RELME 15 • REUNION LATINOAMERICANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 15, año 2002
Tomo 1

Clame
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Clame

COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Consejo directivo ***Clame***

Presidente
Rosa María Farfán (México)

Secretario General
Luis Campistrous (Cuba)

Tesorero
Germán Beitía (Panamá)

Directores Ejecutivos
Jorge Fiallo Leal (Colombia)
Jenny Oviedo (Costa Rica)
Joaquín Padovani (Puerto Rico)
Eréndira Valdez (México)

Consejo Consultivo
Ricardo Cantoral (México)
Egberto Agard (Panamá)
Teresita Peralta (Costa Rica)
Fernando Cajas (EEUU)

Comisión de Admisión
Francisco Cordero (México)
Analida Ardila (Panamá)
Myriam Acevedo (Colombia)
Víctor Martínez (Uruguay)

Comité Internacional de Programa
RELME-15
Presidente
Cecilia Crespo Crespo (Argentina)

Vocales
Guadalupe Tejada (Panamá)
Eugenio Carlos Rodríguez (Cuba)
Crisólogo Dolores Flores (México)
Evarista Matías (R. Dominicana)

Comisión de Promoción y Académica
Edison De Faria (Costa Rica)
Carlos Rondero (México)
Javier Lezama (México)
Freddy González (Venezuela)
Leonora Díaz (Chile)
Mayra Castillo (Guatemala)
Uldarico Malaspina (Perú)

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 15, año 2002

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
Volumen 15, año 2002

Editora:
Cecilia R. Crespo Crespo

Diseño de portada:
Ángeles Viacava

Motivo de la portada: *Seibo, flor nacional de Argentina*

Presentación

El creciente fortalecimiento del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), se puso de manifiesto a través de la organización de la Decimoquinta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME 15 organizada en Buenos Aires (Argentina), en julio de 2001. Esta reunión fue particularmente significativa, por una parte, por tratarse del resultado de quince años de labor tras los cuales se viene perfilando la **Matemática Educativa** como disciplina y como movimiento que nuclea a docentes e investigadores de los distintos niveles de los sistemas educativos de Latinoamérica y por otra parte, la primera oportunidad en la cual RELME se realiza en el Sur de Latinoamérica, permitiendo la participación de mayor cantidad de colegas de estas latitudes.

RELME 15 convocó a numerosos y destacados colegas provenientes no sólo de países latinoamericanos. La expansión de la Matemática Educativa como movimiento se puso en evidencia a través de la concurrencia a esta reunión de representantes de países de América, Europa, Asia y Oceanía. Los valiosos aportes de los investigadores y docentes que concurrieron se manifestaron a través de una importante cantidad de actividades en las que los participantes compartieron experiencias y resultados.

En esta publicación se presentan los artículos resultantes de los extensos de algunas de las actividades llevadas a cabo durante esta reunión. Los extensos enviados por los autores de trabajos expuestos durante RELME 15, fueron sometidos a la evaluación de árbitros del Comité Evaluador, quienes determinaron su inclusión en las Actas, sustentando sus dictámenes sobre la base de la calidad de los trabajos presentados, en comparación de los niveles internacionales de exigencia para eventos académicos de esta índole.

En esta ocasión, la publicación se organiza en secciones según las siguientes categorías y niveles:

- Pensamiento matemático avanzado - Nivel Medio y Superior
- Pensamiento numérico y algebraico - Nivel Básico, Medio y Superior
- Pensamiento geométrico - Nivel básico, Medio y Superior
- Pensamiento relacionado con probabilidades y estadística - Nivel Básico, Medio y Superior
- Epistemología e historia de la matemática - Nivel Medio y Superior
- Incorporación de distintas perspectivas - Nivel Básico, Medio y Superior
- Uso de tecnología - Nivel Medio y Superior
- Resolución de problemas - Nivel Básico, Medio y Superior
- Evaluación - Nivel Medio y Superior
- Teoría y metodología

- Formación de profesores - Nivel Básico, Medio y Superior
- Educación a distancia - Nivel Superior
- Desarrollo del Curriculum - Nivel Medio y Superior
- Documentos de los grupos de trabajo y discusión

Queremos agradecer a los participantes y ponentes de RELME 15, ya que fueron ellos los que hicieron posible que se llevara a cabo con éxito este evento, y a los árbitros que contribuyeron a mantener el nivel, tanto de la reunión, como de esta publicación. También reconocemos y agradecemos la colaboración y orientación ofrecida por los representantes de Clame y del Comité Internacional de Programa.

Merecen un agradecimiento especial Christiane Ponteville, Liliana Homilka, María del Carmen Pérez, Fabián Valiño, Patricia Lestón y Daniela Veiga, sin cuya colaboración y apoyo incondicional, tanto la realización del evento, como la edición de estas Actas no hubiera sido posible.

Agradecemos finalmente al Colegio del Salvador su hospitalidad al albergarnos en su histórico y majestuoso edificio durante la reunión, y a todas las instituciones, empresas y personas que de distintas maneras brindaron apoyo a través de recursos materiales y humanos, colaborando en la concreción de este desafío.

Cecilia R. Crespo Crespo
Buenos Aires, Argentina. Mayo 2002.

Contenidos

Contenido

TOMO 1

Pensamiento matemático avanzado - Nivel Medio

Pensamiento matemático avanzado - Nivel Superior

Pensamiento numérico y algebraico - Nivel básico

Pensamiento numérico y algebraico - Nivel Medio

Pensamiento numérico y algebraico - Nivel Superior

Pensamiento Geométrico - Nivel básico

Pensamiento Geométrico - Nivel Medio

Pensamiento Geométrico - Nivel Superior

Epistemología e historia de la matemática - Nivel Medio

Epistemología e historia de la matemática - Nivel Superior

Incorporación de distintas perspectivas - Nivel básico

Incorporación de distintas perspectivas - Nivel Medio

TOMO 2

Incorporación de distintas perspectivas - Nivel Superior

Uso de tecnología - Nivel Medio

Uso de tecnología - Nivel Superior

Resolución de problemas - Nivel básico

Resolución de problemas - Nivel Medio

Resolución de problemas - Nivel Superior

Evaluación - Nivel Medio

Evaluación - Nivel Superior

Teoría y metodología

Formación de profesores - Nivel básico

Formación de profesores - Nivel Medio

Formación de profesores - Nivel Superior

Educación a distancia - Nivel Superior

Desarrollo del curriculum - Nivel Medio

Desarrollo del curriculum - Nivel Superior

Documentos de los grupos de trabajo y discusión

Pensamiento Matemático Avanzado

Nivel Medio

En busca de un modelo matemático[1]

Marco Barrales Venegas
Colegio Alemán de Concepción. Chile
mbarrale@dsc.cl

Resumen
El objetivo de nuestra investigación fue ajustar un modelo matemático a un problema real. Específicamente centramos nuestra atención en determinar un modelo matemático referente al aprendizaje de una rata de laboratorio en resolver un laberinto, es decir controlamos el tiempo que invierte la rata en completar el recorrido del laberinto y el número de veces que se repetía la experiencia.
Después de aplicar la interpolación Lagrangeana el comportamiento de las ratas se ajustó a una rama de una función hiperbólica, naturalmente se realizaron algunas restricciones para concluir con una expresión (modelo) más compacta.

Introducción

Uno de los conceptos que siempre a merecido mucha importancia por su carácter medular en los cursos universitarios es el referente a funciones. Regularmente este concepto se expone a los estudiantes en forma de defición, la misma que aparece en los libros de álgebra y cálculo. En muchas ocaciones no se involucra este concepto ni a la realidad en la cual vivimos ni al contexto real, y queda la idea en el estudiante de una definición meramente abstracta.
En este trabajo se pretende reflexionar sobre un fenómeno y acercarnos a él desde una perspectiva matemática. Concretamente nuestro trabajo de investigación se centro en determinar un modelo matemático referente al aprendizaje de una rata blanca de laboratorio (Rattus norvegicus) en resolver un laberinto.

¿Qué es un Modelo Matemático?

Los modelos matemáticos tienen un papel muy importante en la resolución científica de problemas. Una discusión de modelos matemáticos puede empezar con una consideración del método científico. Kemeny y Snell, matemáticos del Dartmouth College, han definido el método científico sencillamente como “un proceso cíclico por el medio del cual los seres humanos aprenden de la experiencia”. Hay tres etapas en el modelo científico que uno puede repetir muchas veces: 1)Inducción, 2)Deducción y 3)Verificación.
La **Inducción** es el proceso consiente en observar una situación, acumular datos, pensar, identificar lo pertinente, simplificar, idealizar y formar teorías sobre la situación. Modelar el problema precisamente con símbolos, ecuaciones, etc. Esta nueva irrealidad simbólica es lo que llamamos un modelo matemático. En la **Deducción** se trata de aplicar la lógica y la matemática para deducir consecuencias de las teorías. Si la teoría es realmente buena se alcanza nuevos conocimientos, los cuales algunas veces son inesperados. La **Verificación** es el proceso de comprobar si las predicciones de la deducción pueden explicar lo que ya sabemos o predecir algo nuevo que es verdadero.
Debemos destacar que el proceso de desarrollar el modelo es mucho más difícil que el proceso de encontrar la resolución del modelo en la etapa de deducción. Eddington, un físico inglés, es citado como diciendo: “La formulación inicial del problema es la parte más

[1] Primer concurso de proyectos de investigación para profesores de enseñanza media. (97-98) Sociedad de Matemática de Chile.

difícil, porque es necesario utilizar el cerebro todo el tiempo; después, uno puede utilizar matemática en su lugar”.

Experimento

Para estudiar el ritmo de aprendizaje de una rata blanca (macho) fue enviada en forma reiterativa por un laberinto confeccionado por el equipo investigador(Srtas. *Karen Amthauer y Alejandra Valenzuela*, alumnas de la *Deutsche Schule Concepción, anexo*). Las variables consideradas en el experimento fueron: "el número de pruebas" y "el tiempo invertido por la rata en recorrer el laberinto".

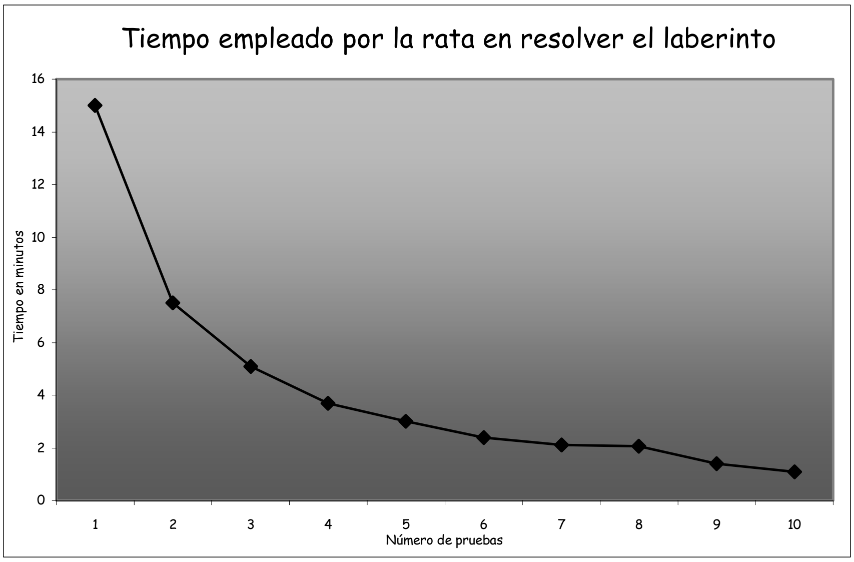
Comentarios de las alumnas:

“En el primer contacto con el laberinto las ratas olfateaban el lugar sin moverse, están en una etapa de reconocimiento, se les ve muy temerosas, a cualquier ruido se paralizan y luego siguen olfateando el laberinto. No les gustaba que las tomaran de la cola para ponerlas en el lugar de partida, se quedaban un rato quietas y luego comenzaban a recorrer el trayecto”.

“Naturalmente la falta de comida y los días de experimentación influían en el tiempo que ellas necesitaban en resolver el laberinto. La primera rata resultó más lenta y más cautelosa, las dos siguientes eran más rápidas y juguetonas, posiblemente el estar acompañadas fue un estimulo positivo”

Los resultados promedios de las tres ratas que por varias semanas participaron en el experimento, el cual se efectuaba en jornadas de mañana y tarde, se resumen en la siguiente tabla y gráfico:

Número de Pruebas	Tiempo en minutos
1	15
2	7,5
3	5,1
4	3,7
5	3
6	2,4
7	2,1
8	2,05
9	1,4
10	1,1



El problema matemático que ahora nos planteamos alumnas y profesor es hallar una función real de variable real que tome los valores de los resultados del experimento.

¿Qué modelo elegir? y ¿Cómo plantearlo?

"Generalmente se escoge el modelo que mejor explique el fenómeno que queremos entender, y que mejor se adapte al contexto en el que estamos trabajando"

"En la modelación se buscan leyes generales que permitan reflexionar y explicar un fenómeno".

Polinomio de Lagrange

La elección adecuada de la función y de su expresión matemática (modelo) puede demostrarse algunas veces, pero en otros casos es imposible; de ahí la importancia de que el investigador, basado en su experiencia, tenga una cierta idea a priori de cómo debe ser la función (fórmula o modelo) que pretende encontrar.

Para alcanzar este objetivo y el de nuestro trabajo de investigación buscamos métodos de ajuste de curvas, para determinar una función (modelo) a partir de una tabla de valores. Concluimos que el más apropiado para la aproximación de funciones es por Polinomio de Lagrange o Interpolación Lagrangeana cuya fórmula es la que sigue:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{r} y_k \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

donde $\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$ denota el producto de todos los términos de la forma $\frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$ donde j es cualquier entero entre 0 y r excepto k.

Así pues, $\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_r)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_r)}$.

El polinomio de Lagrange es válido por el siguiente Teorema:

$\exists$ el polinomio $p(x)$ de grado r tal que, sí $\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ y $\ell_i(x_\ell) = \begin{cases} 0 & ,si \ell \neq i \\ 1 & ,si \ell = i \end{cases}$

por lo tanto $p_r(x) = \sum_{i=0}^{r} y_i \ell_i(x) = \sum_{i=0}^{r} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ luego $p_r(x) = \sum_{i=0}^{r} y_1 \ell_i(x_0) = y_0$

$$p_r(x_1) = y_1$$

.

.

.

$$p_r(x_r) = y_r$$

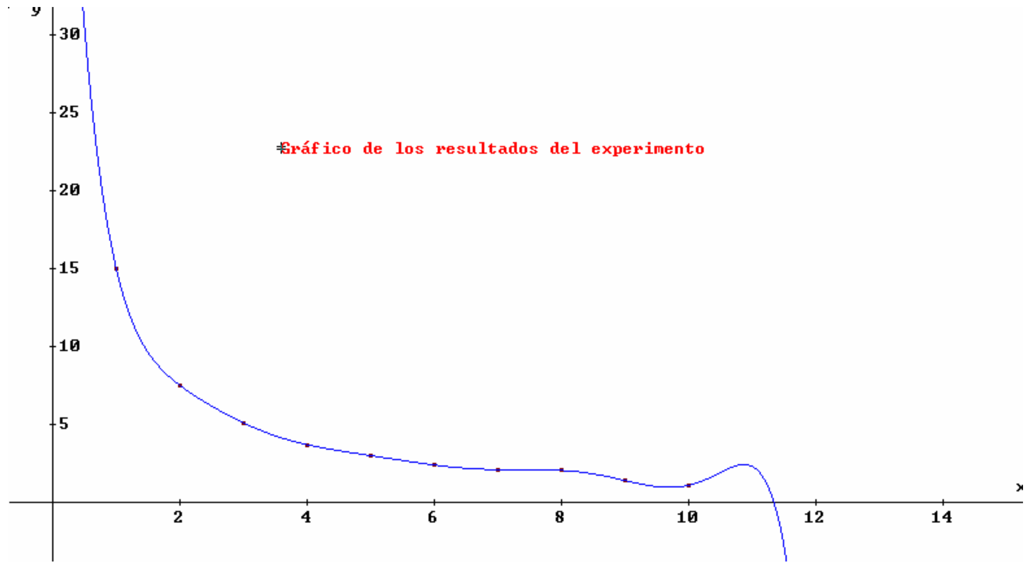
Una vez definido y aceptado el uso del polinomio de Lagrange buscamos la forma de utilizarlo de manera que nos permitiera encontrar el modelo matemático que se ajustará a nuestro experimento con el aprendizaje de las ratas.

Software DERIVE [4]

El programa *DERIVE* en el apartado de archivo de utilidad (archivo *MISC.MTH*) tiene implementada la fórmula de Lagrange del polinomio interpolador la cual se llama *FUNCION POLY_INTERPOLATE*, la cual asocia un polinomio a un conjunto de puntos, es decir nos entrega una función que pasa por todos los puntos de una tabla de valores.

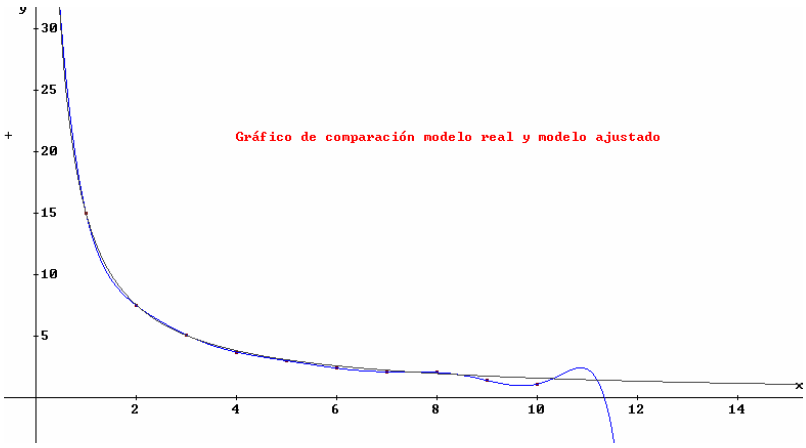
Aplicando dicha función a nuestra tabla resumen del experimento escrito como una matriz, tenemos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 7,5 \\ 3 & 5,1 \\ 4 & 3,7 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2,4 \\ 7 & 2,1 \\ 8 & 2,05 \\ 9 & 1,4 \\ 10 & 1,1 \end{bmatrix}$ poly_interpolate (A, x) se simplifica al polinomio interpolador respecto de x que interpola los pares (x, y) dados en la matriz A

$$P(x) = -0,0000275x^9 + 0,0015x^8 - 0,034x^7 + 0,44x^6 - 3,52x^5 + 17,78x^4 - 56,98x^3 + 112,37x^2 - 127,21x + 72,15$$



Conclusiones

Naturalmente el polinomio resultado de la intepolación lagrangeana, es muy poco práctico, es un polinomio que satisface a esos puntos, pero no permite llegar a una fórmula más compacta y operable. Al observar el comportamiento de nuestra gráfica resultado entre el intervalo [10–12] la función cae drásticamente a los valores negativos para el tiempo, lo que contradice nuestros supuestos. Este tipo de conjeturas y análisis nos ayudo para nuestro trabajo. En cambio si nos permitió visualizar que el comportamiento de la rata se ajusta en forma aproximada a una rama de una hipérbola o a una relación inversamente proporcional. Por lo cual comenzamos a ensayar varias curvas de la forma hiperbólica, apoyándonos en el software *DERIVE*. La curva más apropiada a nuestro resultado resultó ser: $A(n) = \frac{1}{10} + \frac{149}{10n}$ con $n \in IN$.



Modelo General: $A(n) = (T_l - 1) + \frac{(T_d + 1)}{n}$

- ✓ $A(n)$: Modelo de Aprendizaje
- ✓ n : Número de pruebas
- ✓ T_l : Tiempo límite mínimo que necesita la rata para resolver el laberinto
- ✓ T_d : Diferencia de tiempo máximo y mínimo alcanzado por la rata.

Nota: Las variables:"Dificultad del laberinto", "Medio ambiente","Temperatura de la sala", "Tipo de comida", no fueron consideradas en el experimento.

Creemos que es necesario comprobar nuestro modelo o compararlo con otros resultados, ver como se comporta para otro grupo de datos.

Referencias bibliográficas

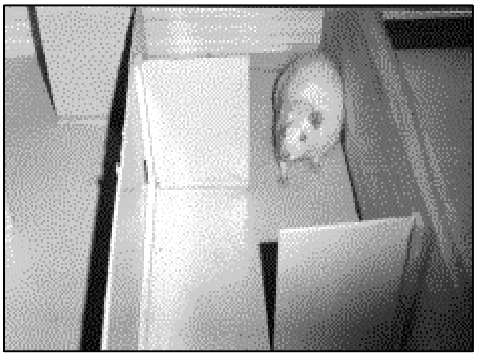
Allen Smith W. (1988). *Análisis Numérico*.(pp. 252-260).Georgia, USA. Georgia State University. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

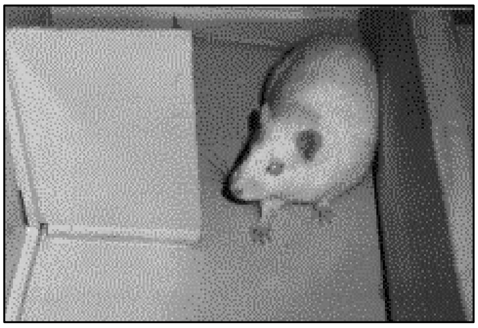
Vizmanos J.R. Anzola M. (1990). *Matemáticas Algoritmo1* (pp. 177-194) Madrid, España: Ediciones S/M.

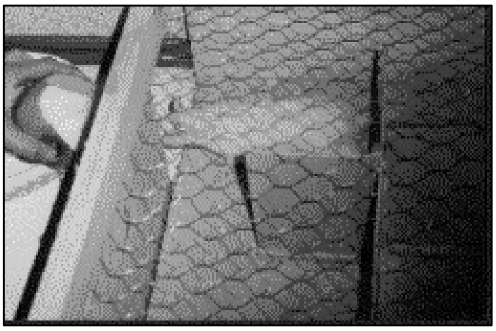
Derive in Education Opportunites and Strategies Proceedings of the 2nd Krems Conference on Mathematics education. (1993) Krems,Austria. The Authors And Chartwett-Bratt ltda. Sweden.

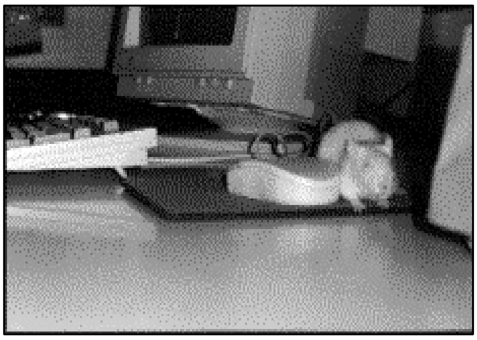
UNESCO (1974). Steiner H *¿Qué es la Matemática Aplicada?* Las Aplicaciones en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la Escuela Secundaria. (pp.139-153).

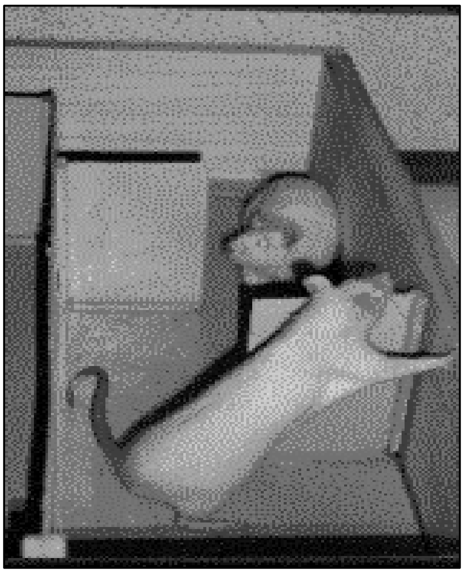
Anexo











Narración de una interacción discursiva en el aula: "la linealidad y lo que no es la linealidad"

Jaime Lorenzo Arrieta Vera
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, I.P.N. México
j_arrieta@hotmail.com

Resumen
Se hace referencia, principalmente, a la puesta en escena de dos secuencias didácticas: "la linealidad como herramienta para interpretar y transformar fenómenos de la naturaleza" y "las matemáticas del movimiento". Ambas secuencias plantean la tesis de que la linealidad sólo se construye en la otredad, es decir en la confrontación con lo que no es ser lineal, de otra forma, por ejemplo, se aplica la regla de tres indiscriminadamente, no se permite hacer la coordinación con otras versiones de la linealidad, la modelación de fenómenos es inaccesible, en general no se permite la construcción de argumentos.
Particularmente, nos proponemos, presentar evidencias empíricas de que "la matemática no es "neutra", depende del contexto social en donde se aborda. La matemática tiene sentido, exactamente, en contextos sociales concretos. Estos contextos remiten a diversas prácticas sociales anteriores escolares o no escolares, este contexto social es determinante en la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos ante una situación".

> Ni la mente sola, ni la mano sola, pueden lograr mucho sin las herramientas que las perfeccionan.
> *Francis Bacon* citado por *Vygotsky* en *Thought and Language*.

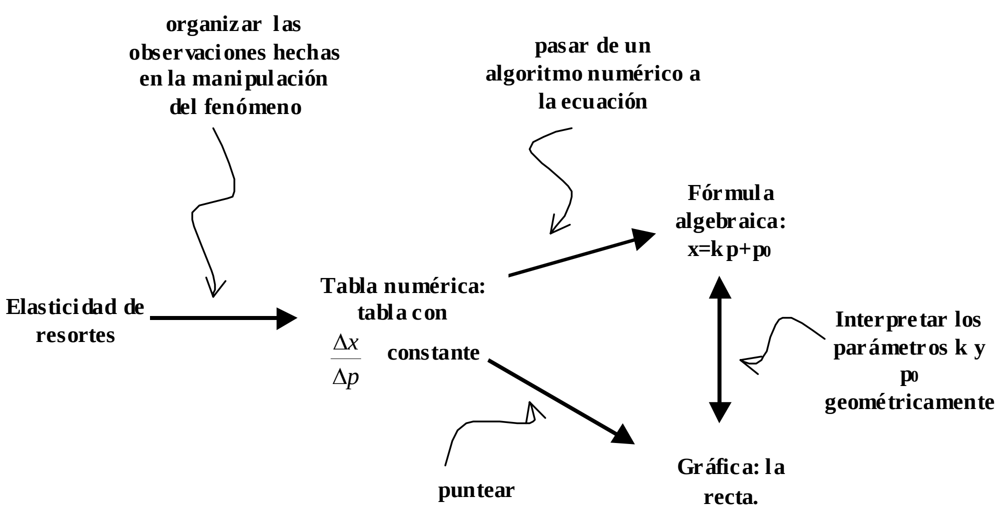
En anteriores exposiciones sobre el trabajo de investigación "*La modelación de fenómenos como proceso de matematización en el aula*", que desarrollo como tesis doctoral, dirigida por los doctores Ricardo Cantoral y Francisco Cordero, he intentado exponer las concepciones generales que lo guían. Ahora el intento es dirigido a presentar, de una forma más particular, algunas evidencias empíricas sobre la pertinencia de este trabajo. Se hace referencia, principalmente, a la puesta en escena de dos secuencias didácticas: "la linealidad como herramienta para interpretar y transformar fenómenos de la naturaleza" y "las matemáticas del movimiento".
Ambas secuencias plantean la tesis de que la linealidad solo se construye en la otredad, es decir en su confrontación con lo que no es ser lineal, de otra forma, por ejemplo, se aplica la regla de tres indiscriminadamente, no se permite hacer la coordinación con otras versiones de la linealidad, la modelación de fenómenos es inaccesible, en general no se permite la construcción de argumentos.
Particularmente, nos proponemos, presentar evidencias empíricas de que "la matemática no es "neutra", depende del contexto social en donde se aborda. La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos. Estos contextos remiten, a los estudiantes y profesores, a diversas prácticas sociales anteriores escolares o no escolares y son determinante en la utilización de las estrategias, las herramientas y los procedimientos ante una situación".

Lineamientos generales de las secuencias

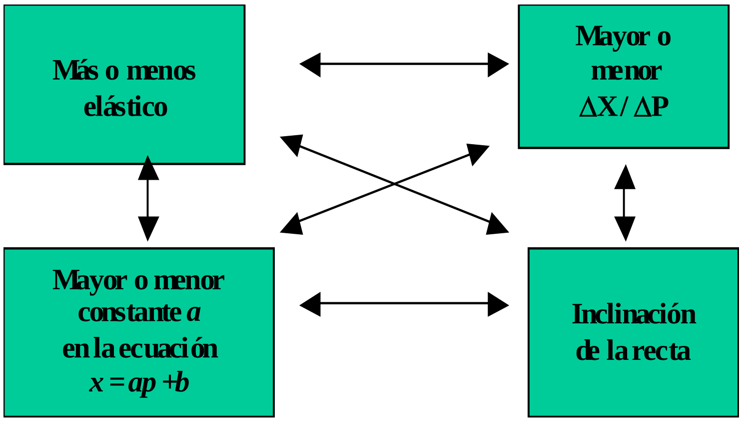
Definimos una intencionalidad, establecer un contexto en donde las herramientas, procedimientos y nociones matemáticas cobren vida, en el intento de interpretar e intervenir en los fenómenos de la naturaleza.
En este sentido hemos rescatado ***prácticas en donde se combina la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática***. A la

estructuración discursiva de estas prácticas en el aula es lo que llamamos la ***modelación como proceso de matematización en el aula*.**
El carácter discursivo de estas prácticas nos remite a actividades que desarrollan interactivamente docentes y alumnos en un salón de clases, confrontando y argumentado diferentes versiones de un fenómeno de la naturaleza (comprendidos los fenómenos sociales, económicos, etc.). Una de las características de este proceso es la articulación de diferentes modelos con la experimentación, como un instrumento de validación de las diferentes versiones en competencia..
La modelación como actividad humana, en el sentido de actividad con la intención de comprender y transformar la naturaleza, la consideramos como fuente que desarrolla procesos de matematización, donde el alumno construye argumentos, significados, herramientas y nociones relacionados con las matemáticas en la intervención con los fenómenos de la naturaleza.
La ciencia no es entendida como constituida sólo por hechos científicos sino, sobre todo, como recursos argumentativos que establecen los hechos científicos y la experimentación y los datos empíricos como un recurso para argumentar y no para establecer la verdad.

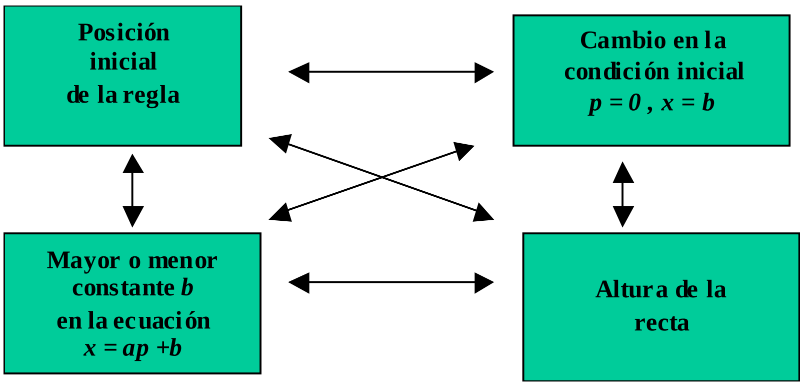
Condiciones experimentales
Las situaciones se aplicaron a un grupo de estudiantes del Conalep Acapulco II (nivel medio superior, preuniversitario), distribuidos en tres equipos de cuatro estudiantes, los estudiantes del equipo C cursaban el quinto semestre, los del equipo B el tercero y los del A el primer semestre. La edad de los estudiantes es entre 15 y 18 años.
La linealidad como herramienta para interpretar y transformar fenómenos de la naturaleza
En esta secuencia los estudiantes y el profesor construyen diferentes modelos para explicar un fenómeno, la elasticidad de resortes, e intervenir en él. En general forman diferentes modelos (identificando sus características distintivas y sus parámetros), hacen predicciones del fenómeno utilizando cada modelo y establecen una coordinación entre ellos.
Se analizan diferentes esquemas didácticos para el tratamiento de la linealidad utilizados en el discurso matemático escolar y se propone un esquema para el diseño de la secuencia.



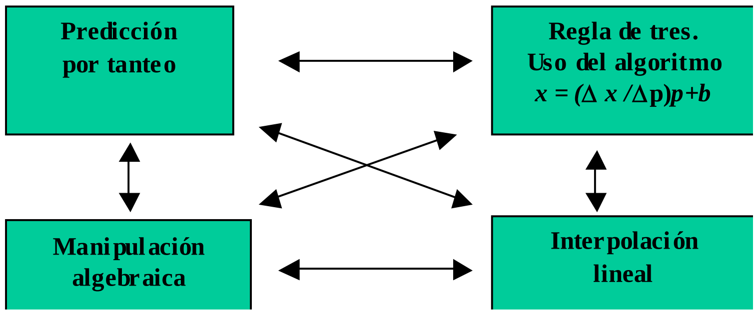
Específicamente, en esta secuencia, la modelación de fenómenos como proceso de matematización en el aula, significa identificar las características del fenómeno en el modelo, utilizar este como una herramienta para entender e intervenir en él, en este caso hacer predicciones con el modelo y coordinar los diferentes modelos, sus parámetros y sus formas de predicción con el fenómeno a modelar.
Resaltamos tres fases de esta secuencia: la argumentación a partir de coordinar la inclinación de la recta y la elasticidad del resorte y la razón de incrementos, la argumentación a partir de coordinar la posición inicial del portapesas y la "altura de la recta" y la elaboración de un esquema que coordine la elasticidad de resortes, sus diferentes modelos, sus parámetros y sus formas de predicción.



Coordinación entre la inclinación de la recta, la elasticidad del resorte, la razón de incrementos y el coeficiente *a* de *p*.



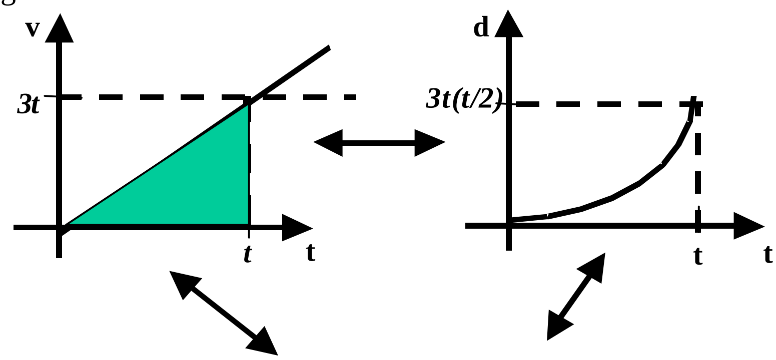
Coordinación entre la altura de la recta, la posición inicial de la regla, la posición inicial x_0 y el coeficiente independiente *b*.



Coordinación entre las formas de predicción con diferentes modelos.

El análisis del desarrollo de esta secuencia arroja evidencias en el sentido de la importancia del contexto social en donde los estudiantes y profesor desarrollan actividades matemáticas. En la resolución de problemas con una misma estructura matemática, los estudiantes y profesores, operan con diferentes estrategias**,** de acuerdo al contexto en que lo hacen.
En la interacción con el fenómeno surgen diferentes versiones de él, y la argumentación utilizada para su validación utiliza recursos tomados del contexto.

Las matemáticas del movimiento
La idea fundamental de esta secuencia es construir un contexto argumentativo donde los estudiantes y profesor, interactivamente, en el aula, construyan argumentos, herramientas y significados a partir de la interacción con un fenómeno, en este caso con el movimiento de un móvil.
El contexto argumentativo se centra en establecer una coordinación entre los movimientos de un móvil, los modelos de la gráfica distancia – tiempo, la gráfica velocidad – tiempo y fórmulas algebraicas.



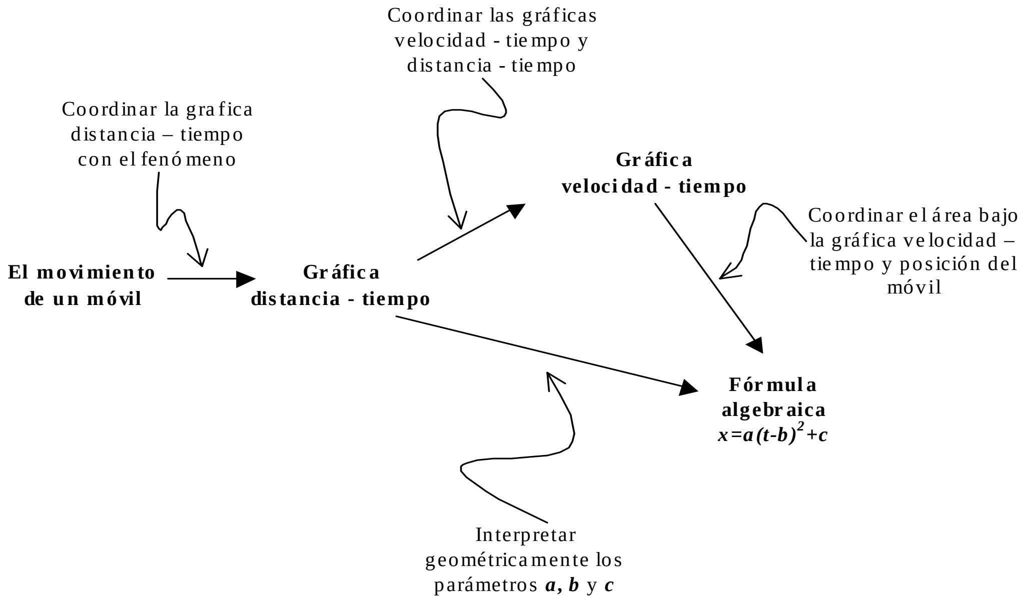
Movimiento

Esta secuencia consta de dos partes, una sobre el "movimiento uniforme (movimiento con velocidad constante)" y la otra sobre el "movimiento uniforme disforme (movimiento uniformemente acelerado)"
Entre las hipótesis predictivas de la secuencia, resaltamos las siguientes.

- Los estudiantes construyen diferentes versiones de los hechos, en este caso de las diferentes situaciones de movimiento de un móvil.
- Los estudiantes construyen una versión gráfica (llamada figuración de la cualidad) del devenir de las distancias y del devenir de las velocidades.

- Los estudiantes establecen una articulación entre el movimiento y gráficas tiempo – distancia y tiempo – velocidad.
- Los estudiantes establecen la relación entre el área bajo la recta velocidad – tiempo con la gráfica distancia – tiempo y este es el argumento principal para establecer el hecho de que la distancia varía como el cuadrado del tiempo en un movimiento uniforme disforme.

El desarrollo de secuencia obedece al esquema que se muestra a continuación:



Entre otras evidencias obtenidas en el análisis de esta secuencia es que los estudiantes construyen, a partir de las gráficas que se obtienen de un sensor de movimiento, diferentes versiones de las situaciones de movimiento de un móvil. En esta secuencia se observan dos versiones en competencia donde los estudiantes construyen argumentos contextuales, como la velocidad. Aquí, la velocidad no solo significa distancia entre tiempo, sino también, por ejemplo, inclinación de la recta en la gráfica distancia – tiempo.

La velocidad significa coordinar dos variables. Algunos estudiantes no muestran inmediatamente esta coordinación, manejando solo una variable, bien sea la distancia o el tiempo. La velocidad esta presente como parte del discurso escolar, mas, en ocasiones, no es movilizada como una herramienta para explicar el movimiento.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* Núm. 42, pp. 353-369, España

Candela, A. (1999) *La ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.*, México: Paidos Educador.

Confrey, J., Costa, S. (1996). A Critique of the Selection of "Mathematical objects" as Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, volumen 1.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, núm. 2-2001, en prensa.

Logaritmos, física y algo más

Daniel Vaccaro, Verónica Szemruch
Colegio del Salvador. Buenos Aires. Argentina
veros@micropymes.com.ar danvac@tutopia.com

Resumen
Con la popularización de las calculadoras electrónicas el cálculo logarítmico en sí mismo fue perdiendo espacio y en forma gradual se fue abandonando su enseñanza. Pero el tema “logaritmos” sigue presente en los “programas”. Es muy difícil lograr un aprendizaje sustancial y por lo tanto duradero si en el momento de abordar el tema nuestros alumnos no le encuentran significado. Así que procuramos dárselo. Para ello, aspiramos a un desarrollo conceptual muy distante del puro entrenamiento algebraico al que se fue limitando la práctica de la enseñanza de esta tema.

Introducción

El cálculo por medio de logaritmos fue durante mucho tiempo el “plato fuerte” del programa de matemática de 4º año del Bachillerato en nuestros colegios nacionales.
Desde nuestro lugar de educadores y con la intención de ensayar nuevas estrategias didácticas, surge esta propuesta tendiente a una enseñanza amena e interesante y a un aprendizaje significativo. Proponemos, para ello, valernos de un amplio campo de aplicaciones y tener en cuenta no sólo los contenidos conceptuales sino también los procedimentales y actitudinales en forma integrada.

Una propuesta para trabajar logaritmos en el aula

A continuación presentamos algunos ejemplos de situaciones problemáticas que permiten el abordaje del tema logaritmos desde una óptica interdisciplinaria. El marco teórico que sustenta la propuesta es la resolución de problemas (Polya, 1998).
La propuesta interdisciplinar permite abordar los logaritmos como una herramienta de suma utilidad para resolver problemas de otras ciencias y no presentar a los alumnos los logaritmos como operadores matemáticos solo aplicables a la resolución de ejercicios rutinarios.

Terremotos

Antes de que se desarrollara el concepto de magnitud de un terremoto, se utilizaba una cantidad más subjetiva conocida como intensidad. Esta cantidad se determinaba en las observaciones de los efectos directos del terremoto:

- ✓ Grado de la sacudida percibida por la gente
- ✓ Cuantía de los daños causados a estructuras artificiales
- ✓ Extensión de deformaciones visibles de la Tierra misma

Una de estas escalas tiene 12 grados, que se indican con números romanos y fue desarrollada por Mercalli.

Actualmente se utiliza la magnitud de un terremoto que es una medida absoluta relacionada con la energía sísmica liberada. Una de las escalas más utilizadas es la de Richter en la que la magnitud M y la energía E, expresada en Joules, están relacionadas por la fórmula:

$$\log E = 1{,}44\,M + 5{,}24$$

Según esta fórmula si nos informan de la magnitud de un terremoto podemos averiguar cuánta energía fue liberada durante el mismo. Para ello basta con despejar E de la fórmula anterior donde obtenemos:

$$E = 173780 \quad x\,10^{1{,}44\,M}$$

Un terremoto de grado VI en la escala Mercalli produce

- ✓ un susto generalizado en las personas
- ✓ daños en mampostería y chimeneas
- ✓ se mueven los muebles
- ✓ se caen objetos

Corresponde aproximadamente a una magnitud de 5,5 en la escala Richter y por lo tanto se libera una energía:

$$E = 1{,}4\,x\,10^{13}\ \text{Joules} \quad = 4\ 000\ \ 000 \quad \text{kwh}$$

¡Esta es suficiente cantidad de energía para mantener encendida una lamparita de 40 Watt durante más 400 000 años!

Pero un terremoto de magnitud 8,5(sólo 3 unidades mayor que el anterior) produce

- ✓ destrucción total
- ✓ ondas visibles en el suelo
- ✓ el nivel del suelo y los contornos del paisaje quedan modificados
- ✓ algunos objetos pueden "volar"

Si calculamos la energía para este caso resulta E= 8,4 x 10^{10} kwh. Es decir, en términos de la energía un terremoto de magnitud 8,5 es 21 mil veces más "grande" que uno de magnitud 5,5.

Algunos ejercicios

1. ¿Cuántas veces más energía libera un terremoto de magnitud 7 que un terremoto de magnitud 5?
2. Si se pudiera aprovechar la energía de un terremoto para generar corriente eléctrica, ¿Durante cuánto tiempo se puede mantener iluminada una ciudad que tiene instaladas 100 000 lámparas de 100 Watts cada una con la energía de un terremoto de magnitud 5?
3. Si en un terremoto de magnitud M se libera una cantidad de energía E, ¿cuántas veces más energía se libera en un terremoto que es un grado mayor?
4. Completar la siguiente tabla calculando la energía o la magnitud según corresponda:

Terremoto			
Fecha	Lugar	Magnitud (Richter)	Energía (Joule)
27/mar/1964	Alaska	8,6	
27/jul/1976	Tientsin, China		1,1 x 10^{17}
15/set/1977	Udine, Italia	6,2	

Dosis de un medicamento

La cantidad de ciertos medicamentos (en el cuerpo humano) sigue una ley de decaimiento exponencial: $N = N_0 . e^{-kt}$ Donde

- ✓ N = cantidad de droga presente en un tiempo " t ".
- ✓ N_0 = cantidad de droga en un tiempo t=0
- ✓ K= $\frac{\ln 2}{H}$ (siendo H la vida media del medicamento)

Si se pretende alcanzar un determinado nivel terapéutico, las dosis que siguen a la primera deberán ser reducidas para mantener este nivel y evitar de esta manera los efectos tóxicos de ciertas drogas.

Para determinar el nivel terapéutico (T):

$$T = \frac{P.\left(1 - e^{-dkI}\right)}{e^{kI} - 1}$$

Para determinar la dosis reducida (R):

$$R = P.\left(1 - e^{-dkI}\right)$$

Donde :

- ✓ P = unidades de medicamento por dosis
- ✓ I = intervalo de tiempo entre dosis consecutivas
- ✓ d = cantidad de dosis

Problemas

1) Si "I" es el intervalo de tiempo entre dosis consecutivas, demuestre que para el nivel terapéutico "T":

$$\frac{P.\left(1 - e^{-dkI}\right)}{e^{kI} - 1} = \left(1 - \frac{1}{2^d}\right).P$$ Observar que $0 < 1 - \frac{1}{2^d} < 1$ para $d > 0$.

2) La teofilina es una droga utilizada en el tratamiento del asma bronquial y tiene una vida media de 8 hs en el sistema de un paciente relativamente sano y no fumador. Suponga que el paciente alcanza el nivel terapéutico deseado en 12 hs cuando 100 mg le son suministrados cada 4 hs aquí d = 3 . A causa de la toxicidad, la dosis debe ser reducida más adelante.
   a) Determine el nivel terapéutico (redondee al mg más cercano).
   b) Determine la dosis reducida (redondee al mg más cercano).

Decaimiento radiactivo

Los núcleos de los átomos de un elemento radiactivo se desintegran conforme transcurre el tiempo, siguiendo una ley de decaimiento exponencial. Este hecho se formula de la siguiente manera:

$N = N_0 . e^{-\lambda t}$ Donde

- ✓ N = cantidad de núcleos del elemento en un tiempo " t ".
- ✓ N_0 = cantidad inicial de núcleos (es decir en un tiempo t=0)
- ✓ λ = constante de decaimiento (propia de cada elemento).

Cálculo de la vida media de un elemento radiactivo

Si $N = \frac{N_0}{2}$

es decir para una cantidad equivalente a la mitad de la inicial

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \,.\, e^{-\lambda\, T}$$

donde T es el tiempo necesario para que la cantidad de elemento se reduzca a la mitad

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda\, T}$$

despejando

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

donde T se llama vida media del elemento .

***Por ejemplo**: Si inicialmente hay un gramo (1gr) de sustancia, después de cierto tiempo T habrá ½ gr, luego de transcurrido un tiempo 2T habrá ¼ gr, etc.*

Otros problemas de aplicación

Radiactividad

1) El elemento radiactivo decae de modo que después de "t" días la cantidad de miligramos presentes "N", esta dado por $N = 100.e^{-0.062t}$.
   a) ¿Cuántos miligramos hay inicialmente?
   b) ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?

Respuesta: a) 100 mg b) 53,8 mg.

Crecimiento poblacional

1) El número de bacterias presentes en un cultivo después de "t" minutos, está dado por la fórmula : $N(t) = 300 \,.\left(\frac{4}{3}\right)^t$ donde se puede ver que N(t) es un múltiplo de la función exponencial $(4/3)^t$.
   a) Determine cuántas bacterias están presentes al inicio.
   b) Determine cuántas bacterias estarán presentes después de 3 minutos.
   c) ¿ Cuánto tiempo tomará que haya 1000 bacterias?

Respuesta: a) 300 bacterias b) 711 bacterias c) 4,2 min.

2) La población de una ciudad de 8000 habitantes crece a razón del 2 % anual.
   a) Determine una ecuación que permita calcular la población "P" después de "t" años a partir de ahora.
   b) Encuentre la población dentro de dos años.

Inversiones

Para el cálculo de interés compuesto también utilizamos una función exponencial. Si "S" es el monto compuesto de un principal "P", al final de "n" períodos de interés a la tasa periódica "r".

$$\Rightarrow \; S = P.(1+r)^n$$

1) Si $2600 son invertidos durante 6 años y medio, al 6% compuesto cada trimestre.

Determine:
a) El monto compuesto.
b) El interés compuesto.

Sonido
El oído humano es notablemente sensible a las variaciones en la intensidad del sonido. La intensidad del sonido es una forma de expresar la cantidad de energía que pasa a través de 1 centímetro cuadrado de área transversal en un segundo. Es decir que:

INTENSIDAD = ENERGÍA/ÁREA . TIEMPO

Según esto la intensidad de un sonido se puede expresar, por ejemplo, en Watts sobre centímetros cuadrados. Una intensidad $I_o = 10^{-16}$ W/cm^2 corresponde aproximadamente al sonido más débil que se puede escuchar. La intensidad máxima que el oído humano puede tolerar es aproximadamente igual a 10^{-4} W/cm^2. Como se podrá apreciar entre la mínima intensidad audible y el máximo hay 12 órdenes de magnitud. La intensidad máxima tolerable es 1 billón(es decir, 1 millón de millones) de veces mayor que la intensidad correspondiente al sonido audible más débil.
¿Cómo podemos comprender esto? Supongamos que una mosca pasa cerca de nuestro oído y el movimiento de sus alas produce un sonido de manera que nuestro oído recibe 10^{-16} Joules de energía en un segundo a través de 1 cm^2. En este caso, y suponiendo que estemos en un ambiente en absoluto silencio podríamos apenas percibir ese sonido. Pero en ese mismo ambiente se necesitarían 1 billón(1 millón de millones) de moscas para "aturdirnos".
Por estas razones se ha elegido una escala logarítmica para expresar el nivel de intensidad sonora que se adapte a la forma en que el oído humano percibe el sonido. Dicho nivel de intensidad sonora se define de la siguiente manera:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_o}$$

La unidad en que se expresa el nivel de intensidad sonora se denomina decibel. En la fórmula anterior I_o representa el umbral de audición o mínima intensidad audible.
De esta manera un enorme rango de variación entre la mínima intensidad y el umbral de sensación de dolor cuya intensidad es 10^{12} veces mayor se transforma en una escala de niveles de intensidad que va de 0 dB hasta 120 dB.

Estrellas
El astrónomo Tolomeo en el siglo II d.C. catalogó las estrellas asignándole una especie de jerarquía basada en su brillo tal como se lo percibe a simple vista. Las más brillantes son las estrellas de 1ra magnitud o m = 1. Las menos brillantes, las que apenas se aprecian a simple vista, son de 6ta magnitud o m = 6. Por supuesto que con los telescopios se pueden ver estrellas mucho más débiles es decir cuyos valores de m > 6.
Esta escala de magnitudes fue utilizada por los astrónomos durante siglos pero su utilización no resultó sencilla ya que no se podían medir, sino que eran el resultado de estimaciones subjetivas. Hasta el siglo XIX no se pudo lograr un método riguroso, basado en la comparación de la intensidad de la luz recibida de cada estrella con la recibida de una fuente de luz de intensidad regulable, de modo tal de obtener de cada estrella cierta intensidad I expresada en Watts/m^2
Pogson determinó la relación entre la magnitud visual de una estrella y la intensidad medida con un instrumento de observación:

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log \frac{I_1}{I_2}$$

El signo menos indica que al aumentar la iluminación(intensidad), disminuye la magnitud y por lo tanto la estrella se ve más brillante. Según esta fórmula entre una estrella de 1ra magnitud y otra de sexta magnitud la relación de intensidades es:

$$1 - 6 = -2{,}5 \log \frac{I_I}{I_{VI}}$$

$$5 = 2{,}5 \log \frac{I_I}{I_{VI}}$$

$$I_I = 100\, I_{VI}$$

Conclusiones

Este trabajo propone una unidad didáctica interdisciplinaria tomando como ejes estructurantes a las funciones logarítmica y exponencial, y está sustentado en la intención de que los alumnos trabajen estos contenidos simultáneamente con la asignatura Física y los comprendan a partir de algunas de sus aplicaciones científicas y técnicas tales como: El nivel de intensidad sonora, la magnitud de los terremotos en la escala Richter, el brillo de las estrellas, el decaimiento radiactivo, la cantidad de información, la ecuación barométrica, el crecimiento de una población entre otros.

Esta propuesta está siendo aplicada en la actualidad. Los resultados que se están obteniendo son positivos. Sobre la base de este tipo de problemas, los alumnos se comienzan a plantean preguntas, dar sugerencias de posible vías distintas de resolución, llegan a hacer hipótesis y a explicar los resultados obtenidos. La presentación de problemas similares a los anteriores da a los logaritmos significatividad dentro de la enseñanza, ya que permiten el abordaje y resolución de situaciones problemáticas de diversa naturaleza.

Proponemos partir de información potencialmente interesante. Es decir situaciones que puedan ser consideradas importantes por muchas personas, más allá de la situación escolar de enseñanza – aprendizaje. En función del interés que esta información pueda originar y analizando la comparación entre magnitudes en las cuales la variación moderada de una variable provoca la variación de otra variable en muchos órdenes de magnitud, deseamos introducir la necesidad de las funciones exponencial y logarítmica y los procedimientos para la utilización de éstas en la resolución de problemas.

Referencias bibliográficas

Booth B, Fitch F(1986). *La inestable Tierra*. Salvat. Barcelona

COMAP. (1998). *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.

Haeussler y Paul (1998). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana

Jaschek C, Corvalán de Jaschek M(1983). *Astrofísica.* OEA. Washington

Polya, George. (1998). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Matemática y Física Cuántica

Cristina Ben
Buenos Aires. Argentina
bencristina@hotmail.com

Resumen
Dar a conocer nociones básicas de física cuántica en el último año de la enseñanza media puede ser una experiencia enriquecedora que nos permite cerrar y relacionar temas de matemática que es bueno darles un toque final para que queden bien asimilados. Este trabajo toma como eje a la física cuántica y desde sus nociones básicas, va tomando temas de matemática. Es un tema que se debe introducir como divulgación científica y que es importante darlo porque la física moderna ha salido de la concepción mecanicista y tiene un enfoque de la realidad que es distinto al empleado hasta ahora.
Este trabajo permite observar el nivel de abstracción que han alcanzado los alumnos al finalizar la enseñanza media y les otorga a los más curiosos la oportunidad de profundizar e investigar.

Introducción

La física es una ciencia altamente matematizada cuyas teorías una vez construidas pueden resumirse en un conjunto de axiomas matemáticos. Entonces, ¿porqué no utilizarla para desarrollar algunos temas difíciles de matemática?. La física cuántica es esencialmente probabilística y estadística, en sus conceptos fundamentales están implícitos temas de matemática que encuentran en esta ciencia una aplicación real que permite cerrar temas y afianzar conceptos importantes en nuestra área. Propongo trabajar este tema al finalizar 5° año, presentándolo como divulgación científica, con la intención de explorar temas que cada día tienen más vigencia y la meta de presentar conceptos básicos e impulsar a los más curiosos para que investiguen y profundicen.
Además, nos permite abordar temas como fractales y geometrías no euclidianas donde podemos inspeccionar qué nivel de abstracción han alcanzado nuestros alumnos en 5° año y empezar a ver que debemos modificar si no nos satisface lo que observamos.
Creo que en la enseñanza media presentamos la geometría de un modo inconcluso, damos toda la importancia a la geometría euclidiana y no nos queda tiempo para más, pero un alumno de 5° año debe tener nociones que le permitan formarse una idea más completa de la geometría. En realidad, debe preguntarse qué es la geometría y lograr responderse.
Considero importante no pretender que nuestros alumnos dominen un tema tan vasto y complejo y aprovechar la ocasión para cerrar y fijar conceptos como consistencia, iteración y dimensión y repasar y ampliar temas trabajados como probabilidad y estadística, números complejos y análisis matemático.

Desarrollo

La materia tiene una estructura granular, está compuesta de partículas elementales, de cuantos elementales de materia, también poseen estructura granular la carga eléctrica y la energía. Si consideramos la estructura infinitamente granular de la materia que plantea la teoría atómica, la posibilidad de aplicar a la realidad el concepto matemático riguroso de continuidad sufre un revés. Pero hay un límite, una unidad fundamental de medida, no hay nada más pequeño y es la llamada constante de Planck.

Erwin Schrödinger y Werner Heisenberg escribieron las ecuaciones que rigen la teoría cuántica. El principio de incertidumbre de Heisenberg expresa las limitaciones de nuestros conceptos clásicos de una forma matemática y precisa pues establece que en el mundo subatómico, no se puede saber el curso de una partícula. Nunca podemos saber con precisión ni la posición ni el momento de una partícula.
El teorema de Gödel afirma que en toda axiomática no contradictoria que contenga la teoría de números hay enunciados verdaderos aunque indemostrables, la física cuántica contiene tales enunciados.
La física de los cuantos posee leyes que rigen multitudes y no individuos, no describe propiedades, sino probabilidades y resume tres elementos: probabilidad, onda y partícula en un solo objeto teórico: la función de onda, que tiene un valor determinado en todo punto del espacio y en todo instante de tiempo. Las funciones de onda (también llamadas ondas de probabilidad) son cantidades matemáticas abstractas (si los alumnos han construido algunas funciones de probabilidad, pueden llegar a captar la idea de función de onda).
La onda de probabilidad no nos da la posición y la velocidad de un electrón en un instante pero nos da la probabilidad de encontrar un electrón en un lugar del espacio o nos indica dónde existe la máxima probabilidad de encontrarlo. La teoría de los cuantos creó nuevas y esenciales características de la realidad. La discontinuidad reemplazó a la continuidad, en lugar de leyes que valgan para los casos individuales, aparecieron leyes de probabilidad.
Desde Newton se utiliza el método diferencial para expresar los fenómenos físicos con ecuaciones: se descompone un objeto complejo en sus partes más simples. Esta simplicidad permite una descripción local, diferencial, que, tras la integración, aporta las propiedades globales de un objeto. Este método pierde toda su eficacia si las partes, en vez de más simples, son diferentes o más complejas que el objeto del que se ha partido. Esto es lo que pasa en la física de las partículas, donde las trayectorias de las partículas no son diferenciables, pues no tienen una pendiente (o velocidad) bien diferenciada en todas partes. Se nos presenta ahora la oportunidad de revisar lo que hemos trabajado de análisis matemático para fijar el concepto de diferencial. Aunque las funciones diferenciables son las más simples y más fáciles de manejar, son una excepción. Hablando en términos geométricos, lo normal son las curvas sin tangente, mientras que las curvas regulares son casos interesantes pero muy particulares. Para explicitar el tema podemos estudiar algunas curvas no diferenciables y reconstruirlas mediante aproximaciones sucesivas.

La ecuación de Schrödinger parece establecer que el comportamiento cuántico es la manifestación del carácter no diferenciable y fractal del espacio-tiempo.
Pero ¿qué es el espacio-tiempo? Supongamos que hubiese un espacio de naturaleza tal, que se necesitara cuatro números, o cinco, o dieciocho, para localizar un punto fijo el él. Sería un espacio cuadridimensional, o de cinco dimensiones, o de dieciocho dimensiones respectivamente. Tales espacios no existen en el universo ordinario, pero los matemáticos sí pueden concebir estos “hiperespacios” y calcular qué propiedades tendrían las correspondientes figuras matemáticas, e incluso llegan a calcular las propiedades que cumplirían para cualquier espacio dimensional: lo que se llama “geometría n-dimensional”.
Pero si lo que estamos manejando son puntos, no fijos, sino variables en el tiempo, por ejemplo, si queremos localizar la posición de un mosquito que está volando en una habitación, tendremos que dar los tres números que ya conocemos pero luego tendríamos que añadir un cuarto número que represente el tiempo, porque el mosquito habrá ocupado esa posición espacial sólo durante un instante y ese instante hay que identificarlo. Lo

mismo vale para todo cuanto hay en el universo. Tenemos el espacio, que es tridimensional, y hay que añadir el tiempo para obtener un “espacio-tiempo cuadridimensional”, por lo tanto, el tiempo es una cuarta dimensión diferente de las otras tres. Pero, ¿qué significa dimensión?
La palabra viene de un término latino que significa medir completamente. En la geometría clásica un segmento tiene dimensión 1, un círculo tiene dimensión 2, una esfera tiene dimensión 3.

¿Nuestros alumnos, se acordarán de los logaritmos?

Dimensión= log(n° de pedazos/log(aumento)
Segmento d= log(n)/log(n)=1
Cuadrado d=log(n^2)/log (n)=2
Cubo d=log(n^3)/log(n)=3

¿Qué dimensión tiene un punto?
En la física de Newton, todos los fenómenos físicos se reducen al movimiento de cuerpos materiales en el espacio, movimiento que es originado por su mutua atracción, para fundamentar su teoría Newton tuvo que inventar técnicas y conceptos matemáticos completamente nuevos: el cálculo diferencial, ello supuso un logro intelectual tremendo y fue elogiado por Einstein como quizá *“el mayor avance en el pensamiento que jamás un solo individuo haya tenido el privilegio de hacer”*.
Las tres primeras décadas de nuestro siglo cambiaron radicalmente todo el panorama de la física. La teoría de la relatividad fue construida casi en su totalidad por Einstein, en cambio la teoría cuántica fue elaborada por todo un equipo de físicos (Böhr, de Broglie, Schrödinger, Pauli, Heisemberg y Dirac).
La física de Einstein es perceptible a grandes velocidades, tales velocidades han sido observadas en las partículas subatómicas.
El espacio en los campos gravitacionales más fuertes que el de la tierra tiene una estructura que difiere de la estructura de la geometría de Euclides, pero en campos gravitacionales débiles las diferencias son poco perceptiles o imperceptibles, entonces, a diferencia de las conclusiones que durante 2000 años la matemática y la física habían establecido, el espacio matemático correspondiente a la realidad física es de naturaleza no euclideana.

Espacio geométrico euclideano	Física de Newton
Espacio geométrico no euclideano	Física de Einstein

Las cuatro fuerzas básicas de la naturaleza son la nuclear débil, la nuclear fuerte, la electromagnética y la gravitatoria.

Gravitación

Teoría de Newton	Teoría de Einstein
Describe como funciona	Explica porqué existe
Espacio-tiempo plano(Euclideano)	Espacio-tiempo curvo (No euclideano)
Campo gravitatorio débil	Campos gravitatorios más fuertes.

Podemos dar algunos ejemplos de geometrías no euclideanas apuntando a que nuestros alumnos construyan el concepto de consistencia (por ejemplo la de Riemann se puede trabajar con esferas de telgopor) hay que destacar que los distintos sistemas no hablan de lo mismo (cuando dicen recta, plano, etc.) no se está hablando acerca del mismo ente porque los postulados en los distintos sistemas son distintos, por lo tanto, definen entidades distintas, pero cada uno de los sistemas internamente es consistente.

Retomando la ecuación de Schrödinger, que establece que el comportamiento cuántico es la manifestación del carácter no diferenciable y fractal del espacio-tiempo, queda por presentar la geometría fractal. Las trayectorias de las partículas cuánticas son curvas fractales.
La palabra fractal significa fracturado, roto. El fractal es, matemáticamente, una figura geométrica que es compleja y detallada en estructura a cualquier nivel de magnificación. No tiene dimensión 1, 2 o 3 como la mayoría de los objetos a los que estamos acostumbrados, tienen una dimensión que no es entera, pueden tener una dimensión menor que 2 (pues no llenan toda la porción del plano).

Los fractales se generan por iteración, que es repetir el mismo proceso infinidad de veces.
por ejemplo: Si sobre cada lado de un semihexágono regular se construye otro semejante con razón ½ y en posición alternada , iterando lo operación sucesivamente se obtiene un fractal de dimensión s= log 3/log2= 1,5849... o en vez de expresar las transformaciones del plano real en sí mismo es más práctico introducir los números complejos $Z= x + iy$ (x, y reales) y estudiar las transformaciones de la forma $Z = f(Z)$ siendo $f(Z)$ una función de la variable compleja. De esta forma una expresión matemática tan inocua como una ecuación cuadrática $Z= Z^2 + c$, iterada en el plano complejo, muestra tal complejidad, que aparecen formas conectadas o fragmentadas variando c.

$Z = Z^2 + c$ c es un a constante

Para iterar $Z^2 + c$ comenzamos con una “semilla”, esto es, un número (real o complejo) que representamos por Z_0.

$Z_1 = Z_0 + c$ c es una constante

Ahora, iteraremos usando el resultado del cálculo anterior.

$Z_2 = Z_1 + c$
$Z_3 = Z_2 + c$
$Z_4 = Z_3 + c$
$Z_5 = Z_4 + c$

Y así sucesivamente. La lista de números Z_1, Z_2, Z_3, Z_4,... generada por ésta iteración se denomina “órbita de Z_0 bajo la iteración de $Z^2 + c$.

Ejemplos

$c=1$ y $Z_0=0$	$c= 2i$ y $Z_0=0$
$Z_1 = 0^2 + 1 = 1$	$Z_1= 2i$
$Z_2 = 1^2 + 1 = 2$	$Z_2= (2i)^2 + 2i = 4 + 2i$
$Z_3 = 2^2 + 1 = 5$	$Z_3= (4 + 2i)^2+2i=12 – 14i$
$Z_4 = 5^2 + 1 = 26$	$Z_4=(12-14i)^2+2i=52-334i$
Z_5 = número grande	Z_5= grande

Esta órbita tiende a infinito. Ésta órbita tiende a infinito en el plano complejo.

La iteración de funciones de esta forma fue objeto de estudio de los matemáticos franceses G. Juliá y P. Fatou aproximadamente en 1920 pero como no disponían de computadoras no pudieron seguir avanzando en sus trabajos. Hacia 1980 Mandelbrot retomó el tema pues la computadora disparó las posibilidades de exploración. Según Mandelbrot la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo infinitesimal. Él afirma *“Yo no creé los fractales, sólo los descubrí”*.

Los fractales materializan el sueño de la ciencia: algo tan complicado se puede explicar con fórmulas simples. Es importante reconocer que los fractales verdaderos son una idealización, ninguna curva en el mundo real es un fractal verdadero. Todavía hay muchas propiedades que se sospechan pero aún no se han podido demostrar. El crecimiento en la naturaleza está vinculado a modelos fractales, se pueden encontrar formas fractales en hojas, montañas, costas, nubes, sistema circulatorio, etc.
Los objetos fractales aparecen en relación con dos circunstancias , una situación de frontera, donde entran en contacto dos medios o superficies (riberas de ríos, medios químicos, etc.) y la otra situación es la del árbol: árboles, tejidos arteriales, redes pulmonares, etc. En esta geometría los objetos se presentan muy irregulares y los sucesos poco o nada predecibles (La teoría del caos nació en 1960 y trata el comportamiento de sistemas no lineales).

Diferencias fundamentales entre la Geometría Euclideana y la Geometría Fractal

Euclídea	**Fractal**
Tradicional (más de 2000 años)	Moderna(aprox. 10 años)
Dimensión entera	Dimensión fractal
Trata objetos hechos por el hombre	Apropiada para formas naturales
Descripta por fórmulas	Algoritmo recursivo(iteración).

Otro aspecto interesante de la teoría cuántica, tal vez el más interesante y profundo, es el principio de complementariedad de Böhr. La frase de Böhr: *”Los opuestos son complementarios”* significa que partícula y onda son dos descripciones complementarias de la misma realidad, también introduce la visión de unidad como fundamento de las partes, cuando afirma que existen variables locales y no locales que pueden estar determinando el comportamiento de las partículas, el todo aporta un principio de racionalidad, disminuye el poder del azar e incorpora un principio de razón y vuelve inteligible la acción de componentes individuales aislados. En los experimentos modernos, las partículas resultan difícilmente aislables de la acción del observador, todo el proceso de preparación y medición de las partículas subraya la presencia del observador y resulta difícil distinguirlo de lo observado. Esta nueva visión de la realidad origina enormes consecuencias.

La física cuántica aporta una concepción distinta del universo, se acerca al misterio y se esfuerza por describirlo, partícula y onda, movimiento y reposo, existencia y no existencia son algunos de los conceptos opuestos y contradictorios que son trascendidos en la física moderna.

Finalmente, parece oportuno citar las siguientes palabras de Jean Guitton (filósofo), que sintetizan el cambio de paradigma que está provocando la nueva física: *“La ciencia rectora, la que nos hace penetrar en el interior de los secretos del cosmos, no es tanto la física como la matemática o la física matemática, considerando el orden matemático que se revela en el corazón de lo real, ese desconocido oculto detrás del cosmos es por lo menos una inteligencia hipermatemática, calculante y relacionante (fabricante de relaciones) de manera que debe ser de tipo abstracto y espiritual”*.

Conclusiones

Es un trabajo extenso pero integrador. Presenta dificultades, pero, también existe la posibilidad de abordarlo en conjunto con profesores de otras áreas: Física, Informática (fractales), Filosofía (desde el conocimiento) y el hecho de presentarlo a modo de divulgación permite que no tengamos que ser expertos en cada tema para transmitirlo al aula.

Una vez expuesto, se le puede pedir a los alumnos que formen grupos y preparen un trabajo práctico (profundizando e investigando) sobre uno de los temas que le haya interesado más: fractales (se puede trabajar también con el profesor de informática), geometrías no euclideanas (se puede trabajar con esferas de telgopor la geometría de Riemann), mecanicismo (es interesante para los que les gusta la historia), El principio de incertidumbre, la posición de Böhr y sus consecuencias filosóficas, qué es la geometría, etc.

Evaluar el tema de este modo puede ser más productivo y se puede preparar un cuestionario para evaluar cuánto han comprendido en general y poder presentarlo mejor el año siguiente.

No es un tema que figure en los programas pero su riqueza de contenido y posibilidades permite repasar y cerrar temas (continuidad, derivada, diferencial, probabilidad, números complejos y logaritmos) y además, nos permite medir el nivel de abstracción con que egresan nuestros alumnos.

Referencias bibliográficas

Einstein, Albert; Infeld, Leopold. (1939). *La física, aventura del pensamiento*. Buenos Aires: Editorial Losada.

Asimov, Isaac: *Preguntas básicas sobre ciencia*. Buenos Aires: Biblioteca Página doce.

Massuh, Víctor. *La flecha del tiempo*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Capra, Fritjof. *El tao de la física*. Editorial Sirio.

Mandelbrot, Benoit. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Editorial Tusquets.

Santaló, Luis. (1976). *Geometrías no Euclideanas*. Buenos Aires: EUDEBA.

Paulos, John. (1993). *Más allá de los números*. Barcelona: Editorial Tusquets.

Guitton, Jean. *Dios y la Ciencia*. Emecé.

Sagan, Carl. (1985). *Cosmos*. Barcelona: Editorial Planeta.

Nottale, Laurent. (1997). *El espacio tiempo fractal*. En Revista Investigación y Ciencia. Julio/97.

http://www.quanta.net.py/zfractal/iter.htm

Una propuesta para la enseñanza de problemas de programación lineal

Nora Gatica, Mirta Moreno
Universidad Nacional de San Luis. Argentina
nimberti@fices.unsl.edu.ar

Resumen
Muchas veces, la actitud del estudiante se manifiesta pasiva y sin motivación para enfrentar el estudio de diversas asignaturas, en especial en Matemáticas. Este hecho proviene, en variadas ocasiones, al no tener respuesta a la pregunta: ¿para que sirve aprender matemáticas?
Con el propósito de revertir esta situación, hemos incorporado métodos y técnicas participativas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de un tema en particular: los problemas de Programación Lineal.
Con los problemas de Programación Lineal, nos introducimos, a la teoría de sistemas de desigualdades lineales, la cual es una rama de la matemática no extensa pero si muy interesante. Lo interesante se encuentra en su contenido geométrico, ya que la definición de un sistema de desigualdades lineales con dos incógnitas significa la representación de una región o recinto convexo y poligonal en un plano.
El presente Taller se dirige a profesores de Matemática de la enseñanza media y superior interesados en recibir propuestas interesantes que reflejen la manera en que las matemáticas son utilizadas reflejando las diferentes formas en que la gente trabaja junta y aprende. Tiene la intención de posibilitar la incorporación de situaciones propiamente educativas con proyectos específicos donde el estudiante figure como centro del proceso de enseñanza que le facilite un aprendizaje significativo y transmitir a los participantes un conjunto de informaciones y experiencias en el empleo de problemas de programación lineal que le sirva para el desarrollo de su práctica docente

Introducción

La Ley Federal de Educación en Argentina, puntualiza la necesidad de que el alumno o la alumna “adquieran esquemas de conocimiento que les permita ampliar su experiencia dentro de la esfera de lo cotidiano y acceder a sistemas de mayor grado de integración a través de los procesos de pensamientos específicos dirigidos a la resolución de problemas en los principales ámbitos y sectores de la realidad”.
Así mismo plantea el enfoque con que han de trabajarse los contenidos de matemática, en donde requiere que se destaque:

- La comprensión conceptual.
- El gusto por hacer matemática.
- La habilidad de plantear problemas y resolverlos con una variedad de estrategias, teniendo en cuenta que la matemática es una habilidad humana a la que todos pueden acceder de manera placentera.
- La significación y funcionalidad de la matemática a través de su conexión con el mundo real, entre sus diversas ramas y con las otras ciencias.
- La potencia de la matemática para modelizar problemas de las otras disciplinas a partir de su estructuración lógica y de su lenguaje.....

Los Contenidos Básicos Comunes de Matemática para la Educación General Básica han sido organizados en ocho bloques. El título del Bloque Nro. 3 es Lenguaje gráfico y algebraico.
La síntesis explicativa de este bloque expresa: ..."Los alumnos y alumnas en la EGB explotarán conceptos algebraicos, pero de manera informal. Esta explotación debe enfatizar el uso de modelos físicos, tablas de datos, gráficos, escritura de ecuaciones, fórmulas, etc. que tiendan a favorecer la comprensión de los conceptos de función, variable, cambio y

dependencia... La resolución de diversos problemas requerirá del planteo de ecuaciones, inecuaciones o sistemas que en principio podrán ser resueltos con apoyo gráfico, para llegar en el Tercer Ciclo a un tratamiento algebraico más completo comprendiendo que las igualdades y desigualdades algebraicas pueden transformarse de manera válida por medio de reglas que el álgebra prescribe para producir expresiones más simples (equivalentes), pero que conservan su relación inicial."

Por otra parte, en relación a los contenidos curriculares, Santaló (1986), expresa:

> "Los contenidos deberán ser expuestos según una metodología que contemple:
>
> a) El desarrollo intelectual del alumno, capacitándolo para "entender" los problemas de la vida moderna y para que pueda resolverlos con los medios a su alcance. Es decir, los contenidos deben ser considerados, en gran parte, como ejemplos del método matemático, cuyas posibilidades exceden a los casos tratados durante la enseñanza y son variables con el lugar y con el tiempo. Hay que desarrollar en el alumno la capacidad para aprender por si solo......
> b) Despertar en el alumno la imaginación y la creatividad, así como la admiración por las construcciones intelectuales que es posible elaborar sobre estructuras matemáticas, viendo a la matemática como un juego de ingenio que permite llegar a conclusiones importantes y no fácilmente previsibles....
> c) Vamos a señalar una posible lista de contenidos, que se trata solo de alineamientos generales, que deberán detallarse adecuadamente y sobre todo experimentarse y evaluarse, teniendo en cuenta la escuela, el medio, el profesor y el alumno..."

Dentro de la lista de contenidos, en tercer año de secundaria (edad 15 años, sistema anterior) se encuentra: Sistema de ecuaciones e inecuaciones. Ejemplos simples de programación lineal.

Al respecto expresa:

> "Es también muy importante que el alumno vaya adquiriendo la habilidad para plantear en forma de ecuaciones e inecuaciones problemas de la vida real, distinguiendo bien entre el planteo de las ecuaciones y la solución de las mismas que puede hacerse de manera más o menos mecánica y con cualquiera de los métodos, siempre el más adecuado en cada caso."
>
> "Por esto son instructivos los problemas llamados de programación lineal, en sus formas más simples, pues en su solución juegan muchas de las habilidades adquiridas por el alumno y que debe ejercitar continuamente. Cada profesor debe ir coleccionando varios de estos problemas para seleccionar en cada caso el que le parezca más atractivo para los alumnos..." Luego se refiere a ejemplos y su solución.

A pesar de todas estas recomendaciones, el tema inecuaciones lineales, aplicando problemas de programación lineal, en la mayoría de los casos, no se enseñan en la escuela secundaria, posiblemente, por razones de tiempo. Es recién en los cursos preuniversitarios de ingreso a la universidad, donde el tema se aprende por primera vez.

Con el propósito de revertir esta situación y enfatizar la motivación en el alumno, hemos diseñado el presente Taller, incorporando métodos y técnicas participativas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de un tema en particular: los problemas de Programación Lineal. Es nuestra intención exponer propuestas interesantes que reflejen la manera en que las

matemáticas son utilizadas reflejando las diferentes formas en que la gente trabaja junta y aprende.
Esta propuesta de enseñanza ya ha sido puesta en práctica durante dos años consecutivos con alumnos en el aula, cuyos resultados han sido publicados (Gatica y otros, 2000), (Gatica, 2001).

Los problemas de programacion lineal

Muchos fenómenos físicos y de otro tipo son representados por ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones, por ello, la solución de estos problemas se reduce a la solución de ecuaciones, inecuaciones y sus sistemas.

> *"Desde los ejemplos más sencillos de la vida real, el concepto de desigualdad se halla implícito en la mayor parte de las actividades diarias que están relacionadas con valores máximos o mínimos, o acotaciones en general. Los ejemplos abarcan un amplio espectro, que va desde la limitación de la velocidad en las carreteras hasta las constantes de calidad de cualquier producto que se fabrica*." (Díez, 1995, pp. 145).

Tales situaciones del mundo real pueden presentar problemas que requieren soluciones y decisiones. Algunos de estos problemas presentan un aspecto matemático relativamente simple, relacionado con la matemática elemental. Tal es el caso de los problemas de programación lineal.
Un problema de Programación Lineal consiste en la optimización de unos objetivos que son funciones lineales de unas variables que intervienen en el problema y que están sujetas a unas restricciones de tipo lineal. Es decir: es un conjunto de técnicas matemáticas que facilitan la solución de problemas de planificación económica o social. Su objetivo básico es encontrar la solución óptima, que puede consistir en maximizar beneficios o minimizar costos empleando recursos limitados.
Si bien existen distintas técnicas para resolver este tipo de problemas, una de las más elementales se refiere a la resolución gráfica. Esta consiste en representar en un sistema de coordenadas cartesiano, el conjunto de restricciones el cual geométricamente se representa mediante un polígono convexo. Como el óptimo de la función objetivo que se desea maximizar o minimizar se encuentra en uno de los vértices de este polígono, se reemplaza esta función en cada punto de los vértices y aquel correspondiente al valor máximo o mínimo es la solución buscada.
Este es el procedimiento que se les enseña a los alumnos, para resolver este tipo de problemas, tanto en la escuela secundaria como en primer año de la Universidad (Gatica et al., 2001).
Este método nos permite calcular la solución óptima de un problema dado dentro de ciertas restricciones. Por ejemplo: un fabricante de un cierto producto al decidir que objetos particulares tiene que fabricar y en que cantidades, debe tener en cuenta un gran número de factores, como ser la capacidad de sus máquinas, el costo y posible venta, etc. Pero además cada subdivisión de su problema tiene otras complejidades. La programación lineal es una técnica matemática que permite determinar la mejor distribución de recursos a fin de satisfacer un objetivo prefijado. Los recursos pueden ser de distintos tipos, como dinero,

materias primas, mano de obra, etc. y el objetivo un resultado que se desea optimizar, como ser costo mínimo, beneficio máximo, volumen de producción máximo, etc.
Existen muchos otros ejemplos que nos hace evidenciar que la Programación Lineal tiene una finalidad esencialmente práctica.

- En una industria manufacturera se fabrican distintos productos. Cada producto utiliza ciertas cantidades de recursos de producción y se conoce el beneficio que se obtiene por fabricarlo. ¿Que cantidad debe fabricarse de cada producto para obtener el máximo beneficio total?
- Un fabricante de alimentos balanceados debe proporcionar ciertas cantidades de componentes nutritivos en dada bolsa de alimentos. Puede obtener los componentes nutritivos mediante diferentes granos y sustancias adicionales, de los cuales conoce el costo. ¿Que combinación de granos y sustancias adicionales debe utilizar para proporcionar las cantidades requeridas de componentes nutritivos al mínimo costo total?
- El director de una refinería de petróleo debe considerar la expansión de su producción aumentando la capacidad en algún punto del proceso de refinación. ¿En cual de los diferentes procesos involucrados debe aumentarse la capacidad para obtener el mas rápido retorno del capital invertido?

Objetivos del taller

Este Taller pretende ofrecer alternativas de enseñanza de las matemáticas en la escuela con el fin de reformar la manera tradicional. Este nuevo enfoque enfatiza el trabajo en grupo, la comunicación y aplicaciones del mundo real. Los estudiantes encuentran una forma interesante que refleja la manera en que las matemáticas son utilizadas y por otro lado, se les proporciona oportunidades para escribir sobre el pensamiento matemático, para reflexionar sobre las actividades y para hacer presentaciones orales a sus compañeros de clase acerca de su trabajo.
Por medio de los problemas de programación lineal tienen la oportunidad de profundizar los conocimientos de ecuaciones, inecuaciones y gráficas mientras que usan lo que aprenden para enfrentar un reto en los problemas aplicados a la economía, entre otras ciencias. Estos son utilizados en la actualidad tanto por pequeños negocios como para enormes corporaciones para incrementar las ganancias y bajar los costos.
Mediante esta forma de trabajo, los profesores podrán evaluar a sus alumnos, de acuerdo a una variedad de criterios, incluyendo la participación en clase, la tarea asignada diariamente, los problemas aplicados, portafolios y evaluaciones.
De esta manera, pretendemos generar un cambio de actitud en los profesores, frente a la enseñanza de las matemáticas.
Mediante la ejecución de actividades representativas, el principal objetivo del Taller es desarrollar habilidades en los profesores a fin de que profundicen su comprensión sobre los problemas de Programación Lineal.
De la misma manera dotar a los profesores de los elementos básicos para que puedan incorporarlos a su práctica docente y así mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje sobre este tema.

Metodología

Se emplearon básicamente tres formas metodológicas de trabajo:

- ❖ Teórica: Se ofrecieron los conceptos teóricos necesarios sobre el desarrollo de los problemas de Programación Lineal para que los profesores puedan incorporarlos a su práctica docente.
- ❖ Informativo: Se dieron a conocer antecedentes del trabajo, como así también el desarrollo histórico de este tema.
- ❖ Práctico: Consistió en la realización conjunta de actividades representativas a fin de desarrollar habilidades matemáticas

Las actividades programadas se realizaron mediante el trabajo individual y en pequeños grupos, con el fin de propiciar la interacción y el crecimiento profesional entre los asistentes.

Comentarios finales

El Taller se desarrolló en un clima de camaradería y entusiasmo estableciéndose aportaciones de los asistentes en cuanto al tema elegido.
En general, la mayoría coincidía en la importancia de presentar en el aula, problemas de la vida real en donde los estudiantes evidencien la aplicación de las matemáticas a problemas reales, quienes muchas veces se preguntan para que sirve estudiar matemáticas, y de esta manera motivarlos para el estudio de una asignatura difícil para ellos.
Las actividades les parecieron sumamente motivadoras y una forma interesante de trabajo donde se propicia la interacción en equipos y el trabajo en grupo.
Hubo asistentes que propusieron aplicarlas en sus aulas y mantenernos en contacto para los comentarios y evaluaciones de esta forma de trabajo. También se establecieron discusiones, debates y narraciones de sus propias experiencias.
Debido a que por medio de los problemas de programación lineal tienen la oportunidad de profundizar los conocimientos de ecuaciones, inecuaciones y gráficas al mismo tiempo usan lo que aprenden para enfrentar un reto en los problemas aplicados a la economía, entre otras ciencias. Nuestros alumnos, después de adquirir estos conocimientos, actuarán con criterio a la hora de tomar decisiones personales y políticas. Los temas económicos dominan la vida moderna, detrás de ellos se encuentran asuntos tan complejos de la ciencia, tecnología y matemáticas que requieren tener conciencia de los principios fundamentales.

Referencias bibliográficas

Díez, M. (1995). Sobre la simbolización en el álgebra. Aplicación al proceso de aprendizajes de las desigualdades en educación secundaria. Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense.
Gatica, N., Moreno, M. y Renaudo A. (2001). Observaciones sobre las dificultades de los estudiantes frente a problemas de programación lineal. En J.P. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico y J. Roldán (Edts.), *Congreso Nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 877 - 886, Vol I). Granada: Grupo Editorial Universitario.
Gatica, N. (2000). Diferentes razonamientos de estudiantes de escuela secundaria frente a una tarea de inecuaciones lineales en dos variables. *IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las*

Matemáticas THALES. (pp. 77 - 80). San Fernando: Servicios de Publicaciones Universidad de Cadiz.
Marín I., Rodriguez V. y Perino O. (1981). *Programación Lineal: conceptos y aplicaciones.* Buenos Aires: Ediciones Macchi.
Ministerio de Cultura y Educación de la Nación (1995). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación. República Argentina.
Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. (1996). *Contenidos Básicos para la Educación Polimodal*. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Versión para consulta. República Argentina.
Santalo, L. (1986). *La enseñanza de la matemática en la escuela media*. Argentina Editorial Docencia.
Vajda S. (1970). *Introducción a la programación lineal y a la teoría de juegos.* Buenos Aires: EUDEBA

Pensamiento Matemático Avanzado

Nivel Superior

La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la Variable Compleja

Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav. IPN. México
rcantor@mail.cinvestav.mx

Este artículo reporta una investigación relativa al tratamiento de la contradicción en matemáticas, particularmente referida al origen del análisis complejo. Después de un trabajo de orden teórico se implementó con un grupo de estudiantes de una institución de educación superior mexicana, una experiencia didáctica controlada; dicho estudio fue llevado a cabo siguiendo una aproximación teórica que actualmente denominamos, *aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa*. Se basa en un marco teórico que permite tratar con los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre epistemológica del conocimiento, la dimensión socio cultural del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 1998; Cordero, 2001). El término *socioepistemología*, pretende plantear una distinción de origen con las aproximaciones epistemológicas tradicionales, pues mientras que éstas asumen al conocimiento como el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana; la socioepistemología en cambio, se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socio culturales particulares. El conocimiento en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre epistemología y factores sociales.

Nuestro tratamiento experimental se apoyó en el diseño de una ingeniería didáctica robusta en el sentido de Artigue (1992), cuyo análisis preliminar fue enriquecido al incorporar a las dimensiones tradicionales: didáctica, epistemológica y cognitiva, una más que permite una visión transversal que atraviesa a estas tres dimensiones anteriormente citadas y que provee a la explicación teórica de un visión que consideramos novedosa, nos referimos a la dimensión socio cultural. En el acercamiento didáctico experimental que hemos propuesto para conducir este estudio, tomamos en cuenta de manera destacada, el papel que los recursos cognitivos y las circunstancias epistemológicas, al seno del entorno social particular que motivó la construcción de la noción de variable compleja, al tratar con la extensión de los logaritmos a los números negativos.

Al momento del debate epistolar entre Leibniz y Bernoulli, los logaritmos poseían una definición satisfactoria para los números positivos y las reglas de su operación habían sido adecuadamente desarrolladas. Empero, la concepción de número negativo, como se señala en (Glaeser, 1981), restaba aún incompleta. Por ejemplo, mientras que Leibniz, para invalidar la existencia de los números negativos argumenta: “si existiera $\log(-1)$ sería igual a la mitad de $\log(\sqrt{-1})$ una conclusión que considero absurda”. Bernoulli por su parte al buscar responder al argumento de Leibniz ofrece una extensión por simetría: “como $dx/x=-dx/-x$ entonces integrando se tiene que $\log(x)=\log(-x)$”. Dicho argumento pretende que la extensión de los logaritmos a los números negativos, no precise de los números complejos. Aunque en ambas propuestas, se trata de mantener a los procedimientos matemáticos aceptados, en un dominio que brinde una certidumbre en los procedimientos, en este sentido, se prefirió tratar con números reales antes que explorar la extensión a los complejos.

Por otra parte, del debate entre Euler y Bernoulli destacamos la serie de contradicciones que ella puso al descubierto, el corpus matemático aceptado en el momento habría de extenderse y configurar de nueva cuenta, su idea de lo que significa la noción de función, al aceptar incluso a las funciones multivaluadas. Mientras Euler apuntaba hacia el surgimiento de un aparato teórico novedoso que incluía la extensión de la noción de igualdad usual del álgebra a la igualdad entre conjuntos, cuando trató el tema de las constantes de integración y de las infinitas soluciones de una ecuación algebraica de grado infinito. Bernoulli por su parte sostiene, como en la primera etapa de la controversia que sostuvo con Leibniz, la necesidad de conservar el cuerpo teórico clásico, según el cual, son los números y las variables reales el sustento de toda extensión teórica. De este modo se dio inicio al proceso de construcción social de la variable compleja, donde se requirieron de cerca de trescientos años para aceptar a los complejos, primero como números y luego como variables, mientras que en sólo treinta años se desarrollaron las bases teóricas del análisis complejo. Era de esperar en consecuencia, que la aceptación de un universo de números nuevo, resulte para los estudiantes un verdadero problema para su comprensión.

El marco teórico

Para analizar la información contenida en las respuestas y los argumentos que produjeron los estudiantes, seguimos un marco de análisis que distinguía el uso de los aspectos relativos a la sensibilidad a la contradicción, como la búsqueda de coherencia interna en el aparato matemático. Todo ello según consta en transcripciones y en sus propias respuestas escritas. En esta etapa del análisis de la información, se destacó el tipo de argumentaciones matemáticas con base en la selección de las herramientas de validación respectivas, así como las formas en que construyen significados. Tal es el caso de $\log(x) = \log(-x)$, como el de $\pi i = 0$. Tuvimos un especial interés en documentar la forma en que negaban la identidad de Bernoulli, la mayoría de los estudiantes o la forma en que reconocían la posibilidad de aceptar una construcción más sofisticada como la propuesta por Euler: $\log(-1) = \pi i + 2n\pi$, con n en los números enteros.

A fin de documentar la sensibilidad a la contradicción en las respuestas de los estudiantes, pusimos un énfasis mayor en el cambio del discurso argumentativo cuando debían sostener sus ideas en un debate con el profesor. En el caso particular de la definición de Bernoulli, buscamos determinar en qué nivel los estudiantes aceptaban el reto de trabajar bajo una hipótesis que les resultaba desde un inicio dudosa, y sobre todo, determinar la calidad y profundidad de los juicios esgrimidos.

Finalmente, el análisis de sus respuestas se hizo con base en los argumentos matemáticos y escolares que les permitían aceptar, rechazar o cuestionar las afirmaciones que planteaba la secuencia didáctica. De este modo, habríamos de aceptar una estrecha relación entre los niveles de argumentación con la sensibilidad a la contradicción que la situación planteaba. Así la cuestión de interés radica no en el número de estudiantes que optan por el camino de la extensión contra aquellos que buscan la coherencia, sino más bien, en analizar la variedad y riqueza en los discursos argumentativos de cada caso. Reproducimos a continuación, sólo una parte de la controversia.

Marzo 16, 1712. Leibniz a Bernoulli: Leibniz dice que $-1/1$ es imaginario, puesto que no tiene logaritmo.

Mayo 25, 1712. Bernoulli a Leibniz: Bernoulli rechaza la demostración de Leibniz de que la razón $1:-1$, ó $-1:1$ es imaginaria, por el hecho de que $-x$ tiene un logaritmo. Tenemos $dx/x=-dx/-x$; así, por integración, $\log x=\log(-x)$. La curva logarítmica $y=\log x$ tiene entonces dos ramas simétricas al eje Y, justo como la hipérbola tiene dos ramas opuestas.

Junio 30, 1712. Leibniz a Bernoulli: Leibniz repite su argumento de que $\log(-2)$ no existe, porque si existiera su mitad sería igual a $\log\sqrt{-2}$, una imposibilidad. La regla de

> diferenciación, $d\log x = dx/x$, no es aplicable a $-x$. En la curva logarítmica $y=\log x$, x no puede decrecer a cero y entonces pasar al lado opuesto, ya que la curva no puede cortar al eje y, el cual es asintótico a ésta.

Como sabemos, la definición vigente de los logaritmos en los textos escolares de los cursos, suele restringirse a los números positivos. La cuestión de la extensión a los negativos primero y a los complejos después, aparece por primera vez en los cursos de análisis complejo, aunque este hecho pase desapercibido para los autores de libros de texto. En contraparte, según reportan los historiadores de la matemática, el concepto de logaritmo surge ligado a la necesidad de simplificar y agilizar cálculos numéricos tanto para la navegación como para las observaciones astronómicas. De este modo, la discusión sobre la inexistencia del $\log(-1)$ se construye sobre la base de las propiedades de los logaritmos para positivos:

> "... -1 no tiene logaritmo real puesto que, por una parte, no puede ser positivo ya que un logaritmo positivo está asociado a un número mayor que 1; y por otra parte, no puede ser negativo porqué un logaritmo negativo pertenece a un número positivo menor que 1; por tanto, la única alternativa posible es aceptar que el logaritmo de -1 no es real sino imaginario." (Cajori, 1913)

Continúa Leibniz acorde con el saber de la época negando su extensión a los negativos señalando posibles consecuencias que él considera absurdas:

> "si realmente existiera el logaritmo de -1, su mitad sería el logaritmo del número imaginario $\sqrt{-1}$, una conclusión que considero absurda." (cfr)

Este tipo de argumentos suelen presentarse en los discursos argumentativos de las alumnas y los alumnos cuando fueron sometidos a la experiencia didáctica, pues consideramos que la noción de existencia de los logaritmos de números negativos, significa tanto para Leibniz, como para estudiantes y profesores contemporáneos participantes de nuestra experiencia educativa, la conservación de propiedades establecidas para los positivos. Son, por así decirlo, argumentos metamatemáticos, dado que no sería factible limitar al $\log\sqrt{-1}$ a ser un real como lo hace Leibniz o los estudiantes, de algún modo esto obedece a una búsqueda de cierta naturalidad que no pertenece al campo propiamente matemático, sino al de la cultura que rodea al quehacer matemático: "más cerca de la naturaleza" decía Leibniz.

A diferencia de Leibniz, Bernoulli sostiene la propuesta de construir la curva logarítmica con dos ramas simétricas respecto del eje y, para lo que propone discursos argumentativos que, como vimos en la trascripción de la correspondencia, se apoyan en una búsqueda de situaciones deductivas en la recién creada teoría del cálculo infinitesimal. Por una parte, se sustenta en la igualdad de las diferencias $dx/x = -dx/-x$ para concluir por integración, que $\log(x) = \log(-x)$. Adicionalmente, se apoya el recurso, matemáticamente equivalente al anterior, de calcular las áreas de las dos figuras simétricas respecto del origen de coordenadas, propone considerar a la hipérbola equilátera $xy = 1$, para construir a la curva logarítmica en su interpretación de área bajo la curva.

La segunda parte de la controversia, ahora entre Euler y Bernoulli toma un nuevo curso, pues Euler plantea una contradicción directa a la propuesta de Bernoulli. De la que se sigue que $\pi \mathrm{i} = \log(-1)$; y en consecuencia se acepta $\log(-1) = 0$, entonces también habremos de aceptar que $\pi i = 0$ y en consecuencia $i = 0$.

Organización de la experiencia

Los participantes de esta investigación fueron doce estudiantes universitarios de una institución pública mexicana, su maestra, que en ese entonces cursaba estudios de posgrado, y dos investigadores en matemática educativa. Sus conocimiento de álgebra y cálculo diferencial e integral incluían los tópicos clásicos de teoría de ecuaciones, álgebra lineal, cálculo diferencial e integral en una y varias variables, introducción a la lógica y los conjuntos.

Suele presentarse a los logaritmos en el terreno analítico, ya sea como la integral de la hipérbola equilátera en la rama positiva o como la inversa de la función exponencial. Quizá la más socorrida sea dado por la integral siguiente: $\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0.$ Finalmente, una presentación menos usual, pero que conviene señalar es la estructuralista. Se dice que F es logarítmica si cumple con lo siguiente $F(xy) = F(x) + F(y)$ para todos x e y reales no nulos.

La noción de número negativo se constituye como un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de logaritmo de número negativo. Leibniz por ejemplo sostenía que la proporción $1 : -1 :: -1 : 1$ aunque imposible, es manejable, pues señala que no es posible que el mayor sea al menor como el menor es al mayor. Tal digresión obedece a la noción de número que se manejo en el momento.

Al respecto, el profesor George Glaeser cita que Lazare Carnot escribía:

> *Una multitud de paradojas o mas bien de absurdos palpables resultan de la misma noción; por ejemplo, que –3 será menor que 2; mientras $(-3)^2$ será más grande que $(2)^2$, es decir, que entre dos cantidades desiguales, el cuadrado de la más grande será menor que el cuadrado de las más pequeña ...* (cf. Glaeser, 1981, p. 326)

Por su parte, el matemático escocés C. MacLaurin, quien a principios de 1748 señalaba la imposibilidad de tomar cantidades negativas en si mismas, pues:

> *Así, la cantidad negativa no es, rigurosamente hablando, menos que nada.... una cantidad aislada no puede ser considerada como negativa en si misma: sino sólo mediante la comparación.* (cf. Glaeser, 1981, p. 316)

Anteriormente, Leibniz intentó mostrar que la razón $-1:1$ no existe, pues considera que en tal caso se tendría que $\log(-1/1) = \log(-1) - \log(1)$, lo que muestra que para él $-1/1 \neq -1$.

La argumentación sobre la inexistencia del logaritmo de –1 que propone Leibniz descansa en las propias propiedades de los logaritmos de números positivos y en la imposibilidad de que sean reales, al respecto dice:

> *... –1 no tiene logaritmo real puesto que, por una parte, no puede ser positivo ya que un logaritmo positivo está asociado a un número mayor que 1; y por otra parte, no puede ser negativo porque un logaritmo negativo pertenece a un número positivo menor que 1; por tanto, la única alternativa posible es asentar que el logaritmo de 1 no es real sino imaginario* (cf. Cantoral, et al., 1987, p. 13)

Argumenta a continuación una consecuencia contradictoria si se supone la existencia real de los logaritmos de números negativos: Si realmente existiera el logaritmo de -1, su mitad sería el logaritmo del número imaginario -1, una conclusión que considero absurda. (cf. Cantoral, et al., 1987, p.13). En sus intentos, Leibniz procura conservar el sentido adquirido por el logaritmo de los positivos, busca la no contradicción y la permanencia de los atributos. Por su parte, Bernoulli, construye una propuesta particular de los logaritmos de los negativos como una extensión simétrica respecto de los positivos. Una gráfica simétrica

respecto del eje y. Sus argumentos se apoyan en dos hechos, el primero una igualdad entre diferenciales y el segundo en una igualdad de áreas.
Entonces de la afirmación $dx/x = -dx/-x$ se sigue, por integración, que log(x) = log($-x$), lo que conduce a una extensión de los logaritmos de negativos dentro de los reales. Mientras que el segundo de sus argumentos utiliza a la hipérbola $xy = 1$, en la que construye a los logaritmos como las áreas bajo la hipérbola equilátera. Digamos que si $x > 0$, el log(x) es igual al log($-x$), pues uno se toma cuando como el área bajo $y = 1/x$ desde 1 hasta x, mientras que log($-x$) se toma como el área sobre $y = 1/x$ entre -1 y $-x$.
Según se refiere en (Cantoral et al., 1987), a lo largo de la controversia Leibniz Bernoulli, se notan planos de argumentación completamente diferentes. Los argumentos de uno no son entendidos por el otro. Su diferencia esencial radica en que Bernoulli busca extender los logaritmos a través de la propiedad log(x) = log($-x$) confeccionando en el camino las reglas de operación, que considera arbitrarias en tanto no produzcan contradicciones con el cuerpo de conocimientos aceptados al momento y evita, de este modo, la aparición en el problema de los números complejos. Leibniz en cambio, no acepta la extensión propuesta por Bernoulli aunque no propone otra, limitando sus intervenciones al señalamiento de las contradicciones a que habría lugar de aceptar la oferta de Bernoulli. La debilidad de los métodos de validación involucrados, planteo en el momento la construcción de nuevas y más versátiles formas de justificación.
PRIMERA PARTE DE LA ACTIVIDAD PROPUESTA
En la sesión anterior pretendíamos llegar a extender los logaritmos a los números negativos de la siguiente manera: log(-x) = log(x) mediante las siguientes argumentaciones:

A) de $(-x)^2=(x)^2$, obteníamos ln(x)=ln($-x$)

B) de $dx/x=-dx/-x$, obteníamos ln(x)=ln($-x$)

Sin embargo, las argumentaciones ofrecidas no le convencieron. Intentemos dar una nueva argumentación a favor de la igualdad ln(x)=ln($-x$) a fin de que usted la acepte o la refute.
SEGUNDA PARTE

Sabemos y aceptamos que si x>0, $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Intentemos extender esta definición a números negativos. Si x>0, $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Pero $\int_1^{-x} \frac{dt}{t} = \int_1^{0} \frac{dt}{t} + \int_0^{-1} \frac{dt}{t} + \int_{-1}^{-x} \frac{dt}{t}$, y como $\int_1^{-x} \frac{dt}{t} = \int_{-1}^{-x} \frac{dt}{t}$, puesto que $\int_1^{0} \frac{dt}{t} = -\int_0^{-1} \frac{dt}{t}$ por ser un área positiva y la otra negativa e iguales en magnitud. Luego se tiene que

$\ln(-x) = \int_1^{-x} \frac{dt}{t} = \int_1^{x} \frac{dt}{t} = \ln(x)$. De ahí ln($x$)=ln($-x$).

1. ¿Le convenció este último argumento?, ¿le convencería a sus alumnos?
2. Si no es así, ¿de qué otra manera intentaría usted responder a su alumno que le ha preguntado por el logaritmo de un número negativo?

Primeros resultados

Ante la pregunta de por qué cuando exponemos el tema de logaritmos en alguno de nuestros cursos se trabaja sobre los positivos, el grupo optó por dos caminos principales.

El primero, sostuvo la tesis: Si existieran los logaritmos de negativos tendrían que ser el reflejo de los logaritmos de los positivos, dado que suele ocurrir que los positivos y los negativos tengan simetrías, sin embargo advierten, que de aceptarlos tendrían que reconstruir la teoría, pues habría que explicar de qué manera un número con base positiva a^x sería igual a un número negativo y.

El segundo grupo, el más numeroso, se negó sistemáticamente a aceptar siquiera la posibilidad de tratar con los logaritmos de números negativos. Básicamente sus argumentos descansaban en que los logaritmos de los negativos no estaban definidos, o que no existían. Cuando habrían de explicar sus juicios solían usar las explicaciones de clase. "No existe un número positivo que al elevarlo a una potencia me de negativo".

EXTENSIÓN DE LAS OPERACIONES Y SENSIBILIDAD A LA CONTRADICCIÓN

Este universo discursivo que el entorno escolar propone como marco de referencia para lo que se dice y lo que se hace en el aula no sólo actúa sobre el sentido de los enunciados, sino también sobre su forma. Para responder adecuadamente a las demandas de la maestra, los estudiantes deben disponer de medios de control de la actividad matemática, no basta, como en el fragmento anterior, "pensar en voz alta" sobre las implicaciones a que daría lugar el aceptar los logaritmos de números negativos. Ahora, la maestra centra la reflexión en una exploración, aunque igual de abierta que la anterior, que dota de medios didácticos que permitirán la devolución del problema a los estudiantes.

Estas formas de interpretar los enunciados informan también de la intención, guían en el proceso de contextualización dando pistas a los alumnos y a las alumnas del camino que habría de seguir el curso de un razonamiento matemático. Es así, que plantear la cuestión de la conservación de las propiedades logarítmicas de los positivos a los negativos, dio un espacio de negociación del significado y en consecuencia, dotó de coherencia nuevamente al discurso matemático escolar.

Maestra.- Cuando exponemos el tema de logaritmos en alguno de nuestros cursos, usualmente lo hacemos para números positivos. ¿Las propiedades de los logaritmos seguirán siendo válidas en los negativos?

Ma.- Siguen siendo válidas, ya que $\ln(-x)=\ln(x)$ y $\ln(-x)=\ln(y)$, entonces $\ln[(-x)(-y)]= \ln(-x)+ \ln(-x)$. $\ln(-x^m) = -m\ln(-x)$...

P.- No seguirán siendo válidas, ... por ejemplo $\ln[(-5)(3)]= \ln(-5) + \ln(3)$ y $\ln(-5)$ no existe.

R.- No seguirán siendo válidas pues, como ya dije, el logaritmo de números negativos no está definido y ... $\ln[(-1)(-1)]= \ln(-1) + \ln(-1)$, es decir $\ln(1)= \ln(-1) + \ln(-1)$, es decir 0 = indefinido.

J.- No siguen siendo válidas: ... $\ln(-x)^m = m\ln(-x)$. El primer miembro es válido para m par y el segundo no es válido para ningún caso.

G.- Si no se encuentra en nuestro universo de trabajo los logaritmos de números negativos, no podemos considerar tales igualdades.

F.- No siguen siendo válidas, por ejemplo: $\ln[(-e)(-1)]= \ln(-e) + \ln(-1)$, pero el lado derecho no es válida.

Mar.- ... no son válidas si se aplican a negativos, $\ln(-e)^2 = 2\ln(-e) = 2\ln[(-1)(e)] = 2[\ln(-1) + \ln(e)] = 2\ln(-1) + 2\ln(e)^2 = 2\ln(e) = 2$. Porque $\ln(-e)^2 = \ln(e)^2$ pero $2 \neq 2 \ln(-1) + 2$, porque $\ln(-1)$ no existe.

H.- No porque no los podríamos encontrar.

T.- No son válidas las leyes con números negativos.

LAS PRIMERAS MUESTRAS DE ADHESIÓN Y LA ACEPTACIÓN DEL CONTRATO

Maestra.- Si ella no nos convence totalmente, veamos otro argumento. Es claro que $dx/x=-dx/-x$. Se sigue por integración la siguiente igualdad, $\ln(x)=\ln(-x)$. Con lo cual, admitimos la existencia de logaritmo de números negativos y además una manera de calcularlos con base a los ya conocidos y aceptados logaritmos de números positivos, esto es, por ejemplo: si se desea conocer el ln(−2) éste es igual al ln(2), ln(−3)=ln(3), etc.

Ma.- Silencio.

P.- Yo pensaba que el logaritmo de números negativos no existía, y por lo tanto, entonces sí existe.

R.- El procedimiento es incorrecto al considerar $-dx/-x$ y su signo como una forma separada para cada uno de ellos, lo cual hace en su demostración... De todos modos algo anda mal.

R.- No, pues no sé... no creo que $\ln(x)=\ln(-x)$.

J.- Bueno, si se acepta la existencia de logaritmo de números negativos, ¿quién sería N, tal que $e^N=-x$?

J.- e^0 no es igual a −1, ... por definición $e^0= 1$.

F.- Si yo parto de $dx/x = -dx/-x$, $\int dx/x = \int -dx/-x$, $\int dx/x = (-1)/(-1) \int dx/x$, $\ln(x) = \ln(x)$ y no $\ln(x) = \ln(-x)$.

T.- No se qué decir, pero si así fuera se hubieran definido los logaritmos en general, para positivos y negativos de igual forma. Sin embargo, sólo se habla de logaritmos de números positivos.

A.- $dx/x = -dx/-x$ esto es cierto por la ley de los signos, pero no quiere decir que $dx = -dx$ y $x = -x$ de modo que al integrar nos quedaría $\ln(x) = \ln(x)$ y no $\ln(x) = \ln(-x)$.

Como se ve en el fragmento anterior, los puntos de vista sobre la aceptación de un nuevo resultado en la clase de matemáticas no son únicos. Estas formas de aceptación no provienen de la lógica interna de la deducción matemática, sino por el contrario, son el producto de una verdadera formación de identidades sociales de las personas, tal es el caso de las relaciones de poder tradicionales, maestro – alumno, texto – maestro, así como las situaciones de resistencia se construyen a través de la negociación de los significados en el ámbito escolar.

La aceptación o la resistencia son más bien, el fruto de la interacción y de las relaciones de poder entre los participantes en su juego con el saber. En algunos casos, la resistencia a aceptar la extensión de Bernoulli, obedece a otra forma de relación de poder que bien podría deberse al rol del libro de texto en la clase de matemáticas. La definición de logaritmo de número negativo no había aparecido en ninguno de los libros a los que los alumnos habían tenido acceso. El criterio de verdad no proviene entonces, de la discusión propiamente matemática, sino de la convención institucional en curso de constitución.

Consideraciones finales

Quisimos mostrar con este estudio, que la sensibilidad a la contradicción por parte de los estudiantes no proviene, en forma exclusiva, de la agudeza con la que juzguen los procedimientos y razonamientos matemáticos, sino que intervienen adicionalmente elementos propios del discurso del medio escolar y del discurso matemático escolar. Esto es, los alumnos basan sus supuestos en situaciones del orden cultural, las cuales no siempre son compartidas por quienes participan en dicho proceso escolar, y que sólo se explicitan a los participantes en la medida en que se sea parte de esa cultura. Estos supuestos forman marcos de referencia robustos y permiten interpretar tanto las intervenciones argumentativas de los participantes, como las formas de aceptación de un resultado matemático en el aula, habremos de decir al respecto, que estos supuestos tampoco son naturales, en tanto que son de carácter social y cultural.

El haber tomado como unidad de análisis en este estudio al discurso matemático escolar, dotó a esta investigación en el campo de la matemática educativa, de un medio que consideramos eficaz para detectar problemas y para intervenir en ellos a fin de construir una verdadera herramienta de cambio educativo. En el caso que aquí hemos presentado, mientras que la definición de logaritmo de los números complejos aparece en el ámbito escolar sin contexto alguno, sin una adecuada preparación que escenifique y haga plausible sus resultados, sin un verdadero proceso de socialización en el aula de matemáticas, tendremos en consecuencia que los procesos educativos no parecen desencadenar acciones al nivel del entendimiento o del pensamiento matemático requerido para aprender y comprender matemáticas en y fuera del salón de clases.

Este hecho pudo explicarse en la medida que, aunque el discurso escolar está lleno de preguntas, la mayoría de ellas tienen una *función pragmática* que dista mucho de las funciones cotidianas de los enunciados interrogativos, las cuales se asocian a pedido de información o a estrategias de cortesía. Se trata de preguntas destinadas a *controlar* la interacción y a hacer explícito el conocimiento que se supone tienen los interlocutores. Estas preguntas sólo puede hacerlas quien enseña a causa de la posición que ocupa en la institución y del rol que desempeña en la conformación del discurso matemático escolar, por tanto la metáfora: si un alumno nos preguntara ¿a qué es igual el logaritmo de un número negativo?, carece de interpretación plausible para los participantes en la experiencia

El discurso matemático escolar en cambio, acepta adicionalmente a las preguntas con *función pragmática*, otras interrogantes con *función teórica*, que plantean cuestionamientos de orden teórico a fin de develar una coherencia interna del discurso argumentativo o de las eventuales implicaciones que tendría el conducir al razonamiento bajo hipótesis inusuales: Si aceptamos esto, entonces habrá que aceptar esto otro... Una forma de abstracción reflexiva, en el sentido de Piaget, suele usarse con frecuencia en algunos momentos de la actividad escolar en el campo particular de las matemáticas escolares. Sin embargo, el riesgo de cometer errores, tiende a incrementar la resistencia de los estudiantes ante esas formas interrogativas. Lo cual fue intencionalmente incrementado en nuestro diseño de ingeniería didáctica, como una variable de control al elegir alumnos que no hubiesen cursado asignaturas de variable compleja.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1992). Didactic Engineering. *Recherches en Didactique des Mathématiques. Selected Papers*, 41 – 66.

Cajori, F. (1913).History of the exponential and logarithmic concepts. *American Mathematical Monthly*, Vol. 20, 35 – 47.

Cantoral, R.; Farfán, R. (1984). *Diseño de una secuencia de aprendizaje sobre el logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja*. México: Cinvestav.

Cantoral, R.; Farfán, R., Hitt, F.; Rigo, M. (1983). *Historia de los conceptos de Logaritmo y Exponencial*. México: Cinvestav.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México: Thomson Learning.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathematics.*

Optimización matemática

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resumen
En este artículo se presenta una síntesis de un curso breve ofrecido en la RELME 15, que a su vez fue un compendio de diversas experiencias del autor en la enseñanza de temas de optimización matemática, no sólo como parte de los cursos de planes de estudios universitarios, sino también como parte de un conjunto de temas especialmente seleccionados para capacitar a profesores de matemáticas o para trabajar extracurricularmente con jóvenes motivados por las matemáticas. En todos los casos, se logró el objetivo principal de estimular una perspectiva intuitiva para resolver problemas, que es fundamental en el quehacer matemático pero que muchas veces no se desarrolla adecuadamente por presentar prematuramente formalizaciones y métodos específicos. Se presentan problemas con diversos enfoques para su solución, se construyen significados con base en formalismos, se hacen contextualizaciones y generalizaciones y se da una idea del cálculo de variaciones y de la teoría de control.

> *En la misma forma en que la deducción debe complementarse con la intuición, el proceso hacia la generalización progresiva debe templarse y equilibrarse con respeto y amor hacia los detalles particulares.(…). La esencia profunda de las matemáticas vivas es el juego recíproco entre lo general y lo particular, la deducción y la construcción, la lógica y la imaginación.*
>
> *Richard Courant*

Introducción

Optimizar es una actividad frecuente en diversas situaciones de la vida corriente: deseamos llegar a algún lugar en el menor tiempo posible; ir a cierto lugar por el camino más corto; comprar algo que más nos convenga; construir algo empleando la menor cantidad posible de material; obtener la máxima ganancia en un negocio, etc. Entonces, si tenemos en cuenta que los conceptos matemáticos están relacionados muy íntimamente con la experiencia humana, resulta natural considerar diversos problemas de optimización para reflexionar sobre el aprendizaje de las matemáticas, sobre la importancia y la oportunidad de la formalización en matemáticas, sobre la interrelación entre la percepción intuitiva y la solución formal de un problema y muchos otros aspectos vinculados con la matemática educativa.
Una de las aplicaciones más conocidas del cálculo diferencial es la obtención de máximos y mínimos de funciones; sin embargo existen muchos problemas que bien pueden resolverse sin recurrir al cálculo diferencial y ellos serán los primeros que tratemos, tanto porque los conocimientos matemáticos que se requieren son sólo los de la secundaria, cuanto porque su visualización y perspectiva intuitiva son muy adecuadas para iniciarse en problemas que requieren matemática universitaria y para reflexionar sobre la transición entre conceptos matemáticos elementales y conceptos matemáticos avanzados.

Optimización con funciones reales de variables reales

Si bien es cierto que se tiene una teoría matemática y métodos conocidos para resolver problemas de máximos y mínimos con funciones reales de una o de varias variables reales, es fundamental que el docente tenga una visión más amplia sobre las diversas maneras de tratar estos problemas, sobre todo utilizándolos para desarrollar las intuiciones de los estudiantes. Usando las clasificaciones de Fischbein, existen intuiciones de conjetura, de anticipación y de conclusión, muy vinculadas con la resolución de problemas, y también intuiciones secundarias, que son obtenidas por influencia del aprendizaje de conceptos y de razonamientos avanzados. Todas estas intuiciones pueden ser utilizadas, estimuladas y desarrolladas empleando problemas de optimización sin recurrir al camino usual de presentar muy pronto los recursos que nos ofrece el cálculo diferencial. Ciertamente es fundamental estudiar, comprender y manejar los conceptos y métodos del cálculo diferencial, pero todo esto se hará de manera más eficiente teniendo conciencia de sus ventajas luego de haber comprendido bien los problemas, de haber resuelto algunos usando recursos intuitivos y algebraicos y siendo conscientes de las limitaciones de estos recursos cuando se hacen generalizaciones o se tratan problemas más avanzados. En este sentido, también es muy importante que el docente tenga muy en cuenta que, como lo recomienda Dubinsky, los estudiantes deben aprender a analizar enunciados matemáticos formales complejos y construir significados con base en tales formalismos, pero también deben aprender a expresar en lenguaje formal los significados que han construido.

Problema 1

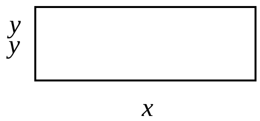
¿Cuáles deben ser las dimensiones de un corral rectangular si se dispone de 30 metros de una malla para cercarlo y de terreno suficiente para que su área sea máxima?

Solución 1

Creando un modelo muy simple de este problema, podemos "ver" la solución, ayudados por la intuición; así, atando los extremos de una cuerda de unos 40 o 50 centímetros, podemos formar con los dedos índice y pulgar de ambas manos, diversos rectángulos, todos del mismo perímetro (la longitud de la cerca metálica), y percibir que el cuadrado es el que tiene mayor área. Ciertamente nada está formalizado y lo que tenemos es sólo una conjetura, o - en la terminología de Fischbein - una intuición de conjetura o una intuición de anticipación, pues hay una sensación de certeza al hacer la afirmación.

Solución 2

Haciendo una representación gráfica del problema y empleando variables (x, y) para representar el largo y el ancho del rectángulo, el dato de la longitud de la cerca y el área correspondiente:



$2x + 2y = 30$

$x\ y$ máximo.

Equivalentemente:

$x + y = 15$

$x\ y$ máximo.

Observación 1. Habiendo llegado a esta formalización, y como un pequeño ejercicio de construcción de significados a partir de formalismos, podemos enunciar un problema cuya solución sería la misma que la del problema 1 y que la obtendríamos manteniendo lo fundamental del problema concreto del corral y de la cerca metálica:

Problema 1': Determinar dos números cuya suma sea 15 y cuyo producto sea máximo.

En este caso resulta natural hacer una tabla como la siguiente:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
y	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	…
x y	14	26	36	44	50	54	56	56	54	50	44	…

Resulta evidente que los valores 7 y 8 para *x* y para *y* (o para *y* y para *x*), respectivamente, serían una solución si sólo se consideraran números enteros. Esta es una solución a la que llegan muchos niños que no conocen los números decimales y – en tal caso – la solución es válida.

Solución 3*a*

Empleando la notación funcional. Representamos por *f(x, y)* al área del rectángulo cuyos lados miden x e y metros. En tal caso, teniendo en cuenta la simplificación hecha en la Solución 2, tenemos:

$$f(x,\, y) = x\,y \quad ; \quad x + y = 15.$$

Como $y = 15 - x$; es decir y es una función de x, definimos la nueva función h cuya única variable es x

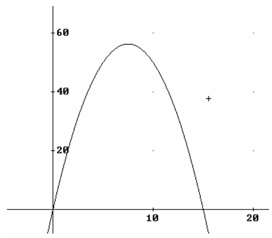
$$h(x) = f(x, y\,(x)) = x(15 - x) = 15x - x^2 = -\left(x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{15}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{15}{2}\right)^2$$

Observamos que al número $(15/2)^2$ se le está quitando un número mayor o igual que cero, para cualquier valor de x; en consecuencia $h(x)$ es máximo cuando $x = \frac{15}{2}$, y el valor máximo es $\left(\frac{15}{2}\right)^2 = 56{,}25$.

Esto significa que el corral debe ser cuadrado, con lados de 7.5 metros cada uno, lo cual es coherente con las intuiciones de conjetura y de anticipación expuestas en la solución 1.

Observación 2. Graficar la función *h* permite visualizar claramente el punto de máximo y el comportamiento de las variables, ya mostrado en el cuadro de la solución 2; en particular, comparar la simetría en la tabla con la simetría del gráfico de *h*.



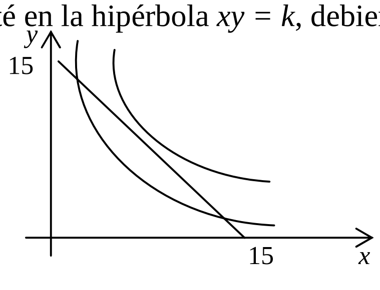
Solución 3*b*

Empleando el cálculo diferencial con funciones de una variable. Se ve fácilmente que 15/2 es el valor de x que maximiza la función $h(x) = 15x - x^2$, pues $h'(x) = 15 - 2x$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15/2$ y $h''(x) = -2 < 0$ para todo valor de x.

Observación 3. Es bueno notar que si bien esta solución es rápida y sencilla, utilizarla como primer recurso ante el problema planteado puede llevar a mecanizar al alumno y sería perder la oportunidad tanto de emplear los conocimientos previos como de ejercitar y estimular la intuición y la visualización ante un problema.

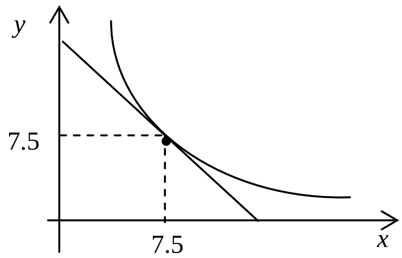
Solución 3 *c*

Usando una representación gráfica del problema de maximizar el producto $x\,y$, con la condición $x + y = 15$. Se trata de encontrar un punto de la recta $x + y = 15$, que también esté en la hipérbola $xy = k$, debiendo tomar k el mayor valor posible.



Observación 4. Se puede ver (intuición operatoria geométrica, en la terminología de Piaget), que lo dicho anteriormente se cumple con una hipérbola que sea tangente a la recta. El punto de tangencia se puede obtener sin necesidad de recurrir al cálculo diferencial.

De $x\,y = k$ y $x + y = 15$ obtenemos $x^2 - 15x + k = 0$. La tangencia se dará si y sólo si el discriminante de esta ecuación cuadrática es cero; esto es $225 - 4k = 0$; o sea $k = 56{,}25$; así $x = y = 7{,}5$.



Solución 3*d*

Considerando el problema como el de maximizar una función de dos variables, con una restricción de igualdad, y usando el método de los multiplicadores de Lagrange para resolverlo:

De *max* $x\,y$, *sujeto a* $x + y = 15$, usando la función lagrangiana $L(x, y, \lambda) = x\,y + \lambda\,(15 - x - y)$ y las correspondientes condiciones necesarias y suficientes, obtenemos $x^* = y^* = 7{,}5$ (los valores optimizantes de x e y).

Observación 5. También es pertinente un comentario similar al hecho en la solución 3b, cuando utilizamos el método del cálculo diferencial para funciones de una variable. La ventaja adicional del uso de este método es la interpretación del valor óptimo del multiplicador de Lagrange (En este caso se obtiene que $\lambda^* = 7{,}5$) que permite estimar la sensibilidad del valor óptimo de la función, al modificarse ligeramente la constante de la restricción.

Solución 3 *e*

Usando la desigualdad $\sqrt{x\,y} \leq \frac{x+y}{2}$. En esta conocida relación entre media geométrica y media aritmética, es claro que $\sqrt{x\,y}$ es máximo cuando se cumple la igualdad; es decir, cuando alcanza el valor $\frac{x+y}{2}$. Como la igualdad se cumple únicamente si $x = y$, y como $x + y$ es 15, $\sqrt{x\,y}$ es máximo cuando $x = y = 7{,}5$. Ciertamente los valores que maximizan $\sqrt{x\,y}$ también maximizan $x\,y$, que es el área del rectángulo.

Observación 6. Como otro ejercicio de construcción de significados a partir de formalismos, examinando $\sqrt{x\,y} \leq \frac{x+y}{2}$ también podemos concluir que de todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el que tiene menor perímetro.

Cambiando de contexto y haciendo generalizaciones

Es interesante mostrar a los estudiantes tanto otros contextos en los cuales se pueden ubicar los razonamientos y análisis hechos, como algunas generalizaciones. Todo ello contribuye a estimular la intuición y a comparar las ventajas de los métodos disponibles para resolver los problemas. A continuación enunciamos un problema en el contexto de la teoría económica para los productores y otro en la de los consumidores:

Problema 1"

Una empresa produce un bien empleando los factores de producción L y K. Si utiliza x unidades de L e y unidades de K produce x y unidades del bien. Si cada unidad de L y

K la compra a un dólar y dispone de 15 miles de dólares; ¿qué cantidades debe comprar para maximizar su producción?.

Problema 1"'

Considerar los bienes A y B y que la función de utilidad de un consumidor es u(x, y) = x y, donde x representa la cantidad del bien A e y representa la cantidad del bien B. Si cada unidad de estos bienes cuesta un dólar y el consumidor dispone de 15 dólares, ¿cuántas unidades de A y B debe adquirir para maximizar su utilidad?

Generalizaciones

Una primera generalización interesante es considerando tres variables:

$$\max\ x\,y\,z$$
$$s.a\quad x + y + z = 15$$

- *Reinterpretación geométrica del problema*

Cuáles deben ser las dimensiones de un paralelepípedo recto si para su armazón (aristas) se dispone de 60 metros de alambre y su volumen debe ser máximo?.

- *Reinterpretación económica del problema*

  Empresa : 3 factores de producción, precios unitarios \$1, presupuesto \$15.

  Consumidor: 3 bienes, precios unitarios \$1, presupuesto \$15.

Se puede pasar entonces a generalizar para *n* variables y a pensar en las correspondientes reinterpretaciones geométrica y económica

$$\max\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$$
$$s.a:\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i\ =\ C$$

Hacia el cálculo de variaciones y la teoría de control

A partir del problema de encontrar la distancia más corta del punto (5, 0) a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, que ciertamente es trivial, se puede ir modificando el problema, introduciendo cada vez un mayor grado de dificultad que permita ejercitar la intuición y el manejo de los conocimientos de cálculo, hasta llegar a plantearse problemas más generales, considerándolos en el marco del cálculo de variaciones y mostrando que sus métodos son más poderosos y permiten resolver problemas mucho más generales, en los cuales ya no se busca un número o un vector que optimiza una función, sino una función que optimiza una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

Al pensar en resolver el problema

Determinar la distancia más corta del punto C(6, 25/4) a un punto de la parábola de ecuación $y = 1 - x^2$,

es natural intuir la búsqueda de un segmento de recta perpendicular a la parábola, como consecuencia de haber trabajado problema similar con la circunferencia. Se puede demostrar esta perpendicularidad considerando el problema, de manera más general, con una función derivable. Un problema aún más general es el siguiente:

Determinar la curva $y = y(x)$ *que una el punto* $(x_1\ ,\ y_1)$ *con un punto del gráfico de la función derivable* $y = f(x)$, *de modo que la longitud de la curva sea mínima.*

El planteamiento formal, ya en el marco del cálculo de variaciones, es:

$$\min \int_{x_1}^{x_T} \sqrt{1+[y'(x)]^2}\ dx\ ,\ \text{sujeto a: } y(x_1) = y_1,\ \ y(x_T) = f(x_T).$$

donde x_T representa la abscisa del punto terminal de la curva que se busca y se está usando la fórmula de la longitud de una curva suave.

Conociendo los métodos del cálculo de variaciones, se pueden resolver adecuadamente problemas cuya “solución intuitiva” no coincide con la experimental, como el problema de la curva *braquistócrona*, planteado por Johan Bernoulli en 1696:

¿Qué forma debe tener un alambre sin fricción, uniendo los puntos A y B de un plano vertical, con B más abajo que A, pero no en la misma vertical, para que una cuenta que se deslice por el alambre descienda, por su propio peso, desde A hasta B, a la mayor rapidez?

Con este enfoque de la optimización, en la segunda mitad del siglo XX se creó la teoría del control óptimo, introduciendo lo que se denomina una variable de control y considerando entre las restricciones una ecuación diferencial. En este marco se pueden resolver problemas como el siguiente, que nos dan idea de sus aplicaciones:

Determinar cómo deben variar en el tiempo los niveles de consumo $C(t)$ de cierto bien y de la polución ambiental $P(t)$ que se ocasiona al producir tal bien con la cantidad de trabajo $L(t)$, para que se maximice el bienestar $U(t)$ de la sociedad en el período $[0, T]$, *sabiendo que* $C(t) = \alpha L(t)$, $\alpha > 0$; $P'(t) = C^2(t) - \gamma P(t)$, $\gamma > 0$; $U(t) = ln\ C(t) - \beta L^2(t) - \mu P(t)$; $P(0) = P_0$; $P(T) = P_T$ (por determinar).

La polución es la “variable de estado”, y el consumo la “variable de control”.

Estos problemas se resuelven aplicando las condiciones necesarias dadas por el “*principio del máximo de Pontryagin*”, en el que se usa la función hamiltoniana y una variable de coestado para plantear el sistema hamiltoniano de ecuaciones diferenciales.

Comentarios finales

- Escogiendo problemas apropiados, trabajando en grupos y orientando adecuadamente, es posible obtener en el aula soluciones y observaciones como los expuestos para el problema 1, lo cual estimula la intuición, ejercita la construcción de significados a partir de formalismos y amplía la visión acerca del uso de los conocimientos previos para el análisis, la visualización y la solución de problemas.
- Es muy formativo, trabajando interactivamente con los estudiantes, ir modificando y generalizando problemas sencillos y llegar a situaciones que requieren matemática avanzada, que usa y formaliza las percepciones intuitivas.

Referencias bibliográficas

Chiang, A. (1992). *Elements of Dynamic Optimization.* New York, USA: McGraw Hill.

Courant & Robbins (1963). *What is mathematics?.* N.Y.,USA: Oxford University Press.

Dubinsky, E.(1998). *Meaning and formalism in mathematics.* Georgia State University.

Malaspina, U. (1994). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Lima, Perú: Fondo Editorial PUCP.

Malaspina, U. (1997). Aprendizaje y formalización en matemáticas. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 228-232, México.

Simmons, G. (1977). *Ecuaciones diferenciales.* México: McGraw Hill.

Ecuaciones diferenciales con aplicaciones

Víctor Martínez Luaces
Facultad de Química. DEQUIFIM. Universidad de la República. Montevideo. Uruguay
victor@bilbo.edu.uy   victor@eiffel.fing.edu.uy

Resumen
El presente trabajo tiene relación directa con el curso corto denominado "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones", que fuera dictado en la XV RELME. Se comienza por exponer el fundamento teórico de dicho curso, así como las ideas que estuvieron presentes en el diseño y puesta a punto del mismo. A modo de ejemplo, se presentan algunos de los problemas tratados y su modelación matemática. Por otra parte, se comentan las dificultades inherentes a la resolución de dichos problemas, tanto para los docentes que asistieron al minicurso, como para los alumnos de las carreras de Ingeniería Química y de Ingeniería de Alimentos de la Universidad de la República en Montevideo, Uruguay. Basándose en los resultados anteriores, se plantean algunas conclusiones para cursos de Matemática en los que el modelado juega un rol fundamental.

Introducción

Si comenzamos por un estudio desde una perspectiva histórica, resulta que la enseñanza de la Matemática como asignatura de servicio (o simplemente la Matemática para no matemáticos), ha sido tema de interés y de preocupación desde hace muchos años. Por ejemplo, el famoso matemático francés Joseph Fourier escribió una carta con sus ideas sobre como debía enseñarse la Matemática a los ingenieros (Langinis, 1981). Muchos años más tarde, en 1911, la ICMI[1] decidió organizar un congreso internacional sobre el tema, que finalmente tuvo lugar al año siguiente. Más recientemente, ICMI resolvió crear un grupo de estudio, al más alto nivel internacional, dedicado especialmente a la Matemática como asignatura de servicio. De este emprendimiento surgieron varios trabajos, en particular se podría destacar la publicación realizada por la propia ICMI en L´Enseignement Mathematique (ICMI, 1986).

El tema ha sido tratado reiteradamente en eventos internacionales, como la VIII ICME[2], realizada en Sevilla en 1996 (Muller et al., 1996) o el Study Group on the teaching and learning of Mathematics at university level, que tuvo lugar en Singapur en 1998 (Bourguignon et al., 1999).

Uno de los puntos fundamentales en este tipo de cursos es el tema de la motivación. En efecto, a un estudiante de Química, de Economía o de Ingeniería, no lo motiva demasiado un teorema de existencia y unicidad, o ver que sucede si se debilita tal o cual hipótesis en un teorema intrincado, etc., sino que la motivación surge de ejemplos y aplicaciones que tengan que ver con la carrera que dicho estudiante eligió.

Así por ejemplo, en un trabajo realizado con un grupo de expertos, casi todos los entrevistados destacaron el papel insustituible que tiene la resolución de problemas de la vida real en la formación de este tipo de estudiantes (Martínez Luaces, V. y Casella, S., 1996). Como contraparte, desde el punto de vista de los alumnos, se llegó a conclusiones esencialmente similares. Efectivamente, el análisis de las evaluaciones docentes, en que los alumnos expresan sus opiniones de manera anónima sobre los profesores, los cursos, las evaluaciones, etc., permitió constatar que existe una muy alta correlación entre la motivación y la presentación por parte del docente de ejemplos que relacionen la

[1] International Comitee in Mathematical Instruction
[2] International Congress in Mathematical Education

Matemática con otras asignaturas de la carrera y con los problemas de la vida real y profesional (Martínez Luaces, V., 1998).
En este contexto, las Ecuaciones Diferenciales, tanto si son Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) o Ecuaciones en Derivadas Parciales (E.D.P.), juegan un papel fundamental ya que son uno de los tópicos de mayor aplicación en el modelado de problemas reales en las más diversas disciplinas. En particular, esto es lo que sucede en Ingeniería Química, Ingeniería de Alimentos y en Ingeniería Ambiental, que son las tres ramas en que se desarrolló el trabajo que dio origen a este minicurso. En efecto, el mismo recoge problemas que han sido planteados a los estudiantes de las facultades de Química y de Ingeniería y que fueron agrupados en Problemas de Aplicaciones de E.D.O. (Martínez Luaces, V., 2000a) y Problemas de Aplicaciones de E.D.P. (Martínez Luaces, V., 2000b). Algunos de esos problemas fueron y son utilizados regularmente en cursos de grado, mientras que otros por su mayor dificultad o especificidad, se plantean en los postgrados.

Desarrollo

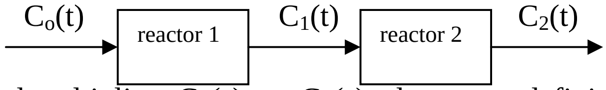
Los problemas de Cinética Química (reacción unimolecular de primer orden, mutarrotación de la Glucosa, reacción en dos etapas con una especie intermedia, etc.) resultan, luego de ser modelados adecuadamente, un excelente medio para presentar distintos tipos de E.D.O. (y sistemas de E.D.O.), lineales y no lineales. También permiten tratar problemas de tipo cualitativo, es decir, estabilidad de soluciones, diagramas de fases, etc.
En tal sentido, es interesante observar la correlación que existe entre ciertas cuestiones químicas y las preguntas que se pueden formular vinculadas con la estabilidad. De igual modo se pueden sacar conclusiones químicas y matemáticas, que plantean importantes relaciones entre ellas (Martínez Luaces, 1997).
Otro tipo de problemas que tienen menos pre-requisitos no matemáticos y que conducen a situaciones similares, con idéntica resolución, son los problemas de mezclas y tanques. Veremos luego, en la próxima sección un ejemplo de este tipo de problema.
Tanto los problemas de Cinética Química como los de mezclas, en versiones sencillas (bastante más simplificadas que las que tratadas en este curso), aparecen incluso en textos de Matemática. En efecto, hay problemas sencillos de Cinética Química en textos clásicos (Courant y John, 1978) y más frecuentemente en otros más modernos (Martín, 1984). También suelen aparecer algunos problemas de mezclas y tanques en ciertos textos de uso bastante difundido (Zill, 1997).
Otro posible enfoque, consiste en utilizar la Transformada de Laplace para resolver E.D.O. o sistemas de E.D.O. Como caso particular, si se utiliza esta herramienta en problemas de mezclas con tanques, se llega al concepto fundamental de Función de Transferencia. De este modo se ingresa, casi sin pre-requisitos, a otro tipo de problemas fundamentales en ciertas ramas de la Ingeniería, como lo son los problemas de Diseño de Reactores. Luego veremos esto en detalle con algunos ejemplos concretos.
También en este contexto es posible formular problemas que lleven a la utilización de un tipo especial de operación: la Convolución. Más aún, es posible darle al mismo un contexto aplicado y motivador.
A diferencia de los problemas del módulo anterior (i.e., los de Cinética Química o los de Mezclas), estos no se encuentran en textos de Matemática, sino en textos de Ingeniería Química (Westerterp et al., 1984) o en recopilaciones específicas como la mencionada en la introducción (Martínez Luaces, 2000a).

Pasando ahora a las E.D.P., es bastante conocido el problema de la conducción del calor en una barra finita y su resolución por Separación de Variables y Series de Fourier.
Como método alternativo para este tipo de problemas, se puede utilizar la Transformada de Laplace en la variable "*t*".
A partir de la experiencia llevada a cabo en el curso corto, se pueden utilizar ambos métodos para resolver problemas de Transferencia de Masa, Propagación de Ondas, etc. Algunos de estos problemas son relativamente clásicos y aparecen en textos de Ecuaciones Diferenciales (Zill, 1997) o de Transformada de Laplace (Doestch, 1974). Otros en cambio, son específicos de Ingeniería Química o de Ingeniería de Alimentos y aparecen en publicaciones científicas (Martínez Luaces et al., 2000), o en el trabajos como el ya mencionado en la introducción (Martínez Luaces, 2000b).

Algunos problemas concretos y sus dificultades
Como ya se mencionó la Transformada de Laplace se utiliza en el Diseño de Reactores. En efecto, la Función de Transferencia de un reactor, se define como

$$\mathbf{G(s)} = \frac{L\{\mathbf{C(t)}\}}{\boldsymbol{L}\{C_o(t)\}} \qquad (1)$$

siendo $C_o(t)$ el perfil de concentración a la entrada y C(t) lo mismo para la salida. Dichas concentraciones de la solución con que se trabaja, dependerán del tiempo t.
Uno de los problemas examinados en el curso consistió en conectar varios reactores en serie. Por ejemplo, si son dos, la salida del primero será la entrada del segundo:



por lo que, al multiplicar $G_1(s)$ por $G_2(s)$ tal como se definieron en la fórmula **(1)** (es decir, las funciones de transferencia de ambos reactores), el término $\boldsymbol{L}\{C_1(t)\}$ se cancela y resulta que:

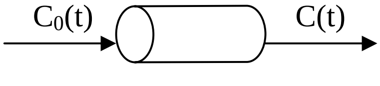
$$G(s) = G_1(s) \,.\, G_2(s) \qquad \textbf{(2)}$$

La segunda parte del problema planteado consistió en generalizar para n reactores en serie. Los participantes del curso pudieron llegar con relativa facilidad (una vez entendido el razonamiento anterior) a que la función de transferencia de todo el sistema es igual al producto de todas las $G_i(s)$ (i = 1, 2, ..., n).
Por otra parte, como se mencionó en una breve explicativa, se pueden considerar distintos tipos de reactores ideales, como el Reactor Tubular Flujo Pistón (RTFP) en el que la salida C(t) es como la entrada con un cierto retardo τ, es decir, $C(t) = C_0(t - \tau)$, entonces transformando se tiene:

$$G(s) = \frac{\boldsymbol{L}\{C_0(t-\tau)\}}{\boldsymbol{L}\{C_0(t)\}} = \frac{e^{-\tau s}\,\boldsymbol{L}\{C_0(t)\}}{\boldsymbol{L}\{C_0(t)\}} = e^{-\tau s} \quad \Longrightarrow \quad G(s) = e^{-\tau s}$$

Esquemáticamente:

RTFP

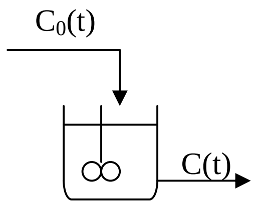


$$G(s) = e^{-\tau s} \qquad \textbf{(3)}$$

Otro ejemplo más complejo es el del Reactor Continuo Agitado Ideal (RCAI), en el cual el perfil de salida C(t) se obtiene de una ecuación diferencial que surge de un balance de masa. Este es un típico ejemplo de mezclas y tanques, que no ofreció demasiadas dificultades a los participantes. Se obtiene en este caso:

$$V \frac{dC}{dt} = \phi C_0 - \phi C \qquad \textbf{(4)}$$

RCAI



V = volumen del reactor

ϕ = flujo volumétrico de entrada y de salida del reactor

Transformando la ecuación resulta:

$$V (s \boldsymbol{L}\{C\} - C(0)) = \phi \boldsymbol{L}\{C_0\} - \phi \boldsymbol{L}\{C\}$$

Si la concentración inicial es cero (o sea si solo hay agua en el reactor al comenzar su funcionamiento), entonces resulta:

$$s V \boldsymbol{L}\{C\} + \phi \boldsymbol{L}\{C\} = \phi \boldsymbol{L}\{C_0\}$$

de donde: $$G(s) = \frac{\boldsymbol{L}\{C(t)\}}{\boldsymbol{L}\{C_o(t)\}} = \frac{\phi}{\phi + sV} = \frac{1}{1 + \tau s} \qquad \textbf{(5)}$$

Donde $\tau = V / \phi$ es el tiempo de residencia del reactor. La interpretación de τ (que es V / ϕ) como un tiempo, resultó más fácil de ver, utilizando magnitudes físicas concretas de volumen y de caudal, observando entonces que el resultado de este cociente daba en segundos o alguna otra unidad de tiempo.

Es posible además plantear problemas interesantes vinculados a otras áreas de la Matemática. Por ejemplo, n reactores de tipo RCAI, en serie, dan por una generalización de la fórmula **(2)** y utilizando la fórmula **(5)**, lo siguiente:

$$G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \tau_i s} \qquad \textbf{(6)}$$

Si todos los reactores son iguales y el tiempo total de residencia es τ, entonces $\tau = n\tau_i$ y resulta que la fórmula **(6)** se puede poner como:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{n} s\right)^n} \qquad \textbf{(7)}$$

Si se hace tender n a $+\infty$, para los profesores de Matemáticas fue fácil ver que:

$$\lim_{n \to \infty} G(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{n} s\right)^n} = e^{-\tau s} \qquad \textbf{(8)}$$

Sin embargo, no fue fácil para los profesores interpretar químicamente este resultado, observando que el límite coincide con el resultado de la fórmula **(3)**.

Para un estudiante típico de Ingeniería Química sucede exactamente al revés. Una vez aprobado el curso de cálculo en el cual trabaja con límites como el de la fórmula **(8)**,

rápidamente se olvida de las técnicas y artificios que permiten resolver ese tipo de ejercicios. En cambio, para dicho estudiante, comprender que una batería de reactores agitados en serie, cuyo número tiende a infinito y sus tiempos de residencia tienden a cero, como en la fórmula **(7)**, se comporta como el reactor tubular de la fórmula **(8)**, es casi evidente. Esto se comprobó reiteradamente, en varios años, tanto en cursos de grado, como en el posgrado, en los que se planteó este problema.
Esto último es una constante en los cursos de Matemática como asignatura de servicio. Aquello que los alumnos no aplican en otras materias lo olvidan rápidamente. Por el contrario, aquello que aplican, lo recuerdan y los motiva en su aprendizaje. Por otra parte, les produce satisfacción el poder lograr "interpretaciones químicas", de cosas que consideran "meros resultados matemáticos" y así lo hacen saber cuando se les consulta al respecto (Martínez Luaces, 2001).

Conclusiones

Las E.D.O., las E.D.P. y la Transformada de Laplace tienen un papel fundamental en la modelación y resolución de problemas de Física, Química, Ingeniería, etc. y con muy pocos pre-requisitos es posible introducir a los alumnos de los cursos básicos en este tipo de problemas, lo que permite dar a los mismos un enfoque más aplicado y motivador (Martínez Luaces et al., 2000).
De hecho, las dos publicaciones ya mencionadas (Martínez Luaces, 2000a y Martínez Luaces, 2000b), son utilizadas como fuente de problemas para los cursos teórico-prácticos de Ecuaciones Diferenciales, para Ingeniería Química y para Ingeniería de Alimentos, con excelentes resultados (Martínez Luaces et al., 2000).
Dado que en el curso corto se introdujeron algunos problemas sencillos de modelado y la importancia que este tiene para los ingenieros y en general, para todos los que aplican la Matemática, es importante también hacer algún comentario al respecto.
Concretamente, para tener una idea de su significación, bastaría citar las palabras del actual Presidente del Comité Interamericano de Educación Matemática, Dr. Carlos Vasco, que en la conferencia de clausura del décimo Congreso Inter Americano de Educación Matemática (X CIAEM) dijo: *"...Por eso, una de las más importantes tareas de la Matemática del siglo XXI va a ser estar a la caza de situaciones reales en las cuales se empiece a notar un esquema que se repite y tratar de encontrarle el modelo matemático más ajustado..."* (Vasco Uribe, 1999). Como se puede ver, el modelado no sólo es y será importante para los ingenieros, o los economistas, sino incluso para los propios matemáticos, de los cuales los matemáticos educativos no pueden ser la excepción.
Otro tema profundamente vinculado con el modelado y la resolución de problemas es la recuperación de escenarios. Cabe mencionar en tal sentido, que una de las conclusiones que surgieron del Panel sobre la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior, realizado en Chile, en el marco de la V Reunión de Didáctica de Matemática del Cono Sur (Martínez Luaces, V., et al., 2000), es que resulta difícil que los estudiantes puedan reconstruir con éxito las definiciones, propiedades y teoremas vinculados a un concepto matemático si no se hace un esfuerzo por recuperar los escenarios en que ese concepto fue creado.
A modo de ejemplo, las E.D.O., las Series de Fourier, la definición de Estabilidad y casi todos los conceptos involucrados en este mini curso, tuvieron su origen en el modelado y resolución de problemas no matemáticos.
El hecho de que hoy en día, estos y otros temas sean parte central de nuestros cursos y programas, no se debe a su belleza matemática, sino al éxito que tuvieron esos modelos.

Modelar problemas de la vida real no debe ser entonces una simple actividad complementaria o un módulo de trabajo opcional. Por el contrario, debemos tomar esta actividad como una obligación con nuestros alumnos y con la propia historia de nuestra disciplina.

Referencias bibliográficas

Bourguignon, J-P et al. (in press). "Report of the Working Group A2: Mathematics and Other Subjects", *ICMI Study Group on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level.* Singapore: ICMI

Courant R. y John F. (1978). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, México: Ed. Limusa.

Doestch, G. (1974). *Introduction to the theory and application of the Laplace Transformation*, Basilea: Springer-Verlag.

ICMI (1986). "Mathematics as a service subject", *L'Enseignement Mathématique,* **32**, pp. 159-172.

Langinis, J. (1981). "Une lettre inédite de Fourier sur l' enseignement destiné aux ingénieurs en 1797", *Rev Histoire Sci. Appl.,* **34**, **3 – 4**, pp. 193 – 207.

Martin, R.H. (1984). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. New Jersey: Mc. Graw-Hill.

Martínez Luaces, V. et al. (2000). "Innovaciones en la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería Química e Ingeniería de Alimentos". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* **13**, pp. 555-559.

Martínez Luaces, V. y Casella, S. (1996). "La educación matemática en las diferentes ramas de la Ingeniería en el Uruguay hoy", *Memorias del II Taller sobre la enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*, La Habana: ISPJAE.

Martínez Luaces, V. (1997). "Las Ecuaciones Diferenciales y su Estudio Cualitativo", *Educación en Física*, **3.2**, pp. 32 - 35.

Martínez Luaces, V. (1998). "Matemática como asignatura de servicio: algunas conclusiones basadas en una evaluación docente" *Números, Revista Española de Didáctica de Matemáticas* **36**, pp. 65-67

Martínez Luaces, V. (2000a). *Aplicaciones de E.D.O*. Montevideo: Ed. AEQ.

Martínez Luaces, V. (2000b). *Aplicaciones de E.D.P*. Montevideo: Ed. AEQ.

Martínez Luaces, V. (2001). "Enseñanza de matemáticas en carreras químicas desde un enfoque aplicado y motivador", *Números. Revista española de Didáctica de las Matemáticas.* **45**, pp. 43-52.

Martínez Luaces, V., Díaz Moreno, L. y Suárez, M. (2000). "Informe del Panel y del Grupo de Trabajo sobre Enseñanza de Matemática en la Educación Superior", *V Congreso de Didáctica de Matemática del Cono Sur*, Santiago de Chile, Chile.

Muller, E. et al. (1996). "Mathematics as a service subject", *Reporte del grupo de trabajo Nº 17 en ICME - 8.* Sevilla. España.

Vasco Uribe, C. (1999). "Las Matemáticas Escolares en el año 2010" *Conferencia en X CIAEM, en Boletín especial de SEMUR*, **1**.

Westerterp, K.R. et al. (1984). *Chemical Reactor Design and Operation*, New York: John Wiley & sons.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*, México: International Thomson Editores.

