir que hay dos clases de matemáticas: una, la obra matemática y la otra, la matemática escolar. La problemática consiste entonces en distinguirlas y en entender que la matemática escolar tiene que reorganizar a la obra matemática. Reconstruir significados pudiera ayudar a tal reorganización, la cual consistiría en habilitarlos en la matemática escolar. Esto ha llevado a formular categorías del conocimiento matemático que componen una epistemología como resultado de la actividad humana. Un ejemplo de es tipo de categorías es la noción de comportamiento tendencial de las funciones que se ubica en el plano de la modelización matemática y el uso de herramientas matemáticas. Es decir, los objetos matemáticos como la transformación de funciones, la linealidad del polinomio, la asíntota de una función y la estabilidad de las ecuaciones diferenciales son reorganizados a través de la herramienta matemática comportamiento tendencial de las funciones como resultado de la actividad humana.

En particular, el objetivo que se persiguió en el experimento con esta actividad fue, mediante el contexto físico de la caída libre en un medio viscoso, lograr una construcción de los estudiantes a las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes, donde la situación consistió en establecer el modelo para que simulara el *comportamiento de la velocidad tendencial a la aceleración* a través del análisis de gráficas y de la asociación de gráficas al variar ciertas condiciones del fenómeno. En ese sentido la ecuación diferencial no fue formulada explícitamente, sino a través de una relación entre aceleración y velocidad. Todo ello basado en la *estabilidad* de las ecuaciones diferenciales, es decir:

Si $ay'(x)+y(x)=F(x)$, donde a es una constante positiva, entonces la solución $y(x)$ tiende a comportarse como $F(x)$.

La estrategia fue inducir al estudiante en un razonamiento gráfico para identificar gráficas que correspondieran al fenómeno físico específico, esto a través de la identificación de las

[1] correo electrónico: fcordero@mail.cinvestav.mx

consecuencias de variar las condiciones del medio. Además de que relacionaran las consecuencias de dichas variaciones en una ecuación diferencial.

Estructura del diseño

El experimento se conformó de tres partes fundamentalmente, las cuales llamamos: situación de las representación gráfica, situación de la caída libre y situación de la ecuación diferencial.

La situación de las representaciones gráficas, tuvo como objetivo iniciar a los alumnos en la representación gráfica y hacerlos pensar en los comportamientos de las curvas para el caso de velocidad constante y aceleración constante. Estuvo conformada de cuatro actividades, en las que se buscó explorar el entendimiento de los estudiantes sobre la representación gráfica de la velocidad y la aceleración. En esta parte se les proporcionó una tabla de valores que ellos llenaban con datos que también se les daba, usando la fórmula de velocidad que ellos conocen y después procedían a hacer gráficas de los datos obtenidos.

La situación de la caída libre, también consta de cuatro actividades. Su objetivo fue enfrentar a los alumnos a la variación de la aceleración y a la representación gráfica de la misma para distintos casos. Se les proporcionó diversas tablas de velocidad contra tiempo que corresponden a la variación de la viscosidad del medio (k constante proporcional a la viscosidad), esto con el objetivo de llevarlos a reflexionar sobre el comportamiento de las gráficas para aumentos y disminuciones de k y sus tendencias a ciertas curvas, así como también sobre lo que ocurre cuando el tiempo transcurrido aumenta. En las actividades de esta situación se buscó hacer pensar al estudiante, como varía la velocidad de la esfera que cae, cuando aumenta o disminuye la viscosidad del medio y como representarlo gráficamente en un sistema de ejes (velocidad contra tiempo).

En la situación de la ecuación diferencial, el objetivo fue obtener la ecuación diferencial que modela el fenómeno mediante la Segunda Ley de Newton y reflexionar sobre la relación de los coeficientes de la misma con el comportamiento de las gráficas de la solución. Está constituida por tres actividades y se buscó introducir la ecuación que describiera la caída de la esfera en un medio viscoso. Se esperaba que los estudiantes pudieran hacerlo basándose en las actividades anteriores. Acordamos que los monitores ayudarían a los estudiantes en caso de ser necesario, para agilizar la actividad y llegar a la siguiente que era la que realmente nos interesaba.