El comportamiento periódico de una función como un argumento contextual. La manifestación del movimiento fuera del instante

Francisco Cordero Osorio, Enrique Jaime Martínez Capistrán
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN; México
fcordero@mail.cinvestav.mx emartine@mail.cinvestav.mx

Resumen
En el campo de la matemática educativa, el concepto de periodicidad es un tema muy poco explorado, a pesar de encontrarse inmerso prácticamente en la curricula escolar de la matemática. Este concepto es ampliamente utilizado en diversos tópicos de matemáticas, sin embargo, solo existe poco trabajo de corte epistemológico al respecto, donde se encuentra el trabajo de Shama (1998), este estudio cognitivo nos plantea una problemática sobre la comprensión del estudiante, cuando éste concibe la periodicidad como un proceso y no puede transformarla en objeto. Esto conduce al estudiante a relacionar fenómenos no periódicos como periódicos y a tener preferencia por identificar un periodo de un fenómeno periódico que no es necesariamente en forma correcta. La problemática es retomada para la investigación, considerando los contextos discreto y continuo del concepto. El objetivo es diseñar una situación de tal forma que el estudiante de una nueva explicación sobre la concepción de proceso y pueda alcanzar su transformación al objeto del concepto de periodicidad. Para tal propósito se ha formulado una epistemología de la periodicidad, donde se han hallados ciertos elementos (repetición regular, desplazamiento lineal como el argumento de los fenómenos periódicos, y el comportamiento periódico de una función como un argumento contextual, la manifestación del movimiento en un todo y no en un momento, que permitan la construcción de la periodicidad. El concepto de periodicidad generalmente es tratado en la currícula como una propiedad de cierta clase de funciones llamadas periódicas. Sin embargo es factible pensar la orientación del concepto de periodicidad a través de la noción de comportamiento tendencial de las funciones, donde la epistemología del concepto esté basada en situaciones de tendencia de un comportamiento periódico. De la epistemología de la periodicidad tiene como propósito ser la base de una descomposición genética que incluya los elementos y su relación. Nuestro marco teórico en la investigación es el de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y el diseño de actividades, su implementación y la recolección de datos con estudiantes de precálculo y cálculo, a través de la metodología que señala la propia teoría, el ciclo ACE. Los resultados se presentan en la presentación de la investigación.

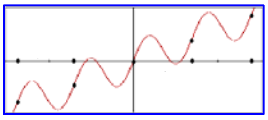
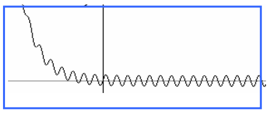
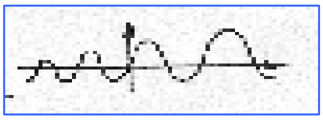
Introducción

La periodicidad es un concepto ampliamente utilizado en la enseñanza de la física y la matemática. Sin embargo, este concepto no llega a ser comprendido por los estudiantes en su totalidad, sólo es entendido en un nivel proceso (Shama, 1998), es decir, identificar fenómenos no periódicos como periódicos y tener preferencia para identificar periodos de un fenómeno periódico que no necesariamente es en forma correcta. *El concepto que surge de nuestra practica social ordinaria, y la enseñanza de tópicos relacionados a la periodicidad tienen influencia directa en como es entendido el concepto.* En Shama (1998) se encuentra que en el entendimiento del concepto aparecen ciertas nociones como: la repetición regular, el movimiento y el tiempo. *Estos elementos nos ha conducido a analizar tres movimientos básicos (Movimiento Circular Uniforme, Péndulo Simple y un Sistema Masa-resorte) con el fin de hallar nuevos elementos epistemológicos. En ellos hemos encontrado ciertas características comunes, que obedecen 2ª ley de Newton (sistema de predicción local): la descripción del movimiento es a través de proyectarlo en una línea fase, su ecuación de movimiento es* $(d^2y/dt^2) + \omega^2 y = 0$ (ecuación diferencial autónoma), donde ω es una caracterización local que está relacionada con el periodo y la frecuencia (caracterizaciones globales), la solución de la ecuación conduce al modelo matemático $y(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$, función caracterizada por ser periódica, que es un sistema de predicción global, donde *la periodicidad es una representación integral que está caracterizada por lo local y lo global en una relación dialéctica*. Por tanto, se trata pues de organizar un conjunto de relaciones que establece la actividad humana para construir lo periódico*: movimiento repetitivo (repetición regular), manifestación del movimiento en un todo (periodo) y no en un momento (instante), el desplazamiento lineal como argumento de los fenómenos periódicos, y el comportamiento periódico de una función como un argumento contextual.*

Problemática y objetivo de la investigación

Respecto a trabajos relacionados con el concepto de periodicidad, encontramos el de Shama (1998), en el que investiga el entendimiento del concepto en estudiantes de 3º a 12º grados, en las clases de matemáticas y física, a través de dos cuestiones: la definición y el concepto imagen del concepto de periodicidad. Se reporta que los estudiantes sólo tienen un entendimiento en un nivel proceso y como consecuencia relacionan fenómenos no periódicos como periódicos y tienen preferencias por identificar periodos de un fenómeno periódico que no necesariamente es en forma correcta.

Algunas de las gráficas que no son periódicas, que cumplen con algunas de las características de la periodicidad, mas sin embargo, son identificadas por los estudiantes como periódicas son las que mostramos a continuación:

Las causas de entender el concepto de periodicidad en un nivel proceso son diversas: los estudiantes transfieren las propiedades del proceso, o sea, tienden a relacionar el producto de un procedimiento periódico como periódico, relacionan un fenómeno periódico que resulta de la repetición de un algoritmo o patrón periódico.

De las preferencias por identificar periodos de un fenómeno periódico Shama reporta que los señalan entre dos puntos extremos, entre dos puntos discontinuos, en el inicio de la representación, entre los ceros de una función, le asignan una dirección a partir de un punto y señalan los periodos fundamentales. Algunos de los errores que son cometidos por los estudiantes son debido a que tienen la concepción de que los extremos de un periodo deben ser idénticos, tendencia a identificarlos en el extremo de la representación, pues algunos no reconocen periodos que no empiezan en el extremo de la representación.

El concepto que surge de nuestra practica social ordinaria, y la enseñanza de tópicos relacionados a la periodicidad tienen influencia directa en el entendimiento del concepto.

Si bien Shama nos reporta que el concepto es sólo entendido en un nivel proceso, no nos dice cómo alcanzar el nivel objeto. Por tanto, en esta investigación retomamos la problemática, el entendimiento de la periodicidad en un nivel proceso, con el fin de conducir a los alumnos a un nuevo entendimiento, en un nivel objeto, a través de identificar más elementos epistemológicos de la periodicidad. Para ello, se considera la aproximación socioepistemológica (Cordero, 2001), la cual consiste considerar la actividad del humano que lleva a lo periódico. Esto formula una epistemología que será la base para diseñar una situación de periodicidad que conduzca el paso del nivel proceso al nivel objeto. Las actividades pasan a ser argumentos contextuales en el diseño de la situación. Estos argumentos reflejan lo cognitivo de los que intervienen. Entonces, conviene usar aspectos de la Teoría APOE (Dubinsky, 1998), como el de la descomposición genética. Ahí, se encontrarán las coordinaciones de las construcciones mentales necesarias para alcanzar el nivel objeto en la argumentación contextual a la luz de la epistemología de la actividad humana.

Los movimientos periódicos básicos y la búsqueda de elementos epistemológicos

En el entendimiento de concepto aparecen ciertas nociones: movimiento, repetición y tiempo. Esto nos ha llevado a analizar tres movimientos periódicos, que consideramos básicos para la búsqueda de hallar nuevos elementos epistemológicos y que sirvan de base para nuestra descomposición genética. Los movimientos analizados son el movimiento circular uniforme, el péndulo simple y el movimiento de un sistema masa-resorte. Las fuentes que se utilizaron fueron libros de texto de física y matemáticas que se emplean en los cursos universitarios (Kline, 1998 y Resnick-Halliday, 1983).

Se han identificado ciertas similitudes, entre las más significativas están: la segunda ley de Newton como un sistema de predicción local, la ecuación de movimiento como una ecuación diferencial de 2º orden y el modelo matemático, como la función periódica seno. En todos los movimientos se define la posición, velocidad y la aceleración como caracterizaciones locales del movimiento. Mientras que en los tres movimientos señalados anteriormente, se define la amplitud, el ángulo de fase, el periodo y la frecuencia en las soluciones, como caracterizaciones globales, que dan significados a ciertos parámetros de la función y(t) = A sin (Bt + C) + D. La velocidad, que es una caracterización local, se relaciona directamente con el periodo y la frecuencia, que son caracterizaciones globales. Todas estas características comunes aparecen en la tabla I.

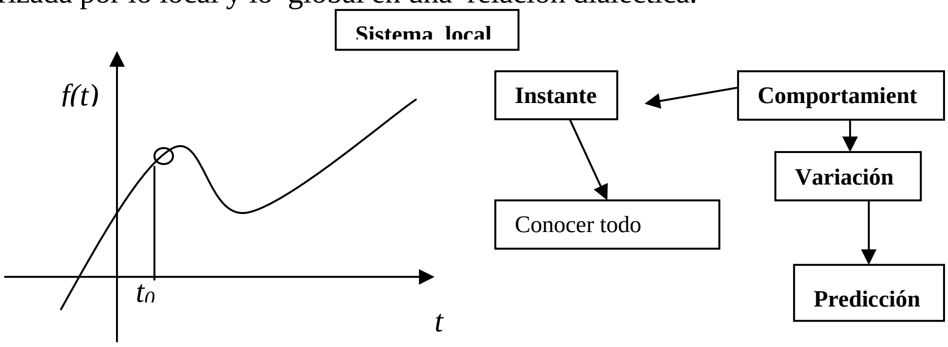
La ecuación diferencial por la cual están modelados los tres movimientos es una ecuación autónoma $\{(d^2y/dt^2) + \omega^2 y = 0\}$, esto significa que no aparece el tiempo explícitamente en la ecuación, pero el tiempo está presente. Esto genera un espacio de fases, que permite ver las caracterizaciones de predicción del sistema local simultáneamente, o sea, permite ver en un momento dado t , la posición y el campo de velocidades.

Movimiento	*Ecuación diferencial*	*Velocidad angular (ω)*	*Periodo (T)*	*Modelo matemático*
M.C.U.	$(d^2y/dt^2) + \omega^2 y = 0$	$2\pi / T$	$2\pi / \omega$	$A\sin(\omega t + \phi)$
Péndulo	$(d^2x/dt^2) + (g/l)\, x = 0$	$(g/l)^{(1/2)}$	$2\pi (l/g)^{1/2}$	$A\sin(\omega t + \phi)$
Masa-resorte	$(d^2x/dt^2) + (k/m)x = 0$	$(k/m)^{(1/2)}$	$2\pi (m/k)^{1/2}$	$A\sin(\omega t + \phi)$

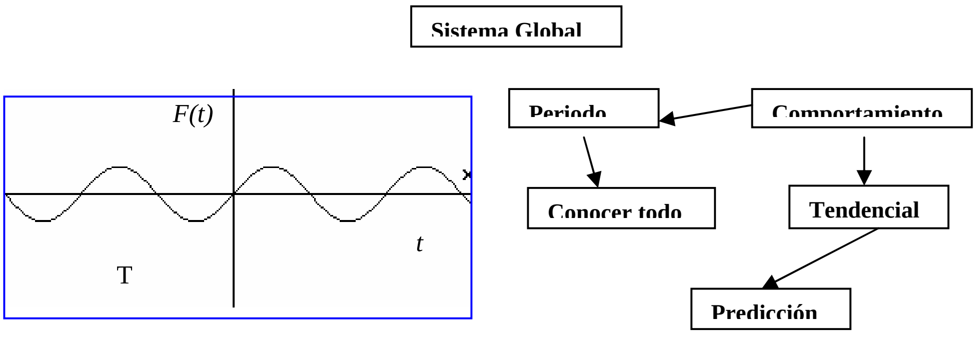
Tabla I

Los movimientos anteriores son tres tipos de movimientos que son analizados en un "desplazamiento lineal " o de acuerdo al movimiento armónico simple. Aunque el movimiento circular uniforme es una composición de dos movimientos armónicos simples, su análisis puede realizarse en dos desplazamientos, uno en el eje X y otro en el eje Y. En los tres casos se aplica la segunda ley de Newton f = ma, que formula   una ecuación diferencial de segundo orden con características singulares, esta ecuación genera un sistema de predicción local y global, y a su vez genera una familia de soluciones de funciones de seno con la propiedad de ser periódica, pero conociendo la posición y la velocidad se puede obtener una solución única, con lo que se puede conocer todo el comportamiento de los movimientos en cualquier instante.

El sistema de predicción local (ver esquema 1), es la que se utiliza en el Cálculo y generalmente es preferido para hacer predicciones, ya que con él se pueden tratar fenómenos muy complicados. La manera de predecir en este sistema, es tomando información del comportamiento de las propiedades (posición y variación) del sistema en una vecindad infinitesimal (instante) en el espacio (t, f(t)), para conocer la solución en un cualquier instante anterior o posterior (conocer todo). En este sistema de predicción solo importan las caracterizaciones locales. En cambio el sistema de predicción global (ver esquema 2), es utilizado para movimientos periódicos (o que se repiten), donde se definen nuevas caracterizaciones que determinan el movimiento, esto es, en el sistema de predicción global necesita de integrar las caracterizaciones locales y globales; necesita de la especificación de una función (comportamiento), el estado inicial (caracterizaciones local), en todo el espacio (periodo) en un instante dado, para poder hacer predicciones en un instante posterior o anterior (conocer todo), por tanto, la periodicidad es una representación integral que está caracterizada por lo local y lo global en una relación dialéctica.

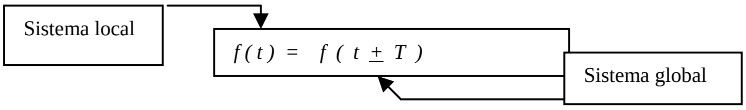


Esquema 1



ESQUEMA 2

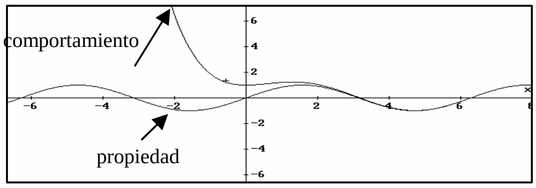
El modelo matemático es una función que está caracterizada por ser periódica f(t) = f(t + T), que es utilizada como sistema de predicción global y que integra las caracterizaciones locales y globales o ambos sistemas de predicción (ver esquema 3).



Esquema 3

En el análisis de los movimientos se encontrón mas elementos, la repetición regular, el desplazamiento lineal, la manifestación del movimiento en un todo (en un periodo) y no únicamente en un momento (en un instante), y la definición de caracterizaciones globales.

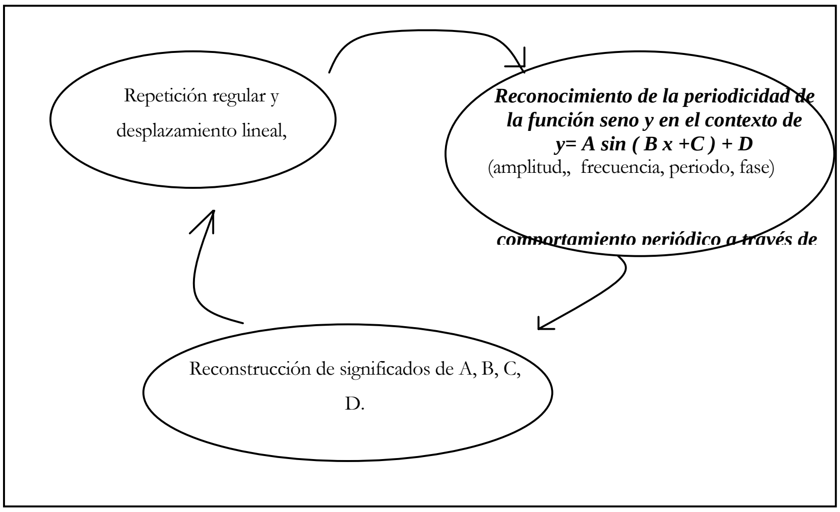
Un elemento mas que consideramos como elemento epistemológico es el del comportamiento periódico. Éste no es un concepto definido dentro de la matemática, sin embargo, cuando hablamos de periodicidad necesariamente hablamos de comportamiento periódico y periodicidad, o sea que existe una relación dialéctica entre el comportamiento periódico y la periodicidad. Un ejemplo de la diferenciación de comportamiento y propiedad periódica lo podemos ver en la siguiente gráfica.



La descomposición genética y avances de la investigación

Hemos hallado ciertos elementos epistemológicos de la periodicidad: manifestación del movimiento en un todo y no en un instante, el desplazamiento lineal como el argumento de los fenómenos periódicos, y el comportamiento periódico de una función como un argumento contextual, que pudieran formular una socioepistemología del concepto.

La descomposición genética que se esta construyendo, está basada en los elementos epistemológicos hallados, anteriormente y que relaciona los significados de los parámetros en la transformación de una función $y = A \sin(Bx + C) + D$, el desplazamiento lineal, el comportamiento de una función y la propiedad periódica (ver esquema 4).



Esquema 4

Algunas de las interrogantes que consideramos son importantes para el diseño de situación son:

¿Cuáles son los significados y procedimientos de lo periódico, cuando el comportamiento es el argumento contextual? y

¿Cuáles son los niveles cognitivos (proceso y objeto) que necesariamente se alcanzan en el arguemto contextual?

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (1998). *Cognición y Enseñanza. La Distinción y Formación de Construcciones en la Didáctica de la Matemática*. En F. Cordero (Ed.) Programa Editorial. Serie: Antologías N° 3 pp 3-45. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 4, Núm. 2, 103-128.

Dubinsky, E. (1998). *Una Década de Investigación en Educación Matemática sobre algunos Temas de Matemáticas Avanzadas*. En F. Cordero (Ed.) Programa editorial. Serie: Antologías N° 3 pp 223-247. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Kline, M. (1998). *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades*. Fondo de Cultura Económica, México.

North, A. (1983). *La Matemática como Elemento en la Historia del Pensamiento,* En SIGMA, “ El Mundo de las Matemáticas “. Tomo I. España: Editorial Grijalbo.

Quintana, H. (1998). *Espacio, Tiempo y Universo*, En Hernán Quintana G., (Ed.) Ediciones Universidad Católica de Chile, Textos Universitarios, Facultad de Física.

Resnick R. & Halliday D. (1983). *Física*, Parte I. Editorial Continental, S.A.

Shama, G.(1998). *Understanding Periodicity as a Process With a Gestalt Structure*. Educacional Studies in Mathematics, Vol 35, 255-281.

Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo

Rosa María Farfán Márquez, Marcela Ferrari Escolá
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. IPN. México
mferrari@mail.cinvestav.mx

Resumen
En este artículo se presenta un estudio de la función logaritmo bajo la óptica de la socioepistemología con el objeto de analizar la ruptura entre la presentación aritmética y funcional de los logaritmos en el discurso matemático escolar y sentar bases para el diseño de situaciones didácticas que busquen dotarlas de significado. En este sentido se desarrollan las tres etapas identificadas en el devenir de los logaritmos en objeto a ser enseñado, mismas que sustentan la hipótesis epistemológica que presentamos para su discusión.

Introducción

Nuestro trabajo parte del hecho que el conocimiento se construye respondiendo a cuestionamientos enmarcados en un paradigma específico, en una época y cultura particulares, dentro de una sociedad que le confiere pertinencia, y que su transposición didáctica es inevitable, tanto en el desarrollo y consolidación de la noción como en su adecuación a la realidad áulica. El mismo intenta evidenciar las posibles causas de la "*dislexia*" en el discurso matemático escolar en torno a la noción logaritmo teniendo como fin último el generar hipótesis epistemológicas robustas que nos permitan gestionar las variables pertinentes a una situación didáctica.

En nuestra investigación, denominamos "*dislexia*" a la ruptura que se percibe en la presentación escolar de los logaritmos, ésta es, como facilitadores de operaciones en un primer acercamiento de corte numérico, y su posterior abordaje con todo el rigor de su tratamiento como función sin que medie entre ambos la construcción de los mismos. Así, identificamos nuestra problemática en torno a la enseñanza de los logaritmos y consideramos que abordarla implica dar respuesta a preguntas tales como, ¿qué elementos permitieron su incorporación a la estructura matemática actual? ¿cómo fue su devenir en objeto a ser enseñado en nuestras aulas? ¿qué significados y sentidos se han diluido en tal proceso? ¿qué preguntas respondió en cada paradigma que los incorporó? ¿qué concepciones se encuentran respecto a ellos? ¿cómo vive esta noción en la escuela de nuestros días?

Siendo nuestra intención resignificar la noción "logaritmo", nos abocamos a la búsqueda de los interrogantes y debates que éstos produjeron, de las controversias que suscitaron, de los ires y venires en su desarrollo y consolidación en la estructura matemática, en definitiva, su devenir en un saber validado social y culturalmente. Para ello, recurrimos a varios textos originales y libros de historia intentando también enmarcar al desarrollo científico en la sociedad de la época. Intentamos asimismo, reflejar el desarrollo de la comunicación y divulgación de las nociones relacionadas con los logaritmos desde su definición en el siglo XVII, hasta nuestros días realizando para ello el análisis de los libros de textos que consideramos representativos aunque no únicos, y de la currícula de los sistemas educativos argentino y mexicano para conocer cómo vivieron y viven los logaritmos en el discurso matemático escolar de distintas épocas. Por último, reflexionamos en torno de los posibles diseños de situaciones didácticas que pueden sustentarse en nuestro trabajo y, por ende, en nuestra hipótesis epistemológica dejando abierto a la discusión tal tópico.

Esta ponencia forma parte de investigaciones enmarcadas en el proyecto, financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado. Estudio sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.
U.N.S.L, Argentina

Marco Teórico

Para desarrollar nuestro trabajo nos apoyamos en una extensión de la ingeniería didáctica como metodología de investigación ya que nuestro grupo incorpora a las dimensiones ya abarcadas por la misma, la *sociocultural*, reforzando así la mirada sistémica a los fenómenos didácticos abordados. Por tanto, presentamos el análisis preliminar, primera fase de toda ingeniería didáctica en el cual intentamos dar una visión del desarrollo de los logaritmos centrándonos fundamentalmente en las dimensiones didáctica, epistemológica y sociocultural del mismo, siendo esta última la que evidencia nuestro acercamiento teórico y extensión de esta metodología.

Adherimos al acercamiento socioepistemológico como paradigma y marco para nuestro trabajo. En el mismo, nos interesa establecer consistentemente las pautas para un posterior diseño de situación didáctica en torno a la "dislexia" *en el aprendizaje de la noción de función logaritmo producto de la no construcción de dicho concepto en el ámbito escolar. En otras palabras nos estamos refiriendo a la ausencia de significados que la función logaritmo presenta en los alumnos, debido al salto que se percibe entre su introducción a la enseñanza como una potente herramienta facilitadora de operaciones en un acercamiento netamente aritmético y su posterior aparición en la enseñanza superior como una función definida mediante la integración de la hipérbola equilátera.*

Así, nuestro trabajo se enmarca y cobra sentido dentro de *la aproximación socioepistemológica,* que para Farfán*, es un marco para la investigación y el desarrollo del currículum que se apoya en la teoría de situaciones, profundiza el análisis del saber incorporando en su análisis no sólo el origen conceptual o procedimental, sino su origen social. Una cierta razón de ser que es factible descubrir si se examinan las prácticas de referencia y las formas de su aproximación en una cultura*[3].

Otros antecedentes sobre la función logaritmo.

Nuestra preocupación en torno a los logaritmos cobra sentido al observar el tratamiento escolar dado a los mismos. Confrey y Lezama identifican, como un obstáculo epistemológico, la enseñanza de estructuras multiplicativas desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación a la hora de generalizar hacia el carácter funcional de las exponenciales y de allí inferir relaciones con los logaritmos a través de funciones inversas sin mayor detenimiento en ello (Confrey, 1996; Lezama 1999). Así mismo, Sierpinska cuestiona la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición (Sierpinska, 1992), observación que consideramos muy vinculada con la problemática tratada en este trabajo pues el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que a nuestro entender no existen elementos en el discurso escolar que propicien el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.

Por otro lado, de la exploración que realizara Trujillo respecto a la interconexión entre la relación de las progresiones aritmética y geométrica y las nociones de los logaritmos y exponenciales como funciones, surge la absoluta deficiencia de los entrevistados, estudiantes recién egresados del nivel medio superior, para intuir tal cosa (Trujillo, 1995). Si bien todos reconocen las progresiones aritmética y geométrica y logran determinar el patrón de comportamiento de cada una de ellas, ninguno consigue establecer una relación entre ambas. Las respuestas reportadas giran en torno a que: *ambas forman parte de los*

[3] Conferencia dada en la Escuela de Medicina, México, Mayo-2000.

números reales; o *ambas son progresiones*; o *no hay una operación que las vincule pues en una se suma y en la otra se multiplica*. Se observa además, que esta falta de vinculación entre las progresiones les inhibe generar argumentos en el contexto gráfico, lo cual confirma que ven a ambos objetos como entes aislados y por tanto, no dan indicios de un pensamiento funcional respecto a la relación entre las mismas, no reconocen sus características logarítmicas.

Por otro lado, se encontraron las mismas dificultades en los profesores de nivel medio superior entrevistados, sólo uno de tres reconoció las funciones logaritmo y exponencial como la relación entre las progresiones propuestas, distinguiendo explícitamente la base y graficando ambas funciones, aunque de manera convencional, es decir, recordando la forma de las curvas exponencial y logarítmica sin construirlas desde las progresiones dadas.

Las dificultades propias del abordaje de este tema se suman a las reportadas por numerosas investigaciones respecto a la apropiación del concepto de función. Entre otras, mencionamos la importancia que escolarmente se le confiere al registro algebraico en detrimento de otros, como por ejemplo el gráfico o el numérico, lo cual repercute en un empobrecimiento de las herramientas utilizables a la hora de apropiarse de un nuevo concepto o enriquecer uno ya conocido.

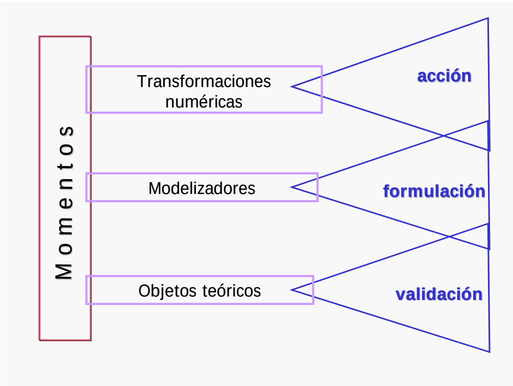
Las distintas concepciones que docentes y alumnos logran construir en torno a relaciones funcionales y las diferentes representaciones de las mismas, reportadas como elementos que dificultan la apropiación de este concepto, contrastan con la absoluta carencia de argumentos y representaciones a la hora de trabajar con logaritmos. A éstos, se los presenta como el número al que se debe elevar la base para obtener cierto número, relacionándose luego con la función exponencial, mediante la inversa y con su definición dada en términos de una integral indefinida.

No cabe duda respecto a la importancia que la noción de logaritmos ha poseído desde su origen hasta nuestros días; su evolución, su adaptabilidad a los distintos paradigmas científicos que han ido entrecruzándose, reemplazándose, superándose, ha permitido que arribe a nuestros días intacta, contando con un rincón propio en la estructura matemática actual. Sin embargo, la complejidad de su definición, de las nociones que involucra, hacen pertinente explorar su evolución, recabar información respecto a los significados que se han perdido en el transcurso de la historia, en un intento de proporcionar elementos para introducirla y desarrollarla en el aula de forma más accesible para los alumnos y profesores, los cuales se encuentran por lo general ante una noción con la que pueden operar, trabajar algorítmicamente, a la que luego someten a derivación, integración, entre otras operaciones matemáticas, sin haberla construido en su vida escolar.

Análisis preliminar enfocado a las dimensiones epistemológica y didáctica

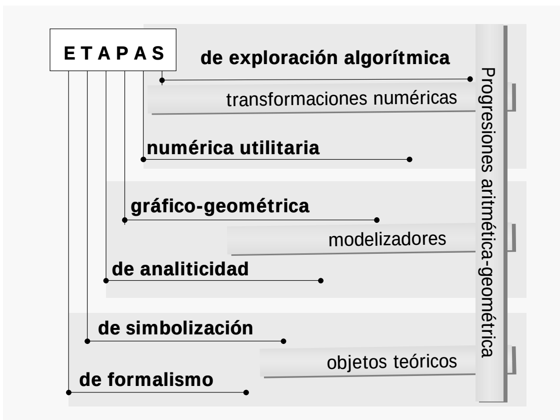
En este trabajo partimos de la premisa que la matemática es una construcción humana, un producto social y cultural, consideramos que todo objeto matemático, para consolidarse como tal, necesariamente pasa por varias etapas o momentos. Comienza por ser utilizado sin mayor conciencia de su presencia, siendo manipulado, extendido, formulado, dotado de representaciones y significados más precisos hasta ser insertado en una teoría con características propias. En estas ideas, las cuales surgen de pensar como aplicables al aprendizaje de la humanidad las situaciones de aprendizaje desarrolladas por Brousseau en su teoría de las situaciones didácticas, basamos nuestro análisis de los datos recogidos en nuestra indagación epistemológica.

Efectivamente, si tomamos como eje central en el desarrollo de los logaritmos, las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, que sustentaron su definición como objeto matemático facilitador de operaciones en el siglo XVII, podemos distinguir tres grandes momentos en el devenir histórico de los logaritmos. Podemos observar así, un primer momento de los *logaritmos como transformación*, definidos y enmarcados en el registro numérico en el cual, pese a que no habían sido aun formalmente definidos, pues estamos refiriéndonos a siglos anteriores al XVII, se explora esta relación en busca de extender el rango de los números y de facilitar los cálculos que por la magnitud de las cifras involucradas demandaban tediosas y complicadas operaciones. Es un momento de exploración de posibilidades, de uso de lo que ya se conoce y de enfrentamiento con las limitaciones propias de las herramientas matemáticas puestas en juego, es por tanto una etapa de *acción* si nos valemos de la analogía propuesta.



Deviene luego un momento de definición de la noción, de extensión y caracterización de la misma en otros registros y contextos en donde la relación entre las progresiones se torna fundamental. Así, se descubren las características de los logaritmos en el contexto geométrico, esto es, su asociación con una curva que posee subtangente constante. Se construye su gráfica la cual no fue producto de la tabulación de sus valores. Se encuentra su cuadratura superando las deficiencias del patrón hallado para la cuadratura de las funciones potencia cuando se trata del exponente –1. Se los utiliza para describir fenómenos de la naturaleza como la caída de cuerpos en medios resistentes o la propagación de las ondas sonoras. Se logra su desarrollo en serie de potencias lo que posteriormente le conferirá el status de función. Así, distinguimos a esta etapa como aquella de los *logaritmos como modelizadores* en la cual se los identifica en cada lenguaje utilizado, se los caracteriza en los distintos contextos conocidos y se establecen las relaciones entre ellos.

Por último, consideramos que con los esfuerzos por incorporarlos a la estructura teórica siguiendo ideas de rigor y purismo matemático, de descontextualización y abstracción, se los escinde de sus orígenes convirtiendo a los *logaritmos en un objeto teórico*. Se les dota de una definición formal, lejana a la publicada por Napier como la relación espacio-velocidad de dos puntos moviéndose con velocidad constante uno y decreciente en progresión geométrica el otro. Se los incorpora en el cuerpo teórico matemático como la inversa de la función exponencial, y como aquella función que convierte un producto en una suma. Se conserva la esencia de los logaritmos, no así su relación explícita con las progresiones y otras características que han desaparecido del léxico escolar.

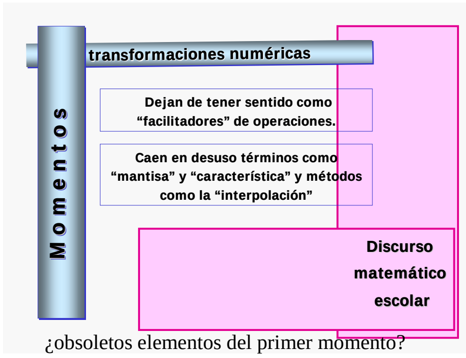


Discusión

Entran en juego, en esta visión sociocultural de la matemática a la que adherimos, variables sociales y culturales, las que deberán fungir como cristales para comprender los avances y retrocesos, los obstáculos y las maneras de superarlos, las argumentaciones y los consensos en este aprendizaje de la humanidad, particularmente en el desarrollo de los logaritmos.

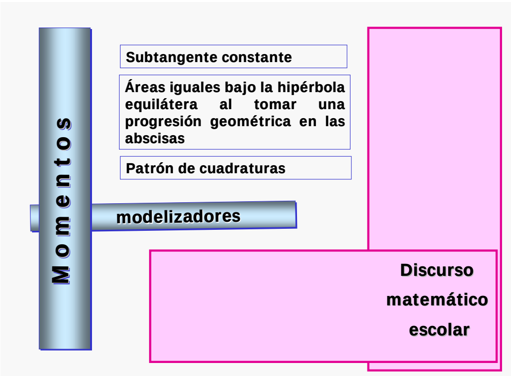
De nuestra indagación epistemológica concluimos entonces que en una primera instancia se pueden distinguir, bajo nuestra óptica, seis etapas en el desarrollo de los logaritmos, a saber: *de exploración algorítmica, numérica utilitaria, gráfico-geométrica, de analiticidad, de simbolización, de formalismo* a las cuales, desde una perspectiva más global encuadramos en los tres momentos ya mencionados.

Concluimos entonces, que los objetos matemáticos aparecen en tanto se actúe sobre ellos, son una construcción sociocultural, por cuanto nacen al seno de una comunidad específica, respondiendo a cuestionamientos particulares pero que se van abstrayendo y escindiendo de sus orígenes para devenir en objetos universales, despersonalizados y atemporales. Las discusiones, las confrontaciones, la comunicación de los mismos hace que evolucionen, que adquieran status en una estructura teórica en tanto sean aceptados y exista un consenso. Los logaritmos, como toda producción humana, no está libre de estas consideraciones y creemos que este trabajo es una pequeña muestra de ello.



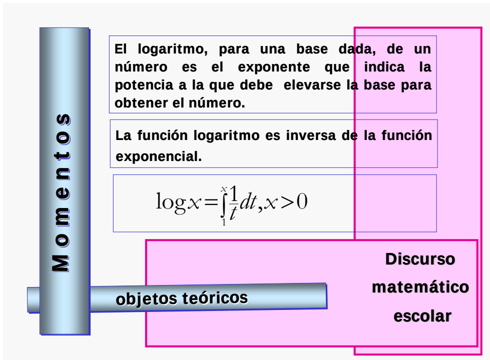
¿obsoletos elementos del primer momento?

Los libros de texto, en general, no rescatan argumentaciones geométricas respondiendo quizás a la pérdida de status de esta rama de la matemática en el discurso escolar. El argumento que prevalece en ellos es el de función inversa como relación entre las funciones exponencial y logarítmica lo cual inhibe verlas como funciones por sí mismas, diluyendo un poco su autonomía funcional. La exacerbada utilización de ejercicios en los que se propone explorar sus dotes como facilitadores de operaciones, en su condición de transformación, y como la primitiva de una integral, que nos deriva implícitamente a la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo, refuerza el pensamiento algorítmico empobreciendo y fraccionando su significado matemático.



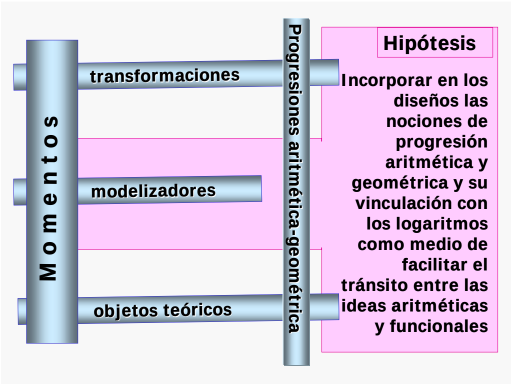
Ausencia de elementos propios del segundo momento

Consideramos entonces, que la "dislexia" en el aprendizaje de la noción logaritmo es producto de su enseñanza, de la priorización de una presentación axiomática y de una exacerbada algoritmización en los dos momentos en que aparece explícitamente en el discurso matemático escolar, esto es, en su primer



Predominio de elementos del tercer momento acercamiento como potente herramienta facilitadora de operaciones en los últimos semestres de bachillerato; y en su reaparición, semestres después en la enseñanza superior, como una función definida como la primitiva de la hipérbola equilátera, siendo requisito para ello conocer el Teorema Fundamental del Cálculo. La ausencia en el discurso matemático escolar de elementos que funjan como nexos entre ambos momentos da pauta de la no construcción, en el ámbito escolar, de esta noción y por ende, de la absoluta falta de significados en torno a ella que los alumnos pueden adquirir.

Nuestra visión del devenir de los logaritmos como objetos de saber nos lleva a proponer una hipótesis epistemológica, de construcción de conocimiento.



Esbozo de diseños a futuro

Producto de nuestra reflexión proponemos distintos elementos para incorporar a un diseño explotando a conciencia nuestros resultados del análisis preliminar. Sin embargo, desde nuestra perspectiva consideramos que son dos los elementos fundamentales a tener en cuenta a la hora de realizar el diseño: la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, por un lado; y el quiebre en el patrón de cuadraturas de las funciones potencia, por otro (Ferrari, 2001). Cabe señalar que, una ingeniería didáctica se diseña bajo objetivos específicos que atienden a ciertas circunstancias dadas, las que determinan las variable didácticas a elegir. Por tanto sólo hemos esbozado algunas posibles rutas a seguir con el ánimo de mostrar cómo utilizaríamos nuestros resultados en un posterior diseño. Queda entonces la tarea o quizás el desafío de realizar el diseño y su puesta en escena para continuar con las fases de la ingeniería didáctica, que como metodología hemos implementado en este trabajo, y para dar una respuesta científica a esta problemática que aporte elementos robustos al discurso matemático escolar de nuestros días.

Referencias bibliográficas

Confrey, J. (1996). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in mathematics education 26*(1), 66-86

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría. AES. DME Cinvestav-IPN.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav- IPN, México.

Sierspinska, A. (1992).On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico.* Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav- IPN. México.

La construcción de la derivada a través de la noción de variación en estudiantes de Nivel Superior

Javier Barrera Ángeles
UAEH. México
jbarrera@uaeh.reduaeh.mx

Resumen
Nuestro objetivo es analizar los procedimientos de cómo los estudiantes (nivel superior) construyen el concepto de derivada a través de la noción de variación. Esta noción constituye la línea directriz mediante la cual, se pretende construir uno de los conceptos más importantes del cálculo: la derivada (Dolores 1999). Podemos mencionar una serie de factores que propician los fracasos escolares. Sin embargo, consideramos que dos de los principales son: A) La pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar, y B) El uso del lenguaje convencional y el manejo de algoritmos sin un previo conocimiento de que se requieren ciertos esquemas para darle sentido al lenguaje simbólico y a las reglas de cálculo. Las actividades principales para la constitución de nuestro objetivo consiste en: 1) Revisión bibliografía.2) Entrevistas a profesores. 3) Entrevistas con estudiantes.

Objeto de estudio

Nuestro objetivo es analizar los procedimientos de cómo los estudiantes del nivel superior construyen el concepto de derivada a través de la noción de variación. La idea que nos guía para estudiar acerca de cómo la noción de variación permite al estudiante construir el concepto de derivada, es el hecho de que la variación constituye la línea directriz mediante la cual se pretende construir uno de los conceptos más importantes del cálculo: la derivada (Dolores, 1999).
Es conveniente precisar acerca del tipo de problemas que nos permiten observar sobre tales construcciones, por ejemplo, cuando el concepto de derivada es construido a través del concepto de pendiente, el tipo de problemas que se presentan al estudiante son tales que al interactuar el con el problema, se observan las evidencias acerca de tales construcciones (tal vez en esta parte exista con anticipación un procedimiento de solución). En este caso, el problema matemático presenta al estudiante un reto o dificultad que no tiene solución inmediata y que posibilita la búsqueda de procedimientos a partir de sus conocimientos previos. Nuestro propósito es contribuir a la discusión y planteamiento de preguntas sobre la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del cálculo.

Justificación

La enseñanza del cálculo es una de las tareas más difíciles para profesores de nivel superior. Dicha dificultad se manifiesta en un alto porcentaje de estudiantes que fracasan en aprender estos contenidos. Podemos mencionar un serie de aspectos que propician estos fracasos escolares, tal vez, unos más importantes que otros. Sin embargo, consideramos que uno de los aspectos que determinan dicho fracaso, es sin duda alguna la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar. En el caso de la enseñanza del cálculo, se prioriza sobre el manejo operativo de límites y reglas de derivación, sin considerar una gran variedad de situaciones que están vinculadas al concepto; solo por mencionar algunas, tenemos: la noción de límite, noción de función, noción de cambio, noción de variación y noción de aproximación. Por ejemplo, la aproximación está en el corazón de los grandes

problemas y de las técnicas del cálculo: aproximar números, funciones... (Cantoral & Reséndiz, 1997).
Además, existen otros elementos que explican el fracaso escolar. Por ejemplo, el desconocimiento por parte de los maestros, de esquemas de conocimiento previos que necesitan los estudiantes para poder comprender conceptos de cálculo. Es de esperarse que los maestros planteen a sus estudiantes problemas existentes en los textos tradicionales de cálculo, lo cual sólo permite una repetición de contenidos, estos a menudo son memorizados por los estudiantes. Otro factor, no menos importante es el uso del lenguaje convencional y el manejo de algoritmos sin un previo conocimiento de que se requieren ciertos esquemas para darle sentido al lenguaje simbólico y a las reglas de cálculo. Estos saberes, por llamarles de alguna manera, únicamente sirven en el contexto escolar y no pueden ser utilizados como herramientas con las cuales los estudiantes puedan resolver problemas de la vida cotidiana.
Autores como Dolores (Dolores, 1999) concluye que los cambios relativos se miden por medio de razones o cocientes entre cambios. Ésta es una de las ideas más importantes del cálculo diferencial, pues siempre que se estudia un fenómeno de variación lo importante no es sólo determinar los cambios, sino determinar que tan rápido cambia eso que cambia, y la mejor forma de averiguarlo es por medio de las razones entre los cambios.
Lo anterior justifica acerca de la construcción del concepto de la derivada a través de la noción de variación en estudiantes del nivel superior. Los productos de esta investigación pueden aportar elementos tanto a la didáctica de la matemática como a profesores de matemáticas, quienes harán uso de estos resultados para mejorar su práctica educativa.

Marco teórico

Nuestro estudio se fundamenta en los elementos teóricos que permiten una explicación clara y precisa de nuestro problema de investigación.
Para entender acerca del aprendizaje de conceptos es conveniente, primeramente definir al concepto como tal, es decir, a los conceptos se les define como objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo. En la formación de conceptos, los atributos de criterio del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, o a través de etapas sucesivas de la generación de hipótesis, la comprobación y la generalización. Por otra parte, existen procesos mediante los cuales los conceptos son asimilados por los estudiantes por ejemplo, los procesos preceptúales y los procesos cognoscitivos en el aprendizaje verbal significativo es particularmente difícil de definir porque en ambas clases de proceso hay interacción del estimulo verbal de entrada con la estructura cognoscitiva. Percibimos mensajes verbales y aprendemos cognoscitivamente sus significados al interpretarlos con base en el conocimiento existente. la diferencia entre los dos procesos es de inmediatez y complejidad. En la percepción hay un contenido inmediato de conciencia antes de la intervención de procesos cognoscitivos complejos como los del aprendizaje por recepción .
En la cognición, hay procesos como el de relacionar el material nuevo con los aspectos pertinentes de la estructura cognoscitiva, averiguar de qué manera el nuevo significado resultante puede reconciliarse con el conocimiento establecido, y decodificarlo en términos más familiares e indiosincráticos. En estas condiciones, el significado verbal resulta de

relacionar e incorporar materiales verbales potencialmente significativos con la estructura cognoscitiva existente. Los conceptos constituyen un aspecto importante de la teoría de la asimilación debido a que la comprensión y la resolución significativa de problemas dependen en gran parte de la disponibilidad en la estructura cognoscitiva del alumno tanto de conceptos supraordinados (en la adquisición inclusive de los conceptos) como de conceptos subordinados.

Como abstracciones los conceptos representan obviamente tan sólo una de las muchas maneras posibles de definir una clase y no disfrutan de existencia real en el mundo físico. En términos psicológicos, sin embargo, los conceptos son reales en el sentido de que: a) pueden ser adquiridos, percibidos, entendidos y manipulados como si disfrutaran de existencia independiente por su propio derecho, y b) son percibidos y comprendidos tanto denotativamente como en razón de sus funciones sintácticas, casi de la misma manera de una cultura a otra; por ejemplo, el término cultura es, en sí una abstracción (concepto) que no posee existencia independiente, sino que consiste meramente en actitudes modales.

El alumno deberá pasar por muchos de los mismos procesos de abstraer, diferenciar, generar y comprobar hipótesis, y generalizar, antes de que surja el significado nuevo. Una vez que se han adquirido, los conceptos ejecutan muchas funciones en el desempeño cognoscitivo. A la utilización cognoscitiva de los conceptos existentes la ejemplifica ese tipo de aprendizaje por recepción en que ejemplares menos evidentes de una clase genérica conocida deben ser identificados como tales (categorización cognitiva) y en qué conceptos, subconceptos y proposiciones nuevos y relacionados son adquiridos, asimilándolos en entidades preposicionales o conceptuales más inclusivas.

Es evidente que la distinción entre la adquisición y el empleo de conceptos es algo arbitraria, pues unas de las principales funciones de los conceptos existentes en la estructura cognoscitiva es facilitar la adquisición de conceptos nuevos, y más el caso de la asimilación de conceptos que en el de la formación de los mismos. La resolución de problemas, por un aparte, y la formación y el empleo de conceptos, por la otra, coinciden en muchos aspectos.

Por otra parte, Piaget (Piaget, 1998) en su Obra " *La equilibración de las estructuras cognitivas: problema central del desarrollo"* trata de explicar el desarrollo e incluso la formación de los conocimientos recurriendo a un proceso central de equilibración. Su actitud se centra en los problemas que hay que resolver son los de las diferentes formas de equilibrio, de la razón de los desequilibrios y sobre todo el mecanismo causal de las equilibraciones y reequilibraciones.

Según Piaget, los ciclos epistémicos y su funcionamiento se basan en dos procesos fundamentales que constituirán los componentes de todo equilibrio cognitivo: el primero, es la ***asimilación*** o incorporación de un elemento exterior (objeto, acontecimiento, etc) en un esquema censo -motor o conceptual del sujeto, el segundo proceso central que hay que invocar es el de la ***acomodación*** , es decir, la necesidad en que se encuentra la asimilación de tener en cuenta las particularidades propias de los elementos que hay que asimilar.

Metodología

Debido a la naturaleza de nuestra investigación, dividimos nuestras actividades en tres partes, las cuales son: 1) realizar un revisión adecuada en los textos de cálculo que existen en la biblioteca central de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. La selección de los textos se hizo de acuerdo a los siguientes criterios: a) la bibliografía que recomiendan los programas de estudio, b) la bibliografía que es más comercial en el mercado y de mayor demanda y c) la bibliografía que es recomendada por los profesores que imparten la materia de Matemáticas I (cálculo Diferencial e Integral). En estas revisiones , nos interesó identificar en los textos de cálculo acerca de los temas que anteceden al estudio del concepto de derivada. 2) Se seleccionaron a dos profesores que imparten dicha materia de cálculo en esta Universidad. Se fijó la fecha y el lugar de la filmación de dichas entrevistas, mismas que fueron realizadas en el espacio denominado Auto acceso, en esta parte los profesores presentaron un problema con el cual ellos introducen de alguna manera el concepto de derivada a sus estudiantes, esta presentación fue filmada para su análisis. Estas entrevistas tuvieron una duración de 45 minutos aproximadamente. y 3) la tercera etapa consistió en entrevistar a estudiantes de la Lic. en Sistemas Computaciones, quienes ya habían cursado la materia de Matemáticas I (cálculo diferencial e Integral). Fueron seleccionados de acuerdo a su disposición de colaborar en estos trabajos; se les comentó sobre el objetivo de la Investigación. Las entrevistas fueron realizadas en el mismo lugar, también fueron filmadas. En la entrevista a estudiantes se les planteó el problema el cual ellos debían de resolver, se les proporcionó el material adecuado para que hicieran sus anotaciones correspondientes. Se hizo un análisis de los planteamientos presentados por los profesores, así, como de los estudiantes.

Principales resultados

a) En este apartado presentamos en forma breve algunos de los aspectos más importantes en cuanto al contenido, según autores de “textos de cálculo”. Además, puntualizamos en el hecho de que algunas de las nociones del cálculo, como lo son: la noción de variación, la noción de cambio entre otras no están presentes en los contenidos de cálculo, como temas que antecedan al estudio del concepto de derivada.
Después de revisar la presentación de los contenidos en los diferentes textos, podemos decir que la tendencia en la presentación del concepto de derivada es la siguiente: números reales, tratamiento con funciones, teoría de límites y continuidad, derivada de funciones. Hemos observado que la noción de variación como una situación que permita o favorezca la presentación del concepto de derivada en los diferentes textos analizados esta ausente. Por otra parte, el concepto de límite predomina en los textos de cálculo como un tema que antecede al estudio del concepto de la derivada.
b) Dentro de las actividades que hemos considerado en nuestro trabajo, las presentaciones que los profesores han hecho sobre el concepto de la derivada, mediante algunas nociones, como lo son: la variación, las aproximaciones, pendientes entre otras, aporta una gran cantidad de elementos que nos servirán como argumentos explicativos acerca de como es que los estudiantes construyen el concepto de derivada a través de ciertas nociones. En esta parte rescatamos estos argumentos que los profesores utilizan en la presentación de el concepto de derivada con estudiantes del nivel superior. c) En la entrevista con el estudiante se le presentaron dos situaciones, en primer lugar se le planteó la función $y = -(1/3)\,x^2 + 2$. Se le pide al estudiante que dibuje la gráfica que corresponde a dicha función. Sin embargo, al parecer tiene cierta dificultad para hacerlo. Se le pregunta acerca del tipo de función, y responde “...... se trata de una ecuación lineal", "... si es lineal, porque esta en función de "x" y por lo tanto se tarta de una recta" . Al observar que la respuesta es incorrecta se le vuelve a preguntar acerca del tipo de función:

J : ¿ Estas seguro de que es lineal?
D: No, sería una parábola invertida.

En esta primera parte se intento básicamente que el estudiante reconociera la gráfica de la función $f(x) = -(1/3)\ x^2 + 2$. Así, como de ubicar algunas de sus características tales como: raíces ó puntos de intersecciones. Sin embargo, esto no fue del todo posible ya que en la mayoría de los casos, el alumno equivocaba las respuestas, cayendo en contradicciones y confusiones. En la segunda parte, se pretendía que el estudiante manipulara sobre la gráfica dibujada a la recta secante, a través de variar los valores de "x", induciendo de esta manera la construcción del concepto de derivada mediante variaciones sucesivas. Esto no fue posible debido a que el estudiante no logró identificar ciertos elementos básicos de cálculo.
La segunda situación que le fue presentada al estudiante consistió en el planteamiento de un problema dinámico.

J: ¿Qué fenómeno produce una piedra que se deja caer sobre un estanque de agua?
D: Se forman ondas circulares.
J: ¿Puedes dibujar el radio en cada caso?
D: Sí-
J: Dibuja las circunferencias en otro orden.
D: Sí.
J: ¿Puedes asignarle a cada circunferencia su radio, esto con números enteros.
D: R=1, R=2, R=3, R=4, R=5

Esta situación intentó que el estudiante visualizara que a través de la descripción de un fenómeno físico se pudiera estudiar las variaciones tanto del área como del perímetro de las circunferencias y a su vez que tan rápido se dan estas variaciones. El desarrollo de esta actividad con el estudiante, ha dejado en claro que mediante una visualización de este tipo el estudiante es capaz de construir de forma sencilla el concepto de derivada, haciendo uso de la noción de variación, como un elemento que le permite hacer observaciones más locales del fenómeno físico, así como el de poder medirlas y compararlas. El manejo del lenguaje en esta parte sin duda alguna tuvo mayor éxito, ya que a diferencia de la primera situación , en este caso tuvo menos dificultad para resolver las preguntas que se le plantearon.

Conclusiones

Después de haber realizado una serie de actividades, quisiera resaltar algunos de los puntos que considero son importantes; debido a que nos permiten comprender mejor los procesos de aprendizaje en estudiantes del nivel superior. En cuanto a la revisión de textos, es evidente que la secuencia en la presentación de temas es como sigue: acerca de los números, funciones , limites y continuidad, antes de abordar el estudio del concepto de la derivada, en donde los autores priorizan en la mayoría de los casos acerca de el desarrollo de algoritmos mediante la aplicación de una serie de reglas para ello. Por su parte, los profesores intentan hacer variantes sobre los problemas que presentan a estudiantes en el estudio del concepto de la derivada. Han incorporado cierto tipo de problemas, los cuales describen un determinado fenómeno físico y, mediante las comparaciones de cambios .
Como lo hemos mencionado al principio, nuestro trabajo se ha centrado básicamente en estudiar los procesos mediante los cuales los estudiantes construyen un determinado

concepto, de igual manera nos interesa observar el tipo de estrategias o recursos de los cuales ellos se valen para resolver dichos problemas. En nuestro trabajo con estudiantes hemos presentado dos situaciones A Y B. En la situación A, presentamos al estudiante la siguiente función: **$f(x) = -(2/3)x^2 + 2$**. Sin embargo, esta situación fue complicada para él, en tanto que no fue capaz de reconocer los elementos básicos de la función, tales como intersecciones con los ejes, entre otros. Se pretendía trabajar con la idea de dibujar la recta secante sobre la grafica de dicha función, pero esto no fue posible, debido a que cuando se le pregunto al estudiante acerca de términos tales como pendiente, inclinación, entre otros, el estudiante no fue capaz de reconocerlas en ese momento.

En la situación B, presentamos al estudiante un problema dinámico (dejar caer una piedra en el estanque) con este problema intentamos observar mediante la variación de parámetros, tales como el radio, los procedimientos que el estudiante usa para resolver un problema (construir el concepto de derivada, mediante la noción de variación). En esta parte, lo primero que el estudiante hace es dibujar círculos concéntricos como resultado de la pregunta que se le hizo, además, los dibuja en forma creciente asignándoles un radio determinado, esto es $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 4$ y $r_5 = 5$, de esta manera pudo obtener ciertos valores para el área y el perímetro, los cuales dibujo en el plano (A - r) y (P - r). Al preguntarle sobre como se comporta el crecimiento, el comentó que el perímetro de la circunferencia crece linealmente y el área de lo hace en forma parabólica. Hemos observado que sus gráficas las realiza con base a la visualización física del fenómeno (ondas que se producen al impactarse la piedra con el agua). Se le pide dibujar una recta secante sobre la gráfica que determina el crecimiento del área en la cual ubica dos puntos sobre las intersecciones (A y B) , aproxima el punto B hacia el punto A, dibujando varias secantes que indican gráficamente esas aproximaciones cuando el radio varía es decir decrece. Escribe la relación $p = (p_2 - p_1)/(r_2 - r_1)$ y dándole valores a P y r va obteniendo diferentes valores cada vez más cercanos a 2, esto le permite decir que al variar el radio hacia un punto determinado cada vez más rápido se obtiene la rapidez con que cambia la velocidad de crecimiento del área de la circunferencia en ese punto A , y que además será diferente ese cambio para valores del radio diferentes.

Estas ideas nos permiten conocer o ubicar que hay diferentes velocidades de variación de una variable atribuida a una misma figura, pueden configurar la idea de que la variación esta asociada con la rapidez mental con que se establecen sus cambios.

Referencias bibliográficas

Ausubel. D, & all. (1987). Psicología Educativa. Un punto de vista Cognoscitivo. 2a edición. México: Trillas

Boyer, C. (1986). Historia de las matemáticas. España: Alianza Universidad Textos.

Cantoral, R. y Reséndiz , E.(1997). Aproximaciones sucesivas y sucesiones . (2a Edición). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cordero, F. (1998). "*El comportamiento tendencial de las funciones" como una categoría del conocimiento del cálculo.* México: Serie Antologías No 2.

De León, H. (1998). "*Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto*". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. (No2, p 6-7)

Dolores, C. (1999). Una introducción a la derivada a través de la variación. (Ia edición). México. Grupo Editorial Iberoamericana.

Piaget, J. (1998). La equilibración de las estructuras cognitivas problema central del desarrollo. (5a edición). México. Siglo veintiuno editores.

Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales

Crisólogo Dolores, Luis A. Guerrero, Mario Martínez, Madeleine Medina
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Universidad Autónoma de Guerrero. CONACYT-Proy. 2640-S, México
cdolores@uagro.mx slaguerreromx@yahoo.com m_castillo@hotmail.com mariomartinez02@hotmail.com

Resumen
En este artículo se reportan los resultados de una investigación que explora el estado del pensamiento y lenguaje variacional relativo al comportamiento de funciones en estudiantes de bachillerato y de licenciatura. Para tal fin se diseñó un cuestionario en el que se utilizan los sistemas de representación verbal, gráfico y analítico. En especial se exploraron concepciones relativas al: signo de funciones [*v. gr*: Dónde: $f(x) > 0$], su comportamiento variacional [*v. gr*: Para qué x, $f'(x) > 0$], su comportamiento variacional y su signo simultáneamente [*v. gr*: Para qué x se cumple que: $f'(x) > 0$ y $f(x) < 0$] y las que requieren de procesos de reversibilidad: [*v. gr*: dada la gráfica de $f(x)$ esbozar $f'(x)$ y viceversa]. Los resultados indican que una cantidad significativa de estudiantes, *creen* que $f(x) < 0$ si su gráfica está en el semieje negativo de las x; consideran a $f'(x)$ como asociada a un punto y no al comportamiento de $f(x)$; casi no establecen procesos de reversibilidad entre las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$.

Plantemiento del problema

Varios trabajos de investigación (Dolores C. 1996; Dolores C. 1998; Cáceres T. 1997) muestran que en situación escolar, el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes universitarios y preuniversitarios es muy deficiente. En el marco de este problema global adoptamos el problema específico de cómo se manifiestan esas deficiencias en el análisis del comportamiento de funciones elementales.

Objetivo de la investigación

Elaborar un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales en estudiantes de bachillerato y licenciatura.

Elementos teóricos básicos

De acuerdo con el Dr. Cantoral, el pensamiento variacional es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por el otro. Implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio. Los rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios; región donde la función es: positiva, negativa o nula. Estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica, analítica, etc. y se constituyen en los medios que adoptamos para explorar concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento de funciones.
Las posiciones teóricas utilizadas en este trabajo acerca las representaciones semióticas, fueron adoptadas de las ideas de R. Duval, él plantea que es mediante la movilidad entre los diferentes sistemas de representación que un estudiante tendrá mayor probabilidad de éxito en su aprendizaje, en el entendido que los sistemas de representación pueden ser numéricos, gráficos, algebraicos, analíticos, pictóricos y verbales. Los sistemas de representación

juegan el papel de mediatizadores del conocimiento en la actividad matemática, a través de ellos las representaciones mentales se exteriorizan para fines de comunicación y son al mismo tiempo esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento ya que a su vez las representaciones mentales dependen de la interiorización de las representaciones semióticas.

Metodología

Se diseño, validó y aplicó el cuestionario de exploración de manera que permitiera explorar las ideas que, acerca del comportamiento variacional de las funciones, tienen los estudiantes del nivel medio superior y superior. Las preguntas del cuestionario, 10 en total, se diseñaron sobre la base de tres criterios: dado un enunciado verbal escrito esbozar o seleccionar la gráfica que le corresponde, dadas las condiciones analíticas esbozar o seleccionar la gráfica que la satisface, dada la gráfica de $f'(x)$ esbozar la de $f(x)$, y viceversa. En el Cuadro 1 se resume esta información.

CUADRO 1

PREGUNTAS	TRANSICIÓN	DADA LA CONDICIÓN VARIACIONAL EN FORMA:
1, 4	Verbal-gráfico	verbal de la función, seleccionar su gráfica
2, 3	Analítico-gráfico	analítica de $f'(x)$, seleccionar la gráfica de $f(x)$
9		analítica de $f'(x)$, esbozar la gráfica de $f(x)$
5, 6		analítica de $f'(x)$ y de $f(x)$, seleccionar su gráfica
7		gráfica de $f(x)$, esbozar la gráfica de $f'(x)$
8		gráfica de $f'(x)$, esbozar gráfica de $f(x)$
10	Verbal-gráfico	verbal, esbozar la gráfica de la $f(a)$ dada la de $f'(a)$
	Verbal-analítico	verbal, dar la fórmula de la función correspondiente

La exploración se llevó a cabo en tres instituciones educativas del Estado de Hidalgo, una del nivel medio superior [Colegio de Bachilleres (COBAEH)] y dos más de nivel superior. Participaron 136 estudiantes de licenciatura, 110 del 1er. semestre de la carrera de Ingeniería Industrial [Instituto Tecnológico Superior de Huichapan (ITESHU)], 26 de licenciatura en Biología [Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH)] y 40 estudiantes de bachillerato que cursaban el 5º. semestre. A continuación se presentan las preguntas y un análisis cualitativo de las respuestas dadas, las gráficas correspondientes a las preguntas, en los casos en que éstas fueron dadas, aparecen en el Cuadro 2.

Discusión acerca de las respuestas dadas por los estudiantes

Pregunta 1. Selecciona la gráfica (ver Cuadro 2) que corresponde a una función siempre positiva.

La gran mayoría de los estudiantes de licenciatura (el 85% en promedio) seleccionaron los incisos a) o d), en una institución casi el total optó por el inciso a). El 68% de los bachilleres optaron por el inciso a) y el 33% por el inciso d). También fueron seleccionados, aunque con menor frecuencia (promedio del 20%), los incisos c) y e) por estudiantes de licenciatura. Según los estudiantes, si la gráfica es positiva pero además creciente, entonces satisface la condición requerida, en cambio si es positiva pero decreciente entonces no la satisface; para los estudiantes positividad y crecimiento parecen ser condiciones concomitantes, esto se funda en el hecho de que sólo una cantidad inferior 30% eligieron el inciso c) en el caso de los universitarios, en el caso de los preuniversitarios la eligieron sólo el 3%. Los bachilleres probablemente consideran que la gráfica de la función en la opción d) no es positiva ya que parte de ella está en el semieje x negativo.

Pregunta 2. A continuación aparecen las gráficas de $h(x)$ en una vecindad de x_0. (Ver Cuadro 2) Señale las gráficas en las cuales se cumple que: $h'(x_0) = 0$

La mayoría de los estudiantes (el 92% y 69 % de los estudiantes de las dos instituciones de nivel superior y el 65% en los bachilleres) seleccionaron la opción a). Alrededor del 37% en los de licenciatura y 15 % de los bachilleres seleccionaron el inciso d). La condición: $h(x) = 0$, ocurre en las gráficas de los incisos a) y d), en la primera: $h(0) = 0$ (la gráfica corta al eje x en el origen) y en la segunda: $h(x_0) = 0$ (la gráfica corta al eje x en $x = x_0$). Los estudiantes asociaron la condición: $h'(x_0) = 0$, con: $h(x_0) = 0$, considerándolas quizá como equivalentes. No distinguen que el punto: $(x_0 , h(x_0))$, con $h(x_0) = 0$, indica que la curva *corta* al el eje x, y que la expresión: $h'(x_0) = 0$, indica que la función $h(x)$ se comporta de manera que en $(x_0, h(x_0))$ tiene un punto estacionario, la primera condición implica ubicación de un punto en la plano y la segunda implica comportamiento variacional de la función en ese mismo punto. Esto más marcado en los estudiantes de bachillerato.

Pregunta 3. A partir de las siguientes gráficas (ver Cuadro 2) diga para qué: $f(x)$, se cumple que: $f'(x) < 0$, para toda x.

Alrededor de las tres cuartas partes de los estudiantes de licenciatura eligieron los incisos b) y c), del mismo modo lo hicieron un poco menos de la mitad de los de bachillerato. Nótese que en ambas gráficas se cumple que $f(x)<0$. De aquí se infiere que para la mayoría de los estudiantes, es cierto que: $f'(x)<0$, si la gráfica de $f(x)$ satisface la condición de que: $f(x)<0$.

Pregunta 4. Elija las gráficas (ver Cuadro 2) de funciones que son crecientes y negativas.

Los estudiantes de licenciatura eligieron mayoritariamente los incisos b) o e), la selección de éste último fue hecho por el 86% y del primero el 43%, lo mismo hicieron aproximadamente la mitad de los estudiantes de bachillerato. La gráfica del segundo inciso satisface plenamente la condición requerida no así la del primero, pues si bien es cierto que es creciente, sólo es negativa para $x < 0$. Esta última respuesta nos hace suponer que los estudiantes tienen problemas en la toma de decisiones simultáneas, es decir cuando se trata de decidir acerca de dos propiedades a la vez (nótese que en el enunciado estas propiedades están conectadas por la conjunción: *y*); esto también puede deberse a una escasa interpretación de estos conectores lógicos en la proposición.

Pregunta 5. ¿ Si $y = f(x)$, en qué gráficas (ver cuadro 2) se cumple que: $\frac{dy}{dx} > 0$ y $y < 0$?

Esta pregunta explora las mismas ideas variacionales que la anterior, solo que aquí las propiedades se dan en forma analítica. Aquí las respuestas son muy dispersas, pero es notorio que la mitad de estudiantes de licenciatura eligen las opciones b) o c) (menos que en la pregunta anterior), lo mismo hace casi la tercera parte de los del bachillerato. La mayoría de estudiantes de bachillerato parecen no asociar el significado de crecimiento a la expresión: $dy/dx>0$, mas complicaciones afloran al decidir considerando las dos propiedades simultáneamente. Parece que los estudiantes privilegiaron la condición de que: $y < 0$, pues se cumple en las opciones b) y c).

Pregunta 6. ¿Si $y = f(x)$, en qué gráficas (ver Cuadro 2) se cumple que: $\frac{dy}{dx} < 0$ y $y > 0$?

Esta pregunta explora cuestiones similares a la anterior, también se dan en ella las condiciones en formas analítica. De las opciones dadas sólo la del inciso d) la satisface. La mitad de los estudiantes de licenciatura seleccionaron las opciones a) o d), aunque también hay mucha dispersión en las respuestas, lo mismo hicieron los del bachillerato aunque en una cantidad menor al 50 %. Nótese que en las gráficas de los inciso a) y d) se cumple que $y > 0$, esta condición parece pesar más en la decisión de los estudiantes. Estas respuestas pueden indicar que los estudiantes consideran que: si $f(x) > 0$, entonces $dy/dx > 0$, o quizá no asocian significado alguno gráfico a la condición: $dy/dx > 0$.

Pregunta 7. Para la gráfica siguiente (ver Cuadro 2) esboce la gráfica de $f'(x)$.
Más de la mitad de los bachilleres presentan una gráfica en forma de parábola que es la reflexión de la curva dada tomando como eje de reflexión al eje de las *x*. Cerca de la tercera parte de estudiantes de licenciatura relacionan al punto máximo con el cero de la función derivada, sin embargo no parecen relacionar crecimiento o decrecimiento con $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ respectivamente, otra tercera parte de este nivel relacionan satisfactoriamente estas propiedades. En los bachilleres estas relaciones parecen estar ausentes.

Pregunta 8. Esboce la gráfica de $f(x)$ cuya derivada en torno de $x = a$ se comporta de acuerdo a la gráfica siguiente (ver Cuadro 2).
Solamente la cuarta parte los estudiantes de una institución superior intentan asociar a las tangentes con la derivada pero no logran establecer las relaciones de: Si $f'(x) < 0$ entonces $f(x)$ es decreciente; si $f'(x) > 0$ entonces $f(x)$ es creciente y si $f'(x_0) = 0$ entonces $f(x)$ tiene punto estacionario en: $x = x_0$. Tal vez es difícil pare ellos establecer un proceso de relación inversa entre $f(x)$ y $f'(x)$. Otros estudiantes dibujan una *curva paralela* a la dada que pasa por el origen pero más prolongada, la tercera parte de los bachilleres insisten en presentar el esbozo de una gráfica como una reflexión de la curva dada. Solamente el 19% de los estudiantes de la UAEH dan una gráfica aceptable.

Pregunta 9. Trace la gráfica de $f(x)$, sí: tiene puntos estacionarios en $x = 1$ y $x = 3$; $f'(x) > 0$ para $x < 1$, $f'(x) < 0$ en el intervalo: $1 < x < 3$ y $f'(x) > 0$ para $x > 3$.

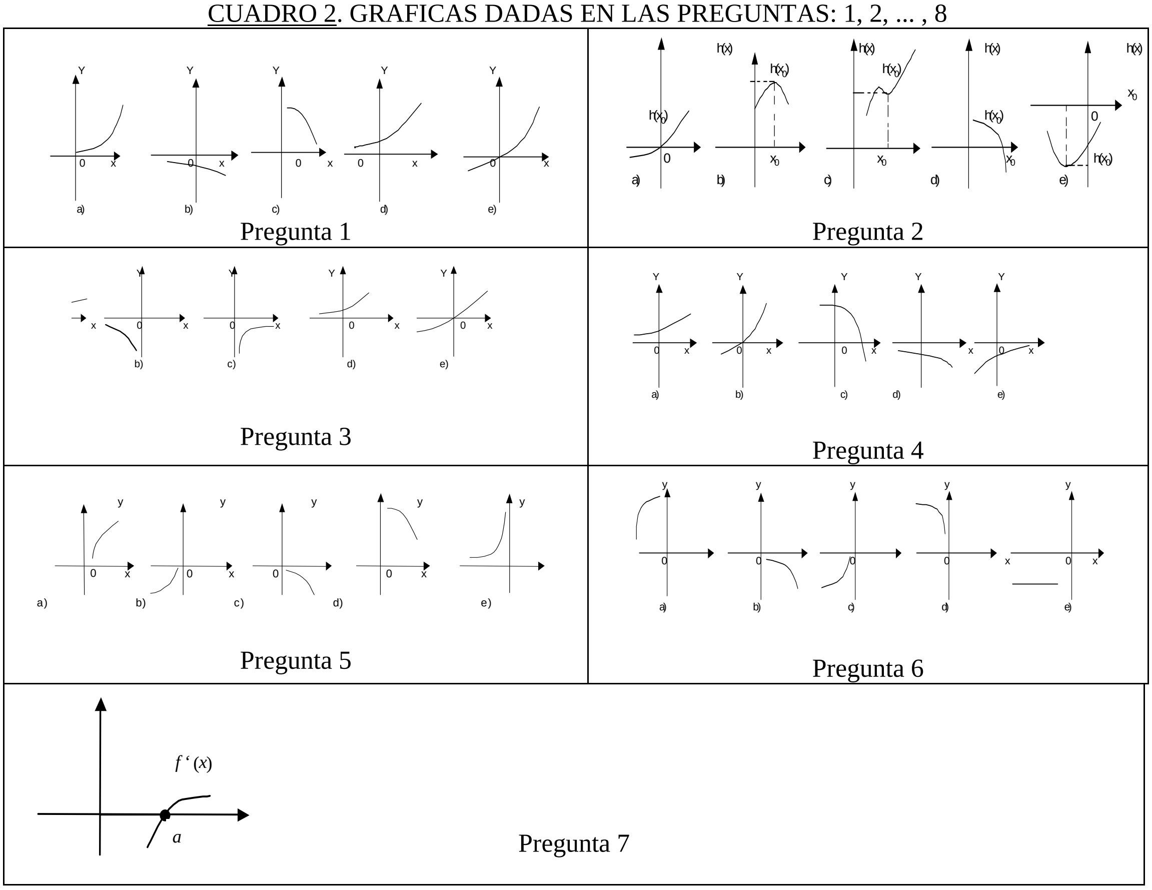
Las producciones (gráficas) de los estudiantes indican que, como en la pregunta 2, confunden los puntos estacionarios con los puntos de intersección de la gráfica de $f(x)$ con el eje de las *x*. La mayor parte no esbozo gráfica alguna.

Pregunta 10. Construya una función polinómica que tenga máximo en $x = 1$ y mínimo en $x = -1$
Se esperaban producciones en forma analítica, los estudiantes sólo presentaron gráficas y las dieron un poco menos de la mitad de los participantes. Alrededor de la tercera parte de los de licenciatura presentaron una curva que satisfacía las condiciones, también los hicieron así menos de la tercera parte de los bachilleres. Algunos de estudiantes de licenciatura presentaron una curva asintótica, incluso algunos bachilleres presentaron curvas con las condiciones invertidas a las dadas.

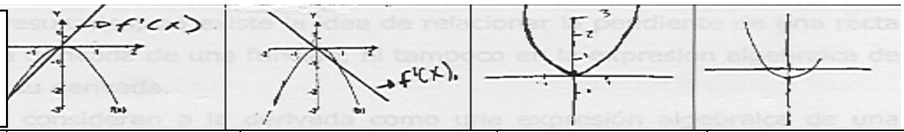
Conclusiones generales
Para la mayoría de los estudiantes la gráfica de una función es positiva si está ubicada en el primer cuadrante y además creciente; para ellos, positividad y crecimiento parecen ser condiciones concomitantes (pregunta 1) hay evidencia para pensar que también lo son las propiedades de negatividad y decrecimiento; algo análogo ocurre con las respuestas a la

pregunta 3, pues en ella se nota que para los estudiantes es cierto que: $f'(x)<0$, si en la gráfica de $f(x)$ se cumple que: $f(x)<0$. También una gran mayoría de estudiantes consideran que: $h'(x_0) = 0$, y $h(x_0) = 0$, tienen significados equivalentes; no parecen distinguir que la primera es una condición variacional de $h(x)$ en $x = x_0$, y la segunda indica posición de un punto en el plano, el punto donde la curva *corta* al el eje x y por tanto ahí $h(x_0) = 0$.
La mayoría de estudiantes identifican gráficas con propiedades variacionales (creciente y negativa) dadas en forma verbal escrita, aunque se nota que en muchos todavía pesa el lastre de las decisiones simultáneas, pesa más en ellos la condición de crecimiento. Cuando estas mismas condiciones son dadas en forma analítica, lenguaje matemático variacional, la cantidad de respuestas correctas disminuye notablemente (menos del 50% dan estas respuestas), en estas condiciones los estudiantes privilegian la condición $f(x)< 0$ ó $f(x)> 0$ por encima de $f'(x)< 0$ ó $f'(x)> 0$, incluso suponemos que a éstas últimas no les confieren significado variacional. En cuanto a los procesos de reversibilidad [dada la gráfica de $f'(x)$ esbozar la de $f(x)$], en donde se tiene que utilizar sistemáticamente todas las propiedades variacionales, los estudiantes muestran muchas deficiencias, menos de un tercio parecen establecer alguna relación de este tipo. Existen dificultades mayores en la transición del lenguaje matemático variacional (analítico) al gráfico, al parecer es más fácil traducir al lenguaje gráfico los términos crecimiento, decrecimiento, puntos máximos o mínimos que el lenguaje: $f'(x)< 0$, $f'(x)> 0$ o $f'(x) = 0$ a las representaciones gráficas.

CUADRO 2. GRAFICAS DADAS EN LAS PREGUNTAS: 1, 2, ... , 8

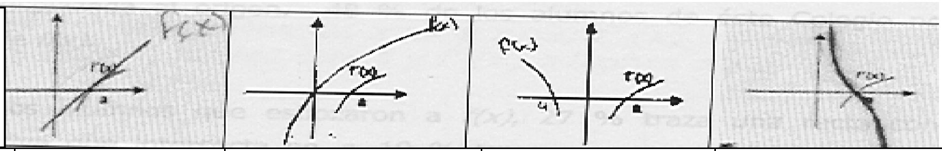


CUADRO 3.
PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES
PREGUNTA 7



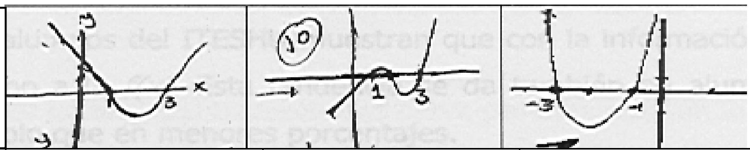
ITESHU	26%	32%	13%	5%
UAE	54%	31%	8%	5%
COBAE	0%	0%	55%	5%

CUADRO 4.
PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES
PREGUNTA 8



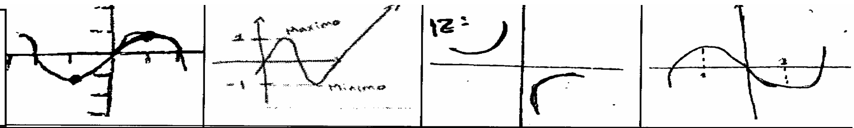
ITESHU	25%	17%	8%	4%
UAE	0%	8%	0%	0%
COBAE	0%	2.5%	33%	5%

CUADRO 5.
PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES
PREGUNTA 9



ITESHU	20%	7%	0%
UAE	19%	8%	50%
COBAE	5%	3%	0%

CUADRO 6.
PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES
PREGUNTA 10



ITESHU	19%	10%	7%	0%
UAE	35%	0%	0%	23%
COBAE	30%	0%	0%	15%

Referencias bibliográficas

Cáceres, T. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional. Un estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN, México D. F.

Cantoral, R (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional.* Seminario de Investigación, Área Educación Superior, Cinvestav /IPN México D. F.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis Doctoral. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro.

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes en sus cursos de Cálculo Diferencial. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Pp. 257-272. México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* pp. 173-201. México: Grupo Editorial Iberomérica.

Principios, estrategias y programas heurísticos en la enseñanza del cálculo

Guillermina Emilia Vosahlo
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
guillermina.vosahlo@voila.fr

Resumen
En todas las áreas del currículo los alumnos se enfrentan a problemas, que requieren tanto de la activación de conocimientos específicos, como del dominio de técnicas y estrategias.
La enseñanza de la solución de problemas requiere enseñar e instruir en el uso de procedimientos eficaces. Esto implica introducir como contenidos educativos las destrezas y estrategias propias de cada área.
La enseñanza de principios, estrategias y programas heurísticos puede ayudar a los alumnos a actuar estratégicamente, pues al disponer de recursos alternativos, podrán seleccionar los que consideren óptimos para cada caso. Por este motivo, el objetivo de este trabajo es presentar algunos ejemplos de aplicación de principios, estrategias y programas heurísticos en la asignatura Cálculo, los que pueden ser utilizados para instruir a los alumnos acerca de las herramientas con las que pueden contar para resolver problemas.

Introducción

En las diversas áreas del currículo los alumnos se enfrentan a problemas de distinta naturaleza, que requieren tanto de la activación de conocimientos factuales y conceptuales específicos, como del dominio de técnicas y estrategias (Pozo, 1994).
La solución de problemas tiene un carácter esencialmente procedimental, ya que requiere que los alumnos pongan en marcha una secuencia de pasos de acuerdo con un plan preconcebido y dirigido al logro de una meta (Pozo, 1994). Los procedimientos que permiten resolver problemas y que se pueden describir en forma independiente del contenido reciben el nombre de *procedimientos heurísticos* y el conjunto de procedimientos heurísticos ordenados se llama *programa heurístico*.
Los procedimientos heurísticos se pueden clasificar en principios, reglas y estrategias. Los principios heurísticos permiten la búsqueda de nuevos conocimientos y su fundamentación. Las reglas heurísticas pueden darse como indicaciones o preguntas y si se trabaja sistemáticamente con ellas el alumno llega a adquirir una forma de trabajo que le permite resolver problemas de manera independiente. Las estrategias heurísticas constituyen el método principal para buscar los medios matemáticos que permiten resolver un problema.
La enseñanza de la solución de problemas requiere enseñar e instruir en el uso de procedimientos eficaces. Esto implica introducir como contenidos educativos las destrezas y estrategias propias de cada área (Pozo, 1994). La *instrucción heurística* es la enseñanza consciente y planificada de reglas para la solución de problemas, las que son declaradas de modo claro, ejercitándolas en numerosas y variadas tareas hasta que los alumnos las aprendan y usen en forma independiente y generalizada.
Este trabajo, que es una propuesta teórica, tiene por objetivo presentar algunos ejemplos de aplicación de principios, estrategias y programas heurísticos en la asignatura Cálculo, con la intención de que orienten a los docentes de matemática en el diseño de una clase destinada a instruir a los alumnos acerca del uso de estas herramientas para resolver problemas. Se espera que la enseñanza de esta gran variedad de recursos les facilite a los alumnos actuar estratégicamente, ya que para que un sujeto pueda poner en marcha una estrategia debe disponer de recursos alternativos, entre los cuales pueda seleccionar los que considere óptimos, en función de las demandas de la tarea.

Principios heurísticos

- **Principio de analogía**: Consiste en la utilización de semejanzas de contenido o forma.

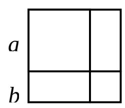
Como un factor heurístico positivo puede ayudar en tres direcciones:

1. **Se puede aplicar para que los alumnos descubran una proposición nueva para ellos, y la formulen**.
   Ejemplo: Conociendo las reglas de derivación de un cociente y de las funciones trigonométricas seno y coseno se puede deducir la regla de derivación de la función tangente. Luego, por analogía, los alumnos pueden deducir y formular la regla de derivación de las restantes funciones trigonométricas.
2. **Puede sugerir la vía para la resolución de un problema, de un ejercicio**.
3. **Puede sugerir el método y el procedimiento para la demostración de una proposición nueva**.
   Ejemplo: Si se conoce la demostración para el límite de una suma (igual a la suma de los límites, cuando ambos existen), se puede demostrar en forma análoga la del límite de una diferencia (igual a la diferencia de los límites, cuando ambos existen).

- **Principio de reducción**: Se puede usar de cuatro formas diferentes. Ellas son:

1. **La reducción de un problema a problemas ya resueltos**.
   Ejemplo: El método de sustitución en la resolución de integrales.
   $\int x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx = 1/3. \int \operatorname{sen} u\, du = -1/3. \cos u + C = -1/3. \cos x^3 + C$.
   Al hacer la sustitución $x^3 = u$, se obtiene la integral de la función seno, que ya es conocida.
2. **La recursión**: consiste en transformar lo desconocido acudiendo a lo conocido.
   Ejemplo: Sea f una función tal que: $f(n)=0$ si la cifra de las unidades es 4 y $f(a.b)= f(a)+f(b)$. Calcule $f(1988)$.
   $1988= 2 . 994 \Rightarrow f(1988) = f(2) + f(994)$.
   Pero $f(994) = 0$ porque la cifra de las unidades es 4. Por lo tanto, $f(1988) = f(2)$.
   Por otra parte, $4 =2.2 \Rightarrow f(4) = f(2) + f(2) = 2f(2)$. Pero al ser $f(4) = 0$, entonces $f(2) =0$.
   En conclusión, $f(1988) = 0$.
3. **En la demostración de teoremas**: se presenta cuando en la demostración de teoremas, aplicando un método de demostración cualquiera, se realiza una reducción del problema dado a problemas parciales o a otros problemas, de manera que la resolución de éstos resulte conocida o menos difícil que la del problema de partida.
   Ejemplo: Demuestre que si $f(x) = a^x$, entonces $f´(x)= a^x.\ln a$, $a>0$, $a\neq 1$.

   Se puede expresar la función de la siguiente forma: $f(x) = e^{\ln a^x} = e^{x.\ln a}$. Si ya se conoce la regla de la cadena y la derivada de la función exponencial con base e se obtiene:
   $$f´(x)= e^{x.\ln a} \ln a = a^x.\ln a$$
4. **La modelación**: Es otra forma de reducción, que consiste en buscar una interpretación (un modelo) del problema dado, en otro dominio, con el fin de poder aplicar las leyes del nuevo dominio a la resolución del problema transformado y, realizando la transformación inversa del modelo llegar a la resolución del problema de partida.
   Ejemplo: Deduzca la expresión para el cuadrado de una suma.
   Solución:



Se identifica *a+b* con el lado del cuadrado grande, *b* con el lado del cuadrado pequeño y *a* con el lado del restante cuadrado. El área del cuadrado grande es igual a la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños y dos veces el área del rectángulo de lados *a* y *b*. Entonces: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- **Principio de generalización**

Permite obtener suposiciones para un conjunto de objetos, fenómenos o relaciones, a partir del análisis de un caso especial o particular. Como se procede de forma inductiva, luego se debe probar la validez de las suposiciones así obtenidas.

Ejemplo: La regla de derivación de una potencia se puede probar por inducción para los exponentes enteros no nulos (se prueba por separado para positivos y negativos).

Luego, cuando ya se conoce la regla de derivación de las funciones inversas, se puede probar que también vale esta regla para exponentes del tipo 1/n, con $n \in Z-\{0\}$. Esto se hace de la siguiente forma: $y = x^{1/n} \Rightarrow x = y^n = g^{-1}(y) \Rightarrow (g^{-1})´(y)=ny^{n-1}$, por la validez de la regla para exponente entero. Por el teorema de derivación de funciones inversas se obtiene

$$f´(x) = 1/(g^{-1})´(y) = 1/(ny^{n-1}) = 1/[n(x^{1/n})^{n-1}] = (1/n)x^{1/n-1},$$

con lo cual queda demostrado para exponentes fraccionarios, con numerador 1.

Luego, conociendo la regla de la cadena, se puede generalizar para exponentes fraccionarios con cualquier numerador y denominador, puesto que $f(x)= x^{n/m} =(x^n)^{1/m}$, $n,m \in Z-\{0\}$. Usando la regla de la cadena se obtiene: $f´(x)=(1/m)(x^n)^{1/m-1}.nx^{n-1}=(n/m)x^{n/m-1}$, con lo cual queda demostrado que la regla también vale para cualquier exponente racional.

- **Principio de movilidad**

Consiste en suponer que en figuras o cuerpos geométricos un elemento es movible y, a partir de ello, analizar los cambios que se producen, con el objetivo de encontrar relaciones y formular las suposiciones correspondientes.

Ejemplo: En la deducción de la relación aproximada entre diferencial e incremento de la función al pasar de un punto de abscisa x=a a otro de $x=a+\Delta x$, considerando que nos desplazamos sobre la curva, acercándonos y alejándonos del punto de abscisa x=a (o sea, aumentando y disminuyendo Δx), analizamos que la fórmula aproximada $\Delta f = f(a+\Delta x)-f(a)= f´(a).\Delta x$ funciona bien en las proximidades de x=a, pero generalmente cometemos mucho error cuando nos alejamos considerablemente del punto con dicha abscisa.

- **Principio de consideración de casos especiales y casos límite**

Es útil para establecer relaciones entre los conocimientos nuevos y los ya adquiridos, y permite también, a partir de dichas consideraciones, llegar a obtener nuevos conocimientos.

Ejemplo: Cuando se calcula la superficie de una elipse, que es igual a πab (donde a y b son las longitudes de los semiejes), se puede comparar con la superficie ya conocida del círculo. Sabiendo que la circunferencia es un caso límite de elipse donde a =b =r, entonces $\pi ab=\pi r^2$. Se ve entonces la validez de la expresión del área de la elipse en el caso límite del círculo.

Estrategias heurísticas

1. **Trabajo hacia adelante o método sintético**: se caracteriza por partir de los datos y deducir de ellos lo que se busca, pasando por una serie de pasos intermedios, apoyándose en los conocimientos que se tienen, de manera que se obtenga la cadena de inferencias que constituye la solución. La estrategia consiste en buscar los objetivos

parciales o resultados intermedios que se pueden alcanzar partiendo de las condiciones previas o elementos dados.

Ejemplo: Demuestre que $\forall a,b \in R$, $a<b \Rightarrow a<(a+b)/2<b$.

Partiendo de la hipótesis a<b y sumando a en ambos miembros: 2a < a+b

Multiplicando ambos miembros por el inverso de 2, se obtiene: a <(a+b)/2. (1)

Para probar la segunda desigualdad, mirando la tesis, se nota que es necesario sumar b.

Partiendo de la hipótesis y sumando b en ambos miembros: a+b < 2b.

Multiplicando ambos miembros por el inverso de 2, se obtiene: (a+b)/2<b. (2)

De (1) y (2): a < (a+b)/2 <b.

2. **Trabajo hacia atrás o análisis creciente**: se caracteriza por el examen previo de lo que se busca, suponiendo que los datos son verdaderos. El análisis empieza, por lo tanto, por lo que se busca, estableciendo relaciones entre los datos y las exigencias del problema. Consiste en partir del objetivo final o resultado y analizar los objetivos parciales o los resultados intermedios que habría que plantearse.

   Ejemplo 1: en el ejercicio antes resuelto, se puede partir de la tesis $a<(a+b)/2 \wedge (a+b)/2<b$, para ver cuáles son los pasos intermedios que habría que realizar desde la hipótesis.

   $a<(a+b)/2 \wedge (a+b)/2<b \Rightarrow 2a <a+b \wedge a+b<2b$ (multiplicando ambos miembros por 2)

   $\Rightarrow a <b \wedge a<b$ por cancelativa de la suma, se llegó a la hipótesis.

   Volviendo de atrás para adelante, se ve que se debe usar la consistencia de la suma, y en el paso siguiente se debe multiplicar por el inverso de 2.

   En este ejercicio la dificultad es la misma usando cualquiera de los métodos, pero en el siguiente ejemplo, que se resolverá mediante trabajo hacia atrás, es difícil darse cuenta directamente de los pasos que hay que realizar en el trabajo hacia adelante.

   Ejemplo 2: Demuestre que dados dos números reales positivos distintos, la media geométrica de los números es siempre menor que la media aritmética.

   Como los números son distintos, uno de ellos debe ser menor que el otro, entonces se puede expresar la propiedad en símbolos de la siguiente manera:

   $\forall a, b \in R^+, a < b \Rightarrow \sqrt{ab} < (a + b)/2$

   Partiendo de la tesis

   $\sqrt{ab} < (a + b)/2 \Rightarrow 2\sqrt{ab} < a + b$, por consistencia del producto

   $\Rightarrow 4ab < (a+b)^2$, elevando al cuadrado ambos miembros
   (por ser creciente la función $f(x)=x^2$)

   $\Rightarrow 4ab < a^2 +2.ab+b^2$, desarrollando el cuadrado de binomio

   $\Rightarrow 0 < a^2 -2.ab+b^2$, por consistencia de la suma
   (se suma en ambos miembros el opuesto de 4ab)

   $\Rightarrow 0 < (a-b)^2$, factorizando el trinomio

   $\Rightarrow 0< a-b \vee 0> a-b$, pero por hipótesis a<b, por lo tanto sólo vale la segunda desigualdad

Volviendo de atrás hacia adelante, se debería expresar a<b como a-b<0, luego se eleva al cuadrado ambos miembros (siendo decreciente la función $f(x)=x^2$ para los x<0, se invierte el sentido de la desigualdad), se desarrolla el cuadrado del binomio, se suma 4ab en ambos miembros, se factoriza el binomio, se extrae raíz cuadrada en ambos miembros (se usa que $f(x)=\sqrt{x}$ es creciente) y se multiplica ambos miembros por el inverso de 2.

De debe aclarar a los alumnos que es imprescindible reconstruir el camino inverso, en caso contrario se está probando sólo la implicación recíproca.

Programa heurístico

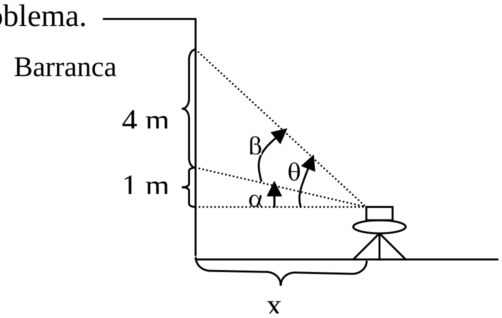
Según Polya, el método heurístico constituye el verdadero método de enseñanza de la matemática. Este método consiste en plantear preguntas, sugerencias, indicaciones a los alumnos, a modo de impulsos que facilitan la búsqueda y solución independiente de problemas. Este autor considera cuatro fases necesarias para resolver un problema: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución de este y evaluación de la solución obtenida. A continuación se presenta un ejemplo de cómo resolver un problema siguiendo este esquema, mediante un programa heurístico.

Ejemplo - Ejercicio con texto: Un geólogo desea tomar una fotografía de una capa de terreno de 4 m de ancho situada en una barranca. La lente de la cámara está situada a 1 m por debajo del borde inferior de la capa. ¿A qué distancia deberá situar la cámara para maximizar el ángulo abarcado por su lente?

Resolución: Para el análisis del ejercicio se pueden ofrecer las siguientes indicaciones (se usará R.H. para abreviar Regla Heurística):

Fase de orientación: Comprensión del ejercicio.

Indicaciones dadas por el profesor	**Regla o principio heurístico usado**
▪ Lea el ejercicio	
▪ ¿Cuáles son los datos?	[R.H. Separar lo dado y lo buscado]
▪ ¿Qué le piden determinar?	
▪ ¿Con qué magnitudes debe trabajar?	[R.H. Designar las magnitudes con variables]
▪ Represente gráficamente las magnitudes involucradas en el problema.	[R.H.Confeccionar figura de análisis



▪ ¿Qué relaciones existen entre las magnitudes?	[R.H. Expresar relaciones contenidas en el texto]

Fase de elaboración: Búsqueda de la idea de solución.

▪ ¿Se parece a otro ejercicio que ya resolvió?	[Principio Heurístico: Analogía]
▪ ¿Qué teorema se puede usar para determinar la magnitud solicitada?	[R.H. Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente]

Fase de realización: Aplicación del plan de solución.

▪ Aplique el teorema que Ud. mencionó que le permite determinar la magnitud solicitada.

Fase de evaluación: Comprobación de la solución, memorización de la ganancia de información metodológica y consideraciones perspectivas.

▪ ¿Cuál de los valores obtenidos puede ser solución según la interpretación física de la variable x?

- ¿Qué teoremas le permitirían afirmar que ese valor es la solución del problema?
- Verifique que efectivamente es la solución.
- ¿Cómo se resumiría el procedimiento seguido para determinar el extremo y su verificación?
- ¿Cuál de los criterios usados resultó más fácil para determinar la solución? ¿Porqué?

[R.H. Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente]

El profesor podrá presentar este problema o uno semejante a los alumnos, ejerciendo el control estratégico de las tareas, que los alumnos cumplimentarán como meros ejercicios, pero poco a poco debe ir transfiriendo el control a los propios alumnos, que deben ir aprendiendo a usar de modo estratégico sus propias técnicas.

Conclusión

Para que los alumnos sean capaces de enfrentar los problemas deben dominar no sólo los conocimientos específicos, sino también las técnicas y las estrategias. Por lo tanto, la importancia de la enseñanza de los principios, estrategias y programas heurísticos es proporcionar a los alumnos recursos alternativos, entre los cuales puedan seleccionar el óptimo de acuerdo con las características de la tarea.

Inicialmente el profesor puede asumir la responsabilidad o la decisión en varias de las fases del modelo clásico de solución de problemas de Polya, pero progresivamente debe ceder el control de esas fases a los alumnos, hasta que sean capaces de completar el proceso de solución sin ayuda externa.

Para lograr la independencia del alumno, el profesor debe habituarlo a adoptar sus propias decisiones en el proceso de solución, así como a reflexionar sobre ese proceso, fomentarlo en el hábito de preguntarse y autoevaluarse e incentivar la discusión y puntos de vista distintos confrontando las soluciones. Por su parte, el profesor debe evaluar los procesos seguidos por el alumno más que los resultados obtenidos, valorar la planificación previa, la reflexión durante la realización de la tarea y la profundidad de las soluciones.

Referencias bibliográficas

Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 1*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Polya, G.(2000). *Cómo plantear y resolver problemas*. D.F., México: Editorial Trillas.

Pozo, J.I.; Pérez, M.; Domínguez, J.; Gómez, M.A.; Postigo, Y. (1994). *La solución de problemas.* Madrid, España: Editorial Santillana.

Reflexiones sobre los infinitésimos en la enseñanza del cálculo

Sara Scaglia*, María José González-López**
*Universidad Nacional del Litoral. Argentina
**Universidad de Cantabria .España
scaglia@fafodoc.unl.edu.ar glopez@matesco.unican.es

Introducción

Numerosas investigaciones en educación matemática se han dedicado a indagar en torno a las dificultades de los alumnos durante el aprendizaje del concepto límite. En la enseñanza de este concepto han sido adoptadas, al menos, dos posiciones diferentes. En algunos países, el concepto se aborda de un modo intuitivo, introduciéndolo dinámicamente, en términos de una cantidad variable que se aproxima a un valor fijo. En otros, en cambio, se enfoca su estudio mediante la teoría formal del análisis matemático, a partir de la definición ε - δ (Tall, 1996).

El concepto de límite, establecido por Cauchy en el siglo XIX, dio lugar al primer desarrollo riguroso del Análisis Matemático. La ventaja principal de su uso radica en que permite dar un tratamiento a las 'cantidades muy pequeñas' sin operar directamente con ellas. Antes de trabajar en términos de límites, los matemáticos recurrían a su intuición para manipular cantidades evanescentes, despreciables, menores que cualquier cantidad asignable, es decir, cantidades *infinitesimales o infinitésimos,* que daban coherencia a determinadas interpretaciones de fenómenos físicos. Veamos un ejemplo (tomado de Grabiner, 1982) del tratamiento del cociente diferencial de la función $y = x^2$ mediante estos dos métodos diferentes.

Si $y = x^2$ y si x toma el valor $x+h$ para algún h pequeño, y pasa a ser $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$. El cambio en x es h, y el cambio en y es $2xh + h^2$. La razón de cambio es $(2xh + h^2)/ h = 2x + h$. Sin embargo, el cociente diferencial de x^2 es $2x$, no $2x + h$. ¿Qué ocurre con h? La respuesta a esta pregunta clave puede abordarse desde las dos perspectivas mencionadas:

- ***Mediante el uso del infinitésimo***

  Se considera que h es una cantidad infinitamente pequeña y por lo tanto puede ser rechazada con respecto a la cantidad finita $2x$.
- ***Mediante el uso del límite:***

  Se considera que $2x+h$ y $2x$ difieren, en valor absoluto, menos que cualquier cantidad dada si se toma h suficientemente pequeño.

Mientras que la primera propuesta alude a la consideración de un infinitésimo, una cantidad tan pequeña que puede ser rechazada, en la segunda se elude considerar tal cantidad y, en cambio, se hace referencia a 'tomar h suficientemente pequeño'. La relación entre ε - δ contenida en la definición moderna de límite hace referencia a esa posibilidad de acercarse tanto como se quiera: 'para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$'.

El cálculo infinitesimal previo a Cauchy encontró numerosos detractores debido a que los infinitésimos, que se definían como números constantes muy pequeños, no satisfacían algunas propiedades aritméticas elementales, entre las que cabe destacar la propiedad arquimediana. Cauchy (1998; p. 26) lo define como una variable: "*Se dice que una cantidad variable pasa a ser infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de manera de converger al límite cero.*" En la segunda mitad del siglo XX, Robinson (1974) desarrolla su *análisis no estándar,* en el que tienen cabida con el mismo tratamiento los reales, los infinitésimos y sus inversos, los infinitos.

Robinson define un nuevo conjunto R* de números, llamados hiperreales, que extiende a los números reales, es ordenado, y sobre el que se pueden definir las mismas funciones que sobre los reales. En este contexto, un elemento a de R* se llama *infinitésimo* o *infinitamente pequeño* si $|a| < m$ para todo número real positivo m, (donde |.| es la extensión a R* de la función 'valor absoluto' sobre los reales), (Robinson, 1966; pp. 56).

Desde el punto de vista matemático, podríamos enumerar una larga lista de temas en los que la consideración de infinitésimos ha abierto un amplio panorama de aplicaciones, de problemas nuevos y de re-interpretaciones de otros conocidos.

Desde el punto de vista de la educación matemática, la consideración de los infinitésimos también tiene su interés por distintas razones:

- Utilizando infinitésimos se simplifican las demostraciones de resultados elementales, como la continuidad y derivabilidad de ciertas funciones (Kossak, 1996; Grabiner, 1981), y de teoremas fundamentales en cálculo, como los teoremas del valor medio o el teorema de integración de Riemann, entre otros (Farkas y Szabo, 1984).
- La idea de infinitésimo ha surgido en distintas investigaciones educativas. Diversos autores (Cornu, 1982; Tall, 1980; Robinet, 1986; Sierpinska, 1987; Margolinas, 1988) han detectado ideas intuitivas en los alumnos sobre la noción de infinitésimo (en ocasiones, sin haberlas buscado explícitamente).

Sin embargo, la introducción del análisis no estándar en la enseñanza del cálculo no constituye un tema destacado de las agendas de investigación educativas, siendo muy escasos los estudios ocupados en ese tema. Podemos mencionar como una excepción el trabajo de (Sullivan, 1976), que investigó la utilización de la aproximación no estándar de Robinson en la enseñanza del cálculo, obteniendo resultados que, además de permitirle sostener la tesis de que es una alternativa viable para la enseñanza, demostraron que los estudiantes alcanzan un dominio adecuado de las habilidades básicas del cálculo.

En este trabajo, bajo la premisa de conceder importancia a la intuición en el aprendizaje de conceptos, analizamos una serie de trabajos, propios y ajenos, en los que se han detectado concepciones infinitesimales en los alumnos. Este hecho nos sirve para sostener la utilidad de los infinitésimos en la enseñanza del cálculo. Así, en la Sección 2, recopilamos algunos estudios en los que los alumnos manifiestan intuiciones respecto de los infinitésimos al estudiar tres conceptos específicos del análisis estándar: el cardinal de un intervalo, el límite y el número real. En la Sección 3 estudiamos las respuestas de algunos alumnos de cursos previos a la universidad y de primer año de Licenciatura de Matemática que revelan sus intuiciones acerca de una propiedad fundamental que distingue el análisis estándar del no-estándar: la propiedad arquimediana. En la última sección incluimos algunas reflexiones sobre la utilidad de las ideas presentadas para la enseñanza del cálculo. En ellas señalamos la distancia que aún existe entre la detección de intuiciones infinitesimales y su utilización desde un punto de vista formal, a pesar de lo cual mostramos algunos argumentos que nos animan a profundizar en el análisis aquí iniciado y alimentan nuestra esperanza de encontrar propuestas educativas viables que incorporen el uso de los infinitésimos.

Intuiciones sobre los infinitésimos en el ámbito educativo

Diversos autores destacan la influencia de las intuiciones en los procesos de aprendizaje de conceptos. Fischbein (1987; p. 13) afirma que *"mientras que la intuición no es una fuente perfectamente fiable de conocimiento absoluto, es, sin embargo, la expresión de nuestra necesidad fundamental de puntos de referencia absolutos, intrínsecamente fiables en un esfuerzo de razonamiento*". Tall (1992, p. 497) utiliza la expresión 'raíz cognitiva' para

referirse a los conceptos que tienen la doble función de resultar familiares para los estudiantes y proporcionar la base para desarrollos matemáticos posteriores. A estos conceptos los considera apropiados para el desarrollo del currículo, y menciona el hecho de que el concepto de límite demuestra ser difícil para que los estudiantes lo utilicen como una base de su pensamiento y puede que no sea una raíz cognitiva sólida para los estados iniciales del cálculo. Considera, en cambio, que la noción de infinitesimo resulta 'cognitivamente atractiva' para los alumnos (Tall, 1996). Podríamos añadir que esto no ocurre sólo con los alumnos, ya que el propio Cauchy, autor del formalismo ε-δ para el concepto de límite, utiliza con profusión los infinitésimos en pruebas y definiciones (Robinson, 1966; p. 274).
Estas consideraciones apoyan la conveniencia, desde un punto de vista educativo, de analizar las intuiciones que tienen los alumnos sobre los infinitésimos. A continuación presentaremos una serie de investigaciones dirigidas a analizar conceptos específicos del análisis estándar (cardinal de un intervalo, número real y límite), en las que los infinitésimos han surgido del análisis de las respuestas de los alumnos. Observaremos que, en algunos casos, estas intuiciones constituyen obstáculos para la comprensión de los conceptos que quieren estudiarse.

Infinitésimos y cardinal de un intervalo

Tall (1980) pone de manifiesto las dificultades de los alumnos para admitir que dos intervalos de números reales de distinta longitud tienen la misma cantidad de puntos. Los alumnos interpretan que la nueva magnitud *cardinal del intervalo*, es decir, el número de puntos que tiene un intervalo, es proporcional a la longitud del intervalo. Tall indica que interpretar estas intuiciones en un paradigma cardinal es erróneo, y que lo correcto es considerarlas en el ámbito de la medida. Surgen así los números de medida infinita y de medida infinitesimal, que forman parte del conjunto de los números superreales, extensión ordenada no arquimediana de los números reales.
Estos números vienen a reflejar las intuiciones que provienen de la experiencia de los alumnos al dibujar puntos con un lápiz en una línea: los puntos tienen un cierto grosor, d, y son llamados d-indivisibles. El número de dichos puntos en un intervalo de longitud l es l/d. Si d es un infinitésimo, l/d es un número superreal, de medida infinita. En este contexto, el que intervalos de distinta longitud (por ejemplo, que uno sea el doble del otro) tengan el mismo cardinal se explica de la forma siguiente: la aplicación x → 2x dobla el tamaño de un d-indivisible a un 2d-indivisible. Por tanto:

- El número de d-indivisibles en un intervalo de longitud l es l/d.
- El número de 2d-indivisibles en un intervalo de longitud 2l es el mismo: 2l/2d=l/d.

Esto explica que, supuesto que los puntos tienen tamaño infinitesimal, la única forma de que dos intervalos de distinta longitud tengan el mismo número de puntos es que el tamaño de los puntos cambie en proporción a la longitud del intervalo.

Infinitésimos y límites

Cornu (1981) recoge algunas frases de alumnos que, según su opinión, aluden a una concepción infinitesimal: *"se aproxima lo más posible del cero absoluto"*, *"aunque A y M se tocan no estarán confundidos"*, y afirma que la noción de infinitamente pequeño e infinitamente grande constituye un verdadero obstáculo para el aprendizaje del concepto de límite: *"Es el segundo gran obstáculo para el alumno: todo sucede como si existieran números muy pequeños, más pequeños que los verdaderos números, pero sin embargo no*

nulos". De hecho Cornu (1982) considera que el debate en torno a lo infinitamente pequeño e infinitamente grande causó un aplazamiento del desarrollo de la noción de límite. Para este autor, el método de exhausción utilizado por los griegos es cercano al concepto de límite, pero la visión geométrica orientó a los matemáticos a la concepción infinitesimal.
Sierpinska (1987) estudia obstáculos epistemológicos relacionados con el límite en estudiantes de Humanidades, y califica como 'infinitesimal' a un modelo de concepción de límite de los estudiantes. Según este modelo, *"g es el límite de una sucesión A si la diferencia entre A y g es infinitamente pequeña (o, si uno alcanza desde cualquier término de A a g añadiendo un número finito de cantidades infinitamente pequeñas)"*. Para justificar la tesis de que 1'99999... = 2, un alumno propone tomar dos cerillas, y cortar una en piezas muy delgadas: *"Todas las pequeñas –infinitesimales- piezas son sumadas una a una a la cerilla entera"*. La discusión que se produce entre estos alumnos respecto de la existencia real o no de cantidades infinitamente pequeñas los conduce a un debate filosófico profundo y conocido: el alumno que rechaza las cantidades infinitamente pequeñas afirma: *"Quizá, el infinito existe en matemáticas solamente... Pero entonces las matemáticas pasan a ser completamente abstractas"*, mientras que su oponente responde: *"Infinito –lo tienes por todas partes, y la matemática es sólo un intento del hombre para clasificar el mundo"*.

Infinitésimos y números reales

En Robinet (1986) se investigan los modelos de los números reales que tienen los alumnos. Para analizar las ideas de los alumnos que consideran a la recta geométrica como una buena imagen del conjunto de números reales, el autor presenta una cuestión que permite indagar en su idea de recta. Algunas respuestas hacen alusión a lo infinitamente pequeño, por ejemplo: *"Una recta es un conjunto de puntos infinitamente pequeños y alineados, cualquiera que sea el aumento [del microscopio electrónico o del ordenador] una recta tendrá en teoría el mismo aspecto. Y por otra parte una recta siendo infinitamente delgada no es visible, se la representa por un trazo que es visible"*.
En Margolinas (1988) se estudian las dificultades de la enseñanza de los números reales, y algunas concepciones de los estudiantes son denominadas infinitesimales. Algunos alumnos consideran la existencia de números de la forma $0,\underline{0}1$ (notación que usan para representar "infinitos ceros después de la coma y, al final, un uno"), que la investigadora describe como más pequeño que todos los números positivos, aunque no igual a cero.

Una indagación sobre la propiedad arquimediana

En una investigación realizada por una de las autoras de este trabajo (Scaglia, 2000), dirigida al estudio de las dificultades de la representación de los números reales en la recta, se propuso a alumnos una situación orientada a estudiar sus intuiciones sobre la propiedad arquimediana. Durante el transcurso de una entrevista individual se preguntó:
¿Es posible hallar un número (muy pequeño) tal que, tomando pasos de longitud igual a dicho número, sea imposible cubrir un segmento de longitud igual a $2\sqrt{2}$ unidades?
Los alumnos entrevistados eran jóvenes españoles que cursaban en ese momento el Bachillerato (etapa correspondiente a los dos años previos al ingreso a la Universidad) o el primer año de Licenciatura en Matemáticas. Sus edades oscilaban entre los 16 y 20 años.
Las respuestas de los alumnos se resumen en la tabla 1, en la que figuran el número de alumno, la respuesta a la pregunta planteada y el argumento utilizado para justificar su respuesta. Entre las respuestas de los que no admiten la existencia del "infinitésimo", se

observa que el sujeto Nº 4 trasciende el marco geométrico, y justifica su respuesta en términos que pueden considerarse puramente aritméticos.

Edad Sujeto	¿Es posible?	**Justificación**
1	No	"Más o menos tiempo, más o menos pasos pero sí se llega a alcanzar, por muy pequeño que sea, si no se alcanza antes se alcanza después".(frase 1301)
2	No	"Te puedes pasar... mucho tiempo haciendo eso, pero llegas." (frase 1404)
3	No	"Siempre que demos un número de pasos, las divisiones que hagamos, por más pequeña que sea la división, vamos a llegar." (frase 1101)
4	No	"Yo pienso que... que cualquier número multiplicado por... si es un número muy pequeño, multiplicado por un número que sea extremadamente grande va a llegar a... a raíz de dos." (frase 2104)
5	Sí	"Incluso entre 0 y 0'1 habrá infinitos números. Y entre cada división de 0 y 0'1 otros infinitos." (frases 2006 y 2007) "Pues que entre cada dos números cualquiera, que no sea el mismo, existe infinitos." (frase 2103)
6	Sí	"Quizá si cogemos el número diez elevado a la menos *n*, con *n* tendiendo a infinito, sí, si no, no." (frase 5401) "Es decir, hay que saltar al límite de este número en infinito." (frase 5402) "Si no..., porque por muy pequeño que sea éste número, o por... muchos pasos que hay que dar, si ese número no tiende a infinito, o sea, no lo hacemos tender a infinito, el número de pasos es finito, entonces se puede alcanzar." (frase 5403)

Tabla 1: Respuestas de los alumnos

A los dos alumnos (5 y 6) que admiten la existencia del "infinitésimo", se les ha preguntado cómo podría expresarse ese número, y las respuestas fueron las siguientes:

- (Sujeto Nº 5, frases 2201 y 2202) *"Como una especie de sucesión o alg... Pero no sé. Eso ya sería cuestión de criterio que asignemos, vaya, de plasmar en un papel lo que se piensa."*
- (Sujeto Nº 6, frases 5502 y 5506) *"Lo que pasa es que a lo mejor no es un valor definido, como por ejemplo puede ser éste, diez elevado a menos cincuenta, sino diez elevado a menos n haciendo tender n a infinito, que eso ya... ya digo... O mejor dic..., no. Sería el límite cuando n tiende a infinito. Ese número:* $\lim_{n\to\infty} 10^{-n}$"

Dentro del análisis estándar, el límite que este alumno ha considerado es igual a cero, y el tratamiento que Robinson aplica a los infinitésimos no sigue por esa línea. No obstante, en el siglo XVIII los infinitésimos eran considerados cantidades variables que desaparecen (ya hemos mencionado la definición de Cauchy de infinitésimo). La intuición de este alumno del infinitésimo puede interpretarse cercana a la idea de Cauchy. Goldblatt (1998; p. 14) afirma que es posible hallar libros de texto en los que se define como infinitésimo una sucesión que satisface: $\text{lím}_{n\to\infty} r_n = 0$. En este caso, el infinitésimo es la sucesión que cumple esa condición, y para nuestro alumno, el infinitésimo es el límite mismo. A pesar de estas diferencias, es notable la analogía entre ambas ideas.

Reflexiones finales. Dificultades

La enseñanza de los infinitésimos tropieza con algunas dificultades reconocidas por distintos autores; una de ellas es la ausencia de un modelo de representación para los infinitésimos: (Kossak, 1996) indica que una dificultad del análisis no-estándar es que no existe un modelo visual para el mismo, adecuado a nuestros sentidos o intuición.

A nivel conceptual, si bien en algunas de las investigaciones presentadas (Sierpinska, 1987 y Robinet, 1983) los alumnos utilizan la expresión 'infinitamente pequeño', esto no es una garantía de que se esté concibiendo el infinitesimo tal como se define en las teorías no arquimedianas actuales. Se trata de alusiones intuitivas, quizá cercanas a las ideas de algunos matemáticos del siglo XVIII. Así, por ejemplo, observamos que en el modelo de concepción de límite 'infinitesimal' citado por Sierpinska y en el debate que se produce

entre los dos alumnos, hay clara evidencia de que la superposición de cantidades infinitamente pequeñas permite alcanzar un tope/punto final (el límite según la investigadora, o una cerilla completa, según los alumnos). Esto supone la verificación de la propiedad arquimediana, que no se cumple en una teoría que contiene a los infinitésimos. Otra dificultad es que para una formalización matemática de los infinitésimos necesitamos de una estructura lógica potente, cuya enseñanza no se contempla actualmente ni siquiera en la mayoría de los programas de las licenciaturas de Matemáticas en Argentina y España.
Aún así, aportamos algunos argumentos que nos animan a profundizar en el análisis aquí iniciado: el hecho de que el uso de infinitésimos facilite considerablemente las definiciones y las demostraciones de resultados importantes del análisis; el hecho de que algunos alumnos recurran intuitivamente a la utilización de cantidades infinitamente pequeñas o despreciables cuando deben explicar o justificar un argumento; la constatación de que algunos alumnos admiten la existencia de números que no satisfacen la propiedad arquimediana. Estos argumentos alimentan nuestra esperanza de encontrar propuestas educativas viables que incorporen la enseñanza de los infinitésimos.

Referencias bibliográficas

A.L. Cauchy (1998) *Cours d' analyse.* Edición facsimilar de un ejemplar de la primera edición de 1821. Sevilla: Sociedad Andaluza de educación Matemática "Thales".

B. Cornu (1981) *Quelques obstacles a l'apprentissage de la notion de limite*. Recherches en Didactique des mathematiques, 4, pp. 236-268.

B. Cornu (1982) Grandes lignes de l'evolution historique de la notion de limite. En *Bulletin APMEP*, 335, pp. 627-641.

E. J. Farkas, M. E. Szabo (1984) On the plausibility of nonstandard proofs in analysis. En *Dialectica*. Vol. 38, Nº 4, pp. 297-310.

E. Fiscbbein (1987) *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

R. Goldblatt (1998) *Lectures on the Hyperreals*. New York: Springer Verlag.

J. V. Grabiner (1981) The origins of Cauchy's Rigorous Calculus. LUGAR: Mit Press.

R. Kossak (1996) What are infinitesimals and why they cannot be seen. En *The American Mathematical Monthly*, 103, 10, pp. 846-853.

C. Margolinas (1988) *Une etude sur les difficultes d'enseignement des nombres reels*. En *Petit x*, 16, pp. 51-66.

J. Robinet (1983) Une experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 3, pp. 223-292.

A. Robinson (1966) *Non standard analysis*. Amsterdam: North-Holland.

S. Scaglia (2000) *Dos conflictos al representar números reales en la recta.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

A. Sierpinska (1987) Humanities students and apistemological obstacles related to limits. En *Educational Studies in Mathematics*, 18, pp. 371-397.

K. Sullivan (1976) The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach. En *The American Mathematical Monthly*, 83, 5, pp. 370-375.

D. Tall (1980) *The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity*. Educational Studies in Mathematics, 11, pp. 271-284.

D. Tall (1992) *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof*. Handbook of research on mathematics teaching and learning. Douglas A. Grouws Ed. NCTM. New York: Macmillam Pub. Co., pp. 495-511.

D. Tall (1996) *Functions and Calculus*. International Handbook of Mathematics Education, A. J. Bishop et al. Eds. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 289-325.

Metodología participativa para la enseñanza del cálculo diferencial

Guiomar Lleras de Reyes; Sandra Isabel Gutiérrez Otálora
Escuela Colombiana de Ingeniería. Colombia
glleras@escuelaing.edu.co sgutierr@escuelaing.edu.co

Resumen
El artículo presenta una propuesta metodológica a nivel universitario para estudiantes de ingeniería, que combina las didácticas activa y tradicional, la primera a través de la aplicación de una serie de talleres que tienen como objeto reconstruir los conceptos básicos del Cálculo Diferencial (función, límite, derivada), a partir de los cuales se desarrolla el resto de la teoría del curso, mediante la didáctica tradicional.
La investigación se soporta en las teorías de Piaget y Vigotsky, las cuales permiten entre otros, identificar la etapa conceptual en la que se encuentran los estudiantes y justificar la importancia de los talleres en pequeños grupos en donde el intercambio de ideas entre los participantes enriquece el proceso de aprendizaje.
La investigación se soporta en las teorías de Piaget y Vigotsky, las cuales permiten entre otros, identificar la etapa conceptual en la que se encuentran los estudiantes y justificar la importancia de los talleres en pequeños grupos en donde el intercambio de ideas entre los participantes enriquece el proceso de aprendizaje.

Introducción y planteamiento del problema

Existen muchos aspectos que inciden en el rendimiento académico de los estudiantes en sus diferentes cursos de matemáticas tales como: aprendizaje incorrecto de conceptos matemáticos; falta de capacidad de análisis, en la mayoría de los casos predomina la aptitud memorística; baja comprensión al realizar lecturas no solo de tipo matemático, lo que ocasiona dificultad para entender y resolver los problemas propuestos; experiencias negativas en cursos de matemáticas anteriores, las cuales los desmotivan y los llevan a "aprender" el tema estrictamente necesario para la evaluación programada, generando un olvido casi inmediato de lo estudiado, que se acentúa ante la ausencia de hábitos de estudio.

Ante el bajo rendimiento académico de los estudiantes no sólo en la materia de cálculo sino en otras que se relacionan con ésta, surge la necesidad de realizar un cambio en la metodología, que le permita a los estudiantes redescubrir la teoría y convertirse en autores de su propio aprendizaje, con lo cual afiancen mejor los conceptos y los puedan aplicar a diferentes situaciones de su vida profesional. De lo anterior surge el interrogante ¿en qué medida la combinación de talleres (como caso particular de la didáctica activa) y la clase tradicional, influye en un mejor rendimiento académico de los alumnos de Cálculo Diferencial?

Se propone una metodología que integre la didáctica tradicional con la activa, gracias a esta última se construyen los conceptos básicos del Cálculo Diferencial y se espera que sean el soporte fundamental para desarrollar el resto de la teoría mediante la tradicional.

Directrices teóricas

El trabajo de investigación se apoyó en las teorías de Piaget y Vigotsky, a continuación se consideran en forma breve los aspectos más relevantes de las dos teorías.

Para Piaget es importante la actividad individual, nada se puede aprender si no se tiene la estructura adecuada con la cual se puede alcanzar el aprendizaje, mientras que para Vigotsky lo fundamental es la actividad social, el desarrollo se logra gracias al aprendizaje. El desarrollo cognoscitivo del sujeto se logra a través de la interacción sujeto-objeto, esto es lo que Piaget concibe como *acción*. Vigotsky considera que el conocimiento es producto de la acción y ésta es mediada, por medio de la interacción social el individuo aprende a usar el lenguaje y ésta conlleva a usarlo internamente, lo cual le permite acceder a niveles de pensamiento avanzados.

Piaget sostiene que existen dos procesos para llegar al conocimiento, ellos son: la asimilación que incorpora situaciones externas que adapta a la estructura interna existente, nuevas informaciones, las cuales contribuyen a ampliar el campo de conocimiento, gracias a la equilibración. Para Vigotsky el verdadero aprendizaje es el que se da en la Zona de Desarrollo Próximo, que es la distancia entre el desarrollo actual (lo que el sujeto puede hacer sólo, sin la ayuda de otros) y el desarrollo potencial (lo que puede hacer el sujeto con la ayuda de otros más capaces, bien sea el profesor o compañeros) y se construye en la interacción social.

Los estudiantes de segundo semestre de ingeniería son jóvenes que oscilan entre los 17 y 22 años, y se encuentran en el estadio de las operaciones formales, el cual se caracteriza por ser:

- *Hipotético-deductivo*: parte de las premisas a las conclusiones, de lo general a lo particular, utilizando mecanismos de comprobación.
- *Científico-inductivo*: que comienza con los hechos específicos a las condiciones generales.
- *Reflexivo-abstracto*: logra la construcción de conocimientos más complejos, atravesando las etapas de abstracción de un nivel inferior a uno superior.
- *Proposicional:* el individuo tiene la capacidad de razonar sobre lo posible, esto lo logra utilizando como herramienta el lenguaje con el cual se evidencia una mayor capacidad de abstracción.

Uno de los casos particulares de la didáctica activa es el taller, que se concibe como el conjunto de actividades que integran y aplican algunos elementos teórico-prácticos de las ciencias al análisis de situaciones reales y teóricas. Siendo así, un lugar de reflexión en el que se pretende superar la separación que existe entre teoría y práctica, por medio del "aprender haciendo", en un ambiente social. El taller se caracteriza por ser: un trabajo en grupo, un método de discusión del aporte individual de los participantes para tomar decisiones por consenso.

Sólo cuando la actividad educativa proviene de la participación activa de los jóvenes, se genera un conocimiento claro que es parte de la experiencia consciente. Con el desarrollo del taller se pretende integrar la teoría con la práctica, mediante la ejecución de actividades creativas que den por resultado un producto final, que represente el logro de un objetivo.

Analizando las teorías de Piaget y Vygotski se han encontrado algunos elementos pedagógicos claves para lograr el aprendizaje del estudiante, los cuales se pueden encontrar en los talleres (Dubinsky, 1996):

- Permitir al estudiante que construya sus propias ideas en lugar de presentar el conocimiento ya elaborado por parte del profesor.

- Dejar que el estudiante experimente con los conceptos básicos y sus relaciones, para generalizar y posteriormente deducir.
- Permitir que el estudiante construya su conocimiento en forma progresiva. Iniciando por la experimentación de los conceptos para después llegar al formalismo.
- Generar situaciones que propicien la reflexión y el razonamiento.
- Lograr que el estudiante tome conciencia del conocimiento aprendido, para que pueda conectarlo con otros y a su vez lo aplique en otras situaciones.
- Crear un ambiente de interacción social tanto con los compañeros como con el profesor, para enriquecer el proceso de aprendizaje. “Es en el intercambio social donde se aprende a usar el lenguaje para regular las acciones de los demás, para nombrar y clasificar objetos, para formular peticiones y dar explicaciones” (Ursini,1996). Gracias al intercambio social el individuo logra llegar a las funciones mentales superiores y es en este que se da la Zona de Desarrollo Próximo.

Mientras que a través de la didáctica tradicional se crean en las mentes de los alumnos impresiones estáticas, a través de la didáctica activa se pretende colocar a los alumnos en una situación problema en forma práctica, tal que la resolución de la misma permita que el joven se enfrente y actúe sobre el concepto adquirido, redescubra los nuevos elementos para su aprendizaje, reinvente relaciones, extraiga y analice sus propias conclusiones y tenga un espacio para la creación y la innovación**.** “El conocimiento no se adquiere pasivamente, el sujeto lo construye por medio de la actividad que lo pone en contacto con lo que lo rodea. El conocimiento es un proceso activo de construcción por parte del sujeto” (Vasco,1986).

Descripción de la metodología propuesta

La propuesta contempla nueve talleres, en torno a los conceptos de: función, compuesta, inversa, exponencial y logarítmica, límite, continuidad, derivada, optimización y antiderivada, con los cuales se pretende que los estudiantes descubran la teoría. La dinámica del taller se desarrolla conformando grupos de trabajo generalmente de 3 personas, a los cuales se les presenta una guía la cual discuten entre ellos, a su ritmo de trabajo y sin la presión del profesor, el papel del docente es de orientador, detecta y encausa las deficiencias y los errores comunes de los alumnos. Terminado el taller se realiza una plenaria en la que progresivamente se van recogiendo los resultados y conclusiones obtenidas en cada grupo, hasta llegar a una conclusión final que enmarque el concepto que se empezará a desarrollar en la clase.

El profesor como guía de la actividad, facilita a los alumnos la construcción del conocimiento partiendo de actividades concretas. El docente parte de problemas prácticos, utilizando manipulación efectiva lo cual suscita un vivo interés en el alumno. En el desarrollo del problema el uso de la simbología especial es progresivo, dándole importancia más a los conceptos que a la misma como tal.

Algunos de los talleres presentan ejemplos de la vida real, que permiten acercar al estudiante de una manera más amena y clara al concepto. Adjunto se presenta uno de los talleres (optimización) que desarrollan los estudiantes.

Aplicación de la metodología

Para poder medir el alcance de la metodología propuesta y teniendo en cuenta que los grupos de estudiantes no se podían escoger aleatoriamente por motivos administrativos, se escogió un diseño cuasi-experimental, con dos grupos uno de control y otro experimental.

El grupo experimental estuvo conformado por 30 estudiantes, cuyas edades estaban entre los 17 y 22 años, 3 estudiantes estaban tomando el curso por segunda vez. El grupo control tenía 33 estudiantes con rango de edades similar al experimental, de éste 4 estudiantes estaban repitiendo el curso.

Se realizó una prueba de 37 preguntas en torno a los conceptos básicos del cálculo diferencial y trabajados en los talleres, se validó por algunos profesores de la Universidad, la misma prueba se aplicó a la entrada y a la salida para que no hubiera distorsión en las mediciones. El valor que se le asignó a las preguntas correctas fue uno y a las incorrectas cero. Los dos grupos tuvieron el mismo profesor y en ambos se contó con más o menos la misma cantidad de estudiantes repitentes.

En la siguiente tabla se observan las medias y desviaciones estándar de las pruebas de entrada, de salida y de los promedios de las diferencias de las mismas en cada uno de los grupos.

	MEDIA	DESVIACION ESTANDAR
Prueba entrada grupo control	6.8	3.7
Prueba entrada grupo experimental	7.5	4.1
Prueba salida grupo control	23	5.9
Prueba salida grupo experimental	25	5.4
Diferencia entre la prueba de entrada y prueba de salida del grupo control	16.2	5.5
Diferencia entre la prueba de entrada y prueba de salida del grupo experimental	17.5	5.4

Aunque el promedio de las diferencias fue mayor en el grupo experimental, se realizó una prueba t de dos colas la cual no fue significativa, se cree que los resultados obtenidos se vieron afectados ya que la prueba de salida tenía nota y fue aplicada el último día de clases, en horarios diferentes, puesto que no se disponía de salones. Primero se aplicó al grupo experimental y después de hora y media al grupo control. Esto lleva a pensar que pudo haber comunicación entre los estudiantes, lo cual aumentó los resultados de la prueba del grupo control.

Conclusiones y recomendaciones

a. Durante el desarrollo de los talleres se observó que esta metodología despierta mayor motivación e interés en los estudiantes, trabajan con más entusiasmo posiblemente porque están compartiendo ideas con sus compañeros, se expresan en un mismo lenguaje y tienen más confianza para expresar sus opiniones o para pedir explicaciones cuando no entienden, lo que lleva a que aprendan a su propio ritmo.
b. El trabajo en grupo y la discusión al final de cada taller permite que los estudiantes logren una mayor comprensión de los conceptos, esto se observó en las preguntas de la prueba de salida que hacían referencia a la definición de conceptos en sus propias palabras.
c. El tamaño de la clase influye en el desarrollo de esta metodología, porque en ocasiones se torna difícil para el profesor, la observación de cada uno de los grupos de trabajo. Se recomienda que el tamaño del grupo sea de aproximadamente 25 personas.
d. Se sugiere crear instrumentos de medición para evaluar otras habilidades que puede generar esta metodología, tales como: argumentación, facilidad para expresarse en forma oral y escrita, motivación hacia las matemáticas entre otras.
e. Al finalizar el curso se aplicó una encuesta de diez preguntas, para determinar la opinión de los estudiantes del grupo experimental respecto a la metodología, se obtuvieron los siguientes comentarios: sintieron que se generaba mayor claridad en los conceptos, también les pareció una forma amena e interesante de aprender por descubrimiento. También respondieron que le encontraban ventajas a está metodología, ya que permite una mejor comprensión y evita el mecanicismo, le da seguridad al estudiante, permite que analice, afiance y asimile mejor los temas. Una de las desventajas que encontraron fue el tiempo, que en ocasiones resulta muy corto para desarrollar el taller, debido a que existen grupos que trabajan más despacio que otros, pero les parecía bueno, ya que propicia la colaboración entre los integrantes, la tolerancia, el diálogo, el aclarar dudas entre ellos.

Referencias bibliográficas

Aëbli, H. (1984). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Dubinsky E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria.. *Revista Educación Matemática, 8*, 24-41.

Dubinsky E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *Advanced Mathematical thinking.* Netherlands: Kluwer.

Moreno, L.; Waldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. *Revista Educación Matemática, 4*, 7-15.

Piaget, J. (1986). *Seis estudios de Psicología*. Colombia: Planeta .

Ursini Sonia. (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de Vygotski. *Revista de Educación Matemática*. *8*, 43-49.

Vasco, C.E. (1986). *El enfoque de sistemas en la enseñanza de la matemática*. Colombia: Norma.

Vygotski, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. España: Paidós.

Anexo

1. Para una hoja de papel de 20 X 25 cm recorte en las esquinas cuadrados de igual lado y luego forme una caja sin tapa. Repita el proceso con diferentes longitudes de los cuadrados y complete el cuadro.

Alto	Largo	Ancho	Volumen

2. ¿Entre qué valores se puede encontrar la longitud del lado del cuadrado?
3. ¿Qué sucede con el volumen a medida que aumenta la longitud del lado del cuadrado?
4. ¿Para qué longitud de lado se determina el mayor volumen de la caja? Explique.
5. De acuerdo a las dimensiones de la hoja de papel, encuentre una ecuación que exprese el volumen de la caja en función del lado.

En la calculadora TI-92 , se construyó una caja y se simuló el cambio del tamaño de la misma respecto al lado del cuadrado que se definió en la primera parte, junto a esta aparece la gráfica de lado del cuadrado contra volumen y se pide a los estudiantes que contesten las siguientes preguntas.

6. ¿Qué representa el eje de las X?
7. ¿Qué representa el eje de las Y?
8. Observando la gráfica, ¿qué puede concluir?
9. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente, cuando el volumen es máximo?
10. Determine la longitud del lado de la caja, para el cual la pendiente de la recta tangente es cero, utilizando la fórmula que halló en el numeral 5.
11. ¿Cómo puede justificar analíticamente que para determinado valor del lado, se obtiene un volumen máximo?

El uso del lenguaje lógico para favorecer la comprensión de modelos discretos

Malva Alberto; Viviana Cámara; Cristina Rogiano
Universidad Tecnológica Nacional. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
mtoso@satlink.com.ar vcamara@fce.unl.edu.ar

Resumen
Esta propuesta intenta reconstruir parte del proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemática Discreta en grupos de alumnos con edades entre 18 y 20 años, estudiantes de Ingeniería. El trabajo está centrado en dos aspectos esenciales: la "producción de un material didáctico específico" con claras metas fijadas en la enseñanza para la comprensión y su implementación como una "efectiva realización didáctica en clase".

Introducción

Nuestro curso anual de Matemática Discreta proporciona fundamentos teóricos y prácticos apropiados para las ciencias de la computación. Las áreas que estudiamos incluyen lógica, relaciones, grafos y el conteo, como elementos que reflejan necesidades actuales en informática. Nuestro material didáctico (libro de texto) contiene un primer capítulo sobre Lógica Proposicional que da los elementos mínimos necesarios para avanzar en aprendizajes más complejos. En el séptimo capítulo proveemos una lectura adicional y enriquecedora para utilizar la lógica en la construcción de modelos de eventos discretos sencillos. Muestra una forma útil de manipular algebraicamente las proposiciones lógicas en la modelización y simulación de estos modelos. Está diseñado fijando claras metas para la comprensión (Perkins, 1995) con niveles que atienen al contenido, resolución de problemas, epistémico e investigación.

¿Qué motivos nos llevan a mejorar el intento educativo?

Nuestras propias observaciones y registros y el análisis a "posteriori" de las evaluaciones escritas de los estudiantes y sus propias opiniones, nos dicen, a la hora de dar cuenta de los conocimientos adquiridos, que los aprendizajes suelen ser frágiles e inertes, poco perdurables y escasamente críticos; que existen medianas dificultades en la comprensión de algunos temas y en el uso activo del conocimiento cuando éste es requerido.
Ante esta situación, permanentemente nos preguntamos si los esfuerzos que hacemos como agentes generadores de una realización didáctica en clase son suficientes; si proveemos, en buena medida, de oportunidades para que los estudiantes se involucren con su propio aprendizaje; si la metodología elegida impulsa el compromiso por participar, por hacer, por aprender; si estimula el interés, la participación y es del agrado del estudiante; si es posible que una propuesta didáctica diferente acorte la brecha entre lo que el docente pretende que el alumno sepa y lo que el alumno sabe realmente; si los materiales curriculares elaborados y utilizados son los que mejor motivan, orientan y predisponen a los estudiantes hacia el fortalecimiento de un pensamiento reflexivo, generador, responsable y crítico.

Descripción de la propuesta didáctica

Para comenzar a dar respuesta a estas preocupaciones trabajamos en el marco de una pedagogía para la comprensión, haciendo una propuesta didáctica que ponga en juego diferentes actividades como explicación, ejemplificación, aplicación, justificación, comprensión y contraste, contextualización y generalización, con el objetivo de "enseñar a comprender", tanto un contenido, como un concepto y/o una demostración utilizando básicamente la integración de dos ejes que hemos seleccionado como ejes generatrices: las proposiciones lógicas y los modelos de eventos discretos.

La “enseñanza para la comprensión” (David Perkins, 1995) propone y recomienda atender a todos los aspectos que faciliten el desarrollo y enriquecen el aprendizaje de los alumnos. El autor señala que una enseñanza para la comprensión requiere tanto una buena selección de temas generadores como el uso de imágenes, la síntesis, la resolución de problemas, la integración y adecuación de los contenidos y un abundante y rico juego de extrapolaciones y conexiones. Basándonos en este marco teórico, la propuesta completa incluye:

- Un primer paso donde se define el cálculo proposicional y la manipulación de las proposiciones lógicas: simplificación, equivalencia, dualidad (niveles propuestos para una pedagogía para la comprensión: contenido y resolución de problemas).
- Una caracterización simple de un sistema y su representación mediante un modelo.
- La simulación como herramienta para trabajar sobre los modelos.
- La definición y caracterización (sencilla) de los elementos de un autómata celular y de (mínimas) reglas de manipulación.
- Una introducción a la terminología básica utilizada en el área de la programación.
- La selección de dos ejemplos sencillos que puedan modelarse mediante autómatas celulares y que sean susceptibles de ser traducidos a expresiones lógicas (niveles propuestos para una pedagogía para la comprensión: epistémico e investigación).
- El modelado de los ejemplos mediante proposiciones lógicas y la prueba en computadora.

Un análisis “a priori” de la situación con la que contábamos nos permite decir que:

- Nuestros estudiantes estaban en condiciones de utilizar el lenguaje lógico pues había cierto grado de apropiación de estos contenidos. La dificultad radica en interpretar el significado de estos símbolos en diferentes contextos de aplicación.
- Los estudiantes tenían algunas dificultades en la manipulación de proposiciones equivalentes y en la manipulación de reglas de simplificación.
- Ellos no sentían seguridad acerca de la importancia que tiene la lógica en la construcción de lenguajes de programación, por ejemplo y existía una escasa motivación en cuanto a la utilidad del tema como elemento o herramienta necesaria para tener en cuenta en próximos aprendizajes relativos a su especialidad.
- Existía alguna resistencia para profundizar en el tema.
- Los docentes generábamos escasas actividades de integración y aplicación de los contenidos y aunque procurábamos adecuar nuestro sistema de trabajo a las expectativas del grupo, lo conseguíamos mínimamente.

Realización didáctica

Intentamos atender tanto a los desempeños para la comprensión de los alumnos (fijando y estimulando las nuevas habilidades y roles) como a la definición del problema de la acción y de los medios (material didáctico) para la acción. La propuesta se hizo con carácter optativo, en tres talleres extracurriculares. De los 250 alumnos que integran los cursos regulares de Matemática Discreta, asistieron 82 alumnos. En este trabajo mostramos dos ejercicios simples e introductorios con los que iniciamos esta nueva propuesta, mostrando a los alumnos una posible aplicación de los contenidos estudiados.

Definimos un autómata celular como un conjunto infinito n–dimensional de celdas ubicadas geométricamente. Cada celda puede tener uno, de un conjunto finito de estados. La vecindad de una celda es un conjunto de celdas cercanas y se definen en función del modelo a tratar.

Desarrollaremos dos modelos: el primero llamado modelo de vida, conocido popularmente como juego de la vida o muerte y que simula el nacimiento y muerte de "seres" en un lugar determinado de acuerdo a una regla. El segundo denominado modelo de tráfico que simula el movimiento de autos de acuerdo a ciertas reglas.

Modelo de Vida: Se trabaja en el plano con un arreglo de dimensión dos. La celda actual es la (0, 0); la celda (–1, 0) es la celda superior y así se siguen definiendo. Las celdas de los límites del plano se consideran vecinas entre los extremos, por eso se dice que el modelo es toroidal. La definición de vecindad es:

(–1, –1)	(–1, 0)	(–1, 1)
(0, –1)	(0, 0)	(0, 1)
(1, –1)	(1, 0)	(1, 1)

La regla de supervivencia de los seres es:

> "Una celda permanece viva si ella está viva y tres o cuatro de sus vecinas están vivas; nace si ella está muerta y tres de sus vecinas están vivas. En cualquier otro caso la celda muere".

El objetivo es expresar en lenguaje simbólico la regla dada en lenguaje coloquial.
La simulación de un modelo real requiere de una expresión capaz de ser leída (entendida) por la computadora y la lógica nos brinda las herramientas para lograr este objetivo.
La regla en lenguaje coloquial puede escribirse mediante tres proposiciones excluyentes, respondiendo al esquema lógico: $p \veebar q \veebar r$

"Si la celda actual está viva y tres o cuatro de sus vecinas están vivas entonces la celda actual permanece viva; si ella está muerta y tres de sus vecinas están vivas entonces nace una celda; en cualquier otro caso la celda muere".

En la actividad del taller los alumnos participaron activamente para definir los estados, las variables y las reglas del modelo. La actividad final, fue discutir las reglas que definen el modelo, utilizando expresiones lógicas
El conjunto de estados es {0, 1} donde el 1 representa el estado "celda viva" y el 0 representa al estado "celda muerta". Necesitamos saber la cantidad de celdas vivas o muertas que se encuentran en la vecindad de la celda actual para determinar el estado siguiente. Para ello utilizamos una variable auxiliar que llamamos "truecount" que es un contador que registra la cantidad de seres vivos de la vecindad de la celda actual. Después de realizar ejercicios parciales
La siguiente expresión lógica describe la regla:

O {{(0, 0) = 1 and (truecount = 3 or truecount = 4)} $\Rightarrow$ (0, 0) =1}
o {{(0, 0) = 0 and truecount = 3}$\Rightarrow$ (0, 0) = 1}
o {(0, 0) = 0}

Modelo de tráfico: Este modelo simula el movimiento de autos, los cuales se desplazan solamente hacia la derecha o hacia arriba. Estos desplazamientos se representan en un "lugar" de dos dimensiones, es decir trabajaremos con un arreglo bidimensional toroidal.

La vecindad de cada celda está definida como se muestra en la tabla siguiente,

	(−1, 0)	
(0, −1)	(0, 0)	(0, 1)
	(1, 0)	(1, 1)

Los movimientos de los autos se rigen por las siguientes reglas:
Usamos 1 para representar autos que van hacia la derecha, y 2 para representar autos que van hacia arriba y el 0 significa que no hay autos en esa celda.

"Si la celda actual tiene programado un movimiento hacia arriba y la celda (−1, 0) está vacía la celda actual se pone en cero, es decir, el auto se mueve hacia arriba; lo mismo sucede si la celda actual tiene programado un movimiento hacia la derecha y la celda (0, 1) está vacía entonces la celda actual se pone en 0 y el auto se mueve hacia la derecha.
Si la celda actual tiene programado un movimiento hacia arriba (derecha) y la celda que está arriba (derecha) está ocupada la celda actual queda en el mismo estado, es decir el auto no se mueve.
Si la celda actual está desocupada y la celda que está abajo (izquierda) tiene programado un movimiento hacia arriba (derecha), la celda actual se pone en 2(1), es decir el auto se mueve hacia la arriba (derecha).
Si la celda actual tiene programado un movimiento hacia la derecha y la celda (1, 1) quiere moverse hacia arriba y la celda (0, 1) está vacía, la celda actual permanece en el mismo estado.
Si la celda actual está vacía y no está programado ningún movimiento, la celda actual permanece en el mismo estado".

Nuevamente y en interacción con los alumnose definieron los estados, las variables y las La actividad final, fue discutir las reglas que definen el modelo, utilizando expresiones lógicas.

El conjunto de estados es {0, 1, 2}. Podemos expresar estas reglas en lenguaje simbólico formando una proposición lógica construida a partir de otras proposiciones unidas con el conectivo "o exclusivo".

O $\{\{(0, 0) = 2$ and $(-1,0) \neq 0\} \Rightarrow (0, 0) = 2\}$
o $\{\{(0, 0) = 2$ and $(-1, 0) = 0\} \Rightarrow (0, 0) = 0\}$
o $\{\{(0, 0) = 0$ and $(1, 0) = 2\} \Rightarrow (0, 0) = 2\}$
o $\{\{(0, 0) = 1$ and $(0, 1) = 0$ and $(1, 1) = 2\} \Rightarrow (0, 0) = 1\}$
o $\{\{(0, 0) = 1$ and $(0, 1) \neq 0\} \Rightarrow (0, 0) = 1\}$
o $\{\{(0, 0) = 1$ and $(0, 1) = 0\} \Rightarrow (0, 0) = 0\}$
o $\{\{(0, 0) = 0$ and $(0, -1) = 2\} \Rightarrow (0, 0) = 1\}$
o $\{(0, 0) = 0\}$

Durante el desarrollo de los talleres se observó entusiasmo y participación. Colaboraron con los docentes alumnos avanzados de la carrera de Ingeniería en Sistemas, becarios de la cátedra, con quienes se hicieron las pruebas en laboratorio. Al finalizar el curso de Matemática Discreta, se distribuyó una encuesta a los alumnos. Ésta mostró que los alumnos asistentes al taller habían elegido mayoritariamente, al capítulo sobre Lógica Proposicional como el que más necesario y útil para futuras aplicaciones en la carrera.

Conclusiones

Un análisis "a posteriori" de la realización didáctica nos permite decir que:

- Los ejemplos mostraron casos de sistemas de eventos discretos sencillos y la potencialidad de la lógica como herramienta para motivar el aprendizaje y la incipiente entrada a la investigación.
- La enseñanza para la comprensión requiere de niveles de comprensión cada vez mayores y de un ejercicio continuo. Un esfuerzo aislado no es suficiente para mejorar la intervención educativa. Es por eso que intentaremos crear situaciones análogas a la que describimos para hacer que cada tema curricular sea relevante en sí mismo.
- Algunos alumnos participaron más activamente que otros. Las reglas de los modelos se programaron en una herramienta de software y se hicieron las corridas en la computadora, pudiéndose analizar en las salidas los estados del sistema en cada período de tiempo. Por razones de tiempo, no todos los alumnos del taller participaron del trabajo en los laboratorios.
- Existen temas que se adecuan mejor que otros a la pedagogía para la comprensión. Si bien una buena enseñanza puede sacar provecho de cualquier tema, es indudable que una adecuada organización del currículum en torno de "tópicos generadores" (Perkins, 1995) que gocen de las características de centralidad, accesibilidad y riqueza, conlleva a hacer más placentera la relación pedagógica: docente-alumno-objeto del conocimiento.
- Para finalizar podemos concluir que la propuesta mejoró el intento educativo en cuanto a los problemas de motivación, integración, comprensión y uso activo del conocimiento en los temas dados. De hecho que los esfuerzos deben continuar, que no son suficientes ni están agotados los ejemplos.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (Editor, Una empresa docente). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Cap.4. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Camara, V.; Rogiano, C.(2001): La lógica en los Modelos de Eventos Discretos. En Alberto, M; Schwer, I; Camara, V.; Rogiano, C.; Meinero, S. *Matemática Discreta, una perspectiva desde las ciencias de la computación*. Santa Fe, Argentina: Centro de Ediciones de la Universidad Nacional del Litoral.

Eisner, E.(1998): *Cognición y Curriculum*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Amorrortu.

Perkins, D. (1995): *La escuela inteligente*. Barcelona, España: Gedisa editorial.

Wainer, G.(1999): *Simulación DEVS y Autómatas Celulares*. Tesis Doctoral. Departamento de Computación. F.C.E. y N. Universidad de Buenos Aires.

Zeigler, B.(1976): *Theory of modeling and simulation*. Wiley & Sons.

Zeigler, B.(1990): *Object-oriented simulation with hierarchical modular models*. Academic Press.

Los SAC favoreciendo la comprensión del cálculo

Sonia Pastorelli; Lilian Cadoche; Adriana Lescano
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional. Santa Fe. Argentina
pastorelli@arnet.com.ar lcadoche@fcv.unl.edu.ar

Resumen
El interés de esta investigación es analizar bajo el marco conceptual de la *Enseñanza para la Comprensión*, los aportes del uso de la computadora en la enseñanza y el aprendizaje del tópico derivadas parciales de funciones de dos variables y sus aplicaciones a problemas de optimización, dado las dificultades observadas en la comprensión de los estudiantes de ingeniería sobre este tema medular en su formación.

Introducción

Son varios los beneficios que el uso de un ***sistema algebraico de cómputo*** (SAC) puede aportar al aprendizaje de la matemática.
Permiten, por ejemplo, integrar el uso de distintas representaciones, simultanear información de registros numéricos, simbólicos, gráficos. Es sabido que además de las dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de la noción de función -amén de las dificultades cognitivas que son reales en las conversiones de un registro a otro, están presentes las que resultan del trabajo de un mismo registro (Duval 1988 y 1993)-. Una causa de esta falta de articulación de registros es quizás los hábitos de la enseñanza tradicional en la que predomina el registro algebraico dándole un status infra-matemático al registro gráfico (Artigue, 1995). Este problema es más notorio en el cálculo en dos variables, donde es muy poco usado en anclaje geométrico en la enseñanza y en el aprendizaje tradicional (quizás derivado de que las representaciones gráficas no resultan sencillas ni rápidas).
Por otro lado, facultan un avance importante en la resolución de problemas, dado que permiten determinar no sólo los resultados rápidamente, sino variar parámetros y condiciones, observar sus efectos y sacar conclusiones.
Otro aspecto beneficioso es la gramática de los SAC. La comunicación entre la persona y la computadora es a través de un lenguaje propio, otra forma de representación de las estructuras matemáticas, que contiene la información mínima, necesaria y suficiente para el tratamiento de los mismos, lo que lleva a la necesidad de que los usuarios (alumnos) manejen ideas ordenadas, concisas, estrictas. Esto exige estructuración y organización de los conceptos.
Utilizando palabras de *Richard Noss* (1999) una de las ventajas más importante de la inclusión de la computadora en la enseñanza de la matemática es:

> "*...su capacidad de ofrecernos significados alternativos para expresar relaciones matemáticas, nuevos tipos de simbolismos, y formas novedosas de manipular objetos matemáticos: en resumen el emerger de nuevas culturas matemáticas. La computadora apunta hacia nuevas formas de expresión de los objetos matemáticos, así como también señala nuevos objetos matemáticos que deben ser expresados*".

El empleo de la computadora entonces, cambia, o más bien *puede y debe cambiar*, el objeto de enseñanza y aprendizaje. Pero se requieren de ciertas estrategias y/o mecanismos que aseguren que esta inclusión y los cambios que traen como consecuencia, redunden en un mejoramiento de los procesos de aprendizaje.

La inclusión de la computadora en la enseñanza de la matemática no sólo un tema de debate actual, sino beneficioso y necesario. Pero también improductivo y hasta peligroso si esta inserción no se planea adecuadamente. El uso de una nueva tecnología necesita de una nueva planificación de estrategias pero también de contenido.
En este trabajo se expone una experiencia donde se empleó el SAC Mathematica como recurso didáctico para favorecer la comprensión del tópico Derivadas Parciales y sus aplicaciones en problemas de optimización.

Marco teórico

Se trabajó bajo el marco teórico *Enseñanza para la Comprensión* (EpC) desarrollado por *Gardner, Perkins, Perrone* y colaboradores de la *Escuela de Graduados en Educación de Harvard*. La visión de esta metodología de la enseñanza refiere a un tipo de constructivismo que desafía la tradicional centralidad de las representaciones como objeto de construcción. Se insiste en que el estudiante no sólo debe construir representaciones sino también capacidades de desempeño.
Para la EpC comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que se sabe. Los *desempeños de comprensión* son actividades que desarrollan y a la vez demuestran la comprensión del alumno al exigirles usar lo que saben de nuevas maneras. La EpC los categoriza en cuatro niveles (Stone Wiske,1999):

- Desempeños de comprensión *ingenua:* proceso no problemático que consiste en captar información disponible. Están basados en conocimiento intuitivo y poco reflexivo
- Desempeños de comprensión de *novato:* basados en los rituales y mecanismo de prueba. La naturaleza y los objetivos de la construcción del conocimiento son descriptos como procedimientos mecánicos paso por paso. La validación de un trabajo depende más de la autoridad externa que de los criterios desarrollados dentro de la disciplina.
- Desempeños de comprensión de *aprendiz:* sustentados en conocimientos y modos de pensar disciplinarios. Muestran un uso flexible de conceptos. Con apoyo, iluminan la relación entre el conocimiento disciplinario y problemas cotidianos.
- Desempeños de comprensión de *maestría* son predominantemente integradores, creativos y críticos y permiten usar los conocimientos para reinterpretar el mundo y a menudo implica una comprensión intradisciplinar, metadisciplinar o interdisciplinar.

Problema: un caso de comprensión ingenua

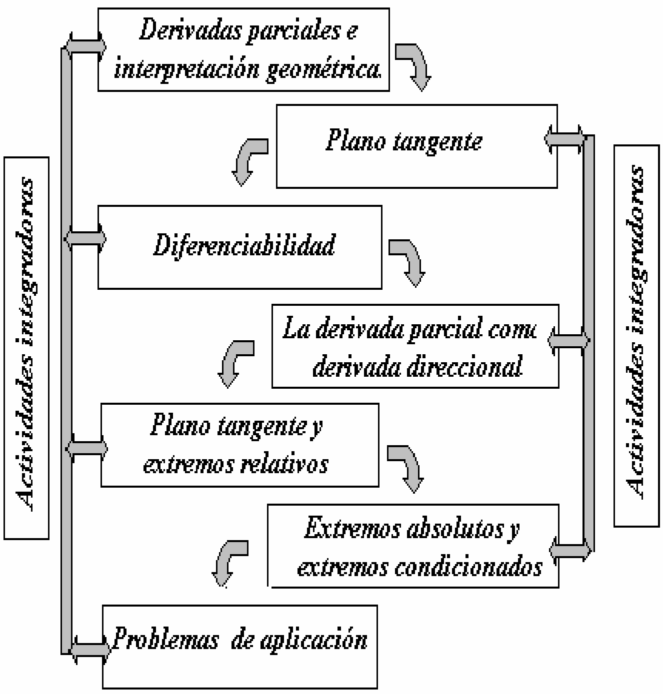
> *Dada la función* $f(x,y)=x^2\, e^{1-2x^2-y^2}$ *, encontrar*
> - *extremos relativos de la función.*
> - *ecuación del plano tangente a la superficie en cada máximo relativo.*

Durante el transcurso del año 1999, el 78% de los alumnos de Análisis Matemático II de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información aprobaron el trabajo práctico recuadrado.
A pesar que las calificaciones fueran consideradas satisfactorias -dado que cumplían con el porcentaje requerido de las premisas dadas-, el análisis de los procedimientos mostró falta de articulación entre conceptos, derivados quizás de conocimientos *frágiles, inertes, o ritualizados* (*Perkins*, 1995).
Por ejemplo, para hallar la ecuación del plano tangente en el máximo relativo; el cual evidentemente tiene la ecuación z= f (xo,yo), el 56% de los alumnos repiten cálculos

efectuados en el inciso anterior (derivadas parciales en el punto) y reemplazo en la ecuación general del plano tangente. Incluso para varios (26%) y debido a errores algebraicos, el plano tangente no resultó horizontal.
¿Puede suponerse que el alumno comprendió lo que es un extremo relativo? ¿Encuentra alguna relación entre las fórmulas de las derivadas parciales y la representación gráfica de la función? ¿Tiene una adecuada representación del plano tangente a una superficie?
Los bajos niveles de comprensión observados en este tema medular en la formación de los futuros ingenieros introdujeron la necesidad de una nueva intervención. En el intento de mejorar los desempeños de comprensión llevamos a cabo una experiencia de aprendizaje que incluya a la computadora como mediadora en la comprensión del tópico aplicaciones de la derivada parcial.

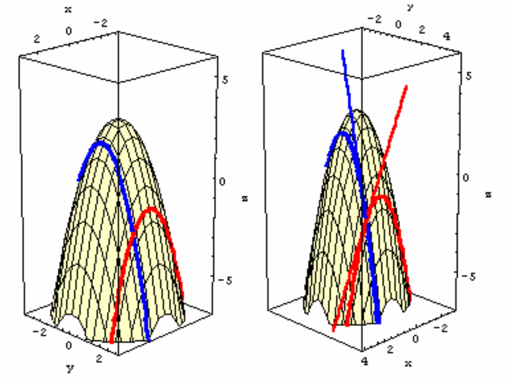
Metodología

En esta propuesta el eje de la metodología empleada es la participación de todos los protagonistas del proceso de enseñanza y aprendizaje. Este método encuadra la participación, organizándola como proceso de aprendizaje que potencie la creatividad, disminuya los riesgos de la dispersión y la apatía y aliente la espontaneidad. De esta manera el aula puede convertirse en un espacio en el que todos sean los artesanos del conocimiento, desarrollando los instrumentos para abordar el objeto de forma tal que los protagonistas puedan reconocerse en el producto de la tarea. Este esquema de aula-taller, implica momentos de actividad individual y momentos de actividad grupal que permite a los participantes aprender a pensar y a actuar junto con otros, es decir a copensar y cooperar toda vez que estimula el desarrollo de actitudes de tolerancia y solidaridad.

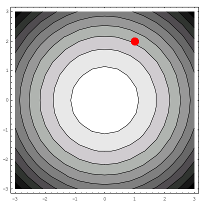


Durante el desarrollo del taller el docente orienta y guía al alumno en la elaboración del conocimiento, siendo más importante alentar la tarea de hallazgo de caminos que conduzcan a una nueva información que la sola adquisición de la misma.
Sobre la base de *Guías de Laboratorio* se alienta a los estudiantes para que adquieran la información por sí mismos y establezcan nexos y relaciones que los lleven a niveles cada vez más avanzados de comprensión.
Estas guías incluyen actividades que permitan al estudiante reelaborar el marco teórico, enriqueciéndolo, complementándolo, aplicándolo a la realidad, etc.
Los contenidos fueron organizados según el esquema mostrado.

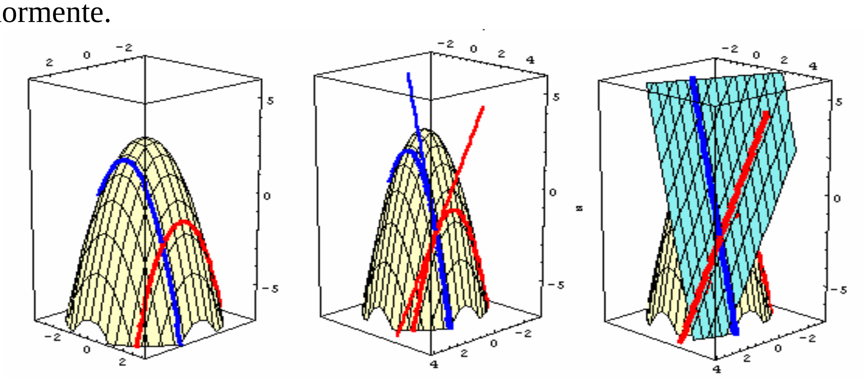
Resumen de las actividades



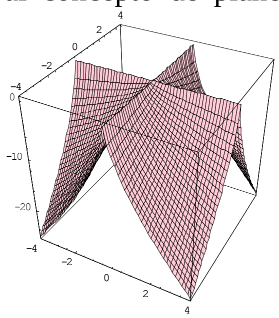
En primer actividad se trabaja sobre la obtención e interpretación geométrica de las derivadas parciales de la función $f(x,y)$ en $(xo;yo)$. Se pide que se tracen, usando el software Mathematica las curvas de intersección de la superficie cuya ecuación es f con los planos de ecuación $x=xo$ e $y=yo$ y las rectas tangentes respectivas a dichas curvas. Cada grupo particulariza con una función y un punto.
La próxima tarea es calcular la pendiente del ángulo que cada una de las rectas anteriores forman con el plano xy y plantear el algoritmo que permite la solución del problema: definición de las derivadas parciales $f_x\,(xo;yo)$ y $f_y\,(xo;yo)$.



Las actividades integradoras tienen por objeto permitir realizar la evaluación continua de los aprendizajes. Como actividad integradora aquí se pide estimar dichas derivadas parciales usando un mapa de contorno de f y contrastarlas con las obtenidas.
Como actividad de transición al segundo contenido; plano tangente, se requiere trazar el plano que contiene a las dos rectas trazadas anteriormente.

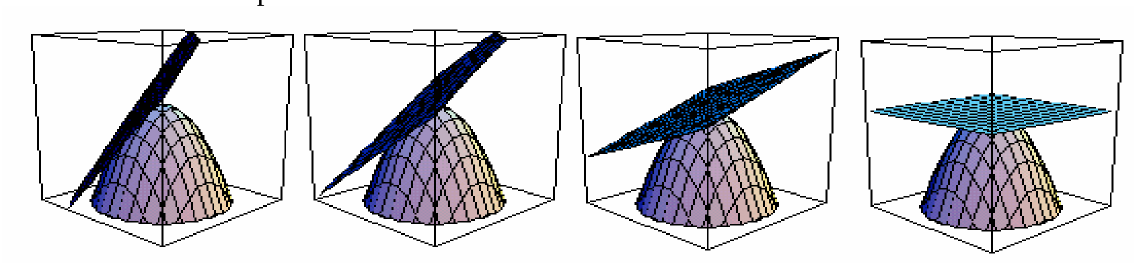


A través de la programación de movimientos se visualiza dicho plano desde distintos puntos de vistas. Los alumnos tienen una primera aproximación al concepto de plano tangente.

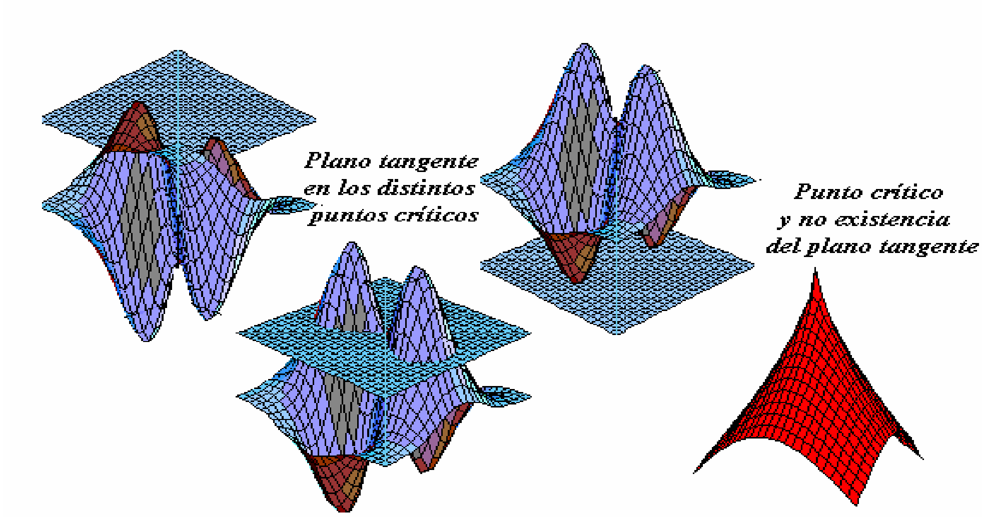


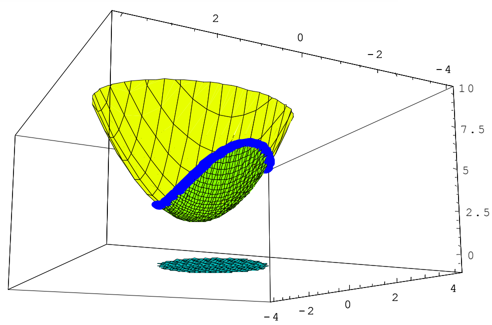
A partir de las conclusiones obtenidas se los invita a expresar posibles definiciones para el concepto “plano tangente a una superficie” y ecuación genérica del mismo en un punto cualquiera.
El salto al tercer contenido (diferenciabilidad) está organizado alrededor de la indagación: *Si existen las derivadas parciales.... ¿Existe el plano tangente?*
La geometría de las funciones con valores reales nos mostró que deriva en cadenas de desempeños generativas. Los alumnos visualizan la relación entre diferenciabilidad y la existencia de plano tangente. Como actividades integradoras se pide revisar el concepto de plano tangente anteriormente

expresado además de verificar o desechar la hipótesis de la pertenencia al mismo de las rectas tangentes respectivas a cada una las curvas trazadas sobre la superficie por el punto.
La transición a la cuarta actividad se hace a través de la propuesta de investigación de la razón de cambio de *f* en la dirección de un vector ***v*** cualquiera, la estimación de la misma a partir de un mapa de contorno para luego indagar en distintas bibliografías sugeridas la definición de los conceptos d*erivada direccional y gradiente* .
Como actividad integradora se pide relacionar los conceptos gradiente y plano tangente a una superficie. Por medio de distintas animaciones los alumnos concluyen sobre la condición necesaria para la existencia de un extremo relativo de una función derivable.



Otros ejemplos revelan que la condición es necesaria pero no suficiente y que en el caso de funciones no derivables el criterio se amplía.

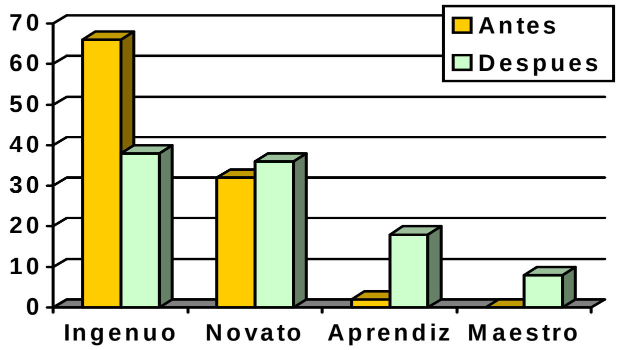




Por último se introduce el concepto de extremo absoluto y extremo condicionado, la relación entre ellos y con los relativos.
Las representaciones gráficas juegan un papel fundamental en este punto. Las actividades integradoras versan sobre la diferenciación entre éstos y la determinación del algoritmo apropiado para el cálculo de los mismos.

Conclusiones

Luego del trabajo en el laboratorio descrito anteriormente se evaluaron nuevamente los niveles de comprensión. El gráfico muestra los porcentajes de alumnos ubicados en cada nivel de comprensión antes y después del desarrollo de esta metodología.



Esta tabulación muestra claramente el aumento del número de alumno en la categoría de niveles de comprensión mas alto (de aprendiz y de maestro) mientras que disminuye el número de alumnos con comprensión ingenua.

Esta metodología resultó satisfactoria, tanto para los alumnos como para los docentes involucrados. La propuesta desató el interés de los alumnos, que se involucraron en la tarea dentro y fuera del gabinete. Las numerosas consultas sobre los mecanismos para sortear las dificultades encontradas en la programación probaron tal interés. Los logros individuales fueron casi siempre compartidos por el grupo, mostrando un compromiso tanto para la autogestión como para el trabajo en equipo.

Como punto débil de la experiencia es preciso reconocer que este modelo de aprendizaje, si bien resulta significativo, deriva en un proceso gradual y hasta cierto punto, lento. Esto demanda una selección de temas, puesto que de abundar en esta metodología no se cumplirá con los contenidos del currículo. Para superar este obstáculo, se trabaja en gabinetes extracurriculares, y con guías que permiten que el alumno pueda realizar actividades en forma individual o grupal.

Referencias bibliográficas

Artigue, Doudady, Moreno, Gómez ; editor (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Blythe y colaboradores (1999). *La enseñanza para la comprensión: Guía para el docente.* Argentina: Paidós.

Duval, Robert (1995). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* México: Hitt.

Noss, Richard (1998). N*uevas culturas, nuevas Numeracy.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Perkins, David (1995). *La Escuela Inteligente. Del adiestramiento de la menoria a la educación de la mente*. España: Gedisa.

Stone Wiske, Martha; compiladora (1999). La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica" Argentina: Paidós.

Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales

Gabriela Buendía Abalos, Carlos A. García Pérez
Cinvestav, IPN. México
buendiag@hotmail.com carlos_agp@hotmail.com

Resumen
El proyecto tiene el propósito identificar el significado las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales desde la perspectiva de su interpretación gráfica. En primer término se presenta, a manera de justificación, el tipo de presentación que actualmente es vigente en el discurso matemático escolar. El discurso es analizado, en esta etapa del proyecto, desde la perspectiva de los libros de texto en el área. En ellos se observa la privilegiación ya sea del enfoque algorítmico o analítico en la presentación y justificación de este tema. Los recursos gráficos que utiliza cada autor, si es que recurre a ellos, se tienen más bien como figuras de apoyo. La propuesta que realizamos es emplear la herramienta gráfica para resignificar las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Desde esta perspectiva, presentamos la fundamentación gráfica y visual de la propuesta dejando abierta la posibilidad de diseñar una secuencia didáctica que se apoye en los resultados que surgieron del proyecto.

Introducción

La investigación en el área de ecuaciones diferenciales desde la perspectiva de la matemática educativa ha tenido diferentes aproximaciones. Entre los resultados obtenidos se encuentran los fundamentados en los recursos gráficos relacionados con la solución de la ecuación, en particular el comportamiento tendencial de las funciones como categoría del conocimiento matemático (Cordero, 2001; Cordero y Solis, 1997).

En este contexto nuestra investigación pretende aportar evidencias de la presentación y justificación de las condiciones iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias, pues, por lo general la necesidad de n condiciones iniciales para una ecuación diferencial de n-ésimo grado queda reducida a una cuestión algorítmica. Pretendemos, entonces, estudiar y fundamentar una propuesta de resignificación, apoyada en argumentos de tipo gráfico relacionados con la familia de soluciones y las condiciones iniciales que determinan la unicidad. De esta manera, la propuesta es alternativa a la presentación que actualmente se desarrolla en el discurso matemático escolar.

La Sociepistemología como marco teórico

El proyecto se enmarca en la aproximación socioepistemológica y está dirigido dirigida hacia el diseño de secuencias de resignificación. La aproximación socioepistemológica se presenta como un paradigma emergente que amplía la problemática de la matemática educativa incorporando al estudio del conocimiento cuatro dimensiones de manera sistémica: la epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural. Desde la perspectiva epistemológica nos interesa profundizar en la naturaleza del conocimiento matemático identificando su génesis, estructura y modificaciones que experimenta dentro del contexto social y cultural en el que se desarrolla. Es decir, el conocimiento matemático visto como resultado de un conjunto de actividades, contextualizadas en relaciones sociales y raíces históricas. La dimensión didáctica permite caracterizar las cualidades particulares del discurso matemático escolar utilizado en la adopción y adaptación del conocimiento matemático en la cultura escolar.

Los procesos de apropiación del conocimiento por parte del alumno del alumno, están fundamentados en la actividad que realiza el estudiante en la construcción del conocimiento. Esta actividad es ahora reconocida como organización social en la que se construye conocimiento. En esta organización social, el conocimiento tiene significados propios y está conformado por versiones que se comparan y negocian durante el proceso.

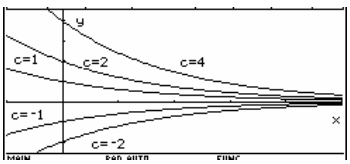
Entonces, si bien la actividad humana como un proceso sociocultural, se encuentra inmerso en cada una de las dimensiones enunciadas, participa también como una dimensión mas que aporta evidencias con la finalidad de robustecer los resultados de la investigación. Podremos ahora dar cuenta de las actividades en las cuales se involucra un alumno, y de las herramientas que utiliza, para construir conocimiento.

Propósito del Proyecto

Esta etapa del proyecto considera dos aspectos fundamentales. El primero de ellos corresponde al análisis de textos en el área de ecuaciones diferenciales ordinarias y física, mientras que el segundo aspecto, considera un estudio gráfico y analítico que tiene como propósito identificar las cualidades visuales que caracterizan a las condiciones iniciales de una ecuación diferencial.

El centro de atención del análisis de textos radica en estudiar el significado que se asocia a las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales lineales de primer, segundo y tercer orden. De manera breve, podemos mencionar que los libros de textos que se suelen utilizar en el Area de Nivel Superior, presentan a la ecuación diferencial y su solución ,
$y' + ay = 0$; $y = ce^{-ax}$, en la que está representada una infinidad de soluciones, como un argumento para introducir las condiciones iniciales de la ecuación diferencial. (Boyce y DiPrima,1983)

Dicha solución representa una familia de curvas de un parámetro, llamadas curvas integrales de la ecuación. En la figura, cada curva integral es la representación geométrica de la solución correspondiente de la ecuación diferencial. Especificar una solución particular, lo cual sería necesario dado el Teorema de Existencia y Unicidad, equivale a tomar una curva integral particular de la familia de curvas de un parámetro. Para hacer esto, por lo general conviene escribir un punto (x_0, y_0) por el cual debe pasar la curva integral; es decir, buscar una solución tal que $f(x_0) = y_0$. Tal condición es la que recibe el nombre de condición inicial.



Es necesario recalcar que la argumentación de la necesidad de las condiciones iniciales tiene su argumento en la identificación de una *curva particular* y después se lleva a la idea de una *solución particular*.

Por otra parte, en libros de física o bien con aplicaciones particulares, las condiciones iniciales de una ecuación diferencial de segundo orden, se presentan en relación al fenómeno, como condiciones iniciales. Esto es, por ejemplo, en el caso del movimiento de un resorte, "pueden existir las condiciones iniciales asociadas a la ecuación ($\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0$): $x(0) = \alpha,\quad y\acute{}(o) = \beta$ que representan la magnitud del desplazamiento inicial y la velocidad inicial, respectivamente. Por ejemplo, si $\alpha > 0$ y $\beta < o,$ se trata de una masa que parte de un punto abajo de la posición de equilibrio y a la cual se le ha comunicado una velocidad dirigida hacia arriba. Si $\alpha < 0$ y $\beta = 0$, se trata de una masa en reposo que se suelta desde un punto que esta a | α | unidades arriba de la posición de equilibrio." (Tijonov y Samarsky ,1983)

En el aula, se presenta la situación que pretendemos estudiar como *Problema de valor inicial para una ecuación diferencial lineal:* "

$$\textit{Resolver} \qquad a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)\,;\ \textit{sujeta a} \qquad y(x_0) = y_0,$$

Dado que la solución de la ecuación es una familia de curvas, resulta inmediato tanto algebraica como gráficamente que si se quiere seleccionar una de ellas, es suficiente con señalar un punto (*x*,*y*) por donde debe pasar la curva deseada, esto es, la condición $y(x_0) = y_0$. En este momento, el docente puede optar por presentar la generalización de diferentes maneras.

Una de ellas, es a través de la resolución algebraica de la ecuación diferencial. Esto es, para resolver una ecuación diferencial de orden superior, primero se resuelve la ecuación característica la cual es una ecuación algebraica de grado *n* con *n* soluciones. Al expresar la solución de la ecuación diferencial, tenemos una combinación lineal de las *n* soluciones de la ecuación algebraica, con lo cual obtendremos *n* constantes. Esto hace necesario, si se quiere hallar una solución particular, que tengamos *n* condiciones iniciales para así generar un sistema de ecuaciones donde sea posible hallar las *n* constantes.

Propuesta

El análisis gráfico acerca de las condiciones iniciales de ecuaciones diferenciales ordinarias se realizó con los propósitos

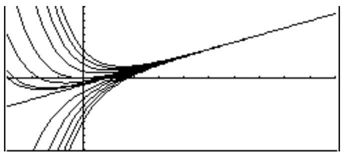
a) Generar significados que permitan ampliar los propuestos por los libros de texto de física y matemáticas.
b) Establecer las características generales de las condiciones iniciales para diferentes casos
c) Identificar los posibles puntos de referencia que permitan el diseño de una secuencia didáctica en las fases posteriores.

d) identificar las propiedades visuales de las condiciones iniciales y formular vínculos algebraicos para argumentar la pertinencia de cada una de ellas.

Situación I (primer orden):

Para el propósito del estudio, partimos de la ecuación diferencial de primer orden $ay' + y = x$, cuya familia de soluciones es: $y(x) = x - 1 + k\,e^{-x}$

Observamos en las gráficas que su comportamiento tiende a la recta y = x – 1



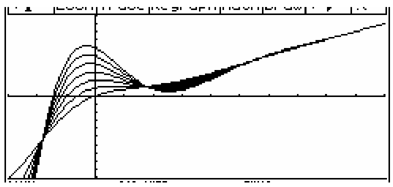
Por otra parte, observamos que en este caso las curvas que conforman la familia de soluciones de la ecuación diferencial no se cruzan entre ellas. Por esta razón, para determinar una solución particular es suficiente con la condición inicial que nos indique por qué punto pasa la curva que representa la solución buscada. Esto es, basta con una solución de la forma $y(x_0) = y_0$

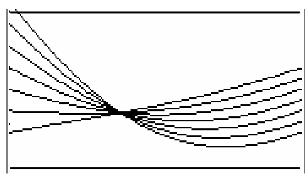
Situación II (Segundo orden)

De manera análoga a la situación anterior, para continuar con la ilustración de la secuencia del estudio, se limita al análisis de la ecuación diferencial, $y'' + y' + y = x$, cuyas soluciones forman la siguiente familia de curvas

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(k_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + k_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Tomaremos solamente algunos elementos de esta familia para ejemplificar lo que sucede con su comportamiento. Para ello, fijaremos $k_2 = 1$ y tomaremos algunos valores para k_1. El resultado lo observaremos en la siguiente ventana y su acercamiento.





Vemos que no es suficiente determinar un punto por donde pasa la curva, puesto que por un punto puede pasar más de una. Esto implica la necesidad de establecer, además, la pendiente de la tangente al punto en cuestión para poder determinar a cuál de dicho conjunto de curvas nos estamos refiriendo específicamente. Esto es, condiciones del tipo $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$

Con estas dos condiciones queda establecida la unicidad de la solución. Algebraicamente es posible demostrar que, efectivamente, la familia de funciones no presenta ningún otro tipo de intersecciones que obliguen a necesitar más condiciones iniciales.

Situación III (Tercer orden)

Finalmente llegamos a la situación de abordar la ecuación diferencial de tercer orden con sus respectivas condiciones iniciales. Limitaremos el estudio a la ecuación diferencial, $y''' + y'' + y' + y = x$ cuya familia de soluciones de esta ecuación está dada por $y = k_1 e^{-x} + k_2 \cos x + k_3 \operatorname{sen} x$

Nuestro interés es encontrar una interpretación a las tres condiciones iniciales: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$; que son necesarias para determinar una solución particular de la ecuación de tercer orden.

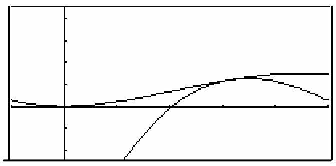
Para mostrar la necesidad de tres condiciones iniciales, proponemos dos funciones que hemos construido que pasan por el mismo punto por $(\pi/2, e^{-\pi/2} + 1)$ y que, además en ese punto la pendiente de sus tangentes es la misma $(- e^{-\pi/2} + 1)$::

$$y_1 = e^{-x} - \cos x + \operatorname{sen} x \; ; \; y_2 = (1 - 2e^{\pi/2})\, e^{-x} + \cos x + 3 \operatorname{sen} x$$

Sin embargo, sus concavidades son distintas:

$$y''_1(\pi/2) = e^{-\pi/2} - 1 \qquad\qquad y''_2(\pi/2) = (1 - 2e^{\pi/2})\, e^{-\pi/2} - 3 = e^{-\pi/2} - 5$$

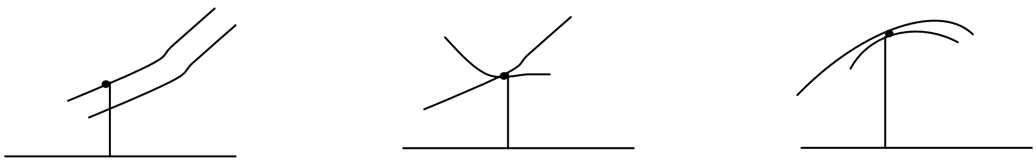
Grafiquemos y veamos qué pasa



Aquí observamos que ambas curvas pasan por el mismo punto, con la misma pendiente en ese punto, pero con diferente concavidad por lo que para garantizar la unicidad de la solución es necesaria una tercera condición acerca de la concavidad

Los tres casos presentados pueden resumirse de la siguiente manera:

$ay' + y = f$	$ay'' + by' + y = f$	$ay''' + by'' + cy' + y = f$
$y(x_0) = y_0$	$y(x_0) = y_0$	$y(x_0) = y_0$
	$y'(x_0) = y'_0$	$y'(x_0) = y'_0$
		$y''(x_0) = y''_0$



Comentarios finales

La revisión de libros de ecuaciones diferenciales ha permitido observar diferentes aproximaciones hacia el significado de las condiciones iniciales e identificar diferencias con respecto a los libros de texto en el área de física.

La alternativa gráfica proporciona la oportunidad de construir significados visuales que permiten ser relacionados con significados analíticos. La realización de cada una de las actividades permitió identificar dificultades técnicas y visuales al tratar de argumentar gráficamente el significado de las condiciones iniciales.

Existe la posibilidad de diseñar una secuencia didáctica con el objetivo de permitir al alumno construir el significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales de primer, segundo y tercer orden.

Referencias bibliográficas

Boyce, W. y DiPrima, R. (1983). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Tr. Álvarez, S. México: Limusa.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 4(2)103-128

Cordero, F. y Solis, M (1997). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo.* Cuadernos Didácticos. Vol 2. Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamérica.

Tijonov A. y Samarsky A. (1983). *Ecuaciones de la física matemática*. Tr. Tolsá, J. Tercera edición. Moscú: Editorial MIR.

La variación, la aproximación y la transformación, como un marco de reconstrucción de significados de la derivada

María del Pilar Rosado Ocaña, Francisco Cordero Osorio
Centro de investigación y Estudios Avanzados del IPN. México
mrosado@mail.cinvestav.mx fcordero@mail.cinvestav.mx

Resumen
Se presenta un avance de un proyecto de investigación cuya finalidad es formular una reconstrucción del significado de la derivada, la cual, se basará en tres situaciones: la de aproximación, la de variación y la de transformación. Las situaciones reflejarán la posibilidad de reconstruir significados de la derivada y explicarán la relación de éstos con el concepto de derivada, a través de la actividad humana.

Problemática

La problemática fundamental de la enseñanza de las matemáticas, consiste en una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar; cada una es de naturaleza y necesidad distinta. En ese sentido, la tarea fundamental de la Matemática Educativa consiste en reorganizar a la obra matemática. La fuente principal de la reorganización se encuentra en la reconstrucción de significados en contextos interactivos que formula la organización social del salón de clases (Cordero, 2001). El concepto de la derivada ha tenido muchos acercamientos, sin embargo no es claro su reorganización en la matemática escolar. Un cuestionamiento que se hace, en el marco de la problemática es, si la derivada como concepto es el resultado de la actividad. Es decir, si corresponde a la naturaleza del conocimiento que proviene de la actividad. Se percibe en diferentes investigaciones que el concepto de derivada no corresponde a esa naturaleza. En Mirón (2000) se reporta que el estudiante no incorpora significados a ésta a pesar de conocer que la derivada es la pendiente de una recta.

En este artículo, se presenta un avance de un proyecto de investigación que considerando el cuestionamiento dentro de la problemática anteriormente mencionada, se propone a formular una reconstrucción del significado de la derivada que se basará en tres situaciones: la situación de aproximación, la situación de variación y la situación de transformación. Las situaciones reflejarán la posibilidad de reconstruir significados de la derivada y explicarán la relación de éstos con el concepto de derivada.

Pregunta de Investigación

Dentro del marco anterior es obligado formular la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Qué significados son posibles reconstruir con relación a la derivada a través de las situaciones de aproximación, variación, y transformación, en contextos interactivos de los estudiantes?

Para aproximarse a una respuesta, se pretende en primer lugar hacer un estudio exploratorio a un grupo de estudiantes de bachillerato y de licenciatura. Posteriormente basándose en el marco teórico y la metodología elegida de la investigación se realizará un diseño de la situación para hacer la recolección de datos y su respectivo análisis.

Hipótesis

La hipótesis consiste en creer que las reconstrucciones de los significados de la derivada se darán si los participantes construyen los argumentos correspondientes de cada una de las situaciones. En dado caso, los argumentos serían, respectivamente: la predicción, el comportamiento tendencial de las funciones y la analiticidad de las funciones.

Marco Teórico

De acuerdo a la problemática, se formula una epistemología inicial (la hipótesis de investigación), se diseña la situación y su implementación basada en esa epistemología, se recoleccionan los datos y se analizan para revisar la epistemología.
El marco teórico sobre el cual estará basado el procedimiento anterior es la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) de Dubinsky (Asiala, et al, 1996). Sin embargo, para articular la reconstrucción de significados con las construcciones mentales, la descomposición genética jugará un papel importante.
La descomposición genética describe las construcciones mentales que un individuo pudiera hacer para lograr el entendimiento del concepto matemático. Pero, por la naturaleza de la teoría APOE la descomposición genética está compuesta de construcciones mentales que hacen referencia a un concepto matemático. Esto obliga a considerar como marco de referencia del concepto los objetos y las relaciones entre ellos que entran en cuestión.
Sin embargo, el marco de referencia podría ampliarse si consideramos explícitamente la reconstrucción de significados de los conceptos matemáticos que se dan en contextos interactivos del salón de clases y de ahí establecer la descomposición genética.
Una reconstrucción de significados en contextos interactivos pudiera bien ser estudiada a través de significados, procedimientos, procesos y objetos, y argumentos que en las interacciones necesariamente surgen. En conjunto, los cuatro elementos anteriores componen una situación del concepto, y pudiera ser la base para una descomposición genética. Los significados son los símbolos en un sistema que se construye y se usa en la interacción, los procedimientos son las operaciones comunes inducidas por los significados, los procesos y objetos son las diferentes construcciones mentales que aparecen en los procedimientos y los argumentos son los organizadores del contenido que entra en juego en la situación presentado en diferentes versiones para convencer (Cordero, 2001). En el marco anterior, la situación del concepto es una epistemología del mismo, donde los cuatro elementos que la componen están mutuamente relacionados, a priori tales elementos no aparecen en las definiciones de los conceptos. Se trata pues, de construir una descomposición genética basada precisamente en esta epistemología.

Metodología

La metodología de la investigación consiste en observar a las situaciones a través de un ciclo iterativo, considerando tres elementos mutuamente relacionados: análisis de hechos o datos para después transformarlos en fenómenos didácticos, diseño de la situación y de su implementación, la recolección de datos y con ello considerar la experiencia de la cual se partió. (Martínez, 1999).

Estos tres elementos componen seis etapas para alcanzar la actualización de la descomposición genética de los conceptos involucrados en las situaciones.

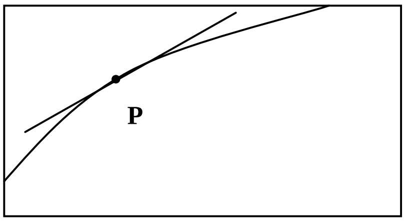
- En la etapa uno, se partirá de una experiencia epistemológica estudiando el contenido matemático correspondiente al tópico del proyecto, y se organizará el contenido con base a lo que significa entender el concepto y cómo el concepto puede ser construido por el que aprende. (Cordero, 1998).
- Para la etapa dos, se trabajarán ejemplos de diseño e implementación de situaciones y colección de datos en el laboratorio y en el salón de clases; se usa la tecnología, en las actividades con los estudiantes individualmente y en pequeños grupos, las observaciones se harán a través de métodos del aprendizaje cooperativo y método de las entrevistas clínicas.
- En la etapa tres, se realizará un análisis de los datos coleccionados y posteriormente se reconsiderará la experiencia de la cual se partió. Las interpretaciones de las respuestas dadas por los estudiantes ante las situaciones, estarán basadas en el marco de las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas); y el desarrollo de esta ante las situaciones. Se estudiarán las bases para transformar los datos (o hechos) en fenómenos didácticos.
- En la etapa cuatro, al analizar los datos coleccionados y de acuerdo a los resultados obtenidos, se espera encontrar los fundamentos para la aplicación de la situación en el proyecto. Al realizar el rediseño de la situación, se partirá de esos resultados.
- Para la etapa cinco, se realizará la aplicación del rediseño y la colección de datos.
- En la etapa seis, se realizará el análisis de datos y la actualización de la descomposición genética. Se pretende alcanzar un refinamiento del recorte o amplitud del entendimiento sobre el cuál se partió. Las interpretaciones continuarán dentro del marco de las construcciones mentales. Y la iteración continuará hasta alcanzar una explicación de la evolución socioepistemológica del contenido matemático de la problemática.

Desarrollo de la investigación

En la didáctica actual, todavía hallamos énfasis en los aspectos formales y rigurosos, dejando de lado los aspectos epistemológicos y psicológicos concernientes a los conceptos. En el cálculo, los conceptos fundamentales son señalados por la derivación e integración explicados a través de las concepciones del límite y de función, acompañados de sus representaciones geométricas, la recta tangente a una curva, y el área bajo la curva. Cabe señalar que esta didáctica ha generado una “cultura”, en el profesor y estudiante, aprenden a “decir” lo que es la derivada e integral y representarlos geométricamente, sin tener una explicación que les permita estudiar fenómenos de variación continua, sólo lo conciben como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles aplicación (Cordero, 1997).

Esta didáctica tiene un buen desarrollo de los argumentos analíticos sobre los conceptos, logrando matizarlos a través de los dominios de las funciones, sin embargo la didáctica insinúa que estos argumentos sustituyen cualquier otro tipo de argumentos, por ejemplo, los intuitivos y los visuales.

La característica fundamental de esta didáctica es que toma los conceptos matemáticos como objetos ya hechos, sin considerar que estos conceptos tienen que ser construidos por el sujeto como una herramienta funcional que le será posible tratar con distintas clases de situaciones. El concepto de derivada es presentado comúnmente por ventanas como la siguiente:



Comúnmente, se le presenta al alumno una curva, se señala un punto y se le pide que trace la recta tangente a la curva en dicho punto. Sin embargo, este tipo de ventanas nos pueden representar tres situaciones, la situación de variación, la situación de aproximación y la situación de transformación (Cordero, 2001):

- Para la situación de aproximación. Se presenta por lo general en libros de cálculo, la expresión:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

que define la derivada en el punto x_0, con el tipo de preguntas: “hallar la ecuación de la recta tangente en el punto P de la curva $y = f(x)$”, los procedimientos que se siguen en esta situación de aproximación son el límite de un cociente cuyos procesos y objetos se reflejan en la función, la pendiente y la derivada y el argumento en esta situación es la analiticidad de la función.

- Para el caso de la situación de variación, la clase o el tipo de preguntas que se plantea es, “sean $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ condiciones iniciales de cierta posición de un móvil y se pide predecir la siguiente posición”, este tipo de enunciados y de problemas no es tan común, los procedimientos aquí son la comparación de dos estados, digamos un estado inicial y uno siguiente que es el que se quiere predecir, cuyos procesos y objetos se reflejan sobre cantidades, variación continua y estado.

- Para la situación de transformación, se presenta con una expresión que puede ser de la forma $y = Af(bx + c)$ donde el tipo de preguntas sería en este caso, “determinar el valor de los coeficientes *A, b,* y *c* para que la curva $y = f(x)$ se parezca a la recta en un intervalo I_0”, los procedimientos en esta situación son, la variación de coeficientes de la transformada de una función y los procesos y objetos se reflejan sobre los patrones y comportamientos de las gráficas.

Cada uno de estos tres argumentos puede verse como una construcción del cálculo, pero también se puede considerar que los tres en conjunto proceden de una sola construcción; en

conjunto estos argumentos los podemos considerar como una epistemología del cálculo, que nos ayudan tomando en cuenta la modelización basada en la actividad humana.
La idea central, es diseñar situaciones considerando la nueva epistemología con esos tres elementos que no solamente debe tomar en cuenta la adquisición del conocimiento, sino también el desarrollo de actividades. Esas situaciones deben mostrar o interpretar de alguna manera relaciones entre dos grandes contextos que son el contexto algebraico y el contexto gráfico. Además, es importante considerar que el lenguaje de herramientas basado en la actividad humana nos ayuda a identificar a la categoría del comportamiento tendencial de las funciones a través de argumentos cualitativos, estos argumentos cualitativos nos llevan a nuevas acciones que nos reflejan un intercambio permanente entre los contextos algebraicos y gráficos.

Una epistemología del Cálculo

La epistemología inicial consiste en establecer el marco de referencia del contenido matemático (dimensión epistemológica) y los planos de representación y procedimientos del estudiante (dimensión cognitiva). Tanto los marcos de referencia, como las representaciones y procedimientos ayudan a generar los argumentos (dimensión didáctica y social).
Las explicaciones epistemológicas de estas categorías se han basado en cuatro elementos que son los significados y sistemas simbólicos, los procedimientos, los procesos y objetos y los argumentos. Esos cuatro elementos componen una reconstrucción del cálculo:

La siguiente tabla, resume lo anterior,

	Construcciones de representación		
Situaciones	**Procedimientos**	**Procesos y objetos**	**Argumentos**
Variación	Comparación de dos estados	Cantidad continua	Predicción
Transformación	Variación de los coeficientes de una función	Instrucción que organiza comportamientos	Comportamiento tendencial de las funciones
Aproximación	Operaciones lógico-formales	Fórmulas algebraicas	Analiticidad de las funciones

En las construcciones de representación se van a considerar las tres situaciones de variación, transformación y aproximación, y para cada una de ellas, se tienen diferentes procedimientos, procesos y objetos y argumentos; para la situación de variación, los procedimientos consisten en la comparación de dos estados, los procesos y objetos son representados por la cantidad continua y el argumento es la predicción; para el caso de la transformación, sus procedimientos son la variación de los coeficientes de una función, sus procesos y objetos se representan como una instrucción que organiza comportamientos y el argumento es el comportamiento tendencial de las funciones; y para la situación de aproximación, tenemos como procedimientos a las operaciones lógico-formales, como procesos y objetos, a las fórmulas algebraicas y como argumento la analiticidad de las funciones (Cordero, 2001).

Esta es la idea general de la problemática y cómo se llevará acabo la investigación. Uno de los aspectos importantes será el diseño de la situación para lograr reconstrucciones de significados de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*. II, 6, 1-32.

Cantoral, et. Al, (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Ed. Trillas, México, D.F.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre las construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana* (aceptado para su publicación en Relime).

Cordero, F. (1997). *Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada*. Serie: Antologías, número 1.

Cordero, F. Y Solís, M. (1997). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo.* Serie Cuadernos de Didáctica, Grupo Editorial Iberoamérica, 2ª. Edición, 79 pp.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Numero 1, 56-74.

Martínez, M. (1999). *Estudio de las relaciones que el estudiante hace para construir la gráfica de la derivada y de la primitiva: efectos de la enseñanza en la transformación de funciones*., tesis de maestría. Dirección de estudios de posgrado. Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones f y f' en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas*., tesis doctoral. Departamento de Matemática

Matemática básica para ingresar a la universidad

Rosa Montalto; Liliana Casetti; Marta Welti
F. de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza, Argentina
romontalto@sinectis.com.ar

Resumen
El presente trabajo es el resultado de un proyecto subsidiado por la Asociación Cooperadora de la Universidad Nacional de Cuyo de Mendoza, Argentina. Fue elaborado con el objeto de ser utilizado por los estudiantes que deseen ingresar a facultades de Ciencias Económicas y Afines.
El material es presentado de manera tal que el alumno pueda establecer relaciones significativas con el bagaje de conocimientos que trae del nivel medio. Además, teniendo en cuenta las dificultades que tienen los alumnos en resolver situaciones problemáticas, al final de cada capítulo se ha incorporado una serie de ejercicios y problemas de aplicación a las Ciencias Económicas y al contexto, con el objeto de ayudar a fijar los conocimientos y desarrollar habilidades.

Descripción del proyecto

Fundamentación del trabajo

Para los jóvenes que ingresan a la Universidad, la carrera universitaria se vislumbra como el estudio elegido, donde obtendrá una formación profesional de calidad que le permitirá, en un futuro no muy lejano, realizarse personalmente e independizarse económicamente. Asumir la responsabilidad de ser universitario es una forma de asumir el protagonismo de la propia vida. Este paso se presenta como el inicio de una nueva etapa de responsabilidad individual y profesión.

Los docentes no desconocemos el problema que se le presenta a la mayoría de los ingresantes a las carreras que tienen en su currícula materias que pertenecen a las ciencias Matemáticas. Nos encontramos con un alumno que sabe memorizar y no ***razonar y pensar.***

Las falencias educativas tanto en la escuela primaria como secundaría, de las cuales los únicos perjudicados son los educandos, están comprobadas por las evaluaciones nacionales sobre la educación y Mendoza no escapa al resto del país,

Esta realidad incide en la población de jóvenes que egresan del nivel medio, hoy Polimodal, impactando negativamente en su formación y capacitación educativa. La misma les impide dar con destreza sus primeros pasos por los claustros universitarios, que son vacilantes por carecer de los conocimientos elementales que les permitan un buen desempeño educativo y el avance normal establecido por la currícula.

Los docentes nos vemos forzados a enseñar el a b c de la Matemática Básica, conjuntamente con los contenidos de la cátedra. Esta superposición de acciones tiene un grave problema: el tiempo material para cumplir con ambas funciones es insuficiente. La inquietud de realizar un texto para nivelar los conocimientos matemáticos de los futuros ingresantes surgió desde hace un tiempo y recién ahora la hemos podido concretar. El educando trae saberes muchas veces incompletos y confusos, los cuales es necesario aclarar y nivelar.

La Matemática con todas sus ramas, es una caja de herramientas que entregamos al alumno para que en cada paso de su carrera, saque de ella lo necesario para resolver el problema planteado Además, la Matemática de la mano con la Lógica, abren las puertas del razonamiento deductivo. Ella es la ciencia que se encuentra presente en todas las otras ciencias, por ello su importancia a lo largo de todo el aprendizaje del alumno desde sus primeros pasos.

Con el presente proyecto hemos creado un texto que posee los contenidos necesarios para que el alumno al cursar su primer año de Facultad no se sienta desorientado. En el mismo hemos incluido teoría, análisis de gráficos, ejercicios y problemas del contexto aplicados a la economía, ciencias sociales y administrativa.

Un texto en el que el futuro universitario aprecie:

- Que los conceptos matemáticos surgen de modo natural del deseo de explorar cuantitativamente la realidad.
- Que los procesos del pensamiento matemático son de gran utilidad en el enfrentamiento de problemas.
- Que la inducción y la deducción son instrumentos claves para incorporar los conocimientos.
- La puesta a prueba de sus competencias y la ampliación de sus conocimientos, haciendo una sincera valoración de la situación.
- El desarrollo de la creatividad y la capacidad crítica. De ello dependerá en cierta medida su entrada, permanencia y futuro rendimiento en la universidad.

Objetivos

- Brindar al alumno una herramienta donde están resumidos los conceptos matemáticos básicos para poder iniciar su carrera universitaria y le permita no sólo plantear y resolver problemas, sino también, crearlos, desarrollando su imaginación
- Mediar pedagógicamente.
- Lograr que el alumno adquiera competencias que le permitan hacer frente a nuevas situaciones.
- Lograr que el alumno reconozca el valor instrumental de la matemática por sus aportes a las demás ciencias para abordar el conocimiento de la realidad.
- Desarrollar el pensamiento lógico - creativo.
- Lograr un equilibrio entre la forma moderna de enseñar la Matemática y la aplicación práctica de la misma.

- Conducir paso a paso el proceso de abstracción, comenzando con elementos concretos y aplicados para ir posteriormente a las generalizaciones.
- Evaluar y validar el nuevo texto dentro del proceso educativo.

Metodología de trabajo

- Organización de los integrantes del equipo de trabajo distribuyendo los distintos temas del texto.
- Análisis de los distintos libros de acuerdo a la Ley Federal de Educación.
- Taller semanal, a través del cual se intentó: intercambiar opiniones, escuchar, valorar las propuestas ajenas, a construir en grupo. La clave del compartir descansa en ese aprendizaje de la interacción.
- Reuniones quincenales para analizar y evaluar los avances del proyecto.

Beneficios esperados

- Su utilidad para promover y acompañar el aprendizaje.
- Que el alumno pueda liberarse del aprendizaje mecánico, memorístico y descubra el aprendizaje elaborativo, crítico e innovador. El aprendizaje debe ser significativo, cimentado en los conocimientos previos del alumno.
- Que el alumno pueda identificar, definir, describir distintos tipos de funciones asociándolas a situaciones numéricas, experimentales o geométricas, reconociendo que una diversidad de problemas puede ser modelados por el mismo tipo de función. Esto hará mucho más sencillo el tránsito hacia la Universidad.

Hoy solamente con conocimientos podremos integrarnos con el resto del mundo, y los mismos nos permitirán dejar de ser un país en vías de desarrollo, para posicionarnos en igualdad de condiciones con los países desarrollados.

Esta premisa implica la eficiencia y eficacia de la educación en la formación de los jóvenes de nuestra provincia y del país.

Producto obtenido

Desarrollo del libro **“Matemática básica para ingresar a la Universidad”.** El mismo consta de siete capítulos en 196 páginas.

La Matemática debe empezar por la intuición y, para ello, los métodos gráficos son de importancia capital. Hemos seleccionado del texto el tema **FUNCIONES** debido a la utilidad que este tiene en varias materias de las carreras de Contador, Licenciaturas en Administración y Economía y con él deseamos mostrar como se han desarrollado los distintos temas para lograr los objetivos planteados.

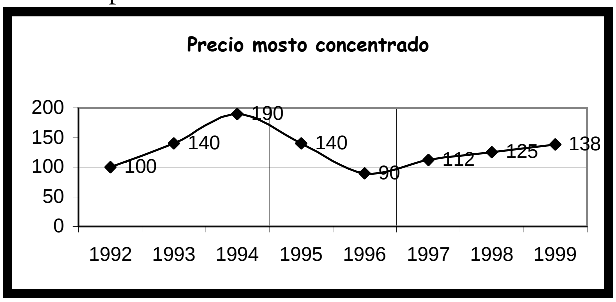
Históricamente, la noción de función comienza a gestarse cuando los filósofos medievales comenzaron a preocuparse por medir y representar gráficamente las variaciones de ciertas magnitudes como la velocidad de un cuerpo en movimiento, o la diferencia de temperatura en los distintos puntos de un objeto metálico. El personaje más influyente fue Nicole Oresme, en París, que fue el primero en usar diagramas para representar magnitudes variables en el plano, señalando los valores de la variable independiente a lo largo de una recta y los de la dependiente a lo largo de una perpendicular a ella.

En el siglo XVII, G. Leibniz, uno de los inventores del Cálculo, introdujo el término función en el lenguaje matemático y se originó por el interés en el cambio. Hay una variable natural que está constantemente cambiando, que es el tiempo y a medida que pasa, las cosas cambian. Cuando el hombre fue capaz de medirlo, fue natural e inevitable que se le ocurriera tratar de medir cómo y cuánto cambian las cosas y a partir de ese momento surgió la idea de función.

Introducción

En muchas situaciones prácticas, el valor de una cantidad puede depender del valor de otra. Por ejemplo, la demanda de automóviles puede depender de su precio actual en el mercado, la cantidad de polución en el aire en una zona céntrica, puede depender del número de coches en la calle, el valor de una botella de champagne puede depender de su edad. Tales relaciones pueden frecuentemente ser representadas matemáticamente como funciones.

El siguiente gráfico muestra el precio del mosto concentrado en enero de cada año en Mendoza.[4]

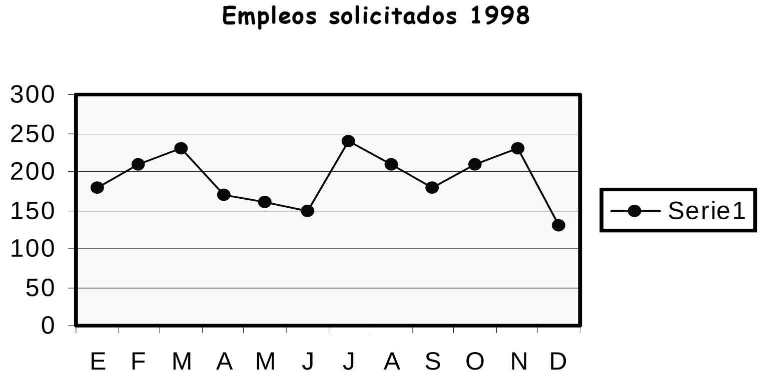


Observe el mismo y conteste:
¿Cuáles son las variables?
¿Estaremos en presencia de la gráfica de una función?

[4] Diario Los Andes / marzo de 1999

¿Por qué?
¿En qué año tuvo el mosto el precio más elevado? ¿y el precio más bajo?

En este otro gráfico se representan los empleos solicitados en Mendoza entre 1998 y 1999.[5]



Observe y conteste:
¿Cuáles son las variables?
¿Estaremos en presencia de la gráfica de una función?
¿Por qué?
¿En qué mes hubo más empleos solicitados? ¿Y menos?

Para estudiar las funciones podemos valernos de distintos medios:

- observar sus gráficas y describirlas;
- relacionarlas con sus expresiones analíticas;
- usar computadora para una mayor precisión en los "puntos delicados".

Al plantearle al alumno un problema del contexto, siente que la matemática no está tan lejos de lo que lo rodea y eso es un disparador para lograr su interés.
El presente proyecto no sólo tiene en cuenta este aspecto, sino que se han tenido en cuenta colores, diagramas, gráficos, especialmente diseñados, para hacer de ésta disciplina algo distinto para los jóvenes del nuevo milenio.

Comentarios finales

El texto elaborado según las consideraciones antes expuestas y luego de haber sido utilizado por 1500 aspirantes a la Facultad de Ciencias Económicas de la UNCuyo durante el ingreso 2001, favoreció el desarrollo de las clases de Matemática y se notó una mejora en las calificaciones del examen de ingreso.

Este libro, donde la mediación de su contenido ha sido nuestro objetivo principal, será de ayuda a los alumnos para facilitar su aprendizaje en Matemáticas.

[5] Diario Los Andes// marzo de 1999

La validación del mismo se realizará en los próximos cursos de ingreso a dictarse en la Facultad.

Referencias bibliográficas

Abellanas Rapún, L.; Martínez Mediano, J.; Martínez Ontalba, C. (1995). *Matemática 1º Bachillerato,*: Ed. McGraw-Hill.México.

Albergante de Bastianelli, S. y otros. (1997). *Texto Interactivo Cálculo I*. Facultad de Ciencias Económicas de la U.N.Cuyo. Mendoza. Argentina. (Documento inédito).

Camus, N.; Massara L.. (1994). *Matemática 3,*. Argentina: Editorial Aique.

González Correal, M.; León Parada, F.; Villegas Rodríguez, M.. (1996). *Enciclopedia Matemática Práctica.* Tomos 3, 4, 5 y 6. Bogotá,Colombia: Editorial Voluntad.

Guedj, Denis. (1998). *El imperio de las cifras y los números*. España: Editorial Grupo Zeta.

Guzmán M. de; Cólera, J.; Salvador A. (1994). *Matemáticas Bachillerato 1-2.* España: Editorial Anaya.

Guzmán M. de, Cólera J., Salvador A. (1994). *Matemáticas I.*. España: Editorial Anaya.

Hoffmann, L., (1993). *Cálculo Aplicado para Administración, Economía Contaduría y Ciencias Sociales.* México: Editorial McGraw-Hill.

Rufino, L., (1945). *Los bienes eternos* . Buenos Aires, Argentina: Editorial G. Kraft

Sobel, M.; Lerner, N. y otros. (1989). *Álgebra.* México: Editorial Prentice- Hall Hispanoamérica.

Sullivan, M.. (1998). *Precálculo.* México: Editorial Prentice- Hall Hispanoamérica.

Identificación de concepciones alternativas con modelos cruzados en el aprendizaje de la matemática

Mónica Masachs, María Cristina Cardozo, Carlos E. Derka
Facultad de Agroindustrias. UNNE. Chaco, Argentina
pinky@fai.unne.edu.ar charly@fai.unne.edu.ar

Resumen
Este trabajo de investigación consistió en identificar de que manera operan los procesos de pensamiento en nuestros alumnos, observar cuales provocan más dificultades y como ponen en juego esquemas de acción y preconcepciones que favorecen o dificultan el aprendizaje.
Hemos apelado al entrecruzamiento de modelos fríos (ligados a la estructura de la disciplina Matemática) y calientes (relacionados con las concepciones alternativas y los pre-conceptos) que acercan una respuesta posible, pero científicamente incorrecta.
Desde esta perspectiva se trata de rescatar los saberes previos y permitir desde allí construir el aprendizaje de la Matemática, encaminando al alumno hacia el estilo y rigor del saber científico, único medio de entendimiento de los conceptos de la ciencia.

Antecedentes

Uno de los problemas más frecuentes con que nos encontramos en la tarea docente del área de la matemática, es la dificultad para calificar en las evaluaciones parciales o exámenes finales, pues no siempre podemos estar seguros de que las respuestas dadas por el alumno, son las que realmente pretende dar.
La pregunta que se nos presenta es: ¿qué es lo que realmente quiere expresar el alumno?. Si el examen es oral, no cabe mayor problema, pues indagando llegamos a conocer la verdadera respuesta.
Pero cuando se trata de exámenes escritos, la situación se dificulta, pues el docente se ve en la obligación de atender lo que está escrito, y la ausencia del autor de la prueba no permite conocer las verdaderas intenciones del alumno, ya que las respuestas dadas en forma inexacta o vaga, que es lo que ocurre con las mayorías de las enunciaciones de nuestros alumnos muestreados, altera el significado, lo que perjudica notablemente el rigor interpretativo que debe existir en el aprendizaje de las ciencias.
Nuestro trabajo consistió en investigar en nuestros alumnos como operaban algunos de los procesos del pensamiento, observar cuales son los que otorgaban mayores dificultades a los mismos **y de que modo utilizan el lenguaje matemático**.
Algunos de los procesos indagados fueron:
Interpretación, definición, aplicación, resolución de problemas, comparación, lectura y construcción de signos lineares e icónicos que caracterizan al sistema lingüístico utilizado en Matemática
Requerimos en las respuestas en Matemática el manejo del léxico técnico, atento a que lenguaje y pensamiento se condicionan mutuamente.
Las respuestas pueden solicitar "*un recorte a través de la delimitación de estrictas definiciones y clasificaciones ... centrado en el conocimiento científico que toma como referencia los modelos científicamente aceptados.*" lo que en términos de Rodríguez Moneo se identifica como *Modelo frío*.
Pero si las respuestas están dadas centradas en el conocimiento de los sujetos, atendiendo a la naturaleza de las concepciones, corresponde a los denominados *Modelos calientes.*

El manejo del lenguaje y la comprensión de los conceptos es un objetivo primordial para el aprendizaje de la matemática, porque es imposible aprehenderla sin aprender e interpretar correctamente su discurso y después aplicarla correctamente.
Según Gutierrez-Rodilla, la comunicación en Matemática, debe tener:
Precisión (exactitud), neutralidad (alejado de subjetividades) y laconismo en la expresión.
El dominio verbal no es lo más importante si no media la comprensión. El verdadero aprendizaje requiere ir más allá, apelando a la memoria compresiva, con procesos de interpretación, extrapolación en un alto nivel de abstracción indispensable para aprehender los conceptos matemáticos.
El término *"concepciones alternativas"*, está referido a lo que se conoce también como *conocimientos previos*. Pero el término "concepción" está muy próximo a la noción de concepto: es neutral e indica como el sujeto construye una representación mental del mundo; el adjetivo "alternativas" establece una distinción con las concepciones científicas y concede a la concepción, derecho propio.

Materiales y métodos

Los alumnos de primer año, de las distintas carreras de la Facultad de Agroindustrias, formaron parte de la muestra para el trabajo de investigación.
Esta actividad se implementó, al término del primer cuatrimestre del 2000, momento en que se consideró que existía cierta nivelación pues los alumnos habían cursado un cursillo preuniversitario y culminado las clases de la primera Matemática de sus respectivas carreras..
Los alumnos se expresaron por escrito.

Primera etapa:

1- *Responder por escrito cuestiones tales como:*
   Definir, explicar, comparar, conceptos matemáticos y resolver situaciones problemáticas. Entre algunas operaciones se solicitó la definición de la propiedad distributiva de un número por una suma; la explicación de algunos enunciados matemáticos, tratando de expresar por ejemplo qué indica un exponente no negativo, o explicar qué es una fórmula matemática.

Otras cuestiones apuntaron a la resolución de problemas como por ejemplo: Encuentre tres números enteros pares consecutivos tales que 10 veces el valor del mayor exceda al producto de los otros dos en más de cuarenta; ¿Cuándo dos o más números son primos entre sí? ¿Cuál es la diferencia significativa que hay entre un polinomio y una ecuación?, etc.

Segunda etapa:

Se retiró el instrumento de evaluación anterior.
Se procedió a distribuirles un texto científico, en el cual estaba expresado "la explicación sobre un exponente no negativo, acompañado de un ejemplo del mismo".
A través de un ítem de doble alternativa, debían responder afirmativa o negativamente sobre si lo que expresaba el texto científico coincidía con lo que previamente habían contestado en la primera etapa.

Tercera etapa:

Se repartió entre los alumnos un instrumento evaluativo que contenía el gráfico correspondiente a la solución de un problema. Se solicitó la interpretación del mismo.

Cuarta etapa:
Se acercó a los alumnos una ecuación, y con el aporte de datos, se solicitó la construcción del gráfico correspondiente.

Discusión de resultados

Primera etapa :
Resolver diversas cuestiones como: Definir, resolver, aplicar, etc.
Las respuestas fueron evaluadas atendiendo las siguientes clasificaciones:
Correcta, aquellas en cuyas respuestas el alumno empleó el vocabulario técnico apropiado, ajustando su lenguaje al de la Matemática. *Modelo Frío*.
Regular, aquellas respuestas que estaban bien encaminadas, pero que fueron expresadas con su vocabulario en uso de su esquema conceptual. *Modelo caliente.*
Incorrectas, las que tenían el concepto o el procedimiento equivocado.
No contesta aquellas en que no había respuestas.

A continuación el cuadro de estos resultados.

ITEMS	**CORRECTA**	**REGULAR**	**INCORRECTA**	**NO CONTESTA**
N° 1	28%	36%	20%	16%
N° 2	40%	10%	30%	20%
N° 3	48%	6%	36%	10%
N° 4	10%	46%	38%	6%
N° 5	6%	8%	42%	44%
N° 6	16%	42%	24%	18%
N° 7	10%	4%	40%	46%
N° 8	16%	42%	32%	10%
N° 9	42%	40%	8%	10%
N° 10	8%	32%	26%	34%
Promedio	22,4%	26,6%	29,6%	21,4%

Segunda etapa*: Interpretación de texto*
Recordamos que debían comparar sus respuestas al ítems 3 del *Primer momento*, con el significado del texto científico. Contestar por *SI* en el caso de que consideren que las respuestas personales fueron correctas, y por *NO* en el caso contrario.
Texto científico:*"La habilidad para escribir números en distintas formas es una poderosa herramienta para resolver problemas. Por ej. 81 se puede escribir como 8.(10) + 1 o como 3^4. A la primera de ellas se llama forma estándar, y a la segunda notación exponencial. En la notación exponencial, a^n, a es la base y n es el exponente. Decimos que 3^4*es una potencia de 3 en virtud de que se puede escribir como un producto en el que todos los factores son 3-----81= 3^4 = 3.3.3.3
Recordando las respuestas al ítems 3:

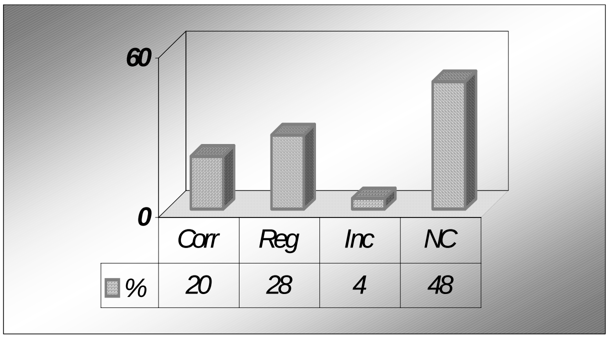
Items	Correcta	Regular	Incorrecta	No contesta
N° 3:Qué nos dice un exponente no negativo?	48%	6%	36%	10%

Respuestas después de la lectura del texto científico, que respondían a la siguiente Pregunta: La respuesta dada en el ítems 3 ¿Coincide con lo que expresa el texto científico?

SI (52%) **NO** (48%)

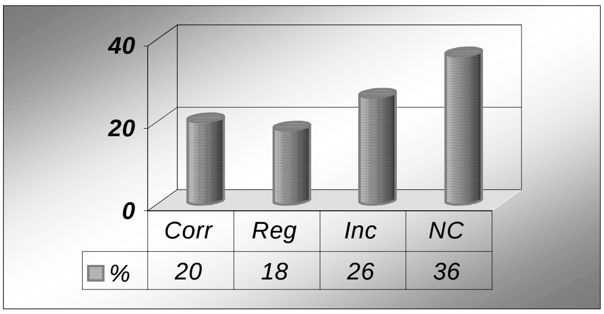
TERCERA ETAPA: INTERPRETACIÓN DEL GRÁFICO

Se les presentó un problema, con el gráfico correspondiente que decía: " *Un cohete modelo es lanzado hacia arriba. Al término de la ignición tiene una velocidad ascendente de 49 m/s y se encuentra a una altura de 155 m. Señala gráficamente la altura máxima que alcanzará y el instante en que lo hará." ;* y la interpretación del mismo.



CUARTA ETAPA:
CONSTRUCCIÓN DEL GRÁFICO

También se les pidió que construyan un gráfico dada una función determinada. Dicha función era $f(x) = 2\,(x-5)^2$ .Los resultados son los representados en el siguiente gráfico.



Conclusiones

Realizando un análisis de los resultados obtenidos, de los mismos podemos inferir que en lo correspondiente a la definición o resolución de una serie de cuestiones y lectura de un texto científico, la mitad de la población ha tenido inconvenientes, es muy importante destacar las respuestas obtenidas en los ítems 5 y 7, el primero consistía en la resolución de un

sencillo problema, que registraron valores muy bajos, lo que nos puede indicar la incapacidad de resolver una situación problemática.
El ítems 7, que pedía una comparación entre ecuación y polinomio también es preocupante los valores alcanzados, pues ellos nos dan a entender que no distinguen uno de otro.
También remarcaremos las respuestas, al ítems 9, que solicitaba el análisis de un segmento y un vector, las respuestas fueron muy satisfactorias y creemos que esto puede estar correlacionado con el hecho de que estos temas fueron desarrollados este año, por vez primera, en la forma teórico-práctico por los Jefes de Trabajos Prácticos.
Nos queda claro, que la enseñanza de la Matemática, debe centrarse en el desarrollo de aptitudes para: entender conceptos y métodos matemáticos, discernir relaciones matemáticas, razonar lógicamente, aplicar conceptos, métodos y relaciones matemáticas para resolver problemas no rutinarios.
En cuanto a la interpretación de gráficos, es ambiguo el resultado, pues tenemos valores que podemos considerarlos como satisfactorios, pero es importante el número de alumnos que no intentan resolver lo solicitado, ocurre algo similar con la construcción de gráficos, denotándose la dificultad que esto implica.
Es muy importante el objetivo del presente trabajo que ha cruzado modelos fríos y calientes para determinar que manera las concepciones alternativas inciden en la interpretación de tesis o hipótesis y de que modo condicionan el rendimiento académico.

Referencias bibliográficas

Bachelard, Gastón, (1984). *La formación del espíritu científico.* México, Siglo XXI.
Gutierrez-Rodilla-Bertha, (1998). *La ciencia empieza en la palabra*. *Análisis e historia del lenguaje científico.* Barcelona. Península.
Levinas, Marcelo Leonardo, (1998). *Conflictos del conocimiento y dilemas de la educación*. Aique. Buenos Aires.
Coll, Cesar Salvador, (1996). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento.*. Buenos Aires. Paidós.
Coll, Cesar Salvador y otros, (1994) *Los contenidos en la reforma*. Santillana. Madrid.
Dewey, John, (1989) *Como pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Paidós . México.
Rodriguez Moneo María, (1999). *Conocimiento previo y cambio conceptual*. Aique. Buenos Aires.
Chevallard, Y, (1991). *La transposición didáctica*. IREM d´Aiex , Marseille. (Mimeografiado)
Wittrok, Merlin, (1989) *La investigación de la enseñanza. Enfoques, teorías y métodos*". Paidós. Buenos Aires.

El concepto de función en los libros de textos universitarios

Nora Gatica, Marcela Carranza, Gladys May, Analía Cosci
Universidad Nacional de San Luis Argentina
nimberti@fices.unsl.edu.ar gcmay@fices.unsl.edu.ar acosci@fices.unsl.edu.ar

Resumen
La enseñanza de los temas de Análisis en el momento inicial de las carreras de Ingeniería en la Universidad, presentan importantes problemas. En general, es muy difícil lograr que los estudiantes satisfagan los objetivos de aprender los conceptos, procedimientos y habilidades como están planificados en el tiempo previsto.
Teniendo en cuenta la importancia de las conversiones entre registros para el aprendizaje de los conceptos matemáticos (Duval, 1998), efectuamos el análisis comparado de tres libros de textos que se consideran convenientes para la enseñanza del concepto de función en el nivel de enseñanza indicado.
La noción de transposición didáctica (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) nos sirvió de guía teórica para analizar el saber escolar, tal como las traspusieron los profesores en los libros de textos.

Introducción

Los objetivos en los temas de Cálculo en carreras de ingeniería en la universidad, generalmente, se reducen, a la aplicación de unas cuantas recetas para calcular por ejemplo, derivadas, integrales, etc. Esta postura genera una serie de problemas en materias de la especialidad, en donde el uso que se le da a los conceptos como modelos matemáticos, cumplen con objetivos muy diferentes; por un lado, en los procesos de resolución, se requiere de implementar métodos numéricos y gráficos y por otro, cuando se tiene una solución algebraica el principal interés reside en estudiar el comportamiento (por ejemplo de funciones) por medio de su representación gráfica identificando los parámetros involucrados en la misma.
Como consecuencia, el tratamiento en la enseñanza de los distintos temas de Cálculo, permanece, subordinado a las definiciones matemáticas de los objetos. De esta manera, se pierde notoriamente el valor que tienen estas conversiones entre registros para el aprendizaje, pues suele prestarse poca atención a los diferentes marcos conceptuales asociados con ellas y no se exploran de manera consistente las actividades que favorecerían su articulación con otros medios de expresión y representación matemática. De acuerdo a Duval (1998) esta articulación es condición necesaria para una buena apropiación de los objetos matemáticos.
Las investigaciones realizadas en esta área desde hace ya mucho tiempo, han detectado importantes dificultades por los estudiantes con el campo conceptual del análisis. Estas investigaciones muestran que si bien se puede enseñar a los estudiantes que resuelvan de manera mas o menos mecánica derivadas e integrales, existen grandes dificultades para que alcancen una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamientos que son el centro de este campo de las matemáticas. También se ha comprobado que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y a evaluar sobre las competencias adquiridas en este dominio (Artigue, 1995).
El aprendizaje del concepto de función es uno de los objetivos fundamentales en la enseñanza del Cálculo. Sin embargo, es difícil lograr que los alumnos reconozcan una función en alguno de los múltiples registros en que puede ser expresada.
En el presente trabajo, realizamos el análisis comparativo de tres libros de textos, actuales, según autor, nivel de enseñanza universitario, respecto al concepto de función.

Usando el marco teórico propuesto por Godino y Batanero (1994) podemos describir nuestro estudio, como la identificación de los elementos más característicos del significado atribuido al objeto matemático "el concepto de función" en el siguiente contexto institucional: los libros de texto.
Dado el carácter exploratorio de la investigación que hemos abordado, el estudio de los textos no tiene un carácter exhaustivo ni representatividad estadística. No obstante, para determinar el significado institucional de referencia, pretendemos tomar una muestra representativa de los libros que se utilizan hoy día y realizar un análisis destacando los distintos registros a los cuales, los autores atribuyen mayor importancia.

Marco Teórico

Existe un reconocimientos internacional, para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, de la importancia de las representaciones y los sistemas de representación.
Diversos autores han desarrollado aspectos teóricos con la intención de aclarar los instrumentos que se dan dentro de un proceso de comprensión de conceptos (Hitt, 1998). Dentro de ellos, nuestro estudio toma como referencia, los registros de representación semiótica, establecidos por Duval (1998). Este autor expresa: *La comprensión integral de un contenido conceptual está basado en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva.*
En cuanto al concepto de función, aunque es de vital importancia, ya que se considera uno de los puntos centrales de la enseñanza del cálculo, es sin embargo, un concepto complejo debido a que contiene una multiplicidad de registros y genera diferentes niveles de abstracción y de significados
No es posible representar toda la complejidad del concepto de función en un único registro. El hecho de utilizar para la enseñanza de este concepto, una variedad de registros y realizar la conversión entre ellos, admite apreciar esta complejidad.
Existen numerosas investigaciones que reportan sobre las dificultades de los estudiantes para articular los diferentes registros en la noción de función (Artigue, 1995; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Ruiz, 1998, Hitt, 1996).
Dado la importancia del libro de texto, que ya ha sido resaltada por investigaciones actuales, en cuanto al proceso de transposición didáctica (Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón J., 1997), como intermediario del paso del "saber a enseñar" (conjunto de conocimientos, en los que se traducen los objetos a enseñar, destinados a que el alumno los pueda adquirir) al "saber escolar" (saber que aparece en los textos), consideramos conveniente realizar el presente análisis, sobre los distintos registros en que el concepto de función, es sugerido por los autores para la enseñanza del concepto.

Los libros de textos

En este apartado, exponemos los resultados del análisis de los textos considerados. Se tomaron en cuenta los siguientes tres textos por ser estos los recomendados por los profesores en carreras de Ingeniería en la Universidad Nacional de San Luis.

1.) CALCULO

AUTOR: James Stewart. Grupo Editorial Iberoamérica (1994)

Funciones y sus gráficas.

Enlace con ideas previas	No
Conocimientos previos	No
Objetivos	No
Referencias históricas	No
Introducción	Mediante ejemplos (como: el costo C de envío por correo de una carta de primera clase depende de la masa m de la carta). Contiene seis ejemplos expresados en el mismo registro.
Definición de función	Definición intuitiva (no contiene). Definición rigurosa: (utiliza 5 ejemplos ilustrativos en lenguaje algebraico) Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A, exactamente un elemento, llamado f(x) de un conjunto B.
Situaciones que dan sentido al concepto	Ejemplos de funciones expresados en registro algebraico y numérico, diagramas de flechas, diagramas de conjunto (cinco ejemplos), incluye el concepto de dominio y contradominio. Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	Si f es una función con dominio A, su gráfica es el conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x)) \mid x \in A \}$
Situación que dan sentido al concepto	Presenta ejemplos ilustrativos de distintas gráficas incluyendo el concepto de dominio y contradominio como por ejemplo $f(x)= x^3$ (Diez ejemplos) y determina si es función o nó (mediante la prueba de la recta vertical).
Ejercicios a resolver	Diez ejercicios donde se solicita la conversión del reg. algebraico a numérico. Tres ejercicios para realizar tratamientos en el mismo registro. Treinta y cinco ejercicios reg. algebraico al gráfico. Seis ejercicios del gráfico al algebraico.

2.) EL CALCULO

AUTOR: E.C.LEITHOLD (1998). Grupo Mexicano Mapasa. S. A.de C.V**.** Mexico

Funciones y sus gráfica.

Enlace con ideas previas	No
Conocimientos previos	No
Objetivos	Si
Referencias históricas	No
	Mediante ejemplos (como: el salario de una persona puede depender

Introducción	del número de horas que trabaje). Contiene siete ejemplos dados en este registro.
Definición de función	Definición intuitiva (utiliza los ejemplos anteriores, como así también diagramas y tablas de valores). Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x (lenguaje coloquial). Definición rigurosa: (utiliza 5 ejemplos ilustrativos en lenguaje algebraico, incluye concepto de dominio y contradominio) Una función es un conjunto de pares ordenados de números(x,y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número.
Situaciones que dan sentido al concepto	Ejemplos donde se realiza la conversión del reg. algebraico a numérico. Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	Si f es una función, entonces la gráfica de f es un conjunto de todos los puntos(x,y) del plano R^2 para los cuales (x,y) es un par ordenado de f.
Situación que dan sentido al concepto	Presenta ejemplos ilustrativos de distintas gráficas incluyendo el concepto de dominio y contradominio como por ejemplo $f(x) = \|x\|$ (once ejemplos) y determina si es función o nó.
Ejercicios a resolver	Se solicita conversiones entre registro y transformaciones en el mismo registro: Quince ejercicios, del reg. algebraico a numérico. Ocho ejercicios solicitando realizar tratamientos en el mismo registro. Cuarenta ejercicios del algebraico al gráfico Seis ejercicios del gráfico al algebraico.

3.) CALCULO CON GEOMETRIA ANALÍTICA

AUTOR: Dennis G. Zill (1987). Grupo Editorial Iberoamérica. S. A. de C.V. México

Función: Definición y gráfica.

Enlace con ideas previas	No
Conocimientos previos	No
Objetivos	No
Referencias históricas	No
Introducción	Mediante ejemplos (como: la tarifa postal de primera clase para una carta es una función de su peso). Contiene siete ejemplos dados en este registro.

Definición de función	Definición intuitiva (utilizando los ejemplos anteriores determinando si es o nó función). Una función es una correspondencia que relaciona dos conjuntos de tal manera que cada elemento del primer conjunto corresponde uno y solo un elemento del segundo conjunto (lenguaje coloquial). Definición rigurosa: Una función f desde un conjunto X hacia otro conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento x en X un elemento único y de Y.
Situaciones que dan sentido al concepto	Ejemplo 1: La regla para elevar al cuadrado de un número real x esta dada por la ecuación y = x o bien f(x)=x*2 Ejemplo 2: Una función se compara a menudo con una computadora. La “entrada” x es transformada por la “máquina” f en la “salida” f(x) Aparece el dibujo de una máquina, donde entra "x" y la salida es "f(x)" Hay dos ejemplos más del mismo tipo.
Definición : gráfica	La gráfica de una función f es el conjunto de puntos{(x,y) / y = f(x), x en el dominio de f }
Situación que dan sentido al concepto	Presenta cuatro gráficas para determinar si es función o no.
Ejercicios a resolver	Se solicita conversiones entre registro y tratamientos en el mismo registro: Dos ejercicios que solicita la conversión del algebraico al numérico. Cuatro ejercicios que solicita realizar tratamiento en el mismo registro.

Conclusiones

En la enseñanza elemental del Análisis se otorga gran importancia a los tratamientos tipo cálculo: la composición de dos o más funciones, el cálculo de derivadas, el cálculo de integrales, etc. no existe una enseñanza que tome en cuenta los problemas que plantea el uso simultáneo de varios registros de representación. Sin embargo, en particular, para la comprensión del concepto de función se requiere tener en cuenta los distintos medios de representación y expresión involucrados, así como las coordinaciones que necesariamente tienen que establecerse entre ellos: representaciones figurales y gráficas de una situación, las distintas notaciones, el lenguaje natural, etc., no solo como el medio donde se enuncian los problemas, sino también como el lugar donde se expresan con precisión esta noción.
En los libros de textos analizados, para la introducción en el tema, los autores utilizan enunciados expresados en el lenguaje natural que describen situaciones de la vida real. Lo acompañan distintos problemas expresados de la misma manera.
Inmediatamente, se plantea la definición intuitiva (expresada en distintos registros) para luego introducir la definición rigurosa.
Pero luego, en las situaciones que dan sentido al concepto, con excepción de Stewart (1994) quien ejemplifica en varios registros, los otros libros permanecen en el registro algebraico y gráfico únicamente. Lo mismo sucede en la etapa donde se proponen ejercicios a resolver, los cuales solicitan conversiones en estos dos registros y tratamientos en ellos. Es decir, no existen enunciados que describen, por ejemplo, situaciones físicas y geométricas; siendo

que, en estos casos, es donde el concepto de función muestra su carácter de herramienta útil y operatoria de la actividad matemática.
Por otro lado, una enseñanza rigurosa orientada desde el principio a precisar las nociones fundamentales del cálculo, puede acarrear grandes dificultades para los alumnos; una de las razones, entre otras, es que tenderá a concentrarse en el trabajo en dos registros, lo cual repercute en materias de la especialidad donde se requiere de las articulaciones entre registros.

Referencias bibliográficas

Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gomez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard; Y., Bosch, M.; Gascón J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.*. Barcelona, Madrid: Hersori Editorial

Duval, R. (1988) . Graphiques et equations: L´articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* (pp. 235 – 253). Traducción en *Antología en Educación Matemática* (pp.125-139).(Compiladores R. Cambray, E. Sanchez y G. Zubieta). México: Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav, 1992.

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento En F. Hitt (Ed.) . *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp.173 – 201). México: Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav.

Hitt F., (1996): *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. Investigaciones en Matemática Educativa.* (pp.245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt F, (1998): *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. Educación Matemática*, 10,2: (pp.23-45).

Godino, J. D.; Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325 – 355.

Leinhardt G., Zaslavsky O. ; Stein M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research*. 60(1), 1 - 64.

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Jaén: Universidad de Jaén, Servicio de publicaciones.

Conexiones intuitivas entre la continuidad de una función y su derivada

Karina Viveros Vela*, Ana Isabel Sacristán Rock**
*Cinvestav/ ESCOM–IPN, México - **Cinvestav, México
kviveros@mail.cinvestav.mx asacrist@mail.cinvestav.mx

Resumen
La investigación presentada en este reporte buscaba identificar la manera en que los alumnos asocian los conceptos continuidad y derivada de una función; en particular, se deseaba explorar cómo influye la continuidad de una función en la determinación de la derivada de ésta, así como la aplicación que se hace del teorema de cálculo "toda función derivable es continua". Para ello se diseñó un cuestionario en el cual se abordan dos registros de representación, el algebraico y el gráfico. El cuestionario se aplicó a estudiantes del primer semestre de la carrera de ingeniería. Se encontró que los estudiantes utilizan predominantemente el registro de representación algebraico y que tienden a considerar que la continuidad de una función implica la derivabilidad.

Introducción

La investigación presentada en este reporte se centraba en estudiar la manera en que alumnos de nivel superior relacionan dos importantes conceptos del cálculo: la derivada y la continuidad de una función. Aunque existe una relación formal entre estos dos conceptos mediante el teorema: *"Si una función f es derivable en un intervalo cerrado entonces f es continua en dicho intervalo cerrado"*, existen extensas investigaciones en torno a estos conceptos (e.g.; Artigue, 1991; Orton, 1983; Tall & Vinner, 1981, Dolores, 1998) que encuentran como resultado común la confusión en estudiantes entre la continuidad y la derivabilidad de una función.
La idea fundamental de la investigación era observar la manera en que los estudiantes integran ambos conceptos; esto es, ver de qué modo aplica el estudiante el teorema de cálculo (si lo conoce, entiende lo que implica, lo confunde con una doble implicación, etc.), y en particular analizar la influencia de los distintos registros de representación en dicha determinación.

Antecedentes Históricos y Marco Teórico

Hasta principios del siglo XIX se pensaba que toda curva continua debía tener tangentes en todas partes excepto en algunos puntos aislados; es decir, se consideraba que la continuidad de una función era suficiente para la existencia de la derivada en casi todas partes — esta idea la tenía Ampère (ref. Ribnikov, 1987). Bolzano (1817) acabó con esta idea, al presentar una función continua que no tiene derivada en ningún punto. Después de Bolzano fueron varios los matemáticos que dieron ejemplos de funciones continuas no derivables, tales como: Riemann, Cellérier y Weierstrass, cuyo ejemplo (función de Weierstrass) es el más conocido, ya que el ejemplo de Bolzano permaneció en general desconocido. La importancia histórica de este descubrimiento era la realización de que la continuidad no implica diferenciabilidad. Para nosotros resulta interesante destacar este aspecto histórico ya que se ha observado que en ocasiones los estudiantes, al dar respuesta a alguna pregunta planteada, presentan el mismo tipo de argumentos que se han manifestado a través del tiempo (ver Piaget & García, 1982).

Tanto la continuidad como la derivabilidad de una función pueden ser estudiadas mediante acercamientos algebraicos y gráficos; al referirnos a función continua pensamos en aquella función cuya gráfica se dibuja sin despegar el lápiz del papel, de este modo la gráfica no presenta "huecos" o "saltos"; y al referirnos a función derivable pensamos que lo es aquella función cuya gráfica es "suave" o que no presenta "picos". Estos son algunos de los aspectos visuales que consideramos en la continuidad y derivabilidad de una función. Así al referirnos a los conceptos de continuidad y derivabilidad de una función lo hacemos en un aspecto visual o gráfico. Resulta pues importante resaltar los aspectos teóricos con respecto al manejo de diferentes registros de representación y a la visualización.

Duval (1993) explica que un registro de representación es un medio de expresión o de representación, y señala que un mismo objeto puede representarse en diferentes registros de representación en la medida en que puedan surgir sistemas semióticos diferentes. Añade que el poder moverse entre diferentes registros de representación, para un mismo objeto, "*parece una condición necesaria para que no se confunda a los objetos matemáticos con sus representaciones y para que también se les pueda reconocer en cada una de ellas*" (ibid, p. 4).

Duval destaca que para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación del concepto, bastando con la coordinación de al menos dos registros de representación. La ausencia de la coordinación de varios registros de representación, no impide la comprensión, pero con la comprensión limitada al uso de un solo registro (mono-registro) no se obtienen resultados óptimos en el aprendizaje.

El uso de varios registros de representación nos dirige en particular al manejo del registro de representación gráfico, y el papel de la visualización. Zimmermann & Cunningham (1991) describen a la visualización matemática como el proceso de formar figuras (mentalmente, con lápiz o papel, o con la ayuda de la tecnología) y usar tales figuras eficazmente para el descubrimiento y la comprensión de conceptos matemáticos. Señalan que en matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio hacia un fin, la cual determina la comprensión. Por su lado Eisenberg & Dreyfus (1991) señalan que los beneficios de la visualización incluyen la habilidad para enfocarse sobre componentes específicos y detalles de problemas más complejos para incrementar la intuición y el entendimiento de problemas y procesos matemáticos. Zimmerman & Cunningham (ibid) y Tall(1989) entre otros autores, enfatizan que la visualización no puede ser aislada del resto de las matemáticas, implicando que representaciones simbólicas, numéricas y visuales de ideas están conectadas.

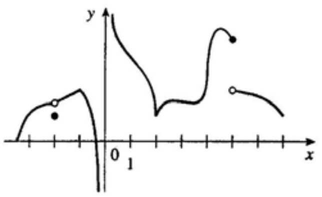
Un estudio de las concepciones y formas de relacionar los conceptos de continuidad y derivada en alumnos de nivel superior

Entre los propósitos de nuestro estudio estaba el indagar sobre las situaciones en las que estudiantes utilizan el criterio de continuidad o no-continuidad de una función como factor determinante de la derivabilidad de dicha función; y en particular, analizar la influencia de los distintos tipos de registro en dicha determinación. Como instrumentos de medición se elaboraron tres cuestionarios; los dos primeros fueron diseñados para indagar las nociones de los alumnos en torno a la continuidad y derivabilidad de una función, y el tercero se centraba en la integración de ambos conceptos. En este reporte describiremos en más detalle los resultados del tercer cuestionario.

Los cuestionarios se aplicaron a 55 estudiantes[6] *de 2do. semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales en la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional. Todos ellos habían tomado previamente el curso de Cálculo I, en donde se abordan los temas que se presentan en la presente investigación.*

El tercer cuestionario constó de siete preguntas: En las primeras cuatro preguntas se pedía al estudiante determinar la continuidad y la derivabilidad para funciones dadas de maneras algebraica y gráfica. La primera función, $f(x) = -x^2 + 1$, definida en los reales, era una función continua y derivable en todo su dominio; la segunda, $f(x) = |x|$, definida en los reales, tiene un pico en su gráfica; la tercera era una función definida por partes y discontinua en su dominio de definición; y la cuarta era una función definida por partes pero continua en su dominio. En la quinta pregunta se proporcionaba sólo la gráfica de una función y se pedía determinar los puntos en los que la función es discontinua y no derivable.

Pregunta 5. Se da la gráfica de la función f.



(a) ¿Es continua la función f en todos los puntos?, de no serlo ¿En cuáles? y ¿Porqué?
(b) ¿Es derivable la función f en todos los puntos?, de no serlo ¿En cuáles? y ¿Porqué?

En las dos últimas preguntas se daban dos funciones, únicamente de manera algebraica: la función de la pregunta 6 era una función continua pero definida por partes y cuya gráfica (no dada a los alumnos) tenía picos

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \le -2 \\ x+2 & si \;\; -2 < x < -1 \\ 1 & si \;\; -1 \le x \le 1 \\ -x+2 & si \;\; 1 < x < 2 \\ 0 & si \;\; x \ge 2 \end{cases}$$

; mientras que la función de la pregunta 7, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ definida en $R - \{-1\}$ es tal que su gráfica (no dada) se percibe como visualmente discontinua.

Descripción de los Resultados

La mayoría de los estudiantes no mostraron dificultades en responder a la primera pregunta probablemente porque es un tipo de función, una parábola, muy conocida por los estudiantes y definida en todos los reales. Aún así, seis estudiantes dijeron que la función no era continua y cuatro de ellos que la función no era derivable, sin proporcionar una justificación de su respuesta.

La segunda pregunta muestra el típico ejemplo de función continua y no derivable: la función valor absoluto. Esta pregunta causó problema en algunos estudiantes ya que no todos dieron una respuesta para la determinación de la derivabilidad de la función, y 7 estudiantes dijeron que la función no es continua porque "*se corta en el origen*", "*tiene un pico*" o "*porque no*

[6] Todos, salvo dos mayores, estudiantes de entre los 19 y 23 años de edad.

existe el límite en 0". Estos estudiantes presentan confusión entre los conceptos de continuidad y derivabilidad, ya que las razones para decir que la función no es continua son aquellas consideradas para que una función no sea derivable, por ejemplo: el pico. Sólo diez estudiantes (de los 55) se percatan de que la función que se presenta es continua y no derivable Entre las respuestas dadas con respecto a que la función no es derivable se dice: "*tiene un pico, no es suave"* o usan la definición que involucra el límite para determinar si es o no derivable la función.. Por otro lado, 14 estudiantes emplean de manera incorrecta el teorema de cálculo, ya que como observan que la función es continua entonces concluyen que es derivable, dando respuestas como: "*es derivable ya que la función es continua"* o *"la función existe para toda x"* (razón dada para la determinación de la continuidad); otros cinco estudiantes consideran que la función es derivable porque pueden calcular algebraicamente la derivada. En las respuestas dadas se nota el uso de los dos registros de representación: tanto el visual como el algebraico.

La tercera y cuarta preguntas son funciones definidas por partes, la primera discontinua y la segunda continua. Para responder a estas preguntas los estudiantes determinaron la derivabilidad de la función por secciones, diciendo que la función era derivable en aquellas secciones continuas. Para la tercera pregunta, 19 estudiantes consideraron que la función era continua ya que está definida en todos los puntos: estos estudiantes no tomaron en cuenta la gráfica de la función, la cual muestra una función discontinua. Sólo 38 estudiantes contestaron lo que ocurre con la derivabilidad de la función; de estos, 26 basaron su respuesta en la continuidad de la función (8 no dieron justificación). Observamos en esta pregunta un predominio marcado de la determinación de la derivabilidad sustentada en la continuidad de la función. Sólo siete estudiantes consideraron correctamente a la función como discontinua y no derivable. En cuanto a la cuarta pregunta, sólo cuatro estudiantes consideraron correctamente que la función era continua y derivable, mientras que 39 estudiantes consideraron erróneamente que la función era discontinua, con respuestas como: (1) *se corta*, (2) *tiene un salto*, (3) *se interrumpe*; esto nos indica que estos alumnos no tomaron en cuenta el dominio de definición de la función y que basaron sus respuestas en el aspecto gráfico de la función.

En la quinta pregunta (ver arriba) se le pedía al estudiante determinar los puntos de discontinuidad y los puntos donde la derivada no existe. Los puntos de discontinuidad fueron determinados en función de los huecos, los saltos y los puntos donde la función se va al infinito; los puntos sin derivada se determinaron por medio de aquellos puntos donde la función no es continua y en donde hay picos. Resultó interesante observar que, aunque en esta pregunta la función se presenta únicamente de manera gráfica, la justificación dada por muchos de los estudiantes se refiere al contexto algebraico; por ejemplo, se dieron respuestas como: "*no está definida la función", "los límites unilaterales son diferentes"*, o se referían a la derivada como un límite. Diez estudiantes no contestaron sobre la continuidad y 16 sobre la derivabilidad de la función; uno de estos estudiantes agregó que no podía responder porque no tenía una expresión algebraica para la función: de igual modo, consideramos posible que los demás alumnos que no contestaron, no lo hicieron porque no tenían una expresión algebraica para la función, mostrando esto su dependencia de dicho registro de representación. Por otro lado, 20 estudiantes justifican su elección de los puntos donde la derivada existe por medio de la continuidad, notando nuevamente la importancia que dan los estudiantes a la continuidad de la función para la determinación de la derivabilidad. Sólo 15 estudiantes identificaron los puntos de discontinuidad correctos pero **ninguno** todos los puntos donde la derivada no existe.

La función definida por partes de la pregunta 6, dada únicamente de manera algebraica, es una función algebraicamente sencilla y continua, aunque su gráfica presenta cuatro picos; sin embargo, sólo 8 alumnos graficaron la función y de ellos sólo tres de manera correcta. Quince estudiantes, al parecer dejándose llevar por la definición por partes en la representación algebraica de la función, consideraron que la función no era continua. Por otro lado, 35 estudiantes consideraron incorrectamente que la función era derivable porque la función es continua (tres de ellos justificando su respuesta dando cálculos para la derivada) malinterpretando el teorema de cálculo. Notamos también en los casos anteriores una falta de uso de la representación gráfica. Sólo cuatro estudiantes (de 55), que se auxiliaron de la gráfica de la función, contestaron correctamente a la pregunta.

En la pregunta siete, la mayoría de los estudiantes al parecer no toman en cuenta el dominio de definición de la función, ya que dicen que la función no es continua porque no está definida en -1 (punto que no está en el dominio de definición de la función), señalando que tiene un salto, o que los límites unilaterales son diferentes. 32 estudiantes consideran que la función es derivable, ya que es continua, 14 de ellos dicen que es derivable excepto en –1, aún cuando ese punto no está considerado dentro del dominio. Así algunos estudiantes basan la derivabilidad de la función en la continuidad pero sólo en aquellos intervalos donde se cumple la continuidad.

Otros resultados y conclusiones generales

- La mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes para la determinación de la continuidad fueron justificadas por argumentos formales (correctos o incorrectos) del cálculo, y se observó una preferencia hacia el registro de representación algebraico.
- El 70% de las respuestas dadas por los estudiantes hacen referencia a elementos formales y al teorema de cálculo. Entre sus respuestas encontramos: “*toda función derivable es continua”* o *“la primera condición para que una función sea derivable es que sea continua”*. Pero a pesar de que los estudiantes conocen el teorema de cálculo “*toda función derivable es continua*”, este es malinterpretado, mal utilizado o contradicho (en muchos casos afirman que funciones discontinuas son derivables), y al menos la mitad de los estudiantes tienden a asumir que el teorema recíproco es válido como se muestra a continuación:
- El 49% de los estudiantes consideran que una función es derivable si es continua. Entre sus respuestas encontramos: "*la función es derivable porque es continua*"; “*la función es derivable ya que toda función continua es derivable*”; incluso algunos agregan que: *una función es derivable, si y sólo si, es continua*. Algunos no siempre expresan de manera directa esta dependencia sino que hacen referencia a la continuidad, y justifican la derivabilidad usando las justificaciones de continuidad: por ejemplo, dicen "*la función es derivable ya que la función existe para cada x”* (condición de continuidad).
- En general se observa un predominio de la utilización del registro algebraico, tal y como lo han notado Eisenberg & Dreyfus (1991).
- Algunos estudiantes determinan la derivabilidad de la función calculando la derivada de ésta usando las reglas de derivación algebraicas. Su razonamiento parece ser que si pueden calcular la derivada, la función es derivable, y si no pueden calcularla concluyen que no es derivable.
- Más de la mitad de los estudiantes no son consistentes en su utilización de los registros de representación algebraico y/o gráfico para justificar sus respuestas. Sólo 2 alumnos utilizan

consistentemente los dos registros, otros dos alumnos siempre dan argumentos visuales, mientras que 19 estudiantes siempre dan argumentos algebraicos, lo que muestra la preferencia por este registro de representación.

- Sólo en los casos en que se proporcionaba la gráfica de la función, algunos estudiantes daban argumentos visuales para justificar la derivabilidad de la función usando términos como "suave" y "picos"; por ejemplo algunos alumnos determinaban la no-derivabilidad identificando picos o diciendo que la gráfica no es suave. Sin embargo notamos un mayor uso de argumentos visuales al determinar la continuidad que al determinar la derivabilidad de la función: los argumentos incluían aquellos de que la función tiene un salto, un hueco, no se interrumpe o "no se despega el lápiz del papel". Esto sugiere que la visualización es más importante en la determinación de la continuidad que en la determinación de la derivabilidad. Sin embargo, también en el aspecto visual se observó confusión entre los conceptos de derivada y continuidad: algunos estudiantes señalan que la función no es continua si tiene un pico.

En resumen, observamos en general confusiones entre los conceptos de continuidad y derivada (como lo han hecho otros investigadores: (Artigue, 1991); (Orton, 1983); (Dolores, 1998); (Tall & Vinner, 1981)), un malentendimiento del teorema del Cálculo, y una preferencia por el registro de representación algebraico.

Referencias bibliográfícas

Artigue, M. (1991) "Analysis" Chapter 11 en Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers. Pp. 167 – 198.

Dolores, C. (1998) "Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial". En Hitt (ed) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Departamento de Matemática Educativa, pp. 257 – 272. México:Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1993) "Sémiosis y Noésis", Conference A.P.M.E.P., I.R.E.M., Francia., Trad. *Lecturas en didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa*, Departamento de Matemática Educativa, México, pp. 118-137.

Eisenberg, T.; Dreyfus, T. (1991) "On the Reluctance to Visualize in Mathematics" En Zimmermann; Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, pp. 25-37 Providence , RI: MAA Notes Series, 19.

Orton (1983) "Students' Understanding of Differentiation". *Educational Studies in Mathematics* (14), pp. 235 – 250. D. Reidel Publishing Company.

Piaget; García. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo XXI Editores.

Ribnikov, (1987) *Historia de las matemáticas* Moscú., Rusia: Editorial MIR,

Tall, D.; Vinner, S. (1981) "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity". *Educational Studies in Mathematics* (12), pp. 151 – 169. D. Reidel Publishing Company.

Tall, D. (1989) "Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change". *For the Learning in Mathematics*, 9(3), November, 37 – 42.

Zimmermann, W.; Cunningham, S. (1991) "What is mathematical visualization?" En Zimmermann;. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, pp. 1-9 Providence, RI: MAA Notes Series, 19.

Ecuaciones Diferenciales y Cinética Química

Víctor Martínez Luaces, Gladys Guineo Cobs
Facultad de Química. Universidad de la República. Montevideo. Uruguay
Victor@bilbo.edu.uy gladysgc@bilbo.edu.uy

Resumen
En el presente trabajo se analiza el proceso en espiral que se ha llevado a cabo en un curso de Ecuaciones Diferenciales dictado en Facultad de Química, Univ. de la República (Montevideo, Uruguay), como curso obligatorio para Ingeniería de Alimentos y opcional para otras carreras químicas. Desde 1996 en adelante se ha buscado un mejoramiento continuo e iniciar al alumno en el modelado de problemas provenientes de otras asignaturas o de la vida real / profesional, dando lugar por iteraciones sucesivas a diversos repartidos de problemas, donde la Cinética Química tiene un papel fundamental. Durante este proceso de Investigación-Acción (I-A) se hicieron encuestas, evaluaciones docentes, entrevistas, etc., que aquí son resumidas y analizadas estadísticamente. El proceso y los resultados son entonces los elementos fundamentales de este trabajo y los mismos resultan extrapolables a otros cursos universitarios de características similares.
Sobre la base de todo lo anterior se extraen conclusiones y se formulan recomendaciones.

Introducción

Varios autores importantes como Schöenfeld (Schöenfeld, A. H., 1983), Gaulin (Gaulin, C., 1996), etc. han trabajado del punto de vista teórico y práctico en la resolución de problemas. La idea es que al enfrentarse a un problema, el estudiante no se limita a ejercitar determinada técnica y/o procedimiento pre–establecido. Por el contrario, el problema exige una participación más activa del estudiante, ya que la solución no es conocida de antemano como sucede en muchos ejercicios y la propia técnica de resolución suele ser producto de una búsqueda guiada, pero no pre – fijada, donde el estudiante asume un rol de investigador, fijando mejor los conceptos y procedimientos que llevan a la solución .
Tal como ha sido señalado en otros trabajos ((Casella, S. y Martínez Luaces, V., 1996) y (Martínez Luaces, V., 1997)) suele ser conveniente que los problemas provengan de otras asignaturas de la carrera. En efecto, cuando se enseña Matemática como asignatura de servicio (ICMI, 1986), o simplemente Matemática para no matemáticos (Fernández, V. y otros, 1999), la motivación juega un rol fundamental y una forma de lograrla es con aplicaciones provenientes de otras asignaturas o mejor aún, de problemas de la vida real.
Por otra parte, esta metodología permite poner en juego otras cosas tan importantes como el modelado (Vasco Uribe, C., 1999), el trabajo multidisciplinario (Fernández de Alaiza, B., 2001), la recuperación de escenarios (Martínez Luaces, V., Díaz Moreno, L. y otros, 2000) y el diseño de experimentos ((Casella, S. y Martínez Luaces, V., 1996) y (Martínez Luaces, V., 1997)).
Teniendo en cuenta este marco teórico, se decidió desde un comienzo darle al curso de Ecuaciones Diferenciales un enfoque aplicado y un énfasis hacia la resolución de problemas reales. En particular, para trabajar con ciertas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y sistemas de EDO, cuantitativa y cualitativamente, se eligió como fuente potencial de problemas la Cinética Química.

Desarrollo

En 1996 un equipo multidisciplinario se hizo cargo del curso e inició la búsqueda de problemas de aplicación en viejas publicaciones y repartidos de la cátedra. Solo se encontró un problema de Cinética Química (Cátedra de Matemática, 1985) correspondiente a una reacción en cadena de tres especies químicas, muy clásico y subutilizado, ya que pedía solamente las concentraciones de las distintas especies en función del tiempo

El escaso éxito obtenido sugirió ir directamente a las fuentes. Para ello se hizo una revisión de la publicación “Prácticas de Cinética Química”, de la Cátedra de Fisicoquímica (Cátedra de Fisicoquímica, 1976), donde el resultado no fue mucho mejor. En efecto, un solo problema resultó adaptable a las necesidades: “Mutarrotación de la Glucosa”, el cuál también fue subutilizado, como veremos en la próxima sección.

En cuanto a las dificultades de ese primer curso, la realidad superó notoriamente las previsiones del equipó docente. En efecto, en dicho curso había estudiantes de once generaciones diferentes, distribuidas a lo largo de veinte años. Esto trajo una enorme heterogeneidad, no sólo de edades sino también de formaciones, notaciones, conocimientos, etc., con las consiguientes dificultades para los docentes. Esas dificultades fueron subsanadas con mucho esfuerzo y dedicación, tanto de los alumnos como de los profesores.

El curso de 1997 mostró una heterogeneidad sustancialmente menor, aunque la cantidad de alumnos se triplicó respecto al año anterior. Este hecho desanimó a los docentes para hacer cambios importantes en los repartidos de práctico, que fueron los mismos del año 1996. Lo que sí se cambió fue la modalidad de trabajo, al dedicar la media hora central de cada práctico a las aplicaciones.

Paralelamente, desde principios de 1997 se comenzó una línea de colaboración con docentes e investigadores de Electroquímica de la Facultad de Ciencias, de la cual surgieron algunos trabajos. Como se puede ver en un resumen de los mismos (Martínez Luaces, V. y Guineo Cobs, G., 2001) en ellos se utilizan conceptos y procedimientos de la Cinética Química y de la Teoría de EDO.

Ese reciente interés por la cinética química de parte de los docentes, aunado al mayor nivel alcanzado por los alumnos de la generación 97 (que al final tuvieron muchas menos dificultades que la generación anterior), hizo que en las evaluaciones finales de ese año aparecieran por primera vez problemas de Cinética Química y sistemas de EDO.

Los estudiantes respondieron adecuadamente a esos cambios en la evaluación y esto sugirió continuar con esa política. Más aun, para el curso de 1998 se armaron nuevos repartidos, en los que se recogieron dichos problemas de exámenes y se incorporaron nuevos problemas y algunos de los viejos fueron adaptados, como es el caso de Mutarrotación de la glucosa, que será analizado en la próxima sección.

También hubo un cambio de modalidad al dedicar una de cada tres clases prácticas a las aplicaciones y al mismo tiempo se separaron los repartidos prácticos de los repartidos de aplicaciones.

Un nuevo cambio tiene lugar en 1999 al editarse una publicación denominada “Matemática III. Problemas de Aplicaciones” en la que se juntaron todos los repartidos de 1998 y los problemas de exámenes que se acumularon en todo ese período. Se mantuvo, sin embargo, el régimen de una clase de cada tres dedicada a las aplicaciones.

En 1999 un ex - alumno solicitó un asesoramiento matemático relacionado con un problema de isótopos radiactivos con relación genética (Stein, J., 1973). Una versión simplificada del mismo apareció en un examen de ese año, siendo el primer examen en que se evaluaba el tema “Forma Canónica de Jordan” a través de una aplicación concreta.

En el mismo año, nuevas investigaciones del equipo de Electroquímica llevaron a modelar el problema con una cinética basada en reacciones electrocatalíticas (Martínez Luaces, V. y Guineo Cobs, G., 2001) y una versión simplificada del mismo fue la base de un examen del

año 2000. Por primera vez se trabajaba con sistemas de EDO a coeficientes variables, a través de una aplicación.
Estos nuevos problemas y otros que fueron surgiendo (tanto en EDO como en EDP) justificaron para el año 2000 hacer dos publicaciones: “Aplicaciones de EDO”(Martínez Luaces, V., 2000 a) y “Aplicaciones de EDP”(Martínez Luaces, V., 2000 b).
Al mismo tiempo, el advenimiento de un nuevo plan de estudios, sugirió comenzar una experiencia piloto en la que se pasó a dar una clase semanal de aplicaciones, triplicando la dedicación horaria anterior a este rubro. En dicha experiencia, se hizo una encuesta entre los estudiantes, cuyos resultados se comentarán posteriormente.

Un Problema que ha evolucionado:
Como se dijo previamente, el objetivo del curso es trabajar los temas matemáticos a través del modelado de problemas. Para la obtención de los mismos, se recurre continuamente a distintas fuentes como ser grupos de Investigación, Asesoramientos, otras cátedras, etc., e incluso se adaptan, a las nuevas circunstancias, problemas ya utilizados.
Un caso digno de analizar, dentro de los problemas retroalimentados, es el de “Mutarrotación de la Glucosa”, cuya primera adaptación (1996), decía:

> La mutarrotación de la glucosa se produce de la siguiente manera: $\text{glucosa}\,\alpha \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \text{glucosa}\beta$
>
> Entonces $-\dfrac{d[\text{glucosa}\alpha]}{dt} = \dfrac{d[\text{glucosa}\beta]}{dt} = k_1.(a-x) - k_{-1}.x$.
>
> Donde x=[glucosa ®] entonces $\dot{x} = k_1.(a-x) - k_{-1}.x$
> Resolver la ecuación diferencial

Como se puede apreciar, en esta versión sólo se pedía hacer una cuenta, sin ningún tipo de modelado. Esta situación, en cierta forma se repitió en 1997 ya que no se hicieron modificaciones en los repartidos aunque, como ya se comentó en la sección anterior, se modificó el tiempo dedicado al modelado (Aplicaciones).
En 1998, los alumnos ya sabían (por el contacto con generaciones anteriores) que en el curso se dedicaba bastante tiempo al modelado y los cambios importantes que se produjeron en cuanto a los problemas aplicación (que desde ese año están separados de los ejercicios exclusivamente matemáticos), fueron tomados de muy buena manera.
En particular el problema que aquí estamos analizando fue sustancialmente modificado, presentándose en tres instancias distintas:

> La mutarrotación de la glucosa procede según la reacción: $\text{glucosa}\,\alpha \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \text{glucosa}\beta$
>
> Sea x=[glucosa ®] y a= [glucosa ∇]$\sigma_{t=0}$, suponiendo que [glucosa ®]$\sigma_{t=0}$ = 0
> Plantear y resolver la ecuación diferencial en x.

Esta primer instancia, es algo similar a la versión de 1996 pero exige un mínimo de modelado, al no dar la ecuación diferencial, sino pedir al estudiante que la plantee. Si bien, para un alumno con formación química, esto es sencillo, de todos modos implica que debe poner en práctica, en forma conjunta, sus conocimientos matemáticos y químicos.

La segunda parte de este problema se introduce al momento de trabajar con sistemas de EDO, planteándole al alumno lo siguiente:

> La mutarrotación de la glucosa ya ha sido estudiada y la ecuación: glucosa $\alpha \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}}$ glucosaβ
>
> Se puede expresar en general como $A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B$
>
> a) Plantear el sistema de ecuaciones correspondiente a $\frac{d[A]}{dt}$ y $\frac{d[B]}{dt}$
> b) ¿Es diagonalizable?
> c) Resolverlo.

En esta etapa se producen todos los años algunos comentarios dignos de tener en cuenta, como el hecho de que por fin ven algo de origen no matemático en lo que se utilizan los métodos de diagonalización u obtención de una matriz de Jordan.
La tercera parte del problema se realiza junto al ante último tema del curso, cuando se trabaja con Estabilidad y el estudio cualitativo de las ecuaciones. En esta instancia se le pide al alumno:

> Retomando el problema de Mutarrotación de la glucosa:
> a) Estudiar la estabilidad en base a los signos de los valores propios.
> b) ¿Qué pasaría si parte de la glucosa α ya se transformó en glucosa β al tomar el tiempo cero?
> c) ¿Cambia en algo si la cantidad de glucosa α pesada al principio es algo menor que lo que se quería pesar?

Es en esta parte del curso cuando el alumno tiene mayor interés por la interpretación de los resultados matemáticos obtenidos. En este problema en particular le interesa conectar con su intuición química, ya que tienen una idea de lo que debería suceder pero quiere poder fundamentar y predecir cuando un error de medición va a ser despreciable o no.
En esta instancia es muy común que el alumno se equivoque en las cuentas, sin embargo se percata de ello ya que obtiene resultados matemáticos que químicamente no coinciden con lo que esperaría encontrar. Es en ese momento, en el que realmente se produce la aprehensión de los conceptos y procedimientos adquiridos.

Resultados

A pocas semanas de iniciado el primer curso (en 1996), si hizo una encuesta entre los estudiantes. Se observó, entre otras cosas, una gran carencia en lo referente a las aplicaciones que fue revertida con éxito como mostró la evaluación docente. La misma tenía 25 preguntas, de las cuales dos son importantes en este contexto, una referente a las conexiones con otras asignaturas y la otra al planteamiento de aplicaciones a problemas de la vida real y profesional. Los guarismos obtenidos fueron respectivamente 8.87 y 9.03, totalmente inusuales en otros cursos de Matemática (Martínez Luaces, V., 1998). Además, un análisis de clusters, muestra a Matemática III separada de todos los demás cursos, en lo relativo a las Aplicaciones. Más aún, un análisis estadístico de muestras ligadas[7], permitió

[7] utilizando alternativamente el test "t" para muestras con diferencias normales o el test de Wilcaxon para muestras apareadas a distribución libre

constatar diferencias significativas en las evaluaciones docentes de 1993 y 1997, es decir, antes y después de esta experiencia (Gómez, A. y Martínez Luaces, V., en referato)
Como complemento, otra encuesta totalmente abierta, de fines de 1998, produjo comentarios muy alentadores de los estudiantes. Por ejemplo, un estudiante dijo: “Nunca pensé que la Matemática tuviera tantas aplicaciones” y otro sentenció: “Todos los cursos deberían ser como este”
Tomando en cuenta comentarios, sugerencias y opiniones de esa y otras encuestas, se elaboró para el año 2000 un cuestionario de tipo semi – abierto, para que el alumno respondiera sobre los puntos de interés para los docentes y además pudiera explayarse libremente y de manera anónima.
En lo referente a sí vale la pena o no dedicar tiempo a las aplicaciones, la respuesta afirmativa es unánime. En cuanto a sí darlas en un módulo separado, o darlas con el teórico, o con el práctico, etc., la mayoría prefiere la opción actual, es decir, un módulo separado (actualmente, como se dijo, se da una hora y media semanal de problemas de aplicaciones).
También hay una gran mayoría de opiniones a favor de dar los temas (EDO, sistemas, estabilidad, etc.) articulados con otras materias como se hace actualmente. Menos de un 20% de las respuestas sugieren otras posibilidades, que más bien hacen a la instrumentación, carga horaria, etc., que a modificaciones sustanciales.
Los buenos resultados obtenidos han tenido efectos colaterales importantes. Uno de ellos es que en el nuevo plan la cátedra pasa de 4 a 11 materias distintas a su cargo. En el caso concreto de Ecuaciones Diferenciales, el nuevo plan lo hace obligatorio para Ingeniería Química y para Ingeniería de Alimentos e incrementa su carga horaria de 3 a 5 horas semanales.
Además de esto, los docentes de Mat. III fueron invitados a dar un curso de EDP con aplicaciones a la Ingeniería Química, que actualmente integra la oferta permanente de cursos de la Maestría en Ingeniería Química.
Todo lo anterior ha terminado por consolidar institucionalmente los resultados obtenidos en todo este proceso.

Conclusiones

Como se ha mencionado en un trabajo basado en estudios de evaluaciones docentes (Martínez Luaces, V., 1998) la motivación es la clave para lograr una evaluación positiva de parte de los estudiantes. Entonces el problema pasa a ser cómo lograr esa motivación. Pues bien, muchas son las variables que intervienen, pero obviamente en estudiantes no matemáticos la vinculación con su propia carrera es fundamental. En tal sentido, el presentar problemas reales de aplicación y lograr una verdadera conexión con otras asignaturas, es de enorme importancia.
La experiencia de Mat III sugiere no pretender llegar al resultado final en el primer intento. Por el contrario, la búsqueda de verdaderas aplicaciones es un proceso iterativo de mejora continua.
Lo mismo sucede con las conexiones con otras asignaturas. Se comienza por aquellas de más sencilla instrumentación, se van logrando los contactos y luego se profundiza más y más en un enriquecimiento mutuo de los docentes de Matemática y de los colegas de otras disciplinas.
Un hecho interesante que vale la pena comentar, es que en un trabajo con expertos en Matemática como asignatura de servicio (Martínez Luaces, V. y Casella, S., 1996), surgió la cuestión de cuál sería la situación ideal y cómo se hace para transitar hacia ella.

Pues bien, los propios expertos notaron que en todo curso de Matemática para no matemáticos, las aplicaciones de su propia carrera tienen un rol fundamental. Es imposible pensar en un curso "ideal" de Ecuaciones Diferenciales que carreras químicas si las aplicaciones a la Química no están presentes.
Quedó pendiente la segunda pregunta, es decir: ¿cómo transitar hacia esa "situación ideal"? (la nomenclatura proviene de un trabajo ICMI (ICMI, 1986)). La respuesta dada por los expertos fue sencilla y contundente: "*formar equipos multidisciplinarios*".
La idea no es solamente tener gente que pueda "traer" aplicaciones. El concepto subyacente es mucho más amplio. Se trata de que el equipo docente tenga un genuino interés por las aplicaciones de la Matemática, por su enseñanza y por la investigación en Matemática Educativa.

Referencias bibliográficas

Casella, S y Martínez Luaces, V. (1996). "Los problemas como núcleo de un curso", *II Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur*, Salta, Argentina.

Cátedra de Fisicoquímica (1976). *Prácticas de Cinética Química.* Montevideo: Ed. UDELAR.

Cátedra de Matemática (1985). *Matemática II* . Montevideo: Ed. UDELAR

Fernández de Alaiza, B. (2001). "La Interdisciplinariedad como base de una estrategia para el perfeccionamiento del diseño curricular de una carrera de ciencias técnicas y su aplicación a la carrera de Ingeniería en Automática en la República de Cuba", *Tesis presentada ante el Tribunal Nacional de Ciencias Pedagógicas*, La Habana, Cuba.

Fernández, V. y otros (1999). *Educación Matemática para no matemáticos*. San Juan: Ed. Fundación Universidad Nacional de San Juan.

Gaulin, C. (1996). Conferencia dictada para la Sociedad uruguaya de Matemática y Estadística (SUME), Montevideo. Uruguay.

ICMI (1986). "Mathematics as a service subject", *L'Enseignement Mathématique* **32**, 159-172

Martínez Luaces, V. y Casella, S. (1996). "La educación matemática en las diferentes ramas de la Ingeniería en el Uruguay hoy", *Memorias del II Taller sobre la enseñanza de la Matemática para Ingeniería y arquitectura*, La Habana: ISPJAE.

Martínez Luaces, V. y Gómez, A. (en referato). "Evaluación docente utilizando Análisis Multivariado", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Martínez Luaces, V. (1997). "Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas", *Actas de RELME XI*, México: CLAME.

Martínez Luaces, V. (1998). "Matemática como Asignatura de Servicio: algunas conclusiones basadas en una evaluación docente", *Números. Revista de Didáctica de la Matemática*. pp 65 - 74.

Martínez Luaces, V. (2000 a). "Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias". Montevideo: AEQ

Martínez Luaces, V. (2000 b). "Aplicaciones de Ecuaciones en Derivadas Parciales". Montevideo: AEQ.

Martínez Luaces, V., Guineo Cobs, G. (2001). "Ecuaciones Diferenciales en problemas de Electroquímica". *Actas de COMAT 01*, ISBN 959 – 160098 – 4.

Martínez Luaces, V., Díaz Moreno, L. y otros, (2000). "Informe del Panel y del Grupo de Trabajo sobre Enseñanza de Matemática en la Educación Superior", V Congreso de Didáctica de Matemática del Cono Sur, Santiago de Chile.

Schöenfeld, A. H. (1983). "Episodes and executive decisions in mathematical Problem solving" *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press.

Stein, J., 1973. *Isótopos radiactivos*. Madrid: Ed. Alhambra, España.

Vasco Uribe, C. (1999). "Las Matemáticas Escolares en el año 2010" *Conferencia pronunciada en la X CIAEM en Boletín especial de SEMUR*,**1**.

Estimulando la creatividad en una clase de una Facultad de Ciencias

Susana González de Galindo, Patricia Villalonga de García, Marta Marcilla de Rulli, Berta Chahar de Corrales, Lisa Holgado de Mejail
Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
segalin@unt.edu.ar pvdg@unt.edu.ar

Resumen
El clima imperante en las instituciones educativas promueve más la reproducción y el conformismo, que la creatividad. Por eso, se requieren transformaciones que permitan las acciones y los enfoques que, de forma sistémica y generalizada, demanden el desarrollo de la misma. Es importante destacar, que ser creativos no es sólo una forma de pensar, sino fundamentalmente, es una actitud frente a la vida, recurriendo a estrategias de pensamiento abiertas, flexibles, cambiantes, transferibles y meta cognoscitivas.
El docente universitario debería aspirar a que sus alumnos desarrollen su potencial creativo. Ésta es una necesidad dadas las exigencias de la sociedad moderna y el creciente avance de la ciencia y la técnica.
El propósito de este trabajo es presentar una clase de Cálculo en la que se estimulan los procesos intelectuales creativos a través de la implementación de métodos y estrategias adecuadas. Esta propuesta interpreta, que una buena enseñanza involucra actividades socializadas, en las que tienen cabida la creatividad y en las cuales la interacción favorece la comunicación. El marco teórico se basa en principios enunciados por Guilford, Mitjáns Martínez, Rouquette y otros.

Introducción

El docente universitario debería aspirar a que sus alumnos desarrollen su potencial creativo. Ésta es una necesidad dadas las exigencias de la sociedad moderna y el creciente avance de la ciencia y la técnica.
El propósito de este trabajo es presentar una clase de Cálculo en la que se estimulan los procesos intelectuales creativos a través de la implementación de métodos y estrategias adecuadas.

Fundamentación teórica

¿Qué es la Creatividad? Según Mitjáns Martínez, A. (1990) podría caracterizarse a la ***Creatividad*** como un proceso de descubrimiento o producción de algo nuevo, valioso, original y adecuado que cumple con las exigencias de una determinada situación social, en la cual se expresa el vínculo de los aspectos cognoscitivos y afectivos de la personalidad**.**

El proceso creativo

¿Qué ocurre en la mente durante el proceso creativo? Guilford (1967) elaboró una concepción de los procesos intelectuales fundada en las distinción entre dos tipos de actividades cognitivas: el pensamiento divergente y el convergente. El **pensamiento convergente** tiene la característica esencial de estar orientado hacia la búsqueda de la mejor respuesta a un problema dado. Esta forma de pensamiento conviene a la resolución de **problemas bien definidos**, es decir, que la solución propuesta puede ser evaluada según una variable binaria de verdadero o falso, como los problemas de carácter lógico. El **pensamiento divergente o lateral**, en cambio, es eminentemente pluridireccional, dúctil y adaptable: el sujeto varía las perspectivas y los procedimientos, y utiliza distintos registros de

conocimientos. Esta forma de pensamiento es adecuada para la resolución de problemas que admiten un número indeterminado de respuestas. Por ejemplo, proponer usos diferentes a objetos comunes, como podría ser un ladrillo, que puede emplearse como proyectil, como adorno, para sostener libros etc.
Los rasgos característicos de la creatividad definidos por Guilford son: sensibilidad, fluidez, flexibilidad, originalidad, destreza de redefinición, habilidad para sintetizar (Davis G. y Scott, J, 1975), capacidad de abstracción y coherencia de organización.
Implementar estrategias para aprender y pensar más creativa y reflexivamente, lleva al alumno a tener un papel más activo, ser más responsable de su propia formación, incrementar su iniciativa, autodirección y motivación intrínseca, economizar el tiempo destinado a aprender, descubrir su propio proceso de aprendizaje y autoevaluarse. A su vez, el docente pasa a ser un facilitador de la enseñanza; las evaluaciones se tornan más formativas y flexibles; en general se favorece el desarrollo de las capacidades intelectuales, afectivas y volitivas de alumnos y docentes.

Técnicas que favorecen la creatividad

Entre las técnicas que favorecen la creatividad (Mitjáns Martínez, et al, 1995) se destacan las siguientes:
Sinéctica: en esta técnica los participantes dan sus puntos de vista y proponen ideas en relación con un problema, a través de analogías y metáforas que conducen a la solución del mismo. Funciona a través de dos procesos básicos:
a) ***hacer conocido lo extraño, y***
b) hacer extraño lo conocido.
a) hacer conocido lo extraño: En toda situación de planteo y solución de problemas, la responsabilidad primordial de los individuos participantes es la de comprender el problema. Enfrentado a lo extraño, el individuo tiende a acomodarlo dentro de un modelo aceptable o bien a cambiar la geometría interna de su mente para hacerle lugar. *Hacer conocido lo extraño* es esencialmente una fase analítica en que deben explorarse todas las ramificaciones y fundamentos del problema. En esta fase se incluyen los siguientes procedimientos: análisis, generalización, y la búsqueda de modelos o analogías. El *análisis* es el proceso de descomponer un problema en las partes que lo componen. La *generalización* es el acto intelectual de identificar pautas significativas entre las partes componentes. La *búsqueda de modelos o analogías,* es reconocer frente a una nueva experiencia o conocimiento, las similitudes con los anteriores.
b) hacer extraño lo conocido: En esta fase se trata de distorsionar, invertir o trasponer la manera cotidiana de ver las cosas. La búsqueda de la extrañeza no es solamente un intento de encontrar formas extravagantes y fuera de lugar. Es un intento consciente de lograr una nueva concepción de lo familiar.
El responsable de esta estrategia, debe seguir una secuencia de pasos al desarrollarla, que aseguren la generalización, desarrollo y uso eficiente del material analógico. Con la formulación de preguntas evocativas adecuadas, debe lograr respuestas analógicas.

Brainstorming o Tormenta de ideas: tiende a obtener la mayor cantidad de ideas que puedan servir de orientación a la solución del problema, procediendo luego a valorarlas y mejorarlas. Esta estrategia, al igual que la Sinéctica, promueve fundamentalmente la fluidez. Sus reglas son:

- no enjuiciar las ideas expresadas por los compañeros y abolir, en la medida de lo posible, la autocrítica y la autocensura;
- el grupo puede tomar caminos extraños, aprovechando toda la plenitud de su imaginación;
- facilitar la generación del máximo de ideas, para que sea mayor la oportunidad de hallar "buenas ideas";
- se pueden desarrollar las ideas de otros miembros del grupo. El grupo trabaja como una unidad de autoestimulación interna, la producción final pertenece a todo el equipo (Rouquette, 1977).

Esta técnica se basa en la existencia de un efecto facilitador de la situación de grupo para la resolución de problemas, ya que toda idea sugerida tiene un efecto estimulante para el que la enuncia y para los otros miembros del grupo, despertando en cada participante distintos potenciales asociativos, generadores de ideas nuevas y diversificadas. En una etapa de evaluación, se valoran las ideas producidas, se seleccionan las valiosas y se eliminan las inútiles.

Check–List o Quebrantamiento: Esta estrategia se caracteriza por preguntar, observar, asociar y predecir. La solución creativa hay que buscarla en la pluralidad de preguntas que, enfocadas desde distintos ángulos, llegan a esclarecer el objeto que queremos solucionar.
Los pasos para realizar esta estrategia son:

1) comprensión del problema
2) búsqueda de la relación entre lo que se sabe y lo que se desconoce, elaborando un plan en el que pudieran contestarse distintas preguntas: ¿Me he planteado antes este problema?, ¿lo conozco de otra forma?, ¿recuerdo algún planteamiento semejante?
3) realización del plan, poniendo en práctica la solución creada, comprobando cada paso.
4) examen de la solución obtenida.

Listado de Atributos: esta estrategia consiste en trasladar los atributos de un objeto a otro. Es decir, darle una nueva cualidad o característica al objeto o fenómeno que estamos trabajando.

Análisis Funcional: Se asemeja al listado de atributos. Se buscan todo tipo de cualidades que nos transmitan una solución del problema.
Las etapas de esta estrategia son:

1) pregunta inicial: en general se inicia preguntando: ¿para qué sirve? Así se evocan las distintas funciones del objeto.
2) ordenación: se ordenan y clasifican las funciones enumeradas.
3) embozo: se analiza el objeto que realiza dichas funciones lo mejor posible.

La matemática como promotora del desarrollo de la creatividad y del pensamiento lógico

A través de la enseñanza de la Matemática se promueve el desarrollo intelectual de los alumnos. Los conceptos, las proposiciones y procedimientos matemáticos, poseen un alto grado de abstracción y su asimilación obliga a una actividad mental rigurosa. Los conocimientos matemáticos están estrechamente vinculados formando un sistema. El mismo ofrece un campo propicio para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico.
La enseñanza de la Matemática contribuye al pensamiento creativo cuando los alumnos participan activamente en la búsqueda de nuevos conocimientos e ideas para solución de ejercicios y problemas. El docente debe dar oportunidad a los alumnos de buscar, analizar y discutir diferentes modos de proceder, diferentes vías de solución, diversas posibilidades de introducir variables o modelar situaciones.

Ejemplo de una clase teórica de cálculo en la que se promueve la creatividad

Esta propuesta se basa en un enfoque del proceso educativo de tipo constructivista. La resolución de situaciones problemáticas desempeña un papel fundamental en la construcción del conocimiento. El estudiante, frente a tales situaciones, efectúa un acto de reflexión. Posterior al período de incubación, sigue la etapa de iluminación, en la que visualiza, con claridad, la estructura del problema, y por consiguiente su solución.
Tema de la clase: Integrales impropias con límites de integración infinitos.
Objetivos: Se pretende que el alumno:

a) Defina, a través de un proceso constructivo, integrales impropias con límites de integración infinitos.

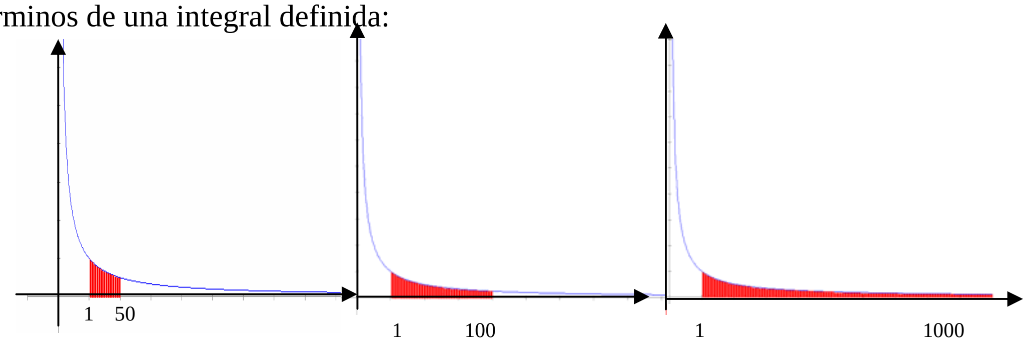
b) Favorezca el desarrollo de su propia creatividad, participando en estrategias adecuadas.

c) Se sienta motivado hacia la metacognición al modificar sus actitudes y percepciones sobre el propio proceso de solución de problemas.

Tiempo dedicado al desarrollo del tema: 2 horas reloj.

Desarrollo de la clase

El docente, plantea al alumno la siguiente situación problemática:
a) Sea *f* una función positiva cualquiera. Expresa el área sombreada en cada figura en términos de una integral definida:



b) ¿Cómo expresarías en términos de una integral, el área de la región no acotada que se encuentra a la derecha de x = 1, y está limitada por la gráfica de y = f (x) y el eje x?

En este momento de la clase se recurrirá a la estrategia **Lista de atributos** para llegar a la definición siguiente:

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} f(x)\,dx$$

denominándose a la integral del primer miembro integral impropia.
La estrategia **Lista de atributos** permite trasladar atributos de un objeto a otro. En este caso particular se debe trasladar los conceptos de área de una región acotada y de límite, al concepto de integral impropia.
Posteriormente, el docente generaliza la definición de integral impropia encontrada por los alumnos, para el caso de una función f no necesariamente positiva, continua en $[a,\infty)$, de la siguiente manera:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Considerando a la analogía como proceso fundamental del conocimiento, se recurre a la técnica **Sinéctica** para encontrar la definición de una nueva integral impropia :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

De acuerdo a esta técnica, los estudiantes deben realizar los siguientes procesos:
a) ***hacer conocido lo extraño***: para ello analizarán los límites de la nueva integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, con respecto a los límites de integración de $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.

b) **hacer extraño lo conocido**: lo conocido es $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$. Por medio del análisis y mediante un proceso analógico, el alumno invertirá la situación, planteándose ahora la necesidad de calcular un área no acotada, que se encuentra a la izquierda del valor x = b. A través de este procedimiento llegará a la definición:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Para llegar a definir la integral impropia con ambos límites infinitos: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se apelará a la técnica de **Check-List o Quebrantamiento.** A través de preguntas enfocadas desde distintos ángulos, se espera que los alumnos lleguen a descubrir la necesidad de particionar el intervalo de integración, siguiendo los pasos especificados al describir esta estrategia:

1) **comprensión del problema**: los dos límites de integración no son finitos,
2) **búsqueda de la relación entre lo que sabemos y lo que desconocemos**, **elaborando un plan**: el alumno apoyándose en conceptos estudiados anteriormente, debe descubrir la necesidad de particionar el intervalo de integración $(-\infty,\infty)$ en dos intervalos $(-\infty,c]$ y $[c,\infty)$ para aplicar en los mismos, las dos definiciones de integral impropia anteriormente vistas.
3) **realización del plan**, poniendo en práctica la solución creada: aplica las definiciones vistas considerando primero a *f* como función continua en $(-\infty,c]$ y luego a *f* como función continua en $[c,\infty)$.
4) **examinar la solución obtenida**: mediante un análisis determina las condiciones de convergencia de la integral con ambos límites infinitos.

A modo de aplicación de la teoría desarrollada y trabajando en equipos, los alumnos resolverán los siguientes ejercicios:

$$\text{a)}\ \int_{-\infty}^{-1} e^{x}\,dx \qquad b)\ \int_{\pi/2}^{\infty} \operatorname{sen} x\,dx \qquad c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2}}\,dx$$

Conclusiones

Esta propuesta interpreta, que una buena enseñanza involucra actividades socializadas, en las cuales tienen cabida la creatividad y en las que la interacción favorece la comunicación.
El clima imperante en las instituciones educativas promueve más la reproducción y el conformismo, que la creatividad. Por eso, se requieren transformaciones que permitan las acciones y los enfoques que, de forma sistémica y generalizada, demanden el desarrollo de la creatividad.
Es importante destacar, que ser creativos no es sólo una forma de pensar, sino fundamentalmente, es una actitud frente a la vida, recurriendo a estrategias de pensamiento abiertas, flexibles, cambiantes, transferibles y meta cognoscitivas.

Referencias bibliográficas

Betancourt Morejón, J. y otros, (1995). *Pensar y crear: Estrategias, Métodos y Programas*. La Habana. Cuba: Editorial Academia.
Davis, G.; Scott, J. (1975). *Estrategias para la creatividad*. Buenos Aires: Editorial Paidós.
De Bono, E. (1989). *El Pensamiento Lateral*. Buenos Aires: Editorial Paidós.
Fustier, M. (1975). *Pedagogía de creatividad*. España: Editorial Labor.
Guilford J. (1967). *The nature of human intelligence*. Nueva York: Editorial McGraw Hill.
Mitjáns Martínez, A. (1990). *La creatividad como proceso de la personalidad*. La Habana. Cuba: Editora Universidad de La Habana.
Mitjáns Martínez, A. (1995). *Creatividad, personalidad y educación*. La Habana. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.
Ojalvo, V. y otros, (1997). *Métodos y Técnicas Participativas.* Material impreso. La Habana. Cuba: CEPES. Universidad de la Habana.
Rodríguez Estrada, M. (1985). *Manual de Creatividad*. Editorial Trillas.
Rouquette, M. (1977). *La Creatividad*. Buenos Aires: Editorial Huemul.
Torrance, E. (1969). "*Orientación del talento creativo*". Buenos Aires: Editorial Troquel.

Introducción a la lectura de textos matemáticos antiguos•

Apolo Castañeda, Marcela Ferrari, Gustavo Martínez
CICATA-IPN, México . Cinvestav-IPN, México
acastane@mail.cicata.ipn.mx marferrari@prodigy.net.mx gmartinez@mail.cicata.ipn.mx

Resumen
Este taller se propone iniciar al profesor en el estudio de obras antiguas de matemáticas, en referencia a dos teorías que han sustentado nuestra investigación, la sociepistemología, encargada del estudio de la naturaleza social de conocimiento y la segunda la Transposición Didáctica, la cual se refiere a explicar el tránsito del saber sabio al escolar. En particular realizaremos algunas lecturas de textos matemáticos antiguos referidos principalmente a los conceptos básicos del cálculo o análisis matemático (representación cartesiana, límite, función, cálculo de áreas, derivada e integral) contenidos en (Agnesi, 1748; Le Goff, 1989; Euler, 1835; Euler, 1984; L´Hospital, 1696; Struik, 1986; Whiteside, 1967). Ello lo haremos a través del estudio de los conceptos de función logaritmo, el punto de inflexión y de exponente no natural.

Introducción

La investigación en matemática educativa como disciplina teórica, mantiene sus esfuerzos de atender las problemáticas asociadas con el aprendizaje de las matemáticas, al buscar condiciones para un funcionamiento óptimo que en conjunto orienten la práctica docente.
Al seno del salón de clase, el discurso matemático se compone esencialmente de las notas y de los libros de texto que apoyan a la clase, sin embargo este refinado saber que se plasma ahí está privado de sus significados primarios y caracterizaciones al ignorar las etapas y momentos por lo que transita un saber desde su nacimiento. El estudio histórico-epistemológico nos puede proveer de argumentos que en ocasiones los ha olvidado la enseñanza contemporánea, de tal forma que a través de caracterizar momentos y estudiar los escenarios en los que un saber se desarrolla, es posible dotar de enfoques alternativos a los conceptos que hoy se estudian en las instituciones de nivel superior y medio superior.
Al tener múltiples acercamientos de un mismo concepto se puede desarrollar una noción más amplia de un concepto matemático, puesto que es posible extraer más propiedades y características que sólo enunciándolo o definiéndolo. En este sentido nuestro espíritu es, por tanto, confrontar ideas en una discusión abierta con los participantes al taller en torno a textos originales en el afán de compartir nuestras ideas respecto a la importancia que una visión socioepistemológica (Ferrari, 2001; Castañeda, 2000; Martínez, 2000; Cantoral & Farfán, 1998) de nuestra disciplina, puede aportar a nuestra práctica docente.

Marco teórico

1. La Transposición Didáctica

Respecto al saber en juego, es importante atender a una distinción que proviene de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1997); el saber escolar es cualitativamente distinto al saber erudito, estos dos tipos de saber se distinguen por la naturaleza que tienen, el saber enseñable está alejado de la epistemología del saber sabio, dado que sus orígenes parecen estar sepultados, así este saber parece no pertenecer a ningún tiempo y no se legitima por nadie, al menos sólo por el profesor ejerciendo el poder que su título le confiere.
Así como la conformación de una noción en un "saber", es decir, en un conocimiento digno de ser difundido y preservado en una cultura, no está libre de ires y venires, de

• Esta investigación forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado. Estudio sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.

reformulaciones, de retrocesos y avances, la incorporación de un concepto al discurso matemático escolar sufre el mismo proceso, no está exento de tales avatares, los cuales han sido descriptos por Chevallard en teoría de la Transposición didáctica en la cual nos apoyamos para el desarrollo de este taller.

De acuerdo con esta teoría, el saber a enseñar se presenta mediante textos de saber, éstos tienen como una de sus características la de seguir un orden lógico en la presentación de los saberes. Todo el discurso tiene un principio y un fin (*autocontención* de los textos de saber) y opera por un encadenamiento lógico de razonamientos. Este mecanismo está presente en diversos niveles: desde el más "elemental" en donde se alude a cierto orden que es el adecuado en la presentación de los contenidos hasta el más "sofisticado", que encontramos en la presentación axiomática de las matemáticas. Como consecuencia de lo anterior, el sistema educativo vive una ficción (funcionalmente necesaria) de la correspondencia entre los tiempos de aprendizaje y los tiempos legales de enseñanza. Hoy sabemos un hecho fundamental: la coherencia lógica no garantiza el aprendizaje (el ejemplo más conocido es el que nos proporciona la llamada reforma de la matemática moderna). La teoría nos recuerda que el saber a enseñar difiere cualitativamente del saber erudito (esto, claro está, debido a los fenómenos de la transposición didáctica) por lo que es imprescindible en las investigaciones en Matemática Educativa que utilizan de alguna manera el análisis histórico-epistemológico el determinar estas diferencias.

2. La socioepistemología

La puesta en textos de saber, como lo menciona Chevallard, implica un cambio en la epistemología de todo concepto. Ponderada por unos y recriminada por otros, la transposición didáctica es inevitable, a veces intangible, pero siempre presente a la hora de incorporar conceptos a la cultura áulica. Se la percibe tanto en el desarrollo histórico de los conceptos como en su "adecuación" a los modelos didácticos imperantes. El responder a una cultura particular en un tiempo específico, regidos ambos por un paradigma no siempre palpable, torna relevante reflexionar sobre los significados, la pérdida de algunos, la reformulación de otros, la aparición de nuevas formas de abordarlos, de nuevas herramientas.

En este sentido la *socioepistemología* (Ferrari, 2001; Martínez, 2000; Castañeda 2000; Cantoral & Farfán, 1998) busca otorgar un estatus de *constructor de conocimiento matemático*, al sistema social y a sus actores que no necesariamente pertenecen a la elite erudita, al reconocer sus prácticas cotidianas y el conocimiento que de ellas se deriva. Por citar, el conocimiento de las etnias, el conocimiento producido por las sociedades que son sometidos mental o físicamente o el conocimiento que desarrollan grupos sociales específicos, como obreros, campesinos, comerciantes, políticos. En la investigación epistemológica esta visión reconoce la importancia que tienen aquellas prácticas que contribuyeron a la construcción del saber.

La investigación desde esta perspectiva incorpora a su metodología argumentos para el estudio sistémico de la construcción social del conocimiento, la epistemología, los planos cognitivo y lo didáctico, así como a la dimensión sociocultural. Este acercamiento en conjunto no se entiende como una compartamentalización, sino como una entidad metodológica que se articula a partir de argumentos de carácter sociocultural, así pues, el estudio epistemológico incorpora explicaciones sociales respecto a la construcción del conocimiento, el estudio cognitivo (Este no sólo reducido al estudio de la conducta en forma individual, si bien es cierto que algunas manifestaciones entre los individuos no son del todo sociales, la sociedad en su conjunto ejerce una notable influencia que en ocasiones no es percibida ni explícita) considera los procesos del pensamiento como base de las explicaciones de las funciones mentales, la didáctica en una estrecha relación con el escenario sociocultural y las prácticas humanas asociadas a la construcción del conocimiento y finalmente, la sociocultural, que eventualmente participa como integradora de las otras.

Por su propia naturaleza esta última dimensión es quizá una componente de transición que habrían desaparecer una vez que las anteriores reformulen sus propias preguntas atendiendo a variables de tipo sociocultural. El acercamiento *Socioepistemológic*o, como lo ha llamado Cantoral (1998), cobija a una epistemología que no se reduce a una eventual clasificación de *obstáculo*s, sino se encamina por una parte, a proporcionar una base de significados a los conceptos matemáticos a través de analizar el origen social del conocimiento, en términos de determinar su naturaleza al seno de un sistema sociocultural, es decir, atender las preguntas fundamentales ya sea de carácter empírico (referentes físicos, experiencias cotidianas, conocimientos socialmente usados, conocimientos de prácticas específicas como artesanos o arquitectos) o racional (preguntas fundamentales, extensiones teóricas, razonamientos metafísicos, etc.) que permitieron, condujeron, facilitaron o antecedieron al surgimiento de un conocimiento y a su eventual desarrollo. Este acercamiento que rescata *una base de significados primarios* de los conceptos matemáticos desde el plano sociocultural se haya sustentado en estudios de tipo sociológico[8], intentando, a través de sus preguntas, conocer la dinámica de las relaciones sociales en torno a un conocimiento, para así tratar de esclarecer los mecanismos por los que se constituye un saber, por ejemplo; los criterios de validez o los paradigmas que controlaron las opiniones en cuanto a la consistencia lógica de dicho conocimiento.

Actividades

Mediante la lectura de diversos textos matemáticos antiguos (tanto “eruditos” cómo “didácticos”) buscaremos establecer un esquema de la génesis y desarrollo histórico de los conceptos de función logaritmo, estudio del punto de inflexión y génesis del exponente no natural. El estudio alrededor de estos conceptos nos permitirá reflexionar sobre otros que están inmersos en el cálculo o análisis matemático básico (representación cartesiana, límite, función, cálculo de áreas, derivada e integral). Todo esto se hará, como ya hemos señalado, con la intención de obtener un mayor entendimiento de la naturaleza de la matemática escolar; por lo que platearemos algunas preguntas básicas: ¿qué aportes nos puede proporcionar el análisis de los libros originales? ¿somos capaces de rescatar significados de ellos? ¿cómo releerlos a la luz de nuestros conocimientos actuales?

1. La función logaritmo

Si rastreamos la conformación del concepto de función logaritmo tal como la conocemos hoy en día y es presentada en los libros de texto, podemos sorprendernos con argumentos que se encuentran en libros “didácticos” de antaño, y que han sido totalmente abandonados. Así, en uno de los primero libros de texto para la enseñanza del cálculo, *Institución analitiche ad uso della gioventú italiana*, escrito por María Agnesi en 1748 encontramos argumentos gráfico-geométricos en torno al concepto de logaritmo así como también de problematización sobre la necesidad de completar el patrón de la cuadratura de las

[8] Los tipos recurrentes observables en la interdependencia humana son asunto de las ciencias sociales del tipo a que pertenece la sociología. En la vida real se sucede una innumerable diversidad de cosas. Por debajo de esos sucesos se repiten ciertos elementos que son, una vez percibidos, les dan unidad y sentido. El historiador muestra lo variable; el sociológico señala lo constante y recurrente, la sociología descompone las diferentes combinaciones en sus relativamente pocos elementos básicos y formula leyes que las gobiernan.

funciones potencia. El concepto gira alrededor de las “curvas logarítmicas” y cabe indagar qué significado poseían las mismas en pleno siglo XVII y principios del XVIII, siglos de grandes avances científicos fundamentalmente en matemática, donde la construcción de poderosas herramientas de análisis iba de la mano de la aparición de nuevas ramas de esta disciplina tales como la Geometría analítica y el propio Cálculo lo cual ameritaba la búsqueda de nuevas formas de significar los conceptos ya conocidos y de crear otros en el afán de extender el campo de conocimientos.
Si nos remontamos a mediados del siglo XVII, nos encontramos con los trabajos de Saint Vincent, con su exploración de la cuadratura de la hipérbola en una época donde estaba en boga el estudio de las cuadraturas y en la que se hicieron grandes avances al respecto. Se determinó el patrón que rige a las cuadraturas de las funciones potencias, siendo aun estériles los intentos para la hipérbola equilátera y por tanto un desafío. El estudio y la controversia suscitada en torno a los hallazgos y deducciones de este monje permitieron, por vez primera, asociar la cuadratura de la hipérbola equilátera con los logaritmos, avance importante en el desarrollo de los mismos.
Si, en cambio, miramos los trabajos de Euler de fines del siglo XVIII, reconoceremos gran parte del discurso matemático de nuestros días. El enfoque aritmético de los libros de álgebra y la presentación de los logaritmos como función inversa de las funciones exponenciales en los de cálculo no distan del tratamiento que Euler le confiere a estos conceptos.
Nuestra propuesta es entonces, invitarlos a incursionar en estos textos para analizarlos y discutir las preguntas que guían este taller.

2. Génesis del exponente no natural

Mediante la lectura y análisis de ciertos pasajes contenidos en (Euler, 1984; L´Hospital, 1696; Struik, 1986; Whiteside, 1967) buscaremos establecer un esquema de la génesis y desarrollo histórico y algunas de las primeras formulaciones didácticas del exponente no natural. Además leeremos algunos textos modernos de álgebra elemental (Anfossi & Meyer, 1985; Baldor, 1983; Wentworth & Smith, 1985; Rees et al., 1982) para realizar un somero análisis de la transposición didáctica moderna de las nociones. Este análisis contemplará el estudio del funcionamiento y de las diversas formulaciones así como una somera revisión de los referentes epistemológicos que en éstos subyacen.
En síntesis señalamos que uno de los resultados más importantes a los que pretendemos arribar con nuestro análisis epistemológico estriba es que los exponentes no naturales emergieron como una convención o de consideraciones de tipo metamatemático[9]; es decir que se construyeron a partir de consideraciones sobre el funcionamiento de las matemáticas, y como esas consideraciones son relativas a la época de referencia, y su análisis nos permitirá entender la organización de los conocimientos en que hemos enfocado nuestro interés.
En los distintos referentes epistemológicos en que encontramos el surgimiento y desarrollo de convenciones presentes en el manejo de los exponentes no naturales hemos encontrado diferentes consideraciones metamatemáticas, a saber:

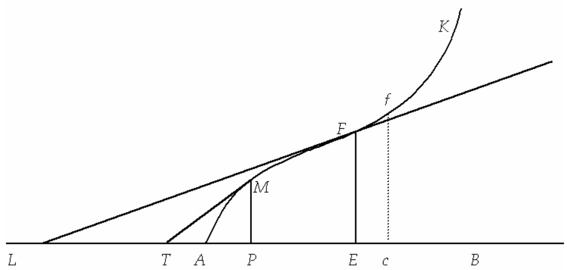
- En los textos modernos un principio de continuidad o permanencia de las llamadas leyes de los exponentes para los naturales.
- En las obras algebraicas antiguas un principio de uniformidad en los métodos para realizar las operaciones entre monomios.

[9] Por ejemplo el principio de interpolación usado por Wallis y Newton al requerir uniformidad en las fórmulas de las áreas de curvas.

- Un principio de continuidad o permanencia (principio de interpolación) de las fórmulas para determinar la cuadratura de curvas.
- En textos de álgebra modernos y antiguos un principio de inducción para la uniformidad de las operaciones con monomios.