Caída en un medio viscoso

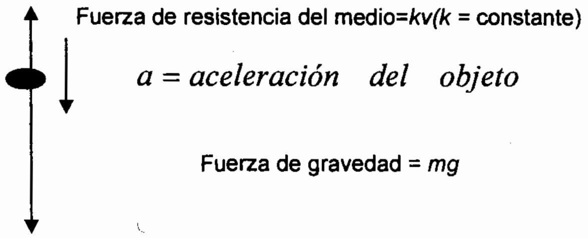
El fenómeno físico

El fenómeno físico que se seleccionó consiste en la caída libre de un objeto en un medio viscoso (distinto al vacío), en donde la resistencia que el medio opone a la caída es directamente proporcional a la velocidad del objeto.

Este fenómeno se puede explicar a través de la segunda ley de Newton:

$$\sum F_i = ma$$

Existen dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo que cae: la fuerza de gravedad y la resistencia del medio; de donde obtenemos que:



De lo que se tiene:

$$mg\text{-}kv=ma$$

pero $a = \dfrac{dv}{dt} = v'$ y entonces

$$mv'+kv=mg$$

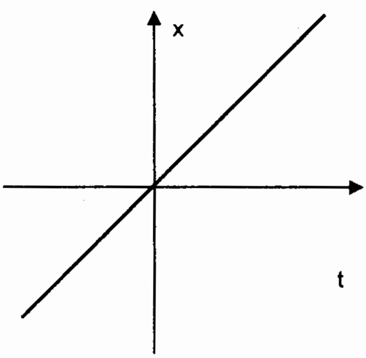
$$v'+(k/m)v=g$$

$$v=g+Be^{-(k/m)t}$$

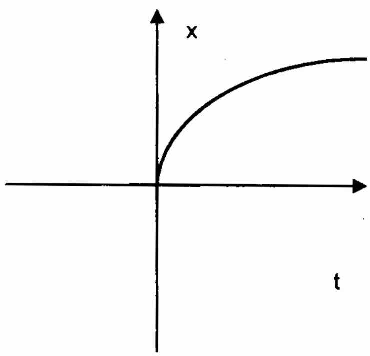
Información previa

Para lograr el desarrollo de la actividad se explicaron los conceptos de velocidad y aceleración y sus significados en las gráficas; por ejemplo:

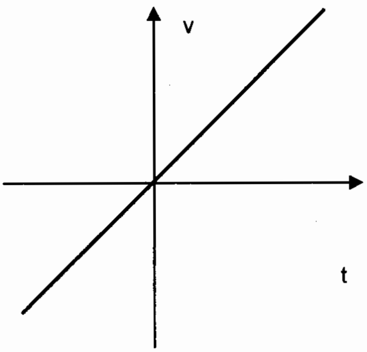
a) x vs t; v=cte.



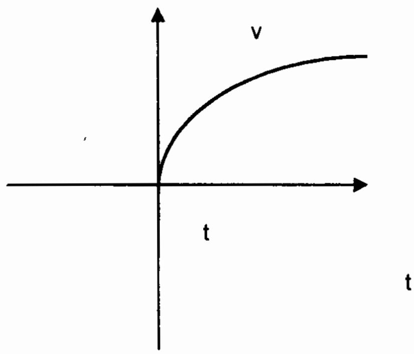
b) x vs t; v= variable



c) *v* vs *t*; *a*=cte.



d) *v* vs *t*; a=variable.



Implementación

La experiencia fue realizada en el laboratorio de Didáctica y Cognición. Se contó con la participación de nueve alumnos que cursaban el primer año de Ingeniería en Alimentos. Se les dividió en grupos de tres alumnos, cada uno de los cuales fue observado por un monitor cuya consigna era intervenir lo menos posible. Entre las funciones de los monitores estaba la entrega, etiquetado y recolección del material, asegurarse que todos los integrantes de su equipo participaran, que se explicara lo mas extensamente posible los argumentos esgrimidos para realizar las actividades, y llegado el caso orientar al equipo hacia lo que deseábamos ver.

Se les dejó trabajar sin apremiarlos con el transcurso del tiempo, por lo que la sesión de trabajo en equipos pequeños fue de aproximadamente tres horas, en tanto que la exposición de resultados, en la cual cada equipo debía presentar sus conclusiones en un acetato para ser discutidas por el resto, se extendió aproximadamente una hora más.