3. Estudio del punto de inflexión

Nuestra reflexión parte de considerar las aportaciones de los trabajos clásicos de cálculo, pero también de aquellas otras obras que han intervenido en la constitución del cálculo. Las obras de L'Hospital y Agnesi, poco conocidos (algunas veces brevemente referenciados en la historia) están situados históricamente, en un momento muy importante. Poco después de haberse publicado los primeros trabajos de Leibniz en 1684 y 1686, y Newton en 1687 referentes al *nuevo cálculo*, el ambiente erudito un tanto tenso, manifestaba preguntas referentes a la naturaleza de los fundamentos, sobre todo respecto a los infinitesimales, lo que hacía complicado hablar fluidamente del tema. L'Hospital, quien mantuvo cierta relación y cercanía con Bernoulli, en una labor de difusión escribió en 1696 su libro *Analyse des infiniment petits,* un tratado de cálculo diferencial que representa el primer libro editado específicamente para fines de divulgación. María de Agnesi por su parte escribió en 1748 *Institutioni Analitiche,* un libro que incluía un tratado de cálculo diferencial. Con una notable influencia de Leibniz, Jacob y Johann Bernoulli, L'Hospital es reconocido por escribir el primer libro de texto de calculo diferencial en el cual aparecen consideraciones teóricas reconocidas como ideas propias. Agnesi, además de concentrar su atención al estudio de libros religiosos se adentró en la revisión de libros matemáticos de su tiempo, escribiendo comentarios a un material del mismo L'Hospital titulado *Traite analytique des seccion coniques*. Estudió con ayuda de Ramiro Rampinelli, un monje profesor de Roma, la obra de Reyneau; *Analiza démontrée,* un texto de cálculo publicado en 1708 de donde aprendió cálculo y fue el mismo Rampinelli quien animó a Agnesi a que escribiera un libro de cálculo diferencial. El resultado fue un texto para la instrucción en cuya introducción señala explícitamente la intención de ser un libro con ideas claras y accesibles *... doto de claridad apropiada y simplicidad... que los beneficios con ese orden natural que proporciona, quizás el de mejor instrucción y agrandar más la luz.* Veamos una de sus caracterizaciones, ésta respecto a su forma



Definition II

> *Lors qu'une ligne courbe AFK est en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B; le point F qui sépare la partie concave de la convexe, & qui par-conséquent est la fin de l'une & le commencement de l'autre, est appellé point d'infléxion.* (L'Hospital, 1696)

En su modelo explica, que cuando *AP* crezca continuamente, *AT* lo hará también, hasta que *P* llegue a caer en *E,* después del cual, *AT* irá disminuyendo. Esto supone que el punto *L* es un punto "extremo" o *máximo* de la subtangente en el momento en que *P* cae sobre *E*

A manera de cierre

Este tipo de actividades tiene como objetivo favorecer entre los profesores una comprensión más profunda de los saberes escolares a través del análisis epistemológico, al rescatar algunas caracterizaciones de conceptos del cálculo que sin duda constituyen elementos de alto valor y de utilidad en el desarrollo de las actividades de clase.

Además esperamos que este tipo de propuestas permitan despertar el interés de los profesores, que asistan a nuestro taller, hacia una reflexión más profunda de la naturaleza del pensamiento matemático y de su propia práctica docente. En última instancia esperamos que nuestro taller proporcione un acercamiento crítico a los constructos teóricos que éste maneja: Transposición Didáctica y socioepistemología.

Referencias bibliográficas

Anfossi, A.; Meyer, F. (1985). *Curso de álgebra*. México: Editorial Progreso, S.A.

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana. Libro Secondo del Calcolo Differenziale* (2 tomos).

Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural, S.A.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33-115.

Cantoral, R.; Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon. Revista de la S.A.E.M. "Thales" 42*, 353-369.

Castañeda, A. (2000). *Estudio didáctico del punto de inflexión: Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Chevallard, Y.(1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Editorial Aique.

Euler, L. (1835). *Introduction a l´analyse infinitésimale*. París, Francia: L'Ecole Polytechnique. (Trabajo original publicado en 1748).

Euler, L. (1984). *Elements of Algebra*. (John Hewlett , Trad.). EEUU: Springer-Verlag. (Trabajo original publicado en 1770, Vollständige Anleitung zur Algebra).

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

L'Hospital, A. (1696). Analyse des infiniment Petits pour L'intelligence des lignes courbes.
Primera reimpresión, 1988. Paris, Francia: ACL-éditions

Le Goff, J. (1989). De la méthode dite d´exhaustion: Gregoire de Saint Vincent (1584-1667). En Irem de Besancon (Ed.), *La démonstration mathématique dans l´Histoire.* (pp. 197-220). Actas du 7mo Éme colloque Inter-Irem Épistemologie et histoire des mathématiques.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría. México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Rees, P. K., Sparks, F. W. & Sparks Rees C.(1982). *Álgebra contemporánea*. México: McGraw-Hill.

Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

Wentworth, J & Smith, D. E.(1985). *Elementos de álgebra*. México: Editorial Porrúa, S.A.

Whiteside, D.T. (1967) (Ed.) *The mathematical papers of Isaac Newton*. 14 Volúmenes. Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Redes para el aula.
Una herramienta para la creatividad en el proceso de enseñanza aprendizaje

Roberto HoracioFanjul, Gladys MónicaRomano, Hilda María Motok, Ana ElisaIbáñez
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Tucumán. Argentina
rfanjul@arnet.com.ar gmercau@networld.com.ar

Resumen
Con el avance de nuevas tecnologías, surgió la necesidad de modelizar nuevos fenómenos no contemplados en el análisis clásico, como por ejemplo los modelos discretos. El objetivo de este trabajo fue diseñar una situación didáctica para introducir el concepto de Redes de Petri, como aplicación de Grafos, en la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información, a modo de brindar un tipo diferente de modelización. La modelización utilizada en nuestro taller responde al nivel de selección, debido a que el objeto matemático a usar es conocido. Además, con la enseñanza de este tema favorecer en los alumnos la comprensión de situaciones problemáticas e inducirlos a la creatividad. Para este fin, se aplicará el método problémico, para conducir a los asistentes al taller a obtener los conceptos y leyes, con el propósito de que lleguen, mediante el proceso de asimilación a culminar exitosamente los ciclos cognoscitivos. Los fenómenos planteados resultaron originales y motivaron a los participantes a buscar técnicas nuevas para modelarlos, lo que produjo que el método se trabajara con eficacia y se lograra así los objetivos propuestos.

Introducción

Carl A. Petri, investigador alemán, fue el iniciador de la modelización de sistemas discretos a través de redes; su interés fue tal que lo tomó como objeto de su tesis de doctorado, que la presentó con el título **Comunicación con un Autómata**. El primer objetivo de las Redes de Petri fue la modelización de Sistemas Discretos en los que aparecían componentes concurrentes**.** Pero a partir de la década del 70, se expande su campo de aplicación a otras áreas, como modelización de componentes de hardware, sistemas distribuidos, lenguajes de programación, control de procesos y protocolos de comunicación. En la década del 80, con el surgimiento de las Redes de Petri de alto nivel, las mismas incrementaron su aplicación, incluyendo otras áreas, como los sistemas de información, banco de datos, automatización e inteligencia artificial.

La teoría de Redes de Petri constituye un importante elemento para modelar un sistema no matemático con un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características del primero. Las leyes que rigen el funcionamiento de este sistema matemático se basan en la Lógica Formal, constituyéndose esta última en una herramienta necesaria para su realización y comprensión.(Heuser, 1990)

La importancia atribuida a las Redes de Petri en la actualidad radica en el hecho de que se usa en el estudio de las técnicas de especificación y de verificación de los mecanismos de los sistemas por medio de la modelización (Heuser, 1990).

En Matemática Discreta, materia especifica de las carreras de Computación, se tiene como objetivo el estudio de estructuras discretas, finitas o infinitas. Una de ellas es la estructura de Grafo. En el marco de la teoría de esta estructura adquieren una importancia fundamental los conceptos de digrafos, grafos bipartitos completos y grafos ponderados que tienen como aplicación relevante las Redes de Petri.

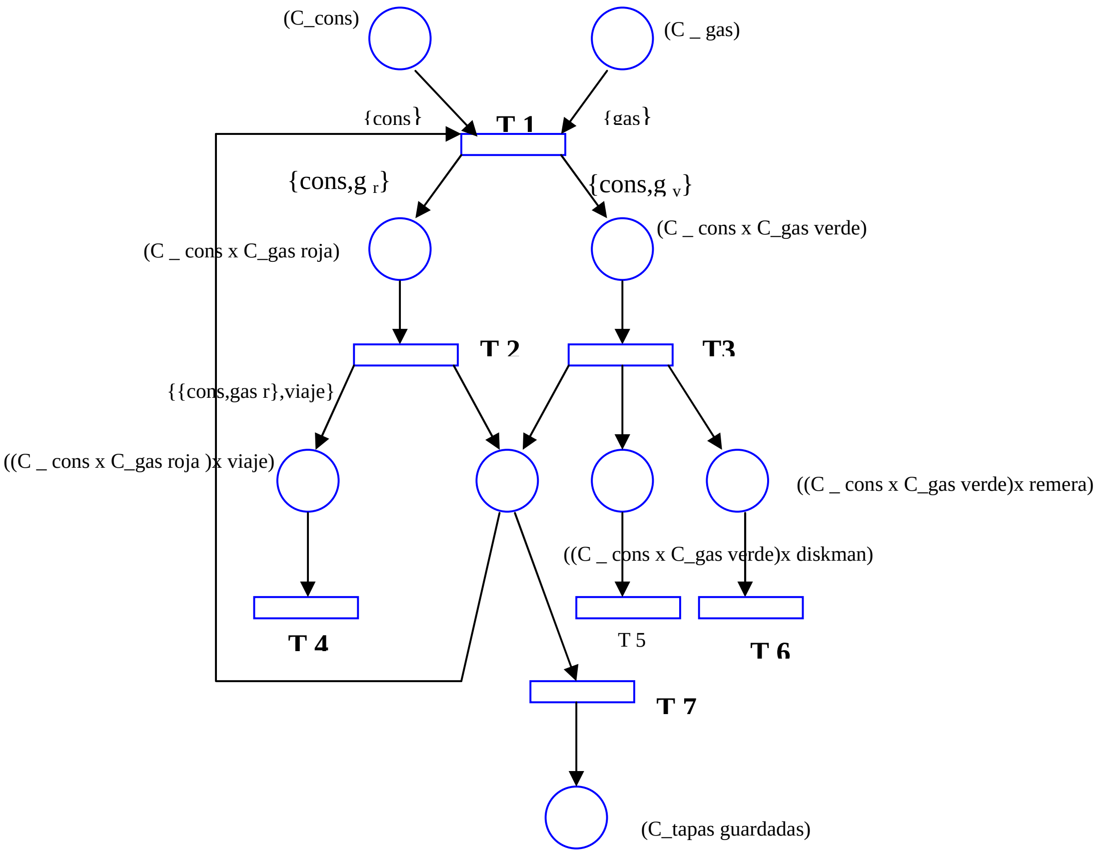
Se inicia el taller planteando una situación problémica que actuará como motivadora creando el conflicto cognoscitivo entre lo que conocen y lo que necesitan conocer para suscitar la necesidad de la respuesta. Posteriormente se realizará una discusión plenaria que muestre la necesidad de integración de nuevos conceptos. Los docentes propondrán nuevas situaciones problémicas a modelar lo que permitirá un constante intercambio de experiencias que enriquecerá la propuesta.

Red compacta

Para conocer los conceptos previos que los alumnos poseen se les plantea el siguiente problema motivador:

Diseñando una "Promo"Una conocida marca de gaseosas lanza una promoción que regala distintos premios escondidos en sus tapitas, las cuales pueden ser verdes o rojas. Las tapas verdes tienen tres tipos de leyendas: "seguí participando", "te ganaste un diskman",o "te ganaste una remera". Las tapas rojas tiene dos tipos de leyenda: "seguí participando"o "te ganaste un viaje a Miami". El consumidor puede elegir el color de la tapa al comprar la gaseosa. También puede juntar 10 tapas del mismo color y canjearlas por una nueva gaseosa.
- Represente en un esquema la situación planteada considerando todos los elementos que forman parte del sistema, sus propiedades y acciones, a partir del momento en que el consumidor elige comprar reflejando todas las opciones que la promoción le brinda.

Los participantes modelizaron la situación problemática mediante distintos grafos (diagramas de flujo, mapas conceptuales y otros diagramas). Posteriormente se los indujo a introducir los cambios necesarios para que el problema quede modelado mediante una Red de Petri Compacta. Una posible modelación es la siguiente:



En pasos posteriores se formaliza su estructura.

Una **Red de Petri** consta de:
Lugares o condiciones que son los fenómenos tipo estado, representados, cada uno por un círculo en el grafo bipartito. (Best, 2001)
Conexiones o transiciones que son los fenómenos tipo transición, representados, cada uno, por un rectángulo, cuadrado o una barra.
Ramas, representadas por flechas**,** que indican las formas de participación de un lugar en una conexión. Un lugar no puede estar conectado a una conexión más de una vez, a través de un determinado tipo de rama, las que pueden ser de entrada o salida de la conexión.
Lenguaje de anotación, para denotar simbólicamente a los lugares, conexiones y ramas de la red.
Posterior a los ejercicios de afianzamiento, surge la necesidad de representar los distintos estados del modelo. Se presentó a continuación la siguiente consigna:

> En la solución consensuada indique cómo representaría los siguientes estados del modelo:
> a) un consumidor compra una gaseosa con tapa roja.
> b) Un consumidor compra una gaseosa de tapa verde que tiene como premio un diskman

Como resultado de esta consigna surge la necesidad de las siguientes definiciones:
Marcación: Cada lugar de la red es considerado como un depósito de elementos de contenido variable, que puede o no estar marcado y que es representado gráficamente por la presencia o ausencia de una ficha en el lugar. El conjunto de todos los lugares marcados en una red recibe el nombre de marcación de la red.
Reglas de habilitación de una conexión:
Una conexión está habilitada frente a una marcación cuando: sus marcas de entrada en el caso de existir están presentes y sus marcas de salida, en el caso de existir, están ausentes.
Relaciones entre las conexiones:
Secuencia: Se dice que dos conexiones están en secuencia, cuando para que una conexión ocurra, es necesario que otra conexión haya ocurrido antes.
Concurrencia: Se dice que dos conexiones son independientes, cuando ellas no poseen condiciones de entrada ni condiciones de salida comunes. Cuando dos conexiones independientes están habilitadas se dice que ellas pueden ocurrir concurrentemente. (Best, 1989, 2001)
Opción: Se dice que dos conexiones son opcionales cuando ellas poseen condiciones de entrada comunes o condiciones de salida comunes, y cuando existen estados del modelo, en los cuales ambas conexiones se encuentran habilitadas. Cuando, en un estado, dos conexiones opcionales están habilitadas, se dice que ellas están en **conflicto.**
Se propuso la siguiente actividad:

> a) Busque las conexiones que están:
> i) en secuencia, ii) en concurrencia y iii) en conflicto
> b) ¿Es posible que el consumidor que compró una gaseosa de tapa roja la guarde?.
> Responda utilizando la red modelada.

Coincidieron todos los participantes en que pueden ocurrir un conjunto de conexiones sucesivas, y esto nos llevó a enunciar nuevas definiciones:
Paso: Un conjunto de alteraciones es un paso frente a una marcación llamada marcación precursora, cuando:

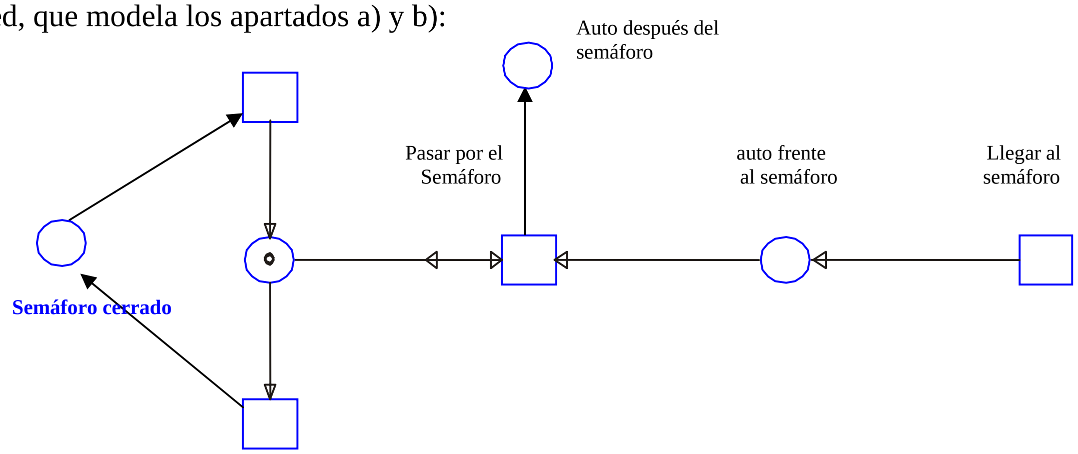
1.- Todas las alteraciones del paso están habilitadas dentro de la marcación precursora.
2.- Las alteraciones del paso no están en conflicto entre si.
Efecto de Ocurrencia de un Paso: El efecto de ocurrencia de las alteraciones de un paso, es la transición de la marcación precursora a una marcación sucesora, de forma tal que:
1.-Todas las marcas de entrada de las alteraciones del paso, desaparecen de la marcación antecesora.
2.-Todas las marcas de salida de las alteraciones del paso, aparecen en la marcación sucesora.

Ramas restauradoras

Se plantea el siguiente problema con el propósito de incentivar la creatividad en el alumno, teniendo como base los conceptos ya adquiridos.

> **Problema del Semáforo** Modele, usando una Red compacta, la circulación de vehículos en el cruce de dos calles controladas por un semáforo, con luces roja y verde, considerando:
> a.- La circulación del tráfico, antes y después de pasar por el semáforo.
> b.- El funcionamiento del semáforo.
> c.- El cruce de peatones**.**

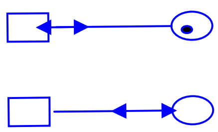
Los alumnos modelizaron la situación con dos ramas, una de entrada y otra de salida, entre un lugar y una conexión, sin notar que eso impediría la habilitación de dicha conexión. Es así que surge la necesidad de usar un nuevo tipo de rama, como se muestra en la siguiente red, que modela los apartados a) y b):



Comparando con las modelaciones de problemas anteriores, notamos que aparece una rama distinta (——— ↔), que presenta una doble flecha, que recibe el nombre de rama restauradora
El uso de las **ramas restauradoras** esta reglamentado de la siguiente manera:

> Las *ramas restauradoras de entrada* se usan para habilitar a una conexión cuando se necesite que haya marca en el lugar que es simultáneamente de entrada y salida de la conexión.

Las ramas restauradoras de salida se usan para habilitar a una conexión cuando se necesite que no haya marca en el lugar que es simultáneamente de entrada y de salida de la conexión.

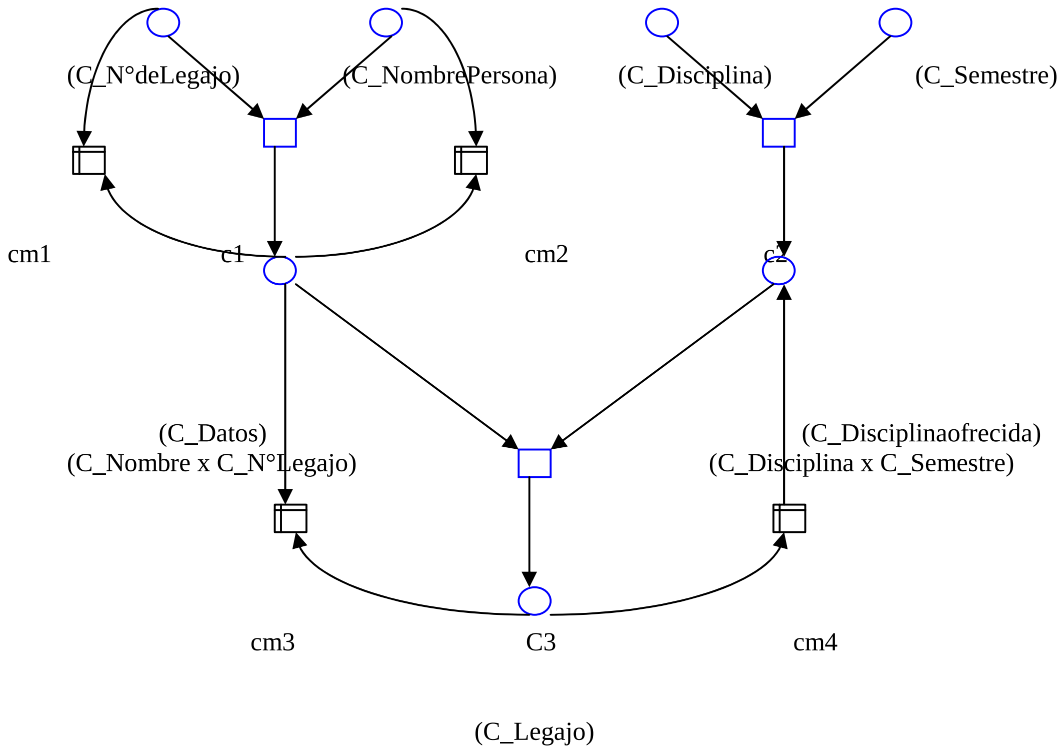


Conexiones muertas- redes extendidas

Considerando que el alumno está en condiciones de trabajar con un alto grado de independencia, elaborando una red de un sistema más complejo y detectando nuevos elementos que la componen se presenta el siguiente problema:

Control Académico.
Modele una red que contemple un sistema de control académico tal que aparezcan los siguientes lugares:
-C_Nombre: conjunto de nombres de las personas
-C_N°Legajo: conjunto de n° de legajos de las personas
-C_Disciplina: conjunto de disciplinas de la carrera
-C_Semestre: conjunto de los semestres lectivos
-C_Datos = C_Nombre x C_Legajo
-C_Disciplina ofrecida = C_Disciplina x C_Semestre
-C_Legajo = C_Datos x C_Disciplina ofrecida
Y tal que se cumplan las siguientes condiciones:
-Toda persona tiene su nombre asociado a un único n° de legajo.
-Cada n° de legajo corresponde al nombre de una persona inscripta.
-Cada legajo corresponde a un único alumno.
-La disciplina y el semestre registrados en un legajo deben figurar en disciplina ofrecida

De las distintas modelizaciones que se presentaron, se observó que había algo importante que hacer cumplir: a cada persona le corresponde un único número de legajo y viceversa, y que la disciplina elegida debe ser una de las ofrecidas en el semestre correspondiente. Para contemplar estas condiciones en el modelo es necesario definir otro tipo de conexiones que destaquen las propiedades estáticas del sistema, como lo muestra la siguiente red propuesta como solución del problema planteado:



Conexiones muertas.
Una conexión muerta es una conexión que define alteraciones jamás habilitadas en las marcaciones alcanzables en la red .
Redes extendidas: Son aquellas redes que poseen dos tipos de conexiones: vivas y muertas.
Se concluye que la red utilizada para modelar la situación planteada es una red extendida, en donde las conexiones muertas nos muestran sus propiedades estáticas, como por ejemplo: **cm1** establece que un mismo número de legajo no puede asociarse a distintos nombres de personas; en cambio, la conexión viva **c1** establece la asociación entre un número de legajo y un nombre de persona (propiedad dinámica).

Conclusión

Con el planteo de situaciones problemáticas integradoras, vimos el interés de los participantes en el tema tratado, el que se manifestó mediante sus opiniones. De las mismas podemos destacar las que se refieren a la novedad del tema, a sus múltiples aplicaciones y a que permite un enfoque global de cualquier fenómeno. Con respecto a la metodología opinaron que era la adecuada para introducir los nuevos conceptos e interrelacionarlos. Por el hecho de que la modelización es muy requerida en los distintos ámbitos de la ciencia, consideramos de suma importancia difundir esta herramienta matemática, objetivo plenamente logrado con este taller.

Referencias bibliográficas

Tremblay J. & Manohar R. (1998). *Discrete mathematical structures to computer science*. McGraw Hill
Johnsonbaugh R.(1999) *Matemáticas discretas. Cuarta edición.* Prentice Hall
Heuser C. (1991). *Modelagen conceitual de sistemas.* V EVAI, Brasil: R. Vieira Gráfica e Editora Ltda
Brams G. (1986). *Las Redes de Petri. Tomo 1 y 2.* Barcelona, España: Masson, S.A.
Yablonsky S. (1999) . *Introduction to formal logic.* MIR PUBLISHERS
Reising W. (1992) *A primer in petri net design*. Alemania, Berlín: Springer-Verlag
Best E. (1998). S*emantics of sequential and parallel programs.* Prentice Hall
Hernández Sampieri, Roberto y otros (1998). *Metodología de la Investigación. Segunda edición.* México, D.F.: McGraw Hill
UNT (1993). *Capacitación Pedagógica Universitaria.* Módulo IV. Módulo V, Primera Parte. Módulo VI, Segunda Parte. Tucumán:UNT
Ojalvo, V & Castellanos A (1995) .El trabajo en grupos en la educación. CEPES: Universidad de La Habana
Klimovsky G.(1997). *Las desventuras del conocimiento científico*. Argentina: A-Z

Pensamiento Numérico y algebraico

Nivel Básico

Cálculo y estimación en el contexto de la educación en matemática en la Básica General

Guadalupe Tejada de Castillo
Departamento de Matemática. Universidad de Panamá. Panamá
guadalu@cwpanama.net

Resumen
El presente curso se basa en una revisión bibliográfica del tema de Cálculo y Estimación, en algunos libros y artículos de Investigación, en un Seminario ofrecido en enero de 2001 sobre el tema a docentes de Matemática y maestros de las Escuelas Primarias en Panamá, así como en los aportes propios de los participantes al curso en RELME15. En primer lugar se aborda el tema del Sentido Numérico y su relación con la Estimación y después se analiza la Estimación como un proceso del individuo. Por su interés en la Educación se reflexiona sobre el tema en la enseñanza y el currículo. Finalmente se sacan algunas conclusiones y se propone un Proyecto de Investigación sobre el Cálculo y la Estimación y las posibles influencias de la calculadora en la notoria falta de habilidades y destrezas de los estudiantes en este campo.

Introducción

El principal objetivo en el desarrollo de este curso es crear un ambiente de reflexión entre los participantes sobre el tema del cálculo y la estimación que ha dejado de ser, según algunos docentes, tema de consideración en el aula de clases. Si bien es cierto que docentes de hace más de cuatro décadas prestaban mucha atención a las habilidades matemáticas de sus alumnos en lo que se refiere a las de calculo mental rápido, hoy en día estas habilidades han pasado a mano de las calculadoras y a la manipulación de símbolos y algoritmos en la enseñanza de la Matemática. Esto nos lleva a preguntarnos cuál debe ser nuestra postura ante el tema del cálculo y estimación como parte de la enseñanza de la Matemática en la Escuela Básica General y cómo debemos enfrentarnos al reto de la tecnología, en particular a las calculadoras.

Sentido numérico como fundamento para la Estimación

Si preguntamos a los maestros cuál debe ser el mayor objetivo de la Matemática en la Escuela Primaria probablemente nos encontremos con un alto porcentaje de ellos que piensan que es la Aritmética. Se han realizado investigaciones alrededor de esta inquietud e investigadores como Sowder consideran que el **sentido numérico** es prioritario en la Escuela Primaria, porque los números están presentes en el azar, en datos, en la geometría, y desde luego que en la Aritmética.
Los autores de Normas de Currículo y Evaluación de los Estados Unidos consideran que el sentido numérico es una intuición sobre los números. Los niños con sentido numérico tienen la característica de desarrollar significado para los números, relaciones numéricas, reconocen magnitud relativa de los números, los efectos de realizar operaciones con números.
Según Sowder(1992) Resnick caracteriza la intuición matemática como auto-evidente a la persona que la posee y de fácil acceso desde la memoria de esa persona. Ella sostiene que desde temprana edad todos los niños adquieren nociones aditivas, sin embargo cuando la enseñanza de la matemática se centra en algoritmos , los estudiantes de bajo rendimiento no pueden asociar los números con sus referentes y no pueden desarrollar nuevas intuiciones.

Hay investigaciones que sostienen que fuertes intuiciones se desarrollan en ambientes extra-escolares. Carraher y otros hicieron una serie de entrevistas a vendedores ambulantes brasileños entre los cuales se encontraban niños con poco o ninguna educación formal. Se encontró que los niños con casi o ninguna educación formal tenían más alto porcentaje de respuestas correctas de los problemas que se les presentó en el ambiente de venta que cuando lo hacían con lápiz y papel .Podríamos decir que el aprendizaje de estos niños se veía favorecido por el contexto donde se desarrollaba, lo que resulta coherente con una enseñanza de la matemática dentro de contextos adecuados para los niños.
Si el sentido numérico es una intuición del individuo nos preguntamos si de alguna manera la enseñanza puede contribuir a mejorar o desarrollar esa intuición. Sowder afirma que la Estimación Computacional y la Estimación Mental son dos maneras de aproximarse al sentido numérico, ya que ellas contribuyen a desarrollar en el niño habilidades para aplicar los conceptos y operaciones, para resolver problemas y sobre todo para darle significado a los números en un problema dado.
En un estudio exploratorio que realizamos en enero de 2001, se entrevistó a un grupo de maestros sobre lo que entendían por sentido numérico y uno de ellos señaló que: "...es la capacidad de un individuo para asociar objetos de la vida real con la aritmética..."La mayoría al igual que éste, piensan en términos de capacidad y relación.
Es conocido que hasta hace poco tiempo solo teníamos acceso al lápiz y papel para hacer los cálculos, hoy en día disponemos de otros recursos como la calculadora, además se ha enfatizado la enseñanza de la matemática de manera muy algorítmica y desprovista de contexto que la habilidad de un estudiante para reconocer la razonabilidad de una respuesta deja serias preocupaciones en quienes nos dedicamos a la enseñanza.

Estimación

En un Seminario dictado a maestros a inicios de año, formulamos la pregunta siguiente: ¿Qué entienden por estimación en Matemática? He aquí algunas reflexiones:

- "…resultado que pueda dar un individuo de haber comparado un objeto con el conocimiento adquirido de su experiencia matemática, sin comprobar su exactitud...
- "...son ciertos valores aproximados que se le da a un problema acercándose al valor real.."
- "...proceso mental que se lleva a cabo con rapidez y que resulta razonablemente cercano a la respuesta correcta..."

Si analizamos las definiciones de estimación, como la de Segovia y otros, nos percatamos que la estimación está íntimamente ligada a la intuición de la persona que emite un juicio de valor. Señala Segovia y otros que la estimación es **" Juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite"** Esta definición los lleva a proponer que en la enseñanza se hace necesario prestar atención a las intuiciones más o menos espontáneas de los niños con el propósito de que tengan una base rica en información para cuando se enfrentan a cursos de Cálculo Numérico y Estadística.
Investigadores como Reys y otros caracterizaron los procesos computacionales que utilizan los buenos estimadores, sobre todo si esta destreza es adquirida fuera del ambiente escolar,

para que fuesen usados en la enseñanza. El primer proceso fue llamado **"reformulación"** y se refería a sustituir los números por otros más manejables mentalmente como es el caso de 79/9 que puede reformularse como 81/9. Un segundo proceso utilizado es llamado **"traducción"** y se refiere al proceso cuando se cambia la estructura del problema para que las operaciones sean manejadas con mayor facilidad. Por ejemplo (154x2) ÷33 se puede cambiar a (150x2) ÷30 (reformulación) después 150x(2÷30)(traducción).Luego nos queda 150x1/15 o sea 150/15 lo que es igual a 10. El tercer proceso que utilizan los buenos estimadores es la **"compensación"**que consiste en hacer ajustes antes y después de la estimación. Por ejemplo 23x 42 puede resolverse como 20x40 que son 800, además quedan tres veces 40 o sea 120 lo que sumado da 920 como estimado. Dentro de todas las destrezas que debe tener un individuo está la de saber multiplicar y dividir por potencias de 10. Desde luego que es primordial el conocimiento de la descomposición de un número en potencias de 10 como por ejemplo $346.9 = 3x10^2 + 4x10 + 6+ 9x10^{-1}$
De acuerdo a la bibliografía revisada los buenos estimadores presentan características como las siguiente:

- entendimiento de hechos básicos, de valor de colocación de los números, de operaciones aritméticas
- buenas destrezas de computación mental
- confían es sí mismos
- tolerantes con los errores
- flexibles en el uso de estrategias

Segovia y otros señalan que en la vida diaria hay cuatro motivos que obligan a estimar como es: imposibilidad de un valor exacto, imposibilidad de tratamiento numérico exacto, limitaciones humanas y carencia de medios, consistencia de la información. Estos motivos son excelentes referencias para el docente crear actividades de aprendizaje que contribuyan a mejorar la capacidad de estimación de los alumnos.

La estimación en la Enseñanza

Es por todos conocidos que en el ambiente escolar se trabaja mucho con números pero que la estimación recibe poca atención.
¿Cuáles son las razones por las que la estimación recibe poca atención en la Básica General?
Un grupo de 15 docentes en enero de 2001 respondieron así:

- Los docentes carecen de esa formación(7)
- Los docentes se apegan a la rigurosidad matemática(1)
- Extensión de los Programas(2)
- Tema no considerado en el currículo(5)

Se desprende de las opiniones de este grupo de docentes, que la estimación debe formar parte de la enseñanza, pero busquemos otras razones.
Es muy probable que las concepciones que tengan los responsables de la educación influyan en esta situación. En un Grupo Foco recientemente realizado entre 17 maestros en formación sobre las concepciones de ellos sobre la Matemática, la Enseñanza y Aprendizaje de ésta, se encontró un alto porcentaje de respuestas como "la Matemática está

terminada, lo que varía es el enfoque", "la Matemática es exacta y lógica". Estas podrían ser unas de las razones por la que la estimación se haya mantenido al margen de la enseñanza escolar. Además, la llegada de las calculadoras al aula de clases aunado a los programas cargados de contenido han contribuido a que el docente abandone el énfasis en la enseñanza de los cálculos mentales rápidos y la estimación.
Se hace necesario prestar atención a la enseñanza de la estimación, si consideramos que es parte de la enseñanza, para que ésta no conlleve a nuevos algoritmos que los estudiantes memoricen. Sin embargo la dinámica de grupos o trabajos en grupo que promueve conversaciones entre los estudiantes sobre las distintas maneras de aproximarse a hacer un estimado, son de gran ayuda para el educando. Las actividades en contexto entre los alumnos de los grados más bajos, como por ejemplo ¿cuántos nances caben en un galón?, o como ¿cuántos días toma una planta de maíz en crecer? son preguntas que al no tener una sola respuesta ayuda a que los niños se den cuenta de que muchas respuestas distintas pueden ser igualmente razonables.
Segovia y otros se refieren a la utilidad práctica y la complementación de la formación escolar como dos razones para incluir la estimación en la enseñanza escolar.
Entre los participantes al curso se destacó el hecho que los alumnos hoy en día son pocos acertados en estimar una distancia o una cantidad en una situación real, motivo por el cual consideran que la estimación debe formar parte de la enseñanza.

Estimación en el Currículo

Si revisamos los programas de matemática que han regido la escuela Primaria en las ultimas décadas nos percatamos inmediatamente de lo poco a casi nada que sobre el tema de Estimación se toca. Si bien es cierto que la mayoría de los docentes coinciden en la necesidad de las personas de saber calcular mentalmente y estimar en situaciones concretas, también es cierto que algunos docentes coinciden en que no debe formar parte de un contenido de los programas. Coinciden los docentes en que formar parte de un contenido no permite la integración con el resto de los contenidos, ni tampoco se trata de un tema a estudiar en un momento del proceso, se trata de una formación de habilidades y destrezas que se logran precisamente durante la escuela primaria donde se enfatiza la aritmética y las medidas, lugar que tiene mejor cabida la Estimación.
Revisando los objetivos generales del Cálculo y la Estimación como hábitos de la mente que aparecen en el libro de Avances del Proyecto2061de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia(AAA), encontramos que el tema es de gran preocupación ya que cada nivel de enseñanza contempla ideas grandes a lograr en los niños. Podemos citar "... al terminar el segundo grado de enseñaza elemental los alumnos deben ser capaces de **mentalizar cálculos matemáticos aproximados, antes de hacerlos formalmente",** "...al terminar el quinto grado de enseñanza elemental los alumnos deben ser capaces de **juzgar si son razonables las medidas y los cálculos de cantidades como longitud, área, volumen, peso o tiempo, en un contexto usual comparándolos con valores característicos.**
Una manera de introducir el tema de cálculo y estimación en el currículo es a través de actividades de aprendizaje de los diferentes temas de los programas con objetivos establecidos hacia el logro de las habilidades necesarias para calcular y estimar, en todos los niveles, especialmente en la Básica General

Conclusiones

El tema compartido en este curso tuvo como conclusiones las siguientes

- Es un proceso largo de aprendizaje que necesita del desarrollo de ciertas habilidades.
- Se debe considerar en el currículo embebido en desarrollo de los contenidos programáticos.
- Se debe enfatizar en actividades de aprendizaje que lleven al niño a la obtención de diferentes respuestas.
- La instrucción debe enfocarse más en los significados de los números que en los algoritmos de lápiz y papel.
- Darle oportunidad a los niños que inventen sus propias estrategias para calcular y estimar.

Una de las mejores conclusiones del curso es la de integrar un grupo de investigación con docentes investigadores de diferentes países con el propósito de indagar sobre las habilidades de los niños de áreas de difícil acceso donde el uso de la calculadora es casi nulo y en áreas donde los niños hacen a diario uso de la calculadora. Se está trabajando en la elaboración de un Proyecto de Investigación sobre esta idea y esperamos que sus resultados puedan compartirse en una RELME.

Referencias bibliográficas

Avances en el conocimiento científico **(**1998). American Association for the Advancement of Science.

Ciencia: Conocimiento para todos (1998). American Association for the Advancement of Science.

Mochon, Simon et al. (1995). *Cálculo mental y estimación: métodos , resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza***.** Educación Matemática Vol7 N^0 3. G.E.Iberoamérica.

Segovia, Isidoro et al. (1989**).** *Estimación en Calculo y Medida*. España: Editorial Síntesis.

Sowder, Judith et al. (1992). *Number Sense and Related Topics***.** Research Ideas for The Classroom.

Van de Walle et al. (1992). *Early Development of Number Sense*. Research Ideas for The Classroom.

Relaciones en la construcción de conceptos en torno a las operaciones con fracciones

Teresita Peralta Monge
Instituto de Investigación para el Mejoramiento de la Educación Costarricense. IIMEC
Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas. CONICIT
Universidad de Costa Rica. Costa Rica
tperalta@cariari.ucr.ac.cr

Resumen
El curso se dirige a profesores de escuela primaria y desde una perspectiva constructivista se propone analizar elementos teóricos y prácticos en la construcción de significados para conceptos y relaciones en torno a las operaciones con fracciones en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad, para que el tratamiento de las fracciones y sus operaciones no se reduzca a su consideración como simples objetos de cálculo sino que se base en la naturaleza del concepto de fracción y las relaciones implicadas en este.

Introducción

Peralta (1994) en el artículo *En torno a la suma de fracciones* señala la existencia de deficiencias en estudiantes de sexto y sétimo años de la educación general básica, al resolver la suma de fracciones en su forma algorítmica y en sus representaciones gráficas en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad, deficiencias que se manifiestan en distorsiones en la relación que establece la operación entre las fracciones que se están sumando, debido a un manejo inadecuado del todo continuo o discreto, de la relación numerador- denominador y de la relación de la parte con el todo.

En el plano de la algoritmia el citado estudio coincide además en el uso de procedimientos inadecuados por parte de los estudiantes que participaron en el estudio para la solución de la suma de fracciones y en una ausencia de relación entre la suma y la equivalencia de fracciones.

Se manifiesta la tendencia a usar algoritmos correspondientes a otras operaciones, a aplicar procedimientos resultado de una mezcla de la suma, multiplicación o división de fracciones y a operar con el numerador y denominador de la fracción como simples números naturales que se suman, multiplican o dividen entre sí, procedimientos que podrían responder a una transferencia de la aritmética de los números naturales o a una memorización y mecanización sin significado de los algoritmos o partes de estos.

En la representación gráfica de la suma de fracciones en el modelo continuo de fracción de la unidad, se define la tendencia a no hacer uso de la relación de equivalencia de fracciones para hacer la representación de fracciones de un todo continuo que se están sumando y en el modelo discreto de fracción de la unidad prevalece la tendencia a representar cada una de las fracciones que se están sumando en conjuntos por separado, sin considerar que estas pertenecen a un mismo conjunto.

En relación con la multiplicación de fracciones, en su artículo *Representación gráfica de la multiplicación de fracciones en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad,* Peralta y Valdemoros (1990), señalan deficiencias en niños de sexto grado de escuela primaria en cuanto a traducciones de multiplicaciones de fracciones a representaciones gráficas en el modelo continuo o discreto de fracción de la unidad que no logran plasmar la relación que establece la operación multiplicación entre las dos fracciones.

Estas deficiencias se relacionan con la investigación realizada por la misma autora en su docencia con estudiantes universitarios en el período 1990-2000 , investigaciones que han señalado que aun en el nivel universitario en ocasiones estos estudiantes no tienen éxito cuando se enfrentan a la representación gráfica de una determinada fracción y a la ejecución de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones, presentándose en estos una ausencia de significado para la relación que establece cada una de estas operaciones entre las fracciones con las que se está operando. Estos estudiantes manifiestan además distorsiones en las relaciones parte-.parte y parte –todo y tendencias a una disociación de los elementos constitutivos de la fracción. También es notorio en estos la no relación de la equivalencia de fracciones con la suma y resta de fracciones y la ausencia de relación del carácter dual de la fracción con la multiplicación de fracciones.

Objetivos

- Promover el análisis de los participantes sobre las relaciones en la construcción de significados para los conceptos de suma, resta, multiplicación y división de fracciones.
- Valorar el uso de la representación gráfica de las fracciones en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad, como un medio para la construcción de significados para las operaciones con fracciones.

Contenidos

El curso se propone abordar la construcción de significados para las siguientes relaciones inherentes al concepto de fracción y sus operaciones :

- La relación parte – parte.
- La relación parte – todo.
- El requerimiento de un número determinado de partes en la división del todo.
- La equidad de las partes en la división del todo.
- La definición de un todo divisible compuesto de elementos separables.
- La división exhaustiva del todo.
- La conservación del todo.
- La relación numerador – denominador.
- El manejo de un todo continuo o discreto.
- Las operaciones inversas de encontrar de encontrar una parte fraccionaria de la unidad y la de determinar la unidad de la cual es parte una determinada fracción.
- El carácter dual de la fracción.
- Relación entre multiplicación de fracciones y carácter dual de la fracción.
- La equivalencia de fracciones.
- Relación entre la suma y la resta de fracciones y la equivalencia de fracciones.
- La relación que establecen las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones entre las fracciones con las que se está operando.

Metodología

A partir del supuesto de que la interacción, el trabajo cooperativo y la reflexión sobre las experiencias son factores que facilitan el aprendizaje y de una visualización del aprendizaje en la Matemática como una actividad de construcción de relaciones , se promoverá el análisis de los participantes de las relaciones en la construcción de conceptos en torno a las operaciones con fracciones, con base en su representación en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad.

Se hará uso de material pictográfico para propiciar situaciones que permitan el desarrollo de procesos reflexivos que faciliten al estudiante de educación primaria la construcción de relaciones y significados a través de sus propias experiencias, por medio de la ejecución, la interpretación, la discusión y la descripción de procesos de solución de situaciones problemáticas en relación con las operaciones con fracciones y su representación en el nivel gráfico, trascendiendo de esta manera el manejo mecanicista de los algoritmos de las operaciones con fracciones.

Unas actividades se desarrollarán con el total de los asistentes y otras se ejecutarán mediante un trabajo cooperativo en grupos de cuatro o cinco personas. Como actividad posterior a las realizadas en forma grupal se realizarán sesiones participativas en las que los diferentes grupos compartirán sus experiencias.

Referencias bibliográficas

Delgado V. , Peralta T. , Valerio N. (1996). *Experiencias Didácticas en Matemática I y II Ciclos.* Costa Rica. Universidad de Costa Rica, Universidad Nacional.

Peralta T. *(*1989). *Resolución de las operaciones de suma y multiplicación de fracciones en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad.* México. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Peralta T., Valdemoros M. (1990). *Representación gráfica de la multiplicación de fracciones en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad.* México. Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa.

Peralta T. (1991). *Entorno al aprendizaje de las fracciones.* Costa Rica. Revista Educación, Universidad de Costa Rica, Volumen 15, número 2.

Peralta T. (1992). *Relación numerador-denominador en la representación gráfica y solución de problemas de suma y multiplicación de fracciones.* México. Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa.

Peralta T. (1994). *Entorno a la suma de fracciones.* Costa Rica. Revista Educación, Universidad de Costa Rica, Volumen 18, número 1.

Peralta T. et al. (1996). *Informe Final Plan Piloto para el mejoramiento en la enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. Costa Rica. UCR, UNA, CONICIT.

Peralta T. (1998). *Ambientes de aprendizaje en el ámbito de un proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática centrado en la actividad del estudiante.* Costa Rica. Revista Educación, Universidad de Costa Rica, Volumen 22.

Explorando significados, nociones y conceptos de fracción en jóvenes y adultos

Marta Elena Valdemoros Alvarez
CINVESTAV-IPN. México
mvaldemo@mail.cinvestav.mx

Resumen
La presente comunicación está referida a una indagación cualitativa realizada con jóvenes y adultos de una escuela primaria nocturna de la Ciudad de México, exploración que constituye uno de los desarrollos parciales involucrados en un proyecto de investigación más amplio, llevado a cabo durante el período 1999-2000. El seguimiento de los contenidos semánticos y conceptuales de las fracciones tuvo lugar en el marco de la resolución de problemas y se efectuó mediante la aplicación de un cuestionario exploratorio que precedió y facilitó la realización de varias entrevistas de corte didáctico, a partir de las cuales se conformó el estudio de cinco casos, todos ellos correspondientes a sujetos con diferente edad, ocupación y sexo, quienes fueron escogidos por sus respectivos desempeños en el cuestionario.

Marco teórico

Ya es una incipiente convención lograda entre los escasos investigadores abocados a la problemática educativa básica de los jóvenes y adultos (Messina, 1993, García Carrasco, 1997, Jóia, 1997, Mariño, 1997, Soto, 1997, entre otros), el común reconocimiento de que tanto los conocimientos generales como los conocimientos matemáticos a ser construidos escolarmente por tales sujetos en proceso de formación elemental, deben partir del cúmulo de experiencias y saberes logrados en ámbitos no escolarizados, es decir, en los otros espacios vitales en los que se desenvuelven dichas personas.

Lo antedicho brinda a los jóvenes y adultos un campo simbólico cargado de sentido para el aprendizaje de las fracciones, en particular, por la vía del planteamiento y resolución de problemas asociados a las situaciones que desde la institución educativa reconstruyen escenas de la propia vida familiar, laboral y comunitaria (en continuidad con lo que se planteara precedentemente en Valdemoros, 2000). También con referencia a dicha fuente, es dable señalar que a diferencia de los números naturales –cuyo extenso y rico uso al interior de la cultura facilita aprendizajes no escolarizados muy variados– las fracciones se acompañan de un repertorio mucho más limitado de “saberes previos” (adoptamos aquí una expresión bastante difundida por investigadores como Mariño, 1997).

Los contenidos semánticos, las nociones y los conceptos referidos a las fracciones presentan gran diversidad en el ámbito de resolución escolar de problemas aritméticos. Por ello, se recuperan aquí los significados de **medida**, **cociente intuitivo** (asociado a las situaciones de reparto), **operador multiplicativo y razón,** a los que Kieren (1984, 1985,1988) atribuye a aplicaciones diversas de los números racionales, en un terreno concreto. Se retoman también el significado de la **relación parte-todo** y la noción de **unidad**, ya que dicho investigador las considera como soportes fundamentales de los contenidos semánticos indicados con anterioridad. En cuanto al **operador multiplicativo**, aquí primordialmente se le ha concedido el alcance de **operador fracturante**, de acuerdo a los reconocimientos efectuados por Freudenthal (1983) y Streefland (1993) en términos de aquella fracción que es vinculada a la situación dinámica de partición de un todo.

No menos trascendente es la distinción, en la concepción de Piaget, Inhelder y Szeminska (1966) de las **relaciones parte-todo** y **parte-parte**, las que constituyen las bases estructurales del concepto de fracción, siendo respectivamente soportes de la adición y multiplicación de fracciones.

Con todo ello, se asume en este escrito un enfoque cognoscitivista, en el que cobra especial relieve el componente relativo al rol marcamente activo que asumen **los jóvenes y adultos cuando construyen significados, nociones y conceptos de fracción, en el terreno de la resolución de problemas aritméticos**, siendo este último el **problema de investigación** que en el marco ya expuesto se aborda.

En vinculación con el planteamiento que se acaba de explicitar, aquí se asume la **hipótesis** de que **el dominio de los significados, nociones y conceptos ligados a las fracciones favorece la resolución de problemas y mejora el cálculo aritmético.**

Método

La presente investigación es de carácter eminentemente cualitativo. A continuación se explicitan los aspectos metodológicos fundamentales que la caracterizan**.**

Instrumentos metodológicos. Se involucraron en el estudio el cuestionario y la "entrevista de corte didáctico" (conforme a la organización y fundamentos que de ésta se da en Valdemoros, 1998).

1. Cuestionario. El mismo fue de carácter exploratorio. Se lo incluyó para poder seleccionar en mejores condiciones a los sujetos del estudio de casos, a la par de disponer de información general respecto a todos los jóvenes y adultos que integraban los grupos escolares con los que se llevó a cabo la investigación. Estuvo compuesto por ocho tareas, en las que se involucraron los significados de la fracción como cociente resultante de repartos concretos, como medida, como razón y como operador multiplicativo. La relación parte-todo fue indagada de un modo más específico, a través de tareas que requerían diferenciarla de la relación parte-parte. La unidad fue explorada, preferentemente, en torno a la discriminación de todos continuos y discretos, como también, en una tarea de reconstrucción de un todo discreto desde la identificación de una parte del mismo. A los jóvenes y adultos se les demandó completar, traducir e interpretar información diversa, expresada mediante distintos canales de representación (textos, notaciones aritmético-técnicas, figuras geométricas, dibujos de diversa naturaleza); también se les requirió la ejecución de distintas particiones, el reconocimiento de relaciones de equivalencia y la realización de elementales sumas y restas de fracciones.

2. Entrevista de corte didáctico. Cada sujeto a ser entrevistado fue escogido por su desempeño en el cuestionario. Se llevaron a cabo dos entrevistas distintas con cinco jóvenes y adultos, las que exhibieron un carácter individual y semi-estructurado; cada uno de los sujetos fue sometido a tareas de diseño común, similares a las incluidas en el cuestionario, de manera que una vez concluidas pudiesen ser comparados los resultados obtenidos en los cinco casos. La naturaleza didáctica de las entrevistas estuvo determinada por la sucesión de dos momentos diferenciados en su realización: a) una fase inicial exploratoria, en la que se procuró determinar el avance de cada sujeto por sus propios medios y b) una fase ulterior, de carácter constructivista-didáctico, donde el entrevistador procuró promover en el entrevistado la superación de las dificultades cognitivas manifiestas en su desenvolvimiento previo, retroalimentándolo, pero prescindiendo de proponer soluciones o de obstruir nuevas búsquedas por parte del sujeto. El pasaje del primero al segundo momento de la entrevista fue valorado en cada situación y dependió de haber agotado las posibilidades razonables de la exploración inicial. La entrevista constituyó el instrumento fundamental en el desarrollo del estudio de casos.

Sujetos. Los alumnos que resolvieron el cuestionario exploratorio fueron 17 jóvenes y adultos incorporados a cuarto, quinto y sexto grados de primaria, con edades comprendidas entre 14 y 71 años y con actividades laborales diversas (obreros, amas de casa, trabajadoras domésticas, comerciantes ambulantes, vigilantes, artesanos). Las cinco personas seleccionadas para las entrevistas presentaron diferente edad, sexo y perfil ocupacional: dos amas de casa, de 43 años una e incorporada a cuarto grado, de 35 años la otra y con adscripción al sexto grado; dos trabajadoras dedicadas al servicio doméstico, una de ellas de 18 años y perteneciente al quinto grado, la otra con 41 años y próxima a concluir el sexto grado; por último, un carpintero inserto en sexto grado y de 71 años de edad.

Escenario. La investigación fue desarrollada en una escuela primaria nocturna, del sistema público de enseñanza, en un barrio industrial de la zona conurbana de la Ciudad de México.

Análisis previsto para la interpretación de resultados. Se privilegiaron el seguimiento de los modos de representación adoptados por los adultos, las dificultades cognitivas detectables en el dominio de determinados significados, los contenidos semánticos que presentaron sistematicidad en el pensamiento de jóvenes y adultos y la clase de argumentos en los que se apoyaron para justificar sus procesos de resolución de problemas.

Procedimientos de validación cualitativa. Con respecto al cuestionario se aplicaron **controles cruzados** entre dos observadores, ya que era un recurso idóneo para dicho instrumento y no creaba resistencia en los sujetos de la investigación. En las entrevistas, en virtud de que se efectuaban simultáneamente (con la intervención de dos investigadores), se optó por triangular distintos procesos de solución desplegados por el mismo sujeto ante problemas aritméticos análogos.

Análisis de los resultados obtenidos

En el cuestionario. Las situación de reparto presentada fue adecuadamente resuelta por parte de muchos adultos, aunque pocos fueron los que concluyeron esa tarea con la representación simbólica de la fracción como cociente intuitivo. Aquí, como en algunos otros problemas del cuestionario, se acentuó la tendencia de la mayoría a usar números naturales para cuantificar lo efectuado con anterioridad, en otros planos de representación. A nivel de la simbolización del número, algunos adultos desarrollaron expresiones “híbridas”, mixtas, del tipo de “... n partes”, las que han sido designadas en investigaciones previas como “formas transicionales hacia la representación convencional de la fracción” (Valdemoros, 1993).

La fracción como medida resultó adecuadamente reconocida por un buen número de sujetos, aunque fue una de las tareas más sencillas del cuestionario. La circunstancia de que correspondiera a una medida “no convencional” seguramente coadyuvó a que apareciera como una tarea razonablemente accesible para quien la resolviera.

El problema ligado al reconocimiento de la razón, en un ámbito muy elemental de variación proporcional, llegó a ser abordado adecuadamente por muchos adultos. No obstante, no brindó información acerca de cuántas de esas personas estarían en condiciones de arribar a la representación simbólico-técnica de la fracción. Correspondientemente, lo que permite constatar es que la idea del operador multiplicativo involucrado en tal situación era susceptible de un reconocimiento más directo por parte del adulto.

Para la mayoría de los miembros de estos grupos escolares fue imposible distinguir claramente las relaciones parte-todo de las relaciones parte-parte (en este último reconocimiento fallaron casi todos los jóvenes y adultos que resolvieron el cuestionario).

Una dificultad manifiesta en el cuestionario estuvo vinculada a la partición de todos continuos, particularmente, porque muchos sujetos no podían atender simultáneamente a la equipartición y a la exhausión del todo.

Otra dificultad notoria para aproximadamente la mitad de los miembros de los grupos escolares involucrados estuvo asociado al reconocimiento de relaciones de equivalencia entre distintas fracciones.

En las entrevistas

La primera entrevista retomó las tareas del cuestionario exploratorio, en las cuales cada uno de los cinco sujetos había evidenciado dificultades cognitivas relevantes. La fase constructivista-didáctica de las entrevistas brindó respaldos innegables a los procesos de avance en el aprendizaje de los cinco jóvenes y adultos entrevistados. Con diálogos extensos, apelando a toda clase de recursos que los sujetos pudieran escoger y articular luego a la solución, se produjeron replanteamientos de los procesos originalmente desarrollados en la consideración de cada problema aritmético, precedidos por re-significaciones manifiestas de la fracción y de sus relaciones. Tales re-significaciones consistieron en el otorgamiento de nuevos significados a la fracción, a sus relaciones y operaciones aditivas, o bien, el enriquecimiento de los ya existentes. Ello quedó suficientemente documentado en el transcurso de las entrevistas. No obstante, los progresos más débiles se dieron a nivel del reconocimiento de la **relación parte-parte**, la cual permanece conceptualmente vinculada a la multiplicación de fracciones, operación que no ha sido abordada en este estudio y tampoco está contemplada en el currículum matemático de la primaria para adultos.

La segunda entrevista introdujo nuevos problemas, en cuyo tratamiento emergieron los **operadores fracturantes**, en situaciones que involucran sencillas variaciones proporcionales. Ante ello, las dos mujeres dedicadas al servicio doméstico exhibieron óptimas resoluciones y un amplio manejo de operadores fracturantes sencillos, del tipo de "... dividir a la mitad ...", "... dividir a la mitad de la mitad ..." Frente a esta situación, nos inclinamos a valorar que es aconsejable la introducción del tratamiento didáctico elemental de la proporcionalidad, a partir de un uso amplio de los operadores fracturantes como herramientas iniciales, altamente cargadas de sentido.

Ambas entrevistas desarrolladas facilitaron la constatación de que la hipótesis sostenida al comienzo del estudio ha sido confirmada por la compleja información empírica reunida a través de la experiencia de campo.

Conclusiones

El cuestionario permitió constatar que el dominio de contenidos semánticos básicos fue la clave para la realización adecuada del proceso de resolución de los problemas aritméticos, por parte de muchos de estos jóvenes y adultos. Se plantearon notorias dificultades cognitivas en algunos miembros de estos grupos escolares, respecto al reconocimiento concreto de la relación parte-parte, el establecimiento de relaciones de equivalencia, la realización de la equipartición y la exhausión de determinados todos continuos (con mayor acentuación en la equipartición) y la simbolización convencional de la fracción.

La entrevista brindó evidencias extensas y claras de construcción y reconstrucción de significados, a partir de los cuales se modificaron los procesos adoptados en la resolución de los problemas presentados. Asimismo, permitió reconocer algunos recursos particularmente potentes para la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenological of Mathematical Structures.* Dordrecht, Holland: D. Reidel.

García Carrasco, J. (1997). *Educación de adultos.* Barcelona, España: Editorial Ariel. 1-22.

Jóia, O. (1997). "Cuatro preguntas sobre la educación matemática de jóvenes y adultos" (27-34). En: *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos.* Santiago, Chile: UNESCO-SANTIAGO.

Kieren, T. (1984). Mathematical knowledge building: The Mathematics teacher as consulting architect. *35th.International Congress of Mathematical Education.* 187-194.

Kieren, T. (1985). Graphical algorithm in partitioning tasks. *The Journal of Mathematical Behavior, 4.* 25-36.

Kieren, T. (1988). "Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development" (162-181). En: J. Hiebert , M. Behr (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades, 2.* Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mariño, G. (1997). Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos (77-100). En: *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos.* Santiago, Chile: UNESCO-SANTIAGO.

Messina,G. (1993). *La educación básica de adultos: La otra educación.* Santiago, Chile: UNESCO-OREALC. 197-207.

Piaget, J., Inhelder,B., Szeminska, A. (1966). *The child's conception of Geometry.* London, England: Routledge and Keagan Paul.
Soto, I. (1997). Algunas proposiciones sobre la didáctica para la enseñanza de las matemáticas de jóvenes y adultos (119-130). En: *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos.* Santiago, Chile: UNESCO-SANTIAGO.
Streefland, L. (1993). The design of a Mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, *25*. 109-135.
Valdemoros, M. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él.* Tesis doctoral. Matemática Educativa-CINVESTAV, México.
Valdemoros, M. (1998). "La constancia de la unidad en la suma de fracciones: Estudio de caso" (465-481). En: F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II.* México: Editorial Iberoamérica.
Valdemoros, M. (2000). Los problemas aritméticos elementales resueltos por el alumno. *Resúmenes de la Décimocuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* 23-24. Panamá.

El concepto de movimiento cualitativo y cuantitativo en la alfabetización escolar

Daisy Faulin[1]
Faculdade de Educação. FE/UNICAMP. Brasil
maya2012@uol.com.br

Resumen
Este trabajo se sitúa en el ámbito de una investigación pedagógica que considera la construcción del concepto como componente básico que en última instancia mueve las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje en la escuela. Trátase de una investigación que presenta, entre sus propósitos, la elaboración del concepto, por medio de la dinámica constructiva de (re)creación y desarrollo del concepto matemático. El estudio se inscribe en la perspectiva del materialismo-dialéctico, particularmente en las abordajes de Lima (1994), Caraça (1999), Kopnin (1978) y se viabiliza por medio de una red conceptual que presenta como conceptos epistémicos los movimientos cualitativos y cuantitativos presimbólico de número natural, cuya concreción en situaciones formales de ensenãnza-aprendizaje se edifica por medio de lo concepto temático: cualidad y cantidad en cambio (variación). En este proceso, se destaca la organización sistémica existente entre las diversas áreas de lo conocimiento. En el contexto general del estudio, la enseñanza de la matemática, contribuye hacia la construcción de un sistema conceptual, cuya esencia se refiere al concepto de número natural. En su desarrollo, el estudio se articula con un cambio de postura didáctica, fundamentada, a su vez, en el aprendizaje de los niños y la reflexión de la maestra-investigadora en el sentido de tornarse investigadora en la acción. Así, al mismo tiempo en que estaríamos contribuyendo para una mejor interpretación de la construcción y desarrollo del concepto presimbólico de número natural, estimularemos, de forma didáctica, la formación de actores sociales ciudadanos, aptos para luchar por sus intereses, concatenados con el ser humano y el mundo, por cuenta de la articulación con otras disciplinas, característica propia de la matemática.

Concepción orgánica de la Alfabetización Matemática – los desarrollos cualitativos y cuantitativos

Objetivo: Discutir cuestiones relativas a la enseñanza-aprendizaje de conceptos científicos en la alfabetización escolar, teniendo como parámetros las vivencias en el proyecto de investigación realizado en la Escola Municipal de Enseñanza Fundamental “Profª Cesarina Fortarel G. Dias” en Jundiaí /SP – Brasil y em nuestra experiencia de trabajo con alfabetización matemática.

A lo largo de nuestra vida profesional, trabajando por más de diez años con alfabetización matemática, atravesamos varias tendencias teórico-metodológicas, desde la tradicional que promulga el aprender por la repetición, a la construtivista radical que nega a posibilidad de la mente de reflejar aspectos objetivos de la realidad, diminuyendo el papel que los educadores ocupan en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el construtivismo social, que enfatiza el papel fundamental del conflicto cognitivo en la construcción de la objetividad. Durante este período en que vivenciamos esas diferentes tendencias, percibíamos que trabajábamos exahustivamente con los niños durante todo el año lectivo, y en el año siguiente, al abordar un nuevo concepto el niño no se mostraba capaz de hacer relaciones con el concepto estudiado el año el semestre anterior. Parecía que todo el conocimiento

[1] Mestranda con investigación en desarrollo con el apoio del Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico – CNPq, vinculado al Ministério de la Ciência y Tecnologia - MCT, integrante del Grupo de Investigación : Círculo de Estudo, Memória y Investigación en Educación Matemática – CEMPEM, Grupo de Investigación: Prática Pedagógica en Matemática – PRAPEM, Grupo de Investigación : Tecnologia y Desarrollo Conceitual en Educación Matemática -TDCEN y profesora del Enseñanza Fundamental del Estado de São Paulo.

hasta entonces trabajado estaba fragmentado, compartimentado en el pensamiento del niño. Esta percepción nos incomodaba, sin embargo, no teníamos un conocimiento teórico profundo y experiencia suficiente para justificar porqué eso ocurría. Así, a partir de 1990, pasamos a buscar propuestas que estuviesen ligadas con lo cotidiano del niño, pues entendíamos que el lenguaje numérico se construye en forma dinámica día a día. Iniciábamos el desarrollo del concepto de lenguaje numérico pre-simbólico con actividades presentadas en forma de juegos, que solicitasen comparación de conjuntos usando los conceptos de igualdad y desigualdad, de mayor que, menor que, de representación de la cantidades de objetos a través de algoritmos, hacíamos listas del número de zapato de los niños de la clase, listas de números de teléfonos de los niños, trabajábamos tablas y gráfico de fechas de nacimiento, de tamaño de la ropa de cada uno, elaborábamos el calendario y otros. Ese trabajo, involucraba a los niños que participaban integralmente de las actividades con alegría y satisfacción. Ese abordaje posibilitaba el enriquecimiento de las discusiones sobre los temas estudiados, trabajábamos un universo diversificado de ejemplos de aplicaciones de los conceptos pre-numéricos y numéricos. Con el tiempo fuimos tomando conciencia de que el niño apenas se tornaba habilidoso en manejar superficialmente reglas y símbolos, no hacía las conexiones más simples del pensamiento numérico como establecer equivalencias, entender tamaños, unidades, unidades relativas como una decena, una centena etc. Nos incomodaba, que aún partiendo de conocimientos cotidianos del niño, la comprensión del concepto pre-simbólico y simbólico le permanecía abstracta. Comenzábamos a percibir que desarrollábamos, no obstante todo el material sensible, una alfabetización matemática, partiendo de lo abstracto -número convencional- para que el niño llegase al propio pensamiento abstracto -idea de número. La verdad, no proporcionábamos al niño la oportunidad de elaborar el pensamiento numérico, debido a su gran dificultad en hacer conexiones numéricas como la relación entre unidades que se aplican al aspecto discreto y unidades que se aplican al aspecto continuo de la realidad.

A partir de 1994, con una experiencia profesional madura y muchas lecturas teóricas sobre las diferentes metodologías de enseñanza, pasamos a hacer una investigación más crítica sobre los materiales, libros didácticos y paradidáticos que llegaban a nuestras manos. En este análisis, verificamos un cierto predominio del rigor del lenguaje numérico, preocupaciones exageradas hacia la simbología, en detrimento de saber pensar sobre los conceptos matemáticos. Entendemos que estos abordajes parten de presupuestos de que el niño, al iniciar la escolarización, ya tiene un dominio numérico culturalmente adquirido. Promulgan que se debe respetar ese dominio considerándolo como punto de partida para un aprendizaje significativo. de la misma forma que hacíamos anteriormente, ese abordaje considera la iniciación del pensamiento numérico a través de la percepción de desarrollos **cuantitativos aislados de los cualitativos.**

Cuando indagamos las investigaciones con enfoque en el tema observamos la tendencia a la misma concepción de iniciación numérica. Las investigaciones que abordan las elaboraciones pre-númericas, procuran desarrollar estudios sobre la construcción de este concepto, no considerando las elaboraciones humanas y la dinámica de continuidad y ruptura que el concepto pasa hasta los días actuales, considerando para el estudio de ese concepto en su forma actual, ya elaborada, compleja y sistematizada, focalizando su interés en las representaciones formales y simbólicas del concepto. La selección del contenido es determinada en función de la estructura de la disciplina que es lógica, formal y deductiva.

Fue, por lo tanto, a partir de esos estudios que en 1999 comenzamos a fundamentar nuestro trabajo.

Para intentar entender el desarrollo conceptual que habíamos observado a lo largo de varios años de trabajo con alfabetización matemática, fue necesario buscar respuestas y fundamentos teóricos de una abordaje pedagógico que posibilitase à niño participar activamente del desarrollo conceptual, entendido como una síntesis histórico-conceitual de la actividad humana sobre la realidad y que se entiende como un potencial educativo del concepto. El estudio de este abordaje viene encontrando fundamentos en Kopnin, 1978; Fischer, 1969; Caraça, 1999, Lima,1994, y otros.

Para nosotros pre-simbólico corresponde al desarrollo en que el ser humano construye los aspectos cualitativos y cuantitativos que existen en la realidad natural y social, aprendiendo a desenvolver la capacidad de identificar las cosas y personas de modo sensorial y de vincularse a ellas afectivamente, intentando conocer, superar y dominar los desafíos del medio.

Entendemos que abordar la iniciación numérica a partir únicamente del estudio de los desarrollos cuantitativos aislados de los cualitativos no se considera un factor esencial para la formación del pensamiento numérico del niño, de la capacidad de pensar, también, numéricamente el mundo.

El análisis del desarrollo científico explicita la relación entre el proceso de producción de la existencia del ser humano, la evolución de los modos de producción de la sociedad y la ciencia elaborada a partir de esos modos de producción, en el constante proceso de intervención intencional en la realidad. Lima (1994) considera que es sabido por la humanidad que el ser humano inició y siempre inicia su camino de racionalización de la naturaleza a partir de los desarrollos cualitativos, de las variaciones de la cualidad de las cosas que le rodean y que le son significativas.

Por lo tanto, en la alfabetización escolar la cualidad debe ser definida inicialmente, en función de las necesidades humanas de forma sensitiva, a través de la cognición sensorial-concreta, pues es de esta manera que todos forman inicialmente las ideas del mundo objetivo.

Entendemos que al desconocer el desarrollo histórico del desarrollo conceptual, la alfabetización matemática ha sido desenvuelta en la escuela de una forma fragmentada, ya que se hace bajo el punto de vista únicamente cuantitativo, no considerando el desarrollo inicial **cualitativo.**

Al elaborar actividades que envuelvan conceptos numéricos pre-simbólicos, entendemos que el educador debe tener claro, que el desarrollo de los conceptos matemáticos se refiere al desarrollo real y objetivo, de las **variaciones cuantitativas y** de las formas. Así, la cantidad es indisociable de la cualidad que la produce por estar presente en todos los desarrollos de la naturaleza (Caraça,1999) y *"cada concepto que compone el desarrollo conceptual deberá ser aprehendido a partir de la cualidad de la cual es atributo, más debe transformarse en una explicación principalmente cuantitativa de los desarrollos reales.* " (Lima, 1998:95)

El concepto numérico pre-simbólico es un desarrollo desigual y combinado de ideas, acumulativo y de superación de permanente transformación de **cualidad** en **cantidad y cantidad en cualidad;** cada salto es significativo en el aprendizaje y sólo acontece a partir de las síntesis anteriores más simples.

En este sentido, es importante notar que, el desarrollo del concepto coincide con la síntesis del desarrollo histórico significativo de su creación; es en esta identidad que el lenguaje matemática pre-simbólica integra la cultura, el arte, la afectividad y aprende e interpreta la realidad social inmediatamente vivida.

Todo concepto, principalmente el numérico, posee un doble sentido: el de lenguaje y el operacional. Estos por su naturaleza contradictoria se oponen y se atraen.
Por ser desarrollos diferentes y desiguales, el lenguaje y la operacionalidad se combinan y se integran continuamente. y como nos enseña Caraça (1999), en esta combinación cambian permanentemente de polaridad siendo en un momento un determinante y antecedente (causa) para, en el momento siguiente, tornarse determinado y consecuente (efecto).
Hemos observado que el currículo, la metodología y la didáctica de la matemática han privilegiado la combinación lenguaje/operacionalidad a partir del aspecto operacional, el cual disentimos, pues para nosotros, las relaciones entre lenguaje y operacionalidad, son dinámicas y se encuentran en permanente transformación y cambio. Esta fuidez es determinante y es de la que se origina la relatividad de las relaciones. La combinación de estos dos desarrollos desiguales es hecha por el trabajo humano.
Durante los varios años que venimos trabajando con alfabetización matemática, venimos constatando que en la escuela actual, el aprendizaje de la operación lógica matemática a que se reduce el concepto, necesita apenas de entrenamiento y se realiza como simple sumatoria fragmentada de habilidades y competencias. Los conceptos matemáticos son sometidos por sus técnicas y algoritmos, son reducidos a los mecanismos operacionales de cálculo que sólo permiten crear dentro de lo ya creado. De esta forma, el concepto se torna intransferible y asume el carácter de verdad inmutable.
Cuando abordamos el concepto matemático lo consideramos como síntesis evolutiva histórico-cultural del modo en que el ser humano conoce determinados aspectos de la realidad. La forma algorítmica del concepto no es negada, es apenas considerada como punto de llegada y no de partida, como en la pedagogía tradicional, la educación penetra en las peculiaridades esenciales, en los nexos internos del concepto, procurando eliminar el aspecto intransferible de su forma abstracta para posibilitar la acción y elaboración de pensamiento, lenguaje y afectividad por parte del niño.
Entendemos como Kopnin (1978), que el lenguaje numérico es un desarrollo evolutivo que parte de las reflexiones y correspondencias más simples creando redes y nexos crecientes más amplios, abarcativos y profundos. Por lo tanto, el aprendizaje del lenguaje numérico acontece como desarrollo creciente en todas las direcciones, dimensiones y sentidos del pensamiento y se realiza como una red interactiva de nexos y correspondencias profundamente interligados que atribuyen a la lectura de cualquier hecho un significado humanamente pleno y integral.
Al entender el lenguaje numérico como un desarrollo evolutivo, pasamos a concebir el desarrollo conceptual como Lima (1998). Para este autor, el desarrollo conceptual mobiliza toda la sensibilidad, pues no es lógica es principalmente intuitiva y a intuición según Kopnin (1978), exige la tensión de la imaginación, la intelectualidad, la emoción, el conocimiento cultural en fin, todas las facultades cognitivas del ser humano y en la que se deposita toda la experiencia del desarrollo individual y social, teniendo a la vista toda la complejidad de la interrelación de la teoría y práctica del niño con el objeto.
En este sentido, acordamos con Abreu (1999:17) que *"es preciso que el acto creativo se torne contenido escolar*", pues *"el intelecto humano al crear un concepto dialoga con todas las áreas del conocimiento lógico/artístico/social/cultural en una dinámica que, por no ser 'racional" escapa a cualquier computador."* (Lima, 1994:7)
Posibilitar al niño, situaciones de variaciones cualitativas y cuantitativas para que cree formas de determinarse tienen o no variaciones, sin que use el lenguaje numérico conocido, es permitir que trabaje con la idea de hacer corresponder los elementos de un conjunto a los

elementos de otro, que según Caraça (1999) es la idea fundamental del pensamiento matemático que está en el origen del pensamiento numérico y en la idea de equivalencia. Trabajando de esa forma con el control de variaciones más allá de formar el pensamiento de equivalencia crea el lenguaje para definirlo.

La enseñanza de la matemática centrado en la repetición mecánica de la lectura y escritura de los números ignora esta fase de formación del pensamiento numérico, justificando que vivenciarla significaría subestimar el conocimiento numérico que el niño trae en cuanto usuario del número.

Considerando que el desarrollo histórico corresponde al proceso lógico del pensamiento, de lo simple a lo complejo, de lo no desarrollado a lo desarrollado; ese desarrollo refleja el proceso real de cambio de las formas de valor, por lo tanto del verdadero conocimiento numérico de la realidad el que significa aprender a pensar, en el caso del ejemplo dado, numéricamente en el universo del número natural. Trabajando en los nexos más simples del concepto, al contrario de estarnos subestimando los conocimientos que supuestamente el niño ya tiene elaborado, le es dada la posibilidad de hacer parte del desarrollo creativo del concepto de forma a construir un modo de pensar la realidad con este concepto, tornando posible la elaboración de definiciones provisorias mediante una dinámica relacional, niño-grupo de clase.

El movimiento de penetrar en las peculiaridades y en las abstracciones más simples es orientado por la actividad de enseñanza mediante dos elementos que la constituyen y que interdependen. Uno consiste en los principios de la dialética de construcción del concepto matemático fundamentado en Caraça (1999), el otro, en la historia del concepto.

Entendemos que el conocimiento científico es externo al ser humano que aprende. Para construir su comprensión es preciso que el lo traiga hacia su subjetividad. Este proceso de internalización se concretiza por lo dialéctico de la negación y de la negación de la negación del aspecto puramente mecánico del concepto, porque solicita a las funciones cognitivas y afectivas del que aprende.

En las consideraciones anteriores, presentamos una síntesis de los aspectos que están en construcción y que tejen la afinidad teórica de esta investigación que tiene como tema más general de investigación la educación conceptual y como tema específico el desarrollo conceptual de los movimientos cualitativos y cuantitativos de número natural.

La construcción teórica requiere estudios y producción en dos fases metodológicas. una de las fases se configura en estudios y elaboración del referencial que fundamente la educación conceptual en diferentes perspectivas teóricas como: la lógica-filosófica en Kopnin (1978); la psicológica en Davidov (1982); la antropológica en Childe (1977); la matemática y la histórico-cultural en Caraça (1999), Lima (1994), Dantzig (1970), Ifrah (1987) y otros. La otra fase, que tiene bases en la anterior consiste en analizar el material empírico proveniente de la elaboración, y del desarrollo, en sala de aula, de actividades de enseñanza, fundamentadas en los presupuestos de la educación conceptual.

En esta segunda fase, el desarrollo de la investigación presupone la elaboración, vivencia y análisis de actividades de enseñanza. Su elaboración se fundamenta en los presupuestos arriba mencionados y la vivencia, en la participación del sujeto de la investigación vinculada a un proceso reflexivo-activo-explicativo, desencadenado por la dinámica relacional niño-grupo y clase.

Estamos desarrollando el análisis sobre el material empírico construido en esta dinámica relacional. De este modo, la actividad de enseñanza podrá ofrecernos indicadores de cualidades subjetivas de las elaboraciones de los niños. Tales elaboraciones, manifiestas en proceso de recreación de las formas más simples de desarrollo de los conceptos cualitativos y cuantitativos, pueden ofrecer indicadores que contribuyen para configurar una trayectoria evolutiva el no, individual el del grupo de clase, de (re) creación del concepto. Las conclusiones sobre esos indicadores nos permitirán hacer conjeturas sobre la naturaleza, desarrollo y aprendizaje de estos conceptos matemáticos en la alfabetización escolar.

Referencias bibliográficas

Caraça, B. de J. (1999). *Conceptos Fundamentais de la matemática,* Lisboa: Editora Gradiva.

Childe, G. (1981). *A evolución cultural del homen* R. J.: Guanabara Koogan, 1981

Dantzig, T. (1970). *Número, a linguaje de la ciência.* R.J.: Zahar.

Davidov, V., V. (1982). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ifrah, G. (1987). *Las Cifras: história de una gran invencion.* Madrid: Alianza Editorial.

Kopnin, P. V. (1978). *A Dialética como Lógica y Teoria del Conhecimento.* Rio de Janeiro: Editora Civilización Brasileira.

Lima, L. (1994). *Momento de criar matemática.* São Paulo : Cevec/Ciarte.

Moura, Anna Regina L. de (1995). *A medida y a niño pré-escolar*. Tese de Doutorado. Faculdade de Educación, UNICAMP. Campinas.

Modelos aritméticos para la resolución de problemas “algebraicos”

Martín Andonegui Zabala
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto Venezuela
ioritz@hotmail.com

Resumen
La modelización matemática puede describirse como el proceso de traducción de una situación problema de cualquier área del conocimiento, al lenguaje matemático. Este proceso constituye una de las actividades más importantes a desarrollar paulatinamente en el aula de matemática a todos los niveles. Esto requiere del docente diseñar situaciones que permitan el ejercicio de la modelización. Una de estas situaciones, realmente privilegiada, es la resolución de problemas. El artículo se centra en los procesos de modelización de problemas que se hallan entre la frontera de la aritmética y del álgebra. Habitualmente, estos problemas se plantean y resuelven por la vía de modelos algebraicos. Se sugiere aquí la utilización adicional de modelos aritméticos, y se presentan algunos ejemplos oportunos. De este modo se persigue un tránsito de la aritmética al álgebra que no impida el retorno a la primera, como si fuera un campo para siempre superado por el álgebra, sino que permita el acceso a ésta sin perder la aritmética en el intento.

El proceso de modelización matemática

La modelización matemática puede describirse como el proceso de traducción de una situación problema de cualquier área del conocimiento, al lenguaje matemático (Castro y Castro, 1997; Biembengut, 1998). Este lenguaje matemático incluye símbolos y relaciones matemáticas expresadas mediante fórmulas, diagramas, gráficos, representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas de valores, programas computacionales, etc. Como bien señala Vasco, “en la modelización se trata de la utilización de todas las funciones conocidas, de otras ya inventadas pero desconocidas, así como de otras nuevas que se van a inventar, para simular, representar o modelar procesos reales que están ocurriendo en el mundo. Se trata de capturar sus variaciones por medio de modelos matemáticos de distintos tipos para poder seguirlos, hacer simulaciones y predicciones, e intentar controlarlos y modificarlos” (Vasco, 1999, p.18).

En todo proceso de modelización se siguen determinados pasos (Swetz, 1989, 1991; Biembengut, 1998):

1. Tomar conciencia de la situación problema; extractar las informaciones relevantes; identificar constantes y variables; establecer regularidades entre los datos; establecer relaciones.
2. Interpretar el problema en términos matemáticos; proceder por aproximaciones al modelo más formal y comprehensivo del problema.
3. Resolver el problema utilizando procedimientos matemáticos; aplicar el modelo a la situación problema, para fines de descripción y predicción.
4. Evaluar e interpretar la solución del problema así como el modelo, a la luz de la situación real.
5. Refinar el proceso de solución con el fin de resolver mejor los distintos tipos de problemas que pueden ser referidos por el modelo.

También interesa destacar los objetivos alcanzables en todo proceso de modelización (Biembengut, 1998):

1. Aproximar áreas de conocimiento al campo de la matemática.

2. Enfatizar la importancia de la matemática para la formación del alumno.
3. Despertar el interés por la aplicabilidad de la matemática.
4. Mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos.
5. Desarrollar la habilidad para resolver problemas.
6. Estimular la creatividad.

Todos los autores citados destacan la modelización matemática como una de las actividades más importantes a desarrollar paulatinamente en el aula de matemática, a todos los niveles. Nos estamos refiriendo a una actividad consciente, en la que el alumno tome conciencia de que está desarrollando tal proceso, así como de los pasos a cubrir. Esto requiere del docente diseñar situaciones en el aula que permitan el ejercicio de la modelización –es decir, utilizar la modelización como organizador curricular de las unidades didácticas-. Una de estas situaciones, realmente privilegiada, es la resolución de problemas.

La modelización y la resolución de problemas

Todo problema planteado en el aula llama a un proceso de modelización. Lo ideal sería proponer situaciones de la vida diaria o de otras disciplinas científicas que obligaran a una verdadera búsqueda del modelo o modelos matemáticos a utilizar. Por ejemplo, la organización de una fiesta de fin de curso, con sus categorías de ingresos, egresos y ganancias; la realización de unas obras de mejoras de planta física en el plantel; las posibles organizaciones del tiempo de ocio de un fin de semana si se cuenta con determinada cantidad de dinero; problemas de optimización; el estudio de un problema físico de cinemática o dinámica; el cálculo de la altura de un promontorio cuyo pie de base sea inaccesible; etc.

Pero habitualmente ocurre que la actividad de resolución de problemas tiene unas características muy limitantes en el aula de matemática. Generalmente, los problemas que se plantean se hallan al final de cada capítulo del libro de texto, lo cual proporciona a los estudiantes una clave primordial: todo problema se debe resolver por alguno de los procedimientos expuestos en la resolución de los problemas-tipo que aparecen en el texto inmediatamente previo. Así, si el capítulo es de divisibilidad, el problema será de divisibilidad y se resolverá por los procedimientos recién presentados; igualmente si tiene que ver con sistemas de ecuaciones lineales, con cónicas, con semejanzas de triángulos, con progresiones, etc. De este modo, se trivializa el proceso de modelización matemática.

Otra de las restricciones a tomar en cuenta es la preponderancia de los modelos algebraicos, particularmente, del planteamiento de ecuaciones: cada vez que en un problema hay que hallar el valor numérico, desconocido de entrada, de una variable o entidad de cualquier naturaleza, se dispara indefectiblemente en el alumno y en el profesor la misma reacción: “Sea x...”. También aquí se produce una gran pérdida en el proceso de modelización matemática, pues apenas existe un esfuerzo de reflexión sobre el problema y de discernimiento de los posibles modelos de planteamiento y de resolución.

Este fenómeno es particularmente notorio en los problemas que se hallan en la frontera de la Aritmética y del Algebra. Por ejemplo, para el enunciado: “La suma de tres números pares consecutivos es 126. Hallar dichos números”. Habitualmente este tipo de problemas se resuelve en un contexto algebraico: Sean x, x+2, x+4 los tres pares consecutivos. Entonces se plantea la ecuación cuya resolución lleva a la respuesta deseada. Rara vez se acepta como totalmente válido algún planteamiento de tanteo razonado.

Lo curioso del caso es que este tipo de problemas no se presenta en los textos matemáticos escolares antes de que se trate el tema de las ecuaciones de primer grado en N, lo que induce implícitamente, tanto en alumnos como en docentes, la idea de que tales problemas sólo pueden resolverse en el último campo estudiado, es decir, en un contexto estrictamente algebraico y nunca en el aritmético.

Este último comentario merece una atención especial ya que es un hábito consolidado en nuestros docentes la tendencia a privilegiar el campo algebraico sobre el aritmético por aquello de que el álgebra es una aritmética generalizada, cuyos métodos y herramientas son, por lo tanto, más poderosos que los aritméticos. De aquí la propensión usual a plantearse inicialmente un contexto de resolución algebraica para cualquier problema que se proponga.

Esta actitud discriminatoria de los docentes, privilegiando el uso del álgebra con respecto al de la aritmética, que llega incluso a ignorar esta última en presencia de la primera, incide a su vez en la actitud y en la práctica de los alumnos. Muchas veces éstos renuncian a cualquier método aritmético, a la vista de la descalificación de que son objeto por parte de sus docentes, quienes sólo esperan y aprueban métodos algebraicos para los problemas y situaciones propuestas en el aula (Andonegui, 1999).

Frente a esta situación, hay que insistir en que la resolución de problemas es el campo privilegiado para la confluencia de ambos tipos de representación y razonamiento, aritmético y algebraico. El docente debe tener esto presente a la hora de seleccionar y proponer situaciones problemáticas en el aula. Y sobre todo requerir su resolución por todas las vías posibles (planteamientos de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, elaboración de tablas, uso del tanteo razonado...).

Algunos problemas exigirán la confluencia de ambos campos:

> *¿Para qué valores enteros de n la expresión* $(2n^2 + 7n - 7) / (n + 3)$ *es un entero positivo?*

La resolución de este problema pasa en primer lugar por la división de ambos polinomios, cuyo resultado nos da:

$$(2n^2 + 7n - 7) / (n + 3) = 2n + 1 - 10 / (n + 3)$$

Ahora la atención se centra en la última fracción: $10 / (n + 3)$. Para que el resultado de la división propuesta inicialmente sea entero, es preciso que esta última fracción sea entera. Y esto nos lleva a consideraciones de carácter aritmético: Se trata de evaluar los distintos valores enteros de n tales que $10 / (n + 3)$ tome un valor entero positivo. Esta restricción obliga a que $(n + 3)$ tome los posibles valores iniciales (divisores enteros de 10) 1, 2, 5, 10, -1, -2, -5, -10. Ahora hay que tomar estos valores de $(n + 3)$, deducir los respectivos valores de n (-2, -1, 2, 7, -4, -5, -8, -13), sustituir éstos en la expresión general $2n + 1 - 10/(n + 3)$, y restringir la solución a aquellos valores de n para los que tal expresión resulte positiva.

Como se puede apreciar, la resolución de este problema pasa por la utilización de un modelo algebraico al comienzo y por la de un modelo aritmético en su segunda parte.

En otros problemas, podrá accederse indistintamente por vías aritméticas o algebraicas:

Hace 5 años la edad de Juan era cinco veces mayor que la de su hijo Roberto. El año que viene será el triple. ¿Cuántos años tienen actualmente?

La resolución habitual de este problema se plantea en el terreno algebraico: Considerando las dos situaciones temporales planteadas en el enunciado, se identifican las dos incógnitas:

Sea J la edad actual de Juan
Sea R la edad actual de Roberto

Se escriben las ecuaciones correspondientes:

$$J – 5 = 5 (R – 5)$$
$$J + 1 = 3 (R + 1)$$

La resolución de este sistema nos lleva al resultado solicitado.

Pero existe otra instancia de modelización, también de carácter algebraico. Si observamos que la diferencia entre las edades de Juan y Roberto es constante en el tiempo, podemos igualar las expresiones que nos reflejan dicha diferencia en los dos instantes de tiempo a los que se alude en el enunciado:

Diferencia hace 5 años: $5 (R – 5) – (R – 5) = 4 (R – 5)$
Diferencia dentro de 1 año: $3 (R + 1) – (R + 1) = 2 (R + 1)$

De donde se llega a la ecuación: $4 (R – 5) = 2 (R + 1)$, cuya resolución nos lleva a la respuesta solicitada.

Pero existe otro planteamiento (modelo) de carácter aritmético, inducido por las características atribuidas en el enunciado a los números que representan a ambas edades: La edad actual de Juan es un múltiplo de 5 (¿por qué?) y la edad que tendrá dentro de 1 año será múltiplo de 3 (¿por qué?). De la consideración conjunta de ambas condiciones (J múltiplo de 5 y J + 1 múltiplo de 3) se obtiene un conjunto de posibles valores de J: [5, 20, 35, 50, 65,...]. El ensayo de estos valores conducirá a la respuesta deseada.

- *La suma de las dos cifras de un número es 9. Si las cifras cambian de posición, se obtiene un segundo número que es nueve unidades menor que el quíntuplo del primer número*
  ¿Cuál es éste?
- *Luis y Enrique tienen juntos 112.000 bolívares. Luis posee 2/7 más que el dinero que tiene Enrique. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?*

Pero también existen casos en los que debe ponerse en evidencia, como ya lo observaba Perelman (1975) hace unas cuantas décadas, la superioridad de los planteamientos aritméticos sobre los algebraicos. Ejemplos de estas situaciones:

- *Un número tiene la propiedad de que al dividirse entre 2, 3, 4, 5 y 6, se obtienen como restos, respectivamente 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál será el resto al dividirse el número entre 7?*
- *Un comerciante mayorista en juguetes visita 7 tiendas. En la primera deja la mitad de los juguetes que trae, más 1. Y hace lo mismo en las restantes, con los juguetes*

con los que llega a cada una sucesivamente. Al final se queda con un solo juguete ¿Cuántos tenía al comienzo?

❖ *Tres hermanos salen a vender papelón con limón en la playa, pero observan que los bidones en que llevan el refresco no tienen la misma cantidad de líquido. La mamá entonces lo repartió equitativamente de la forma siguiente: del primer bidón vertió 1/3 en el segundo; del contenido resultante en éste, pasó ¼ para el tercero; y del contenido resultante en este último, extrajo 1/10 para agregarlo al primero. De esa manera el contenido final en cada bidón fue de 9 litros. ¿Qué cantidad de refresco había inicialmente en cada bidón?*

Abordemos el último enunciado, primero desde una perspectiva algebraica (ver tabla siguiente). El paso 0 expresa la situación de la cantidad inicial en cada bidón. En los pasos 1 al 3 se van indicando los sucesivos trasvases de refresco entre los bidones. Las expresiones del paso 3 reflejan –algebraicamente- la cantidad en cada bidón, una vez realizados todos los trasvases propuestos. Estas expresiones, igualadas a 9, constituyen el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a resolver. Los pasos 4 al 6 presentan una vía práctica para resolver el sistema planteado.

Paso	Primer Bidón	Segundo Bidón	Tercer Bidón
0 1 2 3	x 2x/3 2x/3 2x/3+(z+(y+x/3)/4)/10	y y+x/3 (3/4)(y+x/3) (3/4)(y+x/3)	z z z+(y+x/3)/4 (9/10)(z+(y+x/3)/4)
	= 9	= 9	= 9
4 5 6	 2x/3+10/10=9 2x/3=8 x=12 	y+x/3=12 y=8	z+(y+x/3)/4=10 z+3=10 z=7

Por otro lado, la perspectiva aritmética nos hace razonar permanentemente sobre el enunciado. Una conjetura básica plausible (a abandonar, si no da resultado…) consiste en suponer que las cantidades iniciales de líquido en cada bidón, así como las que se van trasvasando sucesivamente entre los bidones, son enteras. Y de este modo:

1. x + y + z = 27. En todo momento, 27 litros es el límite máximo de refresco disponible.
2. Conjeturas: x múltiplo de 3; x < 15 (porque si no, 2x/3 > 9); x > 9 (porque 2x/3 = 6: el primer bidón necesitaría recibir 3 litros en el último trasvase desde el tercer bidón, lo que obligaría a que éste contuviera en ese momento 30 litros). Luego, x = 12.
3. Conjeturas: x = 12; y + x/3 múltiplo de 4. Luego, y es múltiplo de 4 (porque x/3 = 4). Además, y < 16 (si no, x + y > 27).
4. Si suponemos y = 12, entonces z = 3. Esta distribución inicial (x = 12, y = 12, z = 3) no satisface las condiciones del enunciado.
5. Si suponemos y = 8, entonces z = 7. Esta distribución inicial (x = 12, y = 8, z = 7) sí satisface las condiciones del enunciado y representa la solución buscada.

Reflexiones finales

Las consideraciones anteriores deben entenderse como una propuesta de trabajo para el aula de matemática, tanto en el nivel de la Educación Media como en el de la formación de docentes de matemática. Y particularmente –de acuerdo con las restricciones marcadas en la exposición-, para el campo de la resolución de los problemas que pueden ubicarse en la frontera de la aritmética y del álgebra.

Con su planteamiento y resolución *por todas las vías posibles* debe buscarse hacer explícito y consciente el proceso de modelización matemática presente en la resolución de problemas. De este modo puede lograrse un tránsito de la aritmética al álgebra que no impida el retorno a la primera -como si la aritmética fuera un campo para siempre superado por el álgebra-, sino que permita el acceso a ésta sin perder la aritmética en el intento.

Pero, además, esta propuesta de trabajo que considera el ejercicio de la modelización en el campo de la resolución de problemas, puede permitir la consecución de algunos beneficios, tanto para docentes como para alumnos, en la línea de los objetivos alcanzables señalados por Biembengut (1998):

- Captar, desde la práctica del aula, la importancia de la modelización como actividad matemática fundamental.
- Adquirir una comprensión más cabal de la unidad de la matemática, al percibir la confluencia de varios lenguajes (aquí, el aritmético y el algebraico) para el tratamiento de diversos tópicos matemáticos.
- Entender y plantearse la resolución de problemas como una estrategia de aprendizaje de la matemática: el tratamiento de un problema matemático no finaliza al arribar a su respuesta o solución; todavía queda abierta la búsqueda de otras vías alternas de modelización y de resolución.
- Lograr el desarrollo de habilidades pertinentes para la resolución de problemas.
- Estimular la creatividad de alumnos y profesores.

Referencias Bibliográficas

Andonegui, M. (1999). *Aritmética y Algebra: ¿Separación, subordinación o complemento?* Maldonado, Uruguay: X CIAEM, mimeo.

Biembengut, M. S. (1998). Modelagem matemática e suas implicaçoes no ensino de matemática. *Memorias III CIBEM.* Caracas, Venezuela. ASOVEMAT pp. 1-13.

Castro E.; Castro E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp. 95-124. Barcelona, España: ICE/Horsori.

Perelman, Y. (1975). *Algebra recreativa.* Moscú, Rusia: Mir.

Swetz, F. (1989). When and how can we use modeling? *Mathematics Teacher*, 82, pp. 723-726.

Swetz, F. (1991). Incorporating mathematical modeling into the curriculum. *Mathematics Teacher*, 84, pp. 359-365.

Vasco, C. (1999). *Las matemáticas escolares en el año 2010.* Maldonado, Uruguay: X CIAEM, Mimeo.

El doble aspecto del concepto numérico: el lenguaje y lo operacional

Anna Regina Lanner de Moura [2] Daisy Faulin[3]
Faculdad de Educación. UNICAMP. Brasil
¡Error!Marcador no definido.

Resumen
El objetivo de este trabajo es discutir cuestiones relativas a la enseñanza-aprendizaje de conceptos numéricos en la alfabetización escolar, abordando particularmente el aspecto de la lenguage y el aspecto operacional de lo concepto numérico, teniendo como parámetros le abordaje de la Educación Conceptual Matemática y la vivencia en nuestra vida profesional a lo largo de 14 años de trabajo en alfabetización matemática. El estudio se inscribe en la perspectiva del materialismo histórico-dialético, particularmente en abordaje de Lima (1994), Caraça (1999), Kopnin (1978) entre otros.

Durante los varios años que venimos trabajando en alfabetización matemática, venimos viendo que hay una división equivocada y positivista entre las Ciencias Humanas – aquellas que tienen como enfoque a lengua verbal e escrita y las Ciencias Exactas – centradas en el lenguaje matemático. Actualmente muchos autores de libros didácticos y hasta algunos profesores se han apropiado de esta diferenciación para presentar el concepto matemático como concepto científico. Pero, ¿será que existe alguna ciencia que no es humana?

Estos autores olvidan abordar las producciones humanas que el concepto trasciende. Desarrollan actividades matemáticas para los niños a partir del concepto próximo, acabado, no su estado final de desarrollo.

Snyders (1988), explica que la educación matemática desarrolla un aspecto del pensamiento que a lengua verbal no aborda: la *experiencia de la solución*. El niño hace un cálculo y encuentra la solución que puede verificar objetivamente si es la correcta o no.

Como Lima (1994), entendemos que la evolución del concepto coincide con la síntesis de la evolución histórico significativo de su creación. Por lo tanto, el concepto matemático es un movimiento de diferenciación y combinación acumulativa de ideas y de superación de transformaciones permanentes del lenguaje verbal en lenguaje operacional y de lenguaje operacional en lenguaje verbal, cada salto es significativo para el aprendizaje y acontece a partir de las síntesis anteriores más simples. En este sentido, la *experiencia de la solución* pierde significado si no está comprometida con un contexto determinado, con una problematización que puede ser realizada a través de la asociación de ideas e imágenes, del lenguaje verbal.

El cálculo no es una verdad absoluta en sí. Es producto de una lectura numérica. La lectura numérica se realiza en las entrañas de una determinada asociación de ideas, de una lectura verbal, artística y afectiva de una determinada cualidad que en el futuro se transformará en cantidad.

---

[2] Docente e coordenadora del Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educación Matemática – CEMPEM, del Grupo de Pesquisa Tecnologia e Desenvolvimento Conceitual em Educación Matemática – TDCEM, del Grupo de Pesquisa: Prática Pedagógica em Matemática – PRAPEM e Professora del Enseñanza de Matemática de la Faculdade de Educación de la UNICAMP.

[3] Mestranda com pesquisa em desenvolvimento com o apoio del Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, vinculado ao Ministério de la Ciência e Tecnologia - MCT, integrante del Grupo de Pesquisa: Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educación Matemática – CEMPEM, Grupo de Pesquisa: Prática Pedagógica em Matemática – PRAPEM, Grupo de Pesquisa: Tecnologia e Desenvolvimento Conceitual em Educación Matemática -TDCEM e professora del Enseñanza Fundamental del Estado de São Paulo.

En el lenguaje matemático, el cálculo es específico (exclusivo) y está presente en todo su movimiento conceptual.
Se observa en la historia de la matemática, que la búsqueda constante, principalmente a partir de la revolución industrial, ha sido orientada hacia la “simplificación del cálculo”, una tentativa de generar conceptos nuevos y más abarcativos, técnicas operatorias más simples y de fácil memorización. La socialización del cálculo en su forma más simple se tornó una necesidad para la producción material y espiritual del ser humano moderno. Y a pesar de los diversos abordajes metodológicos, la enseñanza de la matemática permanece marcada por la primacía de la técnica, centrado en una separación entre los elementos formadores del pensamiento en su carácter operacional, y ratificado por los resultados inmediatos que produce.
En el contexto escolar que vivimos hoy, verificamos que la enseñanza del cálculo está directamente relacionada con un cierto tipo de función social y política, donde la prioridad es el saber hacer en detrimento del saber pensar.
El niño que aprende a contar, sin saber pensar numéricamente, el trabajador que aprende a medir sin saber pensar proporcionalmente, el cotidiano mecánico del cambio comercial, la hora, de la localización del número de una casa en una calle, del número de un calzado, etc., nos muestra, que si la operacionalidad del cálculo es separada del lenguaje matemático la vida moderna sería imposible.
El problema no está en el uso cotidiano del cálculo y en el tratamiento de este uso. El error, según Lima (1994) está en identificar lo como matemática y su tratamiento con educación matemática. El gran problema está en identificarlo con una verdad en sí. *“Hacer es pensar. Más, ¿ es posible pensar no pensando? ”*(Lima, 2000).
El ser humano sólo consigue no pensar, pensando. En la educación escolar, el entrenamiento del cálculo para lo cotidiano busca la automaticidad, o hacer sin pensar. Pero la matemática, como el propio origen griego de la palabra indica, es aprender a pensar, es saber pensar. El cálculo para lo cotidiano y lo cotidiano del cálculo no generan lenguaje. Generan simplificaciones para acciones inmediatas de la vida, del día a día. Lo simplificado, produce más tiempo libre para a aprendizaje del lenguaje, que es el movimiento que produce y reproduce al ser humano.
En la alfabetización matemática hemos observado que el objetivo fundamental de la operacionalidad del cálculo separada del lenguaje matemático es simplificar al máximo posible el trabajo del niño, el esfuerzo, la repetición, para liberar tiempo para la conquista colectiva de la mayor producción del trabajo humano: el lenguaje. Así, solamente la socialización de las operaciones más avanzadas, más simples, posibilitará la socialización del lenguaje.
Tomemos como ejemplo el algoritmo de la substracción, muchos niños no saben, muchos que saben se equivocan, y los niños que no se equivocan muchas veces llevan mucho tiempo haciendo un cálculo que les es extraño, que nada significa en términos de pensamiento, otros simplemente abandonan el lápiz y el papel procurando resolver todo mentalmente.
En este sentido, el uso de una calculadora, tornaría e enseñanza de la matemática mucho más productiva. El algoritmo de la substracción pierde su función operacional, y libera al niño para introducirse en el movimiento de creación conceptual en el momento de formación del lenguaje.

Sobre este aspecto del conocimiento, el niño deja de recibir entrenamiento (combinación encadenada de reglas extrañas), para crear una síntesis conceptual, como un saber hacer del lenguaje aritmético.
Entendemos que en el currículo, la metodología y la didáctica de la matemática han privilegiado la combinación lenguaje/operacionalidad a partir del aspecto operacional, en el cual disentimos, pues para nosotros, las relaciones entre lenguaje y operacionalidad, son de naturaleza contradictoria: se oponen y se atraen.
Por ser movimientos diferentes y desiguales, el lenguaje y la operacionalidad se combinan y se integran continuamente, y como nos enseña Caraça (1999), esta combinación cambia permanentemente de polaridad. Esta fuidez es determinante y es de la que se origina la relatividad de las relaciones.
Los mecanismos operacionales del cálculo, sólo permiten crear dentro de lo ya creado. No hay creación de lenguaje, de ideas, no hay afectividad, porque el niño poco se involucra con el problema.
El entrenamiento operativo y su aplicación inmediata tienen un aspecto educativo que le es externo: La objetividad da resolución inmediata de un problema productivo. En situaciones concretas de producción no da cabida al aprendizaje del lenguaje, que libera al lenguaje para la verdadera función – la concepción del movimiento general.
La educación conceptual matemática que nos proponemos, tiene por objetivo la formación del lenguaje como centro articulador de estos dos opuestos: lenguaje/operacionalidad.
Observamos en Kopnin (1978), que el lenguaje es un movimiento evolutivo que parte de las reflexiones y correspondencias más simples, creando redes y nexos crecientemente más amplios, abarcativos y profundos.
El aprendizaje de una operación matemática a que se reduce el concepto, necesita apenas de entrenamiento y se realiza como simple sumatoria fragmentada de habilidades y *competencias.*
En una educación conceptual, la educación para el lenguaje matemático es intencional y organizada. no es aleatoria ni espontanea. Los niños traen del pre-escolar un entrenamiento anterior no combinado con la educación matemática.
Concebir el pensamiento numérico como ya dado (los niños ya saben contar 1,2,3...), como formador del concepto implica que el lenguaje matemático figura en segundo plano.
Proponemos una acción educativa que integre estas actividades ya realizadas y las organice para la creación del lenguaje matemático que permita su desarrollo como movimiento autónomo. Para esto, desarrollamos actividades que propician en el niño la (re) creación de las formas más simples del concepto, posibilitándole elaborar definiciones conceptuales en lenguaje natural. La dinámica de desarrollo de las actividades comprende tres momentos de elaboración del concepto: el momento individual, que permite la reflexión individual sobre el concepto; en pequeños grupos, donde se discute y reelabora a reflexión individual; el momento del grupo de clase, donde se discuten las distintas definiciones y soluciones encontradas en cada grupo y se selecciona la que se juzgue más completa comparándola a la definición formal.
En estas situaciones de aprendizaje el niño se enfrenta con un desafío mayor en el proceso de adquisición de conocimiento, pues al re(crear) un concepto, su pensamiento dialoga con todas las áreas del conocimiento, porque este no es lógico, es principalmente intuitivo y la intuición según Kopnin (1978), exige la tensión de la imaginación, la intelectualidad, la emoción, el conocimiento cultural, en fin, todas las facultades cognitivas del ser humano.

La enseñanza de matemática centrada en la operacionalidad ignora esta fase de formación del pensamiento, justificando que vivenciarlo significa subestimar el conocimiento numérico que el niño trae como usuario del número.
Entendemos que el conocimiento científico es externo al ser humano que aprende. Para construir su comprensión es preciso que lo introduzca en su subjetividad. Este movimiento de internalización se concretiza por la dialéctica de la negación y de la negación de la negación del aspecto puramente mecánico del concepto operacional, porque solicita las funciones cognitivas e afectivas del que aprende.

Referencias bibliográficas

Aleksandrov, A. D.; Kolmogorov, A. N. E Laurentiev, M. A. (1988). *La matemática: su contenido, métodos y significado*." Madrid: Alianza editorial.
Caraça, B. J. (1975). *Conceptos Fundamentais de la matemática*, Lisboa: Editora Gradiva.
Davidov, V., V. (1982). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
Hogben, L. (1958). *Maravilhas de la Matemática. Influência e Función de la Matemática nos Conhecimentos Humanos.* Porto Alegre: Editora Globo.
Hogben, L. (1970). *El Maravilloso Mundo de las Matemáticas*. Madrid: Aguilar.
Ifrah, G. (1987). *Las Cifras: historia de una gran invención.* Madrid: Alianza Editorial.
Kopnin, P. V. (1978). *A Dialética como Lógica e Teoria del Conhecimento.* Rio de Janeiro: Editora Civilización Brasileira.
Lima, L. (1994). *Momento de criar matemática, contando com coisas* SP, Cevec/Ciarte.
Moura, Anna Regina L. de (1984). *Enseñanza de matemática: uma proposta para orientación de área*, Dissertación de Mestrado. IMECC. UNICAMP.
Moura, Anna Regina L. de (1995). *A medida e a niño pré-escolar*. Tese de Doutorado. Faculdade de Educación, UNICAMP.Campinas.
Ribnikov, C. A. (1987). *História de las Matematicas*. Moscú: Editorial Mir.
Ronan, C. A. (1987). *História Ilustrada de la Ciência*. vol. I, S. P., Círculo del Livro.
Snyders,G. (1988). *Para onde vão as Pedagogias não-diretivas.* Lisboa: Moraes editores.
Snyders, G. (1993). *Alunos Felizes: Reflexão sobre a alegria na escola a partir de textos literários.* R.J.: Paz e Terra.
Snyders, G. (1988). *A alegria na escola*, São Paulo: Monole.

Pensamiento Numérico y algebraico

Nivel Medio

Los sistemas de representación semiótica en el aprendizaje del concepto de fracción

Martín Andonegui Zabala y Alcides Vargas
Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Barquisimeto. Venezuela
ioritz@hotmail.com

Resumen
Esta investigación indaga sobre el efecto del uso de múltiples contextos o registros de representación semiótica en el aprendizaje del concepto de fracción. Siguiendo los lineamientos propuestos al respecto por Duval (1993), se aplicó a un grupo experimental de alumnos de 6° grado de Educación Básica de una escuela venezolana, una estrategia instruccional consistente en la enseñanza progresiva de estos registros representacionales del concepto de fracción: Expresión verbal, expresión numérica (a/b), parte–todo continuo, expresión decimal, porcentaje, parte–todo discreto, punto sobre la recta. Al grupo control se le aplicó la estrategia usual, que maneja solamente los tres primeros registros de representación. Además, se procedió a entrevistar a alumnos del grupo experimental, con el fin de indagar acerca de los procesos seguidos al ejecutar tareas con fracciones. Los resultados evidencian progresos en ambos grupos (parciales en el grupo control), y significativamente mejores en los alumnos del grupo experimental.

Es notoria la dificultad que presentan los estudiantes de los niveles básico y medio con el manejo de las fracciones. Numerosos autores las reportan (Kieren, 1987; Ávila, Mancera, 1987; Torres, 1993). Análogamente, diversos estudios han señalado algunos de los factores que explican tales dificultades:

- Uso inadecuado de la estrategia instruccional (Block, 1987).
- Uso inadecuado del lenguaje (Kieren, 1987; Figueras, Filloy, Valdemoros, 1987; Bergeron, Herscovics, 1987).
- Restricciones en el uso de los contextos representacionales del concepto de fracción (Hiebert, Warne, 1987; Andonegui, 1998)

Duval (1993) se refiere a este último factor como a la *falta de coordinación de los registros de representación semiótica* del concepto de fracción. Siguiendo su exposición, Duval sostiene que las representaciones semióticas son necesarias para la formación de representaciones mentales y que en la actividad matemática resulta esencial movilizar varios registros de representación de un mismo concepto. Este recurrir a varios registros parece ser una condición necesaria para no confundir a los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas y para que tales objetos puedan reconocerse en cada representación. En otras palabras, la multiplicidad de representaciones semióticas aparece como fundamental para la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos.

Las actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis son, para Duval (1993):

- La actividad de *formación* de una representación, identificable como representación del objeto matemático, en un registro dado.
- La actividad de *tratamiento*, que permite transformaciones en el interior del propio registro. Por ejemplo, el tratamiento aritmético de las fracciones.
- La actividad de *conversión*, que permite transformaciones entre diversos registros.

Todas estas actividades, incluida particularmente la última – habitualmente fuera de la práctica de aula -, son esenciales para una cabal conceptualización en el aprendizaje.

Finalmente, Duval (1993) plantea la necesidad de coordinar diversas representaciones semióticas (al menos dos), coordinación que debe manifestarse en:

- La rapidez en la actividad de tratamiento.
- La espontaneidad en la actividad de conversión.
- La potencia de las transferencias.

Esta coordinación de registros de representación debe ser, para el autor, el verdadero objetivo de la enseñanza de la matemática; no son suficientes ni el uso del monorregistro, ni los ejercicios aislados de conversión.

Llevando estos lineamientos al terreno del estudio de las fracciones, nos encontramos con la existencia de diversos sistemas o registros de representación semiótica. Tales sistemas o registros son (Sánchez, Llinares, 1988; Behr, Harel, Post, Lesh, 1992; Mancera, 1992; Andonegui, 1998):

- Expresión verbal.
- Expresión numérica (a/b).
- Expresión decimal.
- Parte – todo continuo.
- Parte – todo discreto.
- Punto sobre la recta numérica.
- Porcentaje.

La actividad de formación queda cubierta al plantear y justificar los anteriores registros o sistemas de representación: En cada uno de ellos es posible representar e identificar el concepto de fracción. En cuanto a la actividad de tratamiento, se refiere a la posibilidad de ejecutar las distintas tareas de transformación (ordenamiento, búsqueda de formas equivalentes, operaciones aritméticas) al interior de cada sistema de representación. Finalmente, la actividad de conversión se refiere al conjunto de transformaciones que es posible realizar desde cada registro a todos los demás (42 posibles tareas específicas).

En el contexto teórico planteado por Duval (1993), una propuesta didáctica cabal para alcanzar la conceptualización de la fracción debe contemplar el uso de los registros de representación susceptibles de ser manejados por los alumnos de acuerdo a su nivel de escolaridad, así como la realización de actividades de tratamiento y conversión. El objetivo de esta propuesta debe ubicarse en la rapidez de los tratamientos, la espontaneidad de las conversiones, la potencia de las transferencias, además de la realización exitosa de las actividades de tratamiento.

El estudio que vamos a presentar (Vargas, 2000) buscó indagar los efectos que la aplicación de una estrategia instruccional basada en los lineamientos anteriores podía producir en la adquisición del concepto de fracción en alumnos de 6° Grado de Educación Básica (Enseñanza Primaria). El estudio se realizó en la Unidad Educativa Nueva Segovia, ubicada en la localidad de Cabudare, integrada a la zona metropolitana de Barquisimeto (Venezuela), en el año 1997.

Para contrastar algunos de los posibles resultados a obtener, la muestra estuvo integrada por dos secciones de 6° grado de la citada escuela, ambas con 29 alumnos, de ambos sexos, y con edades comprendidas entre los 11 y 13 años. Una de las secciones se tomó como grupo control, y la otra como experimental, selección hecha al azar. Un pretest relativo a ejercicios de conversión entre sistemas de representación aplicado a ambos grupos reveló ausencia de diferencias significativas entre ellos (ver más adelante, Cuadro 3). Es de hacer notar que las unidades programáticas referentes a fracciones se desarrollaban en 4° y 5° grados, de acuerdo con el Plan de Estudios vigente para la fecha de la investigación; esto explica que el contenido del pretest pudiera referirse a tareas del propio tema de las fracciones.

El desarrollo del trabajo de campo tuvo 2 fases. En la primera, se aplicaron sendas estrategias instruccionales por grupos. El grupo control recibió una instrucción de corte usual en las escuelas, consistente en el manejo de los sistemas representacionales siguientes: Expresión verbal, Expresión numérica (a/b), y Parte – todo continuo. Esta fase instruccional se desarrolló en 4 sesiones de 90 minutos cada una en el horario normal de las clases de matemática.

Al grupo experimental se le aplicó una estrategia instruccional consistente en la enseñanza de todos los registros de representación, que fueron tratados en el siguiente orden (Sánchez, Llinares, 1988):

1. Parte – todo continuo, Expresión verbal, Expresión numérica (a/b).
2. Expresión decimal.
3. Porcentaje.
4. Parte – todo discreto.
5. Punto sobre la recta numérica.

Esta fase instruccional del grupo experimental se desarrolló en 7 sesiones de 90 minutos cada una, en el horario normal de las clases de matemáticas. En ambos grupos trabajaron docentes de aula del nivel indicado.

Es de hacer notar que en ambos grupos la dinámica de cada sesión consistió, en primer lugar, en representar la fracción en cada sistema de representación (el o los que correspondieran en esa sesión) y, en segundo lugar, en efectuar actividades de conversión entre el registro de representación incorporado y los ya presentados en las sesiones previas.

La segunda fase del trabajo de campo consistió en la evaluación de las conceptualizaciones alcanzadas por los alumnos. Para ello se aplicaron 2 tipos de instrumentos. El primero se dividió en 2 partes. La primera estuvo integrada por 38 ítems referentes a tareas de conversión directa de cada uno de los registros de representación a todos los restantes. La segunda parte incluyó 12 ítems relativos a tareas de aplicación del concepto de fracción: Representación de fracciones > 1, construcción de la unidad a partir de una representación de fracción < 1, ordenamiento de fracciones, intercalación de fracciones (en el registro a/b), y fracciones equivalentes (en el registro a/b). Los alumnos de ambos grupos respondieron la totalidad de este primer instrumento.

El segundo instrumento contenía 8 items relativos a tareas de conversión entre registros, ordenamiento e intercalación de fracciones, construcción de la unidad a partir de una representación de fracción < 1, problemas verbales con representaciones de diversos registros. Este instrumento se aplicó durante un proceso de entrevistas semiestructuradas (con dos alumnos del grupo experimental), cuyo objetivo fue detectar las estrategias utilizadas por dichos alumnos en la ejecución de las tareas propuestas.

En cuanto a los resultados obtenidos, analizamos en primer lugar los derivados de la aplicación del primer instrumento a ambos grupos. Los datos estadísticos de la comparación de resultados entre pretest y postest en cada uno de los grupos, aparecen en los Cuadros 1 y 2. El Cuadro 3 recoge los datos estadísticos de la comparación de resultados entre los grupos control y experimental. Este análisis comparativo en cada grupo y entre ambos grupos sólo se hizo en aquellos ítems que podían ser respondidos a partir de la instrucción recibida por el grupo control. Este conjunto de ítems estuvo formado por 8 de la primera parte (de entre los ítems 1 al 38) –relativos a tareas de conversión entre los registros Expresión verbal, Expresión numérica a/b, y Parte – todo continuo -, y los 12 (39 al 50) de la segunda parte –relativos a tareas de aplicación del concepto de fracción -, para un total de 20 ítems.

Cuadro 1
Grupo Control (N = 29)

	Pretest		Postest		Total Puntos	t	Significativo (α=0,05)
	x	s	x	s			
20 ítems (1)	6,1	1,7	9,5	0,9	20	15,36	Sí
8 ítems (2)	3,9	1,2	6,7	0,7	8	16,41	Sí
12 ítems (3)	2,2	1,2	2,8	1,1	12	1,91	No

x: media
s: desviación típica
t: estadístico t de Student
α: nivel de significación

Cuadro 2
Grupo experimental (N = 29)

	Pretest		Postest		Total Puntos	t	Significativo (α=0,05)
	x	s	x	s			
20 ítems (1)	5,7	1,1	15,9	0,9	20	46,68	Sí
8 ítems (2)	3,8	1,2	7,8	0,4	8	39,6	Sí
12 ítems (3)	1,8	0,9	9,1	1,3	12	31,78	Sí
38 ítems (4)	14,6	4,5	30	4,4	38	13,58	Sí

Cuadro 3
Comparación grupos control y experimental

	Control		Experimental		Total Puntos	t	Significativo (α=0,05)
	x	s	x	s			
Pretest 38 ítems (4)	14,8	4,6	14,6	4,5	38	0,15	No
Pretest 12 ítems (3)	2,2	1,2	1,8	0,9	12	1,48	No
Postest 8 ítems (2)	6,7	0,7	7,8	0,4	8	10,31	Sí
Postest 12 ítems (3)	2,8	1,1	9,1	1,3	12	22,78	Sí

Leyenda:
(1) Total de los 20 ítems considerados
(2) Ítems de conversión directa entre registros de representación verbal, numérico (a/b), y parte – todo continuo
(3) Ítems de aplicación del concepto de fracción
(4) Total de los 38 ítems de conversión entre todos los registros

Estos resultados reflejan que:

- Los alumnos del grupo control consiguieron –después de su fase instruccional- un progreso significativo en las tareas de conversión directa entre los tres registros de representación considerados, pero no así en las tareas de aplicación del concepto de fracción.
- Los alumnos del grupo experimental sí consiguieron –después de su fase instruccional- un progreso significativo en todo tipo de tareas: las de conversión entre todos los registros, y las de aplicación del concepto de fracción.
- La comparación entre ambos grupos revela que no existían diferencias significativas en la etapa del pretest, pero sí se encontraron posteriormente, tanto en las tareas de conversión directa referidas a los tres registros que manejaron exclusivamente los alumnos del grupo control, como en las de aplicación del concepto de fracción.

El análisis de las entrevistas reveló que los dos alumnos del grupo experimental demostraron dominio del concepto de fracción, evidenciado en su aplicación a tareas de conversión entre registros de representación, modificación de citas perceptuales, reconocimiento de fracciones equivalentes, ordenamiento e intercalación de fracciones, reconstrucción de la unidad, y representación de fracciones > 1.

La discusión de estos resultados a la luz de las propuestas teóricas de Duval (1993) confirman la supuesta conveniencia del uso de múltiples registros de representación semiótica para alcanzar los niveles de conceptualización requeridos para el aprendizaje de la fracción. También confirman su planteamiento de que la coordinación entre los registros produce espontaneidad en las actividades de conversión, como se verificó en las entrevistas.

La comprobación del efecto de la rapidez en las actividades de tratamiento (cálculo aritmético con fracciones) pudo verificarse en una investigación posterior a ésta, con el mismo grupo experimental, al abordar la adición de fracciones (Valdivé, 2000).

Por último, cabe señalar que nuestro estudio establece que el uso de un mayor número de registros de representación produce mejores resultados que el uso de un número menor, lo que vendría a complementar la sugerencia de Duval (1993) en cuanto a coordinar (sólo) al menos dos registros en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático.

Referencias bibliográficas

Andonegui, M. (1998) Algunas consideraciones sobre los sistemas de representación en Matemática. En: *Memorias III CIBEM*. Caracas, pp. 104-108.

Avila, A., Mancera, E. (1987) Algunos problemas en el aprendizaje de las fracciones. En: E. Bonilla, O. Figueras, F. Hitt (Eds.), *I Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores en Investigación en M.E.*. México, pp. 153-158.

Behr, M., Harel, G., Post, T., Lesh, R. (1992) Rational number, ratio, and proportion. En: D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York, McMillan, pp. 296-333.

Bergeron, J., Herscovics, N. (1987) Unit fraction of a continous whole. En: J. Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran (Eds.), *Proceedings of PME XI*. Montréal, vol I, pp. 357-365.

Block, D. (1987) Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria. En: E. Bonilla, O. Figueras, F. Hitt (Eds.), *I Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en M.E.* México, pp. 171-176.

Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65. Strasbourg, IREM.

Figueras, O., Filloy, E., Valdemoros, N. (1987) Distorsiones que obstruyen la construcción del concepto de fracción. En: E. Bonilla, O. Figueras, F. Hitt (Eds.), *I Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores en Investigación en M.E.*. México, pp. 159-164.

Hiebert, J., Warne, D. (1987). Cognitive effects of instruction designed to promote meaning for written mathematics simbols. En: J. Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran (Eds.), *Proceedings of PME XI.* Montréal, vol. I, pp. 391-397.

Kieren, F. (1987) Lenguage – Action – Fraction. Reflections on fractional numbers. En: J. Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran (Eds.), *Proceedings of PME XI.* Montréal, vol. I, pp. 426-431.

Mancera, E. (1992) Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática*, vol. 4, n° 2, 40-52.

Sánchez, V., Llinares, S. (1988) *Fracciones. La relación parte–todo.* Madrid, Síntesis.

Torres, N. (1993) *Dificultades en el aprendizaje del concepto de fracción en alumnos de séptimo grado de Educación Básica*. Maestría Interinstitucional de Matemática (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto, Venezuela.

Valdivé, C. (2000) *El dominio de las operaciones de adición y sustracción con fracciones.* Maestría Interinstitucional de Matemática (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto, Venezuela.

Vargas, A. (2000) *Efecto del uso de la diversificación de contextos representacionales en el aprendizaje del concepto de fracción.* Maestría Interinstitucional de Matemática (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto, Venezuela.

Producciones escritas y tratamientos de control en álgebra: algunas evidencias para pensar en interacciones posibles para guiar su evolución

Mabel Panizza*, Jean-Philippe Drouhard**
***** Universidad de Buenos Aires**.** Argentina**.** ****** IUFM de Nice. Francia
mpanizza@mail.retina.ar drouhard@math.unice.fr

Resumen
La investigación que presentamos se inscribe en el marco de una temática más general que porta sobre el rol de la interacción social entre los sujetos (lo que hemos denominado el rol del interlocutor) en el aprendizaje de la racionalidad matemática. Más específicamente, hemos elegido interesarnos en el rol del interlocutor en el control que hace un alumno en su trabajo escrito en álgebra. El estudio experimental preliminar -del que informamos aquí- está dirigido a recoger pistas en los procesos de control - y/o manifestaciones de su ausencia - de los estudiantes al realizar una tarea que implica un cierto razonamiento algebraico. Pedimos al alumno una tarea que lo hiciera asumir el rol de interlocutor con respecto a un alumno ficticio, Juan, quien se supone que ha aportado una solución a un problema del álgebra. La tarea del alumno consiste en buscar explicar - en términos matemáticos - cómo Juan puede haber procedido y dar su opinión sobre la solución al problema que éste aportara.
El estudio muestra la dificultad para los estudiantes de percibir la necesidad de control, y que cuando la perciben, fallan en la articulación de los elementos conceptuales y semióticos como herramientas de control. Dentro del registro de las escrituras algebraicas, una gran cantidad de estudiantes no puede percibir las contradicciones posibles en las declaraciones que producen. Igualmente, a través del problema utilizado, hemos podido identificar –con carácter de hipótesis- algunos elementos relacionados con la interpretación de disyunciones e implicaciones, los que a su vez podrían explicar algunas dificultades de los estudiantes para diferenciar la implicación y el modus ponens.

Este trabajo se enmarca dentro de la problemática de investigación tratada en el seno de un equipo Franco-Argentino, denominado *CESAME-II*, auspiciado por el IUFM[1] de Niza. No es nuestra intención (ni sería posible) describir en el marco limitado de esta presentación la problemática del grupo *CESAME* en su totalidad. Señalamos solamente que el nombre *CESAME* es el acronimio de "Construcción Experiencial de Saberes y el rol del interlocutor en la Matemática que se Enseña".
Nos contentaremos con indicar que una parte de nuestra problemática porta sobre el aprendizaje de la racionalidad matemática. Es bastante claro que esta racionalidad no se aprende por imitación. Se puede ciertamente aprender a escribir literalmente los pasos de un razonamiento, pero no es esto lo que permitirá estar convencido de ese razonamiento, ni podemos esperar que convenza a quien sea, y con menos razón podemos esperar saber por qué (y de qué) un tal razonamiento es convincente y por qué (y frente a quién) hace falta que lo sea. Más aún, nuestra experiencia como profesores y didactas nos enseña que, lejos de acercar al alumno a la racionalidad matemática, el aprendizaje por imitación lo aleja de la misma. Imitando, el alumno aprende a imitar, y nada más.
Pero entonces, si la racionalidad no se aprende por imitación ¿cuáles son los mecanismos que sí hacen posible dicho aprendizaje? En el seno del grupo *CESAME* hemos trabajado - entre otros - sobre el rol de la interacción social entre los sujetos (lo que hemos denominado el rol del interlocutor en el aprendizaje). Una de nuestras hipótesis de trabajo es que la argumentación matemática (y en un cierto sentido la demostración) se dirige a un interlocutor, el cual puede ser más o menos ficticio, virtual o interiorizado.
Los trabajos llevados a cabo anteriormente en el seno del grupo *CESAME* nos han conducido:

---

[1] Instituto Universitario de Formación de Maestros

- por una parte a comprender mejor el rol del interlocutor por oposición a los otros roles posibles desde el punto de vista de la comunicación en clase (roles que hemos simbolizado por un tetraedro, cf. Drouhard, 1997a, 1997b);
- por otra parte a estudiar a priori el rol del interlocutor desde el punto de vista didáctico o sea de sus funciones (posibles o deseables) para la enseñanza de la matemática (Drouhard, Sackur, Maurel, Paquelier & Assude, 1999; Grize, 1983; Sackur, Drouhard & Maurel, 2000);
- finalmente a estudiar la interacción efectiva entre alumnos, los unos jugando el rol del interlocutor frente a los otros, en un dispositivo experimental de enseñanza (Sackur, Drouhard, Maurel & Pécal, 1997).

El punto común de todos estos trabajos es que hemos estudiado el rol del interlocutor en el marco donde aparecería más naturalmente, y de manera más evidente, a saber en los dispositivos de trabajo en grupo, de discusión matemática (Bartolini-Bussi, 1991) o de debate científico (Legrand, 1990). Dicho de otro modo, en los casos en que un alumno inteactúa oralmente con un interlocutor encarnado en sus condiscípulos, hablando en su propia lengua o en nombre del grupo.

El trabajo conducido en esta nueva etapa de cooperación franco-argentina porta sobre un nuevo aspecto del rol del interlocutor que no había sido explorado aún, el del caso en que el trabajo se hace por escrito (y no en debate oral con contradictores y colaboradores físicamente presentes). En este caso, el rol de interlocutor es desempeñado entonces por un lector, real o idealizado, supuesto o imaginario, destinatario (por lo menos virtualmente) de lo que se escribe.

Todo se da en un juego complejo y sesgado en el que el maestro - que es en realidad el único destinatario real de la producción escrita del alumno -, se transforma en el portavoz del lector ideal, destinatario supuesto y anónimo de lo que escribe el alumno. Para sostener nuestro propósito nosotros hemos debido, paralelamente a este estudio teórico, investigar los elementos susceptibles de ser fácilmente observables.

Buscando qué tipo de dispositivo nos permitiría unir los observables a propósito del rol del interlocutor en las producciones escritas, hemos pensado en acercar nuestra problemática a un tema que tiene ya una larga historia en la investigación, el tema del control. Más específicamente, hemos elegido interesarnos en el rol del interlocutor en el control que hace un alumno en su trabajo escrito en álgebra.

Una cuestión relacionada con lo anterior es que la relación que el alumno tiene con su trabajo parece ser diferente según si él produce que si él controla su producción, y en el caso de un trabajo escrito el alumno debe (y puede) tomar distancia de su propio trabajo, él debe (y puede) hacer de alguna manera de lector.

Ahora bien, esta actitud reflexiva plantea de nuevo el problema de los roles jugados por los propios individuos, y encontramos problemas metodológicos análogos a los que habíamos ya encontrado cuando el profesor asume el rol del lector ideal. Es por esto que hemos elegido hacer la situación más clara demandando al alumno una tarea que lo hiciera asumir el rol del interlocutor con respecto a un alumno ficticio, Juan, quien se supone que ha aportado una solución a un problema del álgebra. La tarea del alumno consiste en buscar explicar - en términos matemáticos - cómo Juan puede haber procedido y dar su opinión sobre la solución al problema que éste aportara.

El estudio experimental preliminar - del que informamos aquí - estado dirigido a recoger pistas en los procesos de control - y/o manifestaciones de su ausencia – por parte de los estudiantes al realizar una tarea que implica un cierto razonamiento algebraico.

Estudio experimental: el problema de la circunferencia

Nombre:

Le pedimos que trabaje solo, que escriba sus cálculos en la hoja de papel, que utilice lapicera de tinta, que no borre ni utilice líquido corrector. Todas sus ideas son interesantes, por favor escríbalas abajo en detalle.

Problema:

un estudiante, Juan, tiene que solucionar el sistema siguiente: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 25 \\ xy = 0 \end{cases}$

Y él dice que la solución es el conjunto de puntos dado por $x^2 + y^2 = 25$

Indique si su solución es correcta o no.

Por favor explique en términos matemáticos cómo considera que ha pensado Juan.

Resultados

Los porcentajes se refieren a una población de estudiantes de la universidad, durante la primera semana en un curso de álgebra en el " CBC " (Ciclo Básico Común) de la universidad de Buenos Aires.

I- Estudiantes que dan una respuesta correcta (vía un contraejemplo). Ellos explican por qué "*Juan incurrió en una equivocación*", etc. 30% (grupo A).

II- Estudiantes que dan una respuesta incorrecta (70%). Estas respuestas son de dos clases:

1. grupo *B*: se trata de los estudiantes que dicen que "*Juan tiene razón*" y **al mismo tiempo** solucionan correctamente el sistema inicial. Estos estudiantes no parecen percibir la contradicción (puesto que dejan ambas escrituras - contradictorias - en la hoja, sin comentario adicional): 40%.

   Ejemplo representativo de esta primera clase de producción:

   Se trata de explicaciones que recogimos en entrevistas posteriores: "*Juan hizo bien, él hizo una substitución, puso xy = 0 en la ecuación* $x^2 + xy + y^2 = 25$ *y obtuvo* $x^2 + y^2 = 25$. *Como xy = 0 entonces x = 0 o y = 0. En el primer caso deducimos que* $y^2 = 25$*, y en el segundo que* $x^2 = 25$".

En general estos estudiantes concluyen indicando los cuatro puntos, pero no ven el lazo con la primera respuesta, no la cuestionan (es por eso que en nuestro análisis anterior decíamos que no perciben la contradicción). Es interesante observar que el control en este caso podría haberse realizado – por lo menos - desde dos grandes perspectivas:

- Razonando sobre la conservación del conjunto solución.
- Analizando la conservación del conjunto de la solución, mediante un cambio de "registro" (Duval, 1993, 1995), que en este caso significaría simplemente "ver" una circunferencia en la expresión $x^2 + y^2 = 25$. (vale la pena comentar aquí que el problema fue elegido, entre otras cosas, justamente por la facilidad que ofrece para realizar un control mediante cambio de registro).

2. grupo *C*: se trata de los estudiantes que dicen que "*Juan tiene razón, pero razona de manera incompleta*" (30%). Este último grupo se divide en dos subgrupos, los que hemos conformado en base a la argumentación que utilizaron – en entrevistas clínicas

que tomamos posteriormente - para explicar en qué sentido es "incompleto" el razonamiento de Juan:

- los estudiantes del grupo *C1* (60% del 30%) argumentan que Juan "*no tomó cuenta que una de las dos (x o y) debe ser 0, él apenas toma en cuenta xy como número*", y se detienen en este punto. Aunque sus escrituras son correctas, estos estudiantes no tienen éxito en integrar esta información en un sistema de manera tal que conserve la "denotación" (Drouhard et al., 1994).
- Los estudiantes del grupo *C2* (40% del 30%) argumentan que "*Juan ha hecho bien, pero de una manera incompleta*" porque "*él no sabía cuál de las dos (x o y) era 0; si él hubiera sabido por ejemplo que y=0 él podría haber continuado, y hubiera escrito* $x^2=25$".

  Ejemplo representativo de la segunda clase de respuestas (grupo C2): hemos hecho entrevistas para identificar qué significa "*incompleto*" para estos estudiantes. La entrevista siguiente es representativa de las respuestas de este grupo:

  Lionel: *es evidente, es incompleta, pues uno de los dos números x o y es igual a 0, pero no sé cuál. No tengo ningún elemento para decidir*.

  Entrevistador: qué quiere decir con "*incompleta*"?

  L: *por ejemplo, si yo pudiera saber cuál es cero, si por ejemplo supiera que y=0, entonces podría escribir como solución* $x^2=25$

  E: usted dice que en este caso usted no tiene ningún elemento para decidir. Usted recuerda situación similar, en la cual sí haya podido decidir?

  L: *sí, por ejemplo en un sistema 2×2, o si tenía* $\begin{cases} x^2+xy+y^2=25 \\ 3-y=0 \end{cases}$

  T: y cuál es la diferencia con el ejemplo de Juan?

  L: aquí puedo determinar, yo puedo saber cuál es la solución (lo dice señalando su sistema)

Pensamos que estos estudiantes:

- realizan un tratamiento "semiótico" (simbólico) del sistema, que no mantiene la denotation;
- no utilizan elementos de control, ni conceptuales ni semióticos;
- disponen de una concepción de "solución" ligada a la unicidad

Al parecer, tendrían una confusión en el estatus de una hipótesis (a la que considerarían como un "hecho" (‘*no sabemos **cuál** de las dos, x o y **es** cero*’). La solución propuesta por ellos estaría basada en esta confusión, y un razonamiento por modus ponens

$$x=0 \Rightarrow y^2=25$$
$$\underline{x=0}$$
$$y^2=25$$

De acuerdo con nuestra interpretación, muchas resoluciones "formalmente correctas" (es decir correctamente escritas) de estudiantes que tienen este tipo de confusión, no serían representativas de una **verdadera comprensión**, como por ejemplo, cuando escriben:

Si $x=0$*:* $x^2+xy+y^2=25$ $0+0+y^2=25$ *entonces*	*Si* $y=0$*:* $x^2+xy+y^2=25$ $x^2+0+0=25$ *entonces*

$y = \pm 5$	$x = \pm 5$

Entonces $x = 0$ y $y = \pm 5 \vee x = \pm 5$ y $y = 0$

Conclusión

Como conclusión podemos decir que:

- La mayoría de estos estudiantes no perciben la necesidad del control.
- Por otra parte, los que perciben esta necesidad, fallan en la articulación de los elementos conceptuales y semióticos como herramientas de control. Ellos no son capaces de controlar dentro de un registro (con las herramientas semióticas relacionadas con dicho registro), ni tampoco a través de un cambio de registro. Sin embargo - en este problema -, una de estas capacidades es especialmente simple, porque se trata simplemente de "ver" un círculo en $x^2 + y^2 = 25$.
- Dentro del registro de escrituras algebraicas, una gran cantidad de estudiantes no pueden percibir las contradicciones posibles en las declaraciones que producen.
- En lo referente al problema del "*o*", para algunos estudiantes (C2) los antecedentes de una implicación son consideradas como "hechos" (considerados verdaderos) más que como afirmaciones hipotéticas. Podemos relacionar esto con las dificultades de los estudiantes en procesos de implicación: la mayoría asume que el antecedente de una implicación es verdadero, y en consecuencia la diferencia entre implicación y modus ponens no puede ser percibida por ellos (ver también, Durand-Guerrier, 1996).
- En consecuencia, pensamos que los problemas que contienen una disyunción de implicaciones son una manera excelente de poner a la luz este fenómeno que de otra manera es difícil de observar.

Pasos actuales en la investigación

Este trabajo experimental y su interpretación nos ha conducido actualmente a reorientar la investigación, especialmente a definir con mayor nivel de concreción las cosas a observar para avanzar en el propósito general de nuestra investigación y del cual hablábamos en la introducción.
En términos generales, el trabajo se orienta a identificar condiciones para el desarrollo de la percepción de la necesidad y de la capacidad para utilizar herramientas de control, y el rol específico del interlocutor en ese proceso.

- Concretamente, actualmente estamos realizando un estudio teórico relacionado con lo semiótico, tendiente a analizar las posibilidades que ofrecen los distintos registros (sobre todo el algebraico y el gráfico) desde el punto de vista del control;
- y otro experimental (a través de observaciones de clases, realización de debates científicos y entrevistas clínicas) tendientes a recoger evidencias acerca de:
- Procesos espontáneos de articulación de herramientas conceptuales y semióticas a través del cambio o no de "registro";
- el papel específico del "interlocutor" y el papel de la "discusión matemática" en relación a las tres dimensiones identificadas aquí:

a) la posibilidad de percibir contradicción producida en el ámbito de las escrituras algebraicas;
b) la posibilidad de hacer avanzar a los alumnos desde su concepción de las "hipótesis en tanto hechos" hacia una concepción pertinente matemáticamente,
c) la posibilidad de hacer avanzar en la capacidad de articulación de herramientas conceptuales y semióticas dentro de un registro o mediante cambio de registro, para los procesos de control.

Referencias bibliograficas

Bartolini-Bussi M. G. (1991). "Social Interaction and Mathematical Knowledge", *Proceedings of PME 15*, (Assisi), Furinghetti F., Dir., Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, Italie.

Drouhard J-Ph. (1997a). "Communication in the classroom with a CAS: the double didactic pyramid model", in B. Kutzler & J. Monaghan (Dir.), *The State of Computer algebra in Mathematics Education*, Chartwell-Bratt.

Drouhard J-Ph. (1997b). "Communication in the classroom on necessary mathematical statements: The double didactic pyramid model.", *Proceedings of the 1st European Research Conference on Mathematics Education*, Podêbrady, J. Novotna, M. Hejny´ (Eds.), Charles University, Prag.

Drouhard J-Ph., Léonard F., Maurel M., Pécal M., Sackur C. (1994). 'Blind Calculators', 'Denotation' of Algebra Symbolic Expressions, and 'Write False' Interviews, in Kirshner D. (dir.). *Proceedings of PME-NA 16*. Louisiana State University, Baton Rouge, LA.

Drouhard J-Ph., Sackur C., Maurel M., Paquelier Y. & Assude T. (1999). "Necessary Mathematical Statements and Aspects of Knowledge in the Classroom", In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I*, Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück.
http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html.

Drouhard J-Ph; Panizza M. (2000). "CESAME - II : Quel est le rôle joué par l'écriture symbolique dans la conviction pour soi-même ?", to be published in *Actes du séminaire SFIDA*, IREM de Nice.

Durand - Guerrier V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique: Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I.

Duval R. (1993). "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg

Duval R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne: Peter Lang.

Duval R. (1998). "Les différences de fonctionnement cognitif entre raisonnement qui démontre et argumentation : enjeux et moyens de leur perception par les élèves", M*eeting IREM on argumentation*, IREM d'Orléans.

Grize J. B.; Piérault - Le Bonniec G., (1983). *La contradiction, essai sur les opérations de la pensée*. Paris: P.U.F.

Legrand M. (1990). "Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique", *Recherches en didactique des mathématiques* , **9**/3.

Sackur C., Drouhard J-Ph, Maurel M.; Pécal M. (1997). "Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire?", *Repères-IREM*, **28**.

Sackur C., Drouhard J-Ph.; Maurel M. (2000). "Experiencing the Necessity of a Mathematical Statement", *Proceedings of PME 24*, T. Nakahara & M. Koyama, ed., Hiroshima.

Generalización y control en álgebra

Mabel Panizza
Universidad de Buenos Aires (CEFIEC-CBC). Argentina
mpanizza@mail.retina.ar

Resumen
Este estudio concierne a la importancia de un enfoque pedagógico que contemple las generalizaciones que espontáneamente realizan los alumnos, en virtud del valor que las generalizaciones tienen en el aprendizaje del álgebra y la construcción de la racionalidad matemática. Consideramos el problema del control de las generalizaciones espontáneas -en comparación con las que se desarrollan en el marco de una actividad de generalización-, desde la doble perspectiva de la intervención didáctica y del sujeto que aprende. Analizamos el problema de la validación interna dentro del ámbito de las escrituras algebraicas. Mostramos diversos ejemplos de generalizaciones espontáneas y manejo del control por parte de alumnos al comienzo de un primer curso universitario (CBC, UBA). El estudio sugiere la necesidad de encarar este problema desde el inicio de la escolaridad secundaria, considerando especialmente las dificultades y posibilidades ofrecidas por los contextos provistos por las diferentes vías de entrada al álgebra.

Introducción

La habilidad para generalizar es una facultad de razonamiento humano, no específica de un contenido. Sin embargo, la capacidad de generalizar en un dominio particular plantea problemas de aprendizaje específicos de dicho dominio.
Diversos autores han estudiado este problema, y la importancia de favorecer actividades de generalización ha conducido a que sea considerada una de las vías de entrada al álgebra (Bernardz, Kieran, Lee, 1996). Especialmente, el tema de la justificación en relación a los procesos de generalización ha sido considerado por Radford (1996) y, desde una perspectiva diferente, por Balacheff (1987,1991), entre otros.
Ahora bien, los alumnos no realizan generalizaciones solamente frente a **actividades de generalización** (destinadas a encontrar patrones numéricos o geométricos, leyes numéricas, contrucción de fórmulas, etc.), sino que realizan **espontáneamente generalizaciones** en el contexto de resolución de diferentes tareas.
Esto plantea problemas didácticos importantes, tanto desde el punto de vista de las intervenciones docentes, como desde la capacidad de **percibir la necesidad** de justificación por parte del sujeto que aprende. Esta problemática nos condujo a buscar identificar diferentes tipos de **generalizaciones espontáneas** realizadas en el contexto del álgebra, y a estudiar problemas ligados al **control** dentro del ámbito de las escrituras algebraicas.

Acerca de las generalizaciones espontáneas

¿Qué son las generalizaciones espontáneas?

Veamos algunos ejemplos, extraídos de observaciones de clase, en un curso de álgebra en el Ciclo Básico Común (CBC) de la Universidad de Buenos Aires (UBA).

Los ejemplos de Belén y María

Frente al problema “Encontrar los números reales x tales que $x^2 \geq x$”
Belén y María responden que “*$x^2 \geq x$ es verdadero para todo número real*” sin resolver la ecuación, pero llegan a esa conclusión por diferentes caminos.
A solicitud del profesor, Belén argumenta “*es evidente, el cuadrado de un número es siempre mayor que dicho número!*”;

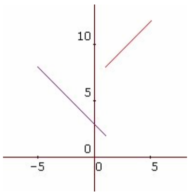
María, en cambio, argumenta *"Yo probé con ejemplos, 1,2,3,-1,-2,-3, entonces. . . "*
Belén parece haber generalizado una propiedad, cuya verdad era conocida por ella sobre los números enteros o los números naturales (realizando una **extensión de un esquema de conocimiento**).
María parece haber realizado un **procedimiento inductivo**.
Deseamos señalar aquí dos cuestiones, sobre las que volveremos: a) que ambas han realizado una **generalización espontánea** -de diferente naturaleza, llegando a la **misma conclusión** mediante razonamientos muy diferentes-; b) que la tarea **no** demandaba una generalización.
Estos ejemplos son, sin embargo, muy familiares. Veamos otros ejemplos:

El ejemplo de Brenda
El problema: "Decidir si la siguiente implicación es verdadera o falsa: $\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2 > x(x+1) \Rightarrow x > 1$"
fue dado en clase para poner en juego la competencia algebraica de los alumnos en un contexto de implicación. La producción de Brenda es especialmente ilustrativa del "problema" de las **generalizaciones espontáneas** surgidas en el marco de una tarea.

Al resolverlo, Brenda considera diversos ejemplos: x=0, x=1, x=2, x=3, x=-1, x=-*2*, x=-3 y analiza el valor de verdad del antecedente y del consecuente en cada caso. Luego concluye, correctamente, que el enunciado es falso, porque "*se pueden encontrar valores de x menores que* 1 *que cumplan* $2x^2 \geq x(x+1)$".
El profesor le pide que explique cómo lo pensó. Brenda argumenta: "-2,-3,-4 *son contraejemplos, porque para ellos el antecedente es verdadero y el consecuente es falso*".
De acuerdo con la tarea, Brenda podría haberse detenido allí, pero ella agrega inmediatamente: "*Ah, es* $|x|$ *lo que habría que haber puesto! Es* "$\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2 > x(x+1) \Rightarrow |x| > 1$" *la que es verdadera!*"
Según nuestra interpretación, Brenda realiza una **generalización espontánea** del conjunto de contraejemplos utilizados por ella para **argumentar** (x=-4, x=-3, x=-2), e "inventa" una proposición que considera verdadera. Este tipo de generalizaciones (de contraejemplos) ha sido encontrada por Balacheff (1987) en el marco de la refutación de una conjetura. A diferencia del problema tratado por Balacheff, en nuestro caso la tarea no requería encontrar ninguna regularidad. Brenda lo hace espontáneamente: al **argumentar** utilizando los números –4,-3,-2, Brenda los considera espontáneamente representativos de los números cuyo valor absoluto es mayor que 1 ("*Ah, es* $|x|$ *lo que habría que haber puesto!*) y espontáneamente introduce ese conjunto en el enunciado, atribuyéndole la propiedad de hacerla verdadera ("*Ah, es* $|x|$ *lo que habría que haber puesto! Es* "$\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2 > x(x+1) \Rightarrow |x| > 1$" *la que es verdadera!*").
Notemos que, desde el punto de vista de la **complejidad lógica**, Brenda disponía de medios para analizar el valor de verdad de su afirmación, ya que realizó correctamente la tarea original, que era equivalente. Pero ella no se lo plantea, presenta su afirmación de manera contundente y dando por finalizada la tarea.

El ejemplo de Ana Paula
El problema: "Estudiar las propiedades de la función $f(x) = \{-x+3 \text{ si } x<1;\ x+7 \text{ si } x\geq 1\}$" fue dado en clase. El 40% de los estudiantes, basándose en el análisis del gráfico (contenido de la representación semiótica), **generalizó** y consideró el contenido del gráfico como

representativo del comportamientode la función en todo el dominio de definición, conjeturand o –en consecuencia- que la función era no inyectiva.



En particular Ana Paula. Pero, a diferencia de Brenda, ella intenta realizar un control aunque no lo consigue. Para ello, a su conjetura establecida a través del gráfico, Ana Paula agrega un análisis incompleto de la fución (ella analiza cada rama (x<1 y x≥1) por separado). Busca una información en el contraejemplo provisto por el profesor (el (-6,2)), pero no lo consigue (“*es que si yo tuviera que hacerlo de nuevo lo haría igual de mal, porque antes lo hice analíticamente, lo verifiqué en el gráfico y me dio lo mismo, y encima hice tabla de valores y no puse el* (-6,2). *No entiendo qué hice mal*”) Ana Paula reconoce la necesidad de realizar un control sobre el proceso de resolución. Revisa su producción en diferentes registros (gráfico, algebraico, por tablas), pero encuentra dificultades.

Los ejemplos analizados tienen en común el hecho de que la tarea **no demandaba una generalización**, como es en el caso de las denominadas **tareas de generalización** (destinadas a encontrar patrones numéricos o geométricos, leyes numéricas, construcción de fórmulas, etc.). Sin embargo, los alumnos, al resolver o al justificar sus producciones realizan espontáneamente generalizaciones.

El conjunto de estas evidencias, junto con un análisis de la importancia de la generalización en el razonamiento humano y especialmente en la matemática, y de los problemas didácticos que le son asociados, dieron lugar a la necesidad de profundizar y sistematizar en las características de este fenómeno de emergencia de lo que denomino **generalizaciones espontáneas**.

¿Por qué es importante tener en cuenta este fenómeno en la clase de matemática?

Porque en la capacidad de generalizar reside gran parte del aprendizaje. Generalizando se construyen conocimientos (personales y científicos) (Garnham, A. Oakhill, J. 1996). Su emergencia en la clase de matemática es importantísima, tanto para el aprendizaje del álgebra como para el desarrollo de la racionalidad matemática.

Pero las conclusiones requieren validación. Esta necesidad -bien sabemos-, se adquiere muy a largo plazo, si alguna vez se adquiere. El medio algebraico no parece adecuado para devolverle información al alumno sobre sus resultados. Cuando se trata de generalizaciones espontáneas, que no están directamente relacionados con la tarea a resolver - como en los casos analizados-, es difícil que el profesor pueda anticiparlas y hacerlas evolucionar. Un mismo resultado puede provenir de diferentes procesos de generalización, como en el caso de María y Belén. ¿Cómo puede el profesor intervenir de manera apropiada?

Se trata entonces de algo que hay que hacer vivir en la clase de matemática, a la vez que los profesores necesitamos disponer de recursos de intervención apropiados.

Tipología de generalizaciones espontáneas

Hasta el momento hemos identificado una gran cantidad de generalizaciones espontáneas y encontramos útil considerarlas como de diferente tipo. De acuerdo con su origen (para un sujeto particular en una situación particular), una generalización espontánea puede ser:

a) **conceptual** (basada en el contenido al que refiere el enunciado), como es el caso de Belén si nuestra interpretación en términos de extensión de un esquema de conocimiento es adecuada ("es evidente, ¡el cuadrado de un número es siempre mayor que ese número! ");

b) **lógica (**basada en una comprensión inadecuada de conectores lógicos o reglas de razonamiento matemático), como es el caso de María, quien considera que una conjetura realizada mediante un procedimiento inductivo es **siempre** verdadera (" yo probé con varios ejemplos, 1,2,3,-1,-2,-3, entonces. . . . "').
c) **semiótica** (basada en el análisis del contenido de una repesentación semiótica, (Duval, 1995)), como es el caso de Ana Paula, quien considera el contenido del gráfico como representativo del comportamiento de la función en todo el dominio de definición.