Previo al desarrollo de la actividad se les invitó a los alumnos a realizar la tarea en equipos y a discutir entre ellos aclarándoles los objetivos que perseguíamos con esta puesta. Se les indicó que analizaríamos sus producciones a través de los argumentos que generaran al respecto. Antes de la exposición de resultados, se observó el fenómeno utilizando probetas llenas de agua, aceite de maíz y aceite mineral.

Se cuenta con grabaciones de audio y video así como producciones escritas de los alumnos.

Logros

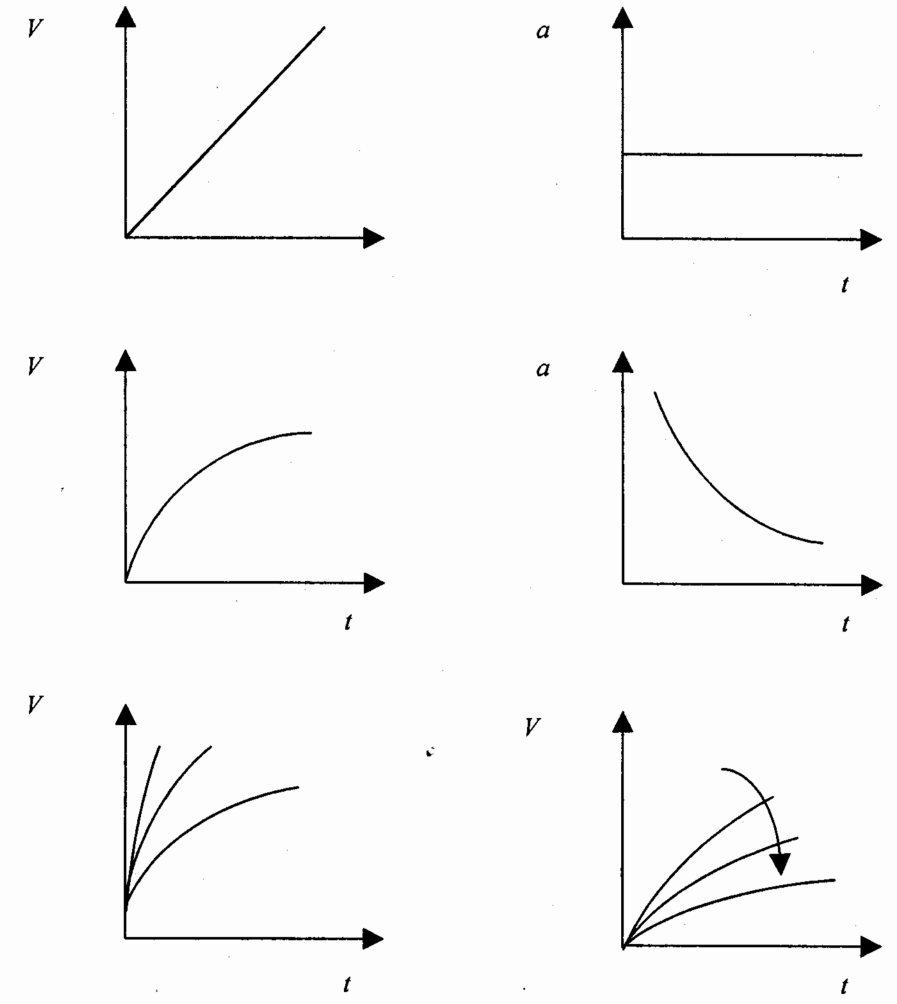
Se logró que los estudiantes reconocieran que al aumentar la viscosidad *k* del medio, la velocidad que tiende a adquirir la esfera disminuye y viceversa. Además en ciertos medios viscosos (el aceite por ejemplo) en los primeros segundos la velocidad de la esfera va aumentando, pero después de transcurrir determinado tiempo, la velocidad se hace constante y lo representaban gráficamente como una recta horizontal a partir de cierto tiempo *t*. Se presentó el argumento en un medio "muy viscoso" la velocidad de la esfera es casi nula, produciendo una gráfica que tiende al eje *t*, es decir, la velocidad tiende a cero (Esto ocurrió en la exposición de los resultados).

Se logro que utilizaran la ecuación $kv - mg = ma$ donde:

k representa una constante proporcional a la viscosidad del medio, v la velocidad de la esfera, m la masa, g la aceleración ejercida por la gravedad y a la aceleración de le esfera en cualquier tiempo. Siguiendo las actividades diseñadas, involucramos a los estudiantes en el objetivo de la situación: inducirlos a reconocer los cambios que sufren los coeficientes de la ecuación a medida que se varía la viscosidad del medio.

Se les pidió que trazaran muchas gráficas variando k en la ecuación y lo relacionaran con el fenómeno físico. Se les dejó discutir en equipo, para que hicieran sus conclusiones y posteriormente las explicaran a los demás equipos. Con esto intentamos de alguna forma introducir *la noción del comportamiento tendencial de las funciones.*

Aquí mostramos algunas ilustraciones que los mismos estudiantes realizaron intentando justificar sus afirmaciones acerca de la relación entre velocidad y aceleración. Así como la variación de éstas cuando varía el medio en el cual se da el fenómeno.



Se logró que pensaran que cuando la viscosidad *k* del medio es muy grande, la velocidad tiende a cero; cuando la viscosidad es casi nula, la velocidad de la esfera tiende a la velocidad ejercida por la acción de la gravedad. Gráficamente esto lo representaban como una curva que tiende al eje *t* en el primer caso, y como una curva que tiende a la recta $9.81t$ en el segundo.

Comentarios finales

Este trabajo es un experimento de laboratorio, no se precisó sobre el marco teórico que subyace al proyecto de investigación, es por ello que los logros obtenidos se deben considerar como un estudio exploratorio o preliminar a la investigación. Sin embargo son significativos para los propósitos del experimento, pues a través de un fenómeno físico, representado por una ecuación, al variar parámetros y al garficar los estudiantes resolvieron una ecuación diferencial que no fue explícita. Lo más interesante es que la resolvieron por un método cualitativo, haciendo uso en cierto modo del *comportamiento tendencial de las funciones.* Este hecho, de algún modo ofrece indicadores para diseñar situaciones que posibiliten al estudiante construir significados a las ecuaciones diferenciales para que éstos den lectura a la ecuación y predigan o estimen cuantitativamente su solución y como una consecuencia construyan la propiedad de estabilidad de las ecuaciones diferenciales.

En resumen, los alumnos lograron establecer que:

Cuando "*k*" (constante proporcional a la viscosidad) se hace muy grande, la velocidad tiende a cero. Se discutió al respecto y el ejemplo que surgió fue el "tirar una esfera en brea". Cuando "*k*" se hace pequeño, la aceleración tiende a la aceleración de la gravedad. Este argumento surgió tanto gráficamente, al pegar las curvas solución cada vez mas a la recta "*mg*"; como analíticamente, al hacer "desaparecer" el término "*kv*" de la ecuación.

Bibliografía

Artigue, M. (!992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practice. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds); The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy (pp. 109-132). Washington, DC: Mathematical Association of America.

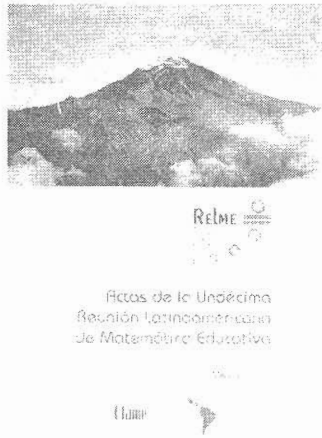
Chris Larson Rasmussen (1997). *Qualitative and numerical methods for analyzing differential equations: a case study of students' understandings and difficulties*. Tesis doctoral. University of Maryland.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Relime* Núm. 1, 56-74.

Cordero, F. y Solís, M. (1997). Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. *Serie Cuadernos Didácticos*, Vol. 2. Grupo Editorial Iberoamericana. 2ª. Edición

Gilda de la Roque Palis. Uma Experiência em curso Básico de Equaões Diferenciais Ordinarias: utilizando o computador como Ferramenta Didáctica. Obstáculos e posibilidades.