No estamos pensando que se trate de una clasificación, en el sentido de que una generalización espontánea producida por un sujeto en una situación particular obedezca a uno de esos orígenes con exclusividad.Sí pensamos que esta tipología es interesante porque orienta en la identificación de elementos desencadenantes de generalizaciones espontáneas por parte de los alumnos, en la posibilidad de interpretarlas y de hacerlas evolucionar

Problemas de control

Dos aspectos parecen esenciales. Por un lado, se plantea el problema del reconocimiento de la **necesidad** de control de las conclusiones. Por otro lado-como acabamos de ver en la producción de Ana Paula- suponiendo que el sujeto dispone de esta capacidad, se plantea el problema de la **posibilidad** de realizar dicho control.

El problema de la necesidad de control

En relación al primer punto, pensamos que la percepción de la **necesidad** de control es diferente según se trate de una generalización espontánea o de una obtenida porque la tarea lo solicita. Efectivamente, cuando un sujeto *debe* realizar una generalización, una representación adecuada de la tarea incluye implícitamente la necesidad de control, es decir de adecuación de la conjetura a los datos. Por otra parte, como Radford (1996) señala, "las representaciones (en generalización) como símbolos matemáticos no son independientes del objetivo. Ellas requieren de una cierta anticipación del objetivo". Según nuestra interpretación, si bien esto no es garantía de un control adecuado, significa que en las **actividades de generalización** el control se da como proceso, durante la resolución misma, a través de las re-representaciones que se realizan sobre los datos en función del objetivo.

No es el caso de lo que ocurre con las **generalizaciones espontáneas**, que se realizan en el marco de una tarea por razones no directamente vinculadas con el objetivo de la misma. Los ejemplos de María, Belén, Brenda y Ana Paula son representativos de esta afirmación: las cuatro establecen una afirmación por medio de una generalización, sin poner en cuestión la conjetura. Ahora bien, frente a un contraejemplo provisto por el profesor, Ana Paula percibe esta necesidad, e intenta realizar un control acudiendo a otras representaciones (gráfica, algebraica, por tablas). Pero no lo consigue. Esto nos conduce al problema de la **posibilidad** de control.

La posibilidad de control dentro del ámbito de las escrituras algebraicas

En cuanto al otro aspecto, el de la **posibilidad** de realizarlo, pensamos que el control interno dentro de las escrituras algebraicas es un problema difícil, y que requiere de parte de los alumnos la articulación de diferentes tipos de competencia.

En el ámbito de las escrituras algebraicas, la retroacción no funciona de la misma manera que en el ámbito de las escrituras aritméticas o el de las figuras geométricas materiales.
En efecto, en el ámbito de las escrituras aritméticas, cuando los alumnos del nivel que estamos estudiando llegan mediante un razonamiento a una igualdad del tipo 2=3, esta escritura en sí misma les da una información que funciona como elemento de control.
De la misma manera, en el ámbito de las figuras geomètricas materiales, cuando ante el famoso problema de ampliación de un rompecabezas de Nadine y Guy Brousseau (1987) los alumnos hacen ampliaciones inadecuadas, el hecho de que las piezas resultantes no ajusten, constituye un elemento de control.
Algebra es bien diferente. Como Drouhard (1995) muestra, cuando los alumnos llegan a $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ellos creen que el profesor sólo "prefiere" otra regla, "por ejemplo" $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ("*Usted hizo una transformación, y yo hice otra. . .* ").
Estos ejemplos ilustran bien un problema general: que el ámbito de las escrituras algebraicas no ofrece los mismos elementos de retroalimentación y control.
Rojano (1994) establece una conclusión similar (citando a Freudenthal, 1983), al analizar las diferencias de retroalimentación de los errores en aritmética y en lenguaje natural -provistos por los contextos numéricos y de la comunicación cotidiana-, a diferencia de la retroalimentación en el dominio del álgebra.
Ahora bien, estas características del medio algebraico no determinan la conducta de control de un sujeto en un contexto particular. La posibilidad de ver en ellas una información que actúe como retroalimentación depende asimismo, de:

- si el sujeto dispone o no de medios para "observar" la verdad o la falsedad de las conclusiones;
- de sus posibilidades de entrar en contradicción (Balacheff, 1987);
- de su capacidad para tratar con diferentes tipos de enunciados (de existencia, particulares, generales);
- de la competencia lingüística sobre las letras (sintaxis y semántica) (ver Kirshner (1987); Lemoyne et al. (1993); Bosch (1994); Duval (1995); Drouhard et al. (1994); Durand Guerrier (1996); Panizza, Sadovsky y Sessa (1998));
- de su competencia conceptual y operatoria sobre números, variables, incógnitas y parámetros (ver Janvier, 1996).

Consideramos que una enseñanza que contemple el hecho de que estas competencias se desarrollan en paralelo y de manera interrelacionada, debe encontrar herramientas didácticas para ayudar a los alumnos a desarrollar medios de control dentro y fuera del registro interno de las escrituras algebraicas. En particular, adherimos al marco de referencia didáctico que provee Duval (1988, 1993, 1995), a través del trabajo de conversión entre diferentes registros semióticos, especialmente en cuanto a lo concerniente a las posibilidades de control.

Conclusión

Nuestro estudio muestra que los estudiantes que ingresan a la universidad realizan generalizaciones espontáneas sin haber adquirido conciencia de la necesidad de validación de sus conclusiones, ni habilidades de control. Los alumnos generalmente muestran verbalmente estas generalizaciones en contextos de explicación, prueba o descubrimiento, pero a menudo las generalizaciones espontáneas constituyen procesos no conscientes, o aún conscientes pero no explícitos. Desde nuestro punto de vista, esto sugiere la necesidad de un enfoque pedagógico desde el comienzo de la escolaridad secundaria que considere las intervenciones docentes frente a las generalizaciones espontáneas, de manera de ayudar a los alumnos a evolucionar hacia modos pertinentes de razonamiento matemático. Especialmente, este enfoque debería dirigirse a considerar las dificultades y posibilidades ofrecidas por las diferentes vías de entrada al álgebra, y al desarrollo de medios de control por parte de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1987): Processus de preuve et situations de validation; *Educational Studies in* Mathematics, **18**.

Balacheff, N. (1991): Treatment of refutations: aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematic learning, in E. Von. Glassersfeld, *Radical constructivism in Mathematical education* (pp. 89-110).

Bernardz, N., Kieran, C., Lee L. (Eds) (1996): *Approaches to algebra*, Kluwer Ac. Publ., Dordrecht.

Bosch I Casabò, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática*. Doctoral dissertation, Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Brousseau, N., Brousseau, G. (1987): *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* IREM de Bordeaux.

Kirshner, D. (1987): *Linguistic analysis of symbolic elementary algebra*, Unpublished Doctoral Dissertation. Vancouver, BC: University of British Columbia.

Drouhard, J-Ph., Léonard, F., Maurel, M., Pécal, M. & Sackur, C. (1994): 'Blind Calculators', 'Denotation' of Algebra Symbolic Expressions, and 'Write False' Interviews, in Kirshner D. (dir.). *Proceedings of PME-NA 16*. Baton Rouge: Louisiana State University.

Drouhard, J-Ph. (1995): Blind Calculators in Algebra: 'So What?' Attitude, in E. Cohors-Fresenborg (Ed.), *Proceedings of ERCME 95*. Osnabrück: University of Osnabrück.

Durand Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique: Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. These de Doctorat, (pp. 237-280), Université Claude Bernard, Lyon I.

Duval, R. (1988): Graphiques et Equations, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **1**, (pp. 235-253).

Duval, R. (1993): Registres de représentation semiotique et functionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, (pp. 37-65).

Duval, R. (1995): *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotics et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Bern.

Garnham, A., Oakhill, J. (1996) : Manual de psicología del pensamiento, Paidós

Janvier, C. (1996): Modeling and the initiation into Algebra, in Bednarz et al (eds), *Approaches to Algebra*, (pp. 225-236), Kluwer, Dordrecht :.

Lemoyne, G., Conne, F., Brun, J. (1993): Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales: une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **13**-3.

Mason, J. (1996): Expresing generality and roots of algebra, in Bednarz et al (eds), *Approaches to Algebra*, (pp. 65-86), Kluwer, Dordrecht :.

Panizza, M., Sadovsky, P., Sessa, C. (1998): La ecuación lineal con dos variables : entre la unicidad y el infinito, *Enseñanza de las Ciencias*, (pp. 453-461), Universidad de Barcelona.

Radford, L. (1996): Some reflections on teahing algebra trough generalization, in Bednarz et (eds), *Approaches to Algebra*, (pp. 107-113), Kluwer, Dordrecht :.

Rojano, T. (1994): La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza**,** *Enseñanza de las Ciencias*, Universidad de Barcelona, (pp. 45-56).

Los primeros pasos hacia el lenguaje algebraico

Silvina Cafferata Ferri, María del Carmen Catoira
Universidad Tecnológica Nacional. Instituto del Profesorado del Consudec. Inst. Bayard.
Buenos Aires. Argentina
scafferata@overnet.com.ar

"El proceso de simbolización es el camino que se sigue para incorporar el uso de símbolos algebraicos a las situaciones en que resultan necesarios: expresiones de reglas, escritura de fórmulas, resolución de problemas, interpretación de expresiones, comprobaciones, etc." (Grupo Azarquiel, 1993, p. 59). Este tema ha sido objeto de variadas investigaciones que coinciden en aseverar que los estudiantes tienden a recurrir a la memorización de reglas y procedimientos, asociando este proceso a la esencia del álgebra; piensan que está basada en reglas y consideran que su aprendizaje es esencialmente memorístico.

¿Qué es lo que lleva a los alumnos a estas creencias? Hasta el momento en que se introduce el lenguaje algebraico, lo relacionado con el conocimiento matemático les aparece vinculado con el lenguaje ordinario o coloquial. Sin embargo, llega una etapa del aprendizaje matemático en la que éste debería resultarles insuficiente al punto de ser necesario un lenguaje propio, más preciso, sometido a reglas exactas, que evite las confusiones que pueden provocar algunas ambigüedades del lenguaje cotidiano. Pero, ¿es así como los docentes acercan a los alumnos al lenguaje algebraico?

Uno de los caminos posibles para que los alumnos puedan comenzar a trabajar con el álgebra es la resolución de situaciones en las que, a partir de lo que se percibe, se logra expresar una formulación general. El contexto numérico parece ser uno de los que más favorecen este proceso, en tanto se hace necesario expresar las relaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos más allá de hacerlo entre cantidades específicas. "Este proceso de generalización de las matemáticas es una característica esencial de la misma y es parte inherente de su lenguaje simbólico, que difiere sustancialmente del lenguaje ordinario" (Socas Robayna y otros, 1989, p. 19)

Cuando los alumnos comienzan el estudio de las expresiones algebraicas se ven obligados a no seguir interpretándolas como operaciones aritméticas sobre algún número sino que deben aprender muy rápidamente a considerarlas como objetos en sí mismos, con los cuales se realizan operaciones de distinto nivel de dificultad. Pero ¿se detuvo el docente a pensar en algún momento acerca de sus expectativas sobre el tema y el tiempo que dedicará a su tratamiento? Transcurrieron siglos en el campo del álgebra para que estos desarrollos se produjeran. No obstante, esperamos que en el aula los estudiantes los realicen casi en forma inmediata.

¿Qué suelen entender por Álgebra los alumnos del actual 3º ciclo de la EGB?

La posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder usarlos de forma sencilla es, precisamente, lo que hace que el álgebra sea de gran utilidad, pero sin embargo, los alumnos no siempre llegan a comprender y aprovechar la ventaja que supone la utilización de símbolos porque desconocen su relación con lo que denotan.

Algunos de ellos creen que sólo se trata de aprender ciertas reglas o procedimientos que permiten resolver todo tipo de ejercicios que puedan presentarse. De hecho, consideran que el álgebra es “la parte de las matemáticas que tiene como objetivo resolver ecuaciones” o “la parte de las matemáticas que se encarga de encontrar números desconocidos mediante la resolución de ecuaciones” (Grupo Azarquiel, 1993, p. 89)

Muchos otros consideran que, a partir de la introducción del lenguaje simbólico, sólo se logra incrementar el nivel de dificultad de ejercicios que podrían resultar más sencillos. Y remarcan entonces, una vez más, que sólo es “para unos pocos” (los que logran, al menos, operar con estas nuevas estructuras y resolver las actividades que se les plantean).

Langford (1990) presenta un informe sobre las interacciones entre los métodos de enseñanza del álgebra y la capacidad intelectual, realizado por Young y Becker, quienes descubrieron que los estudiantes de gran capacidad aprovechaban mejor un método de enseñanza “figurativa” que traducía los problemas a términos gráficos, mientras que los alumnos de menor capacidad aprovechaban mejor la enseñanza sobre la base de manipulaciones puramente simbólicas. Si bien todos los estudiantes tienen que saber traducir los problemas a términos simbólicos, resulta preocupante que la manipulación de los símbolos se pueda llegar a dominar más fácilmente porque sólo requerimos una serie de procedimientos mecánicos, carentes de significado.

¿Qué se está presentando a los alumnos bajo el rótulo de álgebra?, ¿cómo se les presenta la necesidad de un lenguaje simbólico en determinadas situaciones?, ¿acceden todos a este proceso de simbolización?, ¿cuáles son las concepciones tomadas en cuenta al enseñar de una determinada forma los contenidos considerados?, ¿cuáles son las concepciones posibles, con los alumnos de un determinado nivel de enseñanza, en relación con los niveles precedentes y siguientes?

Algunas consideraciones acerca del uso de las letras

Cuando se escucha a los alumnos hablar sobre la utilización de letras, es común oírles decir frases como: *“...cuando a un número no lo conozco, lo llamo x”*, *“...como esto se cumple en todos los casos, lo escribimos con letras”*. En muchas oportunidades, estas frases se transforman, a los ojos de algunos docentes, como indicios de que los alumnos comprenden el significado del lenguaje algebraico y casi suficientes para que reconozcan la necesidad o la conveniencia de la utilidad de dicho lenguaje. Una considerable cantidad de problemas que *pueden* resolverse a través de ecuaciones o inecuaciones, parecen ser el final de obra para este proceso.

La experiencia en el aula muestra que esto no es suficiente dado que no se tomaría en cuenta una serie de reflexiones que se suponen aptas para que los alumnos hagan por sí mismos. Por ejemplo: la *igualdad*. La que los alumnos definen hasta el momento en que se comienza a trabajar el lenguaje algebraico, es aritmética y, por lo tanto, sinónimo de resultado numérico o de secuencia de pasos intermedios para la obtención de un resultado numérico. Este sentido del signo "=" se mantiene en álgebra cuando se trabajan tautologías, pero no en las ecuaciones en donde no expresa una conexión de equivalentes sino un condicionamiento para la incógnita.

Aún más consideraciones presenta la *utilización y significación de las letras*: *letras evaluadas* (letras desconocidas pero evaluables que pueden ser reemplazadas por un número a la espera de obtener un valor numérico); *letras ignoradas* (letras de las que no se espera un resultado numérico para ellas); letras trabajadas como *objetos*; letras como *generalización de números*; en el contexto funcional, la letra como *variable* que representa un conjunto de valores no especificados.

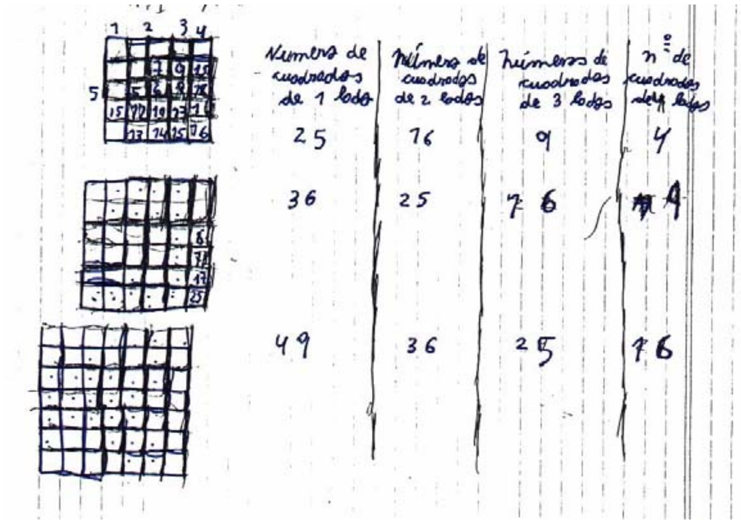
Es necesario que los docentes tengan presente estas opciones para que, al trabajar con los alumnos, puedan disponer de los recursos didácticos necesarios para detectar cuáles de los aspectos le resultan más complicados de elaborar y además considerar en la planificación que el trabajo en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del lenguaje algebraico necesitan un espacio propio.

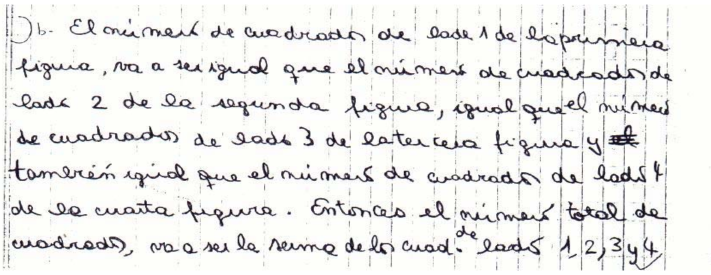
El trabajo realizado con alumnos de Enseñanza Media

Para el diseño del proyecto que se desarrolló con estudiantes del profesorado de Matemática -tal como se comentará oportunamente en las próximas páginas- se consideraron el análisis y las conclusiones que se obtuvieron de la investigación *"Cuando los números no alcanzan"* (Cafferata Ferri - Catoira, 2000) realizada con alumnos entre 13 y 15 años de escuelas secundarias. Entre las múltiples opciones con que se cuenta para introducir en el lenguaje algebraico a los estudiantes, en esa propuesta se eligió plantearles la necesidad de su uso: el objetivo es que lo interpreten como una forma más clara y simplificada de calcular y escribir, por ejemplo, determinadas relaciones.

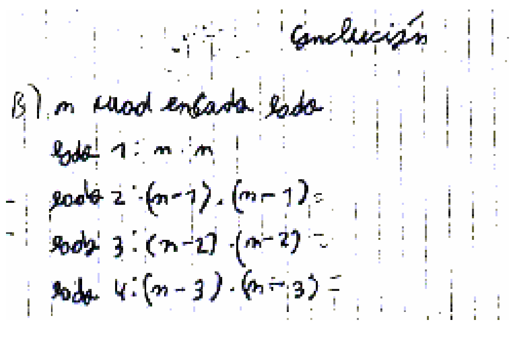
En dicho trabajo, se comenzó con algunas actividades que apelaban a la revisión de saberes previos de los alumnos y cimientaban el trabajo en el aula en función de esto; por ello se plantearon las primeras actividades haciendo hincapié en otros lenguajes que ellos ya conocen y que manejan a diario, además del que utilizan para hablar y escribir, debatiendo con los estudiantes por qué creen que la matemática requiere su lenguaje y qué tipo de símbolos utilizará, del mismo modo que cada uno de los lenguajes conocidos cuentan con los propios. Los símbolos: ¿son una ayuda para comprender mejor el problema, para escribirlo en forma más clara o simplificada?

Para dar respuesta a la pregunta, se presentaron algunos problemas que podían resolverse a través de estrategias ya conocidas, incluso sin necesitar el lenguaje simbólico, y que no descartan el ensayo y error. A medida que se avanzó en la resolución de este tipo de actividades, los alumnos podían notar la existencia de esquemas provenientes de realizar las mismas operaciones. Ellos mismos podían apreciar la conveniencia de encontrar una fórmula general que les permitiera responder sin tener que repetir todo el razonamiento elaborado para los casos anteriores.




b- El número de cuadrados de lado 1 de la primera figura, va a ser igual que el número de cuadrados de lado 2 de la segunda figura, igual que el número de cuadrados de lado 3 de la tercera figura y también igual que el número de cuadrados de lado 4 de la cuarta figura. Entonces el número total de cuadrados, va a ser la suma de los cuad. de lados 1, 2, 3 y 4

Podía, sin embargo, no plantearse esta inquietud en primera instancia y para ello, se colocaron datos dentro del problema que dificultaron responder sólo utilizando ensayos sucesivos. Las actividades siguientes propusieron, ya en forma explícita, la necesidad de una fórmula general que permitiera resolver el problema, si antes no había sido visto como una conveniencia. Para auxiliar la dificultad que presenta la obtención de una fórmula se propusieron actividades intermedias en las que, en una primera instancia, se avanzara desde el contexto gráfico y, en segunda instancia, se relacionaran esquemas proposicionales con enunciados coloquiales.


Conclusión

B) n cuad en cada lado

lado 1: $n \cdot n$

lado 2: $(n-1) \cdot (n-1) =$

lado 3: $(n-2) \cdot (n-2) =$

lado 4: $(n-3) \cdot (n-3) =$

Los últimos ítems de la secuencia diseñada correspondieron a problemas lo suficientemente abiertos como para permitir estrategias de resolución diversas que requerían la búsqueda de relaciones y la correspondiente fundamentación

Pudieron recurrir, por ejemplo, al uso de algunos casos particulares para realizar algunas conjeturas y captar mejor el significado del problema. Nuevas y cuidadosas particularizaciones, con la vista puesta más bien en el “por qué” que en el “qué” condujeron a una intuición más clara de lo que buscaban. Elegir ejemplos al azar puede ser una buena manera de hacerse idea del significado de un problema, así como de ver si cierta afirmación o conjetura tiene visos de ser verdad. Particularizar da una idea de lo que está pasando; el detectar alguna ley oculta (generalización) y formularla en palabras da lugar a una conjetura que puede ser examinada, cuestionada y modificada. Explicar el “por qué” significa hacerse una idea de alguna razón subyacente que justifique la veracidad de una conjetura.

Estas últimas actividades se implementaron para concebir la necesidad de un lenguaje simbólico que resulta imprescindible al expresar las respuestas.

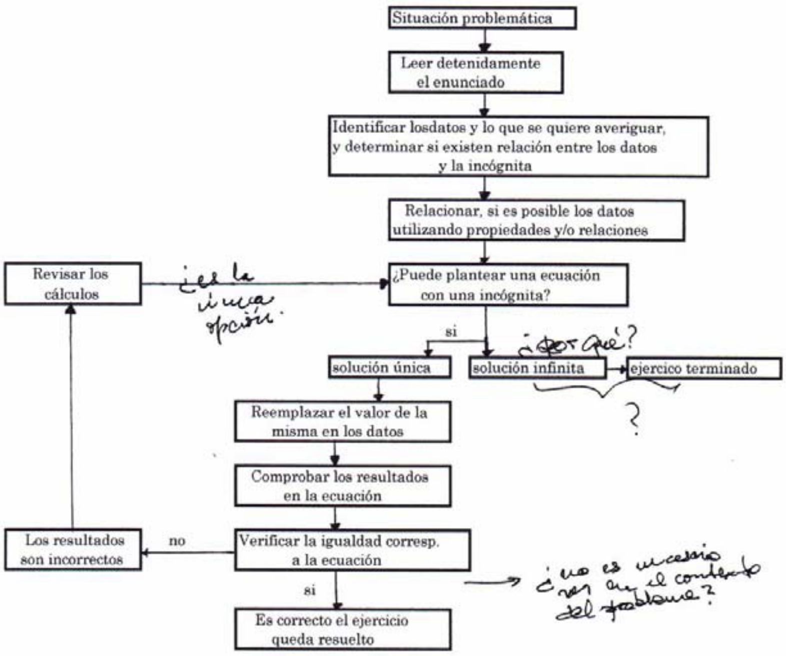
El trabajo realizado con los futuros docentes

A partir de las conclusiones del trabajo con los alumnos de escuela media, se realizó un nuevo proyecto desarrollado en forma conjunta con docentes del área de Diseño Curricular, destinado a alumnos de un profesorado de Matemática. Para implementarlo se llevó a cabo un taller en el que se analizó junto a los futuros docentes: las posibles maneras de abordar el proceso de simbolización y la introducción al lenguaje algebraico, los errores más frecuentes por parte de los estudiantes, las situaciones que ponen de manifiesto la insuficiencia de la aritmética, la necesidad de representar relaciones que requieran el uso de variables e incógnitas, las secuencias de actividades que se correspondan con esas situaciones, el diseño de mapas conceptuales y diagramas de proceso, etc.

Una primera etapa del trabajo se basó en la reflexión didáctica acerca de la guía de trabajo diseñada e implementada con los alumnos de escuela media. A partir de estas conclusiones y comentarios se inició una nueva etapa en la cual los futuros docentes eligieron un contenido correspondiente al nivel educativo en el que ejercerán, para introducir el lenguaje algebraico desde algunas de las perspectivas analizadas. Presentaron propuestas con secuencias de actividades para abordar, asimilar y ejercitar los contenidos de la unidad temática elegida (analizándola y justificándola didácticamente), el mapa conceptual y el diagrama de proceso correspondiente a un contenido procedimental trabajado a partir de la guía propuesta.

El objetivo del trabajo apuntó a reflexionar con los alumnos del profesorado acerca de las respuestas a los siguientes interrogantes: ¿qué es lo que lleva a los estudiantes a memorizar las reglas del álgebra?, ¿qué es lo que hace que su comprensión no sea una tarea fácil?, ¿es su contenido la fuente de conflictos o es la forma en que se enseña?

Durante el desarrollo del mencionado trabajo con estudiantes de profesorado de matemática se registraron cuestiones como por ejemplo: a) existe una dificultad en distinguir entre conceptos y procedimientos; así, un sistema de ecuaciones “es” una sustitución o una igualación; b) como consecuencia de la observación anterior, sólo ocasionalmente incluían la expresión del conjunto solución; c) existe un preconcepto de que toda igualdad con números y letras es una ecuación; en general, no hay un reconocimiento de las identidades ni de las contradicciones, con lo cual, tampoco se identifican sistemas indeterminados ni incompatibles; d) como consecuencia de la observación anterior, dentro del contexto de la resolución de problemas, los alumnos asocian la ausencia de solución a un error en el proceso de dicha resolución.



A partir de las actividades realizadas con alumnos en distintos niveles de formación, consideramos que resulta necesario que, tanto docentes en ejercicio como estudiantes de profesorado, reflexionen sobre las preguntas que nos propusimos al comienzo del presente trabajo, para que el Álgebra deje de ser -como confirmó la Dra. Rosa María Farfán en su Conferencia Plenaria *"Matemática Educativa: de la investigación a la realidad del aula"*- la mayor causa de expulsión del sistema medio educativo de nuestra América Latina.

Referencias bibliográficas

Bajoz, J. (1996): *Sobre la resolución de problemas y juegos*. Madrid: Narcea.
Cafferata Ferri, S.; Catoira, M. (2000): *Cuando los números no alcanzan*. Revista Educación en Ciencias. UNSAM. Aprobado para su publicación.
Etxegarai Agara, F.; Lopez Sierra, G. (1991): *Resolución de problemas: listado y ejemplificación de estrategias*. Revista Sigma Nº10.
Grupo Azarquiel (1993): *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis.
LANGFORD, P. (1990): *El desarrollo del pensamiento conceptual en la escuela secundaria*. Madrid, Paidós.
Medaura, J. (1994): *Una didáctica para un profesor diferente*. Buenos Aires: Hvmanitas.
Mialaret, G. (1986): *Las matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Madrid: Aprendizaje Visor.
Novak, J. (1991): *Ayudar a los alumnos a aprender cómo aprender*. Enseñanza de las Ciencias Nº9.
Socas Robayna y otros (1989): *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes•

Rosa María Farfán*, Gustavo Martínez**
* Cinvestav-IPN., México, **CICATA-IPN, México
rfarfan@mail.cinvestav.mx gustavomtzs@yahoo.com.mx

Resumen
El presente documento esta basado en las investigaciones reportadas en (Martínez, 2000) y en algunos de sus desarrollos posteriores (Martínez, 2002). En ellas nos hemos interesado en las interacciones didácticas de objetos matemáticos a los que hemos llamado *convenciones matemáticas*; centrando nuestra atención en las que están presentes en el tratamiento de los exponentes. Nuestro interés por esta forma de conocimiento es doble. En primer lugar tenemos evidencia de que sus características, hasta donde sabemos, no han sido estudiadas en las investigaciones en Matemática Educativa y en segundo por que tenemos evidencia de que las concepciones relacionadas a estos convencionalismos no permiten la construcción de conocimiento. Ambos intereses nos inducen a desarrollar una investigación, de corte sistémico, para caracterizar a las convenciones matemáticas en tanto su funcionamiento dentro del sistema didáctico.

Introducción

El presente documento esta basado en las investigaciones reportadas en (Martínez, 2000) y en algunos de sus desarrollos posteriores (Martínez, 2002). En ellas nos hemos interesado en las interacciones didácticas de objetos matemáticos a los que hemos llamado *convenciones matemáticas*; centrando nuestra atención en las que están presentes en el tratamiento de los exponentes. Nuestro interés por esta forma de conocimiento es doble. En primer lugar tenemos evidencia de que sus características, hasta donde sabemos, no han sido estudiadas en las investigaciones en Matemática Educativa y en segundo por que tenemos evidencia de que las concepciones relacionadas a estos convencionalismos no permiten la construcción de conocimiento. Ambos intereses nos inducen a desarrollar una investigación, de corte sistémico, para caracterizar a las convenciones matemáticas en tanto su funcionamiento dentro del sistema didáctico.

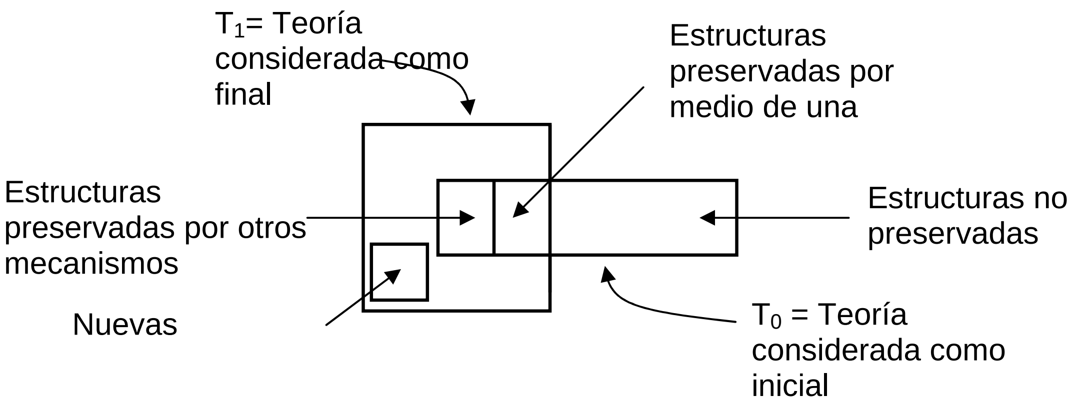
En términos teóricos consideramos que los resultados que hemos obtenido señalan el interés potencial que posee el tomar a las convenciones matemáticas como un elemento explícito para el análisis didáctico y epistemológico. En este sentido consideramos como una contribución de la presente investigación el sugerir una ampliación de la explicación teórica que nos proporciona la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) en cuanto a los modos de funcionamiento del conocimiento matemático y a los status, en clase, que tales conocimientos poseen en el discurso didáctico de acuerdo a la Teoría de la Transposición Didáctica.

Sobre las convenciones matemáticas

Una convención matemática es un agregado (bajo la forma de una definición, un concepto, una restricción, entre otras) a una teoría, establecida con el objetivo de que una *estructura,* o parte de ella, de objetos matemáticos construida con anterioridad se conserve. Este agregado puede surgir por diversos requerimientos; por ejemplo de generalización, unidad o para evitar contradicciones dentro de la teoría.

• Esta investigación forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado. Estudio sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.

De lo anterior se desprende que el análisis epistemológico de una convención matemática puede ser realizada caracterizando la *evolución* de una teoría considerada como inicial T_0



hacia una teoría considerada como final T_1. Como T_1 se considera heredera de cierta *estructura* de T_0 podemos considerar convenciones matemáticas son los agregados en T_1 para que dicha estructura se conserve. La elección del tipo de *estructura* que debe conservarse depende de los objetivos específicos que pretenda alcanzar T_1.
Actualmente, en nuestro ejemplo, el concepto de exponente natural mayor a uno es presentada como una *definición* (mediante una igualdad) para organizar la acción de multiplicar de manera reiterada una misma cantidad atendiendo requerimientos de economía en la escritura en la sintaxis aritmética y algebraica. En términos matemáticos esta definición provoca la existencia de el objeto matemático llamado *potencia* que surge de la interacción de los objetos base y exponente. La definición anterior de *potencia* genera de manera deductiva la estructura operativa siguiente (designadas comúnmente como *leyes de los exponentes*):

- $A^n A^m = A^{n+m}$,
- $A^n / A^m = A^{n-m}$ con $n > m + 1$, $A \neq 0$
- $(A^n)^m = A^{nm}$

Posteriormente se definen los exponentes no naturales con el objetivo de conservar la estructura operativa anterior, mediante diversos argumentos:

		Argumentos		
		$A^n A^m = A^{n+m}$	$A^n / A^m = A^{n-m}$	$(A^n)^m = A^{nm}$
EXPONENTe	**Cero**	$A^0 A^2 = A^2 \Rightarrow A^0 = 1$	$1 = A^4 / A^4 = A^{4-4} = A^0 \Rightarrow A^0 = 1$	**No hay argumentos**
	Negativo	$A^{1/2} A^{1/2} = A^{1/2+1/2} = A^1 = A \Rightarrow (A^{1/2})^2 = A \Rightarrow \sqrt{A} = A^{1/2}$	$1/A^2 = A^4 / A^6 = A^{4-6} = A^{-2} \Rightarrow 1/A^2 = A^{-2}$	**No hay argumentos**
	Fraccionario	$A^{-2a2} = A^{-2+2} = A^0 = 1 \Rightarrow A^{-2} = 1/A^2$	**No hay argumentos**	$(A^{1/2})^2 = A^1 = A \Rightarrow \sqrt{A} = A^{1/2}$

Trabajo semejante hemos hecho para determinar las características epistemológicas de otras formulaciones de los exponentes que se han hecho a lo largo del devenir histórico. Para ello se puede consultar (Martínez, 2000 y 2002).

Los fenómenos y el Marco Teórico

Hemos detectado respuestas de estudiantes de diferentes niveles escolares que nos dan motivos para darles el status de fenómenos didácticos. De entre estas respuestas destacamos:

- $2^0 = 0$ o $2^0 = 2$
- $2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$ o $2^{-3}=-8$ ya que $2^3=8$ y se le coloca el signo
- $2^{-3} = .002$ y $2^{-3/2} = 2(-3/2) = -3$
- La ausencia de argumentos, entre estudiantes de nivel secundario, medio y superior, distintos a la memoria, como 'leyes', para establecer que: $2^0 =1$, $2^{-3}=1/2^3$, $2^{1/2}=\sqrt{2}$,...

Tales fenómenos, en este caso concepciones de los estudiantes, dan evidencia de algunos obstáculos presentes en la construcción de las convenciones presentes en el tratamiento de los exponentes no naturales, obstáculos no considerados en la enseñanza tradicional, como por ejemplo en la construcción de la noción de función exponencial. Debido a esto hemos asumido la tarea de dar una explicación, desde una perspectiva sistémica, de los fenómenos anteriores. La búsqueda de tal explicación nos ha llevado a establecer preguntas de investigación relativas al sistema didáctico: ¿Cuáles fueron los mecanismos que permitieron la construcción y la aceptación social de la noción de exponente no natural?, ¿Cuál fue la relación de la noción de exponente no natural con la noción de función exponencial en la construcción social de ambas nociones? y ¿Cuál es la vida escolar de los exponentes no naturales?

Entre los supuestos teóricos de esta investigación asumimos como objeto de estudio primario al sistema didáctico (estudiantes, saber y profesor-institución) y a los fenómenos que en él suceden. Los referentes teóricos que hemos tomado para encontrar algunas respuestas a estas preguntas son la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1997) y la Epistemología según la entiende la perspectiva constructivista. La metodología que utilizamos consiste en un análisis didáctico y epistemológico de la noción del exponente no natural. En este escrito reportamos únicamente algunas de las explicaciones que hemos elaborado de las concepciones mencionadas con anterioridad.

Elementos para una explicación sistémica de los fenómenos

En las explicaciones de corte sistémico que a continuación presentamos seguiremos, de manera general, el esquema siguiente: 1) Una explicación centrada en el profesor, 2) Una explicación centrada en los alumnos y 3) Una explicación centrada en el saber (enseñado). Y para cumplir nuestro programa sistémico todas éstas serán hechas atendiendo sus relaciones.

A la luz de la evidencia que hemos acumulado nuestro análisis epistemológico nos revela que el concepto de exponente no natural fue construida mediante consideraciones metamatemáticas (Farfán & Martínez, 2001) y nuestro análisis didáctico nos proporciona evidencia que algunos profesores y libros de texto consideran que es un objeto matemático *deducible* (es decir mediante inferencias lógicas); lo que explica, en parte, las respuestas coherentes de los estudiantes.

1 Clasificación de fenómenos encontrados

A la luz de las respuestas de los estudiantes determinamos las siguientes categorías con el fin de elaborar nuestras explicaciones:

- *Persistencia de operaciones simples* que consisten en las respuestas que recurren a la suma, resta, multiplicación o división entre la base y el exponente para establecer valores de la expresión 2^x.
- *Persistencia del modelo de multiplicación reiterada* que consisten en las respuestas que recurren a la interpretación de multiplicación reiterada para establecer valores de la expresión 2^x. Es decir que recurran al modelo $2^x=2*2*2(x$ veces).
- *Ausencia de argumentos para establecer las igualdades correctas.*
- *Evolución hacia respuestas correctas.*
- *El cero como representación de la nada.*
- *Deslizamiento de la memoria* a aquellas respuestas que son ocasionadas por recordar equivocadamente las convenciones relativas a los exponentes no negativos.

En este reporte solamente nos centraremos en la primera categoría. Para ver las otras explicaciones se puede consultar las investigaciones ya citadas.

2. Persistencia de operaciones simples

Tomando en cuenta que la categoría de *persistencia de operaciones simples* la hemos encontrado en los distintos niveles escolares, esta sección se divide en tres apartados que sucesivamente consideran las respuestas que ofrecen los estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad.

2.1. En estudiantes de secundaria

La primera vez que la noción de exponente, restringido a los números naturales, es enseñado en un segundo curso de matemáticas de la escuela secundaria (alumnos de 13 años) o quizá antes, en un primer curso (alumnos de 12 años). Esta introducción a la noción se ofrece en el marco temático de la aritmética y aún no han tenido contacto con le álgebra.

En cuanto al saber observamos que aquí ha operado una transposición didáctica en el sentido clásico del término: los profesores (la institución) saben que el exponente no siempre va a significar multiplicación ‘tantas veces como éste lo indica’. Esta situación no es explícita por el sistema de enseñanza (cabe señalar que no sugerimos que tendría que hacerse tal explicitación).

En este contexto se justifica su enseñanza como una economía en la escritura y los estudiantes han visto resolver en clase y hecho ejercicios del tipo: $2^4 = ?$ en donde rige el contrato didáctico[2] propio de la estructura clase/ejercicio. En cuanto a la noción de igualdad existe un cláusula del contrato que establece que el signo de igualdad indica que

[2] Es un conjunto de comportamientos (bajo la forma de cláusulas implícitas específicas a un conocimiento matemático) del alumno esperados por el docente y un conjunto de comportamientos del docente esperados por el alumno y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones docente-alumno-saber, definiendo así los roles de cada uno y la repartición de las tareas: ¿quién puede hacer qué?, ¿quién debe hacer qué?, ¿cuáles son los fines y los objetivos?...

se pueden realizar operaciones para llegar a “algo”. En este escenario nos encontramos con respuestas del tipo: $2^4 = 8$ (ya que 2*4 = 8) o $2^3 = 6$ (ya que 2*3 = 6)

En términos de los estudiantes, la primer tarea que se les presenta es distinguir la semántica del símbolo 2^4 , deben distinguir que este símbolo no representa una operación aritmética “simple” (suma, resta, división o multiplicación) sino un conjunto de operaciones de multiplicación ‘tantas veces como lo indica el exponente’.

En términos del profesor, diremos que una de las cláusulas del contrato didáctico entra en funcionamiento, ésta asegura que, cuando un profesor plantea un problema a sus alumnos, el problema está bien planteado y, en un principio, el alumno dispone de los elementos necesarios para resolverlo. En nuestro caso, los alumnos, al asumir esta cláusula del contrato didáctico suponen, que como siempre, la solución del problema resultará de alguna de las operaciones aritméticas simples, por lo tanto, intentarán: sumar, multiplicar, restar o dividir los números que están presentes en la expresión, pero, como hemos señalado, el concepto ha sido presentado como cierto número de multiplicaciones, como consecuencia de esto los estudiantes eligen la multiplicación para dar una respuesta.

Existen respuestas en donde utilizan otras operaciones aritméticas simples (por ejemplo: 2^{-3}=2-3) pero el contexto en que fue aplicado el estudio (un examen diagnóstico con calificación) nos sugiere que estas respuestas se producen por el funcionamiento del contrato escolar: ante un examen siempre hay que responder.

Ante estas respuestas de los estudiantes, el único recurso para el profesor es hacer énfasis en la definición de la noción de exponente como multiplicación reiterada, lo que ocasionaría la aparición del tipo de respuestas consideradas en la categoría de *persistencia del modelo de multiplicación reiterada*.

2.2 En estudiantes de bachillerato

Asumamos que en la educación media (15 a 18 años) la noción de exponente no natural es manejada principalmente en el contexto algebraico, de manera típica, como mostramos a continuación (*n* es un natural y *a* distinto de cero): $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ y $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Estas definiciones son practicadas a través de ejercicios (sobre todo en transformaciones de expresiones algebraicas) que son resueltos en clase o bien son dejados como actividad complementaria. Debido a las dificultades de esta sintaxis algebraica, para estudiantes al aprenderlas y para profesores al enseñarlas, el sistema didáctico evoluciona hacia la solución de tales dificultades mediante un proceso de algoritmización (en el sentido de la utilización repetitiva de una o varias de las igualdades anteriores). En este escenario también nos encontramos con el tipo de respuestas consideradas en la categoría de *persistencia de operaciones simples*: $2^{-3/2}$ = 2(-3/2), $2^{1/2}$ = 2(1/2), 2^0 = 2*0 o 2^1=2*1.

Hemos señalado que estas respuestas se presentan junto a otras más evolucionadas (en el sentido de los efectos de su presentación ante los alumnos) que utilizan el modelo de *multiplicación reiterada* (por ejemplo: 2^{-3} =(-2)(-2)(-2)). Además estos estudiantes ya habían estudiado la noción de exponente no natural y nuestro análisis didáctico nos muestra que esta noción es tratada en el contexto algebraico (los ejemplos “numéricos” no son manejados realmente).

En términos del profesor, diremos que entra en funcionamiento la cláusula del contrato didáctico que asegura que cuando un profesor plantea un problema el alumno dispone de los elementos necesarios para resolverlo; además, el contrato ha evolucionado al registrar

el «envejecimiento» de los contenidos. En otras palabras, los estudiantes saben que todas las expresiones tienen un valor, que además ya les ha sido enseñada.
Los estudiantes han evolucionado en su manejo de la “potenciación” (ya no utilizan operaciones simples para establecer un valor como 2^{-3}); sin embargo, ante la imposibilidad de utilizar este conocimiento con los números fraccionarios se ven en la necesidad de buscar otro modelo, el cual consiste en interpretar a la potenciación como una multiplicación, la cual forma parte de su universo de operaciones con números.
En términos de los saberes agregamos que el universo de operaciones está determinado por las prácticas en el salón de clase: solución de ecuaciones de primero y segundo grado, operaciones con polinomios, evaluación y graficación de algunos polinomios, etc. Estas operaciones son esencialmente suma, resta, multiplicación y división y esto ocasiona que los estudiantes interpreten a la expresión 2^x en términos de operaciones simples cuando les es imposible interpretarlo con el modelo de multiplicación reiterada (en cierto sentido es la única operación que pueden hacer con los números ya que su escritura al parecer no les sugiere otra operación). Además, la ausencia de prácticas en el contexto gráfico y numérico impiden otra interpretación en los estudiantes (quizá, por ejemplo, el contexto gráfico les motivaría a reconsiderar sus afirmaciones, por ejemplo que $2^{-3/2}=2(-3/2)$ al notar que están evaluando $2x$ en los números fraccionarios).

2.3. En estudiantes de universidad

Entre estudiantes universitarios hemos encontrado que aún persiste el argumento: $2^0 = 0$ ya que $2*0 = 0$.
En la educación superior, o quizá antes dependiendo de los programas de estudio, el sistema didáctico ha evolucionado de tal manera que el profesor asume que los estudiantes ya pueden interpretar el significado (en términos de igualdades correctas) de los exponentes no naturales. Ahora el contrato didáctico relega toda la responsabilidad a los estudiantes si éstos no son capaces de ello, aún cuando el profesor esté dispuesto a recordarlas rápidamente (como reglas, pues no se detendrá en explicaciones más detalladas). Esta evolución ha sido ocasionada por las prácticas escolares, que han puesto en funcionamiento, quizá de manera parcial, a dicha noción: en distintas transformaciones algebraicas, en la noción de función exponencial y logaritmo y el cálculo de derivadas y primitivas de funciones de la forma $f(x)^{n/m}$.
En cuanto a los estudiantes, podemos considerar que son capaces de recordar las “leyes de los exponentes” con más precisión. Ciertas *ocasiones de uso* les han permitido tener más presente el significado de los exponentes no naturales (en el sentido de poder proporcionar respuestas correctas). Como hemos señalado esas ocasiones de uso pueden incluir, por ejemplo, el cálculo de primitivas y derivadas de funciones de la forma $f(x)^{n/m}$. Los estudiantes que escriben igualdades correctas han recurrido a su memoria para hacerlo o preguntando al profesor. Las *ocasiones de uso* les permiten descifrar que cuando el exponente no es natural éste está regido por ciertas reglas o leyes que hay que recordar (cabe mencionar que la *evolución hacia respuestas* correctas no está dentro del marco de argumentos que las justifiquen) por lo que no intentarán establecer argumentos “lógicos” (a través, por ejemplo, del modelo de multiplicación reiterada o de operaciones simples) para deducir su valor. En cambio, otros estudiantes, ya sea por la ausencia de ocasiones de uso en su experiencia escolar o por el poco hincapié con que las han manejado, no descifran que el exponente no natural se encuentra regido (en nuestro modelo de la vida escolar de la noción) por reglas o leyes; esto ocasiona que ellos busquen argumentos “lógicos” para

establecer el valor a través de operaciones elementales, por ejemplo de $2^0=0$ ya que $2*0=0$, (posiblemente motivados por notar la coincidencia de que $2^1=2*1$ y $2^2=2*2$).

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 7(2), 33-115.

Chevallard, Y., (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Editorial Aique.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. *Acta Latinoamericana de matemática Educativa.* Vol. 14.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproduciblidad: El caso de la función exponencial,* Tesis de Maestría, DME del Cinvestav-IPN. México.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría, DME del Cinvestav-IPN. México.

Martínez, G. (2002, en prensa). Fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes no naturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 5(1).

Polinomios significativos

Abel Carmona, Estela Sonia Aliendro, Angélica Elvira Astorga, Mónica Lisi
Universidad Nacional de Salta y Colegio Secundario Nº 5080 Argentina.
acarmona@unsa.edu.ar , aliendro@unsa.edu.ar , myczanek@arnet.com.ar

Resumen
El presente trabajo ofrece una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la noción de polinomio en una variable destinada a alumnos del ciclo secundario, que por primera vez se acercan a ella. Se procura que sean los mismos estudiantes quienes protagonicen la reconstrucción del concepto, por medio de la recuperación de los saberes-hacer implícitos en las actividades de la vida cotidiana (de la sociedad de la que forma parte). Es decir, se busca recuperar el sentido de las nociones para un aprendizaje significativo.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de la Matemática se caracterizaron, históricamente, por dificultades al parecer insalvables. Y en casi todos los niveles educativos, el fracaso generalizado es asumido como una consecuencia natural de la educación matemática.
Por otra parte, la sociedad en general, y el estudiante, en particular, están convencidos de la importancia de la matemática por su vinculación con el razonamiento y el desarrollo intelectual. Sin embargo encuentran que los conceptos matemáticos que la escuela secundaria imparte, trascienden los fines sociales útiles, y que la enseñanza de esta disciplina podría reducirse a la de las operaciones aritméticas elementales: bastaría saber sumar, restar, multiplicar y dividir. El cambio de números por letras, propio de las nociones algebraicas que deben ser incorporadas cuando se transita por la escuela secundaria, resulta, de alguna manera, artificioso. ¿Por qué razón habría que operar con letras? ¿Cómo hacer para que el alumno comprenda la necesidad de incorporar a sus saberes las nociones algebraicas? Si toda suma numérica conduce ostensivamente a un número, ¿por qué la suma de polinomios da como resultado un polinomio, es decir, otra suma? El estudiante cree que falta aún resolverla.
El salto de lo aritmético a lo algebraico, la necesidad de moverse con expresiones literales, incrementa las dificultades docentes y estudiantiles mencionadas en el primer párrafo. El carácter abstracto de las nociones vinculadas con los polinomios involucra la pérdida de significatividad. ¿Qué debemos hacer para que el alumno no sea un mero repetidor de procedimientos y lograr que estos adquieran significación?
Todas las anteriores, son cuestiones para las que hay que buscar respuestas. Más aún, cuando la tarea del docente no es ayudada por la bibliografía que circula en el medio. Ella presenta pocas situaciones problemáticas concretas que involucren las nociones algebraicas que deban ser enseñadas. Y ellas no siempre pertenecen al entorno del estudiante.
La propuesta, que a continuación describimos, intenta dar una respuesta – aunque limitada – a las cuestiones antes planteadas.

Referencias Teóricas

Si los alumnos tienen dificultades para aprender matemática es porque, clásicamente, se la enseñamos de una manera demasiado formal. Las clases repiten los modelos y métodos matemáticos, propios de esta ciencia, que resultan vacíos de sentido para aquellos; lo máximo que logramos es que aprendan, reciten y apliquen reglas. Lo que significa que no se saca provecho de su inteligencia, ni se desarrollan competencias. Adoptar un enfoque diferente del tradicional, en la enseñanza de la matemática, es el desafío que debemos asumir. Resulta necesaria una renovación de las estrategias de enseñanza y aprendizaje. Las teorías formuladas por Guy Brousseau e Yves Chevallard hacia finales del siglo pasado, nos proporcionan el marco teórico adecuado a nuestros propósitos.

Tenemos presente que la matemática es un objeto del conocimiento que juega como herramienta fundamental para la cultura y el desarrollo de la humanidad. Y que todo conocimiento científico ha surgido como respuesta a un problema particular, en una situación histórica dada. Una vez construida, se ha constituido en saber y se ha perdido la conexión con esa situación problemática.

La enseñanza debe rescatar el aspecto contextualizador para que el estudiante pueda re-construir la noción. Ello debe operar en una situación ligada a sus intereses y afectos. Si la clase de matemática se transforma en un laboratorio que permita investigar, experimentar, pensar, las posibilidades de construcción se incrementan. *"El trabajo intelectual del estudiante deber ser, por momentos, comparable a la actividad científica"* (Brousseau, Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática, Ed. Isabel Dotti y J. Vargas, Universidad Nacional de Córdoba, 1993, p. 2). Claro está, que esta modalidad de trabajo debe formularse desde el entorno propio del estudiante. Así se desprenderá la importancia del aprendizaje y la enseñanza de estos saberes, no solo en el ámbito conceptual sino también como medio para integrarlo al quehacer diario.

Buscamos reconciliar el rigor, propio de la matemática, con vivencias conexas al entorno que rodea a los estudiantes, para lograr – de esta manera – un aprendizaje significativo, en el cual, las nociones vinculadas a los polinomios cobren sentido. Tienen que colegir que las nuevas nociones les permiten interpretar la realidad en la cual los símbolos algebraicos resultan un medio apropiado de modelización.

Creemos que a partir de una buena situación elegida por el profesor, el estudiante, por el juego de sus acciones, conjeturas e hipótesis, puede progresar dentro del saber que se desea instituir, el del curriculum. La vivencia del explorador y del descubridor tienen una importancia didáctica y educativa fundamentales, porque permiten al alumno desarrollar sus capacidades. La responsabilidad científica de aceptar sus hipótesis o de rechazarlas, incumbe a la clase entera y no sólo al profesor.

Finalidad

Por todo lo anterior, la finalidad perseguida en esta propuesta, es favorecer la construcción, tanto de la noción como de la representación simbólica, de polinomios y su operatoria, a partir de situaciones significativas para los alumnos.

Destinatarios

Esta propuesta fue destinada (y experimentada parcialmente) a los alumnos de un tercer año de nivel medio en un establecimiento secundario nocturno de la ciudad en que vivimos. La población de dicho curso, alcanza a cuarenta estudiantes, que en su mayoría proviene de otros establecimientos y repiten curso. Sus edades oscilan entre los 16 y 20 años. Un 60% de los alumnos no aprobaron la matemática correspondiente al curso anterior. En general provienen de familias con problemas (laborales, económicos y de disgregación del grupo familiar) y la escuela deviene en un lugar que les permite escapar de su realidad. El medio sociocultural en que están insertos no favorece una actitud positiva hacia el estudio. Por ello es también tradicional la actitud de apatía generalizada de los docentes hacia los alumnos quienes devuelven la misma actitud hacia ellos y las diferentes materias.

Expectativas de Logro

- Interpretar y codificar situaciones de la vida cotidiana en términos de que permitan el acceso a la expresión polinómica formal.
- Inferir las operaciones apropiadas entre polinomios, para solucionar problemas antes citados.
- Trabajar en un ambiente que permita propiciar el gusto por descubrir en las situaciones cotidianas los conceptos y procedimientos relacionados con los polinomios.

Contenidos Conceptuales

Polinomios: concepto. Igualdad de polinomios. Polinomio nulo. Valor numérico de un polinomio. Adicción y sustracción de polinomios. Producto de un polinomio por un escalar.

Contenidos Procedimentales

- Interpretación de situaciones cotidianas modelizables por expresiones polinómicas.
- Resolución de las operaciones de suma y diferencia de polinomios y producto de un polinomio por un escalar

Contenidos Actitudinales

- Valorar la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico y algebraico para representar, comunicar y resolver una situación significativa.
- Disposición favorable para enfrentarse a problemas algebraicos.

Recursos

Para el trabajo áulico se diseñaron dos guías de trabajos prácticos con problemas enmarcados dentro del contexto que vive el alumno.
Los objetivos de la primera guía son:

1. Generar libremente representaciones gráficas y simbólicas apropiadas.
2. Cambiar de una a otra representación.

3. Extender el uso adecuado de las operaciones aritméticas conocidas.
4. Unificación de representaciones gráfica
5. Interpretar símbolos en el contexto previsto.
6. Generar, para las situaciones planteadas, sumas y diferencias de polinomios y producto de un polinomio por un escalar.
7. Responsabilizar a los estudiantes por sus respuestas.

Mientras que los objetivos de la segunda son:

1. La institucionalización de los símbolos y la operatoria de suma y producto por un escalar.
2. La descontextualización de la noción y la recuperación de la práctica formal tradicional.

Metodología:

El desarrollo en clase, de las actividades propuestas en las guías de trabajos prácticos, involucró momentos de trabajo tanto grupal como individual. El trabajo en grupo, para propiciar, entre los alumnos, el intercambio de opiniones y estrategias, donde el papel del docente era de moderador en las situaciones que se presentaban en y entre los grupos, sin dar pautas teóricas. El trabajo individual, permitió a cada estudiante la elaboración personal de conceptos.

Modelo de actividades:

1. En la Guía nº 1 aparecen problemas como los siguientes:

a) La distribuidora de galletitas Galaxia, ofrece las mismas en tres presentaciones: paquetes de 20 galletitas cada uno, cajas de 20 paquetes de los anteriores y contenedores de 20 cajas. ¿de qué manera se puede expresar, en forma abreviada una existencia de 17 paquetes, 8 cajas y 5 contenedores. Responder, en cada grupo y escribir las propuestas en el pizarrón.
b) Las entregas del día de la distribuidora de las galletitas Galaxia fueron las siguientes:
Primera entrega: 15 paquetes, 13 cajas y 12 contenedores.
Segunda entrega: 2 paquetes, 11 cajas y 9 contenedores.
Tercera entrega: 6 paquetes, 10 cajas y 17 contenedores.
Determinar grupalmente, el total de las tres entregas.
c) Al comenzar el día, la existencia en la distribuidora era de 35 paquetes, 42 cajas y 54 contenedores. ¿Cuántas quedaban al finalizar el día?
d) En otra oportunidad, los pedidos triplicaron los que se citan en la primera entrega. Expresarlo con una operación aritmética apropiada y resolverla.

Comentarios:

La primera situación generó, entre otras, las siguientes representaciones por parte de los estudiantes:

17 paq + 8 caj + 5 con
17 pa + 8 ca + 5 co
17 p + 8 ca + 5 co
17 x + 8 y + 5 z
17 g + 8 c + 5 C

La puesta en común sirvió para unificar las distintas representaciones simbólicas en la expresión: 17 p + 8 c + 5 C.
La situaciones propuestas en los ítems b, c y d resultaron útiles tanto para afianzar el uso de los símbolos convenidos como para que los estudiantes generaran (de modo espontáneo) las operaciones de suma y diferencia entre polinomios y de producto de un polinomio por un escalar.

2. La guía Nº 2 contenía una propuesta tradicional de la operatoria con polinomios. Es decir, situaciones al estilo de:
   Dadas las expresiones: $P(x) = 3x - 7x^3 + 10 + 5x^4 + 8x^2$; $Q(x) = 2x^2 + 3x - 8$;
   $R(x) = 4 - 8x^2 + 5x + 12x^3$
   Calcular:
   a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - R(x)$ c) $P(x) - Q(x) + R(x)$
   d) $2R(x)$ e) $2Q(x) - 3R(x)$ f) $2(P(x) + R(x)) - 3Q(x)$

Comentarios

A pesar de no haber sido institucionalizadas las nociones involucradas en la guía, no se presentaron dificultades en su ejecución, la que se desarrolló de una manera totalmente natural. Las operaciones propuestas fueron resueltas de acuerdo con los procedimientos típicos, a pesar de no haber sido explicados en ningún caso. El único aporte del profesor fue que se tomara en cuenta el modo de trabajo con la guía anterior. Tampoco se observaron los errores tradicionales de sumar exponentes; es decir, no se observó que, para la expresión $2x^2 + 3x + 8$, se diera el resultado $13x^3$.
Sólo después de ejecutadas estas dos guías, las nociones formales de polinomio, suma y diferencia de polinomios y producto de un polinomio por un escalar fueron expuestas por el docente. La actitud de los estudiantes fue la de una aceptación lógica y natural del tema.

Conclusión

Esta propuesta se llevó a cabo a fines del año 2000 y podemos decir que los objetivos propuestos se cumplieron en su totalidad, tanto los de la construcción de las nociones y procedimientos como los relacionados con las actitudes frente a la Matemática. La experiencia permitió apreciar un mayor interés estudiantil por la resolución de las situaciones problemáticas, porque les parecían interesantes y posibles de resolver. En este aspecto, es destacable el sentimiento de autovaloración que percibimos entre los estudiantes, quienes llegaron a sentirse capaces en una asignatura que resultaba siempre ajena a sus intereses y – aparentemente – inaccesible a sus posibilidades. No queremos omitir el caso de un alumno que nunca participaba en las clases de Matemática y que, en esta ocasión, se integró a su grupo de trabajo y aportó algunas ideas.

Por otra parte, estamos convencidos de que para los distintos grupos de estudiantes, las situaciones problemáticas que se les propongan deben adecuarse a sus entornos naturales; de otro modo, el riesgo de perder su interés es muy importante. Los ejemplos que hemos descriptos podrían no ser adecuados a otros grupos.

La proximidad del final del período lectivo impidió la extensión de esta modalidad de trabajo a los demás temas relacionados con los polinomios. Pero la actitud estudiantil observada nos impele a continuar en esta línea, en las aulas.

Referencias bibliográficas

Barbin, E. y Douady, R. (1996): *Enseñanza de la matemática: Relación entre saberes, programas y práctica*. IREM de París, Francia.

Brousseau G. (1993): *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática* (traducción Dr. Dilma Fregona). Ed. I. Dotti y J. Vargas. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

Chevallard, Y . (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique Editorial.

Chevallard, Y., Bosch M. y Gascón J. (1997*). Educación Matemática. El Eslabón Perdido entre la Enseñanza y el Aprendizaje.* Barcelona, España: Horsori Editorial.

Mena, A. (1997). *Matemática y Cultura*. Valparaíso. Chile.

Sucesiones y progresiones: *Búsqueda de patrones*. Transitando desde el razonamiento plausible y la historia de la matemática hasta llegar al razonamiento matemático

Alba Ziomara Avilé
UNAF Facultad de Humanidades. Argentina
ziomara@infovia.com.ar

Resumen
La presente propuesta áulica, pone de manifiesto que es posible abordar, desde diferentes marcos (aritmético, numérico, geométrico, físico, lúdico, etc) los conceptos de Sucesiones y Progresiones aritméticas y geométricas y Sucesión de Fibonacci desde el comienzo del Tercer ciclo de la E.G.B (7º grado), cuando se le proporciona a los estudiantes un aprendizaje por descubrimiento y, con el objetivo de una enseñanza espiralada, es decir, retomando y profundizando los temas en los años posteriores de la educación escolar.
Existen situaciones muy atractivas como, por ejemplo, el maravilloso Triángulo de Tartaglia. En él se hallan implícitos patrones asociados a aquellos conceptos y además, para formar algunas secuencias numéricas, es necesario conocer aspectos de la historia de la matemáticas. Tal es el caso números Pitagóricos. Igualmente atractivas son: la relación que vincula el número de bases medias que se van construyendo en un cuadrado y, el número de cuadrados resultantes; las reflexiones múltiples de un rayo luminoso que incide oblicuamente en láminas planas de vidrio y el número de trayectorias originadas por aquellas reflexiones; algunos números decimales, cuyos períodos son el resultado de distintas sucesiones, etc.
La interacción de los diferentes marcos, la faceta lúdica, la inclusión de la historia de la matemáticas, la aprehensión del razonamiento plausible, etc. dan como corolario, clases amenas, propicias para las manifestaciones espontáneas y creativas de los estudiantes y, aptas para que los alumnos lleguen a determinadas generalizaciones como puede ser el hecho que una progresión geométrica puede expresarse como el resultado del producto entre dos números de la siguiente forma: a x b^n .

"Todo puede hacerse tan simple como sea posible, pero sin excederse en ello"
Albert Einstein (prólogo de "El Cálculo" – 7 ed.)

Fundamentación

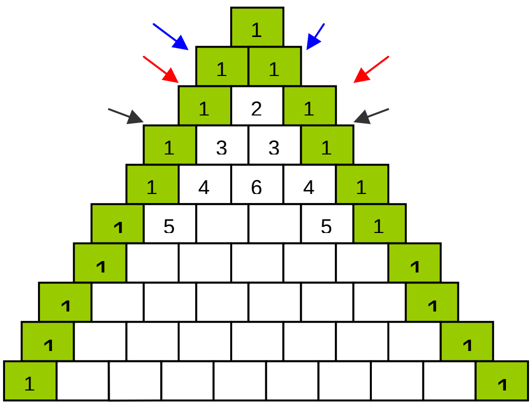
Hace unos años atrás, antes de la reforma curricular en nuestro país, los estudiantes se encontraban con los conceptos de Sucesiones y Progresiones recién en cuarto año de las Escuelas Secundarias (actual 1º Año de la Escuela Polimodal) y el acercamiento a estos conceptos era *lineal y abstracto.* Prueba de ello, son los múltiples textos para Educación Secundaria que podemos consultar. Aún hoy, en las últimas publicaciones que abarcan desde el año 1995 hasta el año 2000 para E.G.B.3, no se hallan alusiones a estos temas, salvo en Matemática 8º, pp: 126/7 y Matemática 9º, pp: 64/5, AZ editora, S.A., ambos publicados en Chile en el año 1997, donde, se los menciona y generaliza.
Abordar los conceptos de Sucesiones y Progresiones Aritméticas y Geométricas desde el comienzo de la E.G.B 3 (7º Grado) y, desde diferentes marcos, es más que importante dado que, por ejemplo: los primeros contactos numéricos que tenemos en la niñez, nos sorprenden contando objetos 1, 2, 3, 4,...; en los primeros años de educación escolar nos enseñan los números impares – 1, 3, 5, 7, ... y los números pares – 2, 4, 6, 8, ..., sin advertir la secuencia de los mismos. Vivimos en nuestro planeta con una sucesión de días y años debidamente ordenados, con la luna y sus maravillosos cuartos iluminando nuestro cielo y, asombrándonos en cada cuarto de ella, sin tampoco advertir la secuencia con la que se producen los mismos. Igualmente, cuando realizamos el ingreso a la Universidad, solemos encontrarnos en alguna cátedra de matemáticas con Sucesiones, Progresiones, Series, Notación Sigma, límite de una sucesión, etc.

Puesto que no todos nuestros alumnos van a dedicarse a estudiar matemáticas, es posible abordar los conceptos de Sucesiones y Progresiones de manera lúdica, armando algunas secuencias y, comparando y descubriendo otras.
El Dr. Santaló, señala que es más importante enseñarles a los educandos a *descubrir* que, *exponer el descubrimiento.* Esto último favorece un aprendizaje profundo y significativo, llegando en los cursos superiores a una verdadera abstracción de los temas abordados, sobre la base de una enseñanza espiralada. Generalmente, los docentes de Matemáticas siguen presos de la formación académica que hemos recibido, sin espacio para la crítica, el descubrimiento, el esparcimiento, etc; con clases magistrales pero, siempre expositivas. Es importante que, como docentes tengamos presente que, si bien la matemáticas posee un conjunto de reglas, técnicas, conceptos totalmente entrelazados, también es una actividad creativa en la que el sujeto que aprende es un verdadero protagonista para lo cual, es imprescindible que preparemos nuestras actividades con una visión lúdica, con espacio para el descubrimiento y, con la presencia insoslayable del razonamiento plausible (que habita en todas las personas). Aquel razonamiento, posee la virtud de generar nuevos conocimientos puesto que, por ser azaroso, es discutible. Es relevante destacar que, cuando decidimos transitar nuestras clases por este camino, como docentes, debemos tener claro en qué momentos intervenir para conducir a nuestros alumnos a la adquisición paulatina del razonamiento matemático.
El presente trabajo tiene por objetivo abordar los conceptos de Sucesión y Progresión desde el comienzo de la educación Media, desde distintos marcos (geométrico, aritmético, numérico, lúdico, geométrico y físico), con intromisiones histórico-matemáticas, con un espacio personal de los estudiantes para descubrir los diferentes patrones asociados a dichos conceptos y, en el caso que hubieren alumnos más osados e interesados en la adquisición del razonamiento matemático, llegar a la generalizaciones de las mismas.
Cabe destacar que, considero más que importante introducir a los estudiantes en la Historia de la Matemáticas puesto que quizás, la indiferencia de muchos de ellos hacia esta disciplina, no sea tan gratuita dado que se la presentamos *atemporal* y, en realidad, la Matemáticas tiene su génesis, hace tantísimos siglos atrás, con el aporte – paulatino a veces y, otras no tanto – de grandes genios y simple adeptos, quienes fueron cimentando esta ciencia tan formal, tan axiomatizada y, sin embargo con tantas modificaciones en el proceso de su construcción. La Matemáticas no es hoy, tal y cual fue en sus comienzos, sino que, a medida que avanzamos en el tiempo, ella también avanza en su edificación. Es decir, la construcción de esta ciencia fue (y sigue siendo) un largo proceso. De igual manera, es un largo proceso la adquisición del pensamiento matemático.

Desarrollo: (a modo de ejemplo, se transcriben algunas situaciones)

1.- Construiremos una torre de cubos, cuya cúspide, esté “ocupada” por el número 1 y los sucesivos, son las suma de los números que se hallan en los cubos superiores.

Completa los cubos que faltan.....



* A partir de la presentación de aquella torre numérica y trabajando con los números de los cubos indicados con las flechas de diferentes colores, los alumnos comienzan a hallar patrones asociados a las distintas secuencias. Por ej, si se les solicita que escriban los números que se encuentran en los cubos indicados con la flecha color rojo.

¿Encuentras alguna relación o secuencia en la formación de esa diagonal?

En caso afirmativo, exprésala.

Escribe los números que se encuentran en los cubos con la flecha color negro.

¿Qué relación encuentras para que se forme la secuencia?

Compara las tres secuencias que se formaron y establece las diferencias de cada una.

* Así por ejemplo, la secuencia formada por la indicación de la flecha negra está dada porque cada número se obtiene de sumarle al anterior los números triangulares y, aquí, se hace propicio introducir al alumno en el conocimiento de la escuela Pitagórica y su incidencia en la matemáticas como ciencia .

Así también, si realizamos las sumas de los números que se encuentran en cada fila de la torre, tenemos:

1era. Fila: 1

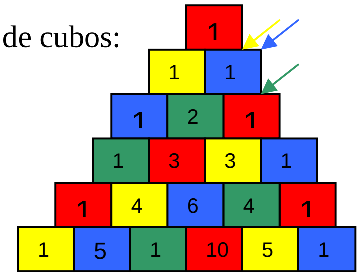
2da. Fila: 1 + 1 = 2

3era. Fila 1 + 2 + 1 = 4

4ta. Fila 1 + 3 + 3 + 1 = 8

Al realizar las sumas de los números que se encuentran en las filas sucesivas, por distintos procedimientos, los alumnos deberán deducir, sin continuar el triángulo, la suma de los números que hallan en la fila decimoquinta.

Continuando con la torre de cubos:



Si tomamos como “escaleras” los cubos del mismo color. Comenzando por la parte superior, tenemos un solo escalón que es el rojo. Si sumamos los números que se encuentran en las “escaleras” del mismo color y anotamos sus sumas, tenemos:

1er. Escalón (Rojo): = 1

2do Escalón (Amarillo): = 1

3er. Escalón (Azul): 1 + 1 = 2

4to. Escalón (Verde) 1 + 2 = 3

5to. Escalón (Rojo): 1 + 3 + 1 = 5

a) Continúa con las adiciones y, coloca los resultados en los puntos suspensivos:

1; 1; 2; 3; 5; ......; ......; ....; ....;

b) ¿ Encuentras alguna secuencia lógica en la “obtención” de cada número de la sucesión?

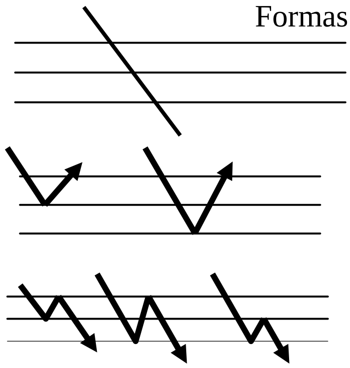
Fundamenta.

c) Obtén los quince primeros números de la sucesión citada. (Si quieres hacerlo con la torre de cubos, hazlo, te quedará muy bonito)

“Reflexiones múltiples: Las trayectorias de los rayos luminosos que inciden oblicuamente sobre dos láminas de vidrio planas en contacto, dependen del número de reflexiones que sufren estos rayos. Si no sufren reflexión, sólo hay una trayectoria, si sufren dos reflexiones, hay tres trayectorias y, así sucesivamente, como indica la figura”

Taller de Matemáticas. Tomo 2. Actividades sobre

Formas y figuras. pp: 87



Número de reflexiones	Número de caminos diferentes
0	1
1	2
2	3

¿Cuántas trayectorias habrá, si el rayo tiene tres reflexiones?. Grafícalo

¿Encuentras alguna relación entre el número de reflexiones del rayo y el número de trayectorias?.

¿Puedes determinar, cuántas trayectorias producen 12 reflexiones?

Nuevamente aquí es importante que los alumnos conozcan quién fue Leonardo Fibonacci

*Ya sabes que dos puntos determinan una recta, por lo tanto, también determinan un segmento.
Un punto en el plano, ¿determina algún segmento?. Enuméralos
Dos puntos en el plano, ¿determina algún segmento?. Enuméralos
¿Cuántos segmentos determinan tres puntos en el plano, *no alineados*?
¿Cuántos segmentos determinan cuatro puntos en el plano de forma tal que, *tres de ellos no estén alineados*?
¿Cuántos segmentos determinan cinco puntos en el plano de forma tal que, *tres de ellos no estén alineados?*
Enumera los segmentos que fuiste graficando hasta aquí, según el número de puntos en el plano.
¿Encuentras alguna relación entre el número de puntos y el número de segmentos?
Sin dibujar los puntos del plano, ¿puedes determinar cuántos segmentos determinan 10 puntos del plano de forma tal que, *cada tres de ellos no estén alineados*?

****

Maravillas con los números

Los números decimales, esos que “vienen” con coma, suelen ser participantes de muchos acertijos matemáticos.

Uno siempre desea que todo resultado fuese un entero.

¿Por qué nos parece más elegante un número entero que uno decimal?. ¿Será que un número decimal nos parece “menos número” que un entero?

Sin embargo aquellos, no son “menos números” que los enteros, los números decimales son igualmente divertidos y también tienen sus magias y secretos.

****

- Para obtener, por ejemplo el período del número 98, debemos efectuar la engorrosa división 1 : 98 y seguirla por un buen rato hasta observar que las cifras decimales comienzan a repetirse. Pero, ¿existe alguna manera más entretenida de resolver la división sin apelar a la calculadora y utilizando nuestra observación y nuestra mente?. Pues, SÍ. El método es fácil, divertido y casi mágico.

* Expresa, al menos, once de las cifras decimales que resultan de dividir 1 con 98

1 : 98 = ...

Observa la siguiente adición:

```
0,01
    02
       04
         08
           16
             32
               64
                128
                  256
______________________________
0,010204081632653056
```

a) ¿Coinciden los resultados? Sí ( ) No ( )

b) ¿Observas algo “especial” entre las cifras colocadas en “escalerita” en forma sucesiva, donde cada nuevo escalón hace asomar dos cifras por debajo del escalón anterior?

c)¿Son potencias de algún número?

d)¿Por qué crees que se utilizaron de ***ese*** número y no de otro?. Fundamenta.

e) En vez de expresar la relación que descubriste como potencia de un mismo número, házlo encontrando otra relación

Conclusiones:

El trabajo resultó muy ameno, los estudiantes se manifestaron altamente interesados por la resolución de las situaciones, pudieron establecer un debate y puesta en común además de diferenciar una Sucesión de una Progresión. Todos los grupos advirtieron que la suma de los números de la fila decimoquinta (ítem 3.c.) es 2^{14} y, algunos estudiantes lograron generalizar, luego de resolver la torre numérica, el juego de la rueda, el del cuadrado y sus bases medias, que toda progresión geométrica, se puede expresar como el producto de: axb^{n}.

La situación de las construcciones del cuadrado y sus bases medias, fue muy rica, dado que algunos grupos, vincularon – para obtener la secuencia de cuadrados- el número de bases medias y el número de cuadrados resultantes aclarando que, en ambos casos, se respetaba una progresión geométrica con constante multiplicativa 4.

Así mismo, les causó mucha sorpresa la aparición de los números Pitagóricos cuando debieron descubrir la secuencia del ítem 1. c.: 1; 4; 10; 20; 35..... Fue inevitable la intervención del docente en la investigación de Pitágoras y su incidencia en el campo de la Matemáticas. No obstante, lograron armar los números triangulares y se aprovechó la oportunidad para que conozcan los números cuadrados.

```
. .   . . .   . . . .
. .   . . .   . . . .
      . . .   . . . .
              . . . .
 4      9       16
```

Algunos grupos, enunciaban que el número 4 era entonces un cuadrado de lado 2; el 9, otro cuadrado de lado 3 y así sucesivamente, esta también fue una buena ocasión para revisar las fórmulas de área de un cuadrado de lado **L** - Área: $\mathbf{L}^{2}$ -

Como puede observarse, la presente propuesta es absolutamente aplicable en el comienzo del Tercer Ciclo (7º grado) continuando con el respectivo lenguaje simbólico en los cursos superiores y óptima, para tomar la Sucesión de Fibonacci, llegando, cuando sea el momento de comprender conceptos más abstractos como el de límite de una Sucesión , al concepto de número de oro.
Ya sabemos que, el número áureo tiene múltiples aplicaciones en el arte y en la naturaleza, por lo que podría continuarse con clases muy ricas y con investigaciones profundas.
Quienes estamos en el ámbito de la Matemáticas, sabemos que es difícil cautivar a los alumnos. Programar situaciones donde los estudiantes aprendan a descubrir el conocimiento es todo un desafío, por la riqueza que pueden llegar a tener diferentes problemas matemáticos y por la gran sorpresa de los alumnos en cuanto a que ponen de manifiesto sus propias capacidades para ir descubriendo relaciones, propiedades, etc.

Referencias bibliográficas

Antón Boza, J. L.; González Ferreras; González García, C.; Llorente Medrano, J.; Montamarta Prieto, G.; Rodríguez Rodrigo, J. A.; Ruíz Jiménez, Ma. J. (1994). *Taller de Matemáticas-Actividades sobre formas y figuras*. Fascículo 2. Madrid, España: Narcea, S. A. De ediciones.
Enciclopedia Temática Océano. (1988). Tomo 2- Barcelona, España.
Enzensberger, Hans Magnus. (1998). *El Diablo de los Números.* Munich, Viena: Ediciones Siruela.
Leithold, Louis. (1998). *El Cálculo*. México: Facultad de Ciencias de la UNAM.
Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid, España: Ediciones Morata S.A.
Polya, G. (1966). *Matemática y Razonamiento plausible*. Madrid: Editorial Tecnos, S.A.
Sanjurjo, Liliana; Vera, María Teresita. (1994). *Aprendizaje Significativo y enseñanza en los niveles medio y superior*. Rosario, Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Acerca de las relaciones entre errores algebraicos y aprendizajes significativos

Juana Inés Pérez Zárate
UAEH México
inesperezz@hotmail.com

Resumen
El presente taller tiene como objetivo diseñar situaciones didácticas en las que partiendo de errores algebraicos conocidos, tales como: $(a+b)^2 = a^2 + b^2, \sqrt{a^2+b^2} = a+b$, los estudiantes construyan aprendizajes significativos, utilizando éste como elemento teórico que hacemos intervenir explícitamente en el diseño y aplicación de situaciones didácticas, que contengan representaciones numéricas, gráficas y analíticas, así como la relación el todo y las partes.

Introducción

En una primera etapa del presente trabajo se realizó una clasificación de los errores algebraicos en estudiantes del tercer grado de secundaria, en esta segunda etapa, se tiene como objetivo diseñar situaciones didácticas en las que partiendo de errores algebraicos, los estudiantes del nivel medio superior logren construir aprendizajes significativos de saberes algebraicos.
Es así como nos dimos a la tarea de diseñar situaciones de didácticas que partiendo de dos errores conocidos $(a+b)^2 = a^2 + b^2, \sqrt{a^2+b^2} = a+b$, posibiliten a los estudiantes el darle significación y sentido al llamado binomio al cuadrado, todo ello enmarcado dentro de las representaciones, numérica, gráfica y algebraica, así como la relación el todo y las partes.
Hemos puesto en experimentación dos diferentes situaciones de didácticas con estudiantes de bachillerato, las cuales fueron videograbadas, con la finalidad de tener más elementos de carácter cognitivo, que permitan hacer ajustes a los diseños y al mismo tiempo ir enriqueciendo y perfeccionando dichas situaciones.

Enmarcamiento teórico

Tomando como base los fundamentos epistemológicos de Popper (1998), una de sus tesis centrales es *toda parte de nuestro conocimiento por tradición es susceptible de examen crítico y puede ser abandonado*, es decir, la mayoría de las cosas que aprendemos son por el ejemplo, o bien, porque las hemos escuchado o leído previamente, por consiguiente en todo proceso de enseñanza-aprendizaje, el error está presente de manera ineludible.
Por su parte Bachelard (1983), refiere que *se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, superando lo que en la mente hace de obstáculo.*
El mismo Bachelard (1983), señala a lo largo de su obra algunas reflexiones que vale la pena mencionar: *No hay verdad sin error rectificado. El error solo es reconocible a posteriori. Es el pasado de la razón que vuelve sobre si misma para juzgarse.* Entre otras.
Al situarnos precisamente es en el ámbito de la enseñanza del Álgebra, nos ha interesado utilizar a los errores, como punto de partida para el estudio, sistematización, análisis y explicación de algunos de ellos que se presentan más frecuentemente en el pensamiento algebraico de los estudiantes de bachillerato.
Como lo menciona Rico et al (1995), "*...cabe señalar que los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, que surgen en un marco conceptual*

consistente, y que es necesario modificar la tendencia a condenar los errores culpando a los estudiantes de los mismos, reemplazándola por la previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje, "...todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, como consecuencia de las reflexiones anteriores admitimos que a partir de sus errores los jóvenes aprenden distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente".

Estas consideraciones nos llevan precisamente a darle sentido a este taller, ya que en el diseño de la misma situación didáctica se están considerando los errores más comunes y se busca que los estudiantes tengan más control y previsión sobre los mismos, para ello se hacen intervenir explícitamente las representaciones numéricas, gráficas y analíticas, así como la relación el todo y las partes, utilizando como punto de partida el error como elemento teórico.

Aprendizaje significativo

Siempre que al individuo se le prepara para que aprenda nuevos conocimientos, recurre a una especie de anclaje para relacionarlos o conectarlos con los conocimientos previamente adquiridos, es decir, existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción de conocimientos. Las motivaciones dependen de dichas estructuras y un cambio de motivación compromete una modificación de estructuras cognitivas que Ausubel (1989), utiliza para designar el conocimiento de un tema determinado, organizándolo de manera clara y garantizada.

Debemos tomar en cuenta que los errores aparte de que se presentan de manera sistemática, aparecen como un elemento común, generador de nuevos conocimientos, y que además éstos, sean genuinos.

A diferencia del aprendizaje memorístico o repetitivo, el aprendizaje significativo, por el contrario, tiene lugar cuando se intenta dar sentido o establecer relaciones entre los nuevos conceptos y los ya existentes en los estudiantes, o con alguna experiencia anterior, de esta manera construyen su propio conocimiento en la medida que están interesados y decididos a enfrentar nuevos retos de aprendizaje.

Lo fundamental del aprendizaje significativo como proceso consiste en que los pensamientos, expresados simbólicamente de modo no arbitrario y objetivo, se unen con los conocimientos ya existentes en el sujeto. Este proceso, pues, es un proceso activo y personal. La clave del aprendizaje significativo está en establecer una relación entre el nuevo material y las ideas ya existentes en la estructura cognitiva de los alumnos. Cuando el estudiante muestra interés en dedicarse a un aprendizaje en el que intenta dar sentido a lo que aprende, hay consecuentemente una tendencia del alumno al aprendizaje significativo.

Piaget (1978), hace referencia que la evolución de los esquemas en el transcurso del desarrollo se relaciona con los desequilibrios que producen las interacciones del niño con la experiencia y con el medio y, sobre todo, con los *reequilibrios* que se generan como consecuencia. Es decir, en el ámbito de los errores de los alumnos, pueden ser interpretados como la forma particular con la que, a diferentes edades, se organizan los esquemas. Éstos se transforman y evolucionan al interactuar con la experiencia y con el medio, ya sea por diferenciación o por coordinaciones. Dichos errores son producciones intelectuales que dan cuenta de las estrategias cognitivas "momentáneas" que los alumnos ponen en marcha, por absurdas que puedan parecer a quien conozca la respuesta correcta a cierta cuestión planteada.

Metodología

- El presente taller se inició realizando una clasificación de los errores algebraicos en estudiantes del tercer grado de secundaria.
- Posteriormente, al tener como objetivo diseñar situaciones didácticas en las que partiendo de errores algebraicos, los estudiantes del nivel medio superior logren construir aprendizajes significativos de saberes algebraicos, se diseñaron dichas situaciones y cuestionarios, partiendo de dos errores conocidos, que son: $(a+b)^2 = a^2 + b^2, \sqrt{a^2+b^2} = a+b$, mediante las cuales se busca que los estudiantes construyan aprendizajes significativos de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y de $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$ precisamente se parte del error como elemento teórico que hacemos intervenir explícitamente en el diseño y aplicación de dichas situaciones, que contienen representaciones numéricas, gráficas y algebraico-analíticas, así como la relación el todo y las partes.
- El siguiente paso consistió en experimentar con las dos situaciones didácticas y la aplicación de cuestionarios con dos estudiantes de bachillerato que cursan el cuarto semestre en diferentes escuelas.
- El análisis de las entrevistas videograbadas nos ha dado elementos de carácter cognitivo para hacer los ajustes necesarios que posibilitarán el rediseño de las situaciones didácticas y su puesta en escena en grupos de estudiantes de bachillerato en situación escolar.

Aplicación de las situaciones didácticas

En el diseño de las situaciones consideramos a los errores como punto de partida para la construcción de aprendizajes significativos de $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$, buscando de ese modo que los estudiantes tengan control sobre sus procesos, como acción preventiva de errores.

En este caso partimos de los errores ampliamente reportados en diferentes investigaciones, usando las representaciones numéricas, gráficas y analíticas, así como la relación el todo y las partes, ya que ello posibilita el que le den significado.

Las situaciones didácticas

<u>Primera situación</u>

Binomio al cuadrado

Hay que iniciar la situación presentando al estudiante las siguientes expresiones:

$(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$ (representación numérica)

$(6 + 2)^2 = 6^2 + 2^2$

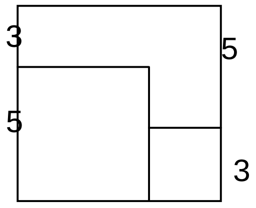
- ¿Son correctas las expresiones anteriores?

En el momento que el estudiante investigue -realizando operaciones- que para que se cumpla la igualdad, falta sumar el doble producto del primer término por el segundo, se le presenta la siguiente expresión: $(a + b)^2 =$ (representación analítica)

- Se le solicita resolver y justificar la igualdad.

Una vez justificada la igualdad, se le presenta otra expresión numérica diferente de las anteriores, para comprobar que haya construido el conocimiento, esto es, a través de la solución y justificación $(4 + 7)^2 =$

- Ahora pasamos a la representación gráfica y a la relación el todo y las partes.



- Se le pide al estudiante que identifique en la figura donde está el 5^2 y donde el 3^2 y qué figuras se forman además de los cuadrados.
- ¿Habías visto que un binomio se puede representar en términos de una figura?
- ¿Qué piensas de esto?
- Y si ahora tenemos $(6 + 2)^2$, ¿en qué cambia la figura?
- ¿Qué te representa un binomio al cuadrado, geométricamente?
- ¿Habías reflexionado con esto alguna vez?

<u>Segunda situación</u>

Partiendo del siguiente error: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, se le cuestiona al estudiante así:

- ¿Es correcta la expresión? $\sqrt{(3^2)(4^2)} = (3)(4)$ (representación numérica)
- ¿Es correcta la expresión? $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$
- ¿Cuál es la diferencia entre la dos expresiones?

Cambiando valores $\sqrt{5^2 + 2^2} = 5 + 2$

- ¿Qué pasa si elevas al cuadrado el lado izquierdo y también el lado derecho de la expresión anterior?

Partiendo de la siguiente expresión:

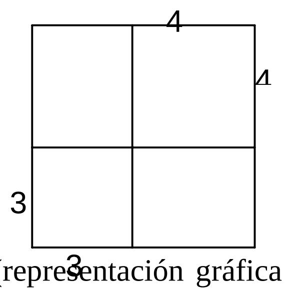
$$5^2 + 2^2 = (5 + 2)^2$$

si se tiene $(a + b)^2 =$ (representación analítica)

- ¿Cómo se desarrolla el binomio al cuadrado?

Una vez resuelto y justificado el binomio al cuadrado.

- ¿Qué le falta al lado izquierdo de las expresiones numéricas?
- Ahora vamos a pensar en lo siguiente:



Identifica el 3^2 y el 4^2 en la figura (representación gráfica y representación de el todo y las partes)

- ¿Qué otras figuras hay?
- ¿Qué relación hay entre la figura y el binomio al cuadrado?
- ¿Cómo se descompone?
- ¿Habías visto esta situación con números, letras y figuras?

Descripción de la parte experimental

<u>Primera situación</u>

Uno de los errores más conocidos que presentan los estudiantes del nivel medio superior cuando se les enseña álgebra, es el desarrollo del llamado binomio al cuadrado, el cual algunos lo resuelven así $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Berenice es una alumna del cuarto semestre de preparatoria que cuando se le preguntó si la siguiente expresión es correcta: $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$

- Respondió: "*le faltan los paréntesis, le sobran los exponentes"*, pero finalmente, después de realizar operaciones tanto del lado izquierdo, como del lado derecho de la igualdad, se dio cuenta que en el miembro derecho faltaría sumar el número 30 para que el valor de la izquierda fuera igual al de la derecha.
- *"O sea que eso no es una igualdad porque le falta sumar 30 para que sea igual"*

Después se le presentó la siguiente expresión: $(6 + 2)^2 = 6^2 + 2^2$

- Se le pregunta ¿Cómo entran en juego las estructuras de las expresiones anteriores?

Berenice encuentra rápidamente que en esta expresión falta el número 24 del lado derecho para que la igualdad se cumpla.

Posteriormente, al presentarle la expresión: $(a+b)^2$, y tal como en los casos numéricos anteriores tuvo problemas con el número 30 y el 24, advierte que en esta expresión se le presenta el mismo problema.

- Tú hiciste operaciones y anotaste lo que falta, pero ¿Qué tiene que ver el 30 con el 5 y el 3, y que tiene que ver el 24 con el 6 y el 2?
- Haz el desarrollo de $(a + b)^2$ como lo conoces en álgebra.
- Berenice resuelve como un producto aplicando sus conocimientos previos de que un número al cuadrado es dos veces la multiplicación de ese mismo número, procediendo de la siguiente manera:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a^2 + b^2 + ab + ab$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

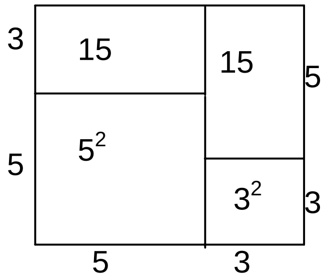
- Entonces, ¿Cómo dice la regla con la que aprendiste en secundaria y prepa el binomio al cuadrado?
- *"El cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo"*

Entonces, al regresar a la primera expresión numérica, deduce como se obtiene el número 30, diciendo:

- *"sale de multiplicar dos veces el 5 por el 3"*.

Haciendo lo mismo con la segunda expresión, pero en este momento lo hace de una manera segura e interesada cuando se le pregunta si al observar la expresión $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$ está correcta, inmediatamente responde:

- *"está incorrecta"*
- ¿Cuánto es $(4 + 7)^2$?
- Berenice responde 11^2
- $11^2 = 4^2 + 7^2$ ¿Es correcto?
- *"No, le falta el doble producto del primero por el segundo"*
- Y 56 ¿es cuadrado de algún número?
- *"No, es el doble producto del primero por el segundo"*
- Dibuja un cuadrado de (5+3) (5+3)



$(a + b)^2 = a^2 + 2ab$

$(5 + 3)^2 = 5^2 + 2(5)(3) + 3^2$
$8^2 = 25 + 30 + 9$
$64 = 64$

- Ahora, identifica en la figura donde está el 5^2 y el 3^2
- ¿Qué figuras se te forman aparte de los cuadrados?
- *"2 rectángulos de 5 por 3 y de ahí sale el 30"*
- ¿Habías visto que un binomio se puede representar en términos de una figura?
- *"No, a mi me enseñaron con representación algebraica, pero nunca con numérica, gráfica y algebraica al mismo tiempo"*
- ¿Y qué piensas ahora?
- *"Que es más fácil en el sentido de que se pueden representan los términos de un cuadrado mediante figuras", "Si así nos enseñaran matemáticas, sería otra cosa"*
- ¿Qué te representa un binomio al cuadrado, geométricamente?
- *"Un cuadrado que mide a+b de lado"*
- *"a^2 representa un cuadrado de lado a"*
- *"b^2 representa un cuadrado de lado b"*
- *"2ab representa 2 rectángulos de área ab"*
- ¿Habías reflexionado con esto alguna vez?
- *"No, la figura me sirve como guía para el procedimiento numérico y algebraico"*

<u>Segunda situación</u>

Otro error conocido en estudiantes de bachillerato cuando están aprendiendo álgebra es el siguiente: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

Angel tiene 16 años, estudia el cuarto semestre de bachillerato.

Al ver la siguiente expresión $\sqrt{(3^2)(4^2)} = (3)(4)$, él pensó que no es correcta, pero al realizar las operaciones indicadas pudo darse cuenta que es correcta.

Sin embargo, cuando se le presentó la expresión $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$, respondió:

- *"es correcta"*, al resolverla se da cuenta que es incorrecta.

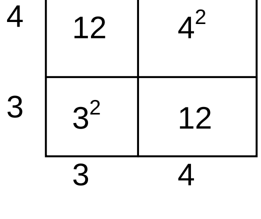
En el momento de comparar las dos expresiones, Angel nota que en el primer caso es un producto y en el otro caso se trata de una suma.

Paso seguido se le presenta la expresión $\sqrt{5^2 + 2^2} = 5 + 2$ y como no se le ocurre otra cosa para justificar que la igualdad no es cierta, se le sugiere elevar al cuadrado tanto el lado izquierdo como el lado derecho.

- Obtiene la expresión $5^2 + 2^2 = (5 + 2)^2$
- Teniendo como antecedente $(a + b)^2$
- Se da cuenta que la expresión $\sqrt{8^2 + 3^2} \neq 8 + 3$

Ahora se le pide que construya un cuadrado que mida 3+4 de cada lado

- Logra representar el 3^2, el 4^2 y los dos rectángulos de 3 por 4, en la figura que construyó.



$(3 + 4)^2 = 3^2 + 2\,(3)\,(4) + 4^2$
$(3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2 + 2\,(3)\,(4)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- ¿Qué relación hay entre la figura y el binomio al cuadrado y cómo se descompone?"
- *"$7^2 = 49 = 9 + 16 + 12 + 12$"*
- Si ahora escribes $(a + b)^2$
- ¿Podrías construir una figura como en caso anterior?
- *"Si"*
- ¿Habías visto con números, letras y figuras geométricas, la representación de un binomio al cuadrado?
- *"Lo había visto con número y letras, pero no con figuras y así es mucho más fácil"*

Conclusiones y reflexiones

Los estudiantes tienen serias dificultades para darle significado a las representaciones numérica y gráfica, así como a la relación el todo y las partes, aún cuando tengan dominio sobre la representación algebraica-analítica.

Se corrobora que la enseñanza tradicional del álgebra es estática, es decir, se le considera como un concepto acabado. El diseño de la situación didáctica va en la dirección de propiciar una enseñanza dinámica. *"a mi me enseñaron con representación algebraica, pero nunca con numérica, gráfica y algebraica al mismo tiempo"*

En la etapa de desarrollo de la aplicación de la situación, hay evidencias que muestran el predominio de lo algebraico sobre lo numérico y gráfico que propicia en "anclaje cognitivo" que impide darle significado a los aprendizajes.

Tomar en consideración en el diseño de la situación didácticas a los errores propicia el hacer entender a los estudiantes la necesidad de tener control y previsión sobre sus procesos matemáticos. *"la figura me sirve como guía para el procedimiento numérico y algebraico"*

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. P.; Novak, J. D., Hanesian, H. (1989). *Psicología Educativa.* México: Trillas.

Bachelard, G. (1983) *La Formación del Espíritu Científico.* México: Editorial Siglo XXI

De la Torre, S. (1993) *Aprender de los Errores.* España: Escuela Española.

Kilpatrick, J; Gómez, P; Rico, L. (1995) *Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Mancera, E. (1998) *Errar es un placer.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Pierre, Jean. (1999) *El "error", un medio para enseñar.* España: Diada Editorial.

Popper, K. R. (1998) *Los dos problemas fundamentales de Epistemología*. México: Editorial Tecnos.

Pensamiento Numérico y algebraico

Nivel Medio

Errores algebraicos: ¿cómo superarlos en un curso de introducción al álgebra a nivel superior?

Nelly León Gómez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador . Venezuela
nellyleong@hotmail.com omarmorales@telcel.net.ve

Resumen
En esta ponencia presentaremos algunos resultados de un estudio realizado con una metodología de investigación-acción con el fin de detectar los errores algebraicos que cometen los alumnos de los cursos de Introducción al Álgebra de la especialidad de Matemática del Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela, y ensayar alternativas para superarlos. La investigación se centró en aplicar el Método de Análisis de Errores propuesto por Borasi (1988), el cual implica: Identificación de los tipos de errores, determinación de su frecuencia y persistencia, identificación de las posibles causas de tales errores y establecimiento de recomendaciones para superarlos.

El proceso investigativo se inició con el diagnóstico de la realidad presente, el cual mostró la presencia de diversos tipos de errores, destacando como más frecuentes los relacionados con: la linealidad de las potencias, jerarquía de las operaciones, confusión entre operaciones, errores al sumar y multiplicar enteros, errores de simplificación y asignación incorrecta de valores a fracciones con numerador y/o denominador cero. Las acciones estuvieron dirigidas al uso didáctico de los errores (Cardelle 1999, Radatz 1988, Moronha 1995, Borasi 1995, Díaz 2000), analizándolos en clase cada vez que se presentaban o se daba una situación que podía conducir a un error, y tratando de explicar su origen y consecuencias. La evaluación de las acciones mostró que se superaron algunos errores, pero que otros son sumamente persistentes (Rico 1997, Díaz 1999), en este caso, los relacionados con simplificación de fracciones, jerarquización de las operaciones y la linealidad de las potencias.

Como conclusión podemos señalar que la forma como los docentes abordan los errores cometidos por los alumnos incide en que éstos sean superados o no y en la actitud que el alumno asuma ante ellos (Inacio, 1998), por lo que se recomienda a los docentes que asuman los errores como estrategias didácticas para promover aprendizajes significativos en los educandos.

Introducción

Los errores algebraicos que cometen los alumnos de los niveles de Educación Básica y de Educación Media Diversificada es una preocupación constante de los docentes por la incidencia negativa que ellos tienen en el aprendizaje de la Matemática y en el rendimiento académico de los estudiantes, convirtiéndose en una fuerte amenaza para la prosecución de estudios superiores, sobre todo en las carreras con fuerte presencia de la Matemática.

El tratamiento de los errores, conjuntamente entre docentes y estudiantes, es fundamental si se quiere allanar el camino para el logro de aprendizajes significativos. Algunos docentes sólo se preocupan por detectarlos sin discutirlos con los alumnos y los toman como elementos de fracaso; otros aprovechan los errores encontrados y retoman los contenidos permitiendo que los alumnos identifiquen sus dificultades e intenten superarlos. Por último, otros docentes exploran los errores, cuestionando la validez de las respuestas dadas y tratando de entender cómo piensan los estudiantes cuando resuelven un problema.

El error es inherente al hombre y es además una fuente de aprendizaje. Según Rico (1997), los errores son sorprendentes; persistentes; pueden ser o bien sistemáticos o por azar; ignoran el significado, por lo que respuestas que son obviamente incorrectas no se ponen en duda; y, al cometer un error no se considera el significado de los conceptos con los que se trabaja.

Son los errores sistemáticos los que más preocupan, y deben ser tratados pues afectan la estructura cognitiva del individuo. El error, sea éste de operación o de concepto, muestra un saber deficiente e incompleto, que interfiere en la construcción del conocimiento matemático, su transmisión, comprensión y valoración (Díaz, 1999).

Según Brousseau (1983), el error no es solamente efecto de la ignorancia o de la incertidumbre, sino consecuencia de un conocimiento anterior que se revela falso o inadaptado. Los errores sistemáticos no son fortuitos y se constituyen en obstáculos difíciles de superar. Tales errores deben ser analizados para conocer su naturaleza y las implicaciones cognitivas que subyacen detrás de ellos; y sobre todo, para tratar de superarlos, pues como lo señala Casavola (citado por Noronha, 1995), “un error corregido puede ser más fecundo que un acierto inmediato”.

El análisis de errores según Borasi (1998) implica: a) identificación de los tipos de errores; b) determinación de la frecuencia de comisión de errores,; c) determinación de la persistencia del error a lo largo del proceso de aprendizaje; d) identificación y clasificación de las posibles fuentes o causas de tales errores; y e) establecimiento de recomendaciones orientadas al desarrollo de estrategias instruccionales dirigidas a prevenir o remediar los errores. Este esquema fue el utilizado en esta investigación.

Esquema de la Investigación

El presente reporte se basó en un estudio cualitativo, realizado con una metodología de investigación-acción educativa, entendida ésta como una vía para detectar y resolver problemas detectados en la práctica cotidiana del educador. La unidad de análisis estuvo conformada por el curso de Introducción al Álgebra de la especialidad de Matemática del Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela, durante el primer período académico del año 2000.

En primer lugar se realizó un diagnóstico del grupo en cuanto a sus características socio-académicas y se determinaron los errores iniciales que cometían mediante la aplicación de una prueba de detección de errores. Con base en este diagnóstico se definió un primer nivel de acción que consistió en analizar los errores cometidos en la prueba, revisar los conceptos y procedimientos correctos asociados a los errores cometidos, y tratar de establecer, a través del diálogo, las razones que motivaron la comisión de tales errores.

En la fecha convenida se aplicó la primera prueba escrita y se detectaron los errores cometidos en ella, lo que permitió evaluar las acciones realizadas hasta ese momento. Se aplicó entonces el segundo nivel de acción que consistió en determinar la persistencia de los errores y la existencia de nuevos errores. Nuevamente se analizaron en clase y de hicieron sesiones de diálogo individual con los alumnos que presentaban mayores problemas. Igualmente, se continuo haciendo referencia a las posibles fuentes de errores algebraicos y a la forma correcta de resolver las situaciones planteadas. Cada vez que se realizaba una prueba escrita, taller o cualquier otra actividad de evaluación se repetían en forma cíclica las acciones ya citadas. Por último, al final del período, que tuvo una duración de 16 semanas, se aplicó nuevamente la prueba de detección de errores, para determinar cuales errores aún persistían.

Análisis de los resultados

Diagnóstico:

El grupo estuvo constituido por 25 estudiantes, 12 varones y 13 hembras, con edades comprendidas entre 18 y 27 años, provenientes en su mayoría del Estado Monagas. Todos egresaron de liceos públicos con un promedio de notas aproximado de 12 puntos. Todos pertenecían a la Cohorte 99-II y ninguna había cursado anteriormente la asignatura Introducción al Álgebra.
Desde el primer momento se manifestaron dos tendencias en la clase: una primera conformada por un grupo de alumnos bastante motivados, responsables y puntuales; y una segunda, formada por estudiantes indiferentes, con escasa disposición hacia la participación y el aprendizaje y con bajo nivel de responsabilidad.

En la aplicación de la Prueba de Detección de Errores (Díaz, 1999), se encontraron los siguientes tipos de errores:

Tipo A: Aplicación de la linealidad en la potencia, suprimiendo de doble o triple productos:
Ejemplo: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Tipo B: Eliminación de un exponente en un producto o cociente de potencias.
Ejemplo: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}$

Tipo C: Errores en la jerarquización de las operaciones.
Ejemplo: 3 + 4 . 5 = 35

Tipo D: Confundir una suma de potencias de igual base con un producto de potencias de igual base.
Ejemplo: $a^2 + a^3 = a^5$

Tipo E: Confundir operaciones:
Ejemplo: $2 + x = 2x$

Tipo F: Aplicación indebida de la propiedad distributiva:
Ejemplo: $5(a + b) = 5.a + b$

Tipo G: Errores al sumar y multiplicar números enteros.
Ejemplo: 5 + (-8) = 13 ; 9 . (-7) = 27

Tipo H: Fallas en la transposición de términos en una ecuación lineal.

Ejemplo: $-3x+4=0 \rightarrow x=-4+3 \rightarrow x=-1$

Tipo I: Fallas en el cambio de sentido de una desigualdad al multiplicar por un número negativo.

Ejemplo: $-3x+5<7 \rightarrow -3x<2 \rightarrow x<-\dfrac{2}{3}$

Tipo J: Cálculo indebido de una ecuación de segundo grado al extraer una raíz cuadrada.

Ejemplo: $x^2<4 \rightarrow x<\sqrt{4} \rightarrow x<2$

Tipo K: Errores de simplificación.

Ejemplo: $\dfrac{x+y}{x+2}=\dfrac{y}{2}$; $\dfrac{x+y}{x}=y$

Tipo L: Errores conceptuales y algorítmicos en la adición y sustracción de fracciones.

Ejemplo: $\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{9}$; $\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{20}$; $\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{4}=8+15=23$

Tipo M: Error al asignar el valor a una fracción cuando el numerador y/o denominador es cero.

Ejemplo: $\dfrac{1}{0}=1$ $\dfrac{0}{0}=1$

De estos errores los más cometidos fueron los de tipo A (86,66%), C (83,33%), k (86,66%), E (50%), f (46,66%) y H (43,33%)

Es de hacer notar que el grupo de alumnos más motivados cometió menos errores que el otro, manteniéndose esa tendencia hasta finalizar el curso.

Primer nivel de acción:

La primera actividad realizada para tratar que los alumnos fueran superando los errores que frecuentemente cometían fue analizar en clase los resultados de la Prueba de Detección de Errores, discutir en grupo sobre los errores cometidos y sus posibles causas. Para evidenciar que se había cometido un error se daban valores numéricos a las expresiones algebraicas de manera que los alumnos captaran que realmente había un error para luego pasar a revisar el concepto, las propiedades o el algoritmo que fueran aplicables en esos casos. Por ejemplo, en un error Tipo A: $(a+b)^2=a^2+b^2$, se procedió a dar valores a = *2*, b = *3* y observar que $(a+b)^2=(2+3)^2=5^2=25$ y que $a^2+b^2=2^2+3^2=4+9=13$. Se preguntaba a los alumnos por qué había ocurrido el error. Casi todos respondían “porque falta el doble producto del primer término por el segundo). Si lo saben ¿por qué no lo hicieron bien?. Algunos respondían: “Porque no me di cuenta” o “Porque se me olvidó”.

Finalmente se procedía a resolver algebraicamente el cuadrado del binomio para llegar a la expresión correcta , aprovechando para recordar las propiedades distributiva, asociativa y conmutativa de la adición y multiplicación de números reales.
Posteriormente, en cada sesión de clase cuando se presentaba una situación propicia para cometer un error se procedía de una manera similar.

Segundo nivel de acción:

Al aplicar la primera prueba escrita se observó que muchos de los errores antes detectados aun se cometían, principalmente los de tipo A, C, F, G, K y L, aunque algunos estudiantes tuvieron una mejor actuación. Como antes, la comisión de errores pareciera estar asociada a la actitud de los estudiantes hacia la clase. En las entrevistas individuales las explicaciones dadas por los estudiantes eran del tipo ya señalado: “No me di cuenta”, “me equivoqué... pero yo se eso”, parecía que los estudiantes no tenían conciencia de sus limitaciones y de que poseían un conocimiento deficiente que estaba afectando el aprendizaje de nuevos conceptos; de alguna manera evidenciaban una falta de madurez sicológica para asumir responsablemente su proceso de aprendizaje. Al aplicar la prueba de detección de errores al final del semestre se observó que los alumnos habían logrado superar en parte algunos errores. Los más persistentes fueron los de tipo A (linealidad de la potencia), E (Confundir operaciones), K (Simplificación de fracciones) y F (Aplicación indebida de la propiedad distributiva).

Conclusiones

1. Los errores son altamente persistentes y muy difíciles de superar, sobre todo porque el alumno no está consciente de que los ha cometido. El ha adquirido un conocimiento deficiente que ha instalado en su estructura cognitiva y que por lo tanto es difícil de modificar.
2. Es altamente preocupante la persistencia de estos errores en estudiantes que se están formando para ser profesores de Matemática porque la experiencia nos indica que los mismos son arrastrados a lo largo de toda la carrera y, al relacionarse con conceptos que deberán enseñar en Educación Básica o en Educación Media, podrán transferirlos a sus estudiantes mediante una enseñanza errónea.
3. La forma como los docentes abordan los errores cometidos por los alumnos incide en que éstos sean superados o no y en la actitud que el alumno asuma ante ellos. Por lo tanto, no es suficiente una investigación de esta naturaleza y luego obviar el problema de la comisión de errores en las demás asignaturas. Todos los docentes de estos futuros profesores deberán abocarse a tratar de erradicar los errores, no sólo algebraicos sino de cualquier otra naturaleza que cometen sus alumnos, y ser exigentes en ese sentido.
4. Aplicar las técnicas mencionadas para tratar de superar los errores consume bastante tiempo. Esto incide en que el profesor no las utilice pues siempre está presionado por el cumplimiento de un programa que en general es bastante extenso. No obstante se debe pensar que el tiempo dedicado a estas actividades no es perdido

sino que por el contrario es ganancia para el futuro, tanto en tiempo como en calidad del aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Andonegui, M. (1992). "Aportes a un marco teórico para el análisis de errores en el aprendizaje de la matemática". Material mimeografiado. Barquisimeto, Venezuela.

Aragón, V. (1996). "Análisis de errores en el curso de Matemática Básica del Primer Ciclo de los Estudios Generales". Ponencia presentada en el ICME-8. Sevilla, España.

Balacheff, M. (1990). Hacia una problemática para la investigación sobre la enseñanza de la Matemática. *Journal for Research In Mathematics Education 21 (4).*

Broker, G. (1988). The role of errors in the construction of mathematical knowledge.
Recopilación del XXXIX reencuentro Del CIEAEM. Canada, pp 33-64.

Borasi, R. (1980). Sbagliando S'liampara: Alternative per un uso positivo degli errore nella didáctica de la matemática. *L'insegnaemento de la matemática e della scienze integrate. 11(4)*, pp 365-404. Italia.

Brousseau, G.(1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en Mathematiques. *Recherche en didactique des matematiques*.París, Francia.

Cardelle, M. (1983). "el alumno autorregulador de su aprendizaje". Ponencia presentada en el Vncuentro de Matemática de Las Regiones Nor-Oriental, Insular y Guayana. Ciudad Guayana, Venezuela.

Díaz, J. "Un estudio regional sobre errores algebraicos". Ponencia presentada en la Novena
Reunión Centro Americana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana, Cuba.

Díaz, A. (1999). *Detección y uso de errores matemáticos presentes en los alumnos y su influencia en el aprendizaje de la Matemática*. Trabajo de Grado de maestría. UPEL-IPM. Maturín, Venezuela.

Inacio, M. (1998). "Los profesores y los errores de los alumnos", 48, 19.

Noronha, H. (1995). Retrospectiva Histórica y perspectivas actuales del análisis de errores en Educación Matemática **Reverte**, 3 (4). Pp. 43-48. Río de Janeiro, Brasil.

Radatz, H. (1988). Student's errors in the mathematical learning process. **For the learning of Mathematics.** 11 (4). pp. 365-404.

Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las Matemáticas. **Epsilon** (38), pp. 185, 195. España.

Diseño de una secuencia de actividades para el análisis conceptual de la base de un espacio vectorial

Rosa Ma. Chargoy Espínola
Dpto. Matemática Educativa.Cinvestav-IPN, DGETI, México
rchargoy@mail.cinvestav.mx

Resumen
El objetivo de la investigación es detectar fuentes de dificultad para un estudiante en el entendimiento de la base de un espacio vectorial, en el marco teórico de los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural (Chargoy, 1999). Para tal fin, se diseñó una secuencia de actividades como resultado de un análisis preliminar desarrollado en cuatro fases eslabonadas en las que se aplicaron cuestionarios y una secuencia de actividades inicial. La primera fase se preparó en dos etapas: (A), se analizaron los resultados de una investigación por Oktaç (2001) y (B) se analizaron los resultados de aplicar el mismo problema a estudiantes del Cinvestav[1]. En la segunda y tercera fase se diseñó, aplicó y analizó un cuestionario; en la cuarta fase con los resultados anteriores, se aplicó y analizó una secuencia inicial de actividades. En las últimas tres fases los diseños se aplicaron a estudiantes del Cinvestav. Con base en estos resultados se diseñó la secuencia de actividades definitiva; se preparó el análisis *a priori*, se llevó a cabo la experimentación y por último el análisis *a posteriori*.

Marco teórico

Sobre el marco teórico, Sierpinska (1996b) expresa: "Los modos de pensamiento aparecen en la historia, primero el modo sintético-geométrico y de manera subsecuente el analítico-aritmético y analítico-estructural. Sin embargo, no se puede decir que uno elimine a los otros dos, ni cuál es el más relevante, se puede inferir que los modos de pensamiento coexisten en el álgebra lineal y no pueden separarse, su importancia radica en esa interacción. Así mismo, el desarrollo del álgebra lineal depende de la tensión entre ellos. Más que ver los modos de razonamiento en el álgebra lineal como niveles en el desarrollo del pensamiento algebraico, es preferible verlos como modos de pensamiento igualmente útiles cada uno en su propio contexto y para propósitos específicos, principalmente cuando interactúan".

Análisis preliminar

Primera fase (A). Oktaç (2001) reporta sobre un equipo que trabajó el inciso d) del siguiente problema, relativo a la base de un espacio vectorial[2].

Problema
Sea $u = (1, 0, 2, -1)$ un vector dado.
a) Encuentra un vector v tal que u y v son ortogonales.
b) ¿Hay un sólo vector ortogonal a u o hay varios?
c) Demuestra que todos los vectores v que son ortogonales a u forman un subespacio de R^4.
d) Encuentra una base para este subespacio.

Inicialmente los estudiantes dijeron que la base debería ser un conjunto de 4 vectores linealmente independientes. Las discusiones y razonamientos que muestran cómo recurren los estudiantes a distintos modos de pensamiento, se resumen en el siguiente párrafo:

- "*El conjunto de vectores ortogonales a un vector en R^2 es un conjunto de líneas paralelas; el conjunto de vectores ortogonales a un vector en R^3 es un conjunto de*

[1] Tanto los estudiantes del reporte ICMI del ITESM que pertenecían al programa de maestría en Educación, como los del Cinvestav del programa de maestría en Matemática Educativa, casi no tienen experiencia con los conceptos más abstractos del álgebra lineal.
[2] Para más detalles ver Chargoy, 2000.

planos paralelos. Será entonces el conjunto de vectores ortogonales a un vector en R^4 un conjunto de espacios paralelos a R^3". "Un plano puede ser subespacio de R^3 y con dos vectores independientes se define su base. Entonces el volumen puede ser un subespacio de R^4 y con tres vectores independientes se define su base también".

Observaciones

En su planteamiento los estudiantes expresan que deben ser 4 los vectores de la base, sin embargo, resolvieron el problema recurriendo a un dominio de mayor confianza para ellos: una imagen geométrica y a una mezcla de lenguaje geométrico y analítico.

Comentarios

En este caso les ayudó recurrir a la intuición, al lenguaje del modo sintético-geométrico, para resolver el problema propuesto.

Primera fase (B). Los 10 estudiantes del grupo de álgebra lineal, en el examen semestral de fin de cursos, resolvieron individualmente el problema propuesto, en este caso se tiene:

Observaciones

En general recurren al modo analítico-aritmético para resolver el problema, en la mayoría de los casos no llegan a determinar que el subespacio es de dimensión 3.

Comentarios

Una diferencia entre las etapas (A) y (B) fue la forma de trabajo, en (A) el equipo resolvió el problema, en (B), sólo un estudiante lo resolvió. Para continuar con la investigación se tuvo en cuenta que en general un problema en R^4 se les dificulta a los estudiantes, porque necesita otro nivel de abstracción[3], se pensó en un problema con la representación gráfica del modo sintético que diera luz sobre si este modo pudiera ayudar al estudiante a entender el concepto, con esta idea se diseñó el problema 1.

Segunda fase. En el examen de fin de semestre de álgebra lineal, el grupo de la primera fase (B) debía resolver individualmente el problema No.1:

<u>Problema No. 1</u>

a)En cada una de las gráficas siguientes decide si los vectores forman una base para R^2. Explica tu respuesta.

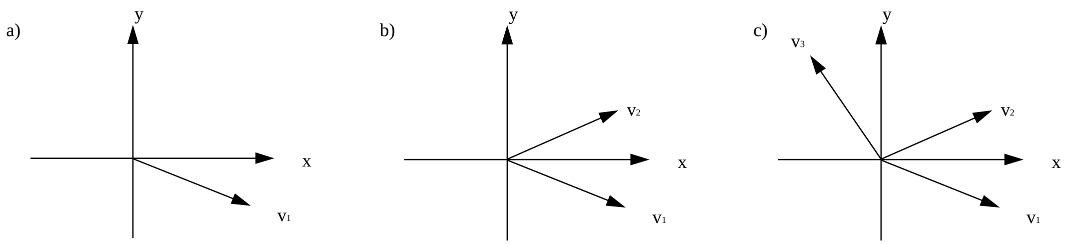


Fig. 1 sólo v_1 Fig. 2 v_1 y v_2 Fig. 3 v_1, v_2 y v_3

b) En los casos anteriores, decide si los vectores dados son:

1) Linealmente independientes.

2) Generan R^2. Explica tu respuesta.

c) Dibuja otra base para R^2.

---

[3] Tall, D. (1991): *Advanced Mathematical Thinking*. Science Education Department, University of Warwick. Ed. by David Tall. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht / Boston / London

Observaciones
Los estudiantes en su mayoría trabajaron en el modo analítico-aritmético. Sin embargo, emplean los tres modos: sintético-geométrico, analítico- aritmético y analítico-estructural.
Para algunos estudiantes los conceptos de independencia/dependencia lineal son confusos así como el concepto de generar un espacio vectorial. En un caso se dio la confusión de que los tres vectores del inciso c podían generar R^3.
Comentarios
Los estudiantes que resolvieron el examen, en su mayoría emplearon el modo analítico. En el problema 1, tuvieron más dificultades con los conceptos de independencia/dependencia lineal, así como generar vectores. Emplearon los tres modos de pensamiento, por lo cual se optó en modificar el problema 1 para la siguiente fase. Para evitar confusión con la imagen de vector se quitaron las direcciones de los ejes coordenados y en las indicaciones se expresó el concepto de base una vez que se cuestionó sobre la independencia lineal y generar vectores.

Tercera fase. Para ingresar a los cursos de Maestría en Matemática Educativa en el Cinvestav, los ocho estudiantes que presentaron el examen tenían que resolver el problema No. 2. No tuvieron guía de estudio, trabajaron de manera individual y sin límite de tiempo.
Problema No. 2

I. En cada una de las gráficas siguientes, decide si los vectores dados:
1) son linealmente independientes.
2) Generan R^2. Explica tu respuesta.

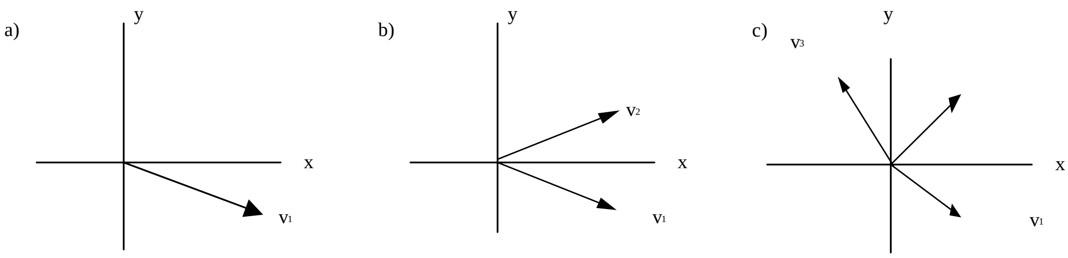


Fig. 1 sólo v_1 Fig. 2 v_1 y v_2 Fig. 3 v_1, v_2 y v_3

II. En cada una de las gráficas anteriores decide si los vectores forman una base para R^2. Explica tu respuesta.
III. Dibuja otra base para R^2.
IV. ¿Cómo defines la base de un espacio vectorial?

Observaciones
Un estudiante al ver las gráficas dijo que por “default” podría saber si los vectores eran o no linealmente independientes, sin embargo, no trabajó con representaciones geométricas. Es decir, él ve en la gráfica una situación pero no emplea el modo sintético-geométrico. En otro caso, el estudiante no ha tomado cursos de álgebra lineal, sin embargo dibuja sumas de vectores, el vector resultante y dibuja la base canónica. En este caso el estudiante emplea las representaciones gráficas del modo sintético pero no entiende el concepto.
La base que dibujan usualmente es la canónica y en un solo caso un alumno dibujó una base con vectores ortogonales de la misma magnitud fuera de los ejes coordenados.
Un alumno de manera tácita mencionó que los tres casos a), b) y c) son iguales, es decir, no ve diferencia entre ellos, sino generaliza, otros alumnos, con sus razonamientos llegan a establecer que los 3 casos son iguales.

Al considerar la gráfica de la figura del problema, algunos alumnos particularizan dando valores a los vectores representados.

Comentarios Generales sobre las tres etapas

a) *Los estudiantes en general, solo tiene la noción de base*

Los alumnos pueden escribir la definición de base, sin embargo, no tienen el entendimiento del concepto, en algunos casos confunden los conceptos de dependencia-independencia lineal, generar vectores; en otros sólo tienen ideas vagas o ajenas al concepto. Así mismo, pueden trazar la base canónica sin tener idea de lo que esto significa, es decir, representar geométricamente la base, pero no necesariamente entenderla.

b) *La forma de trabajar del estudiante*

Los alumnos usualmente emplean el modo analítico-aritmético, parece que al responder de esta forma creen que pueden hacer algo y en el modo geométrico no ven resultados. Sólo se encontró un estudiante que empleó el modo geométrico tratando de demostrar la independencia lineal de los vectores (aunque la demostración no fue correcta).

c) *Inferencias sobre las representaciones gráficas*

1º Algunos alumnos al ver las tres figuras en el problema 2 sólo ven un plano y la similitud entre una situación y otra. Posiblemente debido a la representación de los ejes se dio una diferencia entre los diseños 1 y 2. 2º En la indicación: “decide si los vectores dados son linealmente independientes”, confunda a los estudiantes al ver solo un vector.

Cuarta fase: Diseño de una secuencia de actividades

Se preparó la secuencia de actividades y se aplicó en entrevista a 3 alumnos que iniciaban la Maestría en Matemática Educativa, las actividades se dieron una a una. Los estudiantes tuvieron libertad de emplear cualquier opción de resolución lo que se hizo fue tratar de obtener mayor información sobre el ejercicio que iban resolviendo a través de preguntas ex profeso. Las entrevistas fueron grabadas, transcritas y analizadas.

Objetivo de esta etapa

La situación contempla que mediante el concepto que tiene el estudiante de vector (pudiera ser para él un vector de fuerza o un vector geométrico), de manera intuitiva construya un espacio vectorial, y se percate que la base es necesaria para simplificar la notación, como un elemento para facilitar la descripción del espacio vectorial y que además funge como un ancla para el espacio vectorial. La secuencia coloca al estudiante frente a un problema en el modo sintético-geométrico, para observar si en este modo puede interpretar una base de un espacio vectorial, y precisar cuál es esa base.

El diseño de actividades de la secuencia no induce situación particular con respecto a los vectores en el plano, el alumno tiene toda la libertad para situarlos. Observando así su desempeño en el modo sintético-geométrico: cómo expresa los vectores, la posición en que los coloca en el plano: paralelos, coincidentes etc. y la construcción de un sistema de referencia como orientación y punto de partida, la base que emplea y su relación con otros conceptos.

Actividades

Imagina una caja que contiene 13 flechas algunas de diferentes magnitudes y algunas de la misma magnitud. Se te pide saques de la caja 5 flechas y las coloques en un plano. Interpreta las flechas como vectores.

1) ¿Puedes construir espacios vectoriales con estos vectores?

2a Si es afirmativa tu respuesta, ¿cómo y cuáles espacios vectoriales puedes construir?
2b Si es negativa tu respuesta ¿por qué no puedes construir espacios vectoriales?
3) Explica cuál fue el procedimiento que te llevó a construir los espacios vectoriales.
4) ¿Cuál es la base del espacio que construiste?
5) ¿De cuántos elementos consta la base del espacio que construiste?
6) En la figura que trazaste ¿tienes un subespacio de R^2?
7) ¿Tienes uno o varios subespacios?

Observaciones de las cuatro fases

A. El estudiante usualmente al relacionar el espacio vectorial de dimensión 1, R^1 y la recta numérica no establece diferencia entre estos conceptos. Lo mismo sucede con el espacio vectorial de dimensión 2 R^2 y el plano Cartesiano, es decir, no establece diferencia entre estos conceptos. Existe una confusión entre ver el plano a través de los ejes coordenados y definir el espacio vectorial con su compleja estructura.

B. El estudiante usualmente solo reconoce la base canónica, es posible que en el modo sintético-geométrico esta base le impida considerar un subespacio R^1 en R^2. Los ejes coordenados implícitamente juegan el papel de "base" del espacio vectorial en R^2.

C. El modo sintético-geométrico algunas veces lleva al estudiante a una generalización concreta, es decir, a establecer una relación lineal en la construcción de espacios vectoriales de dimensiones mayores con los vectores de R^2, de manera que con tres vectores de R^2 expresa que puede construir R^3, con 4 R^4, con 5 R^5, etc.

D. Para llegar al concepto de base de un espacio vectorial el alumno tiene que sintetizar los conceptos que lo integran y establecer relaciones entre ellos, sin embargo, los conceptos de combinación lineal, independencia lineal y generar un espacio vectorial se encuentran aislados en el estudiante. Una vez que al alumno tiene los axiomas de espacio vectorial, ya no establece relación con la base del mismo.

Estos resultados influyeron para modificar la secuencia de actividades. El diseño de manera general, trata de observar la tensión entre los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural en el estudiante en la construcción del concepto de base de un espacio vectorial. Observar si puede llegar al entendimiento de los conceptos de cada una de las actividades. La secuencia informará sobre la evolución del conocimiento del estudiante para enfrentar los problemas

Diseño de una secuencia para la construcción del concepto de base de un espacio vectorial

La secuencia de actividades inicia en modo sintético-geométrico y continúa en el analítico, para observar si el estudiante puede interpretar la base de un espacio vectorial en estos modos. Así, surgen preguntas por ejemplo: ¿cómo relaciona la base con el espacio vectorial?, ¿relaciona los conceptos de independencia lineal, generar vectores con la base?

Secuencia de Actividades

Imagina que una caja contiene 13 flechas algunas de diferentes longitudes y algunas de la misma longitud.

I. Se te pide que saques de la caja 5 flechas y las representes en un plano. Interpreta las flechas como vectores.

II. ¿Puedes expresar un vector de R^2 como combinación lineal de algunos que trazaste?

III. ¿Con estos dos vectores que trazaste puedes generar vectores? ¿Si es así cuál es el conjunto que puedes generar?
IV. ¿Puedes construir espacios vectoriales con estos vectores? Si tu contestación es afirmativa, entonces: ¿Cómo y cuáles espacios vectoriales puedes construir? ¿Cuál es el procedimiento que te lleva a construir los espacios vectoriales?
V. En la figura que trazaste ¿tienes un subespacio de R^2? ¿Tienes uno o varios subespacios? ¿Puedes construir uno solo o varios subespacios de R^2?

Análisis a priori

El análisis *a priori* se desarrolló con base a los siguientes puntos: Contenido matemático de respuestas aceptables. Las dificultades que se le pueden presentar al estudiante. Respuestas no aceptables. Marco teórico. Relaciones de la base con otros conceptos

Experimentación

Las actividades se aplicaron a 6 estudiantes, en cada una trabajaron individualmente y después discutían en dos equipos de tres integrantes cada uno. Al final de la sesión se dio un debate entre los dos equipos. Las entrevistas se grabaron y transcribieron. La investigación se encuentra en la etapa del análisis *a posteriori* para la obtención final de resultados, sin embargo, a la fecha se tienen algunas conclusiones.

Conclusiones

Se considera que la investigación ha observado el desempeño del estudiante al trabajar un problema en el modo sintético-geométrico y con frecuencia se confunde, en ocasiones no alcanza a entender, por ejemplo, la gran diferencia que existe entre los conceptos de plano cartesiano y espacio vectorial sin llegar a ver la compleja estructura de este último.
La didáctica del álgebra lineal repercute sobre el estudiante en el concepto de base de un espacio vectorial de manera decisiva, debido al uso frecuente de la base canónica, se puede convertir a la vez en un obstáculo que impida su entendimiento así como el de subespacio.
La epistemología de la base por su parte, requiere de interacciones y relaciones entre los conceptos de independencia lineal y generación de vectores, si estos conceptos se manejan aisladamente la esencia de la base no se entiende. De esta manera el estudio actual sobre la base en términos de un análisis cartesiano mecanicista puede dificultar su entendimiento.
Se encuentra una separación entre los enfoques sintético y analítico, de tal forma, que aparece la necesidad de establecer un equilibrio dinámico en la forma de emplear los modos de pensamiento y evitar un desequilibrio al usar sólo uno sin considerar el otro.

Referencias bibliográficas

Chargoy, R. (1999): *Marco teórico de los Modos de pensamiento sintético y analítico: el caso de la base de un espacio vectorial*. Actas de la Relme XIII. Santo Domingo, República Dominicana.
Chargoy, R. (2000): *Modos de pensamiento sintético y analítico: el caso de la base de un espacio vectorial*. Actas de la Relme XIV. Panamá, República de Panamá.
Oktaç, A. (2001): *The Teaching and Learning of Linear Algebra: Is it the same at a Distance?*. The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. Edited by H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent. Melbourne, Australia. Volume 2.
Sierpinska, A. (1996b): *Synthetic and Analytic modes of thinking in linear algebra*, BaCoMeT 4 publications. H.N. Jahnke, N. Knoche;-M. Otte (Eds), Interaction between History of Mathematics and Mathematics Learning. Göttingen. Vandenhoeck and Ruprecht.

Estudio comparativo sobre los resultados obtenidos por alumnos que aprobaron un curso de álgebra vs. los que lo reprobaron

Ma. Beatriz Gómez Talancón
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Campus Cuernavaca, México
begomez@campus.mor.itesm.mx

Resumen
El objetivo de este trabajo es hacer un análisis de los resultados obtenidos por los alumnos inscritos en el curso de Matemáticas I, de preparatoria, en el semestre agosto-diciembre de 1999, a fin de detectar si existen elementos del curso de índole cognoscitivo o de manejo de algoritmos que representen un obstáculo para el éxito escolar de los alumnos que cursan la materia de Álgebra, o bien, referentes a la pertinencia de las actividades propuestas. Esto con el propósito, por un lado, de apoyar oportunamente el proceso de aprendizaje realizado por los alumnos que estaban repitiendo la materia y por otro fortalecer el rediseño del curso de álgebra, mejorando, cambiando o sustituyendo los aspectos que lo requirieran. El curso está rediseñado y montado en la plataforma tecnológica Lotus Notes/Learning Space.
El estudio se realizó durante el semestre enero-mayo del 2000, con alumnos repetidores. Su fracaso escolar en el semestre anterior podría atribuirse a varios factores: su adaptación al Tec, poco compromiso ante su aprendizaje, base de conocimientos débiles, muchos contenidos en el programa para su ritmo de aprendizaje, etc.

Antecendentes

En el Tecnológico de Monterrey, desde 1997, se está llevando a cabo el rediseño de cursos. En ellos deben incorporarse acciones y/o actividades que permitan lograr el perfil requerido por los profesionistas del mundo actual, además de los conocimientos señalados en el programa oficial de cada curso. Lo innovador de este proyecto es que además del rediseño didáctico de los cursos, éstos deben estar montados en la plataforma tecnológica Lotus Notes/Learning Space.
En el rediseño didáctico del curso de álgebra se definieron sus intenciones educativas, objetivos, metodología, estrategias didácticas, actividades de clase y extraclase, el rol esperado del alumno y el profesor en la realización de cada tipo de actividad propuesta, los apoyos tecnológicos requeridos, el sistema de evaluación y la bibliografía. Una vez que se desarrollaron estos elementos, se montó el curso en la plataforma tecnológica Lotus Notes/Learning Space la cual consta de:

1. El ***Schedule,*** base donde se localiza toda la documentación didáctica del curso y su calendarización
2. El ***Media Center,*** lugar donde se colocan las actividades, formatos, simuladores, ligas a espacios virtuales, apoyos didácticos, etc.
3. El ***Course Room,*** espacio virtual, en el cual los alumnos y profesores interactúan asincrónicamente.
4. El ***Profile,*** base donde se ingresan los datos personales de alumnos y maestros
5. El ***Assessments,*** base exclusiva para los profesores, en la cual pueden generar tareas, exámenes, encuestas, votaciones, etc.

El curso de Matemáticas I, está bajo este Modelo Educativo, su rediseño didáctico se llevó a cabo durante el semestre enero-mayo de 1999, la primera ocasión que se implementó en el aula fue en agosto-diciembre de 1999 y el análisis y evaluación de su implementación en el semestre enero-mayo del 2000.

En el objetivo general del curso se señala que los alumnos deben desarrollar, las destrezas y habilidades necesarias que les permitan tener un buen manejo del álgebra, por lo que varias de las actividades propuestas, son ejercicios de automatización.

Objetivo

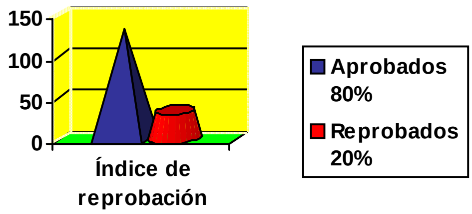
El objetivo de este trabajo fue hacer un análisis de los resultados obtenidos por los alumnos inscritos en el curso de Matemáticas I, de preparatoria, en el semestre agosto-diciembre de 1999, a fin de detectar si existen elementos del curso de índole cognoscitivo o manejo algorítmico que representen dificultad para su aprendizaje a los alumnos, o bien referentes a la pertinencia de las actividades propuestas en el curso en cuanto a tiempo, contenido y evaluación de las mismas. Esto con el propósito, por un lado, de apoyar oportunamente el proceso de aprendizaje realizado por los alumnos que estaban repitiendo la materia, y por otro fortalecer el rediseño del curso de álgebra, mejorando, cambiando o sustituyendo los aspectos que lo requirieran.

Metodología

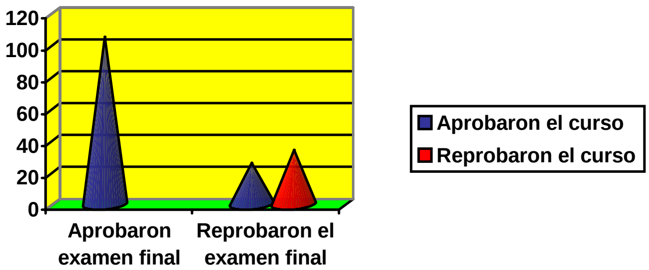
El estudio se realizó durante el semestre enero-mayo del 2000, con alumnos repetidores. Su fracaso escolar en el semestre anterior podría atribuirse a varios factores: su adaptación al Tec, poco compromiso ante su aprendizaje, base de conocimientos débiles, muchos contenidos en el programa para su ritmo de aprendizaje, etc.
Por lo anterior se consideró importante iniciar este trabajo con un análisis de los resultados del examen final de los alumnos que cursaron la materia en el semestre agosto-diciembre de 1999 y de la cual formaban parte los alumnos que en ese momento estaban repitiendo la materia, de tal manera que al hacer un análisis comparativo entre los resultados obtenidos por los alumnos que habían aprobado el curso vs. los que no, pudiera determinarse si existieron elementos que influyeron en su fracaso escolar.
Otro aspecto que se tomó en cuenta fue el Ambiente del Aula, por lo que se le solicitó a un facilitador didáctico del Campus, visitar al grupo en el salón de clases para que a través de la conversación que entablara con los alumnos, obtuviera información sobre si los objetivos se cumplían de acuerdo a lo planeado, validara si las estrategias de enseñanza eran las adecuadas, si las actividades propuestas cumplían su objetivo, etc. Para este mismo fin, también se aplico una encuesta basada en la escala de ambiente escolar (EAE) de Trickett y Moos (1973) y adaptada a las características de nuestro Instituto en congruencia con las características del cambio educativo que estamos viviendo.

Análisis de los resultados del examen final

La población total estaba conformada por 165 alumnos de los cuales 131 aprobaron el curso y 34 lo reprobaron.



Al analizar los resultados del examen final de los alumnos que aprobaron vs con los que reprobaron el curso, se encontró que de los 131 alumno que aprobaron el curso 26 reprobaron el examen final y que ningún alumno que reprobó el curso tuvo calificación aprobatoria en el examen final.



De los resultados anteriores, surgió la pregunta ¿Qué elementos le permiten aprobar la materia a un alumno que no tiene los conocimientos mínimos necesarios para aprobar el examen final?. Para intentar darle respuesta, se establecieron dos hipótesis:

1. El porcentaje que representa la calificación del portafolios[1] en la calificación final, permite que alumnos que tienen un bajo rendimiento, aprueben el curso.
2. Qué los conocimientos de alumnos capaces no se vean reflejados en el examen final, por encontrarse bajo presión al momento de resolverlo.

Para sustentar la primer hipótesis, se analizó la bitácora que llevaron a cabo los profesores sobre la evaluación continúa y sumativa de cada alumno, observándose que alumnos que aún cuando reprueban los exámenes parciales y final sobre conocimientos, logran aprobar la materia por el porcentaje de calificación que representa el portafolios. El 64% de los alumnos que reprobaron el examen final pero que aprobaron el curso, entran en este esquema, por lo que subjetivamente podríamos establecer que el otro 36% estarían en el caso de la segunda hipótesis o algún otro factor que no contemplamos.

Contenidos e índice de dificultad de las preguntas del examen final

[1] El portafolios es una carpeta que contiene: apuntes, investigaciones, ejercicios realizados en clase y extraclase. Tiene carácter de obligatorio y vale un 20% de la calificación de cada parcial, por lo que representa ya ponderada el 12% de la calificación final que obtiene el alumno.

El examen final contenía catorce reactivos, cada uno de ellos evaluaba temas distintos y estaban ordenados con la secuencia de como se habían abordado en el curso. Cada pregunta del examen correspondía a los siguientes temas:

1. Conjunto de los números reales
2. Jerarquía de operaciones
3. Suma aritmética
4. Multiplicación y división aritmética
5. Suma Algebraica
6. Multiplicación y división algebraica
7. Productos notables
8. Factorización
9. Lenguaje algebraico
10. Suma de fracciones algebraicas
11. Multiplicación y división de fracciones algebraicas
12. Operaciones con radicales
13. Solución de ecuaciones
14. Solución de inecuaciones

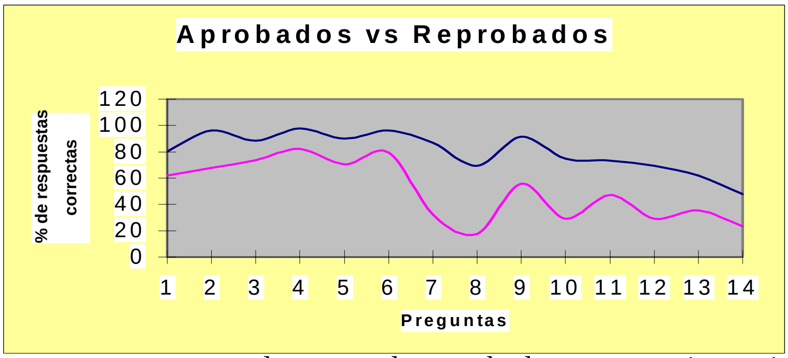
Para realizar el análisis de los resultados del examen final se construyó una matriz que contiene el valor de uno para las respuestas correctas y cero para las incorrectas, posteriormente se calculó, por separado, el porcentaje de respuestas correctas de la población de alumnos que aprobó el examen y el de la población de alumnos que lo reprobaron.

Para determinar el índice de dificultad se dividió el porcentaje de respuestas correctas del grupo de alumnos que aprobaron el examen final entre el porcentaje de respuestas correctas de los alumnos que reprobaron el examen final. Considerando que entre mayor resultaba el índice mayor era el grado de dificultad.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes: en el renglón de aprobados aparece el porcentaje de éxitos obtenidos en cada pregunta por el grupo que aprobó el curso y en el renglón de reprobados, el porcentaje de éxitos obtenidos en cada pregunta por el grupo que reprobó el curso. Como se muestra en la siguiente tabla, del reactivo referente a Factorización es el que mostró mayor grado de dificultad y los de menor grado los referentes a multiplicación y división aritmética y algebraica, respectivamente

Alumnos	**Número de Pregunta**													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Aprobados	80	96	89	98	90	96	87	70	92	75	73	70	62	48
Reprobados	62	68	74	82	71	79	32	18	56	29	47	29	35	24
Índice de Dificultad	1.3	1.4	1.2	1.2	1.3	1.2	2.7	4.0	1.6	2.5	1.6	2.4	1.8	2.0

Gráfica comparativa de los resultados del examen final, entre la población de alumnos aprobado y reprobados



La gráfica muestra como el grupo de aprobados se mantiene siempre sobre la de reprobados, siendo notorio que en los temas “Productos Notables” y “Factorización”,

correspondientes a las preguntas 7 y 8, es donde se localiza la mayor distancia entre los dos grupos. Con ello podríamos inferir que en estos temas se debe poner mayor énfasis durante el proceso de aprendizaje de los alumnos para asegurarse que los maneje con eficiencia y así evitarle fracasos en el manejo de los temas posteriores que requieren de su aplicación.
Para dar respuesta a lo anterior, se revisaron las actividades propuestas en el Rediseño sobre los temas Productos Notables y Factorización, para mejorarlas e incluir otras que reforzaran el tema, tomando en cuenta que al trabajar los Productos Notables, el estudiante debe desarrollar la capacidad para identificar patrones que le sirvan de referentes cuando tenga que factorizar expresiones algebraicas que los contengan. El proceso de factorización, es una operación de gran relevancia para el buen manejo del álgebra, por su aplicación en múltiples algoritmos, como son los de las operaciones con fracciones algebraicas, la simplificación de radicales, la solución de ecuaciones e inecuaciones, etc. y que son los temas subsecuentes en el curso.

Diagnóstico del ambiente en el aula

Para conocer que ocurría en el aula y verificar si los objetivos se estaban cumpliendo de acuerdo a lo planeado, en cuanto a la organización y estructuración de la clase, las relaciones interpersonales,, el rol del profesor, innovaciones educativas, realización de actividades, uso de la plataforma, etc. un facilitador didáctico del Campus visitó a los alumnos en el salón de clase y conversó con ellos. También se aplicó una encuesta denominada Observación del Ambiente en el aula, con el propósito de cruzar la información recabada en la encuesta y la proporcionada por el facilitador.
En cuanto a la encuesta sobre el clima del aula, se utilizó una basada en la escala de ambiente escolar (EAE) de Trickett y Moos (1973), adaptada a las características de nuestro Instituto en congruencia a las del cambio educativo propuesto. La encuesta contiene 59 preguntas agrupadas en cinco categorías y éstas a su vez en subcategorías a las que les corresponden varias preguntas relacionadas a éstas.

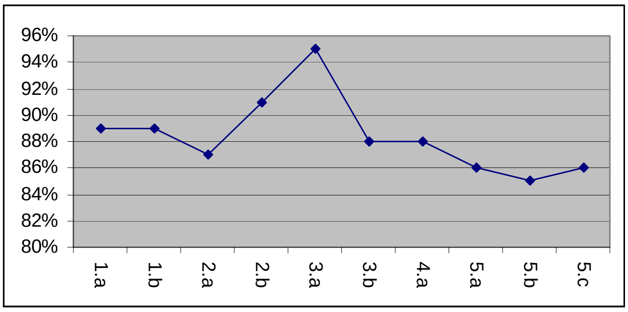
1. Organización y estructuración de la clase
    a) Orden y estructura (preguntas 1, 9, 21 y 42)
    b) Claridad de normas (preguntas 6, 10, 43 y 51)
2. Relación interpersonal
    a) Entre los miembros del grupo (preguntas 23, 33, 41, 49 y 54)
    b) Con el profesor (preguntas13, 30, 34 y 48)
3. Rol del profesor
    a) Apoyo del profesor (preguntas 8, 11, 18, 20, 22, 36, 37, 44, 52 y 57)
    b) Control del profesor (preguntas 31, 35, 39, 40 y 46)
4. Innovación (preguntas 4, 17, 24, 28, 55, 56 y 59)
5. Realización de actividades.
    a) Orientación a la tarea (preguntas 14, 15, 25, 26, 29 y 47)
    b) Grado de implicación (preguntas 12, 19, 27, 38, 45, 50, 53 y 58)
    c) Exigencia (preguntas 2, 3, 5, 7, 16 y 32)

En la encuesta se valoró cada pregunta: con UNO si estás totalmente en desacuerdo, con DOS si estás regularmente de acuerdo y con TRES si estás totalmente de acuerdo. El puntaje máximo que se podría obtener en cada rubro sería 63, ya que fueron 21 alumnos los encuestados.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Categoría	Subcategorías	Suma	Cantidad Deseable	%
1. Organización y estructura	a. orden y estructura	223	252	89%
	b. claridad de normas	223	252	89%
	Subtotal			89%
2. Relación interpersonal	a. entre los miembros del grupo	273	315	87%
	b. con el profesor	229	252	91%
	Subtotal			89%
3. Rol del profesor	a. apoyo del profesor	571	630	95%
	b. control del profesor	276	315	88%
	Subtotal			91%
4. Innovación	a. innovación	387	441	88%
	Subtotal			88%
5. Realización de actividades	a. orientación a la tarea	326	378	86%
	b. grado de implicación	423	504	85%
	c. exigencia	326	378	86%
	Subtotal			85%

Perfil por subcategoría



En la gráfica puede observarse que, a juicio de los alumnos, la realización de tareas fue el punto más débil, en particular su grado de implicación, por lo que se diseñaron actividades para realizar en equipo que conllevaran a un mayor compromiso de los alumnos ante su propio aprendizaje y que al mismo tiempo reforzaran su relación interpersonal.
A partir de las recomendaciones proporcionadas por el facilitador didáctico al profesor, y los resultados de la encuesta, se llevaron a cabo las siguientes acciones:

a) Se inició el diseño y producción de tutoriales que les permitieran a los estudiantes reforzar por cuenta propia temas que no les quedaran claros en el salón de clase.
b) Se eliminaron ligas innecesarias a varios documentos con el fin de facilitar la localización de tareas en la plataforma tecnológica.
c) Se hizo una evaluación sobre la cantidad de tareas extraclase.
d) Se diseñaron actividades de tipo motivacional para ser realizadas en equipo.

Conclusiones

Se puede concluir que los cambios o mejoras que se incorporen al rediseño de un curso deben ser una respuesta a los problemas identificados por el profesor. Es por ello que éste debe recurrir de forma cotidiana a la reflexión crítica sobre su propia acción docente como una forma de enfrentar su práctica y generar un proceso de mejora continua.

Referencias bibliográficas

Pérez Y. (1995). *Manual práctico de apoyo docente.* Centro para la Excelencia Académica", ITESM, Campus Monterrey.
Zarrar, C. (1994). *Habilidades básicas para la docencia*. México: Editorial Patria.
Espíndola Castro José Luis. (1999). *Reingeniería Educativa.* México. Editorial Trillas.
Martín Pérez Marisa. *Rediseño de la Práctica Docente.* Centro para la Excelencia Académica, ITESM, Campus Monterrey.

Exploración y análisis de los errores algebraicos en el aprendizaje de funciones

Adriana Engler, Silvia Vrancken, Marcela Hecklein, Daniela Müller, Lilián Cadoche
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral. Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen
Al poner en marcha un diseño curricular con un grupo de alumnos el docente necesita tomar decisiones muy importantes de carácter general: selección y organización de contenidos; organización, desarrollo y control del trabajo en el aula; prioridades en el proceso de construcción del conocimiento; asignación de significados por parte de los alumnos y criterios para valorar los logros en el aprendizaje y el tratamiento adecuado de los errores. La tarea docente con frecuencia encuentra obstáculos para el análisis y tratamiento de las unidades didácticas y la consideración curricular de los errores. Los integrantes de la cátedra Matemática Básica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral regularmente observamos el tipo, calidad y cantidad de errores algebraicos que en forma reiterada cometen los alumnos y consideramos que es imprescindible que ellos lo reconozcan y asuman la necesidad de superar estos obstáculos para lograr aprendizajes significativos. A fin de revalorizar el análisis crítico del error como instrumento para mejores propuestas de enseñanza decidimos, en una primera etapa, detectar y tipificar errores algebraicos de los alumnos ingresantes a la universidad. En este trabajo presentamos los resultados obtenidos al indagar sobre los errores cometidos por doscientos cuarenta y ocho alumnos ingresantes a Ingeniería Agronómica. Durante esta primera etapa exploratoria de análisis de construcciones erróneas trabajamos con los problemas evaluados en el parcial para regularizar la asignatura que incluyó los temas referidos a función, función de primer grado y función de segundo grado. Para la caracterización de los mismos tuvimos en cuenta la taxonomía ofrecida por Radatz para clasificarlos a partir del procesamiento de la información.
Convencidas de que el error en matemática es una herramienta importante en su enseñanza es que consideramos que esta información junto con otra recogida a través de herramientas previamente establecidas nos van a permitir diseñar secuencias didácticas para la enseñanza de funciones que prioricen el tratamiento de los errores para localizar obstáculos en la formación de conceptos, detectar dificultades y realimentar el proceso de aprendizaje. Estos diseños utilizarán el error como parte del proceso de construcción de los conocimientos matemáticos y de la comprensión de la naturaleza y métodos de la disciplina. Estas propuestas deberán promover la comprensión y la reflexión.