Actas de la undécima reunión latinoamericana
relme



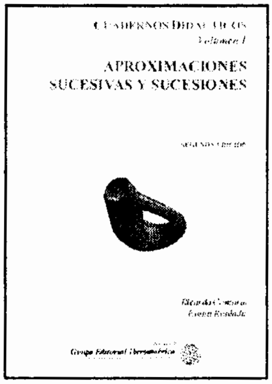
Se presentan las 81 ponencias, conferencias y cursos más importantes de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en Morelia, Michoacán, México, en 1997. Dichas ponencias están clasificadas de acuerdo con los siguientes temas: "Pensamiento matemático avanzado"; "Pensamiento numérico"; "Pensamiento algebraico"; "Pensamiento geométrico"; "Pensamiento de probabilidad y estadística"; "Uso de tecnología"; "Incorporación de distintas perspectivas"; "Formación de profesores"; "Desarrollo de currículum"; "Teoría y metodología"; "Documentos de los grupos de trabajo y discusión".

Actas de la undécima reunión latinoamericana Vol. 12
relme

Se presentan las en esta publicación el extenso de las diversas participaciones en RELME 12 que fueron presentadas por los autores en la reunión y aprobadas para su publicación despúes del proceso de evaluación ya usual en nuestro evento y que sustenta sus dictámenes con base en la calidad del trabajo en comparación de los niveles internacionales de exigencia que suelen pedirse para eventos académicos de esta índole.
En esta publicación se agrupan la primera parte de los escritos del RELME 12.

INFORMES Y PEDIDOS EN: Nebraska 199, Col. Nápoles
Tel: 523 09 94 Fax: 543 11 73

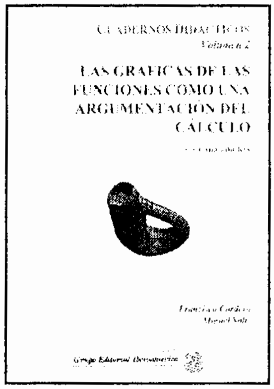
COLECCIÓN CUADERNOS DIDÁCTICOS



Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones-*Volumen 1*

Ricardo Cantoral / Evelia Reséndiz

Este cuaderno didáctico pretende compartir con los lectores interesados en la matemática y su enseñanza la fundamental noción de aproximación, ademas de que busca oponer a las tradicionales posturas antagónicas una visión alternativa en cuanto al uso de la tecnología an la enseñanza de la matemática; particularmente del uso de las calculadoras con capacidades gráficas (supercalculadoras).



Las Gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo-*Volumen 2*

Francisco Cordero / Miguel Solís

Este cuaderno didáctico ofrece una serie de actividades dirigidas tanto a los profesores como a sus estudiantes, con la intención de brindar situaciones de enseñanza y aprendizaje. En estas actividades se discuten diversos contenidos del cálculo, haciendo uso de las calculadoras con capacidad gráfica.

Un Acercamiento Gráfico a la Resolución de Desigualdades-*Volumen 3*

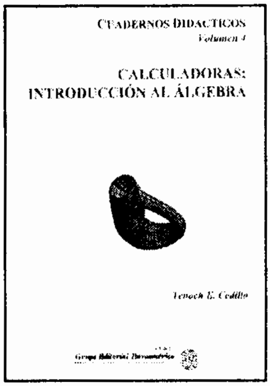
Rosa María Fárfan / Armando Albert

En esta obra se abordan dos temas relevantes de la enseñanza de las matemáticas: la resolución de desigualdades y el uso de las calculadoras en el aula. La estrategia que se utiliza es iniciar el tratamiento en el contexto gráfico haciendo una traslación hacia el contexto algebraico cuyo fin es el de apoyar argumentaciones o construciones gráficas.

INFORMES Y PEDIDOS EN: Nebraska 199, Col. Nápoles
Tel: 523 09 94 Fax: 543 11 73

Calculadoras: Introducción al Álgebra-*Volumen 4*

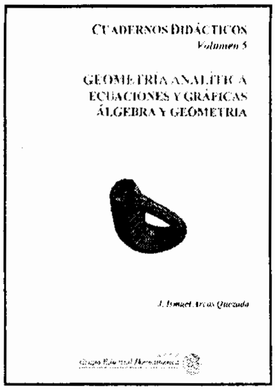
Tenoch E. Cedillo



Esta obra representa un paquete didáctico conformado por hojas de trabajo diseñadas para explotar las características de una calculadora equipada con un código de programación muy similar al algebraico y una pantalla de ocho línes que permite presentar tablas y desplegar gráficas. Las actividades propuestas corresponden a dos tipos: un grupo de tareas orintado a la enseñanza del código algebraico como herramienta para expresar generalizaciones y resolver problemas, y otro cuyo objetivo es introducir la noción de función a partir de la construcción e interpretación de gráficas, en particular, de funciones lineales y cuadráticas.

Geometría Analítica Ecuaciones y Gráficas Álgebra y Geometría-*Volumen 5*

J. Ismael Arcos Quezada

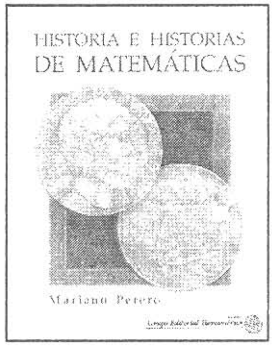


En esta obra se resuelven algunos problemas geométricos y se propone un conjunto de actividades de tal manera que el estudiante se involucre en el tránsito entre ecuaciones gráficas (contexto algebráico y geométrico) haciendo énfasis en el carácter geométrico de los problemas abordados. La primera parte se hace uso de la regla y el compás para resolver problemas de geometría analítica relativos a la recta y la circunferencia. La siguiente parte se abordan maneras de resolver problemas en los contextos gráficos y algebraicos.

Otros textos de Grupo Editorial Iberoamérica

Historia e historias de matemáticas

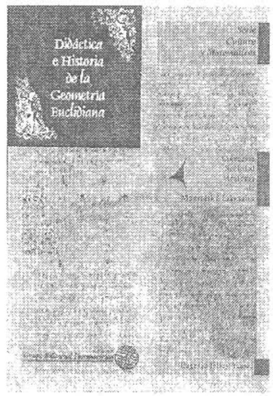
Mariano Perero



Libro interesante y ameno que muestra una novedosa perspectiva de las matemáticas. Presenta a los personajes que existen detrás de las fórmulas, por qué y cómo las inventaron, en qué momento de la historia y en respuesta a qué necesidades intelectuales y económicas aparecieron. Nos muestra a los hombres y mujeres que dedicaron su vida a esta disciplina como personajes reales, con angusias, alegrías y problemas propios, a través de historias y anécdotas que harán más activo, interesante e instructivo el conocimiento del mundo de las matemáticas. Además, está escrito en forma clara y amena.

Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana

Eugenio Filloy Yagüe



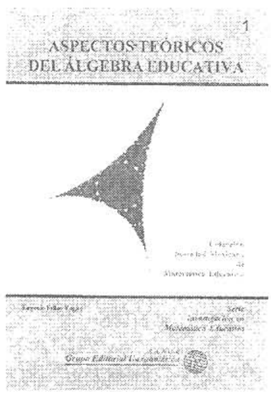
Libro que reseña los inicios de la geometría desde los babilonios, egipcios, la geometría pitagórica, la geometría de Platón y de Aristóteles, los elementos y método axiomático de Euclides, hasta los desarrollos axiomáticos de Bolyai-Lobachevski.

Aspectos sobresalientes

- Se combina el desarrollo histórico con problemas y aplicaciones clásicas, así como desarrollo de axiomas y teoremas.

Apectos Teóricos del Álgebra Educativa

Eugenio Filloy Yagüe



El álgebra educativa quedó en el centro de la investigación a partir de mediados de los ochenta. Por su carácter abstracto y porque las habilidades sintácticas requieren de un buen grado de competencia, este campo requirió de nuevos acercamientos: la presencia de conceptos provenientes de la semiótica y análisis cercanos a la historia de las ideas algebraicas.

Este volumen contiene los materiales, relacionados con el tema en cuestión, empleados por el autor en sus cursos de doctorado dictados en las universidades de Valencia y Granada en 1997. En los primeros siete capítulos se hace una introducción al tema, mientras que en los cuatro restantes se da una idea de los estudios de corte empírico y epistemológicos realizados durante la presente década.

INFORMES Y PEDIDOS EN: Nebraska 199, Col. Nápoles
Tel: 523 09 94 Fax: 543 11 73