Desde hace tiempo se asegura que en la práctica docente es posible estructurar cada unidad didáctica en base a cuatro componentes (objetivos, contenidos, metodología y evaluación) como un proceso de reflexión en profundidad donde intervienen algunos elementos conceptuales y bases disciplinares diferentes a las componentes mencionadas. ¿Qué parámetros permiten estructurar las distintas unidades didácticas en el área de Matemática?. Según Rico (1997), se consideran organizadores del currículo a *aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas.* Un tipo de conocimiento debe ser objetivo y generar diversidad de opciones para ser considerado un organizador. El mismo Rico considera como organizadores los siguientes: errores y dificultades en el aprendizaje, representaciones y modelos, fenomenología de los conocimientos , recursos y materiales y la evolución histórica.
Estos organizadores ofrecen un marco conceptual para la enseñanza de la matemática, un espacio de reflexión acerca de la complejidad de los procesos de transmisión y construcción del conocimiento y criterios para abordar y controlar esa complejidad. Ellos, junto con los propios contenidos no agotan las posibilidades de reflexionar sobre cada una de las unidades del currículo de matemática desde un planteamiento didáctico.
Uno de estos organizadores, los errores, forman parte de las producciones de los alumnos durante el aprendizaje de matemática. Los mismos constituyen datos objetivos que

encontramos permanentemente a lo largo del proceso educativo. Por ello el análisis de los errores en el aprendizaje de Matemática se transformó en una cuestión de permanente interés en las investigaciones en Educación Matemática. Nuestra experiencia en cursos de Matemática Básica en la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral nos permiten asegurar que a menudo nos enfrentamos con errores que cometen nuestros alumnos en su trabajo diario con la Matemática. Desde simples y sencillos errores "de cálculo y operatoria" hasta profundos errores conceptuales. El error es parte integrante del conocimiento humano, a lo largo de la historia del desarrollo del conocimiento científico encontramos el error como un factor que contribuye al avance de las ciencias. Si analizamos diferentes momentos en el desarrollo de la Matemática encontramos que proposiciones consideradas verdaderas con el tiempo resultaron siendo falsas.

Los estudios de errores a lo largo de la historia y con el transcurso de los años se fueron orientando según las corrientes pedagógicas y psicológicas predominantes y por el currículo matemático en los diferentes sistemas educativos. En Estados Unidos, desde 1917 y a través de Thorndike comienza la difusión y el conocimiento de trabajos sobre la determinación de errores. A partir de ese momento los aportes más importantes sobre el tema los realizaron Buswell, Judd y Brueckner hasta la década del 30 donde se priorizó el análisis de las dificultades especiales, la persistencia de técnicas erróneas individuales y la agrupación y clasificación de errores. Muchos de ellos han tenido influencia en investigaciones realizadas en años recientes en España. A partir de los años setenta surgieron nuevas corrientes que intentaron diseñar actividades, metodologías y organización del currículo escolar con el objeto de disminuir los errores. Muchos autores sostienen y presentan estudios que avalan esta afirmación que los errores no tienen un carácter accidental. En Alemania, el interés por estudiar los errores toma fuerza cuando crece la importancia de la pedagogía empírica entre las dos guerras mundiales. En los trabajos se nota de influencia de las escuelas predominantes en psicología: la psicoanalítica, la Gestalt y la psicología del pensamiento. Entre los años 1922 y 1928 investigadores como Weiner, Seseman, Kiesling y Rose trataron de: establecer patrones de errores en todas las materias y para las distintas edades, proporcionar una fundamentación psicológica adecuada para la enseñanza de la matemática considerando a los errores surgidos de una combinación incorrecta de tendencias, estudiar la predisposición especial de las personas para equivocarse y la manera de tratar el error y establecer una clasificación de las causas de error en educación matemática. A partir de la década del 60 comienza de nuevo con Schlaak, Glück y Pipping. Algunos de los aportes más destacados fueron: la determinación y descripción de causas de error, la tipificación y clasificación de los errores que están relacionados con el cálculo y interpretación de los errores y dificultades desde una perspectiva psicológica. En la Unión Soviética el análisis de los errores y las dificultades individuales del aprendizaje tomó fuerza a principios de los años sesenta cuando se consolidó la investigación sobre educación matemática. Los principales referentes son los investigadores Kuzmitskaya y Menchinskaya quienes lograron determinar y describir causas de los errores.

En España, desde la década del 50 y con mucho más dedicación en los últimos años son numerosos los autores (Villarejo, Fernández Huerta, Centeno, Rico, Castro, Gonzalez, Coriat y Molina entre otros) que se movilizan en torno a este tema. Los más destacados refieren a tratar de determinar los errores más frecuentes, a presentar bases para la enseñanza correctiva y a la necesidad de interpretar los mismos para orientar el proceso de enseñanza. Hasta el momento se realizaron numerosos intentos y muy serios para desarrollar un sistema de categorización de errores pero no se ha logrado superar los niveles meramente descriptivos. Aún no se ha completado un desarrollo teórico sistemático que permita clasificar, interpretar y predecir los errores en términos de obstáculos, en función de argumentos fundamentalmente epistemológicos. No podemos desconocer que los errores son la manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables: profesor, alumno, currículo, contexto sociocultural, entre otras. Resulta difícil aislar y delimitar las causas de un error con miras a su tratamiento.

Radatz realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:

Errores debidos a dificultades de lenguaje. El aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extrajera y una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores.

Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales provoca dificultades para muchos jóvenes en la realización de tareas matemáticas.

Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática.

Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En este grupo de errores se consideran los siguientes: errores por perseveración, errores de asociación, errores de interferencia, errores de asimilación y errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

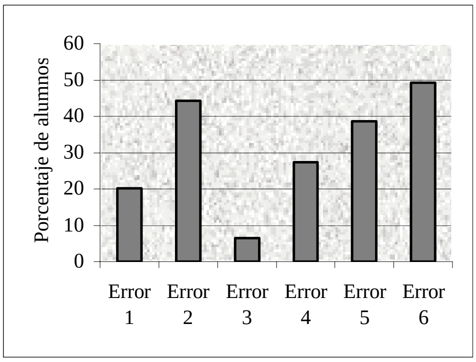
Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Se aplican con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Teniendo en cuenta algunas recomendaciones del Dr. Luis Rico y a fin de revalorizar el análisis crítico del error como instrumento para mejores propuestas de enseñanza decidimos, en una primera etapa, detectar y tipificar errores algebraicos de los alumnos ingresantes a la universidad. En este trabajo mostramos los datos obtenidos al indagar sobre los errores cometidos por doscientos cuarenta y ocho alumnos ingresantes a Ingeniería Agronómica. Durante esta primera etapa exploratoria de análisis de construcciones erróneas trabajamos con los problemas evaluados en el parcial para regularizar la asignatura que incluyó los temas referidos a función, función de primer grado y función de segundo grado. Para la caracterización de los mismos tuvimos en cuenta la taxonomía ofrecida por Radatz. Reseñamos a continuación algunos de los resultados de nuestra experiencia.

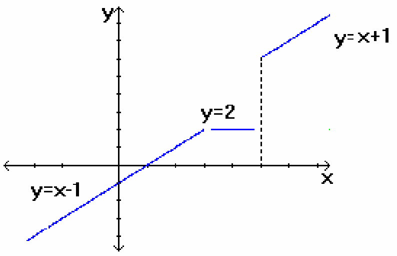
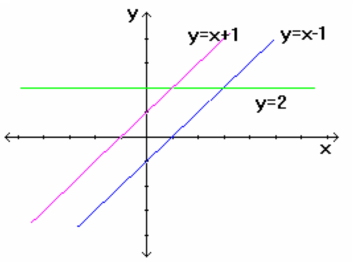
EJERCICIO 1) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 2 & \text{si} \quad 3 < x < 5 \\ x+1 & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$

a) represéntela gráficamente. **b)** defina su dominio y su conjunto de imágenes.
c) ¿admite inversa?. Justifique la respuesta. **d)** halle f(3). ¿Existe algún otro valor de x tal que su imagen coincida con f(3)? **e)** indique qué función algebraica queda definida en cada tramo.

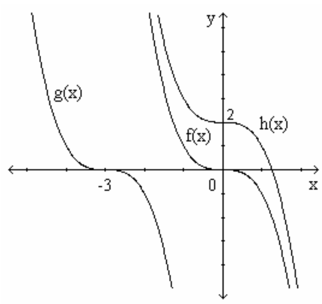
Errores



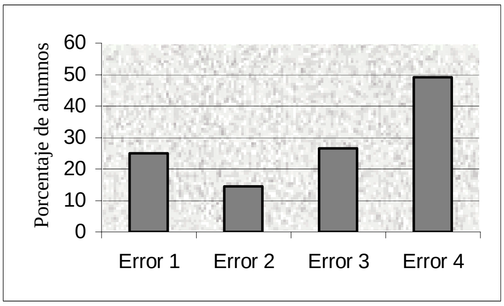
Error 1:construye mal la gráfica correspondiente a uno o más tramos.
Error 2: la gráfica construida no es función (no cumple unicidad, no cumple existencia)
Error 3: construye tres sistemas de coordenadas distintos.
Error 4: toma el dominio o conjunto de imágenes como discreto.
Error 5: no identifica f(3).
Error 6: no sabe interpretar cuando admite inversa (no analiza la biyectividad o bien confunde la misma con las condiciones de existencia y unicidad).

EJEMPLOS COPIADOS DE LOS TRABAJOS DE LOS ALUMNOS	**DESCRIPCIÓN**	**TIPO DE ERROR SEGÚN LA CAUSA**
$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \le 3 \\ 2 & \text{si} \quad 3 < x < 5 \\ x+1 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$	*Errores derivados del mal uso de los símbolos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje.*	DIFICULTADES DEL LENGUAJE
	Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.	APRENDIZAJE DEFICIENTE DE LOS PRERREQUISITOS
	Razonamientos o asociaciones incorrectas o de interferencia (no saben transferir el concepto de función en una función definida por tramos)	ASOCIACIONES INCORRECTAS O RIGIDEZ DEL PENSAMIENTO De asociación
Identificación de intervalos de números reales como conjuntos discretos D = {...,–2,–1,0,1,2,.....} CI= R – {3, 4, 5}	Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.	APRENDIZAJE DEFICIENTE DE LOS PRERREQUISITOS

EJERCICIO 2) Dada la gráfica de la función $f(x) = -x^3$, escriba las leyes de h(x) y g(x) e indique cómo se obtienen sus gráficas teniendo en cuenta transformaciones sobre la función f(x) (Escriba h(x) = ...y g(x) = ...)



Los errores más significativos encontrados fueron:
Error 1: escribe $g(x) = -x^3 - 3$ o $g(x) = -x^3 + 3$.
Error 2: escriben $g(x) = (-x + 3)^3$.
Error 3: no explica cómo se obtienen las gráficas.
Error 4: escriben las ecuaciones con otros errores (no tienen en cuenta el signo menos, multiplican f por –3 para obtener g).



Pensamos que los errores cometidos en el ejercicio enunciado se deben a:

- Dificultades para obtener información espacial: al alumno le cuesta obtener información de la representación gráfica y usarla para escribir la ley de la función
- Aprendizaje deficiente de los prerrequisitos
- Asociaciones incorrectas: la información fue mal procesada debido a fallas de percepción.

Con respecto al primer punto podemos decir que los alumnos suelen presentar dificultades en el manejo conjunto de varios sistemas de representación (descripciones verbales, tablas, gráficas y fórmulas) para un mismo concepto y es importante poder trabajarlas debido a la estrecha relación de estas representaciones con los procesos de enseñanza y aprendizaje. Hay que ayudar al alumno para que estas relaciones les permitan elaborar y construir objetos mentales.

EJERCICIO 3) Se sabe que el crecimiento en gramos por día (g/día) de un pollito BB es función de primer grado de la cantidad de antibiótico en miligramos por día (mg/día) que se le da de comer.
a) defina la función que relaciona la tasa de crecimiento c (g/día) con la cantidad de antibiótico (mg/día) teniendo en cuenta que si un pollito recibe 3 mg/día de antibiótico tiene un crecimiento de 46 g/día mientras que si recibe 15 mg/día tiene un crecimiento de 70 g/día. **b)** Encuentre la tasa de crecimiento para un pollito que no recibe antibiótico.
c) ¿Qué cantidad de antibiótico debe recibir para que la tasa de crecimiento supere los 96 g/día? **d)** Grafique la función.

ERRORES
Error 1: mal planteada la inecuación.
Error 2: en las respuestas no ponen las unidades o están mal puestas.
Error 3: al graficar la recta no tienen en cuenta el dominio.
Error 4: la gráfica no tiene en cuenta una escala, o la escala está mal.

Con respecto al error 1, la mayoría de los errores detectados se deben al mal uso de los símbolos (>, <, ≥, ≤), podemos decir que se deben a dificultades del lenguaje. El manejo correcto de los símbolos es una herramienta poderosa por la facilidad con que pueden ser *manipuladas ideas complejas a través de ellos. Los símbolos ayudan a generalizar ideas, a aplicar dichas ideas a diversas situaciones y a facilitar la transferencia del aprendizaje. Este proceso no se realiza de forma automática, a menudo los alumnos los utilizan de acuerdo a reglas memorizadas, sin tener en cuenta la comprensión de su significado matemático. Es fundamental el establecimiento de conexiones entre el símbolo y el significado asociado.*

De toda esta reflexión podemos señalar que los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje y que no aparecen por azar. Toda situación de aprendizaje es potencialmente generadora de errores, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente. A partir de los errores se puede aprender dado que, al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarlo a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal. Convencidas de que el error en matemática es una herramienta importante en su enseñanza es que consideramos que esta información junto con otra recogida a través de herramientas previamente establecidas nos van a permitir diseñar secuencias didácticas para la enseñanza de funciones que prioricen el tratamiento de los errores para localizar obstáculos en la formación de conceptos, detectar dificultades y realimentar el proceso de aprendizaje. Estos diseños utilizarán el error como parte del proceso de construcción de los conocimientos matemáticos y de la comprensión de la naturaleza y métodos de la disciplina. Estas propuestas deberán promover la comprensión y la reflexión. Nuestras acciones se centrarán en el desarrollo de desempeños de comprensión útiles y satisfactorios para todos.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J., Giménez, J. y Torra, M. (1996). *Enseñar Matemáticas.* Series Pedagógicas. Barcelona: Editorial Grao.

Artigue, M.; Dovady, R.; Moreno, L.; Gómez, (Ed.). (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Méjico D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Borassi, R. (1987). “Exploring Mathematics through the Analysis of Errors”. *For the learning of Mathematis.* Vol 7.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascon, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El Eslabón Perdido entre Enseñanza y Aprendizaje*. Barcelona: Institut de Ciences de l´Educació de la Universitat de Barcelona y Editorail Horsori.

Farfán Márquez, R.M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gómez B. (1991). Las Matemáticas y el proceso educativo, en Gutiérrez Rodriguez, A. (Ed.) *Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática.* Madrid: Síntesis.

Kilpatrick J. Gomez, P. y Rico, L. (1995). *Educación matemática*. Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Mancera Martínez, E.. (1998). *Errar es un placer.* Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.

Resnick, L.; Ford, W., (1991). *La enseñanza de las matemáticas y su fundamento sicológico*. Barcelona: Paidós.

Rico, L.(coordinador). (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Editorial Horsori. Barcelona

Santaló, Luis y colaboradores, (1997). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires: Troquel.

La enseñanza de matrices y sus nodos cognitivos

Ana E. Ferrazzi de Bressan*; Juan Carlos Bressan**
*Universidad Argentina de la Empresa. **Universidad de Buenos Aires. Argentina
ferrazzi@campus.uade.edu.ar jbressan@mybfyb.ffyb.uba.ar

Resumen
Se expone la secuencia temática de los distintos puntos de la enseñanza de matrices a partir de la selección de sus nodos cognitivos, teniendo en cuenta el tiempo de que se dispone para impartir dichos conocimientos. Además, se clasifican los temas de cada nodo en dos niveles efectuando una selección de contenidos y un ordenamiento que respondan mentalmente a esquemas conceptuales orientadores. Finalmente, esta investigación didáctica efectuada para cursos de grado, se aplicó a graduados del área biomédica, logrando gran interés por parte de los asistentes, quienes utilizan el material dado en temas de su actividad profesional y de investigación.

Álgebra matricial y sus nodos cognitivos

En este trabajo relatamos la forma en que hemos secuenciado ciertos temas al vernos limitados por el escaso tiempo en que debían ser desarrollados. Este problema se presentó ante la cantidad de horas de clase asignadas a álgebra matricial en cursos de las carreras de Economía, Administración de Empresas y Contador Público de la Universidad Argentina de la Empresa (UADE), en las que el álgebra matricial es una herramienta indispensable. Estas carreras tienen en su primer año un cuatrimestre con Matemática I, materia que consta de dos partes, una de cálculo diferencial en una variable y otra de álgebra matricial, siendo los contenidos de esta última:
Matrices; operaciones con matrices. Matriz traspuesta. Matrices cuadradas, matriz ortogonal. Matriz inversa. Función determinante, su definición y cálculo. Rango de una matriz. Sistemas de ecuaciones lineales, homogéneas y no homogéneas; métodos de resolución. Polinomio característico de una matriz, valores y vectores propios; diagonalización. Formas cuadráticas.
Estos temas debían ser impartidos en pocas clases de modalidad teórico-prácticas. Así, el tiempo que tenía el docente para enseñarlos y el que tenía el alumno para su internalización, elaboración e integración era mínimo. Para lograr una optimización en el desarrollo de esos temas, resultó de fundamental importancia la elección de los nodos cognitivos; éstos fueron: I. Matrices, y II. Sistemas de ecuaciones lineales.
Dentro de cada nodo se distinguieron temas clasificables en dos niveles:

a) Temas que se estudian esencialmente con el objeto de simplificar el lenguaje operativo y exhibir en forma sintética los problemas.
b) Temas cuyo fin es organizar el conocimiento para desarrollar en el alumno un sistema conceptual que le permita efectuar conexiones con otra información que esté fuera del nodo cognitivo.

Desarrollaremos brevemente cada uno de los puntos señalados como nodos cognitivos con el objeto de mostrar el esquema conceptual orientador utilizado para interrelacionar los conceptos a fin de lograr un conocimiento bien estructurado que permitiese al estudiante relacionar, elaborar e integrar conocimientos.

Matrices

El tema se inicia con la presentación y la clasificación de las matrices para que el estudiante adquiera solvencia en la visualización mental de las mismas al enunciar cuando resulta pertinente condiciones necesarias y suficientes. Cabe destacar que si bien la forma rigurosa de introducir el concepto de matriz es a partir de las transformaciones lineales, en este caso no se adoptó tal criterio por razones de tiempo. Por tal motivo nos limitamos a dar su definición intuitiva como cuadro o arreglo rectangular de números reales.

A partir de esta introducción se produce la siguiente bifurcación:

i) Temas que ponen énfasis en lo operativo. En este caso, en la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz se destacaron las propiedades características de los espacios vectoriales. La multiplicación de matrices se dio como producto escalar de las respectivas matrices fila y columna. Puesto que no se contaba con la relación entre matrices y transformaciones lineales, no se pudo interpretar esa multiplicación mediante la composición de las correspondientes transformaciones lineales.

ii) Temas que se elaboran en una estrecha secuencia conceptual.

Determinante: Se lo introduce por la importancia que tiene para su posterior aplicación. Es por esta razón que en este tema se jerarquizan ambos aspectos, el teórico y el práctico.

En el aspecto teórico se lo define como una función que a cada matriz cuadrada le asigna un número real. Se enseña su cálculo por casos:

a) Para matrices de orden 1: $|a_{11}| = a_{11}$.

b) Para matrices de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

c) Se generaliza para matrices de orden mayor que 2 por el desarrollo de Laplace por una fila o una columna y se comprueba que para matrices de orden 3 el desarrollo de Laplace da por resultado la regla de Sarrus.

Aplicaciones:

- En la determinación del rango de una matriz.
- En el enunciado de la condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa de una matriz. Dicha inversa se la define como la matriz A^{-1} que cumple que $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$. Se aplaza la metodología de obtención de la matriz inversa.
- A posteriori para el encadenamiento de conceptos siguiendo el esquema de los mapas conceptuales.

En todos los casos, luego de afianzar el concepto, se buscó que el alumno utilizara los recursos de la tecnología como forma de abreviar la adquisición de las destrezas propias de los cálculos pero cuidando que éstos nunca repercutan en detrimento del concepto.

Sistemas de ecuaciones lineales

El tema se inicia con la presentación y la clasificación de los sistemas lineales en homogéneos y no homogéneos. A partir de esta introducción se produce la siguiente bifurcación:

i) Temas esencialmente operativos

El acento en la parte operativa se puso en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y su clasificación según su número de soluciones. En ambos tipos de sistemas la solución se buscó por el método de Gauss efectuando operaciones elementales sobre filas; método que además permite visualizar la existencia o no de soluciones y su número. Las técnicas operativas manuales fueron aplicadas en el caso de buscar soluciones de sistemas de ecuaciones de orden $m \times n$, con m y n menores o iguales que 4.

Por medio de operaciones elementales sobre filas se llegó al cálculo de la inversa de una matriz. En este caso, la técnica operativa manual se aplicó para matrices de orden menor o igual que 3.

En ambas actividades y para evitar cálculos tediosos, se recurrió a la tecnología computacional para la resolución de casos de mayor orden que los respectivamente antes indicados.

ii) Temas con alta vinculación conceptual

El reconocimiento de la compatibilidad de los sistemas y su clasificación en determinados e indeterminados es el objeto central del tema que se cumple con el teorema de Rouché-Frobenius.

La verificación del cumplimiento de las condiciones del teorema se logra con el concepto de rango de la matriz de los coeficientes y de su matriz ampliada.

Aplicaciones

A posteriori para el encadenamiento de conceptos siguiendo el esquema de los mapas conceptuales.

Esquemas conceptuales orientadores

Estamos en un todo de acuerdo con el profesor Raúl de la Cruz Cordovés (1997) en que sería lo ideal desarrollar en el educando la habilidad de elaborar ciertas representaciones esquemáticas que denomina *esquemas conceptuales orientadores*, con el fin de evidenciar gráficamente las múltiples relaciones entre un conjunto dado de conceptos. Sin embargo, en este caso las limitaciones impuestas por el tiempo de que se disponía obligaron a los docentes a llevar a cabo una selección de contenidos y un ordenamiento que respondiesen mentalmente a esquemas conceptuales orientadores, que al evidenciar las relaciones entre un conjunto dado de conceptos y, siguiendo la idea de los mapas conceptuales, permitía saltear, o por lo menos demorar aquellos temas de aplicabilidad secundaria y no interrelacionables, logrando así una mayor estructuración de los conocimientos, quedando a posteriori a cargo de los alumnos, a modo de síntesis y como actividad grupal integradora, explicitar el esquema seguido tácitamente por el docente.

Enfoque conceptual orientador

A partir de los nodos cognitivos matrices y sistemas de ecuaciones lineales, fue posible, siguiendo la idea de los mapas conceptuales, adecuar la transmisión de la información conforme a esquemas conceptuales orientadores, buscando la interrelación entre los conceptos impartidos.

La secuencia lógica seguida en la interrelación de los temas, elaborada a partir de los mapas conceptuales fue la siguiente:

- Matriz característica de A: $A - \lambda I$, relacionada a priori con el concepto de matriz.
- Polinomio característico: $|A - \lambda I|$, relacionado con el concepto de determinante.
- Ecuación característica: $|A - \lambda I| = 0$.
- Autovalores: valores de λ que son ceros del polinomio característico.
- Búsqueda del espacio propio asociado a cada autovalor como conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones homogéneas $(A - \lambda_i I)X = 0$, que resulta del reemplazo de λ por el autovalor λ_i .
- Cada vector no nulo que sea solución de $(A - \lambda_i I)X = 0$, es un autovector de la matriz A. Relación de los autovectores con la solución de sistemas homogéneos de ecuaciones.
- Elección de los autovectores independientes asociados a cada λ_i cuyo número es igual al rango de la matriz $A - \lambda_i I$.
- Determinación de una matriz inversible P formada por los autovectores linealmente independientes elegidos.
- Determinación de la matriz inversa P^{-1}, usando el método de operaciones elementales sobre filas.
- Obtención de la matriz diagonal D mediante $D=P^{-1}AP$.

Si bien la lógica sugería que un **tercer nodo cognitivo** fuese constituido por **formas lineales, bilineales y cuadráticas**, la escasez de tiempo del que se disponía nos obligó a demorar el estudio de las formas lineales y bilineales y anteponer formas cuadráticas, que por ser en sí acotado y tener una pronta aplicación a problemas concretos de índole económica, lo hacía útil en forma inmediata. Esto dio lugar a que, una vez terminado el tema correspondiente a formas cuadráticas, nos extendiésemos en formas lineales hasta donde el tiempo nos permitiese.
En el tema formas cuadráticas se dio la definición de las mismas a partir de polinomios para luego seguir el orden sugerido por el esquema de los mapas conceptuales.

- Expresión matricial de las formas cuadráticas $q(x_1; x_2; ...;x_n) = X^tAX$, relacionada con el concepto de matriz simétrica.
- Determinación de los autovalores de A y del espacio propio de cada autovalor.
- Búsqueda de los autovectores ortonormales.
- Construcción de la matriz P mediante los autovectores ortonormales.
- Determinación de la matriz traspuesta P^t, que en este caso coincide con P^{-1}.

Diseño de un curso de postgrado sobre matrices y transformaciones lineales

La experiencia recogida en estos cursos, también nos permitió, con las diferencias de enfoque y de intereses, diseñar un nuevo curso de postgrado, titulado Matrices y transformaciones lineales, para el doctorado en la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires (UBA).
En el Ciclo Básico Común (CBC) que dicta la Universidad previo a cursar materias en la Facultad, el estudiante de las carreras de farmacia y de bioquímica tiene un curso de Matemática cuatrimestral, donde estudia las funciones elementales y ve algunas nociones sobre derivadas e integrales. Este curso se complementa en la Facultad con otro de

Matemática de duración cuatrimestral en donde se dan herramientas de cálculo en una variable, funciones vectoriales, campos escalares y vectoriales, integrales curvilíneas y múltiples, y ecuaciones diferenciales ordinarias, Sin embargo, por falta de tiempo, este curso no incluye cálculo matricial, lo cual significa una seria limitación para el futuro del profesional, del docente o investigador.

Para mejorar la formación matemática de los graduados de la Facultad y pensando principalmente en los docentes e investigadores que se encuentran trabajando en ella, desde hace más de dos décadas organizamos cursos de postgrado sobre diversos temas de matemática, en muchos casos no relacionados entre sí pero que responden a necesidades concretas profesionales o de investigación. Algunos de estos cursos fueron: Series y transformada de Fourier, Análisis vectorial, Ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, Matrices y transformaciones lineales, y Tensores.

En general, los asistentes a estos cursos cuentan con poco tiempo para poder adquirir los conocimientos que les resultan de utilidad para su aplicación. Esto obliga a una selección cuidadosa del material, así como del ordenamiento a seguir, con el objeto de que el graduado no abandone el curso pensando que le resulta de escasa utilidad. De esta forma, en pocas horas de clase debe capacitarse al graduado en el uso de las herramientas básicas propias de cada tema, dándole la oportunidad de que profundice sobre los temas de su interés a través de una monografía que entregará al finalizar el curso y que, de ser considerada suficiente, le permitirá aprobar el mismo.

En el año 2000, respondiendo a las necesidades de un grupo de graduados, se dio un curso sobre Series y transformada de Fourier en el cual se alteró el orden lógico del curso con el objeto de dar lo antes posible las herramientas matemáticas de mayor utilidad para los asistentes, dejando los fundamentos de muchos temas para la parte final. En tal oportunidad se notó el mayor interés de los alumnos y no se produjeron deserciones.

La experiencia positiva del curso sobre Series y transformada de Fourier así como los nodos cognitivos utilizados en el dictado de álgebra matricial, nos permitieron diseñar el curso sobre Matrices y transformaciones lineales del año 2001, dado a pedido de un grupo de graduados que necesitaban esa herramienta matemática. En el mismo se tomaron nuevamente como nodos cognitivos Matrices y Sistemas de ecuaciones lineales. En el primer nodo se agregó la interpretación de las matrices y sus operaciones mediante transformaciones lineales y al estudiar la diagonalización, se analizaron los subespacios invariantes y el correspondiente cambio de bases. Finalmente, el curso se extendió por solicitud de los alumnos para profundizar algunos temas, entre ellos, espacios con producto escalar y transformaciones y matrices ortogonales.

Conclusión

El diseño de los cursos mediante la selección de los nodos cognitivos, la clasificación de los temas de cada nodo en niveles y la selección y ordenamiento de contenidos de cada nivel respondiendo a esquemas conceptuales orientadores, dio resultados altamente positivos. Por tal motivo vamos a seguir nuestra investigación aplicando esta técnica en el diseño de otros cursos de grado y de postgrado.

Conviene hacer notar que la tesis de maestría de Cordovés; R de la Cruz (1997) así como el libro de Galagovsky Kurman, L. R. (1996), nos dieron la base didáctica y pueden ser aplicados para hacer un trabajo análogo en otros cursos. Las restantes publicaciones citadas en la bibliografía son las que utilizamos en los cursos donde tratamos temas de álgebra lineal.

Referencias bibliográficas

Burgos, J. (1993). *Álgebra lineal*. Madrid, España: McGraw-Hill.
Cordovés, R. de la Cruz (1997). *Propuesta metodológica para la enseñanza de la variable compleja en carreras de ingeniería eléctrica, organizada mediante nodos cognitivos y resaltando el papel en la formación de conceptos*. Tesis de Maestría "Matemática Avanzada para Ingeniería", Instituto Politécnico "José Antonio Echeverría", Facultad de Ingeniería Industrial, La Habana, Cuba.
Ferrazzi de Bressan, A. E.; Bressan, J. C. (1997). *Nociones de trigonometría y vectores*. Cuadernos UADE 88. Buenos Aires, Argentina: Ediciones UADE.
Ferrazzi de Bressan, A. E.; Bressan, J. C. (1998). *Introducción a matrices y sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales*. Cuadernos UADE 107. Buenos Aires, Argentina: Ediciones UADE.
Galagovsky Kurman, L. R. (1996). *Redes conceptuales, aprendizaje, comunicación y memoria*. Buenos Aires, Argentina: Lugar Editorial.
Gerber, H. (1992). *Álgebra lineal*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Golovina, L. I. (1974). *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*. Moscú: Editorial Mir.
Lang, S. (1990). *Introducción al álgebra lineal*. USA: Addison-Wesley Iberoamericana.

La matemática discreta como formación básica

Sylvia da Rosa
Instituto de Computación. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo, Uruguay
darosa@fing.edu.uy

Resumen
Desde las primeras calculadoras hasta los computadores modernos, no hay duda que se ha perseguido y se viene alcanzando el objetivo de realizar cálculos rápidos y seguros. El desarrollo de las interfaces también ha contribuido a obtener cada vez mejores representaciones gráficas y se puede preveer que la tecnología aplicada tanto a los problemas de cálculo como a lo visual brindará cada vez herramientas más potentes para asistir en la solución de problemas en diferentes áreas. Por otro lado, sabemos que los problemas que dependen del razonamiento humano, nunca podrán prescindir del mismo. En pocas palabras: las computadoras computan (calculan), pero nunca van a llegar a razonar (Hamilton,1978). Creemos que esta realidad, incide directa y profundamente sobre el sistema educativo, cambia radicalmente objetivos, contenidos y metodologías de lo que enseñamos, cómo lo enseñamos, para qué enseñamos, siendo imprescindible poner el acento en enseñar a razonar, abstraer, analizar, representar, lo cual, a nuestro juicio ha sido descuidado por el enorme peso que la enseñanza pone en desarrollar destrezas en el cálculo y en la demostración mecánica de teoremas.

La actividad de computar

La actividad de computar es una disciplina muy antigua, cuyos orígenes se remontan a civilizaciones como la griega, la babilónica y la egipcia.Los antiguos filósofos y matemáticos griegos contribuyeron enormemente en la sistematización del razonamiento y en la construcción de algoritmos, mientras que los egipcios y los babilónicos desarrollaron métodos computacionales destinados a facilitar el trabajo humano.
En todas las épocas han existido fuertes motivaciones para conseguir resultados avanzados tanto en la sistematización del razonamiento como en el diseño y construcción de dispositivos para realizar computaciones seguras y eficientes.
Leibniz (1646-1716) escribió: “Es lamentable que personas de excelencia deban desperdiciar horas como esclavos en una labor de calcular, que podría confiarse a otras personas si fueran utilizadas máquinas.[2] [1]” (Tucker et al.,1995). La propuesta de David Hilbert (1862-1943) de encontrar un sistema axiomático lógico-matemático, del cual toda la matemática pudiera ser derivada, fue probada como imposible de realizar por Kurt Gödel (1906-1978), en 1931, estableciendo que hay problemas matemáticos que son inherentemente insolubles y revolucionando el punto de vista de los matemáticos sobre su disciplina. El trabajo de Gödel tuvo repercusiones prácticas inmediatas, planteando la cuestión de qué significa exactamente decir que se tiene un método para resolver un problema. Varias respuestas fueron propuestas, dos de las cuales tuvieron enorme impacto en el desarrollo posterior de los computadores digitales y de los lenguajes de programación: la de Alan Turing (1912-1954), que muestra que toda computación efectiva puede ser representada en una máquina abstracta, conocida como la máquina de Turing y la de A. Church conocida como la tesis de Church (1935), que expresa que un objeto es computable si se puede definir en el Cálculo Lambda (Hamilton, 1978; Barendregt, 1984). El desarrollo tecnológico ha actuado en cada momento histórico como freno o impulsor de las

[2] Traducción de la autora.

expectativas científicas . En las últimas décadas ese desarrollo ha influido enormemente en la expansión y profundización del estudio de problemas y teorías de antiguo origen, dando lugar a nuevas ciencias, enfoques y metodologías. Un ejemplo de ello lo proporciona la disciplina de computación, que se ha extendido y profundizado en diferentes direcciones y bajo diferentes nombres: Ciencia de la Computación (CC en adelante), Ingeniería en Computación, Informática, etc, cuya base común es, como siempre lo ha sido, el hecho de que se trata de una actividad matemática que ha tomado también forma y nombre como la rama de la matemática llamada Matemática Discreta (MD en adelante). Como su nombre lo indica, en MD se trabaja con conjuntos discretos, a diferencia de la Matemática Continua que trabaja con conjuntos continuos, como los números reales. El computador digital moderno es básicamente un sistema discreto y muchas de sus propiedades pueden ser entendidas y descritas modelándolas en un sistema matemático discreto. La MD comprende la lógica (o más correctamente, las lógicas): los computadores modernos no sólo nos liberan del "trabajo de esclavo" al que hacía referencia Leibniz, sino que juegan un papel activo en el desarrollo de pruebas, abriendo nuevos caminos y enfoques en el quehacer matemático (Giménez & Paulin-Mohring,1996).

La Matemática Discreta y la Enseñanza Media

En lo que respecta al sistema educativo, es imprescindible que éste se adapte a los cambios generados por los avances teóricos y las aplicaciones en los diferentes campos científicos y tecnológicos, garantizando la transmisión y supervivencia del conocimiento. Así como en su época el cálculo diferencial se vió impulsado por el desarrollo de la física y los problemas planteados por esta ciencia en el siglo XVIII, determinando fuertemente la orientación de la educación matemática , los cambios ocurridos en el siglo que acaba de terminar reclaman del sistema educativo otras orientaciones. La MD debe su intenso desarrollo de los últimos años a la comunidad científica relacionada con la CC y en lo que se refiere a la educación, los estudios terciarios en dicha ciencia han incorporado cursos de MD con alta prioridad. Sin embargo, fuera del área de la CC, la MD es prácticamente inexistente y esta situación es la que creemos que debe corregirse, ya que consideramos que los estudios en MD son importantes para la formación de cualquier estudiante, *aún de aquellos que no continúen estudios terciarios.* Hoy día, la Economía, las Ciencias Sociales, las Ciencias gerenciales, la Ingeniería eléctrica, la Física simbólica, por solo nombrar algunas, tienen necesidad de resolver problemas que se modelan utilizando herramientas de MD. En el mercado laboral, es cada vez más frecuente que las personas deban enfrentarse a situaciones que involucran toma de decisiones, procesos de abstracción y razonamientos lógicos, necesitando habilidades que raramente son desarrolladas en su pasaje por la Enseñanza Media. Más aún, consideramos anacrónico que no exista en la cultura general brindada por la Enseñanza Secundaria una base de conocimientos sobre algo tan ampliamente difundido en la sociedad actual como es la informática. Nombres como Turing, Church, Gödel, Dijkstra, y conceptos como tipo abstracto de datos, variable ligada, cuantificador, vinculados a la MD, son desconocidos para el ciudadano común e inexistentes en la Enseñanza Media. El cambio que proponemos implica un proceso de adaptación, incorporación y modificación que muchas veces se realizará en etapas de aproximaciones sucesivas. En este trabajo presentamos una propuesta para comenzar a actualizar la enseñanza de matemática a nivel de la Enseñanza Media. En pocas palabras,

consiste en tomar de los programas actuales los temas de MD, como ser Teoría de Conjuntos, Relaciones, Funciones, Combinatoria, Inducción Completa, Divisibilidad, e introducirlos con un enfoque alternativo que rescate la naturaleza discreta de los mismos y al mismo tiempo permita dedicarles mayor tiempo y profundidad, relacionándolos entre ellos. Al menos en nuestro país, constatamos que los temas mencionados como temas de MD, son subvalorados en la enseñanza: se dan en poco tiempo y a las apuradas, para poder dedicar prácticamente todo el tiempo de los cursos al estudio del conjunto de los números reales y al cálculo. Como consecuencia de esto, hemos constatado a través de tests realizados a estudiantes del curso de MD del primer año de la carrera de Ingeniería en Computación, que los estudiantes desconocen los conjuntos y sus propiedades (todo se reduce al conjunto de los reales) y aplican incorrectamente los métodos de prueba más elementales por falta de una sólida base en lógica.
Nuestro enfoque plantea asimismo una metodología para encarar el proceso de resolución de un problema dado, incorporando el método formal de una manera que puede hacerse desde el nivel secundario. Podemos resumirla en los siguientes pasos:

- Crear un algoritmo (método) para resolver el problema, expresándolo en algún lenguaje informal (por ejemplo, en español)
- Expresar el algoritmo matemáticamente
- Construir un programa que implemente el algoritmo definido matemáticamente
- Verificar la correctitud del algoritmo (o del programa)

El tercer punto planteado puede obviarse, sin que el enfoque sea alterado, en caso de que no sea posible incorporar en el curso un lenguaje de programación. En la siguiente sección ilustramos el proceso a través de un ejemplo.

Las funciones como métodos

El concepto de algoritmo está estrechamente vinculado a la resolución de problemas matemáticos desde sus orígenes: el propio nombre "algoritmo" proviene del nombre del matemático persa Abu Ja´far Mohammed ibn Mûsa al-Khowârizmî, que vivió aproximadamente en el año 825 A.C.. Por otro lado, el concepto de función es también un concepto matemático fundamental y que tiene aplicaciones en casi todas las ciencias y disciplinas. Ambos conceptos, el de algoritmo y el de función, raramente se presentan relacionados, a pesar de que lo están estrechamente. Tradicionalmente, se introduce el concepto de función como una relación que cumple determinada propiedad, es decir como un conjunto de pares. De esta forma, no es intuitivo ver el nexo existente entre función y algoritmo, ni tampoco formalizar la aplicación. En cambio, si consideramos a las funciones como métodos (Barendregt, 1984), es fácil ver que una función es un objeto matemático que representa un algoritmo, a la vez que aplicar una función es aplicar un método para obtener un resultado. Como ejemplo ilustrativo, presentamos brevemente el tratamiento del tema sobre el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos naturales. Como partimos de un método ya creado, el primer punto consiste en especificar el método para resolver el problema en un lenguaje informal: Dados a y b $\in$ N, b > 0, para obtener el mcd de a y b, seguimos el siguiente método (algoritmo):

Dividimos a entre b obteniendo un resto r.
Si r es 0, devolvemos b,

Si no, volvemos a aplicar el método con b y r.
Observar que las variables a, b y r usadas en el algoritmo, designan los distintos valores con los cuales aplicamos el método reiteradamente hasta que obtenemos un valor de r igual a 0.
Se puede observar también, que este enfoque facilita la introducción del concepto de recursión y su comprensión, a partir de que el algoritmo especificado en lenguaje natural es recursivo, es decir, se consigue el resultado mediante aplicaciones del mismo a valores que de alguna manera se van reduciendo a un caso final (caso base).
Si llamamos mcd al algoritmo, podemos definir la siguiente función matemática que lo expresa (a mod b es el resto de la división entera entre a y b):

$$\text{mcd} : N \times (N - \{0\}) \rightarrow N$$

$$\text{mcd}(a,b) = \begin{cases} b, & \text{si (a mod b) es igual a 0} \\ \text{mcd}(b, (a \bmod b)), & \text{si no} \end{cases}$$

Si se cuenta con la posibilidad de utilizar un lenguaje de programación en el curso, el proceso continúa con la implementación de la función definida. Mostramos como hacerlo en Isetl (Dubinsky & Fenton, 1996):

```
mcd := func(x,y);
        if is_nat (x) and is_nat (y) and y > 0
        then
         r: = x mod y;
         if r = 0 then return y;
         else return mcd (y,r); end;
       end;
end;
```

Si no es posible o no se considera adecuado introducir la construcción de un programa, puede pasarse a la etapa siguiente que consiste en reponder la siguiente pregunta:
Cómo sabemos que efectivamente el algoritmo computa el máximo común divisor de dos naturales dados ? Es decir, lo que se plantea es demostrar que el algoritmo es correcto.
Usando la función *divisores* que toma un natural y devuelve el conjunto de sus divisores y la función *max* que toma un conjunto de naturales y devuelve el mayor de ellos, puede definirse el máximo común divisor de a y b como max (divisores(a) $\cap$ divisores(b)).
Para probar que el algoritmo es correcto, se establece la siguiente propiedad que expresa que la función mcd, definida para representar el algoritmo, debe satisfacer la definición:

$$\forall a,b \in N,\ b > 0,\ \max(\text{divisores}(a) \cap \text{divisores}(b)) = \text{mcd}(a,b)$$

La posibilidad de olvidarnos de la necesidad de calcular, nos permite profundizar en conceptos esenciales y las relaciones entre ellos: la *especificación* de la solución del problema dado, la *correctitud de un algoritmo* que lo soluciona y la expresión matemática del algoritmo como *función*, la *propiedad* que establece el vínculo entre especificación y algoritmo y la *prueba* de la propiedad.
Todos estos conceptos aparecen continuamente en el estudio de la matemática, en cualquier nivel, los estudiantes los manejan separada e informalmente.
Nuestro enfoque presenta una metodología que les da coherencia y perspectiva, permitiendo el desarrollo de la capacidad de abstracción y el pensamiento algorítmico.
Queda claro que lo importante no es la realización de los cálculos (que puede hacerlos la computadora), sino comprender el proceso de abstracción por el cual representamos el método por una función matemática. Se puede estudiar las propiedades de dicha función,

por ejemplo, la inyectividad y la sobreyectividad. De aquí surgen interrogantes interesantes, como ser: podemos representar cualquier método por una función matemática?, toda función matemática representa un algoritmo ?, qué significa que los algoritmos (o las funciones que los representan) sean iguales o equivalentes ? Por supuesto, el tratamiento formal de estas cuestiones, escapa al marco de la educación media, sin embargo, pueden introducirse informalmente como problemas relacionados que se plantean. También pueden presentarse problemas de aplicación relacionados con la CC, de la misma manera que muchas veces se plantean aplicaciones de la matemática a la física u otras ciencias, por ejemplo, las interrogantes mencionadas tienen que ver con el hecho de que hay funciones que no son computables, o algoritmos que si bien son computables, insumen tantos recursos que son inviables en la práctica.
Como ejemplos de aplicación, se puede ver que un programa es la implementación de una función parcial, que el dominio son los datos de entrada, ejecutar el programa es aplicar la función y los elementos del codominio son los datos de salida. La etapa de construcción del programa, si bien no es estrictamente necesaria en una primera aproximación, tiene muchas ventajas desde el punto de vista educativo. Entre ellas, un lenguaje de programación obliga a ser riguroso en las definiciones, lo cual muchas veces permite clarificar conceptos, el lenguaje de programación permite experimentar los algoritmos con mayor número de casos o casos más grande o "raros", ayuda a detectar errores y a corregirlos y además, algo nada despreciable ... hace la clase mucho más divertida!

Resultados obtenidos

Las ideas expuestas en este trabajo fueron estructuradas en la forma de un curso dictado para docentes de matemática del ciclo superior de Enseñanza Secundaria de Montevideo, Uruguay. Este ciclo comprende los dos últimos años, luego de los cuales el estudiante está habilitado para ingresar en la Universidad. El curso estuvo basado en el libro "Discrete Mathematics with Isetl" de Ed Dubinsky y William Fenton y se utilizó el lenguaje de programación Isetl. Como evaluación, los integrantes debieron realizar un trabajo sobre cómo exponer un tema de su elección con el nuevo enfoque y utilizando el lenguaje Isetl.
En particular, dos grupos de docentes realizaron la experiencia con sus alumnos en clase, uno de ellos introduciendo el tema “Inducción” y el otro el tema “Divisibilidad”. Si bien este hecho no brinda datos suficientemente amplios como para extraer conclusiones generales, los resultados obtenidos son alentadores: se constató en la práctica la falta de validez de prejuicios tales como "los estudiantes de secundaria no pueden programar", "programar es difícil", etc, y las ventajas mencionadas arriba sobre la inclusión de un lenguaje de programación fueron empíricamente comprobadas. De los resultados observados, se desprende claramente, por ejemplo, que la posibilidad de programar permite a los estudiantes construir la definición de una función , a partir de abstraer de casos particulares, mejorando enormemente la comprensión del concepto de función. Para lograr este tipo de resultados, los docentes llevaron a cabo una ardua labor de elaboración de problemas, ejercicios y preguntas, de modo de adecuar la presentación y desarrollo de los temas a la metodología propuesta.

Conclusiones

Esta experiencia ha reafirmado nuestro convencimiento en dos sentidos que sintetizamos en las siguientes conclusiones: 1) la actualización de contenidos, objetivos y metodologías en la enseñanza de Matemática de nivel pre-universitario, incorporando estudios en Matemática Discreta, no solamente es una necesidad imperiosa sino que es una tarea *posible* de llevar a cabo en las condiciones actuales. La actualización de la educación matemática en el sentido que proponemos redundará en un beneficio para todos los estudiantes y la formación de los estudiantes que seguirán estudios terciarios en CC se verá enormemente favorecida. Este hecho merece ser tenido muy en cuenta, fundamentalmente por dos razones: en primer lugar, en nuestro país las carreras en CC son las que más han aumentado el número de estudiantes en los últimos 20 años. Solamente en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, que imparte 9 títulos de grado, la mitad de los estudiantes ingresa a Ingeniería en Computación donde *recién comienzan* a recibir la base adecuada en su formación matemática. En segundo lugar, proporcionar una formación mejor a los informáticos, desde el punto de vista de la utilización de métodos formales en la construcción de software, es un requerimiento cada vez más exigido por el mercado laboral y la sociedad (da Rosa & Cirigliano, 1998).
2) el modelo seguido en nuestra experiencia es el más adecuado, a saber: la etapa de formación de los docentes de la Enseñanza Media, debe realizarse en *estrecha colaboración* con docentes de Ciencia de la Computación de la Universidad. Este punto, que consideramos condición ineludible para el éxito de la tarea, brinda además una posibilidad concreta de fomentar el intercambio entre los docentes de los dos ámbitos del sistema educativo, necesidad muchas veces sentida por los docentes y pocas veces satisfecha.

Referencias bibliográficas

Allen Tucker et al. (1995). *Fundamentals of Computing I. Logic, Problem Solving, Programs and Computers.* New York, EEUU: McGraw-Hill Series in Computer Science.
Ed Dubinsky; William Fenton. (1996). *Introduction to Discrete Mathematics with Isetl.* New York, EEUU: Springer-Verlag,
A.G. Hamilton. (1978). *Logic for Mathematicians.* Cambridge, USA: Cambridge University Press.
H.P.Barendregt. (1984). *The Lambda Calculus. Its syntax and semantics*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol 103. Amsterdam: North-Holland.
Eduardo Giménez; Christine Paulin-Mohring. (1996). *Types for Proofs and Programs.* LNCS nr. 1512. Types´96., Berlin, Alemania: Springer-Verlag.
Sylvia da Rosa; Gustavo Cirigliano. (1998). Matemática y Programación. Anales del VI Congreso Iberoamericano de Educación Superior en Computación. CIESC'98.
Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Quito, Ecuador.

Los errores como objeto de estudio

Beatriz Alicia Funes, Ana María García de Macías, Ana María Herrera de Jiménez
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
bea-ali17@hotmail.com anamaga2000@yahoo.com.ar jimetuc@arnet.com.ar

Resumen
Los errores de los alumnos son una preocupación constante de los docentes puesto que ellos revelan, entre otras cosas, que no se cumplieron los objetivos de la enseñanza, no obstante la mayoría de las veces no se hace un uso adecuado de la información que estos errores aportan acerca del conocimiento de los alumnos. Hay errores que persisten a través de los años y hay errores que llaman la atención porque en determinadas evaluaciones, se cometen en forma masiva. De allí la importancia que tiene su estudio. Existen errores vinculados a diferentes competencias y a diferentes tipos de contenidos es importante elegir un tratamiento curricular adecuado para la superación de los mismos. Es preciso que el proceso de construcción del conocimiento incluya el tratamiento de los errores. Toda enseñanza debiera partir de una concepción del conocimiento que considere al error como parte constitutiva de éste.

Introducción

Acceder a la ciencia, significa rejuvenecer espiritualmente, aceptar una mutación brusca que debe contradecir el pasado”
Gastón Bachelard (1971)

Los errores de los alumnos son una preocupación constante de los docentes puesto que ellos revelan, entre otras cosas, que no se cumplieron los objetivos de la enseñanza. No obstante, muchas veces no se hace un uso adecuado de la información que estos errores aportan acerca de los conocimientos de los alumnos.
Hay errores que persisten a través de los años y hay errores que llaman la atención porque en determinadas evaluaciones, por ejemplo las de calidad educativa, se cometen en forma masiva. De allí la importancia que tiene realizar un estudio sistemático de los mismos, adoptando una actitud reflexiva ante estas manifestaciones de los alumnos. Por otra parte, considerando que hay errores vinculados a diferentes competencias y a diferentes tipos de contenidos (conceptos, procedimientos o actitudes) es importante poder clasificarlos estableciendo ciertas categorías. De este modo será posible elegir un tratamiento curricular adecuado para la superación de los mismos.
Desde un punto de vista constructivista, se considera el conocimiento como una modificación continua de estructuras mentales, en este sentido el error es explicable y a la vez, es también soporte de nuevos aprendizajes, el error no significa ausencia de conocimiento sino la existencia de un conocimiento no deseado.
La construcción del conocimiento no es una cuestión de grado, no se trata de que los alumnos saben poco regular o mucho, sino de que tienen una organización del conocimiento contradictoria o equivocada, es importante comprender que los errores no están aislados sino que son parte integrante de estructuras cognitivas.
Por lo tanto los errores forman parte de la adquisición del conocimiento “el conocimiento no puede partir de la nada, su avance consiste, principalmente en la modificación del conocimiento anterior” (Poper, 1979).
Además, algunos conocimientos previos pueden funcionar como obstáculo para la adquisición de uno nuevo.

Ante este hecho es preciso que el proceso de construcción incluya el diagnóstico y la superación de los errores. Toda enseñanza debiera partir de esta concepción del conocimiento, y del error como parte constitutiva de éste y esto significa que los errores tendrían que ser motivo de permanente análisis y reflexión por parte de los docentes.

Consideraciones generales

El estudio de los errores en el aprendizaje, que se manifiesta a través de situaciones conflictivas, donde el docente descubre que el alumno/a adquirió mal un conocimiento, forman parte de la estructura sistemática del aprendizaje. Necesitamos conocer los errores de nuestros alumnos, es decir cuáles son los conocimientos que fueron adquiridos, asimilados con falencias , como sugiere D. Ausubel : " Averiguar lo que el alumno sabe y enseñar en consecuencia"
Este trabajo está orientado a la reflexión acerca de la importancia que tiene diagnosticar los conocimientos erróneos preferentemente en situaciones diferentes a las pruebas, para que posteriormente puedan ser analizados tomando categorías.
Surge la contradicción entre el conocimiento erróneo adquirido y manifestado por el alumno y las teorías que los determinan, que no siempre son erróneas.
Es útil para documentar estas situaciones, entre otras cosas, grabar a los alumnos durante el trabajo, generar situaciones de formulación y validación y pedir las justificaciones en todos los casos en que se crea conveniente para reafirmar la legitimidad de las teorías.
Una vez detectados y categorizados los errores es interesante focalizar su estudio para hacer uso de los mismos en beneficio del aprendizaje significativo de nuestros alumnos.
Puede resultar interesante usar los errores como contenidos organizadores de algunas unidades. Enfocar los temas que originaron la situación errónea desde diferentes contextos, a partir de otros problemas, sobre todo si se trata de problemas abiertos, orientando procesos de ida y vuelta, por ejemplo inductivo/deductivos.
En relación con las metodologías, los errores pueden ser útiles como motivación, valorados como intentos creativos, para generar situaciones de metacognición donde los alumnos analicen sus propios procesos de aprendizaje.
Con respecto específicamente al lenguaje matemático, merecen una especial atención los diferentes y a veces específicos significados de expresiones, letras, signos y estructuras netamente algebraicas y geométricas.
Desde esta perspectiva la teoría de errores en el aprendizaje de la Matemática es una perspectiva de análisis sumamente interesante y compleja.

Objetivos del taller

- Generar la reflexión sobre un tema relacionado con práctica docente.
- Analizar e interpretar errores algebraicos a partir de un marco teórico
- Indagar acerca de las posibles causas de los errores.
- Sugerir propuestas didácticas tendientes a superar esas causas.

Contenidos

- El error en el aprendizaje constructivista
- Contenidos conceptuales y procedimentales
- Aprendizaje significativo

- Competencias numéricas y algebraicas.
- Obstáculos epistemológicos.

Metodología
Destinatarios: Profesores de Matemática de todos los niveles.
Cupo: 40 alumnos
Se trabajará en un taller donde los asistentes participarán en grupos de alrededor de seis personas, con consignas para las dos sesiones.
La tarea a realizar tendrá las siguientes instancias:
- Lectura y discusión de textos.
- Investigación de material curricular y análisis de errores.
- Propuestas curriculares orientadas en la superación de los errores detectados en cada grupo.

ACTIVIDADES
Primer día:
- Presentación del taller.
- Les proponemos la lectura de un texto breve con el objeto de sugerir una categorización de los errores. (Anexo I)
- A partir de una selección de pruebas de evaluación pertenecientes a alumnos de diferentes niveles, les sugerimos trabajar con la consigna de detectar los errores en los items propuestos.
- Luego de seleccionar uno en particular y a partir de la lectura realizada procederemos a su análisis y categorización teniendo en cuenta, además de las categorías de Movshovitz y otros:
  - los conceptos o procedimientos involucrados
  - el tipo de competencia a la que aluden.
  - los posibles conocimientos previos que determinaron esos errores.

Segundo día:
Proponemos a los integrantes del taller:
- Realizar la lectura y análisis grupal de un texto breve acerca del uso de los errores como organizadores del curriculum. (AnexoII)
- Proponer sugerencias acerca de acciones en el contexto de la enseñanza, para la superación de los errores analizados y de sus causas.
- Realizar una exposición breve sobre las propuestas, a modo de cierre de las actividades.

Cómo se desarrolló el taller

El taller se llevó a cabo en dos jornadas con un grupo de veinte profesores de distintos niveles educativos y de distintos países.
Esta situación generó interés entre los docentes y compromiso con las tareas propuestas y las que fueron surgiendo.
Tanto en la lectura de bibliografía como en el análisis de las pruebas, los docentes se abocaron a la difícil tarea de comprender los motivos que llevan a los alumnos al error, teniendo en cuenta supuestos propios de su edad y del contexto histórico, social y cultural

en que desarrollan sus actividades.
El interés puesto de manifiesto por la temática desarrollada se consigna en las conclusiones, reflexiones y sugerencias elaboradas como cierre de todas las actividades del taller.

Consideraciones finales

Luego de realizado el taller y tomando en cuenta lo expuesto en el plenario de cierre, podríamos elaborar algunas reflexiones que apuntan a mejorar nuestra práctica docente:

- Considerar en el Currículo un espacio para indagar sobre el manejo de la simbología específica de la temática tratada.
- Realizar la devolución a los alumnos/as de los trabajos con errores, generar discusiones grupales al respecto.
- Proponer situaciones donde sea factible detectar y diagnosticar dificultades que conducen al error.
- Estimular entre los alumnos/as el trabajo grupal y cooperativo, abierto al diálogo y a la crítica.
- Agrupar a los alumnos según las categorías de los errores que se manifiesten, para trabajos de concientización y reflexión.
- Aplicar estímulos y juegos didácticos que ayuden a superar errores muy arraigados en la población estudiantil.
- Favorecer reuniones entre docentes para buscar y analizar estrategias que favorezcan el verdadero aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Bachelard, Gastón (1989). *Epistemología*, Barcelona: Anagrama.
Bachelard, Gastón (1991). *La formación del espíritu científico*, México: Ed. Siglo XXI.
Coll, César y otros. (1998). *El Constructivismo en el aula*. Barcelona. España: Editorial Graó de Serveis Pedagògics.
Popper, Karl R, (1979). *El Desarrollo del Conocimiento Científico*. Buenos Aires: Editorial Paidós.
Rico Romero, Luis. (1995). *Errores en el aprendizaje de las Matemáticas.* En Educación Matemática, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

ANEXO I

Algunas causas y clasificación de errores

Movshovitz - Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987)[2] hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos. De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados.
Estas categorías son:

1. *Datos mal utilizados. Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que*

[2] MOVSHOVITZ Y OTROS (1986). **Students` distortions of Theorems**. Focus on Learning Problems in Mathematics. Vol. 8, pag. 49 – 57, citado por RICO ROMERO, LUIS. (1995) **Errores en el aprendizaje de las Matemáticas** en Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica. México.

le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

2. *Interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descriptos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.*
3. *Inferencias no válidas lógicamente. Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente; concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente, necesariamente; utilizar incorrectamente los cuantificadores; o también, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.*
4. *Teoremas o definiciones deformadas. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.*
5. *Falta de verificación en las soluciones. Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el resolutor hubiese contrastado la solución con el enunciado el error habría podido evitarse.*
6. *Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculos, errores al tomar datos de una tabla. Errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.*

ANEXO II

Los errores y la organización del currículo

Los errores que cometen los alumnos al realizar sus tareas diarias o sus pruebas de evaluación, más que motivos para una valoración negativa de los alumnos debieran ser fuente de inspiración para el desarrollo curricular.

Esto lleva implícita una manera muy particular de interpretar los errores, una interpretación que, más allá de vincularlos a la falta de determinados conocimientos de los alumnos, los considera una expresión de su propia estructura cognitiva. Si, como sabemos, es a partir de esa estructura cognitiva que debemos organizar la enseñanza, de lo anterior se deriva la importancia que tiene el enfrentar a los alumnos a problemas que saquen a la luz sus ideas en relación con el tema que nos interesa.

Asignando tareas en diferentes contextos, basadas en situaciones que pongan en juego los conocimientos, correctos o incorrectos, acerca de un tema determinado los docentes podremos realizar diagnósticos permanentes que nos permitan detectar los errores más significativos y persistentes de los alumnos. Estos errores, incorporados a nuevas tareas, servirán para provocar el conflicto y estimularán su resolución.

Transcribimos el siguiente texto:

"En los últimos años venimos asistiendo al desarrollo de nuevos modelos de evaluación que requieren de nuevos procedimientos de valoración; pero tan importante o más que la valoración que reciben los alumnos, está el hecho que esas valoraciones sirvan para reorientar su comprensión, ayudándoles en la superación de sus concepciones deficientes y en la superación de los errores. La evaluación no debe reducirse puramente a los aspectos externos y formales sino que debe lograrse una interiorización de los juicios alcanzados para proceder a una modificación y avance en los conocimientos. Nesher (1987)[4] nos aporta algunas consideraciones claves para una actualización del papel de la evaluación, diferenciando las pruebas de evaluación de los ejercicios o instrumentos para la investigación.

Las recomendaciones de Nesher, dicen que:

1. El aprendiz deberá ser capaz, durante el proceso de aprendizaje de valorar las limitaciones e incomodidades de una pieza dada de conocimiento. Esto puede ser enfatizado desarrollando entornos de aprendizaje que funcionen como sistemas de retroalimentación dentro de los cuales el aprendiz sea libre para explorar sus creencias y obtener respuestas específicas a sus acciones.
2. En los casos en que el aprendiz reciba retroalimentación inesperada, si no queda bloqueado por ella, deberá ser estimulado y motivado para continuar e interrogar respecto a su tarea.
3. El profesor no puede predecir completamente el efecto del sistema de conocimiento previo del estudiante en un nuevo entorno. Más aún, antes de que complete su instrucción debiera proporcionar oportunidades al estudiante para manifestar sus concepciones deficientes y así relacionar la instrucción subsiguiente a estas concepciones.
4. Las concepciones deficientes son, por lo general, una excrecencia de un sistema de conceptos y creencias ya adquiridos aplicados equivocadamente a un dominio. No debieran tratarse como cosas terribles que deben desarrraigarse ya que ello puede confundir a los aprendices y destruir su confianza en el conocimiento previo. En vez de ello, el nuevo conocimiento debiera conectarse con el esquema conceptual previo del estudiante y situarlo en la perspectiva correcta.
5. Las concepciones deficientes no sólo se encuentran tras las realizaciones erróneas, sino que también se ocultan tras muchos casos de ejecución correcta. Una teoría de la instrucción deberá cambiar su enfoque de las realizaciones erróneas hacia la comprensión del sistema de conocimiento completo de los estudiantes, del cual se derivan sus reglas de actuación.
6. Los ítems diagnósticos que discriminan entre concepciones adecuadas y deficientes no son necesariamente los mismos que se emplean en los ejercicios y pruebas escolares. Un esfuerzo especial de investigación debiera hacerse para construir ítems diagnósticos que establezcan la naturaleza específica de las concepciones deficientes."[3]

---

[3] RICO ROMERO, LUIS. (1995) **Errores en el aprendizaje de las Matemáticas** en Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica. México.

[4] NESHER, P.(1987) **Towards an instructional Theory,** For the learning of Mathematics, citado por RICO ROMERO, LUIS (1995), **Errores en el aprendizaje de las Matemáticas** en Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Exploración de estrategias utilizadas por un adulto en tareas de razón y proporción*

Elena Fabiola Ruiz Ledesma
Cinvestav-IPN. México
elena_ruizl@hotmail.com

Resumen
El estudio de caso que se reporta, está centrado en la exploración de ciertas tareas correspondientes a los tópicos de razón y proporción, aplicadas a un adulto que se encuentra terminando la escuela primaria. Interesa indagar las estrategias que utiliza al enfrentar las tareas propuestas, así como los pensamientos que las sustentan, para lo cual se recurre a la entrevista como método de investigación.

Introducción

El aprendizaje de los tópicos de razón y proporción además de ser un problema capital en la parte culminante de la aritmética de la escuela primaria, como ha sido señalado por distintos investigadores como Lesh, Post y Bher, (1989). En el caso de trabajos con adultos existe una gran necesidad que puede llegarse a indagar, contemplando que los estudios realizados con adultos permiten reunir evidencias acerca de que al trabajar los número naturales y sus operaciones, el adulto (que ha dejado inconclusa su primaria o que no la ha cursado), ha desarrollado recursos de distinto tipo acerca del manejo de los naturales y sus operaciones. Pero nada hace suponer que estas habilidades desarrolladas puedan ser derivadas eficazmente hacia el terreno de razón y proporción ya que estos tópicos suponen el paso a otro tipo de números, así como el reconocimiento de razones en algún momento del desarrollo didáctico del contenido matemático.

Se recurrió al estudio de caso con la finalidad de revisar las estrategias que emplea el adulto en la resolución de algunos problemas de razón y proporción, los pensamientos que emergen y la forma en como influyen sus experiencias[3] al enfrentar los problemas.

El caso que se muestra es relevante porque se incorpora el punto de vista de un adulto a través de las habilidades que ha desarrollado y que pone en práctica en la resolución de las tareas, al ser capaz de vincularlas con su propia experiencia. En general se muestran sus alcances y limitaciones en torno a los conceptos de razón y proporción.

Cabe hacer mención que se hace este estudio de caso en el marco de una indagación más amplia en la prueba de materiales de razón y proporción.

Aspectos teóricos

Como el caso que se reporta es el trabajo realizado por un adulto al resolver problemas de razón y proporción, es importante resaltar dentro de este espacio, lo señalado por Valdemoros, (1998), Zuasti y López (1989) respecto al hecho de que las experiencias que el adulto ha adquirido a través de la diversidad de situaciones ocupacionales y culturales que ha enfrentado antes de incorporarse de nuevo a la educación elemental, lo han permitido adoptar ciertos recursos para el aprendizaje, lo cual puede facilitar aprendizajes posteriores, además tal diversidad de experiencias personales previas, acentúan las diferencias de aprovechamiento y ritmo de avance entre los miembros de un grupo.

Es por esto que se considera que es de gran importancia diseñar actividades a través de situaciones didácticas que tengan que ver con las experiencias más próximas de los adultos con lo que se vaya a trabajar.

---

* Este artículo corresponde a una presentación en Relme 12 que por razones de organización no se publicó en el volumen correspondiente.
[3] de tipo social, laboral y aquellas experiencias de la pequeña comunidad en la que vive.

También es fundamental comentar, en forma general, lo que en trono a razón y proporción se ha encontrado

Diversos estudios, (Noelting, G., 1980; Karplus, Pulos y Stage, 1983 a y b; Hart, 1988; Vergnaud, 1983; Streefland, 1991, 1993) muestran la dificultad que presentan los estudiantes al resolver situaciones en las que se involucran las nociones de razón y proporción, debiéndose, en parte, a las dificultades que se manifiestan durante los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Hart, (1988) comenta que a menudo los problemas de proporción requieren del reconocimiento de un factor escalar fraccional, seguido de una multiplicación por el factor. De esta forma se ha asumido usualmente que la comprensión de las fracciones y las proporciones están vinculadas.

Debido a que interesa indagar las estrategias que el adulto emplea en la resolución de los problemas así como los pensamientos que sirven de soporte para tales procedimientos, es importante señalar que investigadores como Hart enfatizan la gran importancia que tiene el desarrollo del pensamiento proporcional, pero enfocado a lo que el sujeto piensa en relación al aprendizaje. Es decir, a Hart le interesa: ¿Cómo aprende el sujeto? ¿Qué piensa? Esto no como parte de un proceso evolutivo (como lo fue para Piaget), sino como parte de un proceso que responde a la enseñanza.

En cuanto a los procedimientos, concepciones y representaciones simbólicas involucradas por los estudiantes en la resolución de problemas, se tiene que el marco de trabajo en el campo conceptual, permite estudiar la organización de estas ideas interconectadas, conceptualizaciones y representaciones sobre un periodo de tiempo largo, que conduzca a hacer una aproximación psicogenética. Al respecto Vergnaud, (1983) se interesó, principalmente, en dos campos conceptuales: estructuras aditivas y estructuras multiplicativas, viéndolas como clases o grupos de problemas que involucraban operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo (tales como adición, sustracción, diferencia, intervalo, translación) o de tipo multiplicativo (multiplicación. división, fracción, razón, semejanza). Por supuesto, las estructuras multiplicativas dependen en gran parte de las estructuras aditivas, pero ellas también tienen su propia organización intrínseca, la cual no es reductible a aspectos aditivos.

Aspectos Metodológicos

A. Perfil de Susana Martínez Escobar

Mujer de 51 años de edad que inició la primaria cuando tenía 10 años, estudió hasta el 4o grado, dejó la escuela por la necesidad de ayudar a su familia económicamente. Ha desempeñado diferentes trabajos: vendedora, ayudante de cocina, recamarera y actualmente trabaja en una institución de enseñanza superior como empleada administrativa, cumpliendo tareas menores, que no requieren del pleno ejercicio de sus conocimientos matemáticos. Susana comenta que siempre quiso continuar estudiando pero es hasta ahora que en su centro de trabajo ofrecen la oportunidad de terminar la educación primaria cuando ella se ha incorporado. Asiste al centro de capacitación dos veces por semana y está muy interesada en terminar sus estudios primarios.

Ella expresa que tiene dificultad para trabajar con la multiplicación y la división, así como también con los números fraccionarios y decimales.

B. Propósitos de las tareas utilizadas en el estudio de caso

Se diseñaron 8 tareas en torno a distintas situaciones didácticas, tratando de que fueran próximas a las experiencias de los adultos. Para el diseño de tales tareas se tomó como referencia el trabajo de Streefland, (1990, 1991, 1993) debido al manejo que le da a la

situación didáctica que consiste en ambientar los distintos problemas que utilizó en sus investigaciones.
A continuación se muestran tanto los propósitos generales como los específicos de cada una de las 8 tareas aplicadas.

	Cuestionario (Bloques I y II)	
Propósitos Generales	1. Determinar el estado en que se encuentra el sujeto en torno a la organización que tiene de los componentes cualitativos y procesos de cuantificación de las relaciones proporcionales. 2. Realizar una indagación profunda que permita mostrar tanto lo que el estudiante exhibe como lo que deja insinuado. 3. Recuperar la secuencia del pensamiento del estudiante. 4. Evidenciar el modo cómo el estudiante se acerca a la solución de los problemas planteados, tanto las estrategias que utiliza en la resolución como los modos de representación con los que trabaja.	
Propósito específico de cada bloque	Bloque I Indagar tanto los conocimientos como el saber matemático que tiene el estudiante sobre los componentes cualitativos de las relaciones proporcionales.	Bloque II Indagar cómo el estudiante está procesando su pensamiento en torno a la cuantificación de las relaciones proporcionales.
Propósito de cada tarea	1. Indagar si el estudiante puede reconocer la reducción de un dibujo en todos sus componentes, de tal manera que pueda expresar si se conserva la forma original del dibujo, en base a discriminaciones visuales. 2. Indagar si el estudiante puede completar una figura, que es la reducción de la original, de tal manera que preserve la proporcionalidad o que conserve la forma de la figura original, de qué estrategia se valió, y qué modo de representación usó al realizar la tarea. 3. Indagar si el estudiante puede completar la ampliación de una figura preservando la proporcionalidad y que explique por escrito cómo lo hizo. 4. Indagar si el estudiante puede completar 2 figuras, de tal manera que conserve la forma original de la figura y reconozca la estrategia que utilizó así como el modo de representación. 5. Indagar si el estudiante puede reproducir una figura a una escala dada (Se solicitará que el dibujo que reproduzca sea el doble del original).	1. Indagar si el estudiante puede completar una figura geométrica, conociendo el valor de un segmento (alto o ancho) y los valores del alto y ancho de la figura que se pretende que sea proporcional a otra figura dada, y qué estrategia emplea. La tarea estará inmersa en una relación de semejanza. 2. Completar una tabla dada como resultado de una situación planteada. Revisar la estrategia que empleó en su llenado. 3. Dada una situación ilustrada a través de dibujos, completar los datos faltantes conocidos tres valores y revisar qué estrategia emplea.

C. Descripción de la forma en como se llevó el caso

1. La ocho tareas que se le aplicaron a Susana fueron en forma escrita, utilizando lápiz y papel. Se le solicitó que no borrara los intentos de resolución a los problemas que se le planteaban.

2. Después de resolver las ocho tareas se recurrió a la entrevista como instrumento de investigación, pues las finalidades eran reconocer si había claridad en las instrucciones demandantes de cada tarea así como profundizar en la forma en como había abordado las resoluciones de los problemas, las estrategias seguidas y los conocimientos que estaban en juego. La entrevista que se llevó a cabo fue del tipo semi-estructurada, en proximidad a la clasificación realizada por Schwartz, H y Jacobs, J., (1984).

La entrevista se desarrolló en dos fases, la primera encaminada a la exploración, con la finalidad de que permitiera que el sujeto mostrara evidencia de los recursos con los que cuenta, es decir los conocimientos, habilidades y experiencias que tiene, para lo cual fue necesario el planteamiento de tareas que le fueran signficativas. La segunda fase, que se realizó al final, correspondió a la retroalimentación, para lo cual se recurrió a contrastar tareas así como a utilizar la simplificación de algunas para su resolución.
Al momento de que Susana daba sus explicaciones, estas eran reportadas por escrito.
La validación[4] de la entrevista se hizo con base en la triangulación de las tareas.

D. Análisis de los resultados obtenidos

En la tarea 1 en la que se le solicitaba determinar la reducción que correspondía a un dibujo dado, mostrando 4 opciones tres de los cuales tenían una parte reducida. Se encontró que realizó una observación global sin fijarse en cada componente del dibujo porque para ella todos dibujos eran reducciones del original.

[4]La validación de la entrevista es necesaria porque se requiere que haya estabilidad.

En las tareas 2, 3 y 4, en las que se le solicitaba completar la reducción o la ampliación del dibujo dado, sin modificar su forma, se observó que Susana dibujaba las figuras más grandes o más pequeñas, pero sin apoyarse en la cuadrícula. Ella hizo sus construcciones basándose en su apreciación cualitativa, no contó los cuadraditos y finalmente las figuras que dibujó no fueron proporcionales con las originales, aunque estuvieron muy próximas a serlo. Pareciera que aunque ella no contó hizo un reconocimiento súbito de cantidades, por las respuestas que dio en la entrevista.
Susana dibujó la figura un poco más pequeña pero no redujo la figura de tal manera que resultara proporcional a la original, solamente se fijó en que tuviera la misma forma**.** Al momento de preguntarle si le era claro lo que se le estaba solicitando que realizara, Susana comentó que si y comentó que se le estaba pidiendo hacer más pequeño el dibujo y sin modificar su forma. Se insistió en que leyera detenidamente las instrucciones y que volviera a explicar lo que tenía que hacer, así lo hizo y dio la misma respuesta. Cuando se le cuestionó sobre lo que entendía por la frase "sin modificar su forma" Susana explicó que no debería de agregar o quitar algo al dibujo original, como por ejemplo que no debería dibujarle faros al carro, o alguna otra cosa que el original no tuviera. Cuando se le demandó cómo lo había dibujado ella dijo que "viendo el original y aproximándose para hacerlo más pequeño".
Algo similar ocurrió con las actividades 3 y 4, ya que dibujó las figuras sin aumentarlas o reducirlas, respectivamente, de tal manera que fueran proporcionales a las originales, lo cual estaba implícito con las partes de las figuras que ya se le daban y con la finalidad de que utilizara la cuadrícula para el conteo. A Susana sólo le importó el hecho de construir las figuras más grandes o pequeñas según en la instrucción se decía ampliación o reducción y hacía mucho hincapié en que deberían ser figuras a las que no debería de modificarse la forma con respecto a los dibujos originales.
Susana dibujó correctamente la barca, pero no así el asta ni la bandera. Al momento de preguntarle cómo lo había hecho ella explicó que fue de acuerdo a su imaginación y fijándose en no agregar o quitar algo del dibujo original. Además comentó que el asta lo colocó a la mitad de la barca porque ella creía que debería servir como un equilibrio para que no se enchuecara la barca y que en el dibujo original el asta no estaba a la mitad.
Se puede observar que Susana hacía los dibujos de acuerdo a lo que ella sabe de cómo son los objetos reales y esto se observa a lo largo de todas las actividades que resolvió.
En el caso de la tarea 5 en donde se le pedía dibujar un chaleco aumentando dos veces cada lado del chaleco original. Ella dibujo un nuevo chaleco más grande pero no fue el doble como se le solicitaba, además redondeo lo que correspondía a las sisas del chaleco, siendo que en el dibujo original estaban rectas. Ella dijo que la mayoría de los chalecos tienen la forma redonda porque ahí es donde entran los brazos y por ello ella lo dibujó así.
En la actividad 6, 7 y 8 también está reflejada su experiencia.
La tarea 7 es:
La Sra. Saucedo va a tener invitados a merendar y pensó hacer chocolate con leche. Ayúdala a saber cuantas barras de chocolate necesita para 2 litros de leche ________ y cuántas para 5 litros de leche __________________. También ayúdala para saber cuántos litros de leche debe comprar para 6 barras de chocolate ________. Auxíliate llenando la siguiente tabla.

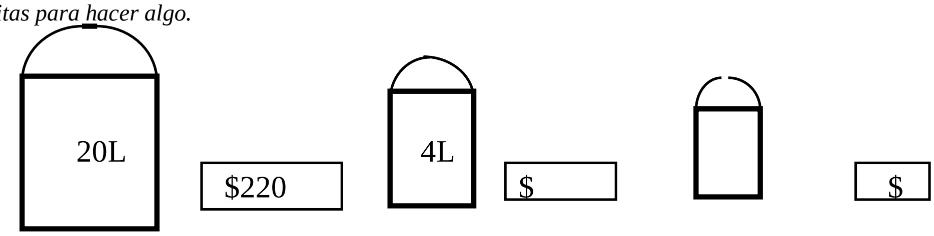
barras de chocolate	*litros de leche*
2	*1*
	2
6	
	5

¿Qué hiciste para contestar las preguntas? ___________________________

Susana preguntó si debería responder de acuerdo a lo que se le solicitaba o en base a como ella hace el chocolate con leche. Comentó que en su caso ella utiliza media barra de chocolate para cada litro pero tal vez esta señora Saucedo le gusta que el chocolate sea más espeso. Finalmente llenó la tabla correctamente y también contestó las preguntas en acertadamente.

Respecto al problema 8, que a continuación se muestra:

Luis va ayudar a su papá a pintar la casa, para ello necesitan varios botes de pintura. A continuación se muestran algunos dibujos que representan los botes de pintura y algunos datos que corresponden a ellos. Falta encontrar otros datos. Piensa cómo puedes determinarlos y escribe los resultados en los rectángulos. Ocupa el espacio en blanco si lo necesitas para hacer algo.



Después de leer el enunciado del problema Susana preguntó si para resolverlo tenía que usar los datos que le dan o de acuerdo a lo que ella creía que puede ser el costo de los botes de pintura. Se le respondió que era en base a lo que la tarea le demandaba.

Se puede observar una vez más la influencia que tiene sus experiencias y vivencias en la presentación de tareas.

Susana hizo una tabla para determinar el costo del bote de pintura de 4 litros, pero tuvo dificultades cuando llegó al costo de 21/2 litros, tanto en su escritura como en el manejo de estos números.

20	*$220*
10	*$110*
5	*$ 55*
2 y medio	*$27.50*

Ella explicó que le cuesta trabajo usar números fraccionarios y decimales. Para evitarlos pensó en que podía hacer una división, de esta forma dijo: *"Tengo que dividir 110 entre 10, pero me cuesta trabajo la división"*. En ese momento preguntó si podía usar sus dedos y después de unos cuantos minutos respondió: *"El bote de 4 litros cuesta 44 pesos"*. Se le solicitó que explicara en forma oral el procedimiento seguido, y después se le pidió que lo escribiera. Lo que explicó fue lo siguiente. " *Si un litro costara 20 pesos, entonces 10 litros saldrían en 200 pesos, pero esto no puede ser ya que 10 litros cuestan 110 pesos, entonces si un litro costara 10 pesos, diez litros costarían 100 pesos, están faltando 10 pesos para que sean los 110 pesos, sabiendo que me faltan 10 pesos, opté por agarrar un peso para cada litro. Así cada litro cuesta 11 pesos y 4 litros cuestan 44 pesos."*

Se puede observar que Susana probó valores para determinar el costo de los litros y una vez que se aproximó a un valor conocido, que fue el que 10 litros cuestan 100 pesos, notó que sólo le faltaban 10 pesos para completar la cantidad y pensó en asignar un peso a cada litro. De esta manera obtenía el costo de un litro que es de $11 y coincidía con el costo de 10 litros que es de $110. Se puede notar también que antes de determinar el valor del bote de 4 litros se interesó por el de 1 litro. A lo que Vergnaud llama resolver el problema basándose en el valor unitario.

Susana después comentó que si supiera multiplicar y dividir bien ella hubiera utilizado estas operaciones para resolver este último problema, porque sabe que tanto la multiplicación como la división ayudan a que el problema se resuelva por un camino más corto del que ella utilizó. Susana muestra un enorme interés por seguir sus estudios y terminar la escuela elemental.

Conclusiones

i) La experiencia conocida del sujeto del caso fue incorporada en la resolución de los problemas.
ii) El tipo de experiencia que prevaleció al enfrentar las tareas, fue la de tipo familiar.
iii)El sujeto del caso no utilizó la cuadrícula de los dibujos para hacer las reducciones y ampliaciones, predominó un reconocimiento plenamente cualitativo en esas tareas en las que los cuadraditos estaban presentes como un apoyo para facilitar las reducciones y ampliaciones de forma proporcional.
iv) El sujeto del caso reconoce la necesidad de trabajar con otros números diferentes a los naturales para la resolución de problemas y muestra interés en su aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Freudenthal, H. (1983). Ration and Proportionality. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel Dordrecht. 178-209.
Hart, K, (1988). Ratio and proportion. En: J. Hiebert y M. Behr (eds.), Concepts and operations in the Middle Grades, 2. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En: R. Lesh y M. Landau (Eds.), Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes (45-90). New York: Academic Press.
Lesh, R., Post, T. y Behr., M. (1988). Proportional reasoning. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.), Concepts and operations in the Middle Grades, 2. Reston,Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
Mellar, H. (1991). Modelling students' thinking on a proportional reasonig task. International Journal of Mathematics Education, Science and Technology, 22, 1. 111-119.
Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part. I. Educational Studies in Mathematics, 11-2. 217-253.
Schwartz, H., y Jacobs J,. J. (1984). La obseración participativa y la entrevista. Reconstrucción de la realidad de grupos sociales. Sociología Cualitativa. Método para la reconstrucción de la realidad.México. Trillas. 61-89.
Streefland, L. (1990). Free Productions in Teaching and Learning Mathematics En: K. Gravemeijer, M. van de Hunal y L. Streefland (Eds.), Contexts Free Poductions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education (33-52). Utrecht: Researchgroup for Mathematical Educational Computer Centre State University of Utrecht, The Netherlands.
Streefland, L.(1991). Fractions in realistic mathematics education. Tesis doctoral publicada por la Kluwer Academic Publishers. 46-134.
Streefland, L. (1993). The desing of a mathematics course a theoretical reflection. Educational Studies in Mathematics, 25. 109-135
Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1990). Introducción a los métodos Cualitativos de Investigación. La búsqueda de significados. Buenos Aires: Paidós. 31-132.
Valdemoros, M., et al. (1996). La interpretación Ordinal de la Fracción. En: F. Hitt. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa.* 441-455. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Vergnud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. landau (Eds.), Acquisitions of Mathematics concepts and processes (127-174). New York: Academic Press.
Zuasti, N, y López, F. (1989). *Las matemáticas en la Educación de adultos/as.* Madrid: Editorial Popular.

El adulto resuelve problemas aritméticos elementales*

Marta Elena Valdemoros Alvarez
Cinvestav-IPN. México
mvaldemo@mail.cinvestav.mx

Resumen
Esta comunicación deriva de una investigación en actual desarrollo, la cual es respaldada por el CONACYT. Aquí, se exponen los resultados parciales obtenidos en tercero, cuarto y quinto grados de una escuela nocturna perteneciente al sistema educativo escolarizado, en la Ciudad de México. Los sujetos del estudio son jóvenes y adultos de distintas edades, cuyos perfiles de desempeño aritmético, familiar, ocupacional y comunitario presentan profundas diferencias de uno a otro. Las tareas académicas reportadas son problemas aritméticos en los que se usan números naturales, tanto en un cuestionario exploratorio como en algunas entrevistas llevadas a cabo con personas que exhibieron modos de resolución eficientes. El interés primordial del presente escrito reside en la reflexión en torno a los procesos semánticos de los jóvenes y adultos que les facilitaron la producción de determinadas soluciones, a la par de prestar atención a las características de los problemas aritméticos con números naturales que generan mayor comprensión en dichos sujetos.

Marco Teórico

En la Reunión Internacional de Hamburgo, convocada por la UNESCO (1997), se reconoció que la problemática **de la formación de adultos** es uno de los mayores desafíos educativos contemporáneos compartidos mundialmente. Aunque en las distintas regiones del planeta, se diferencian las experiencias desarrolladas en este terreno y las necesidades que las sustentan, la UNESCO asume que hay un requerimiento universal de atención a este sector (mediante diversas modalidades de lucha contra el analfabetismo, o bien, de formación básica, especialización en el trabajo, educación permanente o de educación a distancia) y de promoción de investigación especializada en el mismo.
En Latinoamérica, pese a la heterogeneidad existente entre los países que componen la región y la fuerte diversidad interna que caracteriza a cada uno de ellos, las tendencias fundamentales de la educación de adultos se expresan a través de la lucha contra el analfabetismo y la instrucción básica. Esto era destacado años atrás por Solari (1982) y ha sido recientemente ratificado por Medina (1997), a partir de la información reunida por UNESCO.
En ese marco general y como ya lo hemos señalado precedentemente (en Valdemoros, 1997, 1998), la educación matemática elemental de los adultos demanda tanto la actualización de las propuestas de enseñanza destinadas al sector como un amplio reconocimiento de los procesos cognitivos comprometidos en los aprendizajes fundamentales de los adultos, en su pasaje por la primaria. Para poder ofrecer respuestas adecuadas a ambos requerimientos, se torna imprescindible asentar firmemente tal línea de investigación, al interior de la Matemática Educativa, desde donde se pueda indagar profundamente los aspectos que confluyen en este espacio instruccional básico.
Reconociendo que los significados, nociones y conceptos numéricos brindan un soporte fundamental al conocimiento matemático básico y que el punto de partida de tales construcciones lo constituyen las elaboraciones realizadas en torno a los números naturales, por parte del sujeto cognoscente, se retoman en estas páginas las aportaciones realizadas

* Este artículo corresponde a una conferencia especial dictada en Relme 14. En la publicación del Vol. 14 apareció incompleto, razón por la que en este Vol. 15 se incluye.

por Fuson y Hall (1983) con respecto a la semántica fundamental de dichos números. Específicamente, se privilegian los significados de **cardinal**, **ordinal** y **medida derivada del conteo**. Asimismo, interesan los significados otorgados a la **unidad**, y a las **operaciones fundamentales** que se realizan con números naturales; en ello, se rescatan los planteamientos efectuados por Hiebert (1988), en particular, la reflexión acerca del reconocimiento de unidades simples y compuestas.

En cuanto a la naturaleza de los problemas diseñados para los adultos, se toman en consideración los planteamientos efectuados por Cabello (1997), Catalán y Gallach (1997), Zuasti y López (1989), entre otros autores que promueven criterios análogos. En particular, se resalta la conveniencia de elaborar propuestas e instrumentos de trabajo que recuperen la experiencia antecedente de los adultos, permitiendo que pueda ser contemplada la diversidad de prácticas que ellos mantienen y las necesidades que experimentan.

El problema planteado en este estudio

Los significados, nociones y conceptos construidos por los adultos en torno a los números naturales, los que son susceptibles de reconocimiento cuando éstos resuelven problemas aritméticos que involucran a tales números.

La hipótesis sustentada

El dominio de los significados, nociones y conceptos numéricos referidos a los números naturales favorece la resolución de problemas y mejora el cálculo aritmético ligado a éstos.

El método

Esta investigación es de naturaleza eminentemente cualitativa. El **diseño general** de la misma otorga un papel exploratorio a la aplicación inicial de un cuestionario, a partir del cual se obtiene información general de los grupos de adultos considerados y se puede realizar una selección más eficaz de las personas que exhiben un perfil destacado, para desarrollar con ellas un estudio de casos. Este último constituye un componente central de la investigación descrita. En particular, los casos serán sometidos a indagación a través de entrevistas individuales de carácter didáctico, en las que –desde un enfoque constructivista– se promueven las reelaboraciones de los entrevistados y se accede a modos muy activos de retroalimentación (conforme a la caracterización que en Valdemoros *et al.*, 1996, se realiza de la "entrevista didáctica").

Los **instrumentos** han sido diseñados para promover la resolución de problemas que reconstruyen diversos aspectos de la experiencia vital, familiar, ocupacional y comunitaria de los adultos. Toda vez que el tipo de 'reconstrucción de la experiencia' lo permite, se modela con ella una diversidad creciente y eslabonada de situaciones que facilitan un recorrido semántico y conceptual polifacético. Se usan distintas modalidades de representación para la comunicación de los problemas: expresiones lingüísticas escritas, expresiones aritmético-técnicas, los dibujos que favorecen soluciones inspiradas en aproximaciones del adulto marcadamente intuitivas, listados y representaciones tabulares. El **cuestionario** está compuesto por diez problemas planteados alrededor de los traslados urbanos e interurbanos, la vida del barrio, la compra de artículos diversos, la presentación de actividades laborales básicas, la jardinería, etc. Las **entrevistas** están estructuradas a partir de uno de los modelos introducidos en el cuestionario: el restaurante. Así, la vida interior de éste es presentada de manera accesible para que los sujetos resuelvan, en ese marco, una gran variedad de situaciones aditivas y multiplicativas asociadas a las labores de la cocina, el servicio de las mesas, la atención de comensales, la compra de los artículos imprescindibles para la preparación del menú y el aseo general.

El **escenario** natural de la investigación lo proporciona una escuela pública nocturna, integrada al sistema escolarizado de enseñanza. La misma se encuentra en el área conurbana de la Ciudad de México, en una zona industrial. La institución se caracteriza por contar con una planta docente profundamente comprometida con las necesidades e intereses de los adultos a su cargo.

Los **sujetos** de la investigación son los jóvenes y adultos incorporados a tercero, cuarto y quinto grados de la escuela mencionada. El estudio de casos compromete la selección de cinco personas con diferentes edades y perfiles de desempeño aritmético, ocupacional, familiar.

Los **procedimientos de validación** adoptados para legitimar la experiencia de campo y los resultados obtenidos, son los ‘controles cruzados’ entre dos observadores y la ‘triangulación de tareas similares’, susceptibles de ser comparados y de permitir constatar la persistencia de las respuestas y procesos de resolución observados.

Resolviendo problemas elementales

En esta sección se presentan los resultados globales obtenidos, concentrando la atención en aquéllos que concitan las interpretaciones y el análisis fundamental de estos datos de campo.

a) Resultados generales registrados en el cuestionario exploratorio

La mayoría de los miembros de esos grupos pudieron responder adecuadamente a los problemas en los que se demandaba el reconocimiento del cardinal. La pregunta “**¿cuántos...?**” estaba cargada de sentido para casi todos los adultos.

A nivel del ordenamiento de cantidades y del reconocimiento de ordinales, se incrementaron notablemente los errores de los resolutores del cuestionario. Con respecto a lo primero, quienes respondían inadecuadamente tan sólo lo hacían ante los ordenamientos más difíciles; unos pocos adultos incurrieron en errores generalizados en estas tareas de ordenamiento, o bien, invirtieron el sentido del ordenamiento (si se les demandaba hacerlo de mayor a menor, lo hacían de menor a mayor, como seguramente solían utilizar la secuencia numérica de los naturales). El uso de determinados ordinales (por ejemplo, “**... el décimo...**”) parecía resultar desconocido para una minoría cuya frecuencia era bastante variable.

Los problemas sencillos de tipo aditivo no suscitaron dificultades de comprensión respecto a su naturaleza, en la mayoría de los adultos que resolvieron el cuestionario exploratorio. No obstante, muchos eran los que incurrían en errores de corte algorítmico. En el caso de algunos problemas en los que se requería sumar y restar, un número destacado de adultos optaron por una sola operación, con la consiguiente distorsión de la solución propuesta.

Un número variable de adultos no resolvió los problemas de tipo multiplicativo, situación que se presentó con mayor frecuencia en el caso de los problemas más complejos, en los que debían hacer uso reiterado de la multiplicación. Los problemas en los que la solución más sencilla implicaba el uso de la división, condujo a unos pocos adultos a un uso eficiente de la operación inversa, para obtener un resultado adecuado. En contraste con esto último, dos adultos evidenciaron no poder identificar 'el resto de la división', en situaciones muy concretas.

Nos llamó la atención la circunstancia de que un reducido número de adultos (de reciente incorporación a la escuela) tenía dificultades notacionales cuyo origen podría vincularse a la lectura y escritura de números mayores a los que ellos efectivamente podían manejar, o a conflictos cognitivos importantes con respecto al sistema posicional. Sin embargo, el cuestionario no nos permitió avanzar en la dirección de esclarecer tal duda, dado que –entre otras razones– no fue diseñado para detectar tales dificultades cognitivas.

b) Resultados generales del estudio de casos

Los cinco casos estudiados fueron seleccionados por haber resuelto en su totalidad el cuestionario previo y presentar distintas modalidades de ejecución. Al momento de la realización de las entrevistas, tres de ellos estaban incorporados a quinto grado, uno a cuarto grado y el último, a tercer grado. Desde otro punto de vista, eran tres mujeres y dos hombres, con edades comprendidas entre 15 y 71 años. A nivel ocupacional, se distinguían en el ejercicio de distintas labores (un obrero, un carpintero, dos trabajadoras domésticas y un ama de casa).

En el desarrollo de las entrevistas pudo observarse que para dos de esos casos (las mujeres de quinto grado, dedicadas al servicio doméstico, una de 16 años y la otra de 40 años), al enfrentar las situaciones multiplicativas podían hacer uso del procedimiento canónico o, alternativamente, tendían a apegarse a procedimientos avanzados de conteo, apoyados en el reconocimiento de unidades compuestas, lo cual podía ser luego reducido por ellas mismas a una "suma repetida"; con ello, además de hacer explícita la interpretación otorgada a la multiplicación de naturales en dichas situaciones, también ofrecieron evidencias de un uso espontáneo del natural como 'medida derivada del conteo'. Una de ellas brindó algunos débiles indicios –en algunos momentos de las entrevistas– de apoyarse en el cálculo mental.

Los hombres (un obrero de 15 años incorporado a cuarto grado y un carpintero de 71 años, perteneciente a quinto grado) exhibieron un marcado apego a los procedimientos algorítmicos canónicos, incurriendo ocasionalmente el primero de ellos en algunos errores de cálculo asociados a pequeñas distorsiones de los respectivos procedimientos, además de llegar a una laboriosa rectificación del problema multiplicativo del cuestionario, expresado a través de dos escalas muy sencillas (tres cantidades distintas del mismo tipo de pintura asociadas al precio de una de ellas). El carpintero mostró un manejo impecable de los algoritmos. Para ambos y sin lugar a dudas, los problemas planteados adquirieron un sentido adecuado.

El ama de casa de tercer grado (con 41 años de edad) también se apegó al uso adecuado de los algoritmos canónicos, tanto en el cuestionario como en las soluciones inicialmente explicitadas en las entrevistas. Lentamente, resolvió los problemas planteados y en sus justificaciones abrió paso a otros recursos personales de cálculo. Las situaciones a resolver en las entrevistas fueron claramente significativas para ella.

Globalmente, los entrevistados dieron muestras de haber construido adecuadamente los contenidos semánticos primordiales atribuidos convencionalmente a los números naturales. En escasas ocasiones, algunos de ellos manifestaron dudas y errores leves de cálculo, los que pudieron ser superados a partir de confrontar distintos modos de solución ante los mismos problemas.

Referencias bibliográficas

Cabello, M. (1997). *Didáctica y educación de personas adultas.* Málaga: Ediciones Aljibe.

Catalán, J. y Gallach, M. (1997). La necesidad de la existencia de la educación permanente de adultos para el desarrollo promocional y la cualificación profesional de las personas. *Quaderns. Fifth International Conference on Adult Education.* Hamburgo, Alemania.

Fuson, K. y Hall, J. (1983). The acquisitions of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En: H. P. Ginsburg (Ed.), *The develpment of mathematical thinking.* Nueva York: Academic Press.

Hiebert, J. (1988). Introduction. En: J. Hiebert y M. Behr (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades, 2.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Medina, O. (1997). *Modelos de educación de personas adultas.* Canarias: El Roure Editorial.

Solari, A. (1982). Desigualdad social y educación de adultos en América Latina. En: C. A. Torres (Ed.), *Ensayos sobre la educación de adultos en América Latina* (21-33). México: Centro de Estudios Educativos.

UNESCO (1997). Plan de acción para el futuro de la educación de adultos. *Fifth International Conference on Adult Education.* Hamburgo, Alemania.

Valdemoros, M., Orendain, M., Campa, A. y Hernández, E. (1996). La interpretación ordinal de la fracción. En: F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa, I* (441-455). México: Editorial Iberoamérica.

Valdemoros, M. (1997). Para la educación matemática elemental de jóvenes y adultos. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa XI.* Morelia, México. 17.

Valdemoros, M. (1998). El inicio de la educación matemática elemental de los adultos. *Memorias de la Reunión Latinoamericana XII.* Bogotá, Colombia. 55-58.

Zuasti, N. y López, F. (1989). *Las Matemáticas en la Educación de los adultos/as.* Madrid: Editorial Popular.

Se agradece al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** de **México** el amplio respaldo brindado a esta investigación en desarrollo. Su apoyo ha facilitado la conformación de un pequeño equipo de investigación y la disposición de todas las facilidades de infraestructura previstas para su realización.

Pensamiento Geométrico

Nivel Básico

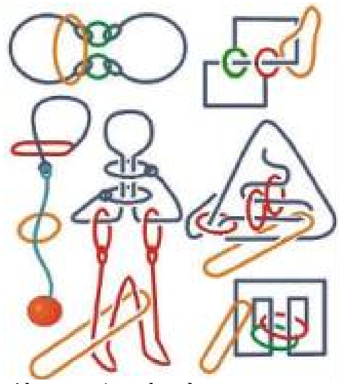
Una aproximación matemática a los rompecabezas de alambre

Carlos Montoya*, Guillermo Gómez Alcaraz**
*Escuela N° 88. Argentina. **UNAM. México
montoy@infovia.com.ar gomal@servidor.unam.mx

Resumen
Los juegos de ingenio conocidos como "puzzles" o rompecabezas de alambre contiene un rico potencial didáctico. Presentamos aquí las posibilidades que ofrecen estos juegos para explorar y estudiar el espacio tridimensional en forma concreta desde la Teoría de Nudos y la Geometría. Finalmente describimos sucintamente dos experiencias didácticas extraescolares desarrolladas en torno a este material.

Los rompecabezas de alambre como problemas matemáticos

Los rompecabezas de alambre son juegos de ingenio cuyo desafío consiste en liberar de la estructura a una pieza determinada que suele denominarse "anilla problema".

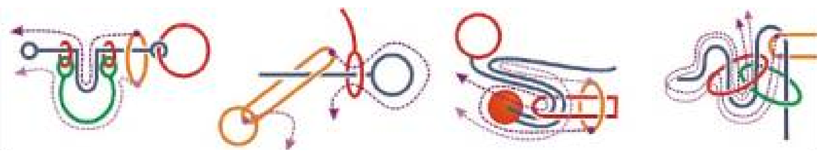


Algunos ejemplos de rompecabezas de alambre

Una rápida mirada a los juegos da la impresión de que la anilla problema no podrá salir por encontrarse atrapada en una estructura (aparentemente) cerrada y no resulta extraño que quien consiga liberar la anilla por primera vez lo haga sin haber comprendido cómo es que lo logró. La perplejidad que provoca esta experiencia lleva a buscar la comprensión del funcionamiento de los juegos.
Las relaciones espaciales que establecen las piezas de los rompecabezas pueden ser analizadas recurriendo a los contenidos tradicionales del Pensamiento Geométrico. Pero también abren interesantes posibilidades para abordar el estudio y la representación del espacio tomando elementos de la matemática contemporánea como la Topología y, en particular, la Teoría de Nudos, superando así la reducción al plano o la mera abstracción a las que suele someterse el área de la Geometría.
A continuación presentamos algunas posibilidades didácticas de los rompecabezas de alambre.

Clasificación de los rompecabezas de acuerdo a su "clave de solución"

Los numerosos rompecabezas de alambre pueden ser clasificados de acuerdo a su *clave de solución*. Estas claves de solución se reiteran con mayor o menor complejidad en diferentes rompecabezas o se encuentran combinadas[1]. También es posible clasificar a los rompecabezas teniendo en cuenta el número de movimientos necesarios para llegar a liberar la anilla. El descubrimiento de las diferentes claves de solución y la clasificación de los juegos por complejidad, pueden ser las primeras formas



Diferentes claves de resolución que permiten clasificar los rompecabezas de alambre

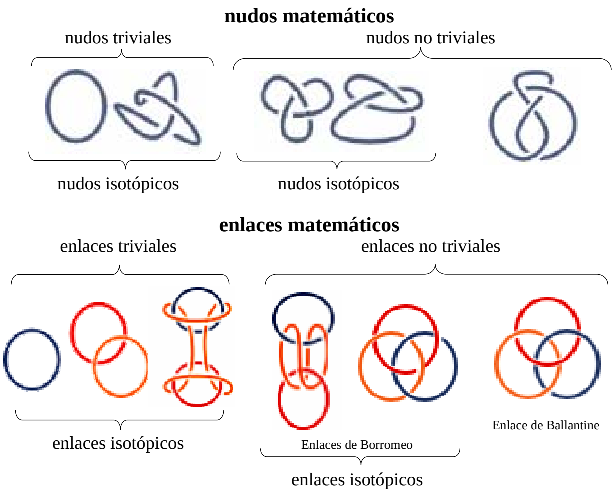
[1] El profesor Pablo Flores Martínez propone una clasificación más completa de los "laberintos de alambre" según su clave de solución (Flores Martínez, 1999) y explora su aplicación en la clase de matemáticas postulando estas "estructuras topológico–métricas" como objeto de "ensayo para la captación de estrategias de actuación en otros menesteres".

empíricas en que los niños pueden aproximarse al problema de la comprensión de los rompecabezas de alambre.

Los rompecabezas de alambre como enlaces matemáticos

Las relaciones espaciales que establecen las piezas de los rompecabezas permiten establecer asociaciones entre estos juegos y los *nudos* y *enlaces matemáticos*.
Todos los rompecabezas de alambre pueden ser representados como *enlaces matemáticos,* reconstruyéndolos con hilos o sogas con alma de alambre. Estas modificaciones no cambian las condiciones de solución de los juegos a la vez que permiten describirlos, mediante el lenguaje de la *Teoría de Nudos*.

Esquema conceptual básico de la Teoría de Nudos



Es así que con un esquema conceptual básico como el que se presenta en el cuadro, es posible construir un lenguaje con el cual describir, comprender y explicar los rompecabezas de alambre.

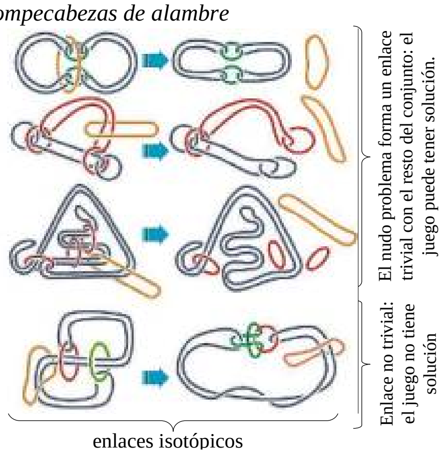
Diferentes rompecabezas representados como enlaces matemáticos.

Análisis topológicos de los rompecabezas representados como enlaces matemáticos

El análisis de los rompecabezas construidos como *enlaces matemáticos* requiere la actividad concreta de los alumnos, elaborando y corroborando hipótesis; dándose la posibilidad de explorar el espacio tridimensional con sus propias manos, operando con materiales como lazos, elásticos, alambres.
Este tipo de análisis se puede desarrollar en dos aspectos:

a) *Determinación de condiciones topológicas de solución,*
b) *Exploración de soluciones a rompecabezas complejos*

Una condición topológica para la solución de los rompecabezas de alambre



a) *Determinación de condiciones topológicas de solución*

Para que un rompecabezas de alambre pueda tener solución es necesario que se cumplan determinadas *condiciones topológicas* simples. Estas condiciones pueden ser expresadas con precisión mediante el lenguaje de la *Teoría de*

Nudos. Para ello es necesario que los niños logren elaborar proposiciones cuidando las relaciones entre conceptos como *invariante, transformaciones continuas, en laces isotópicos, enlaces triviales*, con los cuales puedan verbalizar su experiencia práctica y concreta a través de un lenguaje preciso.

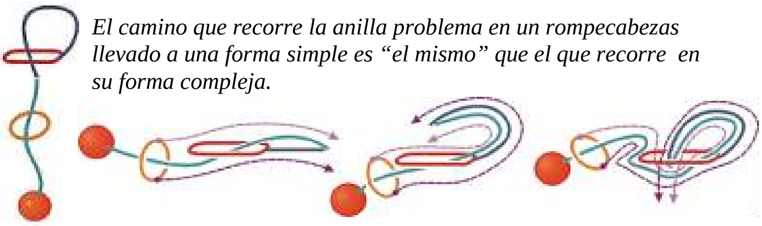
b) *Exploración de soluciones en rompecabezas complejos*

El recorrido que realiza la anilla para escapar de un rompecabezas se encuentra inscripto en un espacio continuo. Si representamos a los rompecabezas como *enlaces matemáticos*, ese espacio tridimensional que rodea a los rompecabezas se denomina *complemento*. Las *transformaciones continuas* que se operan sobre el *enlace* modifican su *complemento*, pero no alteran su continuidad, es decir que a *enlaces isotópicos* corresponden *complementos* equivalentes.

Este razonamiento aplicado a los rompecabezas permite inducir que si operamos ciertas deformaciones a los juegos ,sin cortar ni unir sus segmentos, su solución no cambia, en el sentido de que se conserva la *continuidad* del recorrido de la anilla problema.

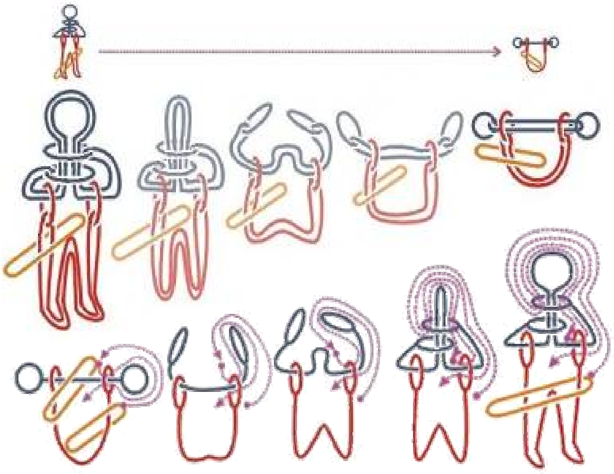
Considerando lo anterior, es posible llevar un rompecabezas complejo a una forma simple, en la que la solución sea evidente y, una vez identificada su solución, volver a llevar el rompecabezas a su forma original observando las *transformaciones continuas* que sufre su *complemento* y en él el recorrido de la anilla problema.

Este procedimiento, que parece demandar un poderoso proceso de abstracción, es posible desarrollarlo en forma práctica y concreta con materiales flexibles como sogas o alambres, tal como muestra el gráfico. Si se representa el recorrido que debe realizar la anilla problema en la estructura del rompecabezas, es posible observar las modificaciones que sufre el espacio que rodea a los alambres.



El camino que recorre la anilla problema en un rompecabezas llevado a una forma simple es "el mismo" que el que recorre en su forma compleja.

Otra forma de explorar las soluciones de los rompecabezas consiste en descubrir que los *enlaces* que representan ciertos rompecabezas complejos son *isotópicos* a *enlaces* que representan rompecabezas más simples. En efecto, esto sucede con algunos rompecabezas que a primera vista se presentan muy complejos, pero su estructura es idéntica a la de rompecabezas sencillos. Esto se puede observar transformando los rompecabezas en *enlaces matemáticos* y operando sobre ellos *transformaciones continuas*.



Si los alumnos logran descubrir estructuras equivalentes entre rompecabezas, pueden descubrir también la solución del más complejo de ellos llevando, mediante *transformaciones continuas*, el rompecabezas más simple a la forma del más complejo y observando las transformaciones que se producen en su *complemento*, es decir en el recorrido que debe realizar la anilla problema para ser liberada.

Se trata de un procedimiento que también es posible llevarlo a la práctica con los materiales adecuados y que ofrece una atractiva oportunidad para explorar con las propias manos las sorpresas que nos depara el espacio tridimensional.

Análisis geométricos de los rompecabezas de alambre

Los rompecabezas de alambre presentan una limitación al análisis topológico. Esta limitación la imponen aquellas partes de la estructura que cumplen la función de trabas aparentes a las que la anilla problema debe sortear para quedar liberada. Aunque estas trabas sean efectivamente aparentes, es necesario que en su construcción material cumplan la condición de permitir que la anilla problema pueda pasar a través de su interior. Estas condiciones de resolución caen en el campo de la Geometría.

Las relaciones geométricas que deben conservar las piezas pueden ser analizadas y descriptas tanto en términos de medidas relativas como a través de la comparación de las piezas mediante *proyecciones geométricas*. Nuevamente es posible llevar al plano de lo concreto el concepto y la práctica de *proyección* mediante una fuente de luz sobre un plano de papel blanco.

Dos experiencias extraescolares con rompecabezas de alambre

En la Escuela Primaria N° 88 de la localidad de Las Coloradas[2] se llevaron adelante dos experiencias extraescolares diferentes en torno a la exploración matemática de los rompecabezas de alambre. La primera de ellas comprendió a un reducido grupo de tres alumnas de 11 y 12 años de edad y la segunda a un grupo de diez alumnos de 9 y 10 años.

Primer experiencia: Enseñanza y aprendizaje a través de la investigación.

Esta experiencia fue la más extensa y se desarrolló a lo largo de un año escolar a través de encuentros semanales. Fue motivada por la curiosidad y el interés que los rompecabezas generaron en las alumnas, quienes los descubrieron en una feria artesanal.

La primera aproximación a los rompecabezas fue naturalmente a través del juego. Pero una vez familiarizadas las alumnas con la resolución de un limitado grupo de rompecabezas se propuso un trabajo de enseñanza y aprendizaje a través de la investigación[3].

En este sentido se realizaron las siguientes actividades orientadas por el docente:

1. Formulación de preguntas al objeto de estudio. a) ¿Cómo es posible que una pieza pueda salir de una estructura de piezas que parecería cerrada? b) ¿Qué es lo que hace que una estructura parezca estar cerrada cuando en realidad está abierta? c) ¿Habrá una misma explicación para todos los rompecabezas de alambre o habrá una explicación diferente para cada juego?

2. Planteo de un objetivo de la investigación. Recurrir a los conocimientos matemáticos para comprender los rompecabezas de alambres y construir una explicación a las soluciones de estos juegos utilizando el lenguaje de la Matemática.

3. Clasificación de los juegos de acuerdo a su clave de solución. Se identificaron dos claves diferentes y, a partir de ellas se lograron construir nuevos rompecabezas como variantes de los ya conocidos.

4. Descripción geométrica de los rompecabezas. Las formas geométricas que tienen las

---

[2] Las Coloradas (provincia del Neuquen) es una localidad de aproximadamente 900 habitantes y se encuentra ubicada en el centro oeste de la República Argentina, sobre la precordillera andina.

[3] Los resultados de ese trabajo fueron presentados en la XXV FERIA NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA. Paraná. Entre Ríos. Argentina. Octubre de 2001. http://www.setcip.gov.ar/25feriacyt/25_feria_juvenil/neuquen_25.htm

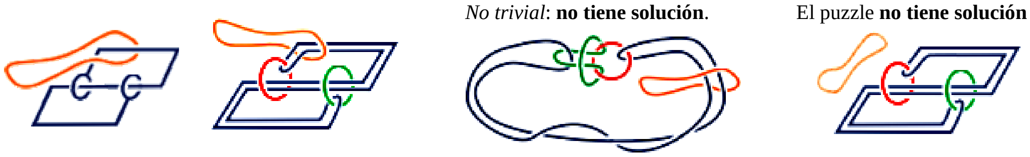
piezas de alambre y las relaciones espaciales que establecen entre ellas dio, en un primer momento, la idea de que el problema podría ser estudiado y comprendido desde la Geometría. De este modo se comenzó a recabar información sobre diferentes conceptos geométricos que permitirían describir los juegos a través de sus partes componentes.

5. Transformación de los rompecabezas en enlaces matemáticos. Las actividades realizadas fueron las siguientes:

- Lectura de materiales teóricos adaptados al nivel de las alumnas.
- Construcción de diferentes nudos y enlaces con materiales flexibles.
- Representación gráfica de nudos y enlaces.
- Identificación de propiedades invariantes en nudos y enlaces en forma práctica.
- Descripción mediante los conceptos básicos de la Teoría de Nudos de las actividades realizadas y de las propiedades del material operado.
- Reconstrucción de los rompecabezas de alambre como enlaces matemáticos.
- Análisis práctico y conceptual de sus propiedades.
- Identificación de rompecabezas diferentes que pueden ser representados por enlaces isotópicos.
- Exploración de soluciones a rompecabezas complejos y desconocidos mediante la operación de transformaciones continuas en su estructura original.

6. Formulación de una condición topológica para que un rompecabezas tenga solución. Un rompecabezas de alambre, descrito en términos topológicos como un enlace, tiene solución si uno de sus invariantes topológicos consiste en que el nudo problema establezca un enlace trivial con el resto de los nudos. Es decir que el enlace que representa al juego en el inicio puede llevarse mediante transformaciones continuas al enlace que representa el juego resuelto. Una actividad interesante fue poner a prueba esta condición topológica con rompecabezas cuya solución es topológicamente imposible[4], pero que al operarlos en su estructura original, esta imposibilidad no se observa a simple vista.

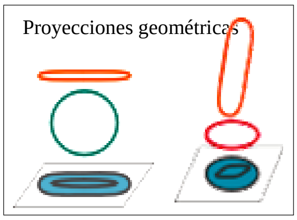
Puzzle ***¿Imposible?*** | *Enlace E*, correspondiente Al puzzle ***¿Imposible?*** | *Enlace isotópico* logrado por *transformaciones continuas*. *No trivial*: **no tiene solución**. | *Enlace F*, correspondiente al juego resuelto. *E* y *F* no son *isotópicos*: El puzzle **no tiene solución**



7. Análisis de las condiciones geométricas de la solución de los rompecabezas. A diferencia de la condición topológica, que resulta general para todos los rompecabezas, las condiciones geométricas, impuestas por las estructuras rígidas de alambre, varían con cada uno de los modelos y en algunos casos se torna complejo describirlas en forma exhaustiva. No obstante, fue posible describir las condiciones geométricas mediante la práctica concreta de *proyección* de las piezas de alambre sobre un plano de papel blanco. Esta práctica permitió formular algunas condiciones geométricas para rompecabezas comprendidos en dos categorías diferentes de acuerdo a su clave de solución, tales como el estar determinado *sector de la curva* de cierta pieza *comprendida* en la *proyección* de otra. Las proyecciones sobre papel mediante una fuente de luz permitieron llevar al campo de lo concreto el salto de abstracción que implica el traslado del espacio de tres dimensiones al

[4] Uno de estos modelos fue extraído de la página web *EL 8 TUMBADO*. Allí, Javier Santos presenta modelos de diversos "puzzles" con interesante potencial didáctico a explorar, entre los que se cuentan los rompecabezas de alambre. (Santos, 1999)

plano bidimensional.
El desarrollo de este conjunto de actividades permitió que las alumnas:



- Se familiaricen con el lenguaje formal de la matemática.
- Planteen hipótesis y las corroboren a través de la práctica concreta.
- Exploren las propiedades del espacio tridimensional operando en forma manual con elementos concretos.
- Representen la experiencia concreta en forma gráfica.
- Formalicen la experiencia concreta en un lenguaje lógico y preciso.
- Valoren el lenguaje formal de la Matemática como medio de describir y comunicar la experiencia real.

Segunda experiencia: Taller de construcción de rompecabezas de alambre
Esta experiencia comprendió un grupo de diez niños con edades entre nueve y diez años. El planteo del taller consistió en conocer, resolver y aprender a construir los rompecabezas de alambres. Este taller fue realizado durante cuatro encuentros y por razones ajenas se vio interrumpido, pero han quedado 60 minutos de filmación que constituyen un interesante material para poder analizar los esquemas de operación que ponen en juego los niños de esta edad al interactuar con el espacio tridimensional de manera no convencional y los nuevos problemas a los que el material los enfrenta.
Las actividades realizadas fueron las siguientes:

- Interacción lúdica con los rompecabezas.
- Descripción de las soluciones obtenidas mediante su lenguaje coloquial.
- Reflexión acerca de las dificultades encontradas durante el juego.
- Operación y descripción del proceso reversible de la solución (volver el rompecabezas resuelto a su posición original).
- Identificación de soluciones similares en rompecabezas diferentes (claves de solución).
- Designación de las piezas componentes de los rompecabezas mediante conceptos geométricos básicos.
- Representación gráfica de los rompecabezas.
- Representación gráfica del recorrido que realiza la pieza para salir de la estructura.
- Construcción de rompecabezas utilizando alambres maleables.

Referencias bibliográficas

De Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton. *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Santa Cruz de Tenerife, España.
Flores Martínez, P. (1999). *Laberintos con alambre. Estructuras topológico – métricas.* Póster. Granada, España: S.A.E.M
Gómez Alcaraz, G. (2000). *Nudos en el nivel medio superior*. En RELME 14. Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá.
Santos, J. (1999) El 8 tumbado. Documento en línea:
http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hall/3964/js.htm. Acceso noviembre 1999.
Stewart, I. (1994). Juegos Matemáticos. Nudos, cadenas y cintas de vídeo. *Investigación y ciencia.* Marzo, 1994 (pp 86–89).

Geometría para profesores de educación primaria

Santiago Ramiro Velázquez, Carlos Flores lozano, Gerardo García Lozano, Enrique Gómez Otero, Hermes Nolasco Hesiquio.
Centro de Maestros 1201, CIDEA, Universidad Autónoma de Guerrero. México
Sramiro@galeana.uagfm.mx

Resumen
En este artículo se presenta el contenido y las experiencias de un curso con valor en carrera magisterial, denominado "La geometría en un taller para profesores de educación primaria" realizado con la participación de 2500 docentes de este nivel educativo, del estado de Guerrero, México. De igual modo, las experiencias de su instrumentación como un taller en las actividades de la XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Relme XV, en el que participaron 12 profesores de diversos países de América Latina. El objetivo del referido trabajo es que los profesores de educación primaria, analicen estas ideas y las transformen en una base de orientación en el desempeño de su labor.

Introducción

Este trabajo está estructurado sobre la base de los lineamientos establecidos por la Coordinación de Carrera Magisterial y aprobado como curso estatal para profesores de educación primaria. Además, es uno de los productos del avance del proyecto de investigación "El desarrollo de habilidades matemáticas y la formación de profesores de educación secundaria" 98-SIBEJ-03024. En este proyecto se aborda el problema formulado en términos de que los profesores de educación básica no desarrollan eficientemente su labor, porque no conocen a profundidad la disciplina que enseñan y desconocen algunos procesos que tienen lugar en el aprendizaje, lo que repercute negativamente en la formación de los alumnos.

La geometría estuvo relegada en los programas de educación primaria, se consideraba en forma muy limitada y se reducía a definiciones, cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Por esta razón, muchos profesores al tratar temas de geometría se ven en la necesidad de actualizarse en estos contenidos, aspecto que además les favorece para desempeñarse exitosamente en los cursos nacionales de matemáticas para este nivel educativo. Tanto los cursos nacionales como los estatales, forman parte del Programa Nacional Permanente de Actualización de Profesores, PRONAP.

En atención a esta necesidad, se diseña y propone este curso dirigido a profesores de este nivel, encaminado a promover el desarrollo de las habilidades matemáticas propias de esta asignatura, tales como: comprender, visualizar, comunicar, abstraer, comparar y clasificar. Estas habilidades se desarrollan principalmente, en el planteamiento y solución de problemas, aspecto que se corresponde con el enfoque de la enseñanza aprendizaje de la geometría establecido en los materiales de apoyo al docente. En este sentido se afirma que durante la educación primaria se ofrecen contenidos y situaciones que favorecen la orientación del alumno en su entorno, la manipulación, observación, trazo y análisis de formas diversas (SEP, 1993). No obstante, como afirma Hart (Hart, K. 1998) en las aulas escolares existe una tendencia a priorizar definiciones, en lugar de construir ideas matemáticas como establecer relaciones, formar conceptos y resolver problemas.

En este artículo se presentan algunas consideraciones acerca del marco teórico referencial, así como los objetivos, contenidos, modalidad de trabajo y productos esperados del curso taller. Finalmente se hacen algunas reflexiones, sobre las experiencias obtenidas en la instrumentación del curso con docentes de educación primaria, en el estado de Guerrero, México y en las actividades de Relme XV.

Consideraciones acerca del marco teórico referencial

Uno de los aspectos esenciales que sustenta el presente trabajo, es el modelo de razonamiento de Van Hiele (Van Hiele, P. 1957), como una base de orientación para el docente en la elaboración de secuencias didácticas, que respondan al enfoque de la enseñanza aprendizaje de la geometría, antes referido. Sus autores Pierre M.Van Hiele y Dina Van Hiele- Geldof, elaboran este modelo a partir de sus experiencias docentes y de las dificultades de comprensión que presentaron sus alumnos. El modelo explica por una parte, como se produce la evolución del razonamiento geométrico de los alumnos y por otra como puede el profesor ayudarlos para que mejoren la calidad de su razonamiento. Este modelo está formado con los niveles de razonamiento, las propiedades y las fases como se expresan a continuación

1. Niveles de razonamiento

PRIMERO: En este nivel el alumno puede reproducir polígonos como un cuadrado, un rectángulo, un rombo con banditas elásticas (ligas) en un geoplano o en otro material, pero no es capaz de percibir las características de sus lados o que todo cuadrado es un rectángulo. Es decir, los objetos los percibe en forma global sin identificar sus propiedades.

SEGUNDO: En el segundo nivel el alumno comienza a tomar conciencia de que las figuras están formadas por partes al realizar mediciones, dibujos y construcción de modelos. De este modo comienza a darse cuenta de que el cuadrado tiene cuatro lados iguales, de que sus diagonales también lo son y puede reconocer el paralelismo de sus lados. En este nivel, el alumno no puede establecer relaciones que le permitan comprender que todo cuadrado es un rectángulo.

TERCERO: En el tercer nivel, los alumnos comienzan a establecer relaciones de inclusión mediante el uso de conectivos lógicos y clasificar cuadriláteros, a partir de sus propiedades. Además reconoce que cualquier cuadrado es un rectángulo, pero que no todos los rectángulos son cuadrados y puede deducir propiedades a partir de otras, basándose en argumentos informales.

CUARTO: En el cuarto nivel, el estudiante maneja las propiedades de los cuadriláteros y sus relaciones dentro de un contexto formal. Puede comprender la existencia de diferentes definiciones de una figura, analizarlas y relacionarlas. Por ejemplo:

- Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene sus 4 ángulos rectos.
- Un rectángulo es un cuadrilátero cuyas diagonales son iguales y se cortan en su punto medio.
- Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene lados paralelos dos a dos y un ángulo recto.

QUINTO: Los propósitos de la enseñanza aprendizaje de la geometría en la educación primaria, no se encaminan al logro del quinto nivel, ya que corresponde al razonamiento lógico deductivo.

2. Fases

El modelo consta de las cinco fases siguientes: la primera es la fase de información en la que se establece una comunicación profesores-alumnos, de esta manera el docente se entera de los saberes y la forma de razonar de los alumnos sobre el tema motivo de estudio. Por su parte los escolares se orientan hacia el objetivo que se quiere lograr e inician el aseguramiento de las condiciones para alcanzarlo.

La segunda fase es la orientación dirigida, en la que los alumnos inician las actividades de la situación didáctica diseñada por el profesor, a fin de alcanzar el nivel de razonamiento que se propone. En este sentido la orientación dirigida consiste en la puesta en práctica, de las acciones planificadas por el docente, encaminadas a que el alumno construya la base de orientación requerida para lograr un determinado nivel de razonamiento.
La tercera fase es la explicitación, en la que los alumnos expresan en diversas formas sus hallazgos y descubrimientos, realizándose una confrontación de ideas en la que se corrigen errores y se apropian conocimientos.
La cuarta fase es la orientación libre, en la que se proponen variantes de los problemas anteriormente resueltos, para que los alumnos consoliden conocimientos trabajando en forma independiente.
Finalmente, en la fase de integración los alumnos hacen cuadros-resumen donde se relacionan los nuevos conceptos formados, con los anteriores.
Como se puede ver, estas fases reflejan el proceso de apropiación del conocimiento y orientan el diseño de situaciones didácticas por parte del profesor, a fin de que los alumnos vayan construyendo sus propias herramientas académicas.

3. Propiedades

En lo referente a las propiedades, la secuencialidad significa que el alumno en la edad temprana avanza en orden de un nivel a otro a partir del primero. La especificidad del lenguaje consiste en la utilización de la terminología adecuada en cada uno de los niveles, a fin de que haya comunicación. El paso de un nivel al siguiente por lo general, se da de manera paulatina ya que el dominio de un nivel incluye parte de razonamiento del siguiente. Finalmente, la localidad señala que el dominio de un concepto a un determinado nivel, no implica que sea el mismo para todos los conceptos.
Desde nuestras posiciones consideramos que este modelo puede ser mejor comprendido y a la vez ampliado, al ubicarlo con otros aspectos didácticos que explican el proceso de aprender y enseñar matemática. En este sentido se expresan brevemente, las tres etapas de la actividad docente (Leontiev, A. 1979) y las fases de la apropiación del conocimiento matemático (Brousseau, G. 1983). Las etapas de la actividad son la de orientación que comprende la explicitación de los intereses y objetivos del alumno, la motivación, el aseguramiento de las condiciones de partida, el planteamiento de las tareas y los compromisos para realizarlas. La etapa de ejecución consiste en el desarrollo de las acciones para el cumplimiento de las tareas y la de control consiste en el análisis y evaluación de los procesos realizados y de los productos correspondientes. Las fases de la apropiación del conocimiento matemático comprenden la acción, formulación, validación e institucionalización de los saberes construidos. El modelo de razonamiento de Van Hiele y estas posiciones didácticas, aseguran la enseñanza aprendizaje de la geometría integrada al proceso de estudiar matemáticas (Chevallard, Y. 1998), como una actividad organizada y sostenida que es fuente constante de tareas y problemas matemáticos.

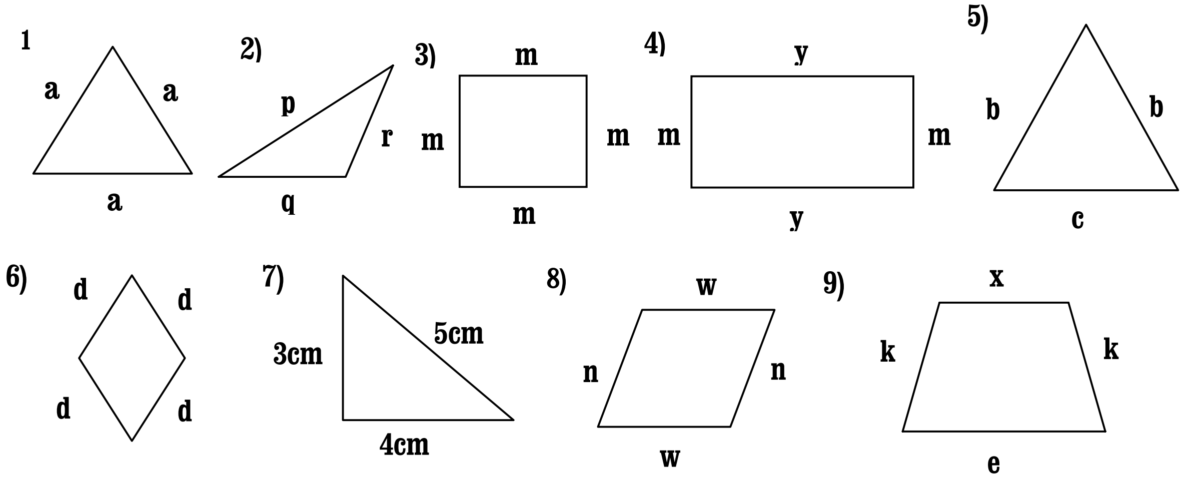
Objetivos fundamentales del curso taller:

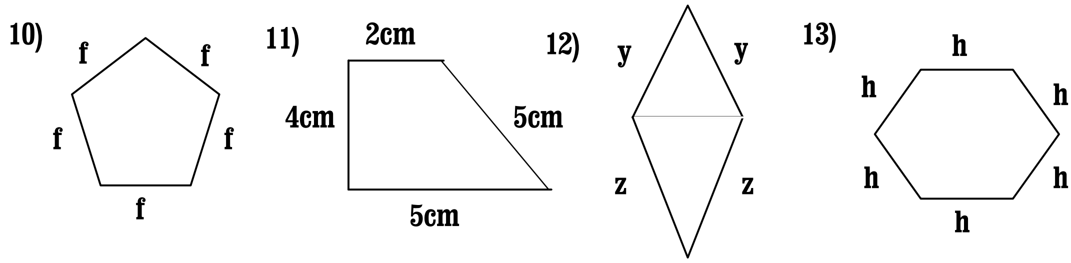
1. Socializar experiencias donde los profesores planteen sus expectativas y sugerencias acerca de los problemas que se presentan en el aula, al enseñar y aprender geometría.
2. Analizar el modelo de Van Hiele y la importancia de su instrumentación en la escuela.
3. Construir secuencias didácticas valiéndose de diversos recursos que pueden elaborar con sus alumnos, en un ambiente de trabajo creativo y autónomo que promueva el desarrollo de habilidades matemáticas.

Contenidos del curso taller:
1. El modelo de razonamiento de Van Hiele y su instrumentación en el aula
2. La clasificación de polígonos sobre la base de diversos criterios
3. El doblado de papel como un recurso didáctico.

Modalidad de trabajo:
La forma de trabajo consiste en el desarrollo de situaciones didácticas donde se analizan lecturas y se resuelven problemas promoviendo el trabajo en colectivo a través de la acción, confrontación, validación e institucionalización de los saberes que se construyen.
En el curso taller se presentan dos situaciones didácticas, como se describen a continuación.
SITUACIÓN I
Actividad 1. En equipos analizar la siguiente lectura y socializar experiencias:
Las personas tendemos a comparar y clasificar todo lo que nos rodea, a los efectos identificamos propiedades y características comunes de los objetos que se quieren estudiar y conocer más detalladamente.
El proceso mental que nos permite establecer relaciones entre dos o más objetos considerando sus características similares o aquellas que lo diferencian es la comparación, comparamos algo nuevo con lo ya conocido para saber más acerca de ello o cuando dos cosas nos parecen muy similares las comparamos para buscar diferencias pero también, cuando nos parecen muy diferentes las comparamos para buscar similitudes. La comparación es un proceso básico que permite establecer relaciones entre los objetos considerando la característica que pretendemos estudiar, comparar es sobreponer dos objetos o hechos para buscar analogías. La comparación favorece la conexión de ideas y su representación mental, para establecer relaciones de orden superior como la clasificación y la generalización.
La clasificación consiste en formar grupos, clases o categorías de objetos o situaciones considerando las características esenciales que todos los miembros del grupo comparten. Se pueden clasificar objetos por su sabor, color, utilidad, o función según el aspecto que nos interese estudiar.
En matemáticas y en particular en geometría para estudiar con más detalle las figuras en el plano y los cuerpos en el espacio se agrupan y clasifican de diferente manera usando diversos criterios, por ejemplo: número de lados, medida de sus ángulos, por sus diagonales, por sus ejes de simetría.

Actividad 2. Cada equipo traza las siguientes figuras y explora sus propiedades:





Actividad 3. Clasificar los cuadriláteros por las características de sus diagonales, presenten y argumenten sus trabajos

CARACTERÍSTICAS.	***NOMBRE DE LA CLASE***
- Las diagonales se interceptan en su punto medio.	____________________
- Las diagonales son iguales.	____________________
- Las diagonales se cortan perpendicularmente y cada una es bisectriz de los ángulos cuyos vértices une.	____________________
- Las diagonales son iguales, se interceptan perpendicularmente y son bisectrices de los ángulos cuyos vértices une.	____________________
- Las diagonales no se interceptan en su punto medio.	____________________
- Las diagonales se cortan en ángulo recto, sus lados consecutivos son iguales**.**	____________________

En esta actividad 3 es donde se presentaron las mayores dificultades, donde los docentes muestran escasa formación de los conceptos que se abordan. Para iniciar un proceso de apropiación de dichos conceptos, se consultan los libros del maestro, el fichero de actividades didácticas y se amplía la formulación y validación de las producciones de los profesores.

Producto esperado:

Un análisis de los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto de 4º a 6º grado relacionados con la enseñanza de la geometría, en el que consideren sugerencias didácticas para tratar estos temas en la escuela, de manera que se reflejen y expliciten los aspectos esenciales del modelo de Van Hiele. Para 4º grado, las lecciones: Dibujos y perpendiculares, Formas y tamaños exactos y juegos y actividades. Para 5º grado, las lecciones: Quién tiene razón, trazo de triángulos y cuadriláteros y el círculo y sus encantos. Para 6º grado, las lecciones: la geometría y el arte, tiras de cartón y papirolas.

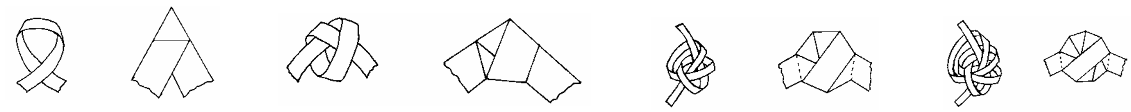
SITUACION II

Actividad 1. En colectivo analicen las siguientes ventajas del doblado de papel y socialicen experiencias:

1. Permite construir objetos geométricos del plano y del espacio. Por ejemplo: polígonos y poliedros.
2. Se pueden ilustrar diversos conceptos y verificar propiedades al estudiar proposiciones geométricas.
3. Propicia la reflexión en torno a múltiples temas que forman parte de la matemática escolar. Construir figuras geométricas por medio de papel plegado, da pie al surgimiento de proposiciones no previstas en la matemática escolar, que al demostrarlas, se fomenta la investigación en el seno de la matemática elemental. Por ejemplo: encontrar las

dimensiones de una hoja de papel, tal que a base de dobleces se obtenga alguna figura regular.
4. Es posible establecer el contenido de un curso de geometría del nivel medio básico, con el recurso del doblado de papel.
5. Se puede precisar un conjunto de axiomas para el doblado de papel y con base en ellos edificar una estructura geométrica sencilla.

Actividad 2. En colectivo, usando tiras de papel elaboren los siguientes polígonos, describan los procedimientos utilizados y expliquen la importancia de esta actividad para aprender y enseñar geometría.



Producto esperado: Un álbum que contenga la clasificación de polígonos y las figuras construidas con el doblado de papel, organizados en una secuencia didáctica donde se refleje el enfoque estudiado en este curso.

Resultados

En México, este curso ha tenido una gran aceptación por parte de los educadores, ya que participan en él 2500 docentes de educación primaria del estado de Guerrero. En su instrumentación, se reflejan limitaciones en el dominio del contenido matemático que se aborda. En este sentido, la forma de trabajar enmarcada en las fases de la apropiación del conocimiento matemático, asegura el inicio de un proceso de superación de dichas limitaciones. Por otra parte este curso constituye un aporte en el marco de la formación y actualización de profesores, porque además de tener valor en carrera magisterial los participantes consideran que refleja una visión integradora de la geometría para los 6 grados de la educación primaria. De igual modo, contribuye a la realización del curso nacional “la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria” que corresponde al Programa Nacional de Formación Permanente de Profesores (PRONAP).
Por su parte los docentes que interactuaron en este taller en el marco de las actividades de Relme XV, manifiestan que tanto el contenido como la modalidad en que se trabaja, asegura la personalización de experiencias para orientar su labor.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983), Los obstáculos epistemológicos y los problemas de la enseñanza, versión en español del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México, D.F.
Chevallard, Y. et al, (1998), Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje, SEP, México, D.F.
Hart, K. (1998), Debe ser mejor lo que tenemos ahora. ¿Pero lo es? en Investigaciones de Matemática Educativa II, Iberoamérica, México, D.F.
Leontiev, A. (1979), La actividad en psicología, Pueblo y Educación, Habana.
SEP, (1993), Plan y programas de estudio, México, D.F.
Van Hiele, P. (1957), El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría, tesis doctoral, Utrecht, Holanda, Universidad de Utrecht, traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez et al, 1991.

Pensamiento Geométrico

Nivel Medio

Las representaciones gráficas en la enseñanza de la geometría

Susana Moriena, Sara Scaglia
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
scaglia@fafodoc.unl.edu.ar

Introducción

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación (CAI+D: 12/F142) que se desarrolla en el Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. En el mismo se abordan aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría euclídea. En el aprendizaje de la geometría las experiencias visuales con dibujos que remiten a los objetos geométricos juegan un papel decisivo. Durante el primer ciclo de la EGB los alumnos inician el reconocimiento de las figuras geométricas a partir de la manipulación de objetos de la vida cotidiana y de la observación de sus representaciones gráficas. En el segundo ciclo comienzan a manejar un vocabulario geométrico, a representar las figuras en dos y tres dimensiones y a diferenciarlas por las características o propiedades que las definen.

Ponce (2000) afirma que durante las actividades de identificación de figuras, es común la utilización de dibujos que responden a un mismo modelo, en el que están estandarizadas las dimensiones y también las posiciones. Una consecuencia del uso de representaciones estereotipadas durante el aprendizaje de las figuras geométricas son las dificultades en reconocer en otros dibujos una representación válida para una figura geométrica determinada. Un ejemplo típico lo constituye el dibujo del rombo mediante un cuadrilátero de lados iguales cuyas diagonales son paralelas a las líneas horizontales y verticales respectivamente. Cuando el mismo dibujo se presenta con un par de lados paralelos a la línea horizontal, por ejemplo, no todos los alumnos serán capaces de aceptar que ese dibujo constituye la representación gráfica de un rombo. Laborde (1996) afirma que un mismo dibujo geométrico se puede interpretar de múltiples formas. Añade que “[...] la percepción interviene en la construcción de una interpretación siempre y cuando el lector no tenga sólidos conocimientos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva” (pág. 69). Diversas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades observadas en los alumnos a causa de la utilización de representaciones gráficas estereotipadas. Vinner y Hershkowitz (citado en Bressan et al., 2000) encontraron que algunos alumnos, a pesar de manejar con soltura una descripción verbal adecuada de un concepto geométrico, tenían dificultades para aplicarlas en representaciones gráficas del concepto que no respondían a la imagen visual asociada a él. Parzysz (1991) ha observado que representaciones gráficas específicas pueden conducir al desarrollo de concepciones erróneas en los estudiantes acerca de los objetos geométricos.

Fischbein (1993) ha analizado el conflicto que puede surgir durante el aprendizaje de conceptos geométricos. Sostiene que dichas dificultades son una consecuencia de la doble componente, conceptual y figural, de las figuras. “Una figura geométrica puede, entonces, ser descrita como teniendo propiedades *intrínsecamente* conceptuales. Sin embargo, una figura geométrica *no* es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen, justamente, que incluye una representación mental de propiedades del espacio”. Este autor ha acuñado la expresión ‘concepto figural’ para referirse a ellas, en relación con esa doble naturaleza conceptual y figural que poseen.

Este autor reconoce que, durante el tratamiento de figuras geométricas, los alumnos, no siempre se mantienen dentro de sus características (limitaciones) conceptuales. "La tendencia a rechazar la definición bajo la presión de limitaciones figurales representa un obstáculo principal en el razonamiento geométrico".
A partir de las consideraciones anteriores, hemos elaborado y administrado a alumnos de octavo de EGB un cuestionario, cuyos objetivos son los siguientes:

1) Seleccionar algunos estereotipos para trabajar en la investigación.
2) Ensayar el diseño de los ítems para un cuestionario definitivo.

En la sección 2 incluimos una descripción de la metodología de investigación y de los sujetos de estudio. En la sección 3 incluimos tres ítems del mismo y la discusión de los resultados obtenidos con los alumnos. Finalmente, en la sección 4 incluimos algunas implicaciones del estudio para la enseñanza de los conceptos geométricos.

Metodología y sujetos de estudio

Este estudio es de tipo descriptivo, dado que se trata de observar las realizaciones de un grupo de alumnos en torno a una serie de tareas geométricas, con el fin de describir, analizar e interpretar sus producciones. Desde el punto de vista de la temporalización, es un estudio transversal. El muestreo es de conveniencia (Cohen y Manion, 1990).
El cuestionario fue administrado durante el mes de noviembre de 2000 en dos cursos de 8º de EGB, pertenecientes a dos escuelas de la ciudad de Santa Fe (Argentina). En total, 53 alumnos resolvieron el cuestionario, tres de los cuales los entregaron completamente en blanco. Las escuelas corresponden a realidades socioculturales diferentes, aunque en el presente trabajo no incluiremos el análisis correspondiente a posibles diferencias observadas como consecuencia de ello.

Discusión de los resultados

El cuestionario consta de 5 ítems. En este trabajo nos centraremos en el estudio de las respuestas obtenidas en tres de ellos, incluidos en el anexo. El objetivo de estos ítems es detectar errores en los alumnos, provenientes del uso de representaciones gráficas de las figuras que responden o no a estereotipos determinados.
Por razones de brevedad, no nos detendremos en el estudio de los ítems. Aunque hemos apuntado una serie de ventajas y desventajas del formato y del contenido de cada uno, esa discusión no la incluiremos en este informe.

Ítem 1

En el cuadro 1 del anexo incluimos el primer ítem. Los alumnos deben indicar si los dibujos presentados constituyen o no representaciones gráficas de un rectángulo, justificando en cada caso la respuesta dada.
Entre las tres figuras que corresponden a la representación gráfica del rectángulo, la figura (a) es la que más se acerca a la representación estereotipada. Por esa razón, suponíamos que los alumnos no tendrían dificultad en reconocerlo. En cambio, pensábamos que no todos los alumnos reconocerían que (b) y (d) también constituyen rectángulos.
En la tabla 1 incluimos los porcentajes de respuestas correctas. En general, los alumnos no presentan dificultad en reconocer que (a), (b) y (d) son rectángulos y que (c) no lo es.
Como esperábamos, los alumnos no han tenido dificultad en reconocer que la figura (a) es un rectángulo, dado que constituye la representación gráfica más común de esta figura.

Figura	Porcentaje de respuestas correctas
A	100%
B	88%
C	78%
D	90%

Tabla 1: Porcentaje de respuestas correctas en el ítem 1

En el caso (b) ha respondido correctamente el 88%, más de lo que esperábamos, dada la posición en que se presenta la figura. Entre los alumnos que **no** han reconocido el rectángulo en dicha figura, uno de ellos afirma que no cumple con la definición. Este alumno afirma que (a) y (d) son rectángulos por poseer ángulos rectos. Sin embargo, esa condición es cumplida también por la figura (b). Se observa claramente que en este caso existe una característica perceptual del dibujo (sus lados no paralelos a las líneas horizontal y vertical respectivamente), a la que el alumno no hace referencia, y que influye con la fuerza suficiente como para que desestime la característica (conceptual, y también perceptual) de poseer ángulos rectos.

El argumento correcto "posee los ángulos rectos" es el más usado para justificar las respuestas. Se usa con frecuencia también la alusión a que la figura considerada "tiene dos lados paralelos largos y dos lados paralelos cortos" que si bien describe de modo incompleto al rectángulo, se corresponde con la idea intuitiva que pueden tener los alumnos del mismo.

Ítem 2

En el cuadro 2 del anexo incluimos el ítem 2. Los alumnos deben clasificar cada una de las representaciones gráficas de poliedros entre las siguientes categorías: prisma, pirámide o ni prisma ni pirámide.

Antes de describir los resultados, incluimos algunas suposiciones de partida. Consideramos que los alumnos no tendrían dificultades en reconocer el prisma oblicuo 1 y la pirámide oblicua 7. En cambio, para los poliedros restantes hicimos las siguientes suposiciones:

- Los alumnos tendrían dificultad en reconocer que el cubo 2 constituye un prisma recto.
- Los alumnos confundirían los prismas triangulares 3 y 5 con pirámides. La confusión sería ser mayor con el prisma 5, por la posición en que se presenta.
- Los alumnos tendrían dificultad para incluir el poliedro 4 en la categoría "ni prisma ni pirámide".
- Los alumnos confundirían la pirámide 6 con una pirámide oblicua, dado que su base no es paralela al plano horizontal.

En la tabla 2 incluimos los porcentajes de respuestas correctas y no resueltas

Los alumnos han tenido dificultad en clasificar algunos de los poliedros presentados en las categorías consideradas. Nuestra suposición respecto de los poliedros 1 y 7 (prisma oblicuo y pirámide oblicua respectivamente) ha sido acertada, dado que un porcentaje alto de alumnos los clasificó correctamente.

Con respecto a la identificación del cubo como prisma recto, observamos que un poco más de la mitad de los alumnos pudo realizarla. El 38% de los alumnos clasificó esta figura como ni prisma ni pirámide.

Poliedro	Porcentaje respuestas correctas	Porcentaje sin resolver
1	84%	4%
2	56%	4%
3	26%	4%

4	48%	8%
5	8%	4%
6	44%	2%
7	90%	2%

Tabla 2: Porcentaje de respuestas correctas en el ítem 2

Los prismas de base triangular 3 y 5 cosecharon el mayor porcentaje de errores. Tal como esperábamos, el 42% y 72% respectivamente de los alumnos los confundió con pirámides. Como supusimos, dada la posición del prisma 5 (apoyado sobre una cara lateral y no sobre una de las bases) sólo el 8% de los alumnos lo identificó correctamente.

Casi la mitad de los alumnos clasificó correctamente el poliedro 4, en contra de lo esperado. Este poliedro fue confundido con un prisma por un 32% de alumnos y con una pirámide por un 10%. En este poliedro hubo un mayor porcentaje de alumnos (con respecto a los poliedros restantes) que no pudieron clasificarlo. No obstante, los porcentajes de no resolución se mantienen todos debajo del 10%. Tal como suponíamos, mientras que el 98% del total reconoció una pirámide en la figura 6, sólo el 44% clasificó esta pirámide como recta. Más de la mitad de los alumnos indicó que se trata de una pirámide oblicua.

Con respecto a la pregunta formulada respecto de la diferencia entre prisma y pirámide, el 30% de los alumnos no la respondió. El 22% de los alumnos respondió de un modo incoherente. Los alumnos restantes, si bien muy pocos han dado una respuesta totalmente satisfactoria, han podido expresar, al menos intuitivamente, la diferencia entre estos cuerpos. En la tabla 3 incluimos algunas de las respuestas encontradas:

Alumno	Respuesta
2	"La pirámide está constituida por triángulos menos su base y en el prisma la mayoría de los lados no son triángulos".
8	"La diferencia es que la pirámide termina con un vértice".
12	"Las caras de la pirámide son triángulos isósceles iguales. Las caras laterales del prisma forman un rectángulo".
14	"Un prisma es un cuerpo con planos paralelos y paralelogramos tantas caras tiene los planos y la pirámide tiene como base un polígono y sus caras son triángulos que se juntan en un vértice común".
24	"Pirámide: tiene una sola base. Prisma: tiene dos bases".

Tabla 3: Algunas diferencias establecidas entre prisma y pirámide

En las respuestas anteriores se pone de manifiesto la diversidad de justificaciones encontradas. Si bien algunas de ellas resultan imprecisas ó incorrectas, cabe destacar la capacidad de los alumnos para expresar las diferencias observadas a partir de las representaciones gráficas de estos dos poliedros.

Ítem 3

En el cuadro 3 del anexo incluimos el tercer ítem. Los alumnos deben indicar si los dibujos presentados constituyen o no representaciones gráficas de un rombo, justificando en cada caso la respuesta dada.

Los resultados esperados para este ítem están relacionados con el hecho de que el dibujo estereotipado de un rombo es el que posee las diagonales paralelas a las líneas horizontal y vertical respectivamente. Por ello, aunque todas las figuras propuestas corresponden a representaciones gráficas del rombo, suponíamos que no todos los alumnos podrían reconocerlo en las figuras (a) y (d).

En la tabla 4 incluimos el porcentaje de respuestas correctas (los alumnos que reconocen en cada caso que la figura correspondiente es un rombo)-

Figura	Porcentaje de respuestas correctas
a	68%
b	98%
c	94%
d	70%

Tabla 4: Porcentaje de respuestas correctas en el ítem 3

En todos los casos la mayoría de los alumnos respondió correctamente. Sin embargo, tal como esperábamos el porcentaje de respuestas correctas disminuye en las figuras a y d.
La justificación más utilizada para afirmar que cada figura constituye un rombo es la alusión a los cuatro lados iguales.
Dos alumnos, cuyas respuestas transcribimos a continuación, ponen de manifiesto que el dibujo estereotipado del rombo juega un papel en la valoración de las figuras:

Alumno 26	Afirma que (a) es rombo porque "si lo vemos de costado podremos observar que es un rombo con todos sus lados iguales".
Alumno 37	Afirma que (a) es rombo porque "si lo damos vuelta de manera con forma de rombo y además tiene los cuatro lados iguales".

En ambos ejemplos se manifiesta que las características perceptuales del dibujo estereotipado del rombo son consideradas por los alumnos antes que la característica conceptual de poseer los cuatro lados iguales.

Reflexiones finales

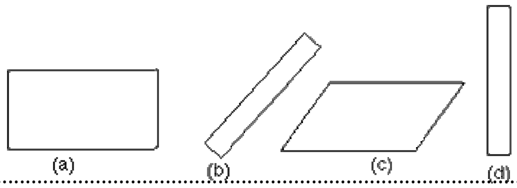
Hemos presentado a los alumnos diversas representaciones gráficas de algunas figuras geométricas (rectángulo, rombo, prisma y pirámide). Encontramos evidencias de que los dibujos estereotipados de estas figuras influyen en la valoración realizada por los jóvenes durante su reconocimiento.
Retomando las consideraciones de Fischbein (1993) referidas a la doble componente, figural y conceptual de las figuras geométricas, coincidimos con este autor en que muy a menudo, la componente figural no permanece enteramente acotada por la conceptual.
Una recomendación básica que se deriva de estos resultados, para el tratamiento escolar de estos conceptos, es la siguiente: es necesario que los alumnos apliquen sus conocimientos conceptuales de las figuras geométricas sobre dibujos no estereotipados de éstas. Aparentemente, no está fallando el conocimiento de la componente conceptual de la figura. Lo que observamos es una mayor influencia (durante la valoración de representaciones gráficas) de la componente figural.

Referencias bibliográficas

Cohen L.; Manion, L. (1990): *Métodos de investigación educativa.* Madrid, España: La Muralla.
Bressan, A.M., Bogisic, B. y Crego, K. (2000): *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Novedades Educativas.
Fischbein, E. (1993): "The Theory of figural concepts". *Educational Studies in Mathematics*, 24; pp. 139 – 162.
Laborde, C. (1996): "Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría". En L.Puig y J. Calderón (eds.): *Investigación y, didáctica de las matemáticas.* Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.
Parzysz, B. (1991): "Representation of Space and Students' Conceptions at High School Level". *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 575 – 593.
Ponce, H. (2000): *Enseñar y aprender matemáticas. Propuestas para el segundo ciclo.* Buenos Aires, Argentina: Novedades Educativas.

ANEXO

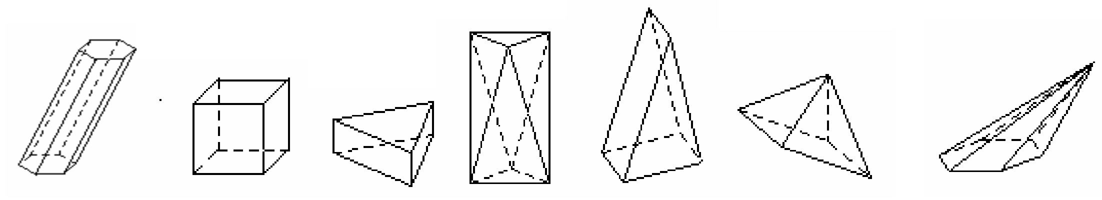
1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rectángulos?



(a) Sí ☐ No ☐ Porque...
(b) Sí ☐ No ☐ Porque...
(c) Sí ☐ No ☐ Porque...
(d) Sí ☐ No ☐ Porque...

Cuadro 1: Ítem 1

2. Dados los siguientes poliedros, marca una cruz en los casilleros que corresponda



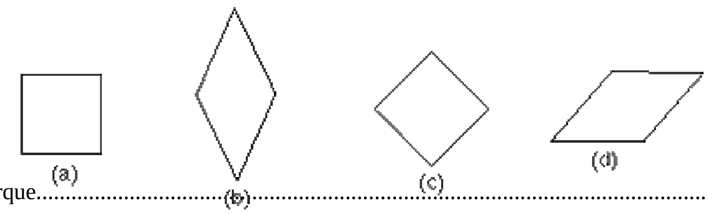
1 2 3 4 5 6 7

	Prisma		**Pirámide**		**Ni prisma ni pirámide**
	Recto	Oblicuo	Recto	Oblicuo	
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Explica en qué se diferencia un prisma de una pirámide.
....
....

Cuadro 2: Ítem 2

3. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?



(a) Sí ☐ No ☐ Porque...
(b) Sí ☐ No ☐ Porque...
(c) Sí ☐ No ☐ Porque...
(d) Sí ☐ No ☐ Porque...

Cuadro 3: Ítem 3

La incidencia del pensamiento geométrico en la formación de conceptos

M. Bonacina, G. Bortolato, A. Haidar; M. Quiroga, E. Sorribas, C. Teti
Fac. Cs. Bioquímicas y Farm. Fac. Cs. Exactas Agrim. e Ingeniería. Universidad Nacional Rosario. Argentina
esorriba@fbioyf.unr.edu.ar

Resumen
Las dificultades de aprendizaje que presentan los alumnos ingresantes a la Universidad son históricas y de una gran diversidad. Analizando factores propios del proceso enseñanza-aprendizaje susceptibles de ser mejorados desde una práctica docente comprometida se detecta, como hecho destacable, una importante *desconexión* entre el Ciclo Medio y el Superior; pareciera que a la hora de diseñar la currícula o cuanto menos, de preparar una clase, cómo, de qué manera se *insertan* los temas del Ciclo Medio en el Ciclo Superior, no estuviera entre las cuestiones centrales a considerar. Surge así la siguiente hipótesis de trabajo: *´el enfoque adoptado en el desarrollo de algunos temas del ciclo Medio resulta obturante en la posterior generalización de los mismos´.*
Así, el objetivo de este trabajo es analizar una de las posibles causas de las dificultades observadas: *la existencia de hipótesis previas, obturantes del aprendizaje ;* particularmente, del aprendizaje de conceptos matemáticos. Para evaluar esta hipótesis se lleva a cabo una investigación tomando como base el tema: *relaciones trigonométricas - funciones trigonométricas.*

Introducción

Las dificultades de aprendizaje que presentan los alumnos ingresantes a la Universidad son históricas y de una gran diversidad. Sin embargo en los últimos años se observa un importante incremento en el índice de deserción y fracasos en los primeros meses de cursado, junto a un incremento, también observado, de las dificultades relativas al aprendizaje.
Un objetivo del proyecto de investigación que nos ocupa es el de investigar la razón o causa de tales dificultades. Sin dudas estas son múltiples y de gran complejidad y abarcan desde las propias del sistema educativo hasta aquellas que escapan a él. Así, un paso previo al desarrollo de la investigación fue, *acotar el campo de acción*.
A este respecto decidimos centrar la atención en el segmento de educadores que conocimos en el desarrollo de los cursos dictados en el marco del proyecto y apropiarnos de las preguntas que ellos allí se hacían:

¿porqué, a pesar de nuestros esfuerzos, los alumnos no aprenden?,
¿podemos hacer algo, *desde la propia práctica*, para mejorar esta situación?

Entendiendo que sí, que ello era posible, nos propusimos buscar y revisar aquellos factores que, siendo *propios del proceso enseñanza-aprendizaje*, fueran susceptibles de ser mejorados *desde una práctica docente comprometida*.
Un hecho fácilmente observable a este respecto fue la *desconexión* existente entre el Ciclo Medio y el Superior. Esta desconexión puede detectarse tanto en cuestiones de orden operativas (como metodología de trabajo y de estudio), como en cuanto a una visión no *´compartida´* respecto de la estructuración del conocimiento matemático.
Y esto este último hecho, no es un hecho menor; muchos de los temas que se profundizan en la Facultad el alumno los ve por primera vez en el ciclo medio y; como es fácil de comprender, para que un aprendizaje no resulte traumático debe existir una *sintonía fina* entre el concepto tal cual se lo ve por primera vez y tal cual se le presenta en su fase final.
Así, y asumiendo que los *errores* forman parte de la adquisición del conocimiento, que "...en el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de

necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; que es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos *obstáculos epistemológicos*" (Bachelard, 1988); un primer supuesto de nuestro trabajo fue que la desconexión detectada podía, de alguna manera, coadyuvar a la aparición de *obstáculos epistemológicos*, los cuales darían cuenta de los errores que cometen nuestros alumnos. Finalmente y en una última acotación del objeto, nos proponemos la investigación, en nuestros estudiantes, de *´la existencia de hipótesis previas que devienen en obturantes del aprendizaje´*.

Estudiar y analizar los errores cometidos por los alumnos, la razón de ellos, ha emergido recientemente como una gran línea de estudio e investigación. Existen así distintos trabajos (Davis, 1984; Radatz, 1980; & Movshovitz-Hadar, 1987) donde, con distintos criterios, se buscan patrones comunes de error y se procede luego a su clasificación. Al respecto entendemos que el tipo de error estudiado en este caso puede encuadrarse dentro de una de las categorías identificadas por Radatz:

- *Errores debido a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento:*
la experiencia y solvencia adquirida en problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aún cuando condiciones fundamentales de la tarea en cuestión se hayan modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información. Dentro de esta clase de errores se encuentra el siguiente: ´errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas´.

Cabe aclarar aquí, que no tenemos dudas en cuanto a que la presentación de un tema debe *adecuarse al nivel al cual va dirigido*. Es más, se estima que *el orden ´pedagógico´ más adecuado es, a menudo, contrario al orden ´lógico´ más adecuado*. Lo que en esta instancia se detecta es la necesidad de plantear y dirimir la siguiente cuestión: ¿***hasta dónde y cómo se simplifica, reduce o redondea un tema para hacerlo accesible al alumno sin que tal hecho determine la aparición de un obstáculo en relación a un posterior abordaje del mismo***?**.**

A este respecto entendemos que los términos usados en la presentación de un concepto deben ser tales que, sin apartarse de lo familiar o cotidiano, sean susceptibles de ser generalizados sin constituirse en obturantes para la compresión del nuevo enfoque.

De estos considerandos surge la siguiente hipótesis de trabajo:

EL ENFOQUE ADOPTADO EN EL DESARROLLO DE ALGUNOS TEMAS DEL CICLO MEDIO, RESULTA OBTURANTE EN LA POSTERIOR GENERALIZACIÓN DE LOS MISMOS.

Para evaluar esta hipótesis se lleva a cabo la investigación mencionada tomando como base el tema: RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Desarrollo:

- ***Considerandos sobre el tema elegido***

El origen de las *funciones* trigonométricas está en la TRIGONOMETRÍA. Esta ciencia cuya aparición se remonta a 150 años a.de C. y se atribuye a Hiparco; se ocupó en su origen y como su nombre lo expresa (trigonos = triángulo, metrón = medida) del cálculo de todos los elementos del triángulo (lados, alturas, superficie, ángulos, medianas, bisectrices). Tales cálculos revelan una serie de relaciones elementales entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo: las denominadas *relaciones trigonométricas*.

Hoy en día este primer objetivo de la trigonometría ha sido ampliamente rebasado. La consideración de los ángulos como objetos matemáticos con entidad propia, no como meros elementos de figuras geométricas, trae aparejada la aparición de las *funciones* trigonométricas.

El conocimiento de estas funciones resulta imprescindible para comprender fenómenos de muy distinta naturaleza, no sólo ligados a la Geometría sino también al Análisis y el Álgebra. Las funciones trigonométricas están involucradas en todo proceso cíclico o periódico (ondas, vibraciones, sonidos, estaciones, etc.), el carácter de *periódicas* que poseen hace que se constituyan en el sistema de representación natural (*base*) para la modelización de este tipo de fenómenos.

El uso de las funciones trigonométricas como *base* podría considerarse la última instancia en el proceso de abstracción iniciado a partir de las relaciones trigonométricas. Llegar a esta instancia requiere que el alumno abstraiga el concepto de función trigonométrica de ángulo al de función trigonométrica de variable real.

- ***Fundamentación de la eleccion del tema***

En las funciones trigonométricas reconocemos todas las cuestiones planteadas en la introducción, de allí que las estimamos apropiadas para evaluar la hipótesis propuesta:

- constituyen un tema donde se observan grandes dificultades, superiores a las que *normalmente* serían de esperar.
- las primeras nociones se imparten en el Ciclo Medio y luego el tema se retoma en la Facultad, llegándose a distintos niveles de abstracción según la carrera de que se trate.
- entendemos que existiría un enfoque inicial obturante del aprendizaje el cual llevaría a que el alumno identifiquen absolutamente *"funciones trigonométricas"* con *"relaciones trigonométricas"*. Tal identificación aparecería como la razón que dificulta la generalización del concepto a funciones trigonométricas de variable real.

- ***Metodología***

Trabajamos con una población conformada por 119 alumnos ingresantes a las carreras de Licenciatura en Biotecnología y Licenciatura en Química.

Procedimos a la recolección de datos a través de:

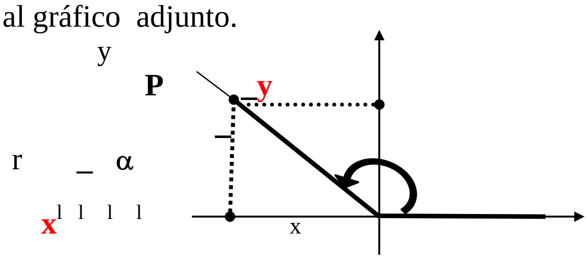
- Una encuesta esencialmente de ejercitación.
- Entrevistas individuales en las que se solicitó a un grupo más reducido de alumnos que explicaran, justificaran las respuestas dadas en la encuesta.
- Resolución y discusión grupal de la encuesta.

La encuesta se implementó una vez que los alumnos terminaron las actividades propuestas en el Curso de Nivelación, dictado por la Facultad al inicio del ciclo lectivo. Dicho curso tuvo por objetivo repasar y/o completar temas del ciclo anterior. Entre los temas repasados y completados se encuentran las funciones trigonométricas. Las definiciones de seno y

coseno se presentaron motivadas en la necesidad de describir la posición de un punto que se mueve sobre la circunferencia de radio unitario.
Cabe destacar también que los alumnos fueron informados de la implementación de esta encuesta con suficiente antelación.

- ***Encuesta***

La encuesta constó de dos actividades referidas al gráfico adjunto.



1ro) Marcar la ó las expresiones útiles,
a los efectos del cálculo de **cos α :**

(a) $\frac{cat.ady}{hipotenusa}$ (b) $\frac{abscisa\ \ P}{radio\ \ vector(\,r\,)}$

(c) $\frac{x}{r}$ (d) $\frac{y}{r}$

2do) Estimar, del gráfico, las coordenadas de **P** y luego calcular **cos α**

Objetivos de las actividades propuestas :

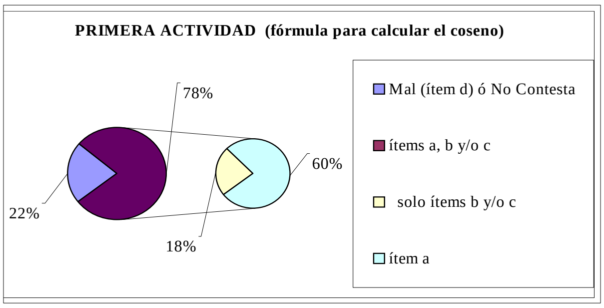
- Con la primer actividad se pretende detectar la capacidad de los alumnos para *procesar y retener nueva información* (muchos de ellos dicen desconocer las *funciones trigonométricas*), así como también la existencia de una impresión errónea respecto de este concepto, particularmente, que el coseno sigue, *necesariamente*, conectado al cálculo de *elementos* de un *triángulo rectángulo* (aunque tal triángulo no exista). Para corroborar esto último es que se propone el cálculo de **cos α,** con α ángulo que no puede ser relacionado con triángulo rectángulo alguno.
Se asume que, si no han procesado convenientemente la nueva información, continúan asociando el coseno con lados de un triángulo rectángulo y eligen la opción (a), completar la segunda actividad, asignar coordenadas (x<0) y calcular del coseno debería, en algún momento, generarles una *situación de conflicto*, ya sea en relación a cual es el *cateto adyacente* en este caso o, si lo identifican con ´x´, qué hacer con el *menos* de este número.

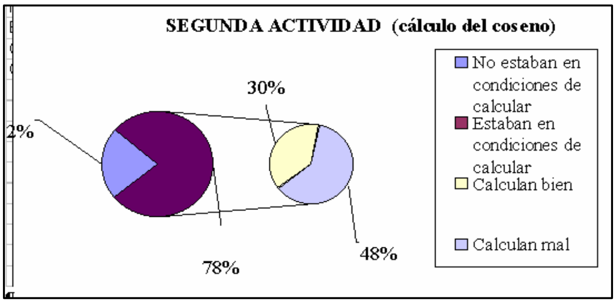
- ***Descripción cuantitativa de resultados***

En la 1ra actividad cabe acotar que, como la consigna era marcar una expresión útil *´a los efectos del cálculo del coseno del ángulo* α.´, cualquiera de las opciones (a), (b) ó (c) se aceptó como o*pcionalmente válida* (78%). El número de *fracasos* [(d)- no contesta] fue del orden del 22%. Un porcentaje importante dada las condiciones de la encuesta y las característica del ejercicio propuesto en esta instancia.
Si bien el objeto de este trabajo era demostrar que la opción (a) los conduciría en algún momento a una situación de conflicto, en esta primera instancia se aceptó esta opción como válida (aún cuando no aclararan el cateto e hipotenusa *de qué triángulo* estaban considerando) pues, con convenientes recaudos respecto al signo del resultado, esta expresión puede efectivamente ser *usada* para calcular **cos α**
Sólo el 18% del total de los alumnos marcó *únicamente* la opción *formal* (b y/o c). Un porcentaje muy importante (60%) marca la *problemática*: cateto adyacente / hipotenusa (sola ó no); lo cual estaría indicando que, mayoritariamente, se sigue relacionando las *funciones trigonométricas* con los *triángulos rectángulos*; o sea, que la asociación

´relaciones trigonométricas - triángulos rectángulos ´ estaría fuertemente *fijada* en la estructura cognitiva del alumno, persistiría hasta el punto de transferir la misma a las funciones trigonométricas, aún cuando se hubieran modificado cuestiones fundamentales de la asociación original.

Que esta *fijación* termina por constituirse en un **obstáculo** queda corroborado en las respuestas correspondientes a la *2da actividad*. Sobre el *78%* que en la primer actividad aparecía en condiciones de calcular correctamente el coseno, o sea, habían marcado una opción que les permitía el cálculo ya sea en forma directa (haciendo el cociente) o en forma indirecta (calculando el coseno del suplementario de α y luego α) sólo *el 39%* lo hace bien; en definitiva sólo el *30% del total* calcula correctamente el coseno del ángulo. Este resultado, dado lo elemental de la cuestión planteada, mostraría como la identificación señalada se constituye en un obstáculo cierto a la hora de *calcular*, o sea de aplicar el concepto.





(*) Se observó también una interferencia no prevista. La importante cantidad de respuestas erróneas con relación a las ***coordenadas del punto*** (45%), se estima que esto también podría atribuirse a la identificación cuestionada. Efectivamente, aún cuando muchos señalan los ítems (a)y (b) ó (c) como opciones válidas para el cálculo del coseno evidentemente siguen convencidos que la aprendida en el secundario (a) tiene el mismo estatus que las otras (b)y (c)

Al respecto, las siguientes son respuestas de alumnos en la entrevista, al preguntárseles porqué, habiendo marcado (b) ó (c) no las habían ni siquiera considerado para calcular.

- *´porque esas son para complicarnos la vida´*;
- *´porque estamos en la facultad y parece que no pueden seguir con lo fácil, tienen que complicarlo todo´*,
- *´porque a esas no las manejo (o no las entiendo) bien, en cambio a la otra sí ´*.

Este hecho los lleva a forzar las coordenadas del punto a los efectos de aplicar la vieja fórmula, aquella con la que están familiarizados . En estos casos, *no hubo conflicto*.

Para otros, muy pocos, la determinación de las coordenadas provocó un *conflicto* (muy vago) con la vieja fórmula,

- *´algo no anda, pero no me doy cuenta qué es ´ ;*
- *´ x = -4; entonces el cateto no puede ser x, ¿pero quién va a ser?. No sé, no entiendo qué pasa´.*

En estos casos la duda quedó instalada, no la supieron resolver.

Algunas de las respuestas erróneas (d) fueron consecuencia de querer resolver el conflicto:

- *´para tener un triángulo que tenga al ángulo, tiene que ser el formado por r y el eje y , y en ese triángulo el cateto adyacente es ´ y´ , además.... ´y´ es positivo y ´x´ negativo´*

Conclusiones

Sólo un escaso número de alumnos captó que estaba frente a una definición de seno y coseno que ´ampliaba´ la aprendida en el secundario. Mayoritariamente se la incorporó como *otra fórmula de cálculo*, más *rebuscada* pero indistinta en cuanto a su uso.
Lo más alarmante es el escaso número de alumnos a los que se les planteó *conflicto* a la hora de asignar coordenadas al punto respetando pautas y tratando de aplicar la *fórmula vieja*. La mayoría optó por ignorar las pautas de graduación de un eje (las cuales en general conocían bien) con tal de poder aplicar ´la fórmula confiable´.
Ahora bien, ¿ porqué confían en esta fórmula y en las otras no ? Davis(1984) sostiene que normalmente, para ayudarnos a asimilar información, construimos *esquemas o estructuras de representación*, estructuras que tienen un origen legítimo, en un aprendizaje inicialmente correcto y que son ´persistentes´. Sostiene también que esto último es lo que las hace ´visibles´, porque debido a ello funcionan de modo idéntico en una variedad de situaciones, producen siempre las mismas alteraciones en los datos de entrada cuando estos no encajan con la estructura, la recuperación en memoria se produce fácilmente. Prácticamente es imposible que el aprendizaje se produzca si va *en contra* de uno de estos esquemas interiorizados.
En esta línea, parece razonable suponer que un conocimiento inicial conformado por una *estructura geométrica* debe facilitar, contribuir a la aparición de estos esquemas o constructos; o sea, que en tal caso parece razonable pensar que la estructura geométrica del concepto inicial contribuiría a la persistencia del mismo.
Finalmente y a modo de conclusión, se estima que la investigación llevada a cabo corrobora la hipótesis planteada, abre nuevos campos de investigación y permite, como corolario, proponer una alternativa a la situación problemática planteada por el tratamiento de las funciones trigonométricas. Tal alternativa es: *presentar las funciones trigonométricas como la abscisa y ordenada de un punto sobre la circunferencia unitaria y tratar las relaciones trigonométricas, a posteriori, como una aplicación de dichas funciones a la resolución de triángulos rectángulos.*
Se estima que de esta forma si bien no se sigue el desarrollo histórico del concepto, se logra d*espegar* al mismo de los triángulos rectángulos; simbiosis cuya postergación no parece ser contraproducente mientras que el hecho de enfatizarla sí muestra tener proyecciones negativas importantes.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G (1988). *La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI
Davis, R, (1984) . *Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education* . Australia: Croom Helm.
Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Educations. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 9, 163-172
Rico,L. (1995). Educación Matemática. *Errores en el aprendizaje de la Matemática*
(pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamericano
Artigue, M.& Douady, R. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. México:
Grupo Editorial Iberoamericano.
González, F. (1996). La investigación en Educación Matemática - *Conferencia central dictada en el 8º ICME, Sevilla, España*- Universidad Pedagógica Experimental de Venezuela
Ruiz, A. (1998). Constructivismo empírico y filosofía de las Matemáticas. *Boletín informativo- CIAEM* (Comité Iberoamericano de Educación Matemática).Año 6, nº 1. Junio 1998.

Recubrimientos del plano con figuras iguales

Cristina Ochoviet, Mónica Olave, Mario Dalcín
Liceo Nº4 “Juan Zorrilla de San Martín”. Uruguay
princesa@adinet.com.uy almamat@adinet.com.uy filomate@adinet.com.uy

Resumen
Este trabajo se encuadra dentro del marco de actividades de popularización de la matemática. En este caso se trata de acercar a un público lo más amplio posible el tema de las teselaciones del plano. En primer lugar se analiza desde una perspectiva histórica qué tipo de polígonos, convexos o no, cubren el plano. Se estudian luego los recubrimientos del plano con figuras iguales, y cómo es posible obtener estas figuras por medio de la compensación de áreas y la aplicación de isometrías. En el trabajo de visualización de estos recubrimientos se utiliza la obra de M. C. Escher, por su atractivo visual y plástico.

Introducción

En general la gente considera que la matemática es difícil, fría, de poca utilidad en el mundo real y que solamente los “genios” pueden entenderla y obtener éxito en su estudio. Se cree también que en matemática ya está todo resuelto y de una vez para siempre, concibiéndola como algo atemporal e impersonal. Es así que se genera una actitud negativa que va permeando toda la sociedad, predisponiendo a sus integrantes a anticipar su fracaso cuando se enfrenten a un tópico matemático y a rechazar el estudio de esta disciplina. Las actividades de popularización de la matemática, en las que se enmarca el presente trabajo, buscan cambiar la imagen que popularmente se tiene de esta.

Marco teórico

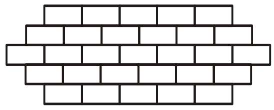
El presente trabajo se encuadra dentro del marco de actividades para la popularización de la matemática, cuyo objetivo es “salvar el vacío entre la ciencia y la comprensión de la misma por el público” (Howson y Kahane, 1990). Se intenta compartir la matemática con un público lo más amplio posible, animándolo a participar activamente y tratando de fomentar una actitud positiva hacia la misma.
El concepto de popularización de la enseñanza de la matemática se puede caracterizar, brevemente, de la siguiente manera:

- Las actividades no son propuestas necesariamente a un público que se ubica dentro de la educación sistemática, es decir que el público participa por opción personal.
- Las actividades están dirigidas a todo tipo de público siendo por tanto susceptibles de adaptación.
- Se utilizan diversas modalidades de comunicación.
- Abarca todos los temas matemáticos.

Metodología de trabajo

En este caso el tema elegido es el de las teselaciones del plano.
Recubrir o teselar el plano con polígonos es acoplarlos entre sí, sin dejar huecos ni superposiciones. En lo que sigue analizaremos la posibilidad de cubrir el plano utilizando solamente polígonos iguales. Estos resultados se buscarán extender posteriormente a teselaciones con figuras iguales.

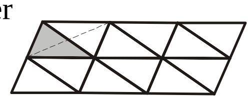
Se comienza la actividad buscando que los participantes identifiquen teselaciones a partir de su experiencia cotidiana: embaldosado de pisos o paredes, muros de ladrillo (ver figura), cortinas metálicas articulables, diseños de prendas de vestir, etc.



A partir de esto se acota el área de trabajo a teselaciones con polígonos iguales donde los vértices de uno no pueden pertenecer al interior de una arista de otro, quedando excluido así el diseño de la figura anterior.
También se busca elaborar colectivamente un plan para abordar la problemática, surgiendo por lo general como propuesta analizar las posibilidades que brinda cada polígono según el número de sus lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc. y dentro de cada caso considerando nuevas posibilidades según sean estos regulares, isósceles, equiángulos o cualesquiera distinguiendo entre convexos y cóncavos en este último caso.
Para la fase de descubrimiento se trabaja en pequeños grupos utilizando material concreto para formar diversas teselaciones del plano. Se apela fundamentalmente a la visualización para la comprensión de los tópicos presentados, utilizando abundante material gráfico. Periódicamente se hacen puestas en común de los hallazgos hechos y argumentos usados entre los distintos grupos teniendo estos en sus exposiciones la posibilidad de usar transparencias o la pizarra cuando ello sea necesario.

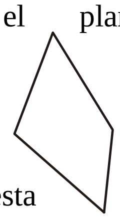
Triángulos

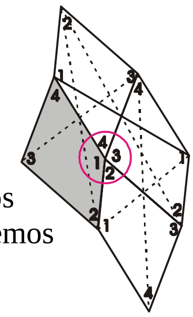
Es fácil ver que se puede cubrir el plano con triángulos de cualquier tipo. Alcanza con simetrizar un triángulo respecto del punto medio de uno de sus lados, obteniendo así un paralelogramo y formando con estos bandas de bordes paralelos que cubren el plano.

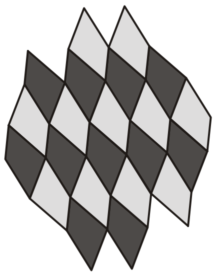


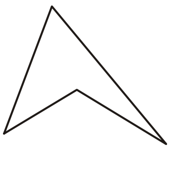
Cuadriláteros

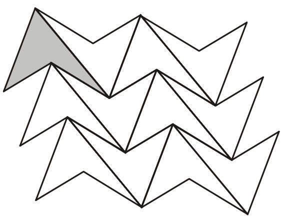
Hemos observado que es posible cubrir el plano con paralelogramos, ¿será posible hacerlo con un cuadrilátero cualquiera?
Partamos de un cuadrilátero y vayamos construyendo las sucesivas simetrías respecto de los puntos medios de los lados.
Vemos que es posible cubrir el plano de esta manera por el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º, como podemos observar en la figura.











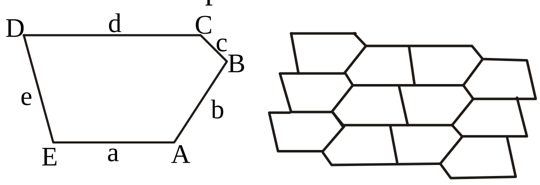
Algo llamativo es que la misma justificación es válida para cuadriláteros no convexos.

Pentágonos

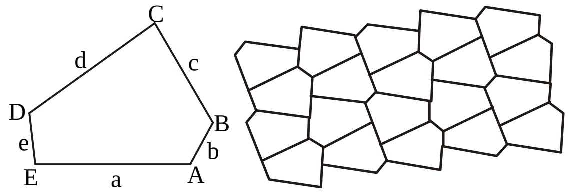
¿Qué sucede con pentágonos?.
Si son regulares, por cómo se presentan los ángulos, no cubren el plano.
¿Habrá ***pentágonos convexos*** *no regulares que cubran el plano?*
Veamos que ha pasado en la búsqueda de este tipo de polígonos.

En 1918, Reinhardt, en su tesis doctoral clasificó a los pentágonos convexos teselantes en 5 tipos que aparecen a continuación.

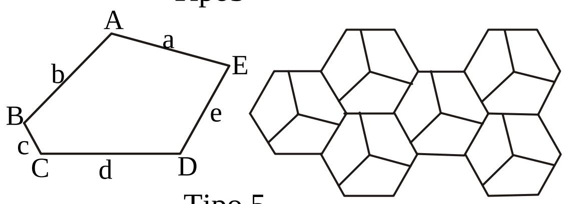
Tipo 1



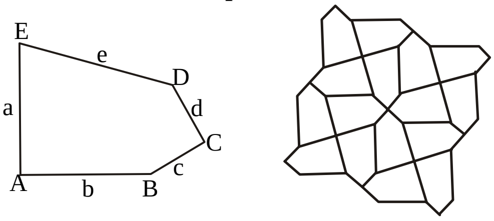
Tipo 2



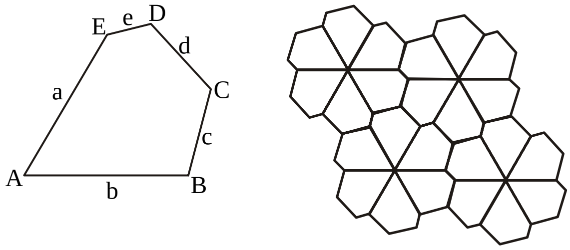
Tipo3



Tipo 4



Tipo 5



Condiciones:

Tipo 1: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=360º$

Tipo 2: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}=360º$ y a=d

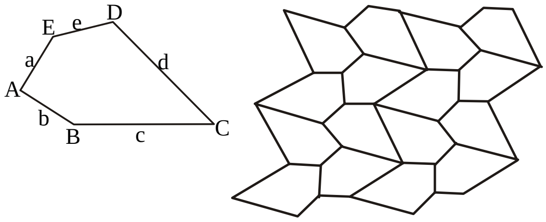
Tipo 3: $\hat{A}=\hat{C}=\hat{D}=120º$, a=b y d=c+e

Tipo 4: $\hat{A}=\hat{C}=90º$, a=b y c=d

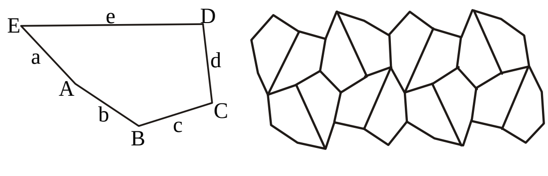
Tipo 5: $\hat{A}=60º$, $\hat{C}=120º$, a=b y c=d

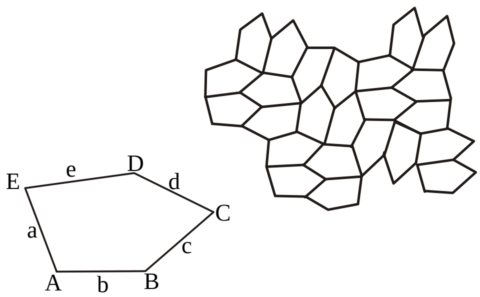
En un artículo de 1969, Kershner, luego de 35 años de abordar periódicamente el problema, escribe sobre las fallas técnicas utilizadas por Reinhardt y exhibe 3 tipos más de pentágonos teselantes. En sus palabras: “El descubrimiento de su existencia es fuente de considerable gratificación.”

Tipo 6



Tipo 7





Condiciones:

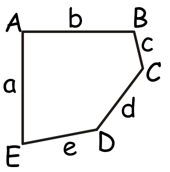
Tipo 6: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}=360º$, $\hat{A}=2\hat{C}$, a=b=e y c=d

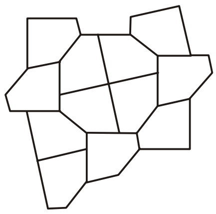
Tipo 7: $2\hat{B}+\hat{C}=2\hat{D}+\hat{A}=360º$, a=b=c=d

Tipo 8: $2\hat{A}+\hat{B}+2\hat{D}+\hat{C}=360º$ y a=b=c=d

Tipo 8

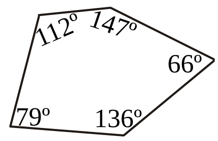
Posteriormente, en 1975 el analista Richard James encontró un tipo de pentágono que no pertenecía a ninguna de las clasificaciones conocidas.

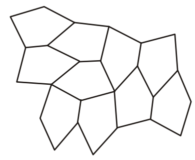




$\hat{A}=90º$, $\hat{C}+\hat{D}=270º$, $2\hat{D}+\hat{C}=2\hat{C}+\hat{B}=360º$
a=b=c+e.

En 1976 un ama de casa, Marjorie Rice descubrió varios tipos más que completaron una lista de 13.

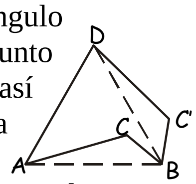


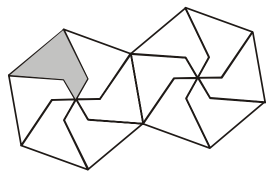


En 1985 fue descubierto un decimocuarto tipo y por ahora no hay demostración de que la lista esté completa.

*¿Será posible generar **pentágonos no convexos** que cubran el plano?*

Una forma de hacerlo es partiendo de un triángulo equilátero ABD y rotando el triángulo ABC (con C punto interior del ABD) con centro en B y 60º, obteniéndose así el pentágono ACBC'D, al cual se le aplica en forma sucesiva la misma rotación hasta completar un

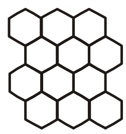




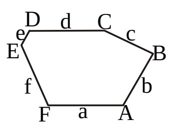
hexágono regular que cubrirá el plano, hecho bien conocido. En este caso, así como en otros que aparecerán posteriormente, se puede apreciar que el principio básico es la compensación de áreas.

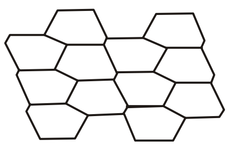
Hexágonos

Es conocido el hecho de que los hexágonos regulares teselan el plano.
Está demostrado que los h***exágonos convexos*** que cubren el plano se clasifican en tres tipos:

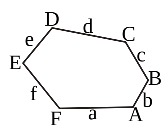


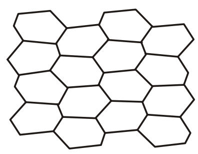
Tipo 1



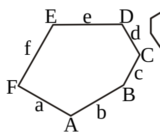


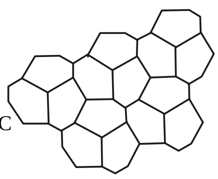
Tipo 2





Tipo 3





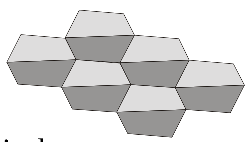
Condiciones:

Tipo 1: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=360º$ y a=d

Tipo 2: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=360º$, a=d y c=e

Tipo 3: $\hat{A}=\hat{C}=\hat{E}=120º$, a=b , c=d y e=f

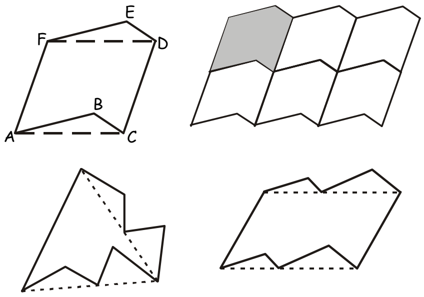
Un camino sencillo para generar hexágonos, convexos o no, que cubran el plano es partir de un cuadrilátero y simetrizarlo respecto del punto medio de uno de sus lados.



Para obtener ***hexágonos no convexos*** que teselen el plano podemos partir de un paralelogramo AFDC, y siendo B un punto interior al paralelogramo, trasladar el triángulo ABC según el vector AF. Luego, por traslaciones sucesivas, se obtiene el mosaico.

Polígonos de más de seis lados

Los matemáticos han demostrado que los polígonos convexos de más de seis lados no cubren el plano.



Veremos a continuación que se pueden generar polígonos no convexos de cualquier número de lados que sí lo hacen.

Para generar polígonos no convexos de un número impar de lados que teselen el plano podemos proceder de forma similar a la descripta para construir pentágonos no convexos.

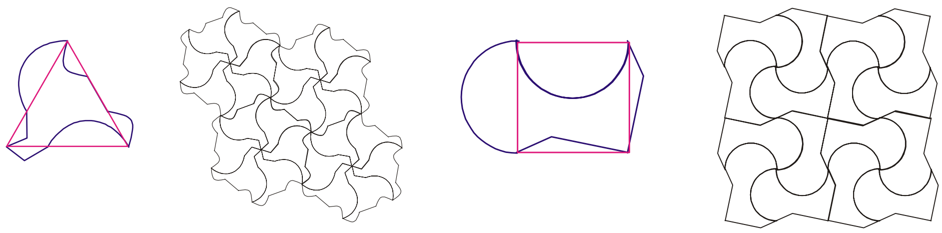
Y de forma similar se pueden generar polígonos no convexos de número par de lados.

Un aspecto de la obra de M. C. Escher

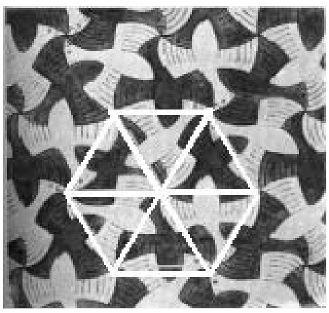
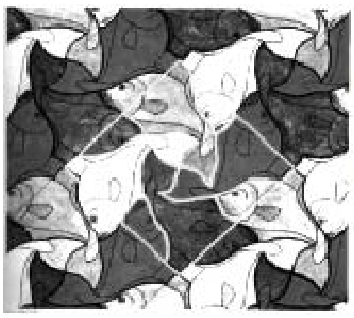
¿Podremos encontrar recubrimientos del plano con figuras que no sean polígonos?

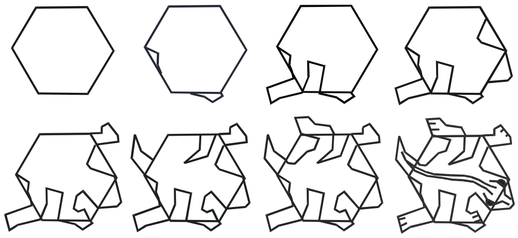
El artista holandés M.C. Escher (1898-1972) nos da la respuesta afirmativa en muchas de sus obras (ver figuras más adelante).

A continuación aparecen deformaciones de triángulos equiláteros y cuadrados, basadas en la compensación de áreas y la utilización conveniente de isometrías, para obtener figuras que recubren el plano.



Se analizan numerosas obras de M.C.Escher para descubrir cuál es el “motivo mínimo” y qué isometrías se utilizan para obtener finalmente la figura (paloma, pez, batracio, etc.) con la que logra cubrir el plano. A modo de ejemplo:

El trabajo incluye la exhibición de un video referido a la obra de M.C.Escher.

Conclusiones

Esta propuesta se ha trabajado con participantes cuyas edades estaban entre los 13 y los 75 años: en grupos de estudiantes, de profesores e incluso un grupo de jubilados, siendo unánime y explícito el placer, el disfrute, con que fue vivida la actividad debido a distintos factores según el grupo: la posibilidad de buscar y descubrir, el relacionar la geometría con el arte, el reflexionar acerca de que es la matemática, el conocer un problema abierto.
La propuesta se manifestó muy maleable, permitiendo fáciles adaptaciones metodológicas en su presentación, de acuerdo a los participantes (intereses, edades, formación previa).
En todos los casos los asistentes participaron activamente en las actividades propuestas, obteniendo resultados muy positivos en los problemas a los que se enfrentaron.

Referencias bibliográficas

Alsina, C.; Pérez, R.; Ruiz, C. (1989). *Simetría dinámica*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
APMEP. (1981). *Activités Mathematiques en quatrieme - troisieme. Tomo II*. Francia: APMEP.
Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de geometría*. México: Limusa.
Dalcín, M.; Alves, S. (1999, 2º cuatrimestre). *Mosaicos do plano*. Revista do Professor de Matemática nº40 (pp. 3 -12). San Pablo, Brasil: Sociedad Brasilera de Matemática.
Delericq, A. (1997). *Le monde des pavages*. Paris, Francia: Les Éditions de Kangourou.
Ernst, B. (1994). *El espejo mágico de M.C.Escher*. Alemania: Taschen.
Escher, M.C. (1994). *Estampas y dibujos*. Alemania: Taschen.
Gardner, M. (1988). *Viajes por el tiempo*. Barcelona, España: Labor.
Gardner, M. (1990). *Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas*. Barcelona, España: Labor.
Howson, A. G.; Kahane, J. P. (1990). *The popularization of mathematics. A study overview*. ICMI Study Series. Cambridge: Cambridge University Press.
Montesinos, J. et al. (1995). *La Alhambra*. Edición especial de la revista Epsilon. Granada, España: S.A.E.M. Thales.
Santaló, L. (1986). *La enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Docente.
Pappas, T. (1996). *La magia de la matemática*. Madrid, España: Zugarto Ediciones.

Experiencias sobre la interpretación de la independencia de las variaciones del área y del perímetro

M. S. Dal Maso; M. Götte; A. M. Mántica; A. Marzioni
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina
amantica@fafodoc.unl.edu.ar

Resumen
Este trabajo se encuentra en el marco del proyecto de investigación CAI+D "Detección de Estereotipos y Análisis de Propuestas Didácticas en la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría Euclídea" dirigido por la Prof. Susana Moriena.
Uno de los temas del eje geometría que aparece en los diseños curriculares provinciales del tercer ciclo de la EGB, es el referido a la relación entre figuras de igual área y distinto perímetro o distinta área e igual perímetro. Estos temas generalmente no son planteados a los alumnos de este ciclo, sino que se tratan en forma totalmente aislada; es decir por un lado el perímetro de figuras y por otro el área.
En general faltan experiencias de referencia que puedan ayudar a crear un conflicto, y por tanto una ruptura, entre las imágenes intuitivas y las deducciones lógicas de ciertas propiedades de la superficie, la longitud o el volumen.
En particular la confusión entre área y perímetro es de una persistencia que requiere un tratamiento específico. Existen numeras investigaciones sobre estos temas como la de Corberán (1989); Chamorro (1995, 1998); Segovia, Castro y Flores (1996); Turégano, P. (1996), entre otros.
Lo que presentaremos en esta instancia es el análisis e implementación de una secuencia de aprendizaje cuyo objetivo es la interpretación de la independencia de las variaciones del área y del perímetro; basada en el artículo “Investigación en didáctica de Matemáticas: área de superficies planas en CM y 6éme” de Régine Douady y Marie-Jeanne Perrin, de la revista “Hacer Escuela” N 9.
En primer término haremos referencia a la propuesta mencionada y a continuación las modificaciones introducidas para su implementación.

Descripción de la propuesta de Douady y Perrin

En el primer punto se realiza el análisis de distintas figuras de igual área utilizando papel cuadriculado y papel liso. En el primer caso se trata de comprobar que dos superficies no superponibles pueden ocupar el mismo lugar, comparando el número de cuadraditos que contiene. En el caso de papel liso, “el objetivo es formular que dos superficies obtenidas a partir de una misma superficie, por cortes y uniones sin superposición de los pedazos tienen la misma área”.
Para esta actividad se formaron 5 equipos de 4 personas; cada equipo dispuso de 5 rectángulos iguales, utilizándose uno como testigo. Los rectángulos eran distintos de un equipo a otro y podían ordenarse por inclusión. Cada equipo debió realizar un rompecabezas que tuviera entre 5 y 8 piezas y armarlo sin superponer las piezas ni perder ninguna. Debían obtenerse 4 formas distintas por equipo. Se pegaron las piezas cortadas sobre una hoja dibujando el borde de la superficie obtenida sobre otra hoja para determinar así la nueva superficie.
Cada equipo debió analizar las siguientes cuestiones: ¿Las figuras obtenidas por cada uno de los integrantes ocupan entre ellas: el mismo lugar, más lugar o menos lugar?. ¿Qué es lo que cambia de una figura a otra y qué no?
Luego compararon el área de todas las figuras obtenidas.

En el segundo punto se analiza la diferenciación de las nociones de área y de longitud, comparando las figuras obtenidas en la actividad anterior por un lado según el área y por otro según el perímetro.

En el primer caso se trabajó la comparación de los perímetros de distintas figuras de la misma área; para esto los alumnos debían pedir por escrito la longitud de hilo necesaria para bordear exactamente la figura realizada y verificar si la longitud es la correcta pegando el hilo sobre el borde. Después los alumnos compararon los perímetros de sus figuras.
En el segundo caso se analiza la independencia de las variaciones del área y del perímetro. Esta actividad se realizó en forma individual o de a dos. Se pidió realizar una figura cualquiera; ésta tiene una cierta área y un cierto perímetro. Los alumnos la modificaron para obtener otra de área menor y perímetro mayor.

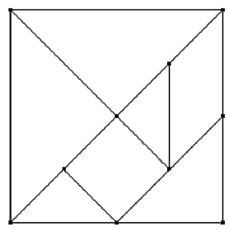
Descripción y análisis de la propuesta implementada
Esta propuesta se realizó en dos octavos años de distintas escuelas de la ciudad de Santa Fe; trabajando sobre diferenciación de las nociones de área y longitud e independencia de las variaciones del área y del perímetro. La experiencia se implementó durante dos jornadas.
Hipótesis para la implementación de la secuencia de aprendizaje.

- Los conceptos se construyen a través de acciones.
- Un concepto se construye en función de conocimientos anteriores a partir de un conflicto generado.
- Considerar simultáneamente dos variables independientes dificulta la construcción de un concepto. En este caso las variables son área y perímetro, en primer lugar dejamos fija una de ellas para después considerar a ambas.

Primera Jornada.
Objetivo: diferenciación de las nociones de área y longitud.

Materiales:

- Tangram de Cartulina. (Fig. 1)
- Hilo que no se estira.
- Tijera.
- Goma de pegar.
- Regla graduada.


(Fig. 1)

Organización de la clase:
Se formaron grupos de 4 alumnos. Cada equipo dispuso de cuatro tangram idénticos: uno por alumno y un cuadrado de igual área como testigo.

Consignas:
1) - Recortá tu tangram en las siete piezas sin perder ningún pedazo.
- Armá un rompecabezas con las piezas, sin superponerlas de manera de obtener otra figura distinta de la testigo. Se quieren cuatro figuras diferentes en cada equipo.
- Pegá tu figura en una hoja (para evitar que se te desarme).
2) Pedí por escrito la longitud de hilo necesario para bordear exactamente la figura realizada y verificá si la longitud es la correcta pegando el hilo sobre el borde. Si la longitud no es la correcta realizá nuevamente el pedido y volvé a intentarlo.

3) Compará los perímetros de las figuras obtenidas y de la testigo. Escribí tus conclusiones y las dificultades encontradas en el papel afiche. Compará las áreas de las figuras obtenidas y de la testigo. Escribí tus conclusiones.

Observación:
La diferencia con la propuesta analizada es que en este caso todos los grupos utilizaron la misma figura y realizaron los mismos cortes.

Análisis de la tarea:
Planteamos esta figura con el objetivo de evitar cortes curvos, lo que impediría la medición con la regla, agregando una dificultad que consideramos innecesaria en este caso. Además el hecho de tener figuras poligonales facilita el cálculo del área de la nueva figura en caso que los alumnos no noten a simple vista que el área coincide con la de la testigo. A esta conclusión puede llegarse por distintos caminos:

- Comparando por superposición de piezas.
- Considerando que en realidad la unión de las piezas recortadas sin superposición nos da el mismo área (concepto de equivalencia de áreas).
- Calculando del área de ambas figuras aplicando fórmulas y comparando resultados.

Cuestiones observadas:
Al recibir la primer consigna un alumno preguntó si debía armar una “figura geométrica”, refiriéndose a cuadriláteros convexos.
En la segunda consigna un grupo asegura que van a ser iguales las longitudes de todos los hilos; no obstante el procedimiento utilizado por todos fue tomar la regla y medir en centímetros cada una de las longitudes que intervienen en el perímetro y sumarlas.
Las dificultades observadas para la realización de la tarea fueron:

- El pedido de la longitud de hilo, dado que algunos alumnos cometieron reiteradamente errores de medición o bien tomaban las longitudes de todos los lados de las diferentes piezas aunque no sean bordes de la figura.
- El pegado del hilo en el borde de la figura

Respecto de la tercer consigna un alumno dice que el área de la figura obtenida es igual a la de la testigo porque se obtiene de ella pero a su vez dice que es mayor porque al superponerlas observa que la primera sobresale en parte de la segunda.

Puesta en común.
Con respecto al perímetro.

- Cuanto más “picos” tiene la figura mayor es su perímetro.
- Las figuras “cerradas” tienen menor perímetro que las “abiertas”; considerando “cerradas” a las compuestas por las piezas dispuestas en forma más compacta.
- Una de las figuras presentadas es un polígono “con agujero” (conjunto conexo); un alumno dijo que en ese caso el perímetro está mal hallado, porque debió pegarse el hilo también por el borde del agujero.

Con respecto al área.

- Dos grupos dijeron que todas las figuras tienen igual área porque se obtienen del mismo cuadrado, no obstante uno de ellos calcula el área de las figuras obtenidas para justificar sus conclusiones.

- Tres grupos no pudieron obtener la conclusión por desconocer la fórmula para hallar el área de su figura.
- En un caso se utilizó una fórmula para el cálculo del área dado que era un rectángulo; en otro se obtuvo por descomposición de la figura utilizando varias fórmulas. En el segundo caso el valor obtenido coincide con el área de la testigo, no sucediendo lo mismo en el primero. La justificación fue que al no unir perfectamente las siete piezas aumentó la medida del área.

Notas:
En todos los casos:

- La conclusión que los perímetros de las figuras son distintos se obtuvo después de realizar la medición del hilo.
- Algunos grupos observaron la conservación del área desde el comienzo.

Conclusión:
Luego de la puesta en común y de las discusiones realizadas concluyeron que todas las figuras tienen el mismo área pero distinto perímetro.

Segunda Jornada
Objetivo: reconocer la independencia de las variaciones del área y del perímetro.
Materiales

- Cuatro modelos de polígonos distintos de cartulina numerados.
- Tijera
- Goma de pegar.
- Regla graduada.

Organización de la clase:
La actividad se realizó en dos etapas: la primera parte individual donde se le entregó a cada alumno un polígono y en la segunda se conformaron cuatro grupos con los alumnos que recibieron el mismo modelo.
Consignas

1) Modificá la figura recibida de manera de obtener otra de menor área y mayor perímetro.
2) Reúnanse los compañeros que recibieron originalmente el mismo polígono.
3) Peguen en el papel afiche las figuras obtenidas. Discutan si cumplen las condiciones pedidas en la consigna 1 y anoten las conclusiones en el afiche.

Observación
La diferencia con la propuesta analizada es que en este caso los alumnos recibieron las figuras con las que trabajarían.

Análisis de la tarea
La razón por la cual se les entregó el modelo, en lugar de pedirles que cada uno dibuje una figura es que hubiera polígonos cóncavos y convexos irregulares, dado que generalmente los alumnos tienden a dibujar polígonos convexos. Además se pidió que formaran grupos de 4 o 5 integrantes, considerando que esta forma de trabajo enriquece la discusión y

facilita la puesta en común. Entre las diferentes maneras de responder a la consigna figuran las siguientes.

- Quitar una parte del interior de la figura, que asegura la disminución del área y el aumento de perímetro.
- Cortar una pieza del borde. Se asegura la disminución del área pero no siempre el aumento del perímetro. Una forma es aumentar la irregularidad del borde.
- Dibujar una figura incluida en la anterior con borde suficientemente irregular, asegurándose de esta manera la consigna requerida.

Cuestiones observadas:

Las dificultades para la realización de la tarea fueron:

- Inconveniente en considerar simultáneamente la variación de área y perímetro.
- En la mayoría de los casos al realizar el corte para disminuir el área, no se respetaba la consigna pedida para el perímetro. Para responder a esta exigencia los alumnos consideraron que debían realizar cortes “entrando”, “formando picos”.
- En un grupo se observó que, a pesar de obtener conclusiones correctas, un integrante sostuvo la invariancia del área ya sea que se agregue o quite un trozo de la misma.
- Falta de precisión en el lenguaje matemático.
- Algunos alumnos descompusieron la figura dada realizando cortes rectos en ella. Desecharon un trozo y con los restantes armaron una nueva figura, realizando mediciones en su contorno para asegurarse el aumento del perímetro o bien armando una figura tan “abierta” con los trozos como para asegurar el aumento de perímetro. A nuestro entender este procedimiento pudo haber sido influenciado por la actividad realizada en la clase anterior. Un solo alumno, utilizando este procedimiento, logró un polígono con agujero.

Puesta en común:

Los alumnos coincidieron en que:

- Para obtener una figura de menor área debían quitarle un trozo, lo cual no aseguraba el aumento del perímetro.
- Para aumentar el perímetro, el corte debía realizarse “entrando” en la figura o bien recortándola en trozos y pegándolos formando una figura “más abierta”.

Al presentar las conclusiones los alumnos consideraron por un lado la variación del área y por otro la del perímetro.

Conclusión

Luego de la puesta en común y las discusiones realizadas los alumnos concluyeron que podían modificar la figura de manera que aumente su perímetro y disminuya su área.

Algunas conclusiones

A pesar de la conclusión antes mencionada que obtuvieron los alumnos, no pueden establecer la independencia entre la variación de área y perímetro.

Cuando intentaron justificar si existe relación entre área y perímetro, se observó que dichos conceptos no están claros. Por un lado afirman que, si no quitan ningún trozo las figuras tienen igual área y por otro consideran que al cortar trozos de una determinada figura y disponerlos de manera más dispersa el "lugar " ocupado por ésta es mayor que el de la original y por lo tanto tiene mayor área y mayor perímetro.
Esto sirvió para que algunos alumnos comenzaran a plantearse qué tipo de relación existe entre áreas de figuras de distinta forma y nos permite avanzar en la reconstrucción de dichos conceptos y su independencia .

Referencias bibliográficas

Chamorro, M. (1995). "Aproximación a la medida de las magnitudes en la Enseñanza Primaria". En *UNO Procedimientos en Matemáticas*. *Nº 3*. Barcelona: Graó.
Chamorro, M. (1998). "Fenómenos de enseñanza de la medida en la escuela elemental". En *UNO. Juegos matemáticos.Nº 18*. Barcelona: Graó.
Corberán, R.; Palau,P ; Garrigues, J. Peñas,A Y Ruiz,E. (1989). " Midiendo áreas y perímetros propuestas de actividades". En *Didáctica de la geometría: modelo de Van Hiele*. España: Universitat de València.
Douady,R. Y Perrin, M.(1988). "Investigaciones en didáctica de matemáticas: Áreas de superficies planas en CM y 6éme". En *Hacer escuela . Nº 9.* Buenos Aires: Escuela Nueva Soc. Coop. Ltda.
Segovia, I.; Castro,e.; Flores, P. (1996). "El área del rectángulo". En *UNO. Medida. Nº 10.* Barcelona: Graó.
Turégano, P. (1996). Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida. En *UNO. Medida. Nº 10.* Barcelona: Graó.

Un Irracional Dorado

Graciela Susana Galindo, María Isabel Díaz, Ana María García de Macías
Escuela de Bellas Artes "M. Atilio Terragni", Universidad Nacional de Tucumán.
Gymnasium, Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.
anamaga2000@yahoo.com

Resumen
Con la intención de motivar e interesar a nuestros estudiantes para lograr un aprendizaje significativo, desde hace varios años se trabaja con alumnos de dos Escuelas Experimentales de la U.N.T.: Gymnasium y Escuela de Bellas Artes "M° Atilio Terragni", planteando nuevas formas de encarar la tarea educativa.
En este trabajo se muestra la metodología aplicada para interesar a los alumnos a descubrir que la armonía y la belleza del universo están vinculadas con la Matemática, investigando sobre la relación que se repite sistemáticamente en las obras de la naturaleza y en las realizadas por el hombre.
La modalidad que se emplea está centrada en el alumno, que va construyendo su propio conocimiento a través de la participación y la creatividad.
Los objetivos propuestos son:

- Rescatar el gusto por la Matemática.
- Valorizar la Geometría como un sostén estrechamente ligado con el arte y la belleza.
- Orientar a los alumnos en la construcción de su propio conocimiento.
- Estimular la creatividad.
- Generar redes institucionales que potencien las actividades de cada escuela.
- Facilitar la inserción de los jóvenes en el medio social.

Esta experiencia tiene resultados significativos ya que genera una enseñanza de mayor calidad, favorece a la integración de conocimientos y permite la participación activa de los alumnos que manifiestan un sorprendente interés.

Introducción

Este trabajo muestra la metodología aplicada para interesar a los alumnos a descubrir que la armonía y la belleza del universo están vinculadas con la Matemática.
Sobre esta temática se trabaja desde hace varios años con alumnos de dos Escuelas Experimentales de la U.N.T., Gymnasium y Escuela de Bellas Artes "M° Atilio Terragni", de los niveles EGB2, EGB3 y Polimodal.
La modalidad empleada estuvo siempre centrada en el alumno, que fue construyendo su propio conocimiento a través de su participación y creatividad, teniendo en cuenta la **Teoría del aprendizaje** de Vigotsky que se centra en el desarrollo integral de la personalidad, sustentada en que el individuo y la sociedad están unidos en su génesis y en su desarrollo; y complementada por la **Teoría de la actividad** de Leontiev y por la **Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales** de P. Ya Galperin.
Los objetivos propuestos son:

- ☯ Rescatar el gusto por la Matemática.
- ☯ Valorizar la Geometría como un sostén estrechamente ligado con el arte y la belleza.
- ☯ Orientar a los alumnos en la construcción de su propio conocimiento.
- ☯ Estimular la creatividad.
- ☯ Generar redes institucionales que potencien las actividades de cada escuela.
- ☯ Facilitar la inserción de los jóvenes en el medio social.

Importancia del tema

Si analizamos con detenimiento las obras artísticas, pinturas, esculturas, bajorrelieves, construcciones, etc. en todos los tiempos, podemos encontrar como sostén oculto una geometría pura. Con este análisis llegamos a la conclusión que existen elementos geométricos, módulos que se respetan para lograr el todo armónico.

Distintas razones guiaron al hombre a destacar estos principios matemáticos presentes en toda obra de arte:

- **Buscar la perfección:** que ha sido uno de los objetivos que ha guiado siempre a los artistas en la ejecución de sus obras y que, en los momentos históricos como el Renacimiento se manifiesta en la perfección de la geometría.
- **Definir un Módulo:** un elemento geométrico y métrico que pueda constituir la regla que permita alcanzar la forma ideal.
- **Simplificar el dibujo:** para que con la ayuda de formas conocidas y fácilmente determinables, se puedan hallar las proporciones, los movimientos, el encuadre.

Para poder hacer una primera figuración de lo que quiere representar un artista, poseedor de un bagaje de ideales filosóficos, místicos y estéticos, se basa en la geometría y a través de líneas rectas y curvas, vuelca en su obra lo que su inspiración ha creado.

Este es uno de los principios guía de muchos de los grandes pintores, escultores y arquitectos, especialmente en la Grecia antigua y en el Renacimiento.

Antiguamente el elemento básico utilizado en el análisis de figuras fue el triángulo y en el medioevo con el desarrollo de las formas geométricas en la iconografía surge **La Divina Proporción.**

Esta proporción, cuyo valor numérico es conocido como **Número de Oro,** también se la conoce con el nombre de **Sección Áurea**, es una relación particularmente agradable entre dos medidas, aplicada a los lados de un rectángulo y en general a las dimensiones de una composición para lograr un resultado armonioso.

En la arquitectura griega se usó al cuerpo humano como ejemplo vivo, perfecto de simetría y de euritmia, además de inspiración y modelo para la composición de trazados.

Estas figuras muestran el ajuste de las proporciones por medio de un método gráfico y más precisamente de un canon de las proporciones humanas regido por la sección áurea y los temas relacionados con ella.

Hambridge llegó a la conclusión que el método que usaba para analizar los templos y vasos griegos, podía utilizarlos en el cuerpo humano y no sólo en medidas lineales, sino también en superficies y volúmenes, por medio de la descomposición en rectángulos armónicos.

Los pitagóricos, fraternidad de Sicilia fundada por Pitágoras, habían elegido el **pentagrama,** conocido en nuestros días como **Estrella Pitagórica,** como su distintivo.

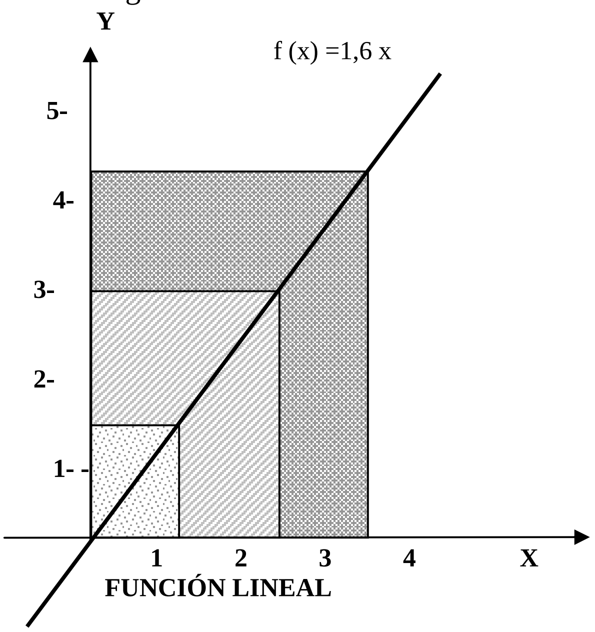
En el Renacimiento el pentagrama fue elegido como símbolo del **microcosmo**, cuya representación más conocida es la de Agripa de Nettesheim: piernas y brazos separados con la cabeza en la cima, de modo que coinciden los cinco puntos del pentagrama.

Esta representación del hombre - microcosmo, responde a la idea de una representación tanto física como astral.

La armonía también se da en el orden dinámico como en el estático y fue demostrado con estudios realizados por Rudolf van Laban, director de uno de los más destacados institutos alemanes de coreografía rítmica, usando en sus cursos el icosaedro director.

Metodología

El objeto de estudio fue siempre la búsqueda de la relación que se repite sistemáticamente en las obras de la naturaleza y en las realizadas por el hombre, esta particular relación áurea entre dos medidas, puede representarse geométricamente y calcularse como un valor numérico.
Con el fin de brindar a los alumnos aplicaciones a un tema matemático pero con un enfoque diferente, se buscaron vías didácticas alternativas para lograr un aprendizaje en forma espiralada a la vez que el nivel de abstracción de los conocimientos va en aumento.
En esta dirección se trabajó en la organización de los contenidos y en el sistema didáctico de acuerdo a los niveles educativos.
Las actividades se desarrollaron en dos etapas, en el aula. y en un taller interinstitucional.
Durante la tarea llevada a cabo en el aula, en el **Nivel EGB2** (11 y 12 años), se trabajó la Geometría Plana a partir de la construcción del rectángulo de oro.
Los alumnos formaron pequeños grupos (se usó alguna de las técnicas de formación de grupos) e investigaron, en bibliografía referida al tema, dicha construcción. Luego expusieron afiches de lo investigado.
De manera similar se abocaron a la investigación de la construcción de la estrella pitagórica a partir del pentágono.
Teniendo en cuenta estos aprendizajes se trabajó en el estudio y construcción de los demás polígonos.
En el **Nivel EGB3** (13 a 15 años), a modo de introducción del tema Proporcionalidad, se discutió en pequeños grupos, con material presentado por la profesora, las relaciones que se obtienen en el segmento y en el rectángulo de oro.
Luego de una mesa redonda se expusieron y discutieron las conclusiones.
A partir de este contenido los alumnos, con la guía de la profesora, investigaron la teoría de proporcionalidad directa e inversa.
Como aplicación de proporcionalidad directa, se estudió la función lineal **f(x) = 1,6 x** y su representación gráfica:



FUNCIÓN LINEAL

Desde este contenido se avanzó en el estudio de la función lineal.
En el **Nivel Polimodal** (16 y 17 años), aplicando la técnica Lluvia de ideas, se logró que los alumnos recordaran el segmento áureo y la relación que en él se cumple:

Dado un segmento ab, se puede encontrar un punto interior m tal que am sea media proporcional entre ab y mb.

El segmento am es el segmento áureo de ab, si se cumple la relación:

$$\frac{ab}{am} = \frac{am}{mb} \qquad \Rightarrow \qquad am^2 = ab.mb$$

Usando estos conocimientos previos, y eligiendo al segmento *mb* como unidad y al segmento *am* como x, la proporción se transformó en:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = x + 1$$

obteniendose la ecuación de segundo grado con una incógnita:

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad\qquad (\alpha)$$

A partir de esta instancia se propuso formar grupos de 4 alumnos para investigar la resolución de distintas ecuaciones de segundo grado con una incógnita y el tipo de soluciones que se obtienen.

Luego de la puesta en común la consigna fue la resolución de la ecuación (α), de donde surgió el valor irracional del número de oro:

$$\boxed{\Phi = 1{,}6180339...}$$

que dio inicio a la teoría de números irracionales.

La tarea llevada a cabo en el taller interinstitucional se realizó en cuatro instancias:

1ª) Presentación de un video de Historia del Arte para todos los alumnos, siendo la consigna rescatar, mirar, admirar y reconocer, desde el punto de vista histórico, geográfico, artístico, social, matemático y geométrico, distintas obras de arte de cuatro épocas notables.

2ª) Constitución de pequeños grupos de trabajo integrados por alumnos de distintas edades y escuelas, para analizar y determinar las proporciones que se ponen de manifiesto en las obras seleccionadas a tal fin.

3ª) Producción de cada grupo de trabajo, donde los alumnos debieron reflejar en afiches, murales, pinturas, etc. un tema vinculado con la Divina Proporción.

4ª) Puesta en Común, en la que cada grupo expuso el análisis crítico realizado sobre la obra, además de justificar los motivos que los llevaron a realizar la producción artística presentada.

Resultados y conclusión

Las tareas en grupos permitieron la integración de los alumnos, al compartir conocimientos, experiencias e ideas.
Las evaluaciones continuas demostraron que la asimilación de conceptos y conocimientos fue efectiva.
El trabajo grupal permitió a las profesoras prestar más atención a los alumnos con dificultades.
Entre los inconvenientes que se presentaron se pueden citar la demora en la iniciación de las tareas motivada por discusiones para llegar a acuerdos y el bullicio que generaron las actividades.
Un grupo no logró finalizar su producción, por lo que no presentaron sus conclusiones a tiempo.
La novedad en las vías de realización de las tareas planteadas y su aplicación se pudo apreciar en las síntesis y en los afiches presentados que resultaron interesantes y productivos.
Teniendo como eje conductor la búsqueda de la relación que se repite sistemáticamente en las obras de la naturaleza y en las realizadas por el hombre, en sus distintos enfoques, *rectángulo áureo, número de oro, divina proporción,* se puede apreciar a través del sistema didáctico un crecimiento en espiral de los conocimientos e investigaciones en los distintos niveles educativos.
La aplicación práctica y todo el desarrollo de las reuniones, estuvieron relacionado con el empleo de métodos participativos, los cuales pusieron al alumno en el centro del proceso pedagógico y despertaron su interés creativo.
Lo interesante de este trabajo es que se realizó con alumnos de distintos establecimientos y de distintas edades, los resultados fueron significativos y en ciertos momentos, sorprendió el interés que manifestaron.
Este proyecto se orienta a una de las líneas de trabajo que sugiere el tema, quedan planteadas líneas de estudio de la Divina Proporción en la naturaleza, en la música, en la coreografía rítmica, posibles temas de posteriores investigaciones.

Referencias bibliográficas

Ghyka, M.(1968). *El número de oro - I. Los Ritmos*. Buenos Aires. Argentina: Editorial Poseidón.
De Fiore, G. (1990). *Curso de Dibujo: Cuadernillos, Formas y Composición*. Argentina: Editorial Hispamérica.
Sacriste, E. (1973). *Charlas a principiantes*. Buenos Aires. Argentina: Editorial Universitaria.

¿Las relaciones implican siempre dependencia?

Ma. Susana Dal Maso, Marcela Götte, Ana Ma. Mántica, Adriana Marzioni
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina
amantica@fafodoc.unl.edu.ar

Resumen

En el presente trabajo se presentan actividades realizadas por alumnos de octavo año de la EGB, con el objetivo que los mismos puedan reconocer la independencia de las variaciones de área y perímetro.
Se propone la realización de estas actividades considerando que los alumnos generalmente no cuentan con un número significativo de situaciones que modelicen las actividades de medida y que les proporcionen las experiencias necesarias para construir el dicho concepto. La mayoría de los docentes decidimos aplicar el principio de economía, evitando las prácticas efectivas de medida, que requieren tiempo y esfuerzo.
Se exponen algunos casos que se presentaron en la realización de la misma, con motivo de analizar los procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución de la actividad.

En este trabajo, proponemos actividades de manera que los alumnos se planteen la independencia entre área y perímetro, provocando el conflicto necesario para lograrlo, dado que generalmente estos conceptos se trabajan separadamente.

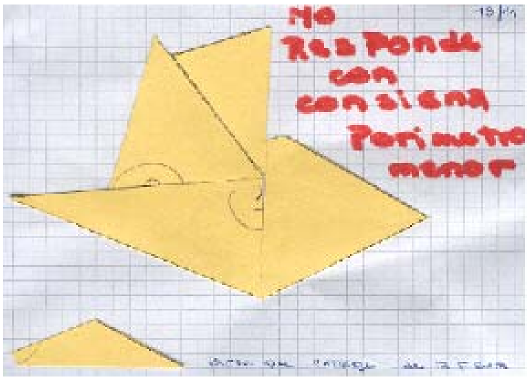
Los alumnos no cuentan con un número significativo de situaciones que modelicen las actividades de medida y que les proporcionen las experiencias necesarias para construir el dicho concepto.

La mayoría de los docentes decidimos aplicar el principio de economía, evitando las prácticas efectivas de medida, que requieren tiempo y esfuerzo. Esto dificulta la construcción por parte de los alumnos de un conocimiento adecuado de la medida, "haciendo imposible el uso del razonamiento empírico inductivo, en paralelo con el uso del razonamiento deductivo". (Chamorro 1995)

Para la actividad, los alumnos de octavo año de EGB, disponen de distintas figuras poligonales y la consigna de modificarla de forma que disminuya el área y aumente el perímetro.
Presentamos algunos trabajos realizados por ellos que nos parecen representativos agrupados en tres casos.

Del diálogo mantenido por los alumnos durante el desarrollo de la actividad y las discusiones generadas en la puesta en común realizamos una interpretación expresada en cursiva en el póster.
En cada recuadro se observa la figura original y su modificada, además se transcriben algunas conclusiones de los alumnos, para mejorar su lectura.

- **No cumplen la consigna.**



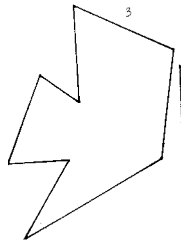
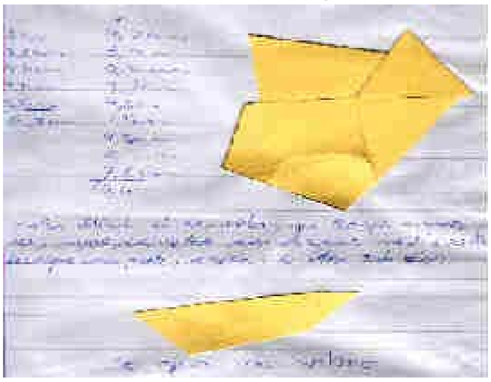
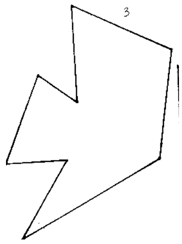


Figura 1.





"Me fue difícil el armarlo y que tenga menos área y mayor perímetro pero después me dí cuenta y le saqué una parte, después lo otro todo bien".

Figura 2.

A pesar de cortar en trozos la figura y armar una nueva para que cumpla la consigna, no lograron aumentar el perímetro. Se puede apreciar en la figura 1 que el alumno reconoce que ha cometido un error, mientras que en la figura 2, modifica el resultado para obtener mayor perímetro.

- **Cumple la consigna sin analizar el tipo de corte.**

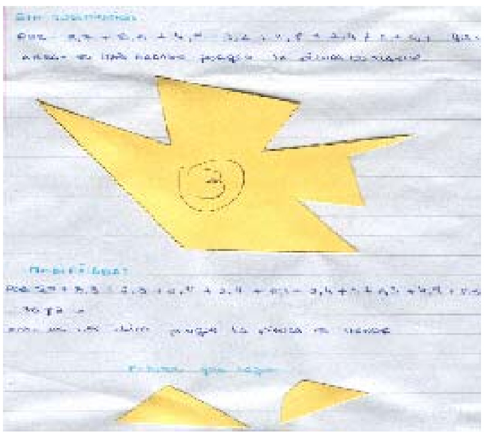
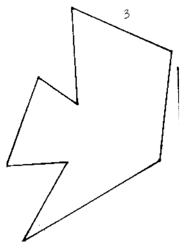


Figura 3



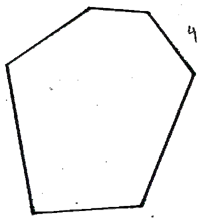


Figura 4.

Como el alumno realiza los cortes hacia adentro desde un comienzo, no ve la necesidad de analizar que tipo de cortes son necesarios para que el perímetro aumente.

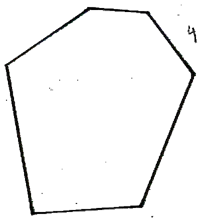
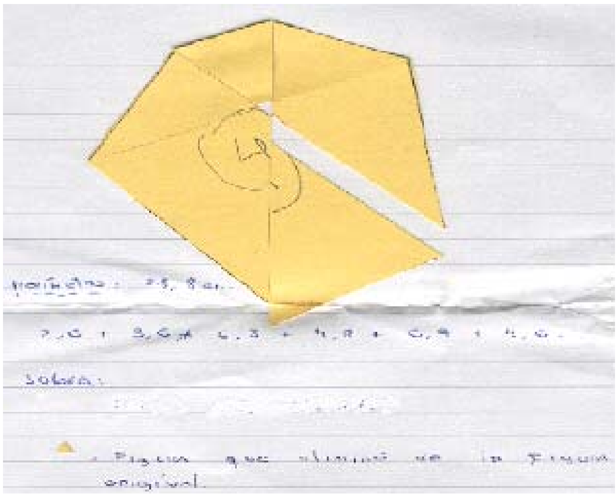
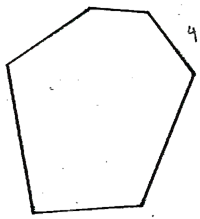


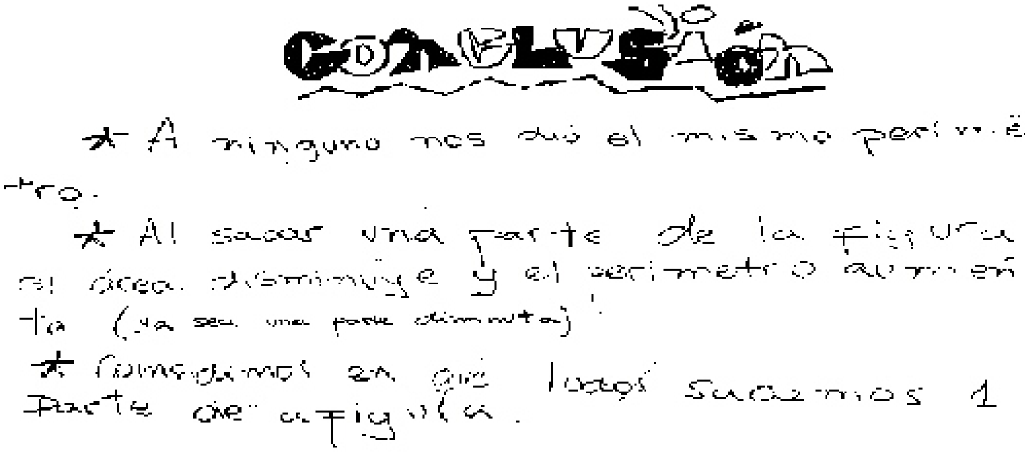
Figura 5





Observación: en la figura 6, el alumno no considera como perímetro el borde del agujero.

Figura 6.

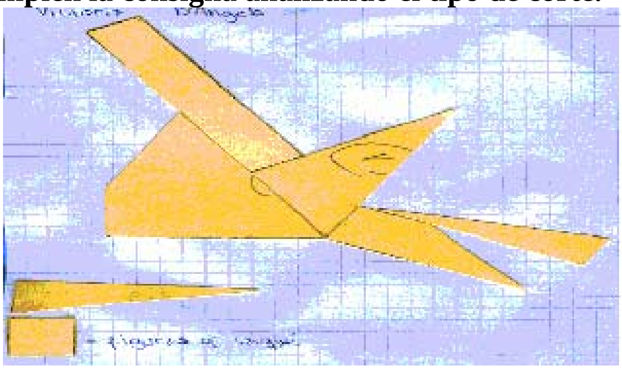


Conclusión

* A ninguno nos dió el mismo perímetro.
* Al sacar una parte de la figura el área disminuye y el perímetro aumenta (ya sea una parte diminuta)
* Coincidimos en que todos sacamos 1 parte de la figura.

Los alumnos que al realizar el corte no logran el aumento de perímetro, cortan la misma en trozos y arman una nueva figura midiendo su contorno hasta lograr que la disposición de las piezas obtenidas le permita cumplir con la condición del aumento de perímetro. En este grupo no se presentó la discusión de cómo realizar los cortes para cumplir con la consigna sin "desarmar" la figura.

- **Cumplen la consigna analizando el tipo de corte.**



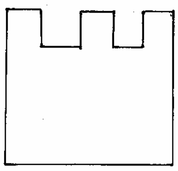


Figura 7.

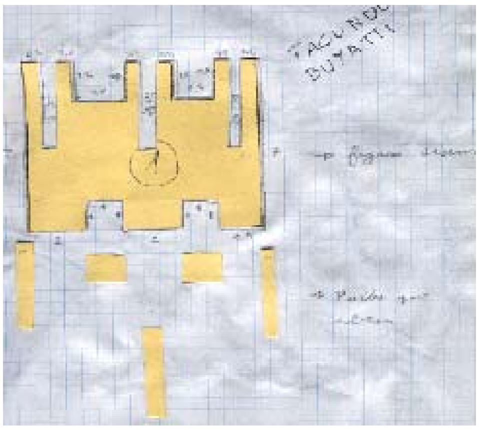
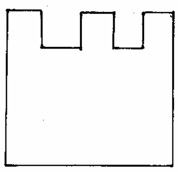
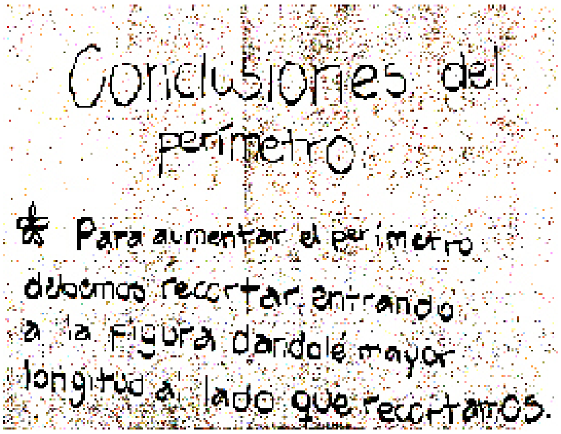
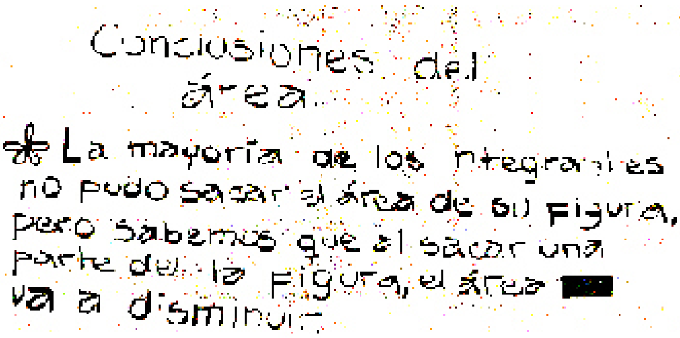


Figura 8.




Conclusiones del perímetro

* Para aumentar el perímetro debemos recortar entrando a la figura dandolé mayor longitud al lado que recortamos.


Conclusiones del área.

* La mayoría de los integrantes no pudo sacar el área de su figura, pero sabemos que al sacar una parte de la figura, el área [redacted] va a disminuir

En este caso se presenta el problema de quitar un trozo del borde, pero se genera la discusión con el otro integrante que realizó un corte hacia adentro y por lo tanto pueden obtener una conclusión respecto a como realizarlo para que aumente el perímetro.

Conclusión final

Cuando intentan justificar si existe relación entre área y perímetro, se observa que dichos conceptos no están claros.

Lo que motivó esta actividad es que algunos alumnos, comiencen a plantearse que tipo de relación existe entre áreas de figuras de distinta forma y esto permite avanzar en la reconstrucción de dichos conceptos y su independencia

Existe una creencia que cuando se habla de “relación entre área y perímetro” hay dependencia entre los conceptos involucrados, no considerando que pueda existir una relación de independencia.

Referencias bibliográficas

Douady, R. y Perrin, M.(1988). "Investigaciones en didáctica de matemáticas: Áreas de superficies planas en CM y 6éme". En *Hacer escuela . Nº 9.* Buenos Aires: Escuela Nueva Soc. Coop. Ltda..

Chamorro, M. (1995). "Aproximación a la medida de las magnitudes en la Enseñanza Primaria". En *UNO Procedimientos en Matemáticas*. *Nº 3*. Barcelona: Graó.

Corberán, R.; Palau, P. ; Garrigues, J. Peñas, A. y Ruiz, E. (1989). "Midiendo áreas y perímetros propuestas de actividades". En *Didáctica de la geometría: modelo de Van Hiele.* España: Universitat de València.

Dickson, L. Brown, M. Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* MEC- Barcelona: Labor.

La habilidad de visualizar en situación escolar

Santiago Ramiro Velázquez, Carlos Flores Lozano, Enrique Gómez Otero, Gerardo García
Universidad Autónoma de Guerrero, México
Sramiro@galeana.uagfm.mx

Resumen
En este artículo se presentan algunos resultados del proyecto de investigación denominado: El desarrollo de habilidades matemáticas y la formación de profesores de educación secundaria, perteneciente al Sistema de Investigación Benito Juárez, SIBEJ-CONACYT. En particular se consideran las situaciones didácticas diseñadas para promover el desarrollo de la habilidad de visualizar, como un medio para formar el pensamiento matemático de los estudiantes. Con las referidas situaciones didácticas se estructura un taller para docentes de educación secundaria. En este sentido también se exponen las experiencias de la instrumentación de este taller, con profesores del estado de Guerrero, México y de diversos países de América Latina en el marco de la XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 15).

Introducción

Una de las actividades principales del profesor, es el diseño de situaciones didácticas conformadas por una serie de problemas y una secuencia didáctica para abordarlos. En la que los estudiantes construyen sus propias estrategias de solución a partir de la búsqueda, confrontación y validación de sus trabajos. Estas posiciones coinciden con el enfoque de la enseñanza aprendizaje de la matemática explicado en los materiales de apoyo al docente (SEP, 1993), en los que se fundamenta la necesidad de que el estudiante se responsabilice de su aprendizaje por medio de la solución de problemas.

En el presente trabajo se presentan situaciones didácticas, con las que se estructura un taller dirigido a docentes de educación secundaria, a fin de que construyan estrategias de enseñanza aprendizaje de la matemática que les aseguren un desempeño exitoso en su labor. En especial interesa promover el desarrollo de la habilidad de visualizar, por las potencialidades que tiene para que los estudiantes realicen representaciones coordinadas de un contenido matemático. Considerando que el conocimiento matemático se puede expresar en diferentes registros de representación (Duval, R. 1998) y es necesario pasar de un registro a otro en forma coordinada, en el aprendizaje de esta asignatura.

Además, se describe brevemente el problema de las limitaciones que tiene el profesor de matemáticas de educación secundaria en el desempeño de su labor, se formulan los objetivos del taller, se explica el marco teórico sobre el que se diseñan las situaciones didácticas y se presentan en extenso dichas situaciones. Finalmente, se exponen algunas experiencias sobre la instrumentación de este taller y se hacen consideraciones acerca de las ventajas de promover el desarrollo de habilidades matemáticas.

Descripción del problema

El problema de la investigación antes referida, formulado en términos de que los profesores de matemáticas en educación secundaria no desarrollan eficientemente su labor, lo que repercute negativamente en el aprendizaje de esta asignatura, se enmarca en uno de los denominados problemas mayores de la enseñanza aprendizaje de la ciencia y matemática. Este problema mayor consiste en que por lo general, los estudiantes no forman conceptos científicos esenciales y no construyen estrategias eficaces de solución de problemas. Al respecto, existe un gran número de investigaciones que constatan este problema, describimos algunos de los más representativos.

El III Estudio Internacional de Ciencia y Matemática,TMSS (Hart, K. 1998) muestra en los resultados de matemáticas, que incluso países desarrollados como Estados Unidos y Canadá están por debajo de la media mundial, en tanto que México está en los últimos lugares. Señala que en las aulas escolares existe una tendencia a priorizar definiciones, en lugar de construir ideas matemáticas más profundas como establecer relaciones esenciales, formar conceptos y resolver problemas. De modo que el alumno construya herramientas académicas exitosas que le aseguren trabajar en forma creativa e independiente.
Por su parte, una investigación realizada en escuelas públicas y privadas de educación básica en América Latina (Campistrous, L. 1999), comprueba que solo el 33 % de los alumnos motivo de estudio, son capaces de resolver problemas en los que hay que identificar una operación y ejecutarla.
En México, Una investigación realizada para explorar el concepto de función en estudiantes y profesores del nivel medio superior (Hitt, F. 1996), revela que en la solución de un problema las personas se orientan por la forma y no por el contenido de la situación. Los resultados de dicho trabajo coinciden con los de investigaciones realizadas en diversos países desde 1980, que muestran que los alumnos no aprenden la ciencia y la matemática que se les enseña.
Por nuestra parte, los resultados de la exploración del estado de desarrollo de habilidades matemáticas en 40 docentes de educación secundaria, muestran que solo el 30 % de los participantes refleja cierto desarrollo en las habilidades de comprender, comunicar y visualizar. Se puede ver que en el mejor de los casos predominan los procedimientos algebraicos, en detrimento de la utilización de diversas formas de representar y argumentar una situación matemática. Estos aspectos reflejan un pensamiento no visual, que se acentúa cuando la solución de un problema requiere de este tipo de pensamiento, como es el caso de los problemas geométricos de construcción. Aspecto desfavorable al desarrollo de habilidades.

Objetivo fundamental del taller

Analizar diversas situaciones didácticas para promover el desarrollo de la habilidad de visualizar, de modo que los docentes las puedan instrumentar en su labor.
Actividades esenciales del taller
Presentación y análisis de las siguientes situaciones didácticas y solución de los problemas planteados:

1.-El problema de los puntos del Caballero de la Meré
2.-La clasificación de figuras geométricas

Resultado esperado.- Una explicación por escrito de una página, en la que los participantes expresen sus criterios acerca de la eficacia y pertinencia de estas situaciones didácticas para promover el desarrollo de la habilidad de visualizar.

Algunos aspectos del marco teórico conceptual

Visualizar consiste en trasladar a imágenes visuales la información que está dada en un determinado contexto y viceversa. Guzmán (Guzmán, M. 1996) considera que esta habilidad debe interpretarse como “Una forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas que develan las relaciones abstractas que al matemático interesan”. Por su parte, Duval (Duval, R. 1998) hace una diferenciación entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas y señala que si en el proceso de enseñanza aprendizaje se pasan por alto o se da más importancia a unas que a otras, se conduce a confusiones. “Las representaciones mentales cubren el conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación”.

Como se puede ver, estas tesis reflejan la importancia de visualizar para lograr que los estudiantes realicen la representación coordinada de un contenido matemático. En este sentido, la visualización asegura una visión global e integradora del saber matemático.

Sobre la base de estas ideas se estructuran las situaciones didácticas referidas, considerando además la etapa de orientación, ejecución y control que conforman la actividad docente. Estas etapas se pueden corresponder con el proceso de apropiación del conocimiento matemático (Brousseau, 1983) integrado con la acción, confrontación, validación e institucionalización por los estudiantes de sus propios trabajos. Estas situaciones didácticas para promover el desarrollo de la habilidad de visualizar, constan de una serie de problemas y de una secuencia didáctica para abordarlos.

Situaciones didácticas

1.-El problema de los puntos del Caballero de la Meré

GRADO: 2º

PROPOSITO: Explorar la noción de probabilidad a través de diversas actividades, así como utilizar diagramas de árbol para describir resultados de una experiencia aleatoria y resolver problemas.

CONTENIDO: Nociones de probabilidad

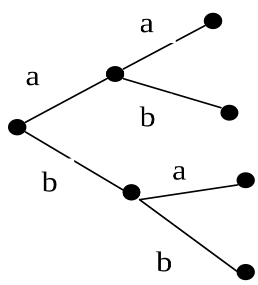
MATERIAL: Monedas, lápiz y papel

DESARRROLLO:

A).-Organizo el grupo en equipos y propongo por medio de una hoja de trabajo resolver el problema de los puntos del Caballero de la Meré (SEP, 1994), iniciando con la siguiente lectura comentada sobre este problema. El nacimiento de la probabilidad está asociado a los nombres de Blais Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665). Se dice que el Caballero de la Meré, un hombre culto aficionado a los juegos de azar, planteó ciertos problemas de juego a Pascal y éste a su vez los discutió con Fermat por correspondencia en el año de 1654. El siguiente es una variante del problema de los puntos o de la división de la apuesta.

Dos personas compiten en un juego hasta completar un cierto número de puntos, digamos que se trata de dos personas llamémosles A y B que juegan a los volados. Si cae águila A gana un punto, si cae sol B gana un punto. Juegan varios volados y se decide que gane el primero que complete 3 puntos. Pero cuando A lleva 2 puntos y B leva 1, el juego se interrumpe. ¿ Cómo debe dividirse la apuesta ?

B).-Cada equipo dispone de un tiempo razonable para resolver el problema y explicar el trabajo realizado, donde se presenten los argumentos que lo sustentan.



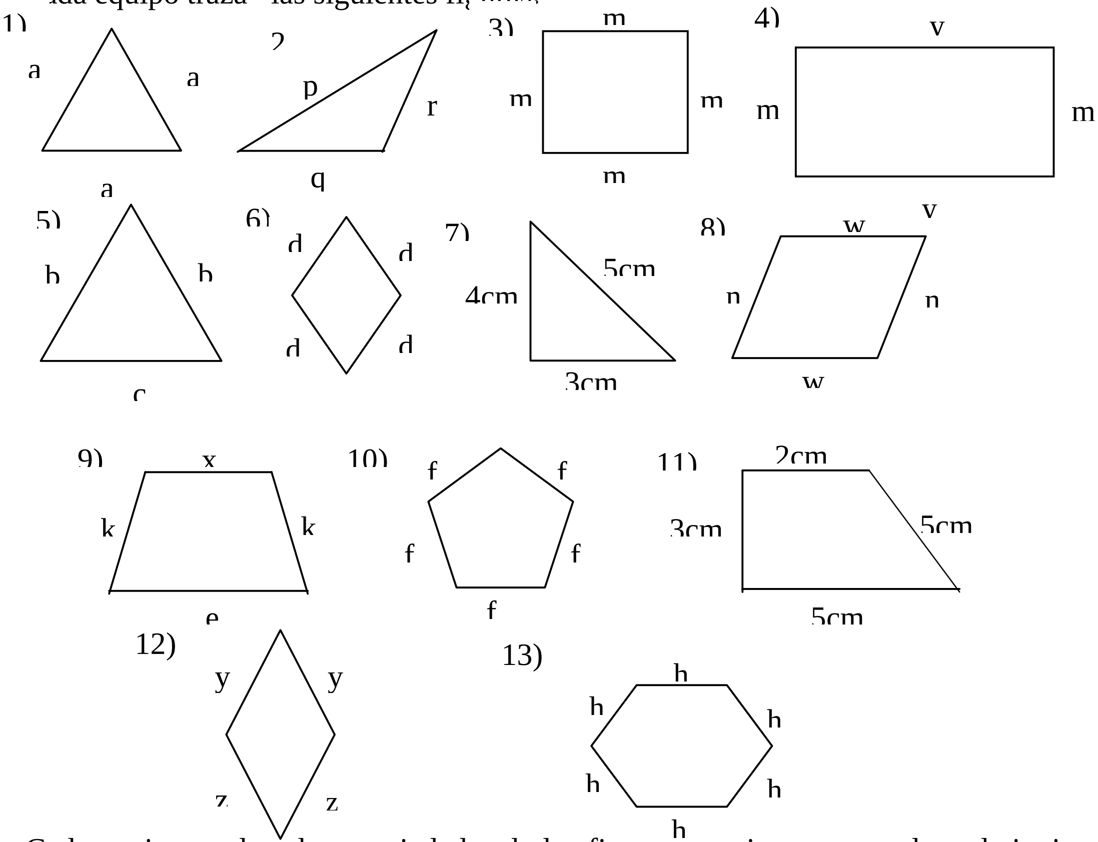
Es posible que algún equipo resuelva repartiendo la apuesta en partes proporcionales a los puntos acumulados, es decir 2/3 para el que lleva dos puntos y 1/3 para el que lleva uno. Esta es la solución dada por el Caballero de la Meré. Analizarla y argumentar por qué no es adecuada. Si ningún equipo propone esta solución, la induzco, para que los equipos la analicen.

Otro equipo puede ser que presente una solución similar a la realizada por Fermat, ¾ para el que lleva dos puntos y ¼ para el que lleva uno. Si en las explicaciones no se incluye el diagrama de árbol, lo propongo para que los equipos representen la información respectiva. Puede quedar en la forma siguiente.
Supongamos que se decide completar el juego y designamos con a cuando gana A y con b cuando lo hace B. Los posible casos son aa, bb, ab , ba.
Como se puede ver, en un solo caso gana B y en tres gana A.
Un tercer equipo puede ser que resuelva en forma similar a la trabajada por Pascal, razonando de esta manera. Si se decide jugar el siguiente punto pueden suceder estos casos: si gana A completa los tres puntos y se lleva la apuesta, si gana B los dos tienen el mismo número de puntos y se divide la apuesta en partes iguales. En estas condiciones se ve que A ya tiene ganada la mitad de la apuesta, debido a que ya tiene los dos puntos y la otra mitad se la puede llevar cualquiera de los dos o ambos con las misma posibilidades. Entonces se divide la segunda mitad de la apuesta entre los dos, de donde resulta que A gana ¾ y B ¼.
Otros equipos pueden presentar diversas vías de solución, se analizan tratando de llegar a consensos fundamentados considerando que todas las soluciones encontradas son importantes.
C).-Propongo que se concentren los resultados de la socialización de experiencias producto de las comparación, confrontación y argumentación en un cuadro resumen. En el que además, los alumnos expresen sus criterios acerca de su desempeño en esta actividad y el logro del propósito establecido, así como los conocimientos y experiencias personalizadas.
Esta situación didáctica no concluye aquí, queda abierta ya que de ella se deriva una serie de variantes para trabajarlas en forma análoga, en el momento oportuno. El diseño de las variantes y la búsqueda de otros temas relacionados con este contenido de probabilidad tanto de la matemática como de otras asignaturas, forma parte del taller.

2.- Estudiando polígonos
GRADO: Tercero
PROPOSITO: Explorar las propiedades de los polígonos, de modo que puedan clasificarlos considerando diversos criterios y resolver problemas
CONTENIDO: Triángulos y cuadriláteros. Propiedades de los triángulos, cuadriláteros y polígonos en general
MATERIAL: Juego geométrico, lápiz y papel
DESARROLLO:
A).-Organizo el grupo en equipos y propongo realizar una lectura analítica del siguiente texto.
Una de las características de la geometría es su elegancia, reflejada en obras artísticas como la pinturas y la esculturas, así como en construcciones que el hombre ha realizado desde la antigüedad, por ejemplo: la pirámide de Keops en Egipto y la pirámide del sol en México. De igual modo su elegancia se manifiesta en la forma original de presentar un contenido geométrico, la demostración de un teorema o la solución de un problema. Como se puede ver en uno de los trabajos del gran matemático Leonhard Euler (1707-1783) en el que encontró que en todo triángulo el circuncentro, ortocentro y baricentro son colineales. En su honor la recta que pasa por estos tres puntos se le llama recta de Euler. Otro de los aspectos relevantes de esta rama de la matemática, es que ayuda a orientarse y a comprender la naturaleza del mundo que nos rodea.

Una de las acciones importantes en el estudio de la geometría es la comparación, como un proceso básico que permite establecer relaciones entre los objetos, considerando las características que se pretenden estudiar. La comparación favorece la conexión de ideas y su representación, de manera que se pueda pasar a la clasificación. La clasificación consiste en formar grupos, clases o categorías de objetos sobre la base de sus características esenciales. En matemáticas y en particular en geometría, al estudiar los polígonos se pueden clasificar de diferente manera, aplicando diversos criterios como: número de lados, medida de sus lados, medida de sus ángulos, el paralelismo de sus lados, la perpendicularidad de sus diagonales, el número de ejes de simetría, etcétera.

B).- Cada equipo traza las siguientes figuras:



C).- Cada equipo explora las propiedades de las figuras anteriores y completa el siguiente cuadro, con las expresiones SI, NO o bien con otras respuestas si así lo amerita el caso.

	Fig 1	**Fig. 2**	**Fig, 3**	**Fig. 4**	**Fig. 5**	**Fig. 6**	Fig. **7**	Fig. **8**	Fig. **9**	Fig **10**	Fig. **11**	Fig **12**	Fig **13**
No. De lados													
No. De vértices													
Todos los lados iguales													
Dos lados iguales													
Lados opuestos iguales													
Dos pares De lados iguales													
Todos los lados desiguales													
Lados opuestos paralelos													
Dos pares de lados paralelos													

No tiene lados paralelos													
Dos pares de lados iguales consecutivos													

D).-Cada equipo reúne los polígonos en grupos, de acuerdo a las siguientes características y les asigna un nombre. En sesión plenaria confrontan sus resultados y los validan con argumentos.

nombre asignado Grupos formados

1.-Polígonos que tienen el mismo número de lados. _____________ ________________
2.-Figuras con 4 lados y no tienen lados paralelos. _____________ ________________
3.-Polígonos de cuatro lados iguales. _____________ _______________
4.-Polígonos de 4 lados y dos pares de lados paralelos.___________ _______________
5.-Figuras de cuatro lados con diagonales iguales. _____________ _______________

E).-Se cierra esta parte de la situación, en forma similar a la propuesta en el inciso C de la situación 1.

Algunos resultados

Las experiencias de la ejecución de este taller con 80 profesores de matemáticas de educación secundaria, en el estado de Guerrero, México, señalan que las actividades estructuradas de esta forma aseguran una mejor comprensión de las recomendaciones didácticas establecidas en los materiales de apoyo al docente y una visión integradora y sistematizadora de los saberes matemáticos. Por lo que es necesario incorporar el desarrollo de la habilidad de visualizar, en la actividad matemática. Además, esta clase de actividades promueve la implicación de los estudiantes en su aprendizaje de manera que se responsabilizan de las acciones realizadas, fomentando una cultura matemática en la que predomina el trabajo en colectivo encaminado al desarrollo cognoscitivo independiente.
Por su parte, la personalización de experiencias de educadores de varios países que asistieron a este taller en las actividades de RELME 15, reflejan la pertinencia de dicho taller para consolidar conocimientos y desarrollar habilidades. Principalmente, la habilidad de visualizar y la de comunicar. En este sentido manifestaron particular interés en la forma de cómo se aborda “El problema de los puntos del Caballero de la Meré” y la exploración de las propiedades de los polígonos, que se expone en el inciso C de la situación didáctica estudiando polígonos. Ya que favorecen la confrontación y validación de conocimientos.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas de la enseñanza*. versión en español del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México, D.F.

Campistrous, L. (1999). *¿Qué enseñan los problemas?* Resúmenes de la XIII Reunión de Matemática Educativa, Santo Domingo.

Chevallard, Y. et al, (1998). *Estudiar matemáticas.* SEP, México, D.F.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. en Investigaciones en Matemática Educativa II CINVESTAV-IPN, Iberoamérica, México, D. F.

Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Popular S.A, Madrid.

Hart, K. (1998). *Debe ser mejor lo que tenemos ahora. ¿Pero lo es?* en Investigaciones de la Matemática II, Iberoamérica, México, D.F.

Hitt, F. (1998). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum*. Educación Matemática, Vol. 10, No. 2, Iberoamérica, México, D.F.

SEP, (1994). *Libro para el maestro de matemáticas de educación secundaria*, México, D.F.

La geometría del círculo: Un camino hacia la demostración

Susana Victoria Barrera, Homero Flores Samaniego
Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM. México
suvictor@servidor.unam.mx ahfs@servidor.unam.mx

Resumen
La demostración en el estudio de las matemáticas es un factor importante para la aceptación de hechos y relaciones por parte de la comunidad matemática. También es importante para conformar el pensamiento matemático de nuestros alumnos. Asimismo, por lo general, nuestros alumnos se enfrentan a la demostración de una manera muy abrupta: en el nivel medio superior, a través de la geometría; y en el nivel superior en prácticamente todas las ramas de las matemáticas. Estudios sobre la comprensión de la demostración y la capacidad de escribir demostraciones por parte de los estudiantes han arrojado resultados poco alentadores. Con el surgimiento de programas de cómputo de geometría dinámica, es posible acercar al estudiante a la demostración mediante la exploración dinámica de las situaciones geométricas. Esto nos permite hacer que el alumno forme conjeturas e intente validarlas como un primer acercamiento a la demostración en geometría (Giamati, 1995). En particular, la geometría del círculo, tratada con un paquete de geometría dinámica, permite acercar al alumno a la demostración de una manera más amable. El presente taller consiste en una serie de actividades con El Geómetra (versión en español del programa Geometer's Sketchpad) en las que el alumno estudia la geometría del círculo, repasa temas de geometría ya vistos (como semejanza) y adquiere cierta experiencia en la demostración de teoremas geométricos. Las actividades pretenden mostrar a los asistentes al taller cómo se puede llevar al alumno del nivel 1 o 2 al nivel 3 de desarrollo según la teoría de van Hiele (NCTM, 1988, Senk, 1989).

Introducción

El círculo es una de las figuras más interesantes que se conocen. En muchos aspectos, la naturaleza se esfuerza por hacer las cosas circulares. El planeta en donde habitamos tiene una forma que se parece mucho a una esfera, el equivalente en tres dimensiones del círculo. Todo se da en ciclos: las estaciones, los días, las mareas. Las fases de la luna se repiten cada 28 días. Las cadenas alimenticias se inician y terminan en un mismo punto. Las ondas que se forman en la superficie de un lago cuando cae una piedra en él tienen forma de círculo, al igual que los discos compactos y las llantas de bicicleta. Si cortamos a la mitad muchas frutas, como la naranja o la sandía, obtenemos una sección transversal circular. En la historia de la humanidad, el círculo ha venido a ser uno de los hallazgos más importantes: el ser humano dio un gran salto en su evolución cuando descubrió la rueda.
En el presente taller estudiaremos algunas propiedades del círculo y los teoremas que de ellas se derivan, en un acercamiento a la demostración en matemáticas, un tema cuya comprensión es bastante difícil (Senk, 1985; Moore, 1994, Battista y Clements, 1995). Las actividades se realizarán con ayuda del paquete de geometría dinámica El Geómetra (versión en español del Geometer's Sketchpad) que, como cualquier paquete de geometría dinámica, permite hacer exploraciones que llevan a la formación de conjeturas (Giamati, 1995); está diseñado para profesores de Bachillerato (grados 10-12 o polimodal en Argentina) y tiene una duración de 6 horas.
El material que presentamos forma parte de una propuesta de enseñanza de la geometría que los autores hemos venido desarrollando en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, y nos servirán para hacer una reflexión sobre la influencia de las nuevas tecnologías en el proceso enseñanza-aprendizaje y la teoría de los van Hiele sobre el aprendizaje de la geometría (NCTM, 1988, Senk, 1989).

Propuesta de enseñanza y actividades

La propuesta de enseñanza está basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1997) y en algunos elementos originales derivados de las particularidades de la experiencia de los autores y de las características de nuestros alumnos (niveles 10-12, Polimodal) (Flores y Victoria, 1999, Flores, 2001). Básicamente se trata de presentar a los alumnos una serie de actividades en las cuales tienen que resolver algunos problemas y responder algunas preguntas. Las actividades se llevan a cabo por parejas. En un principio, después de plantear la actividad, el profesor se limita a pasar con cada una de las parejas y aclarar dudas sobre la actividad si es el caso o animar a los estudiantes a realizar la actividad si están renuentes a hacerlo. Una vez que los alumnos se involucran en la actividad (proceso de Delegación), las cosas marchan por sí solas y el papel del profesor consiste en supervisar el trabajo de los estudiantes y proporcionarles algo de ayuda en el caso en que lo requieran (la asistencia del profesor debe ser mínima y limitarse a dar sugerencias). En el desarrollo de las actividades los alumnos utilizan su propio lenguaje para referirse a los conceptos implicados y a las relaciones entre éstos, el profesor, en sus intervenciones debe utilizar el lenguaje adoptado por la comunidad matemática (Institucionalización del conocimiento). Esta institucionalización del conocimiento se dará también, al final de la actividad, cuando el profesor o algún alumno, exponga al resto del grupo sus conclusiones y los resultados de la actividad.
Durante el desarrollo de las actividades se ponen en juego tres patrones que contribuyen a la construcción del conocimiento por parte de los alumnos: Acción, Comunicación y Validación. Cuando la actividad es clara o la estrategia para resolver un problema es evidente, los alumnos proceden a actuar (patrón de acción); cuando la forma de proceder o la solución no es clara para alguno de los alumnos, el otro procede a explicarle cuál es su propuesta de solución o de acción (patrón de comunicación); por último, cuando cada alumno del equipo tiene una estrategia o una solución distintas, se dispara el patrón de validación en el cual uno de los integrantes trata de convencer al otro de que su solución o su estrategia es correcta. Estos tres patrones se dan en diferentes órdenes y por lo general se traslapan.
En el caso del presente taller, las actividades corresponden a la séptima unidad del primer semestre de matemáticas (Geometría del círculo y la esfera) y se pensaron de modo que haya una mayor incidencia del patrón de validación, pues es éste el que nos permitirá desarrollar en los estudiantes un pensamiento reflexivo y crítico que será útil para fomentar su capacidad para hacer demostraciones matemáticas. Las actividades no corresponden completamente a las que hemos desarrollado con nuestros estudiantes pues, en este caso, pensamos en aplicarlas a profesores. En el caso de nuestros alumnos, debido a restricciones en los recursos, el uso del software es limitado y sólo lo utilizamos para hacer algunas presentaciones ante el grupo, los alumnos no tienen acceso a un laboratorio para hacer las actividades (en el aula utilizamos una calculadora TI-92 y un *viewscreen* para proyectar la pantalla de la calculadora en el pizarrón). Las actividades se desarrollan utilizando regla y compás. Junto con otras, las actividades del presente taller, fueron realizadas en un curso de geometría para profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades (La Enseñanza de la Geometría con El Geómetra, febrero 2001) que tuvo una duración de 20 horas. Originalmente, el taller cuenta con diez actividades sobre la geometría del círculo, en el

presente artículo sólo incluimos las cuatro primeras, que fueron las que alcanzamos a realizar en el taller de RELME 15. Las actividades son las siguientes:

Actividad 1

- ¿Que relación de longitudes existe entre el radio y el diámetro?
- ¿Cuál es la cuerda más grande en el círculo? ¿Cómo lo explicarías a un estudiante?
- Dibuja un círculo y traza en él un ángulo central.
- Mide el ángulo central y la longitud del arco que determina. ¿Son iguales los valores? Si la respuesta es negativa explica a qué se debe esta diferencia.

Actividad 2

- Dibuja un círculo con centro en O.
- Traza un ángulo central AOB.
- ¿Cuánto mide el arco AB en grados?
- Dibuja un punto C sobre la circunferencia que no esté en el arco AB. Une con segmentos los puntos C y A y los puntos C y B de manera que formes un ángulo inscrito ACB. ¿Cuánto mide?
- Arrastra ahora, por turnos, los puntos A, B y C. ¿Qué relación hay entre un ángulo central y el ángulo inscrito determinado por el arco del ángulo central? (En este caso entre el ángulo AOB y el ángulo ACB).

Actividad 3

- Traza un círculo con centro en O y dibuja dos radios OA y OB.
- Traza la cuerda AB para formar el triángulo AOB. ¿Qué clase de triángulo es? ¿Cómo son los ángulos de la base?
- Prolonga el radio OA hasta que corte a la circunferencia en el punto C, de manera que AC sea un diámetro. Luego une con una cuerda los puntos CB. ¿Qué clase de ángulo es ACB?
- ¿Qué clase de triángulo es ACB? ¿Cómo son los ángulos OCB y OBC?
- ¿Qué relación hay entre los ángulos COB y AOB?
- ¿Qué relación hay entre los ángulos OCB, OBC y COB?
- Utiliza las dos últimas igualdades que encontraste, despeja COB de ambas expresiones e iguálalos ¿Qué concluyes?

Actividad 4

- Construye la figura siguiente:

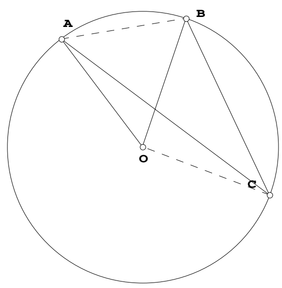


Figura 1

- ¿Cuánto suman los ángulos ACB, CBA y BAC, y los ángulos AOB, OBA, y BAO? Escribe las expresiones.

- ¿Qué relación hay entre los ángulos CBA, OBA y CBO; entre los ángulos BAO, BAC y CAO; entre los ángulos OCA y CAO; y entre los ángulos CBO, OCA y ACB? Explica tus respuestas. Escribe las relaciones.
- Al combinar las dos expresiones del primer inciso tenemos que

ACB + CBA + BAC = AOB + OBA + BAO

- Si ahora sustituimos las expresiones que hallaste para los ángulos CBA y BAO en la expresión anterior obtenemos:

ACB + OBA + CBO + BAC = AOB + OBA + BAC + CAO

- Si cancelamos los ángulos OBA y BAC que aparecen en ambos lados de la expresión y utilizamos las dos últimas expresiones obtenidas en el segundo inciso llegamos a que: 2ACB = AOB

  que es la expresión que estamos buscando.
- Si ahora colocas los puntos A, B y C de tu dibujo de modo que el centro quede dentro del ángulo inscrito, ¿se seguirán cumpliendo las relaciones anteriores? Explica tu respuesta.

Resultados

Según la teoría de los Van Hiele (NCTM, 1988, Crowley, 1987), el pensamiento geométrico de los estudiantes pasa por cinco niveles:

Nivel 0 (Visualización): El estudiante identifica, nombra, compara y hace operaciones con figuras geométricas según su apariencia.

Nivel 1 (Análisis): El estudiante analiza figuras en términos de sus componentes y relaciones entre éstas, y descubre empíricamente propiedades y reglas de una clase de figuras.

Nivel 2 (Deducción Informal): El estudiante interrelaciona lógicamente propiedades y reglas ya descubiertas utilizando argumentos informales.

Nivel 3 (Deducción): El estudiante prueba teoremas de manera deductiva y establece interrelaciones entre redes de teoremas.

Nivel 4 (Rigor): El estudiante establece teoremas en diferentes sistemas de postulados, y analiza y compara tales sistemas.

En las evaluaciones hechas a nuestros alumnos (dos grupos de 42 alumnos cada uno) con respecto al tema de Círculo y Esfera, después de realizar las actividades, es posible darse cuenta que la mayoría de nuestros alumnos (alrededor de un 70%) se podrían ubicar en el Nivel 2 de van Hiele. Mientras que un 10% se podría ubicar en el nivel 3. El resto podría clasificarse en algún punto entre los niveles 1 y 2.

Curiosamente, tanto los profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades (12 en total que tomaron el curso) como los asistentes al taller en RELME (8 en promedio), en su mayoría, mostraron estar en el nivel 2 o entre éste y el nivel 1. En RELME un argumento muy socorrido era, por ejemplo, “los segmentos son paralelos porque si yo recorro éste (con la calculadora arrastra el segmento en cuestión) y lo coloco sobre este otro, ambos coinciden, ¿ve?”. Algo no muy alejado de nuestros alumnos.

Conclusiones

En nuestra experiencia, creemos factible fomentar un pensamiento deductivo en nuestros alumnos si los enfrentamos a situaciones en las cuales tengan necesidad de explicar y de validar sus conjeturas y sus conclusiones. Algo que por lo general no se hace en un salón de clase. Si se hace una labor sistemática en este sentido es posible llevar a nuestros alumnos al nivel 3 de van Hiele, al final del ciclo (grado 12).

Ahora bien, la experiencia con este taller y otros parecidos destinados a profesores de matemáticas de Nivel Medio Superior (Polimodal en Argentina), nos dice que nuestros docentes están en un nivel de pensamiento geométrico muy parecido al de nuestros alumnos, lo cual nos pone ante un problema que tiene que ver con la preparación y la formación de nuestros profesores. Un rubro que ha estado muy descuidado en nuestros países latinoamericanos.

Referencias bibliográficas

Battista, M. T. y D. H. Clemens (1995). Geometry and Proof, *The Mathematics Teacher*, vol. 88, núm. 1, 48-54.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought, *Learning and Teaching Geometry, K-12*, NCTM, Reston, VA.

Flores, A. H. (2001). *Propuesta de instrumentación didáctica para la enseñanza del concepto de función*, Trabajo de tesis para la obtención del grado de Maestría en Ciencias, CINVESTAV-IPN, México (sin publicar).

Flores, A. H. y S. Victoria (1999). Brousseau in Action: Didactical Situation for Learning how to Graph Functions, *Memorias de la Cuarta Conferencia de la Asian Technology Conference in Mathematics*, Guangzhou, China. ERIC ED45036

Giamati, C. (1995). Conjectures in *Geometry* and The Geometer's Sketchpad, *The Mathematics Teacher*, vol. 88, núm. 6, 456-458.

Moore, R. C. (1994). Making the Transition to Formal Proof, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

NCTM (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents, *Journal for Research in Mathematics Education*, Monografía Núm. 3.

Senk, S. L., (1985). How Well Do Students Write Geometry Proofs?, *Mathematics Teacher*, septiembre, 448-456.

Senk, S. L., (1989). Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20: 309-321.

El plegado como recurso didáctico en la enseñanza de la geometría

Fernando Villarraga P.; María I. Romero R; Carlos Ochoa C.; Milton Lesmes A.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. Colombia
camicy@navegante.net.co

Resumen
Se pretende potenciar el gusto e implementación de los elementos de la geometría, su enseñanza y aprendizaje en los futuros docentes de educación básica, mediante el enfoque de geometría activa partiendo de la actividad del alumno y de su confrontación con el entorno.
Es una necesidad enfatizar el desarrollo del pensamiento espacial hacia la formación integral del ser humano, la geometría desde la exploración activa y la modelación del espacio, permite el proceso cognitivo de interacciones desde lo intuitivo o sensorio-motor a un espacio conceptual abstracto.
El ambiente de trabajo es la geometría plana; se toma el punto, la línea y el plano como términos no definidos, las relaciones entre dichos conceptos se describirán mediante axiomas que se enuncian a partir de la acción. Actuaremos sobre hojas de papel, realizando pliegues y perforaciones, estableciendo conexión natural entre las analogías: Hoja-Plano, Pliegue-Línea, Punto-Perforación, con miras a construir conceptos de isometrías.

Justificación

El estudio de la geometría en los currículos de matemáticas escolares se había descuidado por múltiples factores; en la actualidad, el interés por la geometría ha aumentado en los profesores de matemáticas dado que ella se constituye como componente primordial del currículo de matemáticas pues el conocimiento, la intuición y las relaciones geométricas son útiles en la cotidianidad y su conexión con otros temas matemáticos y otras materias escolares.
La geometría es una herramienta que ayuda a representar y describir de forma organizada el mundo en que vivimos; su aprendizaje permite que el niño investigue, experimente y explore objetos de uso cotidiano, en el desarrollo de la percepción son de gran ayuda los ejercicios que conducen a visualizar, dibujar y comparar figuras.
El estudiante que indaga sobre patrones y relaciona con modelos comienza a reconocer las propiedades de las figuras y va agudizando la intuición y el conocimiento que subyacen en los conceptos espaciales. Las experiencias con objetos manipulables, permiten al niño desarrollar estructuras conceptuales complejas sobre los elementos y sus propiedades al tiempo que construye de forma natural el vocabulario inherente a la geometría. El lenguaje geométrico no debe ser el centro de atención de un programa, ya que este debe surgir de un modo natural a través de actividades sencillas que impliquen exploración y experiencias concretas.
Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias considera la inteligencia espacial y plantea que es un agente esencial para el pensamiento científico, dado el potencial que tiene para representar y manipular información en el aprendizaje y la resolución de problemas. El manejo de la ubicación, la orientación y la distribución de espacios es un factor primordial en personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial, es un hecho que la mayoría de profesiones requieran de este tipo de personas.
Este proyecto está en concordancia con la propuesta de Renovación Curricular y con el énfasis en la geometría activa como alternativa para establecer el estudio de los sistemas geométricos, ya que de acuerdo con el MEN (1998): “se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aún

de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de “ hacer cosas”, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente construidos a un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y símbolos formales”.

Antecedentes

Este proyecto surge de reflexiones sobre el quehacer del estudiante cuando aprende geometría; las deficiencias encontradas motivaron el cuestionamiento de la metodología y la necesidad de su transformación; para esto, se buscó la manera para que el estudiante tuviera la posibilidad de investigar, experimentar y explorar objetos de uso cotidiano y materiales físicos, para desarrollar su percepción espacial. La aplicación de la nueva metodología se inicia en la asignatura de geometría elemental del proyecto curricular de Licenciatura en matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ya que el énfasis en la parte formal sintáctica no permitía en la mayoría de los alumnos el desarrollo del pensamiento espacial.
Los primeros avances de la propuesta metodológica se presentan como cursillo bajo el nombre de “Papiroflexia e Isometría”, en el *XI encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* llevado a cabo en la Universidad Pedagógica Nacional en el mes de junio de 2000; la propuesta despierta el interés en los participantes, porque induce a la formulación de axiomas, conceptos y teoremas de la geometría elemental. Con la experiencia obtenida en este encuentro y los resultados obtenidos en las clases de geometría elemental en el proyecto de Licenciatura en Matemáticas aumenta el ánimo por seguir realizando investigaciones conducentes al desarrollo de la nueva metodología. Con los avances obtenidos en esta parte del trabajo se presenta al *Congreso Nacional de Matemáticas* 2000 que fue aprobado como curso denominado *“El Plegado como Recurso Didáctico en la Enseñanza de la Geometría”*.

Marco Conceptual

La recuperación del sentido espacial intuitivo en la geometría es una necesidad ineludible**;** Gardner (1997) considera la espacial como una de las inteligencias múltiples, y afirma que el pensamiento espacial es primordial para el desarrollo del pensamiento científico, dado que el resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es fundamental en personas que tienen bien desarrollado su pensamiento espacial.
La construcción de pensamiento geométrico implica un proceso lento que va desde las formas intuitivas iniciales, donde la capacidad lógica de los estudiantes de los primeros niveles les permite extraer inferencias y llegar a deducciones lógicas a partir de situaciones cotidianas, hasta formas deductivas finales en las que el alumno comprende las figuras y sus propiedades con mayor profundidad, teniendo en cuenta las numerosas aplicaciones que la geometría tiene en la actividad humana, de forma tal que se desarrolla la intuición geométrica y pueda de esta manera apoyarse en experiencias al trabajar con ideas abstractas. El modelo de Van Hiele, al proponer los cinco niveles para el desarrollo del

pensamiento geométrico muestra esta evolución y una forma de estructurar el aprendizaje de la geometría.
El soporte teórico conceptual matemático esta enmarcado en el texto “Momento Geométrico” del profesor Carlos Orlando Ochoa C. y desde luego en la obra “Elementos” de Euclides, donde presenta gran parte del conocimiento geométrico, no como un conjunto desorganizado de resultados empíricos, sino como una cadena bien organizada de teoremas que a partir de unas pocas hipótesis iniciales, se demuestran con las leyes de la lógica.

Metodología
Diseño Cuasi-experimental que incluye el desarrollo de talleres teóricos – prácticos con la pretensión de generar espacios en donde el participante aprenda “haciendo”, un ejemplo de ello son las siguientes preguntas para introducir los axiomas correspondientes a los términos no definidos:

- Practique dos perforaciones en la hoja de papel y realice el máximo número de pliegues. Esto induce al axioma: *Por dos puntos pasa una recta y solamente una.*
- Realice un doblez, describa los subconjuntos determinados por ese doblez. Induce el axioma: *Toda línea determina dos subconjuntos del plano no vacíos y disjuntos.*
- Dadas ciertas indicaciones, dar el significado de *estar entre.*

Propósito
Implementar un modelo metodológico para la enseñanza de la geometría mediante actividades de plegado y perforado que permitan la coordinación entre los tratamientos específicos al registro de figuras y los del discurso teórico en la lengua natural.

Contenidos

- De los términos no definidos
  - Mis Primeros Axiomas
  - Mis Primeros Resultados
- Las Reflexiones
  - Línea o Espejo
  - Rayos y Ángulos
  - Bisectrices y Mediatrices
  - Otros Axiomas
  - Congruencia
  - Conjugación en Geometría
- Teoremas de Congruencia
  - Congruencia y comparación de Segmentos
  - Congruencia y Comparación de Ángulos
  - Congruencia de Triángulos
  - Algunos Elementos de un Triángulo
- Isometrías
  - De los Productos Finitos de Reflexiones
  - Rotaciones
  - Ángulo Elemental, Ángulo Orientado y Ángulo Trigonométrico

- Semi-giros
- Translaciones
- Paralelogramos
- Triángulos y Paralelogramos
- Reflexiones en Deslizamiento.

El Plegado Hoy

El efecto de la metodología implementada en el estudiante para profesor se resume en la elaboración de:

- Un álbum que contiene las diversas cuartillas de papel con los pliegues que dan cuenta de sus experiencias realizadas en el aula.
- Una síntesis de resultados donde se exhibe la fenomenología estudiada desde el punto de vista de la matemática, como culminación del proceso cognitivo de interacciones desde lo intuitivo o sensorio-motor a un espacio conceptual abstracto.
- Una carpeta que contiene los protocolos o relatorías de cada una de las sesiones desarrolladas por el grupo.

Vale la pena subrayar que esta actividad permite apropiarse de un espacio conceptual (la geometría elemental) por un lado y por el otro de una metodología que tiene la posibilidad de ser extendida al aula escolar.

Referencias bibliográficas

Bold, Benjamín (1969). *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them.* New York: Dover.

Blumenthal, Leonard (1961). *A Modern View of Geometry.* San Francisco: Freeman.

Campos, Alberto (1994). *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* Bogotá: Alberto Campos Editor.

Duval, Raymond (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano.* Cali Colombia: Universidad del Valle.

Euclides (1956). *The thirteen Books of the Elements. translated with introduction and commmentary by Sir Thomas L. Heath*. Vol. 1. New York: Dover.

Gardner, Howard (1997). *Estructuras de la Mente; La Teoría de las Inteligencias Múltiples.* México. Fondo de Cultura Económica.

Guggenheimer, Heinrich W. (1967) *Plane Geometry and its Groups.* San Francisco: Holden – Day, Inc.

Gutiérrez Santos, María Victoria (1992). *Notas de Geometría.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

MEN (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

MEPS (2000) *Papiroflexia e Isometría*. Bogotá: XI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. U.P.N.

MEPS (2000). *El Plegado como Recurso Didáctico en la Enseñanza de la Geometría.* Bogotá: Congreso Nacional de Matemáticas 2000.

Moise, Edwin (1976).*Geometría Elemental desde un punto de vista avanzado.* México:CECSA

Ochoa Castillo, Carlos Orlando (1999). *Momento Geométrico*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Polya G. (1969). *Como plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Perímetro área y volumen del juego a la reflexión

María Antonia Tellechea, Beatriz Villabrille de Bessega
Escuela Normal Superior Nº 7”. Instituto Superior de Formación Docente “Pedro Poveda”. Buenos Aires. Argentina
beavillabrille@uole.com matellechea@hotmail.com

Resumen
En este trabajo se propone un taller de resolución de actividades de geometría para Profesores del 1º, 2° y 3° ciclo de EGB. La propuesta fundamental de este taller es trabajar los conceptos de perímetro, área y volumen mediante la utilización de distintos recursos y materiales convencionales y no convencionales. A través de la Visualización, la reproducción de formas, la creación de nuevas formas y volúmenes y el análisis de las mismas es posible llegar a conclusiones generales. Con los puzzles, entre ellos el Tangram, el sinfín y los policubos se trabaja de manera progresiva para poder probar e incorporar conceptos y propiedades predeterminadas.

Marco teórico

La enseñanza de la geometría debería comenzar en edades tempranas y desarrollarse a lo largo de toda la escolaridad. El desarrollo del sentido espacial está íntimamente ligado al de las relaciones y conceptos geométricos entre los que se encuentran los de dirección, orientación, forma, tamaño.
La importancia de la geometría en la enseñanza es que permite a los alumnos describir e interpretar el mundo real. Desarrolla la capacidad de conjeturar, preguntar, refutar e ir paulatinamente construyendo un modelo axiomático. Revaloriza el lenguaje gráfico.
La secuencia de las actividades se ajusta al modelo de Van Hiele. El pensamiento geométrico se construye según este modelo a través de un lento proceso que sigue una evolución desde el pensamiento inicial de carácter intuitivo hasta el pensamiento de carácter deductivo. A cada nivel de este desarrollo le corresponde su propia forma de rigor.
La Visualización, la reproducción de formas, la creación de nuevas formas y volúmenes y el análisis de los mismos permite llegar a conclusiones generales a partir de dicho estudio.
Los conceptos perímetro y área fueron desarrollados, no como entes aislados, sino mediante las relaciones que mantienen unos con otros. El mismo criterio se aplicó para los conceptos de área y volumen.

Nuestra propuesta

Los objetivos propuestos para este taller fueron:

- Trabajar los conceptos de perímetro, área y volumen .
- Manipular diferentes materiales y experimentar para permitir ratificar o rectificar propiedades ya conocidas o bien supuestas a priori.
- Reproducir en el plano figuras y cuerpos.
- Construir cuerpos en el espacio a partir de representaciones planas.
- Elaborar conclusiones a partir de la observación visual.
- Inferir propiedades deducidas a partir de semejanzas y diferencias
- Desarrollar la creatividad del alumno.

Por medio de la visualización, mediante el análisis, la reproducción de formas, la creación de otras nuevas formas y volúmenes y el análisis de los mismos es posible llegar a conclusiones generales.
La característica de este taller fue presentar actividades que se realizaron en forma gráfica o con manipulación de diferente material concreto para luego poder analizar los resultados, reconocer conceptos geométricos, formular conclusiones y llegar a optimizar las soluciones propuestas a los problemas planteados.
Los profesores participantes propusieron llevar las actividades aquí planteadas a sus clases.
Las actividades trabajadas se pueden presentar en el aula, ya sea como motivación o como desarrollo de contenidos específicos.

Desarrollo del taller

♦ Etapa 1: El primer vuelo

Es fundamental en este momento la observación y la visualización de propiedades geométricas y algebraicas en el plano.
Algunas de las actividades propuestas en esta etapa fueron:

Dados 3 segmentos a= 5cm , b= 3 cm c= 4 cm.
a) Construya en el geoplano o dibuje en la plantilla de puntos:
1º) a^2 *2º)* $b^2 + c^2$ *3º)* $(b + c)^2$
b) Compare las áreas y establezca las relaciones que encuentre entre las áreas halladas.
c) Construya con los segmentos dados un triángulo. ¿Qué tipo de triángulo es?.
d) De acuerdo con lo observado enuncie sus conclusiones.
e) La terna (3,4,5) se denomina terna Pitagórica. ¿Por qué? ¿Conoce otra?
f)¿Qué contenidos matemáticos puede trabajar con esta actividad?

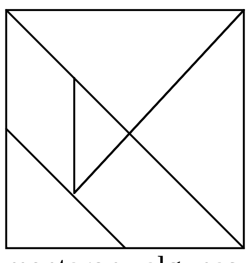
En este caso se apuntó a la interpretación geométrica de expresiones algebraicas. Por medio del análisis de las propiedades de las figuras obtenidas, los participantes del taller debieron visualizar geométricamente propiedades algebraicas e identificar cuáles son los contenidos matemáticos trabajados, así como la posibilidad de llevar al aula una visión geométrica del álgebra.

♦ Etapa 2: Planeando mas alto

Aquí trabajaremos *LOS ROMPECABEZAS O PUZZLES*. Desde su construcción, su manipulación y aplicación. Con este material es posible descubrir regularidades y formular generalizaciones comunes a diversos contenidos geométricos, como la independencia del perímetro para áreas fijas o la minimización del perímetro.
Todos presentan un reto atractivo, y resolverlo implica que el jugador se ha esforzado en pensar situaciones nuevas y experimenta una gratificante sensación. Los rompecabezas pueden ser acertijos de palabras o numéricos, si se trata de la composición de figuras se los llama puzzle.
Arquímedes estudió, y quizá diseñó, rompecabezas geométricos en el siglo III a.C.
En 1800, el vendedor de juguetes alemán Bestelmeier vendía piezas de madera que se encajaban en forma de cruz, y desde 1970 se han diseñado cientos de rompecabezas o puzzles poliédricos como el cubo mágico en los 80.

El **Tangrama o Tangram** chino, popular desde 1800, emplea siete piezas de forma geométrica (un cuadrado, un paralelogramo y cinco triángulos rectángulos isósceles), cortadas a partir de un cuadrado, para formar un sinfín de posibilidades de siluetas muy sugerentes de personas, animales y cosas.
En la antigüedad los ancianos Chinos llamaban a este juego “La Plaqueta de las Siete Astucias”. Sólo aquellos que posean paciencia e imaginación lograrán penetrar en un mundo en el que la belleza de las formas y la sutileza de las fantasías son una realidad. Se extendió en Europa a principios del siglo XI.
Para formar las figuras siempre se deben utilizar las siete piezas, ni una más ni una menos y nunca se deben superponer una sobre otra.
El mérito de la fórmula de división tangramática del cuadrado no está, sin embargo, en que las piezas que se obtienen produzcan figuras de distintas dimensiones o que puedan interpretar cosas diferentes, sino en que los mismos elementos geométricos den forma y expresión a las infinitas posiciones que la misma cosa puede asumir, haciendo que para dársela sea necesaria la asistencia de los 7 elementos que componen cada tangrama. Esta fórmula ha despertado el interés de los estudiosos más eminentes.
El valor educativo es importante si se aborda al juego de manera progresiva, de acuerdo con la edad del educando y los conocimientos previos. Es un juego que se puede trabajar desde muy temprana edad sin límite de nivel educativo, adecuando las actividades según corresponda y teniendo en cuenta la etapa dentro del modelo de Van Hiele en el que se encuentren los alumnos en relación a la temática abordada.
En primera instancia del taller, es fundamental presentar siluetas en la misma escala que las piezas del juego.

- La etapa introductoria consiste en la ***observación*** de las 7 piezas, se nombran, clasifican y se las hace superponer con las piezas dibujadas en la hoja.
- Luego la ***construcción libre*** sin la restricción de utilizar todas las piezas.
- Posteriormente la ***reconstrucción parcial*** del cuadrado. Se presentan tres o cuatro plantillas del cuadrado con las piezas dibujadas. En la primera que falten dos piezas, en la segunda cuatro y la última sólo 2 piezas dibujadas.
- Finalmente la ***reconstrucción total***, o sea el dibujo del cuadrado solo sin ninguna línea que indique el despiece.
- Luego nos abocamos a la formación de figuras de acuerdo con modelos dados. Para las figuras siempre se deben utilizar las siete piezas, ni una más ni una menos y nunca se pueden superponer una sobre otra. A partir de ahora surgen incontables actividades de geometría y aritmética.



Los participantes del taller comentaron algunas actividades realizadas por ellos y propusieron actividades para las que es posible la utilización de este material en el abordaje de los contenidos matemáticos propuestos.

Otro rompecabezas con el que trabajamos es el **Tetraminos**. Primero se construyen las fichas del rompecabezas. Cada ficha está formada por CUATRO cuadrados.
Este material permite verificar en forma experimental la independencia entre el área y el perímetro de las figuras halladas partiendo de áreas iguales.a través de la generación de todos los tetraminos posibles en el geoplano, y la comparación sus áreas y perímetros.
Con los rompecabezas se trabajan áreas fijas y perímetros variables, luego trabajamos con un elemento de distintas características, el sinfín que permite determinar figuras de diferente área con perímetro fijo y podremos emitir conclusiones referentes a la maximización del área.
El elemento sinfín está construido por segmentos iguales (trozos de sorbetes) enhebrados en un hilo a modo de collar. Trabajaremos con un sinfín de longitud 24, otro de 36 y otro de 42.
Las actividades propuestas conducen en forma experimental a optimizar la superficie máxima para perímetros iguales.
Con cada sinfín es posible construir rectángulos de los que se solicitó tabular los valores de la base, la altura y el área. Una vez obtenidas las tablas para los distintos sinfines, se pidió analizar si existe alguna relación entre la longitud del perímetro y el número de rectángulos que se puede generar, y realizar hipótesis acerca de la maximización del área.
El enunciado de conclusiones se finaliza con las conjeturas y análisis conjunto correspondientes a la duplicación de la base, de la altura, de la longitud del sinfín.

- Etapa 3**:** Navegando en el espacio

En la tercera etapa también trabajamos la observación y visualización, pero en el espacio.
La reproducción de cuerpos que llamaremos policubos pues se generan a partir de un módulo, que es un cubo. Se reproducen cuerpos en el espacio, según lo visualizado en el plano. Posteriormente pasamos a la reproducción en el plano de cuerpos construidos en el espacio.
Se forman los sólidos de Soma y se analizan diferentes propiedades.
Análogamente llegamos en forma experimental a la independencia entre el volumen y el área, ahora partiendo de *volúmenes iguales*.
Llegamos, en forma experimental a maximizar el volumen, partiendo de un área fija.
En esta última etapa se abordó el espacio tridimensional a través de la generalización de resultados bidimensionales obtenidos mediante la utilización de poliminos.
El planteo de actividades utilizando policubos permite la visualización espacial, que a veces es abandonada en la escuela.

Resultados obtenidos

Los concurrentes al taller se mostraron entusiastas frente a las actividades propuestas y trabajaron activamente. Cada docente-alumno sugirió la aplicación del material proporcionado por los expositores para el desarrollo de sus clases en los distintos niveles, proponiendo actividades para el nivel inicial, primario, medio, terciario y universitario.
La ductilidad y sencillez del material utilizado en este taller brinda la posibilidad de su utilización en diversos niveles de la enseñanza de la matemática. El docente puede abordar con él distintos contenidos, mediante actividades que permiten a los alumnos visualizar

propiedades por medio de la experimentación llevada a cabo con la manipulación del material concreto.
Los docentes participantes conocieron una forma de enseñar Matemática para que el alumno la valore y la aprecie. También que le resulte placentera, y por supuesto que le permita razonar y ser creativo.

A modo de cierre

La característica de este taller fue presentar actividades en forma gráfica y con manipulación de diferente material concreto para analizar los resultados, reconocer conceptos geométricos, formular conclusiones y optimizar las soluciones de los problemas planteados.
Con los puzzles, entre ellos el Tangram, el sinfín y los policubos se trabajó de manera progresiva para poder probar e incorporar conceptos y propiedades predeterminadas.
Se desarrollaron actividades para el aula, ya sea como motivación o como desarrollo de contenidos específicos, quedando abierto el diseño de nuevas actividades.
Cabe mencionar que también fue presentado este taller en el tercer año de la carrera de Psicopedagogía como primera actividad de la cátedra Didáctica de la Matemática, Instituto "Pedro Poveda" 2001, de Buenos Aires, Argentina. Los trabajos y los interrogantes aquí planteados fueron generadores de los principales contenidos de la asignatura como: enseñanza de espacio, medida, número y otros. Los alumnos manifestaron su asombro al poder abordar los contenidos teóricos y elaborar conclusiones desde la actividad matemática con material concreto.

Referencias bibliográficas

Francoise Boule. *Manipular, organizar y representar*.
Violeta Brenes, Ana L. Quesada. (1996). *Visualizando geométricamente algunos conceptos Aritméticos y Algebraicos*. X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Cayey, Ponce, Puerto Rico.
Aldo Bruno Pizzo (1995) *Reflexiones Acerca de la didáctica de la Matemática* Dirección de formación docente Continua. Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación y Cultura
Africa Martínez San Pedro: *La Geometría del movimiento*. Buenos Aires: Centro Poveda.
Africa Martínez San Pedro: *Otra cara de las Matemáticas*. Buenos Aires: Centro Poveda.
José Villella (1999). *Sugerencias para la Clase de Matemática*. Buenos Aires: Editorial AIQUE.
José Villella (1999). *¡Piedra libre para la Matemática!* Buenos Aires: Editorial AIQUE.
Enciclopedia Encarta 98 Microsoft.
Martin Gardner (1996). Revista Investigación y ciencia, sección: *Juegos matemáticos*.

Sitios web consultados

-http://www.educ.ar
-http://www.horizonteweb.com.ar
-http://www.nalejandría.com.ar
-http://www.jimena.es
-http://www.terra.es

Pensamiento Geométrico

Nivel Superior

La Geometría en la Argentina Indígena. Época Prehispánica

Oscar Sardella
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires. Argentina
osardella@hotmail.com

Resumen

Las investigaciones científicas actuales indican aspectos no conocidos y a veces inesperados acerca de estos pueblos que nos llama la atención. Hoy sabemos que fueron pueblos dinámicos, muy conocedores de sus tierras y que algunos de ellos alcanzaron un elevado nivel cultural. Establecida la antigüedad de los aborígenes en nuestro país, se los clasificarán en áreas culturales, eligiéndose la del Noroeste para su análisis, por ser la más importante del actual territorio argentino. Para ubicarnos y entender mejor estas culturas, se ha acordado que el período que abarca desde la aparición de las primeras culturas hasta la llegada de los incas, en tres grandes etapas, llamadas período temprano, período medio y período tardío. Luego se analizará como la geometría participó en las formas de vida y fundamentalmente en creaciones artísticas de estas culturas en los períodos mencionados. Se observará la geometrización de las formas naturales y las estilizaciones de los cuerpos de los animales. Tanto en las decoraciones más sencillas como en las más complicadas se notará una tendencia al uso de la simetría y al empleo de puntos, rectas, escalonados, triángulos, rombos, cuadrados, polígonos en general y una muy precisa combinación de estos, que parecen provenir del uso de los movimientos geométricos, constituyendo así verdaderas creaciones artísticas

Introducción

En los últimos años ha crecido el interés por el estudio de los pueblos aborígenes de América. Las investigaciones científicas nos indican aspectos no conocidos y a veces inesperados acerca de estos pueblos, que nos llama poderosamente la atención.
Es interesante destacar que este mundo indígena que se creyó durante mucho tiempo que constituía un mundo formado por tribus aisladas entre sí y de gran ignorancia, fue por el contrario dinámico, amplio y muy conocedor de sus tierras.
De acuerdo con los datos obtenidos por métodos como el carbono radiactivo, la antigüedad del hombre en territorio Argentino sería de unos 11000 años. En la actualidad se consideran distribuidas las culturas indígenas en la Argentina en cinco zonas fundamentales: Noroeste, Sierras Centrales, Pampa –Patagonia, Chaco y Litoral-Mesopotamia. Me ocuparé de la primera, llamada Noroeste, que abarca las provincias Salta, Jujuy, Tucumán, Catamarca, La Rioja, parte de Santiago del Estero y norte de San Juan, tal cual se indica en el mapa de la figura 1, aunque los límites exactos de las diferentes regiones no son fáciles de determinar. Esta región se caracterizó por tener la mayor densidad de población y nivel cultural de todo el territorio argentino. Recibió influencias de avanzadas culturas andinas y tuvo además una destacada metalurgia del bronce. Sus creaciones artísticas quedaron impresas en numerosos objetos que se han encontrado y permanecen en diferentes museos.

FIGURA 1

Algunos autores, para ubicar y entender mejor estas culturas han dividido el período que abarca unos 1700 años en tres etapas llamadas: 1) período temprano,. que va desde las primeras culturas hasta el año 650, 2) período medio, del año 650 al 850 y 3) período tardío, de año 850 a 1480.Luego habría que mencionar el período incaico, desde la llegada de los incas hasta la entrada de los españoles, el periodo hispano indígena, que es posterior al descubrimiento pero no a la conquista, en el cuál los aborígenes pudieron conservar su cultura y el período colonial, en que estos fueron asimilados al sistema institucional español

La geometría en estas culturas

Se analizará como la Geometría participó en las formas de vida y en las creaciones artísticas de estas culturas en los períodos prehispánicos.

En el período temprano las culturas de la región noroeste fueron llamadas: Tafí, Candelaria, Ciénaga, Alamita y Condorhuasi.

En la cultura Tafi, las viviendas estaban formadas por paredes de piedra y cada unidad habitacional se componía de un círculo de unos 20 m de diámetro alrededor del cuál existian otros círculos menores de 5 m de diámetro, Cada unidad estaba separada de la otra por unos 200 m. En la parte central de cada circulo se realizaban todas las tareas para su supervivencia. Las formas circulares aparecen también en los anillos de cobre que fueron encontrados en la zona. Típico de esta cultura fueron los menhires, que son cilindros de piedra, algunos de los cuales tienen figuras esculpidas y se encontraban en el centro de amplios recintos circulares y rectangulares.

La cultura Candelaria confeccionó vasos de cerámica decorados con variados dibujos geométricos, no utilizaron pinturas, pero si incisiones rítmicas, o sea que el dibujo se va repitiendo periódicamente a lo largo de toda la pieza En la cultura Ciénaga prevalece la cerámica de un color oscuro, negruzco y decorado por medio de incisiones.

Los motivos geométricos parecen estar tomados de guardas que son propias de los tejidos. Aparecieron vasos de cerámica de color natural algunos con dibujos geométricos pintados en rojo y otros blancuzcos con figuras incisas en negro. (Figura 2)

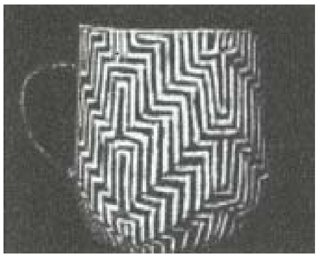


FIGURA 2

Como fueron hábiles metalúrgicos fundieron hachas en T, de distinto grosor según su uso gruesas como insignas y delgadas para sus tareas diarias. En la cultura Condorhuasi la cerámica fue muy variada. En general en la superficie exterior de los objetos encontrados aparecen dibujos en negro sobre fondo rojo. Los vasos tienen forma cilíndrica con figuras como rombos líneas verticales paralelas, ángulos y triángulos escalonados de color negro. En general la característica de esta cultura fue una distribución armónica de motivos geométricos con figuras equilibradas. Se encontraron recipientes de bases cuadradas y circulares, en algunos casos con patas y decorados con felinos humanizados.

En el período medio se destaca la llamada cultura Aguada que se caracterizó por un mayor desarrollo cultural que las del período temprano. Una metalurgia avanzada les permitió usar bronce antes de la llegada de los incas. Espirales, círculos, triángulos y formas rectangulares caracterizan al disco de bronce conocido como disco de “Lafone-Quevedo” que representa un personaje rodeado por dos felinos (figura 3).

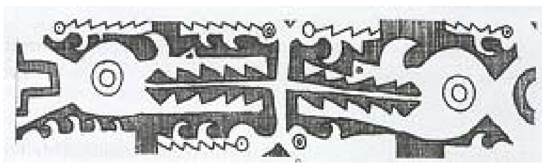


FIGURA 4

FIGURA 3

La figura de felinos aparece con frecuencia en distintas representaciones tanto argentinas como americanas. Las guardas en vasos de cerámica, que si bien representan a felinos,

permiten observar la gran variedad de figuras geométricas que usaron para obtenerla. En la figura 4 se puede apreciar una guarda de la cultura Aguada y observar la tendencia al uso de la simetría. En este caso eje vertical. La decoración característica se basa en el triángulo de color negro con bordes blancos sobre fondo rojo.
En el periodo tardío se detectaron las culturas Sanagasta, Belén y Santamaría que son las previas de las tribus diaguitas cuyo uso de la geometría en sus realizaciones analizaremos en detalle.
Aunque las investigaciones realizadas encontraron gran variedad de piezas que indican distintas etapas en el proceso de creaciones artísticas, seguiremos un orden gradual, comenzando por las realizaciones más simples hasta las más complejas.
El uso de puntos, rectas, ángulos, triángulos, reticulados y la tendencia hacia la simetría, aparecen tanto en las decoraciones más sencillas como en las más complicadas de los diaguitas Se pueden observar algunas muy simples que aparecen en la parte central de una taza, por ejemplo un rectángulo con pequeños segmentos separados entre sí que encierran una línea poligonal (figura 5) o cuadrados con sus diagonales (figura 6) o líneas en zig zag (figura 7) que podrían representar perfiles de montañas o estilizaciones de parte de una abundante fauna propia de la región que ocupaban.

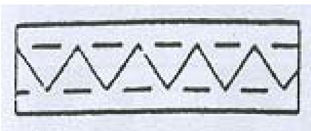


FIGURA 5

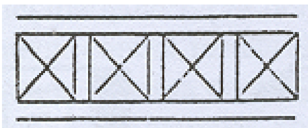


FIGURA 6

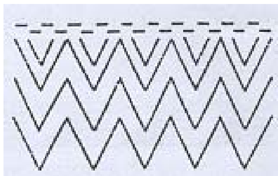


FIGURA 7

En objetos más trabajados aparece el triángulo (figura 8) y los reticulados (figura 9).

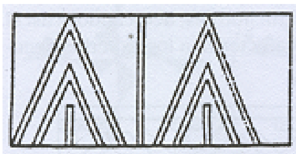


FIGURA 8

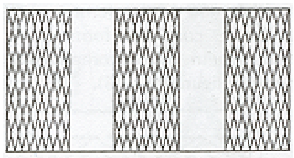
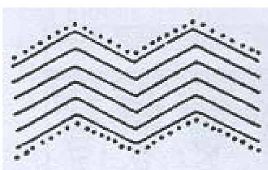


FIGURA 9

Es de hacer notar que los trazados son imperfectos, por la falta de instrumentos adecuados para realizarlos, pero revelan una cierta inclinación del hombre, desde sus orígenes a la decoración de sus utensilios y a la utilización de la geometría como base para presentarla.
En otros objetos aparece el elementos básico de la geometría: el punto, que acompaña a las rectas(figura 10) o como relleno de otros motivos geométricos (figura 11).

FIGURA 10


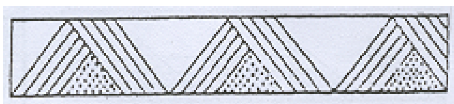


FIGURA 11

.
Probablemente las primeras composiciones decorativas aparecen las guardas, en la que se van repitiendo ciertas figuras geométricas fundamentalmente triángulos, en sus formas más

variadas, que indican el uso de las traslaciones que en esa época no se conocían como tales (figuras 12 y 13).

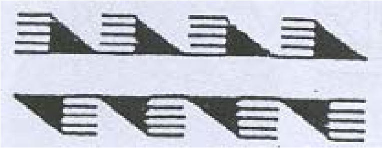


FIGURA 12

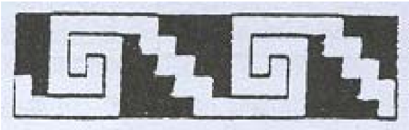


FIGURA 13

Las formas escalonadas contribuyeron a una mayor estética de en la decoración de las piezas que ellos fabricaban. Se pueden apreciar combinaciones entre figuras geométricas como rombos, uno dentro de otro, que podrían representar caras humanas estilizadas, cuadrados formando figuras cruciformes, acercándose todo al ritmo simétrico de la composición, que caracteriza a los expertos decoradores. (figuras 14 y 15).

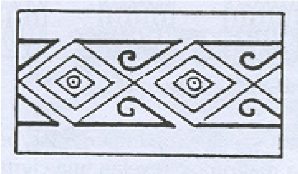


FIGURA 14

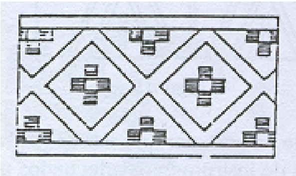


FIGURA 15

El triángulo fue usado como unidad de decoración, pues partiendo de uno de ellos, repitiéndolo, superponiéndolo, separarlos por líneas rectas. etc. formaron atractivas guardas, que hoy podríamos confeccionar aplicando al triángulo unidad los movimientos geométricos, traslaciones giros y simetrías, tal cuál lo hacen los diseñadores en la actualidad.

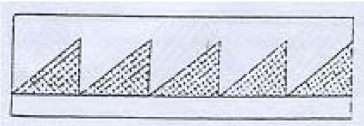


FIGURA 16

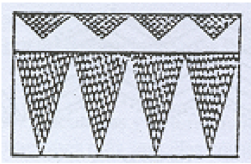


FIGURA 17

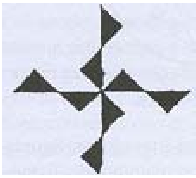


FIGURA 18

Así formaron guardas más complejas, que nos indican que pese a sus limitaciones en cuanto a técnicas y procedimientos, ya que no tenían instrumentos para dibujar previamente sus ideas, usaron la intuición para sus realizaciones, dejando impreso una sensibilidad por la belleza de las formas.

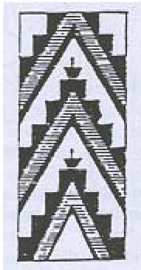


FIGURA 19

Las puntas de flecha aparecen representadas dentro de formas romboidales (figura 20) y las serpientes enroscadas por una combinación de líneas (figura 21).

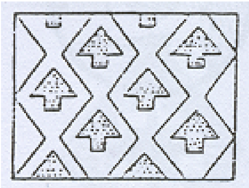


FIGURA 20

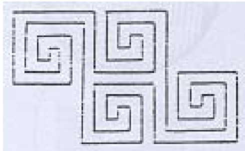


FIGURA 21

Las muyunas son piezas de piedra, arcilla o madera de forma circular y con pequeñas perforaciones en su centro, tienen una cara lisa y la otra apenas curvada, fueron utilizadas como contrapeso en sus trabajos de hilado y en algunos casos como amuletos. En sus caras aparecen figuras geométricas en las cuales se combinan formas rectilíneas con circulares (figura 22 y 23).

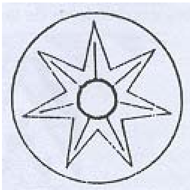


FIGURA 22

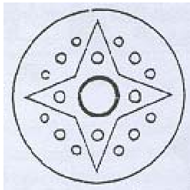


FIGURA 23

Otros objetos para analizar donde aparecen ingeniosas figuras geométricas son las piezas circulares, parecidas a un plato hondo, llamadas pucos. Se usaron como urnas funerarias. La decoración se refiere a dioses que según ellos custodiaban al muerto. También se encontraron otros motivos que representaban parte de animales propios de la zona y en otros una combinación de animales con motivos geométricos. Es interesante analizar uno de ellos, en que la decoración consiste en cinco figuras rayadas (figura 24) con un lado curvo y los otros lados rectilíneos y casi perpendiculares entre sí. Si se unen los vértices más cercanos al centro se obtiene un pentágono.

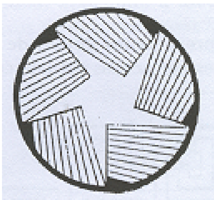


FIGURA 24

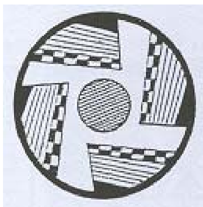


FIGURA 25

En la figura 25 aparecen cuatro figuras con partes rayadas y otras reticuladas, rodeando a un círculo Se han encontrado pucos con decoraciones mucho más complejas.
Los motivos escalonados aparecieron también en otras culturas del continente americano y hacen pensar en una relación entre las mismas. Sobre su origen existen varias teorías algunos creen que nació del tejido, dado que la trama y la urdimbre se cruzan en ángulo recto, otros piensan que resultó de la geometrización de formas naturales, otros creen que podría ser la interpretación del rayo (zig zag) otros lo asocian a las cumbres escalonadas de una montaña. (figuras 26 y 27)

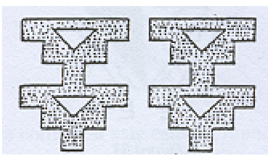


FIGURA 26

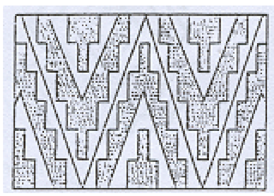


FIGURA 27

Los motivos cruciformes han sido utilizados en América antes de la conquista. Toda la tendencia a la geometrización se observa en el uso del ángulo recto en los escalonados, en reticulados, en el trazado de líneas y en el uso de rectángulos y cuadrados (figuras 28 y 29).

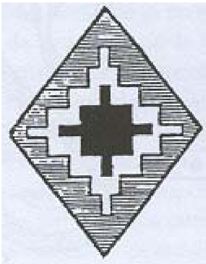


FIGURA 28

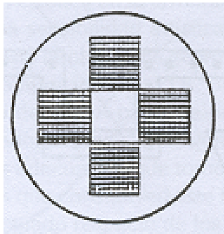


FIGURA 29

Da la impresión que las culturas indígenas vivieron con el amparo de la cruz y las corrientes españolas se desarrollaron también al amparo de la misma como símbolo de redención. El sapo, fue considerado por estas culturas como el símbolo del agua y la serpiente símbolo del rayo y aparecen en muchos motivos ornamentales y sus figuras fueron estilizadas de varias maneras y emplearon el rombo para representar el primero y una línea curva en forma de S o una espiral para representar el segundo.

Sabemos que existe una geometría visible en la arquitectura. Los griegos aplicaron la divina proporción, reiteradamente en sus grandes obras. Existe también una geometría no visible, oculta, en las grandes obras de la pintura universal. La "Ultima Cena" de Leonardo da Vinci, es un ejemplo de ello. Partiendo de un cuadrado, agregándole un medio cuadrado a cada lado, trazando las diagonales y así siguiendo. Pudo hacer el trazado con las proporciones adecuadas, que tomó como base para luego llenarlo con los personajes que constituyen este famoso cuadro. Lo sorprendente del análisis efectuado respecto de los aborígenes, es que a pesar de no conocer los desarrollos de Thales, Pitágoras, Euclides y tantos otros, usaron la geometría, aunque en forma intuitiva, para darle un sentido estético a las decoraciones de los diferentes objetos que ellos mismos construyeron.

Referencias bibliográficas

Museo Inca Huasi. La Rioja. Argentina.
Odilla Bregante *Ensayo de clasificación de la cerámica en el noroeste argentino.*
Instituto de Antropología. Universidad Nacional de Córdoba.
Vera, Nicanor. *El arte ornamental diaguita*. Santa Fe. Argentina.
Museo Etnográfico. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires.
Rex Gonzales y Perez. *Argentina Indígena*. Argentina: Editorial Paidos.
J.B.Ambrosetti. Monografía: *Los pucos pintados de rojo en el valle de Yacovil.*
Adán Quiroga. *La Cruz en América*.
Revista *Números* de didáctica de la Matemática.Vol. 45. Sociedad Canaria Isaac Newton.

La Geometría Euclídea en la formación de profesores. Un enfoque desde lo procedimental

Cristina Ferraris
Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue. Argentina
cferrari@crub.uncoma.edu.ar

Resumen
Sobre la base de lo trabajado desde la década del 80 en el las cátedras de Geometría Euclídea en el Profesorado de Matemática, se realiza una breve descripción de cómo se implementa la enseñanza aprendizaje en las mismas, desde un enfoque que atiende fuertemente a lo procedimental. Para ello se presentan los contenidos conceptuales que motivan la utilización del método propio de la matemática, lo que se logra a través de la presentación, discusión y relación entre los axiomas y los distintos temas (intra e inter asignatura); la resolución de problemas que impliquen la posibilidad de conjeturar, generalizar, particularizar; el estudio de funciones en geometría y de las estructuras matemáticas implicadas; la distinción entre definiciones geométricas y aritméticas; la importancia del axioma de continuidad y sus aplicaciones.

Introducción

La necesidad de la enseñanza-aprendizaje de La Geometría Euclídea en la escuela, viene justificada por el hecho de que la misma viene acompañando por siglos la evolución del pensamiento y también la expresión artística de la humanidad, aportando abundante material en lo que a problemas matemáticos se refiere, muchos de ellos de larga trayectoria histórica, dando lugar al desarrollo de la creatividad, a la organización de estrategias de resolución de problemas y propiciando el trabajo de contenidos procedimentales propios del quehacer matemático.
A pesar de ello encontramos frecuentemente, que tanto en la escuela como en la formación de profesores, la Geometría Euclídea se ve relegada. Tanto es así, que un breve relevamiento acerca de los planes de estudios vigentes en nuestro país nos muestra que la Geometría Métrica o Euclídea se dicta sólo en algunos pocos centros de formación de docentes de Matemática y en ninguna de las Licenciaturas ni postgrados, de los que egresan los especialistas que establecen los criterios para la educación matemática de los distintos niveles de enseñanza.
Teniendo en cuenta que la historia del propio aprendizaje y el cuerpo teórico o red conceptual del profesor se verán reflejados en el modo de implementar sus clases y bajo el supuesto de que una manera eficiente de incidir en la calidad de la Educación Matemática es aportar elementos que enriquezcan la formación de docentes de esta disciplina, resulta muy importante en la formación de Profesores profundizar en los procedimientos del *método* matemático y favorecer la construcción de un marco teórico sólido y consistente.
Desde el grupo EDUMAT (CRUB – UNC) y particularmente en la enseñanza de la Geometría Euclídea, apuntamos a un enfoque que contempla lo procedimental. Este enfoque se ve avalado por una tendencia a nivel mundial en ese sentido, así como también por el documento propuesto del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación (1999) respecto a los Contenidos básicos comunes para la formación docente para el tercer ciclo de la EGB, y educación polimodal en Matemática, en el que contempla un bloque de procedimientos generales relacionados con la Matemática y su enseñanza, aclarando que debe considerarse de manera transversal respecto a los contenidos de los otros bloques disciplinares. En su síntesis explicativa dice: *Es fundamental reconocer que el primer*

objetivo de la enseñanza de la matemática en los profesorados es que los futuros docentes profundicen los procesos típicos del pensamiento matemático (conjeturar, inducir, deducir, probar, generalizar, particularizar, modelar, etc.) en conjunción con los conceptos de esta disciplina para poderlos enseñar.

Sin embargo, la implementación de este bloque en la efectiva formación de docentes de matemática, puede encontrar dificultades si no se tiene una propuesta de cómo trabajar los contenidos procedimentales, con el fin de facilitar no sólo su aprendizaje sino también su puesta concreta en el aula.

Un conocimiento detallado de la Geometría que incluya la evolución histórica de la Matemática y la génesis de los conceptos y procedimientos geométricos, permitirá al docente interpretar los conceptos que la fundamentan, analizar qué pudo haber motivado el enunciado de cierta axiomática, elegir el camino más adecuado para una construcción o demostración. Asimismo, le permitirá manejarse con soltura en un campo más amplio, tanto conceptual como procedimental, dándole mayores posibilidades de crear un ambiente propicio para el quehacer matemático y para desarrollar una temática geométrica más flexible. De este modo la Geometría será mostrada como una expresión dinámica y creativa, nunca acabada, de la Matemática.

Como material de trabajo, existen múltiples aplicaciones de la Geometría Euclídea en el arte, las artesanías y las diferentes profesiones y disciplinas que utilizan relaciones espaciales y otras temáticas geométricas, proveen de un material muy atractivo para plantear en el aula, brindando la posibilidad de una posterior inserción de lo aprendido en la vida cotidiana.

Es frecuente sin embargo, que se relacione la geometría escolar sólo o principalmente con la Física, pasando rápidamente a la medida. Esto conlleva al trabajo aritmético de operaciones en distintos sistemas, valioso en sí mismo dentro de la Matemática en general, pero que deja de ser una actividad geométrica. Otras veces se la centra, tal vez de manera no muy consciente, en el desarrollo de habilidades manuales en el uso de instrumentos, responsabilidad que no debiera centrarse sólo en quien enseña la Geometría.

Marco teórico

Tomando en cuenta que la Geometría presentada por Euclides 24 siglos atrás, sigue vigente en nuestro entorno cotidiano y que la organización axiomática de Hilbert la liga fuertemente al Algebra, y desde allí, la integra al quehacer matemático todo, es que se hace necesario trabajar la Geometría Euclídea en la formación de profesores desde un enfoque integrador, atendiendo particularmente a lo procedimental.

La posibilidad de trabajar en las asignaturas de geometría en la formación de Profesores de Matemática, y el interés de nuestro grupo de Investigación en la problemática de la enseñanza de la geometría en la escuela, nos guiaron hacia la implementación de un modo de trabajo que atienda a los aspectos mencionados.

La necesidad de dar este enfoque a la geometría ya se plantea en nuestro profesorado durante la década de los 80. En 1985 comienza a implementarse un curso para la asignatura “Geometría Métrica” que contempla aspectos procedimentales propios del método matemático y en el cual los estudiantes tuvieron la posibilidad de contar con un texto apropiado: El Plano, de J. A. Tirao, editado por Docencia en 1979 (Tirao, J. 1979). Desde entonces este curso se dicta todos los años sin interrupción.

En este contexto, se confeccionaron trabajos inéditos que contemplan aquellos temas no cubiertos por la teoría aportada por “El Plano” (Tirao, J. 1979), así como también se agregaron algunos tópicos propios del modo de trabajo elegido. En colaboración con las Prof. Liliana Siñeriz y Martha Ferrero, se realizó también un trabajo de compilación de un gran número de problemas, su adecuación al enfoque planteado, como así también la elaboración de tareas ad hoc.
A fines de los 80 se comenzó a trabajar en la Geometría Métrica del Espacio, la cual contó luego con la bibliografía elaborada a tal efecto en el Centro Regional: ESPACIO – Geometría Métrica, de C. Ferraris, editado por el CRUB de la Universidad del Comahue en 1991 (Ferraris, C. 1991), implementándose como asignatura optativa de la carrera Profesorado de Matemática en el Centro Regional Universitario Bariloche. En 1999 es incorporada a la currícula del profesorado en la Universidad Nacional del Comahue como materia regular.

Organización de las asignaturas

Los programas de estudio de las asignaturas correspondientes, se organizaron desarrollando los temas de Geometría Euclídea en forma axiomática a través de tres grandes núcleos: axiomas de incidencia y ordenación; axiomas de congruencia y paralelismo; y axioma de continuidad. Las congruencias se trabajan como funciones y desde la teoría de grupos.
Los **contenidos conceptuales** son, por supuesto, los que trabajó Euclides y, como dijimos, los agrupamos atendiendo a la axiomática de Hilbert en tres grandes núcleos:
- Axiomas de incidencia y ordenación, que permiten situarse en el conjunto a trabajar (plano o espacio), sus elementos (puntos) y subconjuntos propios destacados (rectas y, si corresponde, planos), cuya definición se va completando a través de la axiomática.
- Axiomas de congruencia y paralelismo, que hacen referencia a las transformaciones rígidas o isometrías que caracterizan a la Geometría Euclídea. Es conveniente aclarar que el axioma de paralelismo debe referirse solamente a *unicidad* ya que la existencia la provee la axiomática de congruencia, por ejemplo, a través de la simetría central o la traslación.
- Axioma de continuidad, que trae aparejada no sólo la temática referida a la medida, sino también la discusión de temas íntimamente ligados a la continuidad como es el infinito y la completitud. Este axioma se explicita recién a fines del siglo XIX y, de acuerdo a Poincaré (1948), por expreso pedido del matemático Sophus Lie: *“Sophus Lie es quien más ha contribuido a la aplicación de la teoría de grupos continuos a la geometría, declarando la necesidad de un nuevo axioma que enuncia que el espacio es una Zahlenmannigfaltigkeit; es decir, que a todo punto de una línea recta corresponde un número, y viceversa”*. (Poincaré, E. 1948). Es entonces el mencionado matemático quien advierte que se lo viene usando de manera implícita sobre todo desde la época de Descartes, y de manera más velada, desde Euclides: “Si analizamos cuidadosamente sus demostraciones (de Euclides), hallaremos, bajo una forma más o menos velada, cierto número de hipótesis que son, en realidad, axiomas disfrazados; y pudiéramos decir lo mismo de algunas de sus definiciones.” (Poincaré, H. 1948). En efecto, cuando Euclides, en la “construcción” del triángulo equilátero admite que dos circunferencias del mismo radio y centro en cada extremo del mismo, se intersectan, está utilizando una consecuencia de dicho axioma.

Los **contenidos procedimentales** atienden a:

- **tratar el concepto de ángulo**, como también el de **suma y orden** de los mismos, desde una postura geométrica, independiente de la medida, la que podrá ser agregada en el momento que se considere conveniente, siempre que se cuente ya con el axioma de continuidad. (Ferraris, C. 1997).
- **considerar la estructura de grupo** que subyace en el conjunto de transformaciones rígidas provisto de la composición.
- **clasificar las transformaciones rígidas** en cuanto a la orientación y la existencia de puntos fijos.
- **trabajar el axioma de continuidad** y su consecuencia inmediata, que permite acceder a la **medida**, justificando teoremas referidos a longitudes, superficies y volúmenes. (Ferraris, C. y Ferrero, M. 2000).

Debido al enfoque propuesto, estas materias fueron pensadas para ser cursadas después de una asignatura introductoria de Algebra que incluya nociones de la estructura de grupo y preferiblemente, en un año avanzado de la carrera, dado que se pretende hacer uso de las grandes posibilidades que brinda la Geometría para analizar cuestiones referidas al método matemático, aprovechando su riqueza en contenidos procedimentales como son el análisis de tipos de demostración; estrategias de demostración; relaciones entre distintas temáticas propias o de la disciplina en general; discusión de definiciones, de conjuntos axiomáticos; etc.

Metodología

Para el tratamiento de la Geometría Métrica, se propone una relación horizontal con asignaturas tales como Estructuras Algebraicas y Geometría Analítica, dado que en la primera se pueden trabajar ejemplos geométricos de grupos de transformaciones y en la segunda se estudian temas en común con distinta presentación axiomática.
Se realiza una introducción teórica de los temas a tratar, con participación de los alumnos en algunas discusiones sobre ítems de interés: definiciones, orden de los conceptos tratados, axiomas. Esto nos permite el trabajo de los contenidos conceptuales junto con los procedimentales. Luego se dedica otra parte a la resolución de problemas, los que incluyen problemas históricos, demostraciones y situaciones problemáticas ad hoc, enfocadas a trabajar los nuevos conceptos incorporados.
Como eje transversal aparece la resolución de problemas, donde se incluyen los de carácter histórico, de demostración y de construcción, la presentación de situaciones problemáticas ad hoc., enfocadas a trabajar los nuevos conceptos incorporados, así como la apertura a nuevos problemas.
En la Geometría del Plano, como es la primera versión de la geometría euclídea del Profesorado, y a fin de no convertir la primera parte en un tedioso listado de axiomas y definiciones, se tratan algunos problemas de manera un poco más informal, aunque dejando claro qué cosas podrán ser demostradas más adelante. En la Geometría del espacio, hay muchos problemas que son resueltos por los estudiantes fuera del horario de clase, con unos días para la elaboración de las soluciones y plazos de entrega. Se trabaja con material construido por los mismos estudiantes.

Si bien se estimula el tratamiento grupal de las tareas a fin de fomentar el intercambio de propuestas, estrategias y conocimientos previos, y permitir la explicitación de contenidos procedimentales utilizados, se asigna a cada estudiante un grupo de problemas que son aquéllos cuya resolución deberá presentar por escrito.
La evaluación se realiza sobre todo el material realizado por cada estudiante a lo que se agrega un trabajo presentado en forma oral al finalizar el curso.

EJEMPLOS
Se muestran los enunciados de dos problemas tal como son presentados a los estudiantes:

Ejemplo 1 - Sea $\overset{\wp}{abcd}$ *un cuadrilátero. Llamaremos mediana del mismo a los segmentos que unen cada vértice con el baricentro del triángulo determinado por los otros tres vértices. Se trata de ver si las medianas del cuadrilátero tiene propiedades similares a las del triángulo.*

> *a) probar que las medianas de un cuadrilátero tienen un punto común, al que llamaremos baricentro.*
> *b) demostrar que la relación entre el segmento determinado por el baricentro y cada vértice del cuadrilátero y la mediana correspondiente es 3/4.*
> *c) definir mediana de un polígono cualquiera y conjeturar sus propiedades.*
> *e) demostrar la conjetura del punto anterior.*

El problema implica procedimientos como conjeturar propiedades, enunciarlas, definir conceptos, argumentar, probar, etc., los que implican el desarrollo de habilidades propias de la actividad matemática.
Cuando se estudia la geometría del espacio se retoma el problema permitiendo abrirlo a trabajar las medianas del tetraedro y la posibilidad de discutir si tiene o no sentido realizar algo similar con otras líneas destacadas del triángulo.
Ejemplo 2 – Considerar todas las transformaciones rígidas que dejan fijo el tetraedro:

a) probar que forman grupo, al que podemos llamar T_t*..*

b) probar que existe un isomorfismo entre S_4 *(grupo de permutaciones de 4 elementos) y* T_t*..*

c) determinar el subgrupo de S_n *que se corresponde con las rotaciones que dejan fijo el tetraedro, mediante el isomorfismo visto en el ítem anterior.*

Los procedimientos utilizados en este problema, además de probar y encontrar, atienden a la relación de temas y el manejo de estructura matemática.
Como en el otro caso, se retoma el problema para generar otros, como por ejemplo determinar el isomorfismo de los grupos anteriores con el de rotaciones del cubo y encontrar los “objetos geométricos” que se pueden pensar como permutados en cada rotación (pares de diagonales).

Comentarios finales

Dado que la actividad matemática consiste en relacionar conceptos, conjeturar y probar propiedades de los mismos, realizar generalizaciones, observar casos particulares, etc., no

se completará la enseñanza de esta ciencia hasta tanto no se contemple poner mucho empeño en lo procedimental al tratar los distintos temas.
Como siempre hemos considerado de tanta importancia trabajar los conceptos y propiedades en matemática desde lo procedimental, es que tratamos de delinear propuestas para facilitar el aprendizaje de futuros Profesores en esta dirección.
Lo que aquí se presenta es un ejemplo haciendo referencia a dos de las asignaturas del Profesorado, cuyo dictado nos fue proporcionando una permanente fuente de trabajos laterales de discusión de temas, muchos de los cuales fueron concretados en distintas publicaciones que permitieron ir ampliando su tratamiento.
La instancia de resolución de problemas unida a la discusión, comentarios y preguntas de los estudiantes, también nos ha servido para elaborar nuevos enunciados, reelaborar otros, y observar que hasta la presentación misma del problema contribuye a lograr que se trabajen los distintos temas de la manera deseada.

Referencias bibliográficas

Ferraris, C. (1991). Espacio. Geometría Métrica.. Río Negro, Argentina: Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue.
Ferraris, C. (1997). *Una definición geométrica de ángulo. Ordenamiento – suma – aplicación a rotaciones.* Río Negro, Argentina: Cuaderno Universitario N^{o} 27. Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue.
Ferraris, C., Ferrero M. (2000). “Un concepto Matemático muy incorporado aunque no tan obvio: El axioma de continuidad y algunas aplicaciones”. *Revista de Educación Matemática.*
Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. República Argentina. (1999). Contenidos Básicos Comunes para la Formación Docente. Tercer Ciclo de la EGB y Educación Polimodal. Campo de la Formación Orientada. Matemática.
Poincare, E., Einstein A.. (1948). *Fundamentos de la Geometría.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Ibero-Americana. Colección Infinito. Serie 3 Filosofía de la Ciencia. Vol 1. Traducción de J. Rey Pastor.
Puig Adams, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica.* Madrid, España: Gómez Puig Ediciones.
Tirao, J. A. (1979). *El Plano*. 1ra edición. Buenos Aires, Argentina: Editorial Docencia.

Sobre las dificultades en los procesos cognoscitivos: análisis y síntesis

Juan Manuel Nole
Departamento de Matemática. Universidad de Panamá. Panamá
jmnole@sinfo.net

Resumen
La presente investigación se propone descubrir los procesos cognoscitivos: análisis y síntesis que hacen posible la demostración de proposiciones y la resolución de problemas. Nuestra investigación se limita a la aplicación de una prueba de geometría euclideana plana en el nivel de razonamiento deductivo, a diez (10) estudiantes que aprobaron el curso de Geometría I, a nivel superior. Esta prueba permitió identificar dificultades que aún presentaban los estudiantes con relación a la percepción visual de las figuras geométricas y el razonamiento matemático deductivo

Introducción

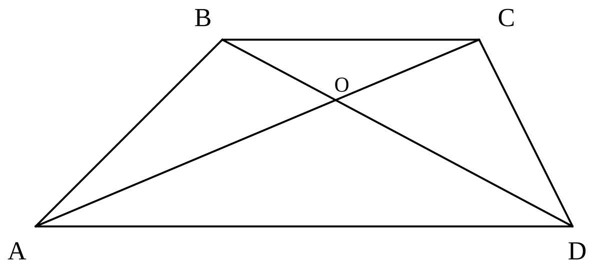
Se aplicó una prueba experimental de geometría euclideana plana a diez (10) estudiantes que habían finalizado el curso de Geometría I, de la carrera de pregrado en matemática, con el propósito de descubrir los procesos cognoscitivos, análisis y síntesis..
Ambas operaciones son dos aspectos de un mismo proceso del pensar, por lo que se encuentran integrando procesos mentales que tienen lugar al aprender nuevos conceptos, teoremas o procedimientos y también al aplicarlos en la solución de ejercicios y problemas.
La prueba comprende un problema y tres proposiciones, que no se habían contemplado en el desarrollo del curso. Con el fin de realizar la visualización de las demostraciones de las proposiciones y de la resolución del problema, a cada enunciado se le hace corresponder una figura geométrica. Estas figuras geométricas no sólo explican el contenido de las proposiciones y del problema, sino también el curso a seguir en sus demostraciones y resolución respectivamente
En ese sentido el conocimiento comienza en estos casos en los que aparecen figuras, con la percepción y comprensión del conjunto, con una síntesis, puesto que las figuras se manifiestan en elementos o partes integrales. Pero la primera percepción y comprensión sintética proporciona al sujeto tan sólo un conocimiento global y difuso, una impresión general de esas partes o esos elementos; a pesar de ello, esta síntesis inicial determina con frecuencia el rumbo que va seguir el estudio analítico de las partes o los elementos (Rubinstein, 1958).

Objetivo

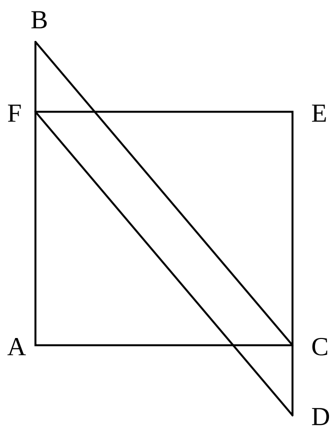
Analizar las características y correlación de cada una de las operaciones mentales que realizaron los estudiantes en la prueba experimental.

Prueba de geometría

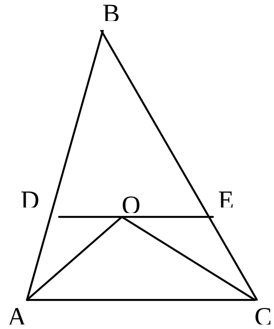
(1) Sea el trapecio ABCD y sus correspondientes diagonales AC y BD. Demostrar la equivalencia de los triángulos ABO y OCD.



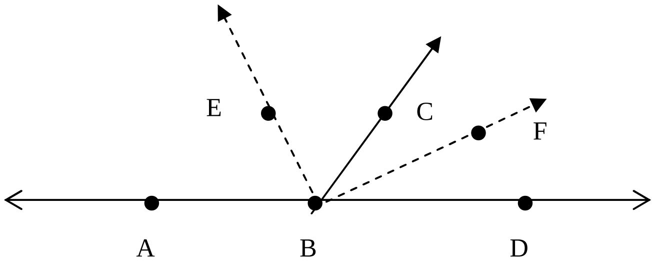
(2) En la siguiente figura, hallar en qué equivale la suma de las áreas (superficies) del paralelogramo FBCD y del cuadrado AFEC



(3) Las bisectrices de los ángulos <A y <C del triángulo ABC se cortan en el punto O por el que se traza una paralela a $\overline{AC}$. Demostrar que el segmento $\overline{DE}$ determinado por dicha paralela es igual a la suma de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{EC}$ (con mayor precisión, las longitudes de los segmentos).



(4) Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí; demostrar que los puntos A, B y D se encuentran en una recta (son colineales).



Análisis de los resultados

Con respecto a la proposición 1, nueve (9) estudiantes la abordaron , pero en el análisis, seis (6) hicieron aseveraciones incorrectas tales como :

1. Las diagonales del trapecio son congruentes.
2. Los pares de ángulos <DBC, <ACB y <CAD, <BDA son congruentes.
3. Los pares de segmentos $\overline{AO}$, $\overline{DO}$ y $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ son congruentes.
4. Los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ son congruentes.
5. Los triángulos AOD y BOC son isósceles.

Por lo que se explica que los estudiantes percibieron la figura de esta proposición como un trapecio isósceles.

De las afirmaciones anteriores y otras referentes a los ángulos (verdaderas y falsas) obtuvieron los estudiantes, aplicando un criterio de congruencia de triángulos, que los triángulos ABO y CDO son congruentes. Por lo tanto concluyeron, que tienen igual área y son equivalentes.

Los restantes tres (3) estudiantes siguiendo otras formas de demostración, asumieron también aseveraciones incorrectas.

Observación

Los estudiantes han asociado la equivalencia de dos triángulos a la congruencia de los mismos. Que dos triángulos sean congruentes entonces tienen las mismas áreas, pero la recíproca no es verdadera , ya que existen triángulos con igual área, pero sin embargo no son congruentes.

Con respecto al problema 2 , siete (7) estudiantes la abordaron, pero en la síntesis un estudiante realizó la siguiente correlación incorrecta : el lado del cuadrado AFEC es igual a la base del paralelogramo FBCD, otro estudiante determinó por separado las áreas del cuadrado AFEC y del paralelogramo FBCD, pero no determinó la suma de estas áreas, un tercer estudiante se quedó en la descripción de los datos, en el análisis y un cuarto estudiante asumió de manera incorrecta, como altura del paralelogramo, cualquiera de sus lados, manifestándose un error en el resultado de la suma de las áreas del cuadrado y del paralelogramo.

Los restantes tres (3) estudiantes resolvieron el problema , donde uno lo resolvió por una vía diferente.

Observaciones

El análisis de las soluciones obtenidas muestran que dos de los estudiantes que resolvieron el problema , calcularon separadamente la superficie del cuadrado y la del paralelogramo y después sumaron los resultados parciales.

El otro estudiante, resolvió el problema, descomponiendo el área del cuadrado en la suma de tres áreas (de dos triángulos y un paralelogramo), luego calculó separadamente el área del paralelogramo FBCD. Después sumó los resultados obtenidos.

Con respecto a la proposición 3, ocho (8) estudiantes la abordaron, de los cuales dos la demostraron sin dificultad. Dos de los seis (6) estudiantes que no la demostraron correctamente probaron la proposición, pero utilizando como hipótesis, que el triángulo ABC es isósceles, lo cual no era una hipótesis de la proposición. De los cuatro (4) estudiantes restantes, dos (2) se quedaron en la etapa del análisis formulando los datos de la proposición, mientras que uno de ellos utilizó la hipótesis, que las rectas $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son paralelas, para inferir que los pares de ángulos alternos internos <DOA, <OAC y <EOC, <OCA son congruentes, pero no continúan el razonamiento en la síntesis. El otro estudiante infirió correctamente que los triángulos ADO y OEC son isósceles, pero infiere incorrectamente que ambos son congruentes.

Observación

En la demostración de esta proposición se ilustra de qué modo, los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{CO}$ se destacan como bisectriz, transversal y lado del triángulo ADO y CEO respectivamente. Pero los estudiantes no visualizan las utilidades de las propiedades de los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{CO}$ en la demostración de la proposición.

Con relación a la proposición 4, solamente cuatro (4) estudiantes la abordaron y dos la demostraron correctamente, uno de los restantes estudiantes pretendió hacer una demostración, utilizando el método de análisis-síntesis, partiendo de la suposición de que los puntos A, B y D son colineales (tesis de la proposición). De su razonamiento, infiere, que por estar el punto C en el interior del ángulo <EBF, entonces C no está en la misma recta donde se encuentra B, sin precisar la recta. No se manifiesta el encadenamiento de proposiciones a partir de la suposición de la tesis, para obtener una proposición, indubitablemente verdadera o ente geométrico que se requiere para iniciar la demostración en la síntesis (de manera progresiva).

Los alumnos que demostraron correctamente esta proposición, manifestaron que, es necesario demostrar, que el ángulo <ABD es igual a 180º o que los ángulos <ABC y <CBD son suplementarios, es decir que su suma equivale a 180º. De esta manera relacionaron lo que se busca con los ángulos.

Observaciones

La síntesis se desarrolla pasando de la recta $\overleftrightarrow{ABD}$ a los ángulos que resultan vinculados a la misma recta, de manera que esta puede sustituirse por los ángulos, lo cual se manifiesta en las sustituciones de proposiciones por otras equivalentes que algunos alumnos hacen en sus demostraciones. Esta idea de la demostración constituye el eslabón necesario para el análisis mental de la proposición. Debido a esta equivalencia del enunciado de la proposición en virtud del cual una proposición se sustituye por otra relacionada con ella, se da oportunidad de continuar el análisis a través de la síntesis. En ese sentido se abre camino para proseguir de manera progresiva hacia la demostración de una proposición equivalente a la tesis.

Conclusiones

Las percepciones de las figuras son importantes en geometría, incluso para alumnos que hayan superado el estadio de la visualización .

En la prueba de geometría que se aplicó para determinar los procesos cognoscitivos : análisis y síntesis, los alumnos confrontaron dificultades en la percepción visual como actividad cognoscitiva. Es importante recordar que percibir y pensar son actos que se encuentran indivisiblemente entrelazados.

En general , a los estudiantes les resultó difícil percibir en el trapecio de la proposición 1, que los triángulos ABD y ACD tienen igual área. En este caso los triángulos ABD Y ACD están superpuestos . Las figuras superpuestas son las más difíciles de ver cuando se intenta relacionar un esquema que las involucra con la condición de un problema (Yakinsmanskaya, 1970). Este resultado es fundamental para demostrar que las áreas de los triángulos AOB y COD son iguales
También, el 70% de los estudiantes presentaron dificultades para visualizar en la figura del problema 2, que la suma de las áreas del paralelogramo FBCD y del cuadrado AFEC equivale a la suma de las áreas de los triángulos ABC y FED, ya que el mismo estímulo visual de la figura geométrica brinda dos percepciones diferentes a través de dos agrupaciones diferentes de elementos (unión del paralelogramo con el cuadrado y la unión de los triángulos ABC y FED). Esto es a consecuencia, de que las áreas de las figuras señaladas están superpuestas.
Aunque la proposición 3 , no presenta figuras superpuestas, su grado de dificultad es mayor con relación al problema 2, puesto que solamente dos (2) estudiantes no presentaron dificultades al demostrarla.
El 80% de los estudiantes presentaron dificultades en el razonamiento deductivo, en el que había que incluir los lados $\overline{AO}$ y $\overline{CO}$ en un sistema de concatenaciones de proposiciones para obtener nuevas propiedades como : bisectriz, transversal y base de triángulos isósceles. Todas estas propiedades de los mencionados lados se dan concatenadamente entre sí y tan sólo dicha correlación permite demostrar la proposición.
Los estudiantes no visualizaron a través de la figura (dibujo) la idea de las propiedades señaladas de los lados $\overline{AO}$ y $\overline{CO}$ que pueden emplearse en la demostración de la proposición.
Con relación a la proposición 4 , solamente dos (2) estudiantes la demostraron correctamente sin dificultad . Sin embargo, esta proposición presenta mayor grado de dificultad respecto a la proposición 3, puesto que solamente cuatro (4) estudiantes la abordaron.
El 80% de los estudiantes también presentaron dificultades en el razonamiento deductivo matemático, es decir en la sustitución de proposiciones a partir de las hipótesis para obtener un sistema de concatenaciones de proposiciones que conducen a la tesis.

Referencias bibliográficas

Arheim, Rudolf. (1985). *El pensamiento visual***.** Buenos Aires, pp.299-300 Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Ballester Pedroso, Sergio y otros, (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática.* Ministerio de Educación de Cuba. Editorial Pueblo y Educación.

Rubinstein, S. L. (1963). *El proceso del pensamiento y las leyes del análisis, la síntesis y la generalización***.** Montevideo, Uruguay: Ediciones Pueblos Unidos, S. A.

Rubinstein, S. L. (1958). *El pensamiento y los caminos de la investigación.* Montevideo, Uruguay: Ediciones Pueblos Unidos, S. A.

Shardakov, V. N: (1978). *Desarrollo del pensamiento en el escolar***.** La Habana, Cuba: Editorial de Libros para la Educación.

Yakinsmanskaya, I. S. (1970). *Some Features of Mental Activity Revealed in Reading a Diagram. V*ol. 14, Universidad de Chicago.

Una estrategia didáctica para el aprendizaje de superficies

Mónica Beatriz Caserio, Martha Elena Guzmán, Ana María Vozzi
UTN- FRR. Argentina
caserio@fceia.unr.edu.ar mguzman@fceia.unr.edu.ar amvozzi@fceia.unr.edu.ar

Resumen
En este trabajo se intenta, a través de una estrategia didáctica, incentivar en los estudiantes el espíritu de búsqueda, de indagación, favoreciendo su independencia y creatividad, pretendiendo llevar a los alumnos a una forma de pensamiento que supera el mero aprendizaje memorístico, y que tiene como meta la comprensión, la retención de la información y el uso activo del conocimiento.
El tema elegido para realizar esta experiencia es el estudio de superficies, apoyado con la herramienta informática, trabajando en grupos con la orientación del docente.

En este trabajo se describe una experiencia realizada durante 3 años con los alumnos de 1er. Año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información (ISI), de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Rosario(FRR), en Algebra y Geometría Analítica.
No es posible ignorar que en el ámbito del conocimiento vivimos una época de profundas transformaciones, no sólo por la cantidad de conocimientos generados diariamente, sino también por la necesidad de modificar sustantivamente los enfoques con los que se aborda su tratamiento en los programas de estudio y en la actividad académica.
Es la enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería, con alumnos que necesitan ser formados en ella para hacer uso de la misma como instrumento de modelización y resolución de situaciones problemáticas, es uno de los desafíos más importantes que debe ser encarado por los docentes de esa disciplina, ya que uno de los principales propósitos de la educación pre-graduada de los estudiantes de ingeniería es favorecer la independencia y creatividad del alumno, especialmente las destrezas para proponer y resolver problemas.
En la citada asignatura, según la planificación de la cátedra, Geometría es la primera unidad a desarrollar y abarca los siguientes tópicos: Vectores en R^2 y R^3, Recta en el plano, Plano y Recta en el espacio, Cónicas y Superficies.
Por diversas cuestiones, como la escasa carga horaria de la materia (5 horas semanales), el gran número de alumnos, la heterogeneidad de los mismos, etc., Superficies no se alcanza a desarrollar, no obstante, el tema es de suma importancia para acceder a la comprensión de las unidades temáticas que conforman el programa de Análisis Matemático II que deberán abordar al siguiente año, de modo que, si bien no se elimina del programa, se deja para que los estudiantes lo "aprendan" de manera autónoma.
Esta situación nos ha dado la oportunidad de implementar una estrategia de aprendizaje que favorezca el "autoaprendizaje". Entendiendo por ello, toda acción que incluya pensamientos o comportamientos que ayudan a adquirir información de modo que ésta se integre a la ya existente. Creemos que enseñar estrategias para aprender implica tener en cuenta aspectos cognitivos, metacognitivos y motivacionales que resultan determinantes cuando se pretende llevar a los alumnos a una forma de pensamiento mucho más eficaz que el mero aprendizaje memorístico, y que tiene como meta la comprensión, la retención de la información y el uso activo del conocimiento.
Consideramos que la estrategia elegida para esta experiencia basada en el planteo de problemas abiertos, es muy eficaz para favorecer el desarrollo cognitivo, dado que de esta manera el estudiante tiene la oportunidad de "darse cuenta" que ante determinadas problemáticas no es fácil responder, que no alcanza con una respuesta superficial o que lo

que él piensa sobre el asunto no es consistente cuando se lo somete a análisis más profundos, lo que lo obliga al mismo a seguir investigando, indagando.

La resolución de problemas es un proceso mediante el cual una situación incierta es clarificada e implica, en mayor o menor medida, la aplicación de conocimientos y procedimientos por parte de quien intenta una solución, así como la reorganización de la información almacenada en la estructura cognitiva.

"*Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo....por ello, un profesor de matemática tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ello el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello*" (G.Polya, 1998).

J. Pozo plantea que el trabajo con problemas exige del docente una cuidadosa selección de situaciones, ya que lo que para uno puede ser apenas una ejercitación porque ya tienen automatizadas las secuencias de resolución, para otros pueden ser verdaderos problemas que les exigen poner en práctica capacidades intelectuales superiores.(Juan I.Pozo,1997)

El tema elegido para esta experiencia es el que cierra la el capítulo de Geometría del programa de la asignatura y por lo tanto podemos utilizarlo como una aplicación del temario desarrollado con anterioridad. Además, los alumnos llevan cursado casi un cuatrimestre al momento en que esta unidad debe ser abordada, lo que permite plantear modalidades que requieren de la utilización de recursos y conocimientos que aquellos pueden haber incorporado, como también inducirlos para la búsqueda de información en otras fuentes y para la utilización de la herramienta informática (Computadora con acceso a internet) a la que ellos (estudiantes de ISI) son tan afectos.

La Facultad dispone de un laboratorio de informática con programas de cálculo simbólico (MATHEMATICA, MAPLE, DERIVE, etc.) al que los alumnos acuden con el objetivo de familiarizarse con su manejo ya que los mismos, admiten papeles muy variados en las interacciones entre los tres elementos fundamentales, (alumnos, profesor, instrumentos didácticos) que constituyen el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

En el caso de esta experiencia, el análisis previo realizado, que fundamenta nuestro diseño, para el tratamiento del tema se sustenta en la consideración del espacio multidimensional o geométrico, el "espacio intuitivo" y el desarrollo de "la intuición espacial", expresada en trabajos de Enriques y Villani respectivamente, que se refuerza en este punto con algunos aportes de otros autores sobre la validez matemática del conocimiento geométrico obtenido por visualización y la importancia de las operaciones de relación y clasificación provocadas por dicha visualización, asimismo, C. Alsina, sostiene que en el conocimiento del espacio geométrico hay que distinguir dos modos de comprensión y expresión, el que se realiza de forma directa, que corresponde a la intuición geométrica, de naturaleza visual y el que se realiza de forma reflexiva, es decir, lógica, de naturaleza verbal. Estos modos de conocimiento aunque muy distintos son complementarios. El primero es creativo y subjetivo, mientras que el segundo es analítico y objetivo. Ambos modos del conocimiento geométrico pueden considerarse como fases del desarrollo del pensamiento. Esta distinción entre ellos es muy útil para sentar las bases de la enseñanza de la geometría.

El hecho de adquirir conocimientos del espacio real a través de la intuición geométrica es lo que se denomina la percepción espacial, si bien el espacio puede ser caracterizado desde diferentes puntos de vista, en la percepción del espacio geométrico interesa concentrarnos en la estructura puramente geométrica ya que la misma, como cuerpo de conocimientos es la ciencia que tiene por objeto analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales. En un sentido amplio se puede considerar a la geometría como la matemática del espacio. (C.Alsina, 1995)

En nuestra propuesta el alumno frente a la pantalla construye un conocimiento con un fuerte apoyo visual, ya que según la opinión de Miguel de Guzmán, en el conocimiento matemático adquirido por visualización, es posible establecer correspondencias entre ciertos aspectos de la representación visual y los significados matemáticos que representan, hasta tal punto que las posibles manipulaciones con los objetos de nuestra representación visual permitirían una traducción, en el momento en que nos lo propongamos, con mayor o menor esfuerzo, en las relaciones matemáticas abstractas que representan. La utilidad de este correlato es bien clara, porque la manipulación de objetos percibidos por nuestros sentidos o por nuestra imaginación se nos hace normalmente mucho más fácil que el tratamiento de conceptos abstractos generalmente muy complejos.

El pensamiento visual explotado convenientemente, puede revolucionar la forma de hacer geometría y de enseñarla. "Desarrollando el pensamiento visual, no solo se abren nuevos horizontes en la forma de enseñar geometría, sino que se facilitan nuevas maneras de descubrir e investigar." (Perez Gomez, 1997)

Esta experiencia se enmarca en las teorías de la investigación- acción, este concepto acuñado por Lewin " forma de indagación autorreflexiva que emprenden los participantes en situaciones sociales para mejorar la racionalidad y la justicia de sus propias prácticas" , es actualizado y ampliado con los aportes de Stenhouse, Elliot, etc. La investigación-acción utiliza como método la espiral autorreflexiva formada por ciclos sucesivos de planificación, acción, observación y reflexión. Como dicen Carr y Kemmis: "si algo define a la investigación acción como investigación es su propósito de desarrollar sistemáticamente el conocimiento dentro de una comunidad autocrítica de practicantes"

Basándonos en lo anterior optamos por desarrollar la experiencia en 6 de las 18 comisiones de primer año de la carrera de ISI en la UTN, FRR implementando distintos abordajes con el objetivo de facilitar la comparación respecto de las diferentes formas de adquisición de los conceptos planteados, su profundización y su aplicación posterior. Iniciamos esta experiencia en el año 1997.

Las seis comisiones involucran los tres turnos en los que se dicta la asignatura, con un promedio de 60 alumnos cada una, abordamos el tema superficies en dos formas diferentes, una que llamamos **tradicional** en tres comisiones y otra que es la propuesta de la experiencia (**experimental**) en las otras tres.

- Tradicional: Los estudiantes realizan el estudio de la unidad temática contando sólo con la bibliografía propuesta por la cátedra, y son evaluados de manera convencional en el examen final, el que se divide en dos partes: en primera instancia, la "práctica" en la cual los alumnos deben resolver ejercicios y/o problemas de los temas incluidos en el programa de la materia. De resultar "aprobados" en esa instancia, el examen continúa con la segunda parte, en la cual el docente le solicita el desarrollo de algunos temas "teóricos".
- Experimental: El docente desarrolla, en forma sucinta, el tema teórico y propone la realización de un trabajo que incorporará algún programa de cálculo simbólico con el que los estudiantes ya estén familiarizados, como así también textos y/o publicaciones que pudieran resultarles de utilidad además de la propuesta bibliográfica de la asignatura. El

trabajo consiste en el “estudio” de alguna superficie (cilíndrica, cónica o cuádrica) cuya ecuación se da y se aclara que “estudiar” una superficie involucra:
1)Analizar las simetrías respecto de los ejes y/o planos coordenados, las trazas sobre cada plano y las intersecciones con planos paralelos a los coordenados y oblicuos.
2)Expresar algebraicamente las conclusiones obtenidas, clasificar las secciones cónicas e identificar por simple inspección gráfica si existen elementos geométricos generadores de la superficie, en cuyo caso se deberá describir el movimiento que deben realizar los mismos para obtener la superficie en estudio.
Consideramos y verificamos que la propuesta conlleva elementos para la motivación, cuales son: conocer el “para que” aprenderlo, la oportunidad de utilizar la computadora, la posibilidad de evaluarlo sin examen final y la propuesta de trabajar en grupos.
“ el resolver problemas en grupo provoca discusiones sobre las diferentes posibilidades. Cuando un alumno se enfrenta solo a un problema a menudo sigue la primera opción “razonable” que se le ocurre. Cuando un grupo pequeño de alumnos estudian juntos un problema, es más probable que se sugieran dos o tres maneras de enfocar dicho problema. El decidir sobre las ventajas de cada una (el porqué se elige una y no otra) es precisamente lo que los alumnos deben practicar” (A. Schoenfeld, 1985).
Las herramientas conceptuales que entran en juego están especialmente referidas a la relación entre una ecuación en dos o tres variables, expresada explícita o implícitamente y el conjunto de puntos cuyas coordenadas son la solución de la ecuación dada en el respectivo sistema de referencia.
En el trabajo de aula se trató de verificar las etapas que respecto del desarrollo de la percepción espacial señalan R. Pallascio y otros:

- **Visualización**: después de haber observado un objeto, poder memorizar (suficientemente) imágenes parciales a fin de reconocerlos que son iguales o semejantes por cambio de posición o escala, entre una diversidad que posean el mismo croquis
- **Estructuración**: luego de haber visualizado un objeto, su “estructuración” consiste en poder reconocer y reconstruirlo a partir de sus elementos básicos constituyentes.
- **Traducción**: reconocer un objeto a partir de una descripción analítica y viceversa.
- **Clasificación**: reconocer clases de objetos equivalentes según diferentes criterios de clasificación.

Estas etapas permiten a su vez desarrollar las habilidades de observar (visualización), abstraer (estructuración), comunicar (traducción) y organizar (clasificación).

El trabajo de los alumnos

Como ejemplo, mostramos aspectos del estudio de la superficie elipsoide, como conjunto de puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

En una primera etapa, buscan en los textos la misma ecuación observando su representación gráfica y tratan de obtener a través del programa por ellos elegido, la misma imagen observada en los textos. Aparece allí el primer inconveniente ya que generalmente les asignan a las constantes el mismo valor y la pantalla les devuelve una esfera, en la mayoría de los casos “se dan cuenta” sin ayuda, del error y comienzan a “jugar” con muchas de ternas de valores asignados a las constantes, obteniendo en consecuencia gran variedad de gráficas de la misma forma. El ***impacto visual*** provocado por la imagen que aparece en la pantalla despierta en los alumnos la curiosidad e induce a acciones dirigidas a la indagación creativa de nuevas situaciones. Se produce, en este punto, la primera consulta con el

docente y en general las preguntas son **¿cuál elegimos para el trabajo?, ¿Hay que estudiarlas a todas? ¡es imposible!**, Se puede reconocer aquí el aporte de la ***visualización***, ya que al poder "ver" las diferentes posiciones espaciales, se les hace más sencillo "reconocer" las posibles diferencias o semejanzas entre la diversidad de representaciones gráficas que obtuvieron para la ecuación planteada.
Dentro de los grupos se forman generalmente sub-grupos que analizan las distintas posiciones espaciales, luego vuelven a reunirse para comentar algunas conclusiones parciales, las que a veces, les resultan un "descubrimiento", y lo que en principio eran valores particulares para a, b y c, ya empiezan a adquirir significación en la superficie en cuestión, podemos decir que están en la etapa de ***estructuración*** del conocimiento adquirido por visualización.
Respecto de las simetrías, les resulta bastante sencillo la conclusión a partir de la visualización, aunque es complicada la "***traducción matemática***" del hecho, para lo cual se necesitaría la guía del docente. En cuanto a la obtención de las trazas y las intersecciones con planos coordenados, paralelos a los coordenados y oblicuos, también el abordaje es "visual" y luego entran en juego algunos conceptos sobre cónicas (tema que ya fue abordado en clase), aquí se ponen de manifiesto los conocimientos previos para investigar distintas intersecciones, se encuentran aquí en la etapa de la **"*clasificación*"** sobrepasando en muchos casos, los límites de la cuestión planteada, evidenciando una clara comprensión de la relación entre el concepto matemático y la representación gráfica.

Evaluación de la experiencia
Desde el punto de vista cuantitativo, y considerando únicamente el tema superficies hemos podido constatar los siguientes porcentajes de alumnos aprobados

Año	Tradicional	Experimental
1997	33%	58%
1998	31%	65%
1999	37%	72%

En cuanto a la respuesta obtenida en cada grupo, cualitativamente, podemos decir que :
En la propuesta tradicional, al momento de la evaluación, se evidencia una buena respuesta en lo referente a la resolución de ejercicios prácticos como los propuestos en los textos, como así también reproducen fielmente los conceptos explicitados en la bibliografía, pero es notorio la dificultad en la percepción espacial de los resultados que obtienen como así también la correspondencia entre el concepto matemático y la representación gráfica.
Las principales dificultades que observamos en los estudiantes son en cuanto a iniciarse en la búsqueda del material y a la elección del programa del cálculo simbólico a utilizar, una vez sorteado estos obstáculos resulta sorprendente la diversidad y amplitud del espectro con que nos encontramos. Hemos podido observar que la percepción espacial es notoria, así como la ductilidad en el manejo de diferentes programas de cálculo, no obstante es también de notar alguna inseguridad respecto a los desarrollos teóricos.
En la instancia de la presentación y defensa de sus trabajos es posible comprobar en muchos casos, a través de la lectura de sus informes, de las respuestas a nuestras preguntas y comentarios, que han alcanzado y a veces sobrepasado los objetivos del mismo, en cuanto a la apropiación de los conocimientos, la independencia en la acción y la autonomía en la búsqueda de información.
Dado que algunas de las docentes que llevamos a cabo esta experiencia, nos desempeñamos en la asignatura correlativa (Análisis Matemático II) hemos podido apreciar más

cabalmente cómo han sido adquiridos de forma diferente los conceptos de superficies y la visión espacial de las mismas, ya que en el momento de la aplicación en otro contexto se clarifica la distinta posibilidad de manipulación de los conocimientos y los diversos modos de apropiación de los mismos.

Conclusiones

En las sucesivas etapas de esta experiencia hemos ido modificando, las consignas, acotando errores, escuchando sugerencias de los estudiantes y colegas, tratando de avanzar hacia la concreción de mejorar sustancialmente la independencia y creatividad del alumno.

Esta experiencia nos ha brindado la posibilidad de acercarnos a los estudiantes, de cambiar el concepto estereotipado respecto de sus aptitudes y acciones relativas a su rol de estudiantes universitarios, observando además que la motivación les permite una mejor producción, y la satisfacción que les produce una tarea realizada en forma autónoma.

El presente trabajo ha sido enfocado sobre tres factores fundamentales. A saber, la investigación – acción, el autoaprendizaje y la visualización, pues entendemos que con la **investigación - acción** se hace posible la espiral autorreflexiva que nos permite reformular la propia práctica, para una mejoramiento progresivo, el **autoaprendizaje** que favorece la adquisición de habilidades investigativas y de producción propia, tan necesaria en su futura profesión. "Cuando se usan las representaciones gráficas de conceptos matemáticos como herramientas para interpretar conceptos o resolver problemas, la **visualización** no es un fin en sí misma sino un medio para llegar a su comprensión o resolución.....la comprensión alcanzada, mediante procesamiento de información visual y la que se consigue por procedimientos analíticos son complementarias, por lo que el aprendizaje debe lograrse integrando ambos tipos de códigos" (E. Castro y E. Castro,1997).

Referencias bibliográficas

Alsina, C (1995*). Invitación a la didáctica de la geometría* Madrid: Ed. Síntesis.

Carr, W, Kemmis, S. (1988*). Teoría Crítica de la enseñanza.* Barcelona: Ed. Martinez Roca.

Castro, E y Castro E. (1997*). Cuanderno de Formación del profesorado*. Barcelona: Ministerio de Cultura y Educación.

Elliot, J. (1994*). La investigación acción en la educación*. Ed. Morata.

Enriques, F. y otros. (1948*). Fundamentos de la geometría.* Buenos Aires, Argentina: Ed. Iberoamericana.

Guzman, M. de (1989). *Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Studia Pedagógica. Revista de ciencias de la educación.

Lewin, Kurt (1992). *La investigación acción participativa*. Madrid.

Pallascio, R. (1986). *Habilidades de la percepción espacial en un contexto infomatizado*. Univ. de Monreal.

Perez Gomez , A I. (1993*). Comprender y transformar la enseñanza.* Madrid: Ed. Morata.

Polya, G. (1998). *Cómo plantear y resolver problemas*. Mexico: Ed. Trillas.

Pozo, Juan I (Octubre 1997). *La crisis de la educación científica ¿Volver a lo básico o volver al constructivismo?* Revista Alambique didáctica de las Cs. Experimentales.

Schoenfeld, Alan H. (1985). *La enseñanza de la matemática a debate.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Stenhouse, L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza*. España.

Villani, Vinicio (1995) "Le transformazione Geometriche Nella Scuola Secondaria Superiore". *L´insegnamiento della Matemática e delle Scienze Integrate*. Roma.

Usos alternativos de las pruebas visuales en los cursos de cálculo diferencial e integral

Cecilia Calvo Pesce*, Carmen Azcárate**
* Universidad de la República. Uruguay, ** Universidad Autónoma de Barcelona. España
calvo@fing.edu.uy

Resumen
Habitualmente se discute sobre la inclusión en las actividades de clase, de las pruebas visuales en términos del valor justificativo de las mismas. Sin restarle importancia a esa discusión queremos aquí exponer una parte del estudio que hemos realizado en el marco de la investigación para la tesis de doctorado, que muestra la pertinencia de considerar otros aportes de las pruebas visuales en el aula.
Para nuestro trabajo de investigación hemos fijado como meta: la caracterización del período de transición entre las etapas de enseñanza matemática elemental (la que transcurre durante la enseñanza obligatoria) y avanzada (la que tiene lugar a nivel terciario), y la búsqueda de elementos que influyan en el aprovechamiento de los estudiantes del período de transición. En el contexto del primer objetivo, identificamos como una de las características de este período, el incremento, en frecuencia y relevancia, de demostraciones y definiciones. Y en consonancia con esta identificación, en el contexto del segundo objetivo y guiados por la recolección y análisis de datos previos, diseñamos una entrevista centrada en las pruebas visuales de tres teoremas sobre aproximación del área bajo la gráfica de una función de concavidad positiva (c+).
Presentaremos, a continuación, algunas consideraciones que buscan destacar el aporte de las pruebas visuales en el sentido de propiciar en el aula reflexiones acerca de la definición de conceptos matemáticos, que nos parecen relevantes para la formación de un estudiante que seguirá transitando por cursos de Matemática de nivel universitario[1].

Las definiciones

El establecimiento de una definición matemática no es un fin en sí mismo sino que responde a ciertas necesidades de organización del conocimiento. El profesor puede escoger el momento para introducir una definición y también, su enunciado. Este carácter convencional de las definiciones se pone en evidencia en dos sentidos:

a) Algunas nociones matemáticas pueden ser caracterizadas de distintas maneras y continuar determinando el mismo conjunto de ejemplos (ej.: un paralelogramo se puede definir como un cuadrilátero con ángulos opuestos iguales o como un cuadrilátero con lados opuestos iguales). La elección de cuál de los estos enunciados se toma como definición no es arbitraria sino que atiende a distintos factores: *estéticos* (relacionados con la elegancia del enunciado) (Vinner,'91), *operativos* (relacionados con las conclusiones que se le pueden extraer, por su papel como eslabón en la sistematización del conocimiento o como instrumento organizador de una prueba o la resolución de un problema) (Bills & Tall,'94), *didácticos* (relacionados con las opciones que se toman en el marco de la planificación de un curso).

b) También es fruto de una elección el definir los conceptos de manera más o menos restrictiva (ej.: un trapecio se puede definir como un cuadrilátero con un par de lados paralelos o con exactamente un par de lados paralelos). En este contexto, De Villiers ('98) clasifica a las definiciones en *jerárquicas* (las que hacen, por ejemplo, que los cuadrados sean casos particulares de rectángulos, éstos de los paralelogramos y éstos de los trapecios) o *particionales* (las que, por ejemplo, excluyen a las funciones constantes del conjunto de las funciones crecientes). Reconociendo que ambos tipos de definiciones son válidos, De

[1] Esta puntualización no implica que consideremos que el Bachillerato deba ser diseñado exclusivamente desde una concepción de estudios preuniversitarios, sino que consideramos que, para aquellos estudiantes que planeen realizar estudios universitarios vinculados a la Matemática, el Bachillerato debería funcionar efectivamente como un período de transición.

Villiers defiende las jerárquicas en cuanto son más generales y más económicas (ej.: minimizan el listado de condiciones a verificar para la identificación de ejemplos). Sin embargo, Mariotti & Fischbein (‘97), mencionan la preferencia de los estudiantes por las definiciones particionales, especialmente, para los conceptos geométricos y para los que recogen de ellos intuiciones para ser definidos.

Ejemplos y no-ejemplos

Cuando se percibe el nombre de un concepto matemático, lo que suele ser evocado no es su definición sino el “esquema conceptual”, o sea, “toda la estructura cognitiva del sujeto asociada al concepto” (Vinner,‘91). El esquema conceptual está formado por ejemplos del concepto, no-ejemplos, procedimientos a él vinculados, recuerdos de experiencias con él, propiedades, etc.

Los atributos relevantes de un concepto son las características que un objeto debe poseer para poder ser considerado un ejemplo de dicho concepto. Una definición involucra sólo un subconjunto propio de estos atributos, y aquellos que no fueron incluidos se deducen de los que sí lo fueron. Los ejemplos prototípicos de un concepto, son ejemplos que destacan entre los restantes y que la mayoría de los individuos compartimos como parte de nuestros esquemas conceptuales. Todos los ejemplos poseen atributos que no son requeridos por la definición, pero los atributos irrelevantes de los ejemplos prototípicos corren mayores riesgos de ser transferidos como característicos del concepto (Wilson,‘90). En algunos casos, llevan al alumno a rechazar objetos que cumplirían con la definición (ej.: un cuadrado como ejemplo de rombo) y en otros casos, a reconocer como ejemplo un objeto que asocia al prototipo aunque no cumpla con su definición (ej.: $\sqrt{169}$ como un número irracional).

El papel de las definiciones en el aprendizaje de la Matemática

Cuando se propone a un estudiante una tarea en relación con un concepto matemático, usualmente, ignora la definición y responde usando parte de su esquema conceptual. En este marco, adquiere relevancia analizar la consistencia del contenido del esquema conceptual respecto a la definición y cabe preguntarse por qué presentar definiciones en el aula en vez de concentrar esfuerzos en la selección de actividades que eviten inconsistencias entre la definición que maneja la comunidad matemática y el esquema conceptual que construye el estudiante a partir de esas aproximaciones. La respuesta a esta pregunta contempla varios aspectos, uno de ellos, se relaciona con la convicción de que el ingreso al pensamiento matemático avanzado implica reconocer que los conceptos que viven en la obra matemática tienen una definición a priori sin la cual no podrían ser reconocidos como “conceptos matemáticos”, y que esa definición es el punto de referencia fundamental con el que contrastar el contenido del esquema conceptual en la búsqueda de su consistencia.

Para los conceptos geométricos, destaca especialmente la relevancia de considerar su definición frente a la sola consideración del esquema conceptual asociado (integrado por la figura, representación mental del objeto geométrico y por algunos dibujos, modelos materiales de dicho objeto, con sus imperfecciones o idealizados). En estos casos es la figura quien guía al razonamiento pero son las restricciones lógicas impuestas por la definición quienes controlan su corrección (Mariotti & Fischbein,‘97).

Para que el estudiante no sea un mero espectador, las actividades de definición no pueden descansar exclusivamente en el profesor o el libro. Él debería participar en esta actividad buscando enunciados con los que caracterizar a un cierto conjunto de ejemplos, respetando los principios de no circularidad (usando sólo nociones primitivas o definidas independientemente) y consistencia (sin involucrar contradicciones lógicas). Balacheff (‘88) analiza algunas actividades de definición realizadas por estudiantes y señala que se pueden encontrar dos tipos de fundamento para la búsqueda, por parte del estudiante, del contenido de la definición de un objeto que aparece involucrado en la resolución de un problema: *exógenos* (cuando busca reconstituir referencias culturales o vinculadas con el saber escolar: “la definición que debería conocer”) y *endógenos* (cuando busca explicitar la noción en función de las exigencias del problema). Indica también que en este ámbito las definiciones no son estáticas sino que van evolucionando a medida que transcurre la resolución del problema y se van superando conflictos que surgen de la contrastación con ejemplos y no-ejemplos o con contraejemplos de las conjeturas en las que participan.

Las pruebas visuales

En un contexto de revalorización de las dimensiones gráfica, numérica y algebraica de la actividad matemática, la visualización busca algo más que una vaga intuición que sustituya superficialmente la comprensión de nociones matemáticas. Para lograrlo no puede intervenir sólo en la ilustración de una definición o un teorema, también debe participar en las actividades de construcción e identificación de ejemplos, en la conjetura de resultados y en la refutación o justificación de afirmaciones.

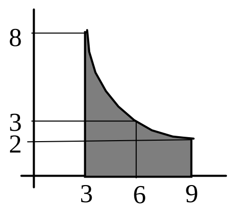
Una diferencia entre el uso de diagramas en pruebas frente a su uso en otras actividades es que, en el contexto de justificación, el diagrama debe describir el caso general bajo discusión. Para ello es indispensable discriminar, con la ayuda del enunciado, los aspectos que son relevantes a la situación ilustrada. Mientras que en demostraciones analíticas se puede razonar sobre la base de un elemento desprovisto de más atributos que los dados por las hipótesis (“sea $p \in P$ tal que…”), en las pruebas visuales cualquier objeto sobre el que se construya el razonamiento posee características que deben ser ignoradas en ese razonamiento. Martin & Harel (‘89) reportan un estudio donde detectaron el uso, por parte de la mayoría de alumnos que había completado un curso de geometría, de atributos irrelevantes del diagrama durante la validación de una prueba, lo que nos llevó a incluir este aspecto en nuestro trabajo experimental.

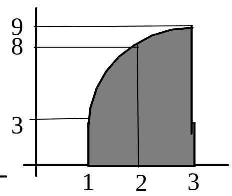
Los datos experimentales previos

Estos datos fueron recogidos, mediante cuestionarios, en dos instancias: en el marco de nuestra tesis de maestría (Calvo,‘97), en dos grupos del Curso de Orientación Universitaria (opción Ciencias) en Barcelona (España) y en el marco de datos recogidos especialmente para el nuevo trabajo de investigación, en tres grupos de 6º año de Secundaria (opción Ingeniería)[2] en Montevideo (Uruguay). Exponemos a continuación las preguntas cuyas respuestas usamos como antecedentes para el presente reporte (la primera pregunta se propuso en la primera instancia y ambas en la segunda)

1) El área sombreada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar cotas más ajustadas?

2) El área sombreada es mayor que 6 y menor que 18. ¿Por qué? ¿Puedes dar cotas más ajustadas?





[2] Tanto el Curso de Orientación Universitaria en España como el 6º año de Secundaria en Uruguay se corresponden con el 12º año de escolarización, no obligatorio y último antes del ingreso a la Universidad.

A partir de estos datos realizamos algunas consideraciones sobre los vínculos establecidos por los estudiantes entre la concavidad de una función positiva y las aproximaciones del área bajo su gráfico. Quisimos luego profundizar este estudio y también, abordar cuestiones relacionadas con las actividades de definición y de justificación a partir de pruebas visuales. Esta profundización requirió el uso de un instrumento más adecuado, por lo que diseñamos una entrevista muy exhaustiva para aplicar a un grupo reducido de estudiantes que estuvieran en la etapa de transición.

Las entrevistas

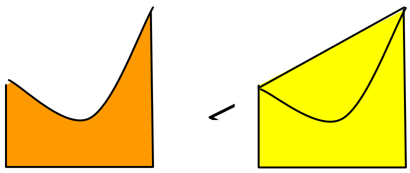
Los entrevistados fueron cinco estudiantes de 18 y 19 años de 1º año de la Licenciatura de Matemática (Facultad de Ciencias, Universidad de la República), que el año anterior habían realizado estudios de nivel secundario[3]. Provenían de cinco institutos diferentes, donde habían tenido únicamente un primer curso de Cálculo Diferencial sin que el tema integrales estuviera contemplado. Las entrevistas, de poco más de una hora de duración, fueron realizadas a un mes de comenzados los cursos, cuando aún no se habían tratado temas relacionados directamente con la entrevista.

El guión de la entrevista

La entrevista se encuentra organizada alrededor de la propuesta de ciertas tareas, algunas de las cuales expondremos a continuación:

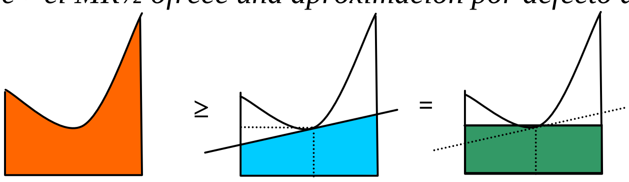
Se presentan al entrevistado, mediante diagramas, los métodos de aproximación del área bajo el gráfico de una función positiva: trapezoidal (MT) y rectangulares usando la ordenada del primer punto (MR1), la del último (MR2) y la del punto medio de cada intervalo (MR½). A continuación, se expone el enunciado de lo que será el "teorema 1": *Para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aproximación por exceso del área bajo la gráfica*[4] y se le pregunta: cómo interpreta ese enunciado, qué entiende por función de c+ y se le pide que presente ejemplos de tal tipo de funciones[5].

Luego de respondidas esas preguntas, se presenta como prueba del teorema 1 el siguiente diagrama y se pide al entrevistado que los describa:



Se les pide su opinión sobre la validez de la prueba en cuanto a la dependencia de la figura elegida como ejemplo genérico de función positiva de c+ y en cuanto al número de intervalos que incluye la partición con la que se aplica el método.

Se proponen después este enunciado y su respectivo diagrama: *Para funciones positivas de c+ el MR½ ofrece una aproximación por defecto del área bajo la gráfica.*



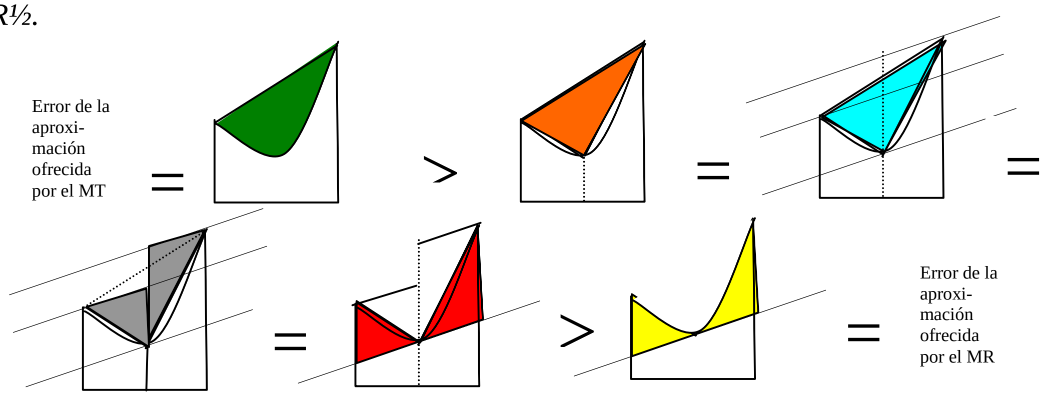
Se les pregunta: ¿en qué momentos de las pruebas anteriores se usa el dato de la c+? ¿qué aproximaciones ofrecen el MT y el MR½ cuando las funciones no

[3] Eran seis los estudiantes que cumplían este requisito pero uno de ellos no aceptó ser entrevistado; el resto, unos 30 estudiantes, habían hecho el año anterior otros estudios universitarios o no habían ingresado a la Universidad ese año pues tenían pendiente la aprobación del examen de alguna asignatura.

[4] La c+ en un intervalo implica la continuidad y ésta la posibilidad de hablar de "área bajo la gráfica".

[5] En la etapa preuniversitaria estos estudiantes han realizado un primer curso de Cálculo donde se enfatiza la representación gráfica de funciones a partir de su expresión analítica. Es de esperar, entonces, que todos manejen la caracterización de funciones de c+ a partir del signo de su derivada segunda.

tienen c+?, y ¿qué aproximaciones ofrecen el MR1 y el MR2 para funciones de c+? Se propone luego otro enunciado con su diagrama[6]: *Para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aproximación del área bajo la gráfica menos ajustada que la que ofrece el MR½.*



El análisis de las entrevistas

Centramos el análisis en la respuesta a ciertas interrogantes, que podemos dividir en dos grupos: las que indagan sobre la definición de los objetos involucrados y las que lo hacen sobre la justificación de las afirmaciones realizadas. Con relación a las definiciones, analizamos, por ejemplo, las distintas caracterizaciones de función de c+ que maneja un estudiante, las relaciones que establece entre ellas y los ejemplos y no-ejemplos de función de c+ que maneja. Con relación a las pruebas, entre otros aspectos, examinamos cómo interpreta los enunciados, cómo lee los diagramas, cómo verbaliza los argumentos visuales y cómo valora el carácter genérico de los diagramas.

Algunas conclusiones del análisis de las entrevistas:

Respecto a las definiciones de función de c+: Apreciamos una gran variedad de caracterizaciones movilizadas por el tratamiento de ejemplos gráficos y la interpretación de pruebas visuales; aparecen así caracterizaciones que ya habían mencionado ante el pedido de definición o en el tratamiento de los primeros ejemplos, pero en todos los casos, aparecen otras que aún no habían sido mencionadas. Esta variedad contrasta con la suficiencia de una caracterización (derivada segunda no negativa) para realizar las mismas tareas cuando las funciones son dadas algebraicamente. A pesar de la variedad, las caracterizaciones no aparecen totalmente desconectadas sino que en varios de los entrevistados se encuentran intentos por vincularlas deductivamente. No todas ellas les eran conocidas sino que se pudo detectar en sus apariciones referencias al conocimiento escolar previo y formulaciones ligadas a la exigencia del problema que la involucra.

Respecto al tratamiento de ejemplos de función de c+: Destaca en este sentido, la ausencia de ejemplos en funciones no derivables y la presencia de "parábolas" como prototipo de función de c+. La variedad de actividades propuestas, llevó a los entrevistados a enriquecer su repertorio de ejemplos. Detectamos también la existencia de contradicciones en varios de los entrevistados al clasificar funciones cuyo gráfico es una recta como ejemplos o no-ejemplos, mostrando inconsistencias en sus esquemas conceptuales producto de la indecisión entre una definición jerárquica o particional.

[6] La prueba visual correspondiente al tercer teorema, aunque basada en ella, no es exactamente la que aparece en Nelsen ('93). Se le agregó un paso en la cadena de desigualdades (el último de la primera fila) por ciertas dificultades de interpretación detectadas en unas entrevistas piloto realizadas previamente.

Respecto a las pruebas presentadas en la entrevista: El cuestionamiento respecto al carácter genérico de los diagramas no fue espontáneo por parte de los entrevistados. Pero cuando se les pregunta al respecto, algunos de ellos, invocando caracterizaciones de las funciones involucradas, dieron señales de argumentar con independencia de los atributos irrelevantes del diagrama; exceptuando el tema de la derivabilidad en los teoremas 2 y 3, ya que ninguno de los entrevistados cuestionó la validez de esas pruebas si la función no fuera derivable en su punto medio. Sin embargo, no parece ser el uso sistemático de atributos irrelevantes en la interpretación de pruebas visuales, la mayor dificultad para llevar a clase este tipo de justificaciones; sino que ésta parece radicar, principalmente, en la ausencia de cuestionamiento del tipo de atributos en que se apoyan sus justificaciones. Parece que el carácter genérico de una prueba visual pasa para estos estudiantes por la elección de un diagrama "sin particularidades", más que por el tipo de argumentos en que se basa el razonamiento sugerido por ese diagrama.

Implicancias didácticas

- La definición de un concepto predetermina los atributos compartidos por sus ejemplos, y representa el criterio fundamental para la clasificación de ejemplos y la interpretación de pruebas visuales. La validez de una prueba visual pasa por el uso exclusivo de los atributos relevantes de los objetos graficados, más que por la construcción de un buen diagrama. Creemos importante que el alumno reconozca que para detectar los atributos relevantes de los objetos graficados y evaluar así la validez de la prueba, es imprescindible recurrir al enunciado (ya que él mismo es parte de la prueba) y a la definición de los objetos que ese enunciado menciona.
- Cada concepto puede ser definido de diferentes maneras. Disponer de una gran variedad de definiciones equivalentes colabora en la resolución de problemas en las que el concepto está involucrado. En este sentido, el trabajo con pruebas visuales ha mostrado ser motivo de enriquecimiento del esquema conceptual en cuestión.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1988) Etude des processus de preuve des élèves de Collège. *Thèse de Doctorat d'état ès-sciences*. Grenoble: Université Joseph Fourier. Vol. 1 (http://callimaque.grenet.fr).

Bills, L., Tall, D. (1998) Operable Definitions in Advanced Mathematics: the Case of the Least Upper Bound. *Proceedings XXII PME Conference*. Southafrica.

Calvo, C. (1997) *Bases para una propuesta didáctica sobre Integrales.* Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Barcelona.

De VILLIERS, M. (1998) To Teach Definitions in Geometry or to Teach to Define? *Proceedings XXII PME Conference.* Southafrica.

Mariotti, M. A., Fischbein, E. (1997) Defining in Classroom Activities. *Educational Studies in Mathematics*. Nº34 Pp. 219.

Martin, G., Harel, G. (1989) The Role of the Figure in Students' Concepts of Geometric Proof. *Proceedings XIII PME Conference.* Paris.

Nelsen, R.B. (1993) *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking.* The Mathematical Association of America.

Vinner, S. (1991) The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Pp. 65-80.

Wilson, P. (1990) Inconsistent Ideas Related to Definitions and Examples. *Focus in Learning Problems in Mathematics*. Vol. 12. Nº 3-4. Pp. 31.

Una situación didáctica generada para orientar la visualización de una propiedad geométrica

Martha Elena Guzmán; Raúl David Katz
Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. Argentina
rdkatz@fceia.unr.edu.ar mguzman@fceia.unr.edu.ar

Resumen
En el trabajo se describe una situación didáctica implementada en un curso de primer año de la carrera de Ingeniería Civil y fue propuesta como una alternativa de mediación en la tarea de construcción del saber, que según nuestra concepción del aprendizaje es una tarea inalienable de la persona que aprende. La intención fue provocar en los alumnos la visualización de la propiedad: “ El paraboloide hiperbólico es una superficie que admite dos sistemas de generatrices rectas”. Se pretendió la incorporación de una imagen gráfica del paraboloide como una superficie reglada de modo que el objeto, la propiedad en cuestión, sea evocado sin que el mismo esté directamente presente.
A este respecto, entendemos que dominar un concepto matemático consiste en conocer sus distintas representaciones y en este sentido, que la generación activa de una imagen visual, lograda a través de los lenguajes del Álgebra y de la Geometría, aumentan la capacidad cognitiva y por consiguiente la capacidad de pensamiento sobre el objeto o concepto de estudio.

Introducción

La actividad que se refiere se realizó en un curso de primer año, en la asignatura Álgebra y Geometría I, perteneciente al Departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica, en la carrera de Ingeniería Civil, de la Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario.
La misma se inscribe en el marco del Proyecto de Investigación sobre “Enseñanza de la Matemática” que llevamos a cabo en la misma Facultad.
La investigación se sustenta en la concepción de aprendizaje significativo, según la cual el educando es artesano del conocimiento y en la que se concibe la relación docente – alumno como un proceso interactivo que produce modificaciones recíprocas en los modos de aprehensión del saber. Este concepto de aprendizaje se fundamenta en la psicología cognitiva y en la tesis constructivista que procura entender el aprendizaje del alumno no solamente a partir del análisis externo y objetivo de lo que se enseña sino que se tienen en cuenta las interpretaciones que el propio alumno construye. En ese proceso de construcción se produce una dinámica en la interactividad que tiene relación con la vinculación del alumno con los diferentes elementos que favorecen el proceso.
El aprendizaje implica la incorporación de nuevas significaciones a los conocimientos que ya se tienen. Es un proceso constructivo interno que se apoya en la actividad cognitiva del sujeto para reorganizar y ampliar el conocimiento previo. Este proceso de reorganización -asimilación, equilibración y acomodación en la teoría piagetiana- supone que todo conocimiento se relaciona con algún aspecto relevante, ya existente, del conocimiento previo y se ubica en la estructura cognitiva modificando su configuración anterior.
En este proceso, la mediación es indispensable para la adquisición del conocimiento y el desarrollo. El docente interacciona para incidir de tal manera que el desarrollo se acelere, de modo que la estrategia educativa consistirá básicamente en proporcionarle al alumno la manera de acceder al conocimiento, permitiéndole relacionar lo que el profesor enseña con su propia estructura cognitiva.

Al respecto consideramos el proceso enseñanza – aprendizaje como un sistema en el cual intervienen componentes vinculadas por una serie de relaciones que lo caracterizan y lo determinan, los significados que construye el alumno son el resultado de interacciones en las que participan como mínimo tres elementos: el alumno, los contenidos y el profesor.
A este sistema de relaciones se agregan las componentes que se incorporan con las nuevas tecnologías de la información y todas las modificaciones que por su sola presencia estas tecnologías producen. La tecnología informática, como otro recurso que el docente puede usar en clase, produce alteraciones: de organización de clase, de planificación y tratamiento de contenidos, de utilización de metodologías, de acceso a la información etc. Desde el punto de vista pedagógico se produce una transformación que puede ser ampliamente explotada por el docente, cual es la relación directa del alumno con los datos y la posibilidad de transformarla en información significativa.
Con la utilización de la herramienta computacional, las clases de matemática se convierten en laboratorios que permiten al alumno explorar distintas situaciones.
Nos interesa destacar, para la actividad elegida, el papel que la herramienta computacional desempeña en la "visualización", entendida como el proceso que ayuda a comprender una relación abstracta. En la idea de visualización aparecen dos aspectos básicos complementarios: una externa al sujeto (con soporte material) y otra interna a los mismos sujetos (imagen mental). La noción de visualización está ligada a la capacidad para la formación de imágenes mentales, lo que implica "saber ver" y "saber interpretar".
La visualización presupone orientar la percepción del alumno para "facilitar la penetración en la esencia de las cosas" (H. Hernández Fernández -1998). Puede servir de base a una abstracción o como elemento heurístico, de modo que consideramos que la comprensión que se logra mediante el procesamiento de la información visual y la que se consigue por procedimientos analíticos se complementan por lo que el aprendizaje se produce integrando ambos códigos.

La situación didáctica.

La situación didáctica tuvo como propuesta para los alumnos resolver el siguiente problema:

"Probar que el paraboloide hiperbólico es una superficie que admite dos sistemas de generatrices rectas".

La elección del tema se fundamenta en el interés que en el Ciclo Profesional de la Ingeniería Civil tiene el estudio de los cascarones con forma de paraboloide hiperbólico, la considerando éste como una superficie reglada. Esta propiedad la hace adecuada para su ejecución en madera, ya que resulta fácil disponer de la duela y los largueros según las dos direcciones de sus generatrices rectas. Además las cubiertas de concreto reforzado con esta forma ofrecen muchas posibilidades desde el punto de vista práctico y estético, y pueden obtenerse con facilidad mediante cortes y uniones de figuras más diversas.

El ejercicio de la demostración enfrenta a los alumnos con sus estructuras interpretativas, que los obliga a una reflexión abarcadora de los temas desarrollados en la asignatura.
En este caso la comprensión de la tesis significó una perturbación en los alumnos ya que no tenían dificultades para lograr una visión de la forma geométrica del paraboloide

hiperbólico a partir de su ecuación ni tampoco para comprender que esta superficie puede generarse por traslación de una parábola al desplazarse paralelamente a sí misma, moviéndose a lo largo de otra parábola de concavidad opuesta contenida en un plano perpendicular de la primera. Reconocían las dos rectas de la superficie que pasan por el origen, pero no lograban imaginar a esta superficie, de doble curvatura, constituida por dos sistemas de generatrices rectas.
Entonces, con la intención de facilitar el abordaje y posterior resolución analítica de la propuesta planteada se proporcionó una guía de aprendizaje y un cuaderno electrónico con comandos del Mathematica adecuados.

La guía de aprendizaje

Aunque los estudiantes parecían estar más preparados para una representación simbólica de la situación- la intuición geométrica prácticamente no es ejercitada en la escuela media- pareció prudente presentar el modo icónico, que separa un paso de lo concreto y de lo físico para entrar en el campo de las imágenes mentales (Resnick, 1990), de modo que los estudiantes dispusieran de imágenes de reserva cuando les fallaran las manipulaciones simbólicas.
Las preguntas o pasos formulados se adecuan a la heurística, en el sentido de Polya, que permite proceder de forma sistemática hacia el insight. Estas indicaciones actúan como medios para favorecer el descubrimiento y el desarrollo cognitivo que supone una reestructuración constante de los datos y de las relaciones.

I- Considere la ecuación $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ (1)

y el sistema $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = t\,z \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{t} \end{cases}$ $t \in R - \{0\}$ (2) (t es un parámetro)

1) ¿Qué representan la ecuación (1) y el sistema (2) para cada valor de t distinto de cero?

2) ¿Qué ecuación se obtiene cuando se multiplican miembro a miembro las ecuaciones del sistema (2)?

3) Analice cuáles de las siguientes proposiciones se deducen del ítem 1) o 2).

a) si las coordenadas de un punto satisfacen el sistema (2) entonces también satisfacen la ecuación (1) ;

b) para cada valor de $t \neq 0$ el sistema (2) representa una recta en el espacio, íntegramente contenida en la superficie de ecuación (1) ;
c) hay infinitas rectas del espacio incluidas en la superficie de ecuación (1);

- Sugerencia: recurra al cuaderno electrónico por medio del cual podrá observar una particular de las rectas del sistema (2) como intersección de la superficie con uno de los planos que la determinan.

Considere ahora el sistema $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{s}\, z \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = s \end{cases}$ $\quad s \in R - \{0\} \qquad (3)$

4) Responda para el sistema (3) todos los ítems referidos al sistema (2).
5) Pruebe que las familias de rectas definidas por los sistemas (2) y (3) no poseen rectas en común.
6) Pruebe que toda recta de la familia (3) se intercepta con toda recta de la familia (2).

Los alumnos, guiados en su proceso de visualización, pusieron en juego organizadores previos, pudiendo en su mayoría, organizar y asimilar la significatividad intrínseca del contenido.
Al terminar esta etapa comprobaron y aceptaron como prueba final que, en efecto, las rectas de un sistema se cortan con las del otro sistema determinado puntos del paraboloide.
Sin embargo en algunos alumnos, en número no despreciable, surgieron dos preguntas interesantes:

a) ¿ Las rectas contenidas en la superficie que se cortan en el origen pertenecen a las familias (1) y (2)?
b) ¿Habrá puntos de la superficie que no sean intersección de rectas de (1) y de (2)?

La respuesta para a) resultó, de manera no formal, de la discusión sobre los parámetros s y t mediante un proceso de paso al límite. Para responder se planificó la segunda parte de la guía, pensada como el andamiaje necesario para arribar a la solución.

II- 1) ¿Dado un punto cualquiera de la superficie, existe una recta que contiene al punto y está contenida en la superficie? En otras palabras, fijado el punto A $(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ perteneciente a la superficie, ¿siempre existe un vector $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ tal que los puntos de la recta de ecuaciones $\begin{cases} x = x_0 + u_1\ t \\ y = y_0 + u_2\ t \\ z = z_0 + u_3\ t \end{cases}$ $\forall\, t \in R$ satisfacen la ecuación $z = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$?

El camino algebraico para encontrar las direcciones fue facilitado por el docente arribando en forma conjunta a los sistemas:

$$(S_1)\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_2 = \dfrac{3}{2}\ \alpha \\ u_3 = \left(\dfrac{x_0}{2} - \dfrac{y_0}{3}\right)\ \alpha \end{cases} \quad \alpha \in R \qquad \text{y} \qquad (S_2)\begin{cases} u_1 = \beta \\ u_2 = -\dfrac{3}{2}\ \beta \\ u_3 = \left(\dfrac{x_0}{2} + \dfrac{y_0}{3}\right)\ \beta \end{cases} \quad \beta \in R$$

2) Particularice para el punto A(4,3,3) que pertenece a la superficie (verifique), elija $\alpha = 2$ en (S_1) y $\beta = 2$ en (S_2) y obtenga los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ correspondientes.
3) Escriba las rectas (4) y (5) que contienen al punto A(4,3,3) y tienen las direcciones de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ hallados en (2).
4) Verifique que las rectas de ecuaciones (4) y (5) pertenecen a las familias de rectas definidas en (2) o (3).

- Como punto final del recorrido de la guía :

¿está en condiciones de afirmar que el paraboloide hiperbólico de ecuación $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ está generado por las rectas de los sistemas (2) y (3)?

A manera de conclusión

El problema se planteó como tarea extra –áulica y tuvo el carácter de síntesis integradora. En general fue resuelto por un alto porcentaje de alumnos, si bien ocuparon distintos tiempos y espacios grupales. Demostraron, en la devolución, haber trabajado con responsabilidad en una auténtica tarea de indagación y de independencia aunque el trabajo se resolviera en algunos casos en grupo.
En general reconocieron que la actividad en el laboratorio, "jugando" con los planos y la superficie significó el medio que les facilitó confirmar la tesis de la propuesta y aceptar en su totalidad los razonamientos analíticos.
Creemos que la guía, potencialmente comprensiva, se concretó en un proceso por el cual se establecieron vínculos entre el planteamiento del problema por una parte, y la red semántica de la persona, su conocimiento de los procedimientos y su conocimiento general acerca de las relaciones matemáticas y espaciales por otra, logrando así un conocimiento estructurado, una representación integrada internamente a las propias estructuras cognitivas.

Referencias bibliográficas

Eisner, Eliot. (1998). *Cognición y Currículum*, Buenos Aires, Argentina: Colección Agenda educativa.
Hernández Fernández, Hermida y otros. (1998). *Cuestiones de didáctica de la matemática*. Rosario, Argentina: Homo Sapiens.
Polya G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas.
Resnick, Lauren. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Madrid, España: Paidós.
Sunkel, María Helena. (1984). *Geometría Analítica en forma vectorial y matricial*. Buenos Aires, Argentina: Nueva Librería.

La enseñanza de la matemática en Carreras de Ingeniería
Tercera entrega: Álgebra y Geometría I. Teoría , práctica y aplicaciones

Salvador Gigena*, **, Félix Molina*, Daniel Joaquin*, Oscar Gomez*, Adolfo Vignoli*
* Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas , Físicas y Naturales
Universidad Nacional de Córdoba. República Argentina
** Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas , Ingeniería y Agrimensura.
Universidad Nacional de Rosario. República Argentina
sgigena@fceia.unr.edu.ar.

Resumen
En el campo de la formación de los alumnos que cursan carreras de Ingeniería se produce una permanente discusión entre la necesidad de un sólido fundamento en las Ciencias Básicas, en particular Matemática, y el sentido de capacitar a los futuros ingenieros en su práctica profesional. Reunir en el proceso de enseñanza y aprendizaje estos dos eventos parece difícil en la práctica del aula. En razón de esta problemática se ha considerado desarrollar una serie de textos en Matemática, que reflejen las relaciones de Teoría, Práctica y Aplicaciones. Hasta el presente se han realizado dos presentaciones Análisis Matemático I y Análisis Matemático II, y en esta instancia Álgebra y Geometría.
Se considera importante este tipo de enfoque porque permite a los alumnos cursantes de la materia establecer una base sólida en Álgebra y Geometría, para luego aplicarla en problemas relacionados a diferentes situaciones en las que opera la Ingeniería.

Introducción
Las tendencias actuales se orientan hacia la importancia de un sistema educativo, de formación profesional fuerte, y académicamente exigente. Esto implica mejores relaciones e interacciones entre las instituciones formadoras de recursos humanos y el mundo de la práctica profesional. Según lo expresado en (Olszak, 2000), se pueden identificar dos campos: el de la formación y el de la profesión, que contribuyen al desarrollo del perfil profesional en las carreras de Ingeniería.
En el campo de la formación es importante considerar las estrategias de enseñanza en el aula, que expresan el pensamiento del docente, su historia personal, su formación profesional, su metodología de enseñanza, sus recursos didácticos, que impactarán en el proceso de formación de los alumnos, orientadas curricularmente al campo profesional, incluso desde la primeras materias, como Álgebra y Análisis Matemático. Dentro de este marco general, este grupo de docentes asume como trabajo de investigación, en el proyecto "Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería", el desarrollo de libros de nivel universitario, a fin de orientar la Teoría, Práctica y las Aplicaciones, en esta caso particular del Álgebra y la Geometría.

Marco Teórico
Los alumnos de los primeros años de Ingeniería, no tienen la claridad de un método de estudio, que les permita avanzar sin dificultad en el aprendizaje de las Matemáticas. Además en estudios realizados por distintos autores (Azpilicueta, 1999); (Azpilicueta, 2000) en alumnos ingresantes a primer año en carreras de Ingeniería, denotan en general una mala base en Matemática. En este punto es necesario plantear que el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos, debe ir acompañado entre otros indicadores, de una sólida fundamentación teórica. Desde esta perspectiva se considera importante ampliar la oferta bibliográfica al alumno, con una rigurosa base matemática, acompañada de una innovadora nómina de aplicaciones, con especial referencia para Ingeniería, (Gigena, 1999)

y (Gigena, 2000). Para este propósito con la finalidad de estructurar el libro: Álgebra y Geometría, se realiza:

- Un análisis comparativo de la enseñanza de la Matemática en el contexto de la convergencia de disciplinas de las carreras de Ingeniería, según los programas vigentes en las principales Universidades de la República Argentina. (Peralta y Gutiérrez, 2000); (Jover, 2000)
- Un profundo estudio del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, tratando de combinar el rigor de la misma como ciencia formal abstracta, con aplicaciones a los problemas físico-tecnológicos. (Azpilicueta, 1999), (Azpilicueta, 2000)
- Un examen de diversas aplicaciones de la Matemática a la Ingeniería, clasificando los problemas según la disciplina interviniente con fines propedéuticos, con respecto a las materias de aplicación en los actuales planes de estudio, siguiendo los criterios de homologación de Argentina e Ibero América (CONFEDI- Consejo Federal de Decanos de Ingeniería; ASIBEI- Asociación Iberoamericana de Enseñanza de la Ingeniería). (Moitre, 2000)

Objetivo

El objetivo de la publicación de este texto, está orientado al doble propósito de facilitar los aprendizajes en el dictado de la materia Álgebra y Geometría y favorecer la ejercitación de prácticas útiles en el campo de la Ingeniería.

Metodología

La idea central de este estudio consiste de tres fases o instancias:

1) Fase Descriptiva: en base a un diagnóstico de los materiales didácticos (libros, apuntes, guías, etc.) que se utilizan para las materias de primer año en los cursos de Álgebra y Análisis Matemático, en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, en la Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, en la Facultad de Ciencias Exactas y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, en la Universidad Católica de Córdoba y en la Universidad Blas Plascal.
2) Fase Comparativa: de diferentes programas en el área Matemática, que se desarrollan en distintas Universidades Nacionales y Privadas y qué bibliografía acompaña al dictado de las materias específicas, con especial referencia a Álgebra y Geometría.
3) Fase Evaluativa: para proponer un modelo de texto, haciendo hincapié en la Teoría, Práctica y sus Aplicaciones, considerando en éstas últimas las relacionadas con problemas físico-tecnológicos, que se presentan en la práctica profesional de la Ingeniería.

Resultados

El libro motivo de esta presentación, "Álgebra y Geometría. Teoría, Práctica y Aplicaciones", consta de once capítulos cuyo índice sintético es el siguiente:

1. **Sistemas de ecuaciones lineales**

Cuerpos, incluyendo algo no usual: cuerpos finitos. Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices: operaciones elementales de fila, inversibilidad de las operaciones. Reducción por filas, sistemas homogéneos: condiciones para existencia de soluciones no triviales; sistemas no homogéneos. Teorema de Rouché–Frobenius. Álgebra matricial. Algoritmo para determinar inversibilidad y su uso para resolver sistemas de ecuaciones lineales: homogéneos y no homogéneos.

2. **Álgebra vectorial**

Vectores geométricos: Segmento orientado de recta. Equipolencia. Operaciones. Espacio vectorial. Longitud de un vector. Desigualdad triangular. Vectores de coordenadas: equivalencia con vectores geométricos. Dependencia e independencia lineal. Bases. Rectas en el plano y en el espacio. Ecuaciones paramétricas vectoriales y escalares. Ecuaciones cartesianas. Paralelismo e intersección. Planos en el espacio. Ecuaciones paramétricas vectoriales y escalares. Ecuaciones cartesianas. Paralelismo e intersección de planos. Paralelismo e intersección de rectas y planos.

3. **Geometría Euclidiana. Problemas Métricos**

Módulo y distancia. Vectores unitarios. Ángulos de vectores. Proyección escalar y proyección vectorial. Cosenos directores. Producto interno.

4. **Producto vectorial, producto mixto: áreas y volúmenes**

Introducción operacional de determinantes. Producto vectorial en el espacio. Producto mixto de vectores.

5. **Cambio de Sistemas de Coordenadas**

Cambios de coordenadas en el plano y en el espacio: fórmulas de transformación.

Cambios en la descripción de lugares geométricos: puntos, rectas, planos, Circunferencias. Movimientos euclídeos en el plano y en el espacio: traslaciones y rotaciones. Matrices ortogonales y matrices especiales.

6. **Cónicas en el plano euclídeo: clasificación**

Curvas de segundo grado en el plano: definición y ejemplos. Definición métrica de la parábola: foco y directriz. Definición métrica de la elipse: focos y excentricidad.

Definición métrica de la hipérbola: focos, excentricidad, asíntotas. Invariantes Euclídeos: el discriminante. Clasificación de las cónicas.

7. Espacios Vectoriales

Espacios vectoriales: Definición y propiedades. Subespacios vectoriales : Definición y caracterización de los mismos. Combinaciones lineales. Generadores. Depen-dencia e independencia lineal. Bases y Dimensión de un espacio vectorial. Bases ordenadas. Coordenadas. Cambio de base. Matriz de cambio de base.

8. **Funciones Lineales**

Funciones Lineales: Definición y propiedades. Imagen y Núcleo de una función lineal. Rango y Nulidad. Álgebra de Funciones Lineales. Composición de funciones lineales. Matriz asociada a una función lineal.

9. **Valores y Vectores Propios**

Valores, vectores y subespacios propios. Polinomio y ecuación característica de un operador lineal. Caracterización de los valores propios de un operador lineal. Operadores diagonalizables.

10. Formas Bilineales

Formas Bilineales: introducción. Formas Bilineales Simétricas. Formas cuadráticas.

11. **Aplicaciones**

En este capítulo se consideran distintos tipos de problemas que se han elegido teniendo en cuenta:

- La aplicación de ecuaciones lineales a la resolución de una red: basada en las leyes de Ohm y de Kirchhoff.
- La aplicación de la elipse a un cálculo orbital.
- La aplicación de la parábola a la caída libre de un cuerpo.
- La aplicación del producto escalar al cálculo del trabajo efectuado por una fuerza.
- La aplicación del producto vectorial al cálculo del momento de una fuerza.
- La aplicación de la función determinante al cálculo del área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$.
- La aplicación del Álgebra Matricial, los Espacios Vectoriales y las Funciones. Lineales a algunos aspectos de la Codificación en Telecomunicaciones.

En esta última aplicación, precisamente, se considera la resolución de ecuaciones **con coeficientes en Cuerpos Finitos**, siendo éste un aporte innovador para el texto de Álgebra, ya que no se desarrolla este enfoque en la mayoría de los libros habituales de la materia. En (Hoffman y Kunze, 1979) se trata este tema en el cuerpo de los números complejos a diferencia de este enfoque que lo trata en los cuerpos en general. La idea es ir del concepto directamente a la aplicación. Para dar una idea de su utilidad desarrollamos a seguir un resumen del enunciado de este problema-aplicación, cuyo texto completo y su resolución pueden consultarse en nuestro libro:
“A los mensajes de señales, una vez debidamente digitalizados, podemos imaginarlos como un “chorro” de pulsos que, en definitiva, son una sucesión de niveles de diferencia de potencial, por ejemplo 4,5 voltios, o la ausencia de ella: 0 voltios; que los asimilaremos a “1s” ó “0s” respectivamente. La unidad fundamental de información para todo sistema binario, es el bit (de binary digit). Cada bit puede ser un “1” ó un “0”. Por ejemplo, la palabra “THINK”, usando un código standard de seis bits, presenta el aspecto:

$$\overbrace{001010}^{T}\overbrace{000100}^{H}\overbrace{100100}^{I}\overbrace{011100}^{N}\overbrace{110100}^{K}$$

Durante la transmisión de la señal (palabra – mensaje), existe una probabilidad de que, debido a ruido, distorsión y otros fenómenos indeseados, uno o más bits resulten perturbados, produciéndose una alteración del mensaje.
Para hacer posible la detección del probable error y aún en ciertos casos su corrección, se han ideado procedimientos que consisten en agregar a los bits originales, otros en determinado número, produciendo lo que se denomina una “redundancia de bits”, que sirven luego para “chequear” la presencia o ausencia de error. Estos procedimientos reciben el nombre genérico de codificación. Un codificador transforma una palabra-mensaje, también llamada “vector-mensaje” de k-dígitos, en una palabra-código, o “vector-código”, que es un bloque más grande, por ejemplo de n-dígitos. Esto se hace a partir de un cierto alfabeto de elementos. Cuando el alfabeto consiste de dos elementos (0 y 1), se trata de un código binario, constituido por dígitos binarios (bits). En lo que sigue nos referiremos a este tipo de códigos, es decir: códigos binarios. Los mensajes de k-bits forman secuencias, que las llamaremos k-uplas (secuencias de k-dígitos), donde el número de mensajes distintos posibles es 2^k. Los bloques de n-bits, pueden producir 2^n secuencias distintas, llamadas n-uplas. El proceso de codificación, asigna a cada una de las 2^k k-uplas de

palabras-mensaje, una de las 2^n n-uplas palabras-código. Un código-bloque, representa una asignación biunívoca, donde las 2^k k-uplas de vectores-mensaje, son enviadas a un nuevo conjunto de 2^k n-uplas de vectores-código. . . . . . ."

Discusión

Se ha desarrollado un texto de Álgebra y Geometría que ha permitido a los alumnos cursantes de la materia:

- Elaborar modelos matemáticos, con rigurosa base teórica, de diferentes sistemas (físico-técnicos) con que opera la Ingeniería. (Abud, 1998)
- Generar la capacidad de implementar estos modelos en un proceso gradual. (Abud, 1995)
- Proponer algoritmos a través de los cuales se puede aplicar un determinado modelo con proyección a la Ingeniería.

Estas actividades han facilitado de manera concreta y gradual los aprendizajes de los alumnos como así mismo el análisis de problemas prácticos de la Ingeniería, vinculados a los cálculos del Álgebra y la Geometría, relacionando directamente el campo de formación con el campo profesional.

Referencias bibliográficas

Olszak, S.I. (2000). Perfil ocupacional de Jóvenes Profesionales (Ingenieros Industriales y Lic. En Administración) y Estrategias de Enseñanza Universitaria. *Anales 3er. Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Tomo I.* Bahía Blanca. Argentina.

Azpilicueta, J. et al (1999). *La Resolución de Problemas como Metodología Activa en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje del Análisis Matemático y sus Aplicaciones en Carreras de Ingeniería.* Congreso Iberoamericano de Enseñanza de la Ingeniería y Arquitectura. La Habana. Cuba.

Azpilicueta, J. et al (2000). *Contextualización de la Metodología de la Resolución de Problemas y la Modelización Matemática en el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje del Análisis Matemático.* IV Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. La Habana. Cuba.

Gigena, S. et al (1999). *Análisis Matemático II. Teoría, Práctica y Aplicaciones.* Editorial El Galeón. I.S.B.N. 987-9363-04-3.

Gigena, S. et al (2000). La Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería. Segunda Entrega: Análisis Matemático II. Teoría, Práctica y Aplicaciones. *Anales 3er. Congreso Argentino de Enseñanza de Ingeniería. Tomo I.* Bahia Blanca. Argentina.

Peralta, S.; Gutiérrez C. (2000). Los Diseños Curriculares: Instrumentos de Cambio. *Anales del 3er. Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Tomo I.* Bahía Blanca. Argentina.

Jover, M. et al (2000). La Relación entre la Necesidad y Demanda en la formación del Ingeniero. *Anales 3er. Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Tomo I.* Bahía Blanca. Argentina.

Moitre, D. (2000). *Anales del 3er. Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Tomo I.* Bahía Blanca. Argentina.

Hoffman, K.; K. Kunze (1979) *Álgebra Lineal.* Ed. Prentice/Hall Internacional.

Abud, D. (1995). *La Didáctica en la Enseñanza de la Ingeniería*, Fac. de Filosofía y Humanidades, Universidad Nac. de Córdoba.

Abud, D. (1998). *Diseño del curriculum para materias de Física de Ingeniería de la UTN*, Fac. Reg. Córdoba.

La geometría de hoy en la formación de profesores: La Topología

Carmen Sosa Garza; Roberto Torres Hernández
Universidad Autónoma de Querétaro, México
carsg@sunserver.uaq.mx robert@sunserver.uaq.mx

Resumen
Este trabajo consiste en presentar material de topología, a la que llamamos la geometría de hoy, dirigido principalmente a profesores con formación profesional no matemática. Se trata de presentar algunos conceptos y teoremas importantes de topología, en forma descriptiva e intuitiva, retomando los conceptos elementales que de esta materia aparecen en los cursos de cálculo diferencial e integral. Como ejemplo concreto se presenta el concepto de *función continua*, partiendo de lo que se conoce de una función real continua hasta su generalización en espacios topológicos.

Marco Teórico

Ante el fracaso de la educación se han hecho varias proposiciones acerca de mejorar nuestra educación en el aula. El constructivismo no es una teoría sobre la enseñanza, es una teoría sobre aprendizaje y conocimiento. Para esta teoría el aprendizaje es un proceso autorregulado con la finalidad de resolver conflictos cognitivos internos que aparecen comúnmente por una experiencia concreta, discurso o reflexión. Al presentar a un profesor este material, creemos que podrá trabajar en un ambiente de descubrimiento de relaciones matemáticas donde, mediante actividades de aprendizaje construirá conceptos nuevos o generalizaciones (topológicas) a partir de conocimientos previos (de cálculo). También experimentará la situación que vive un alumno al presentarle un nuevo material.

Introducción

El objetivo del presente trabajo es proporcionar un panorama más o menos amplio de lo que se puede llamar una de las geometrías del siglo XX, la topología. Así como la creación de las geometrías no-euclidianas, la geometría de Riemann y otras transformó la actividad matemática en una actividad sobre lo posible y ya no en lo necesario, es decir, la idea de que existe un único modelo matemático para describir una realidad física única, se desplomó ante la evidencia de ciertos modelos, igualmente coherentes y válidos dentro de la estructura de la matemática. La topología se reconoció como un área diferente dentro de la matemática en los últimos cincuenta años. Es una de las más vigorosas y tiene grandes repercusiones en las antiguas ramas. Aunque nació como respuesta a la necesidad del Análisis Matemático no es una rama de él. Aunque Euler, en su célebre y conocido trabajo sobre los puentes de Köninsberg incursiona en terrenos que hoy día se reconocen de topología, podemos decir que esta nace con Karl Weierstrass en 1860 al analizar el concepto de límite de una función, con este objetivo reconstruyó nuevamente el sistema de los números reales y reveló algunas propiedades que ahora se llaman “topológicas”.
Posteriormente Cantor desarrolló la teoría de conjuntos (1890) en donde la topología se fundamentó. Con Poincaré, Huasdorff, Brower, Alexandrov, Lefschetz entre otros se logra un desarrollo sólido e independiente del análisis. Por supuesto, sí es un tipo de geometría, pero no es una forma más avanzada de la geometría como la proyectiva o la diferencial, sino una forma primitiva, que está en todas las geometrías. Reiterando, las ideas de la topología se encuentran en casi todas las ramas de las matemáticas.

Considerando que la mayoría de los libros de topología están en inglés, lo cual obstaculiza el acceso de los maestros a este material y aunando el hecho de que están escritos fundamentalmente por matemáticos para matemáticos o para gente con una gran base en matemáticas, se hace necesario contar con un material en español y con un enfoque más didáctico como introducción al tema.

Otro aspecto importante a señalar es el hecho de que la geometría que se enseña en preparatoria tiene 2000 años de antigüedad, mientras que en otras ramas del conocimiento no se utilizan fuentes tan antiguas. Por esto, la incorporación de conocimientos contemporáneos servirá para lograr una auténtica modernización educativa. Si bien es cierto que se ha ido evolucionando e involucrando elementos o material contemporáneo, como los paquetes de geometría Cabri o el Geometers Sketchpad, estos presentan el material utilizado por Euclides, con algunas diferencias como la del movimiento. Así, consideramos muy importante dar un aspecto dinámico a las matemáticas tal como realmente son. La matemática no es estática y con este material se tratará de dar una idea de cómo ha evolucionado la geometría.

Metodología

La idea central consiste en iniciar con ejemplos y conceptos conocidos, principalmente tomados del cálculo infinitesimal e ir generalizando y abstrayendo definiciones y resultados para llegar finalmente a las ideas y conceptos de topología.

El principal objetivo de trabajar este enfoque es el de diseñar un curso que sea comprensible para los profesores de nivel medio-superior y superior, que en la gran mayoría de los casos, no poseen formación matemática. Otra idea es la de estimular la intuición sobre ciertos aspectos de la Topología evitando tecnicismos y definiciones innecesarias.

Lo anterior se logrará bajo el siguiente esquema:

- El valor absoluto en los números reales y la distancia euclidiana en el plano real como ejemplos de distancias. Ejemplos de diferentes distancias. Concepto de métrica y espacio métrico.
- La idea de conjunto abierto en el plano como en diferentes espacios métricos. La definición de Espacio Topológico.
- La definición formal de continuidad vía épsilon-delta y su generalización a la definición topológica vía abiertos.
- El concepto de homeomorfismo.
- Las deformaciones topológicas apoyadas por la idea de homeomorfismo. Figuras homeomorfas y el Teorema de Clasificación de Superficies.

A continuación presentamos solamente una parte de los temas mencionados, trataremos como se puede llegar a la generalización de la definición de una función continua.

La Función Continua; una generalización.

Con los dos temas anteriores a éste, espacio métrico (mencionando varias distancias) y espacio topológico (dando ejemplo de varias topologías en un mismo conjunto) se ha logrado saber lo que significa si dos puntos están cercanos o no, la definición de disco con centro a y radio ε así como la noción de abierto. El objeto de saber si dos puntos son cercanos es para saber si una función es continua. Una de las primeras definiciones que se encuentran en el curso de cálculo es:

f: **R** $\rightarrow$ **R** es ***continua*** en a si:

$$lim_{x\to a^+} f(x) = lim_{x\to a^-} f(x)$$

f(a) esta definida

$$lim_{x\to a^+} f(x) = lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Nótese que el pedir que el límite por la derecha y por la izquierda de *f(x)* tienda a *f(a)* no es más que pedir que para puntos cercanos a a, tanto por la derecha como la izquierda, sus imágenes de dichos puntos estén cercanos a *f(a).*
Por lo que esta versión se puede reescribir de la siguiente forma, la cual es la forma conocida de épsilon-delta: *f* es ***continua*** en a si:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \ni |a - x|\delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

Asegurando que aquellos puntos que distan menor que δ de a, sus imágenes distarán menor que ε de *f(a)* donde $\varepsilon > 0$ pero tan pequeña como se quiera hacer. Utilizando los discos que se mencionaron en temas anteriores, $B(a,\delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid d(a, x) < \delta\}$ También se puede escribir de la siguiente manera:

f es ***continua*** en a, si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni f(\, a-\delta\, ,\, a+\delta\,) \subset (\, f(a)-\varepsilon\, ,\, f(a)+\varepsilon\,)$
donde $(\, a-\delta\, ,\, a+\delta\,)$ y $(\, f(a)-\varepsilon\, ,\, f(a)+\varepsilon\,)$ son intervalos abiertos de **R**, es decir, son los discos $B(a,\delta)$ y $B(f(a),\varepsilon)$ con la distancia euclidiana.
Por lo que la definición se puede generalizar para otras métricas obteniendo la siguiente versión: *f* es ***continua*** en a si

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \ni d_1(a,x) < \delta \Rightarrow d_2(f(a), f(x) < \varepsilon$$

No solamente se esta considerando una distancia diferente a la distancia euclidiana sino que también estas pueden ser diferentes entre sí. Por lo que si tuviéramos dos espacios métricos $(X\, ,\, d^*)$ y $(Y\, ,\, d')$ y $f : X \rightarrow Y$ se define que *f* es ***continua*** en a si

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni\ d^*(a\, ,\, x) < \delta\ \Rightarrow\ d'(fa)\, ,\, f(x)) < \varepsilon$$

Dado que con las funciones distancias se genera naturalmente la definición de abiertos como se hizo notar en los temas anteriores y estos están determinados por los discos $B(a,\varepsilon)$, los cuales dependerán de la distancia, se tiene que la definición anterior es equivalente a la definición: *f* es ***continua*** en a si,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni f(B^*(\, a\, ,\delta))\ \Rightarrow\ B'(f(a)\, ,\varepsilon.)$$

donde los discos dependerán de las distancias, d^* y d' respectivamente.

En el caso anterior, lo que se esta involucrando son abiertos, aunque estos estén, determinados por funciones distancias, sugiriendo la forma de poder definir cuando una función entre espacios topológicos es continua. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f: X \to Y$ una función, f es ***continua*** en *a si:*

$\forall V$ abierto de Y que contenga a $f(a)$, $\exists U$ abierto de X que contenga a a tal que $f(U) \subset V$.

Concluyendo con la definición topológica de función continua en *a*. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f: X \to Y$ una función, f es ***continua*** en *a si:*
$\forall V \text{ abierto en } Y,\ f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X$

Dichas definiciones son equivalentes ya que si se tiene un abierto V en Y, por demostrar que la imagen inversa de V es abierta en X, para toda $x \in X$ tal que $f(x) \in V$, es decir se encuentra en la imagen inversa de f, por ser continua f, existe un abierto U abierto en X tal que $f(U) \subset V$, luego

$$\exists U \text{ abierto de } X, x \in U \subset f^{-1}(V) \text{ por lo que } f^{-1}(V) \text{ es abierto.}$$

Análogamente sean $a \in X$ y V un abierto en Y que contenga a $f(a)$, como la imagen inversa de V es abierto,

$$\exists U \text{ abierto en } X,\ a \in U \subset f^{-1}(V)$$

Por lo que $f(U) \subset V$.

Es importante notar que la continuidad depende de la topología que el espacio tenga. Un mismo conjunto podrá tener varias topologías, y se podrá tener funciones continuas con una topología y no continua con otra topología. Como ejemplo esta la función identidad de los Reales a los Reales pero con diferentes topologías.

$$I : (R, \tau_e) \to (R, \tau_i)$$

la topología usual y la topología límite inferior respectivamente.
Dicho ejemplo prueba que no todas las funciones identidad son continuas, a pesar de poder sin levantar el lápiz del papel

Otro ejemplo:

$$h : (R, \tau_i) \to (R, \tau_e) \text{ definida por :}$$
$$h(x) = 1 \quad si\ x \geq 0$$
$$h(x) = -1 \quad si\ x < 0$$

Se puede demostrar que es continua, independientemente que al graficar sea necesario levantar el lápiz.
El objetivo de poder definir cuando una función es continua entre dos espacios topológicos es llegar a la noción de *homeomorfismo*, el cual es una función entre estos dos espacios que

es biyectiva y bicontinua, o dicho en lenguaje un poco menos técnico, que cumpla con las siguientes propiedades:

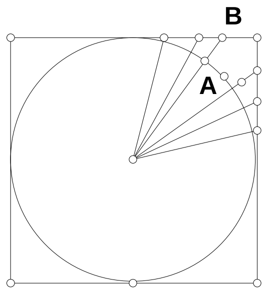
a. Puntos distintos tengan imágenes distintas.
b. Que cada punto del codominio sea imagen de un punto del dominio.
c. La función sea continua.
d. La función inversa también sea continua.

La noción de homeomorfismo desempeña en Topología el mismo papel que el de igualdad o congruencia en la geometría elemental, donde las propiedades principales son de magnitud. Es decir, al clasificar las figuras, el triángulo y el cuadrado estarán por supuesto en dos clases diferentes. En la geometría proyectiva, al clasificar se basarán en las proyectividades, la circunferencia y la elipse podrán estar en la misma clase pero los segmentos rectos se mantendrán rectos. En la topología las propiedades principales son los llamados *invariantes topológicos* los cuales no varían si la figura se deforma como si estuviera hecha de hule, sin desgarramientos ni adherencias.

Las propiedades de las figuras se enrarecen cada vez más a medida que se pasa de la geometría elemental a la proyectiva y de esta a la topología. Si bien es cierto que las propiedades topológicas son menos numerosas que las de geometría elemental o las de geometría proyectiva, no es menos cierto que las topológicas son las propiedades esenciales de la figura. Una manera intuitiva de describir un homeomorfismo entre dos figuras, es el de considerarlo como una deformación (función) de una en otra:

- Sin desgarramientos ya que lo que se desea es que puntos cercanos vayan a puntos cercanos para respetar la continuidad de la función.
- Sin adherencias ya que se quiere que a cada punto de la imagen, sea imagen de un solo punto para respetar la biyectividad de la función.

Por ejemplo un triángulo, un círculo, un hexágono, una elipse son figuras homeomorfas. Para ver esto, se necesita encontrar un homeomorfismo entre ellas. Por ejemplo, para un círculo y un cuadrado considérese la siguiente idea:



Del dibujo, podemos observar que la función f: *Círculo* $\rightarrow$ *Cuadrado*

$$A \rightarrow f(A)=B$$

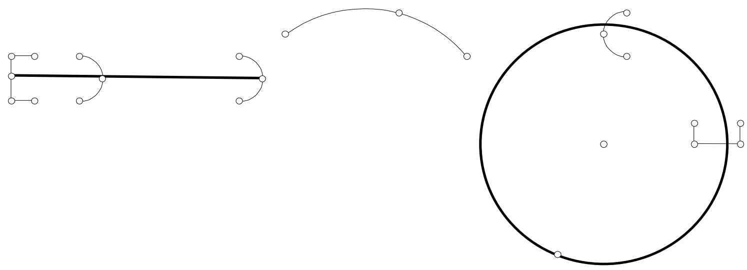
es un homeomorfismo.

Para terminar, consideremos el siguiente ejemplo:

$$f:[0,2\pi)\rightarrow R^2$$
$$t\rightarrow(\cos t,\operatorname{sen} t)$$

Es decir a cada $t\in[0,2\pi)$ le corresponde un punto sobre la circunferencia de radio uno. Notemos que *f* es una función inyectiva, suprayectiva y continua. Lo cual se puede probar fácilmente la intención sería definir la función inversa. La pregunta interesante aquí, es ver si esto es suficiente para garantizar la continuidad de la función inversa y obtener así un homeomorfismo.

La respuesta es que no es continua, ya que cualquier abierto que contenga al punto 0, por ejemplo el intervalo $[0, \pi/2)$, su imagen inversa bajo la inversa de *f*, es decir *f*$([0, \pi/2)$ sería el arco de circunferencia del punto (1,0) (incluido), al punto (0,1) (sin incluirlo), el cual no es un abierto en el plano real con la topología usual. Nótese que lo importante aquí es que no se permite pegar, al segmento se le podrá doblar pero no pegar por lo que la función no es un homeomorfismo. Otra manera de visualizar el hecho de que estas figuras no son homeomorfas, es el hecho de que para deformar la circunferencia en el intervalo, es necesario romper la circunferencia, lo que ya sabemos que está prohibido.



Nuestro objetivo sería finalizar con el teorema de clasificación de superficies. Comprender cómo la topología ayuda a estudiar las superficies, cuáles son algunas propiedades topológicas y como es que un homeomorfismo representa una deformación de una figura a otra, apelando constantemente a la intuición geométrica de los profesores.

Referencias bibliográficas

Armstrong, M.A. (1997). *Basic Topology*. Springer-Verlang.
Buskes; Van Rooij. (1999). *Topological Spaces. From distance to neighborhood.* Springer-Verlang.
Micha, Elías. (1983). *Introducción a la Topología*. México D.F.: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
Flegg, Graham. (1974). *From Geometry to Topology.* London, England: The English Universities Press Limited.
V.V. Prasolov. (1994). *Intuitive Topology*. American Mathematical Society.
Moreno Armella, Luis; Waldegg, Guillermina. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. *Educación Matemática* Vol.4. Núm. 2 Agosto. 7-15.

Estudio sobre la visualización y el nivel de asimilación del concepto de dimensión

Cristina I. Badano, Adriana E. Cabana, Andrea F. Lepera, María S.Moriñigo
Ciclo Básico Común. Universidad de Buenos Aires. Argentina
cbadano@cbc.uba.ar

Resumen
En este trabajo se indaga sobre el nivel de asimilación del concepto de dimensión en sus aspectos algebraico y geométrico. Se realizó con alumnos ingresantes a la Universidad de Buenos Aires.
Tuvo como objetivos: estudiar la asimilación del concepto de dimensión de subespacios o variedades lineales y del concepto de distancia; indagar sobre la visualización de posiciones relativas de rectas y planos; analizar las respuestas de los alumnos ante problemas con enunciados no convencionales.
Se utilizó como instrumento una encuesta, administrada a fines del ciclo lectivo de la asignatura Álgebra del Ciclo Básico Común, luego de haber completado la enseñanza de los temas.

Introducción

Como docentes de la asignatura Álgebra del Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires hemos observado las serias dificultades que tienen los alumnos al enfrentar el estudio de los distintos temas de esta asignatura. Cursan esta materia los estudiantes que han optado por carreras de las facultades de Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales (excepto Ciencias Biológicas). En el primer cuatrimestre llegan a nuestra asignatura - en general - recién egresados del secundario, sin rendir examen de ingreso y sin realizar ningún curso previo de nivelación.
Los temas que se enseñan son: vectores en R^2 y R^3, rectas y planos, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, espacios vectoriales, transformaciones lineales, números complejos y polinomios.
Las mayores dificultades observadas giran en torno a los problemas de geometría y los temas relacionados con subespacios, bases y dimensión.
El concepto de dimensión involucra dos aspectos: el algebraico (cantidad de elementos de una base) y el geométrico (relacionado con la visualización de la noción de independencia lineal y sistema de coordenadas). De ambos aspectos, el geométrico es el que, en general, plantea más dificultades para su internalización.
En la resolución de problemas matemáticos, en forma muy especial en los geométricos, la *visualización* es el factor principal que contribuye a la producción del *insight*. Su rol es tan importante que a menudo se identifica el conocimiento intuitivo con la representación visual. El proceso de estructuración de representaciones visuales tiene sus leyes propias, descriptas por la psicología de la Gestalt. Las imágenes como modelo no son por sí mismas conocimiento intuitivo, más aún, pueden inducir en el proceso conceptual relativo a ellas, propiedades y relaciones que no corresponden a la estructura conceptual y -por ende- perturbar el proceso de razonamiento. Pero hay que tener en cuenta que la *visualización inmersa en una actividad cognitiva adecuada* sirve para organizar los datos disponibles en estructuras significativas y guiar el desarrollo analítico de una solución constituyéndose así, en un mecanismo esencial de anticipación (Fischbein, 1987).
Norma Presmeg (1986) define como *imagen visual* a un esquema mental que describe información visual o espacial. Clasifica a los estudiantes en *visualizadores* si utilizan imágenes visuales como parte esencial en la solución de los problemas y *no visualizadores*, en caso contrario. Según ella, las imágenes concretas o diagramas pueden inducir a los

visualizadores a pensar en detalles irrelevantes o a introducir datos falsos que los llevan a cometer *errores de visualización concreta*. Lo mismo ocurre con las imágenes mentales, que pueden derivar en *errores de visualización mental.*
Según Herminda Hernández Fernández (1990), González O. plantea que la asimilación de conocimientos es un tipo de actividad y que para que el alumno aprenda se requiere que realice determinadas acciones que no deben ser meramente perceptuales o de memoria.
Existen cuatro niveles en el proceso de asimilación de un concepto: *familiarización, reproducción, producción y creación.* En el nivel de *familiarización,* el estudiante es capaz de reconocer objetos, procesos y propiedades estudiadas anteriormente según el modelo a él presentado. En el nivel de *reproducción,* el alumno puede resolver problemas tipo estudiados en el proceso de enseñanza. La actividad reproductiva puede tener dos matices: *imitativa,* que reproduce acorde al modelo y *reconstructiva,* que reproduce con variantes. En el nivel de *producción,* el estudiante es capaz de aplicar las operaciones según el orden acostumbrado a situaciones nuevas. En el nivel de *creación,* el alumno puede orientarse en forma independiente en situaciones objetivas o subjetivas nuevas para él.
El éxito del aprendizaje depende en gran medida del *estado inicial*, es decir de las condiciones previas de los estudiantes. Es aceptada, sin reservas, la importancia de conocer el estado inicial de los alumnos para encontrar el punto de partida necesario para el logro de producir en los estudiantes el aprendizaje.

Descripción de la experiencia

Se diseñó y elaboró una encuesta (Anexo), con el objetivo de conocer el nivel de asimilación alcanzado por los alumnos en lo que se refiere a: ***posiciones relativas de rectas y/o planos*** y al ***concepto de dimensión de subespacios o del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.***
Fue administrada a fines del período lectivo correspondiente al primer cuatrimestre de 2000 al grupo de alumnos de la asignatura Álgebra, código 27, de la Sede Las Heras del Ciclo Básico Común de la U.B.A.
Como punto de partida, tuvimos en cuenta el *estado inicial* de los estudiantes, que detectamos a partir de los resultados de una encuesta tomada al inicio del ciclo lectivo. En dicha oportunidad observamos que los alumnos tenían internalizado un concepto erróneo de distancia y que, aunque reconocían vivir en un espacio tridimensional, no lograban visualizar objetos geométricos en él.
Partimos de la hipótesis de que un porcentaje importante de los alumnos:

- tienen dificultades en transferir los conocimientos formales a problemas no tradicionales;
- logran manejar el concepto algebraico de dimensión de un espacio, pero tienen serias dificultades en interpretarlo geométricamente;
- tienden a aplicar los procedimientos de cálculo en lugar de utilizar el concepto para seleccionar una respuesta entre varias posibles;
- extienden las propiedades aprendidas para R^2 a espacios de mayor dimensión;
- prescinden del apoyo de esquemas (ya sea mentales o gráficos) para la resolución de problemas.

Los objetivos planteados fueron:

- indagar sobre la asimilación del concepto de dimensión de subespacios o variedades lineales;
- estudiar la asimilación del concepto de distancia;
- indagar sobre la visualización de posiciones relativas de rectas y planos;
- analizar las respuestas de los alumnos ante problemas con enunciados no convencionales.

En la encuesta sondeamos el aspecto algebraico del concepto de dimensión (preguntas 4, 5, 9 y 10); el aspecto geométrico de este concepto (preguntas 1, 2, 6, 7, 10 y 11), la noción de distancia como número positivo y como longitud mínima (preguntas 3 y 8), posiciones relativas de rectas y/o planos (5, 6,7,10 y 11) y la respuestas de los alumnos a preguntas no convencionales sobre estos temas (1, 2, 8 y 11).

Análisis de Resultados

Cada pregunta de la encuesta fue considerada como una variable. Con el software Statistix 4.1 analizamos la distribución de frecuencias de las opciones dadas para cada pregunta. A continuación detallamos los resultados considerados más significativos.

Con referencia a la noción de *distancia:*

- el análisis de las respuestas a la pregunta 3, nos permitió observar que sólo el 2% de los alumnos eligió la opción del número negativo. Sin embargo el 22% no internalizó el concepto de que puntos distintos no pueden estar a distancia cero. El 23.9% no comprendió que la distancia entre dos puntos -independientemente de quiénes sean éstos- siempre es un número real, eligiendo como respuesta la opción de un número complejo.
- el ítem 8 -no convencional- mostró que sólo el 27.2% de los estudiantes se dio cuenta de cómo realizar la distancia mínima.

Respecto a *posiciones relativas de rectas y/o planos*:

- las respuestas a la pregunta 7 revelaron que sólo el 14% de los alumnos aseguró que una recta está contenida en un único plano. El 86% restante admitió que existen infinitos planos, pero sólo el 11% del total pudo identificar claramente las características que éstos deben cumplir.
- de acuerdo a la pregunta 6, el 83.1% de los estudiantes admitió que cualquier par de rectas no paralelas se corta en R^2 o en un espacio de dimensión 2.
- en la pregunta 10, el 61.8 % del alumnado reconoció que en R^3 dos planos distintos que pasan por el origen deben cortarse en una recta.
- de las respuestas seleccionadas para la pregunta 5 se infiere que el 32.1% de los alumnos no interpretó que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de 3x3 es la intersección de tres planos, y por tanto es un plano sólo en el caso en que los tres sean coincidentes.
- la pregunta 11 -no convencional- mostró que el 70.6% de los estudiantes no interpretó el problema como la intersección entre dos variedades lineales.

Con referencia al *aspecto algebraico del concepto de dimensión*:

- en la pregunta 4, el 44.1% de los alumnos contestó que el conjunto solución de un sistema lineal de una ecuación con dos incógnitas es una recta sólo en R^2 y un porcentaje similar (40.7%) que es una recta en cualquier espacio. De ello puede inferirse que no han asimilado la relación entre el rango de la matriz y la dimensión del conjunto solución.
- la pregunta 5 -en la que se pedía elegir el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de 3x3- fue respondida correctamente sólo por el 31.4% de los estudiantes.
- las respuestas a la pregunta 9 indicaron que el 71% del alumnado internalizó la noción de que para que un subespacio esté contenido en otro, es necesario que tenga dimensión menor o igual que la de aquél.
- la pregunta 10 reveló que el 61.8% de los estudiantes reconoció que la dimensión de la intersección de dos subespacios distintos de dimensión dos de R^3 tiene que ser uno.

En lo que se refiere al *aspecto geométrico del concepto de dimensión*:

- ante la pregunta 1 -no convencional- el 60% de los estudiantes aseguró que hay infinitas direcciones linealmente independientes en el espacio tridimensional. Esto nos sugiere que no relacionan el concepto de dimensión con la cantidad de direcciones independientes cuando deben aplicarlo a situaciones novedosas y que quizás confunden la existencia de infinitas bases con la existencia de infinitas direcciones independientes.
- en la pregunta 2 -aunque no estaba planteada convencionalmente- el 66% de los alumnos interpretó que no moverse en ninguna dirección es equivalente a que la dimensión del subespacio sea cero.
- en la pregunta 6, el 83.1% de los encuestados reconoció que para que cualquier par de rectas no paralelas se corten es necesario que el espacio tenga dimensión dos. Pero sólo el 23.2% del total admitió que ésto ocurre en <u>cualquier</u> espacio de dimensión dos.
- la pregunta 10 mostró que el 39.2% de los alumnos no logró visualizar que en R^3, dos planos que pasan por el origen de coordenadas se cortan en una recta.
- el análisis de las respuestas a la pregunta 7 nos permitió observar que el 89% de los estudiantes visualizó que al menos un punto de la recta debe pertenecer a cualquier plano que la contenga .
- ante la pregunta 11 -no convencional- sólo la tercera parte del alumnado fue capaz de visualizar que se pedía que la intersección fuera no vacía.

Con respecto a las *preguntas no convencionales*: sólo seis alumnos de los doscientos doce encuestados contestaron correctamente tres de las cuatro planteadas. Aproximadamente el 30% de los estudiantes fue capaz de resolver como máximo una. Esto nos sugiere que son pocos los alumnos que logran el nivel de *reproducción* en la asimilación del concepto de dimensión.

Consideraciones finales

La mayoría de los alumnos comprende y utiliza correctamente la noción algebraica del concepto de dimensión en los ejercicios convencionales, pero evidencia tener inconvenientes en el manejo del aspecto geométrico.

Hemos observado dificultades en la asimilación del concepto de distancia. El porcentaje de encuestados que eligen como opción distancia cero (para puntos distintos) o números no reales, nos indicaría que existe una tendencia a utilizar el cálculo como única herramienta, sin tomar en consideración el tipo de resultado que se debe obtener. Esta creencia se afianza en el ítem que pide indicar el punto del plano que realiza la distancia a un punto dado. Gran parte de los estudiantes asegura que cualquier punto del plano sirve, lo que efectivamente ocurre cuando se utiliza la fórmula para calcular la distancia. Pocos alumnos logran visualizar cuál es el punto del plano que la realiza.
Las respuestas a las preguntas no convencionales sobre estos dos temas nos sugieren que los encuestados sólo han alcanzado el nivel de *reproducción* en estos conceptos.
Casi la tercera parte del alumnado visualiza posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.

Referencias Bibliográficas

Alsina C.; Burgués C.; Fortuny J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Beard R. (1974). *Pedagogía y Didáctica de la enseñanza universitaria.* Barcelona, España: Oikos Tan S.A. Ediciones.

Fernández H.H.; Delgado R.J.; Fernández de Alaíza B. (1998). *Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior.* Rosario, Argentina: Homus Sapiens Ediciones.

Fischbein E. (1987). Intuition in Science and Mathematics*. An Educational Approach*. D. Reidel Publishing Company. Kluwer Academic Publishers Group. (Cap. IX).

Kaplan R.G, Yamamoto T., Ginburg H. P. (1989). "La enseñanza de los conceptos matemáticos" En Resnick L., Klopfer L. compiladores *Curriculum y Cognición.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Presmeg N.C. (1986). Visualization and Mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, vol 17, pp. 297-311.

Anexo - Encuesta

Pregunta	Respuestas	**Frec.**
1. Imaginate la siguiente situación: una mosca iniciará su vuelo dentro de una habitación. En cuántas direcciones independientes puede moverse?	a) infinitas	60 %
	b) dos direcciones	3.8%
	c) tres direcciones	33.3 %
	d) cinco direcciones	0.5%
	e) seis direcciones	2.4%
2. Una mosca está atrapada en un subespacio de R^3 de modo que no puede moverse en ninguna dirección. En qué subespacio vive la mosca?	a) En el subespacio nulo	65.7%
	b) En un subespacio de dimensión 1	8.0%
	c) En un subespacio de dimensión 2	2.5%
	d) En un subespacio de dimensión 3	19.9%
	e) En un subespacio de dimensión 4	0.5%
	f) En un subespacio de dimensión 8	1.5%
	g) En un subespacio de dimensión menor que 3	2.0%
3. La distancia entre $z = -1 - i$ y $w = 1 + i$ es:	a) $\sqrt{8}$	52.2%
	b) $-\sqrt{8}$	2.0%
	c) 0	22.0%
	d) $2 + 2i$	23.9%

4. Las soluciones de la ecuación $3x_1 + 2\ x_2 = -1$ son los puntos de una recta....	a) en R^2 b) en R^3 c) en cualquier espacio d) en ningún espacio	44.1% 5.4% 40.7% 9.3%
5. El conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones: $x_1+x_2+x_3 = 2$ $2x_1-x_2 = 5$ $3x_1+ x_3 = 7$	a) es un subespacio de R^3 de dimensión 1 b) es una recta c) es un punto d) es un plano	10.6% 31.4% 24.6% 32.9%
6. Dónde es siempre cierta la siguiente afirmación: “Dos rectas no paralelas se cortan necesariamente...”	a) En cualquier espacio b) En un espacio de dimensión 3 c) En un espacio de dimensión 2 d) Sólo en R^2	13.0% 3.9% 23.2% 59.9%
7. Sea la recta L : k(1,2,1) + (2,2,2). Decidir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:	a) La recta L está contenida solamente en el subespacio generado por (1,2,1) y (2,2,2) b) La recta L está contenida en cualquier plano de R^3 que pase por (2,2,2) c) La recta L está contenida en los infinitos planos que pasan por el (1,2,1) y (2,2,2) d) La recta L está contenida en los infinitos planos que pasan por el (0,-2,0) y (9,16,9)	14.0% 33.0% 42.0% 11.0%
8. Señalar un punto Q del plano que permita medir la distancia de P al plano (*)	Respuestas correctas	27.2%
9. Decidir cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:	a) Cualquier subespacio de R^4 tiene dimensión 4 b) Un subespacio de R^4 tiene cualquier dimensión c) Un subespacio de R^4 tiene dimensión menor o igual a 3 d) Un subespacio de R^4 tiene dimensión menor o igual a 4	5.7% 2.4% 2 0.5% 71.0%
10. Sean en R^3 dos subespacios distintos de dimensión 2. Entonces el conjunto de puntos comunes a los dos subespacios es:	a) un punto b) una recta c) un plano d) todo R^3	5.9% 61.8% 22.1% 9.8%
11. Una araña y una mosca viven en subconj.de R^3 llamados A y M respectiv. En cuál de las siguientes situaciones puede la araña comerse a la mosca?	a) $M =\{X\in R^3 / X = \lambda\ (1,0,0) + (1,1,1)\}$ $A = \{X\in R^3 / x_2 = 0\}$ b) $M = \{X\in R^3 / x_2 = 1\}$ $A = \{X\in R^3/x_2 = 2\}$ c) La mosca y la araña están en subesp. de R^3 d) En ninguno de los anteriores	15.4% 13.9% 29.4% 41.3%

(*) El gráfico correspondiente constaba de un paralelogramo (como representación del plano) y un punto P, que simulaba estar encima y a la derecha del paralelogramo.

Nota: Los ítems resaltados indican las respuestas correctas.

Desarrollo del pensamiento matemático: el caso de la visualización de funciones

Ricardo Cantoral, Gisela Montiel
Cinvestav IPN, México
rcantor@mail.cinvestav.mx gmontiel@mail.cinvestav.mx

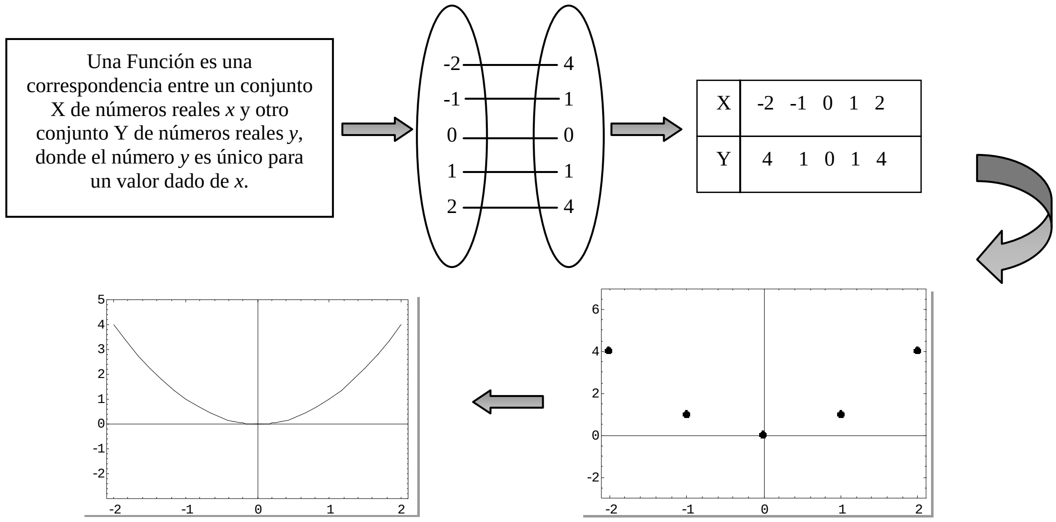
La propuesta didáctica que mostramos en el taller *Desarrollo del pensamiento matemático: El caso de la visualización de funciones*, es el resultado de las investigaciones que durante algunos años ha conducido el grupo de investigación del Área de Educación Superior del DME del Cinvestav IPN, en la línea de pensamiento matemático avanzado. Dicha línea es desarrollada en una aproximación teórica de naturaleza sistémica, a la cual hemos denominado *socioepistemología*, y que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral y Ferrari, 2001)

La relevancia del concepto de función en distintos ámbitos científicos ha dirigido nuestra atención hacia el análisis de sus procesos de enseñanza y de aprendizaje. En la literatura especializada, existen acercamientos teóricos que estudian al concepto y donde reportan una gran variedad de dificultades en su aprendizaje (Dubinsky y Harel, 1992). Respecto de nuestra investigación no sólo hemos abordado aspectos como el tratamiento curricular y las concepciones que el alumno desarrolla, sino que también presentamos una propuesta didáctica basada en la visualización y el desarrollo del pensamiento matemático que permite, en nuestra opinión, al concepto de función evolucionar en el alumno a través de sus propias actividades matemáticas.

Paradigmas y Enfoques

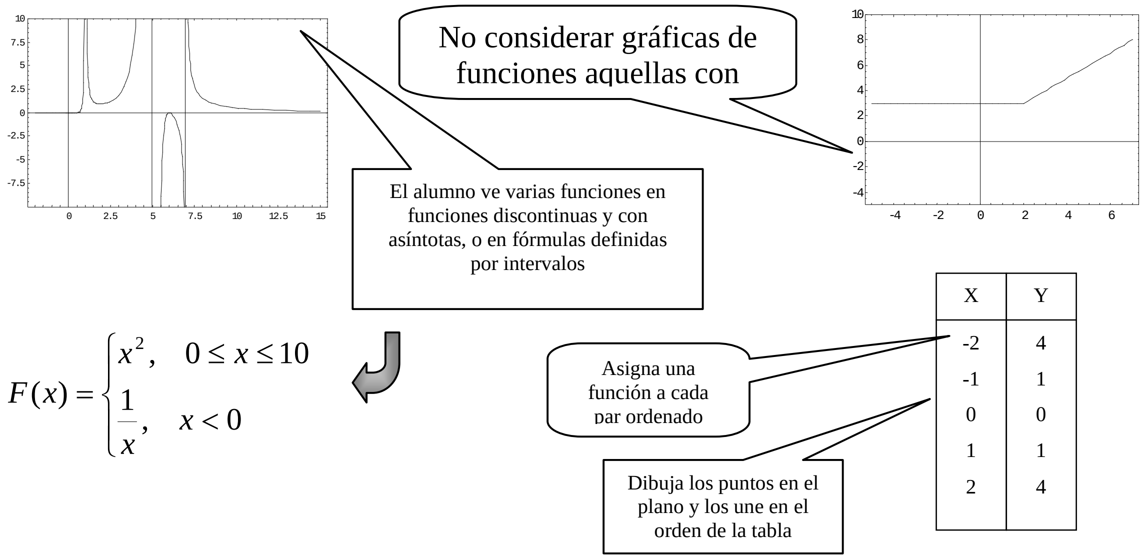
El “paradigma de la enseñanza” que ha seguido el sistema escolar en los últimos tiempos, se basa principalmente en el uso de contenidos cognoscitivos plasmados en programas y planes de estudio, textos escolares, actividades en clase y evaluaciones centradas en enfoques axiomático deductivos. La preocupación principal se ha centrado en el enseñar, y en esa medida, se diseñan actividades escolares sin atender a los factores del aprendizaje en matemáticas. El tratamiento que se ha dado al concepto de función por ejemplo, refleja en nuestra opinión, cierta linealidad en la presentación, pues se va de lo más sencillo a lo más complejo para reforzar nociones y no con la intención de hacerlas evolucionar.

Esto es, el tratamiento usual del concepto de función parte de su definición formal y se sigue con refuerzos en diversas representaciones de dicho concepto (Ver Esquema 1)



Esquema 1

Sin embargo, los resultados de investigación muestran que el alumno no se apropia adecuadamente del concepto y desarrolla concepciones erróneas (Ver Esquema 2).



Esquema 2
Concepciones y Dificultades

Consideramos que el tratamiento escolar del concepto de función ha provocado que el alumno no desarrolle la habilidad de transitar por las distintas representaciones del concepto, ni disponga de las herramientas o el lenguaje para abordar problemas gráficos donde necesite del análisis numérico y algebraico, o viceversa. En este sentido es que hemos desarrollado una propuesta que desarrolla el pensamiento matemático del alumno a través de la visualización del concepto de función.

Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático

De entrada, señalamos que habremos de entender a la visualización no como el simple acto de "ver", pues visualizar la función no significa "verla, mirar su gráfica". Así mismo, el pensamiento matemático no se reduce a pensar cuando estemos ante una actividad matemática. Entendemos por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento de quien aprende. Ahora bien, realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado.

A partir de la perspectiva desarrollada por J. Piaget, al explorar la concepción de espacio que los sujetos desarrollan, describimos a las actividades de visualización de funciones reales de variable real, como actividades representacionales del espacio cartesiano. La imagen mental del espacio cartesiano con las que los jóvenes actúan, se forma mediante una reconstrucción activa de los objetos a un nivel simbólico, donde las representaciones mentales no son solamente evocadas por la memoria.

En este sentido las investigaciones que hemos desarrollado, han estado interesadas en las transformaciones mentales que van del espacio real al espacio de las representaciones del estudiantes, centrando la atención en aquellos atributos de los objetos reales que son invariantes bajo esas transformaciones y cómo ellos cambian con el curso escolar.

De acuerdo a la teoría de Piaget, las primeras transformaciones del sujeto son aquellas que conservan los atributos topológicos de los objetos tales como interior o exterior de un conjunto, frontera de un conjunto, conexidad o apertura y cerradura de curvas. Sólo después, el niño está capacitado para transferir a su espacio representacional atributos euclidianos de los objetos, tales como longitud de las líneas o tamaño de los ángulos. Es ahí donde se presentan ideas sobre la conservación de la longitud, el área o el volumen de los objetos geométricos. En consecuencia, es entonces donde se construye un verdadero escenario de visualización para las funciones reales de variable real.

Pretendemos que con un tratamiento visual que desarrolle el pensamiento matemático en el alumno, éste contestará preguntas como las siguientes: ¿qué posible fórmula describe la gráfica de la figura 1? o ¿cuál es la gráfica de la derivada de la función de la figura 2?

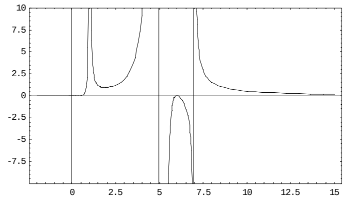


Figura 1

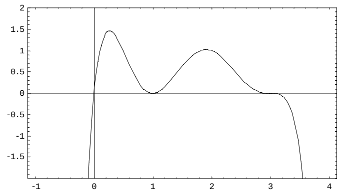


Figura 2

Las investigaciones recientes muestran que tanto alumnos como profesores de educación superior, no necesariamente responden en forma correcta a las preguntas anteriores aun a pesar de haberlas llevado en su vida escolar habitual.

Propuesta: Una secuencia didáctica

A continuación mostramos un extracto de lo que se trabajó en el Taller en Relme-15, que a su vez fue parte de las secuencias didácticas diseñadas en (Cantoral y Montiel, 2001). Estas actividades fueron presentadas con anterioridad en el Programa de Formación Pertinente llevado a cabo en San Luis Potosí, México por parte de la Secretaría de Educación Pública.

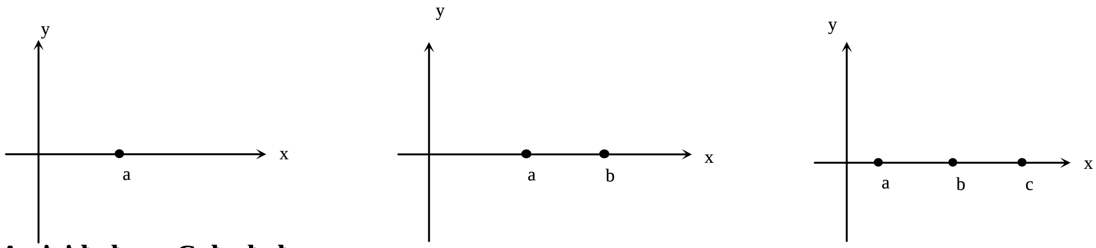
Actividad

Menciona y grafica funciones polinomiales para los siguientes casos

a) Tres de diferente grado que pasen por el punto (a, 0) en el primer plano

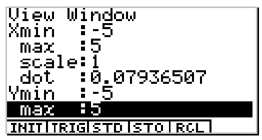
b) Tres de distinto grado que pasen por los puntos (a, 0) y (b, 0) en el segundo plano

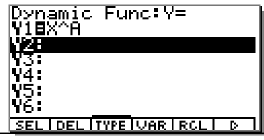
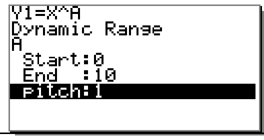
c) Dos, de tercer y cuarto grado que pasen por los puntos (a, 0), (b, 0) y (c, 0) en el tercer plano



Actividad con Calculadora

- Enciende tu calculadora Álgebra FX 2.0, sigue la siguiente secuencia

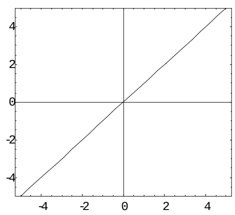
Secuencia de Teclas	**Pantalla**
AC/ON MENU 1 SHIFT OPTN (-) 5 EXE 5 EXE 1 EXE ∨ -5 EXE 5 EXE 1 EXE EXE Configura la ventana para $-5 \le x \le 5$ y $-5 \le y \le 5$	

MENU 4 X,θ,T ^ ALPHA X,θ,T EXE Define la función Y1=X^A	
F4 No importa el valor que tenga A	
F2 0 EXE 10 1 EXE Define los valores que tomará A, A=0, 1, 2,..., 10 Start: Valor inicial, End: Valor final, Pitch: tamaño de paso	
EXE F3 F1 EXE F6 Configura la velocidad, en este caso el dinamismo será manual oprimiendo EXE para ver los cambios	Barra de Avance

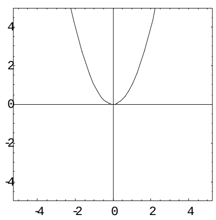
- Dibuja algunas de las gráficas y clasifícalas de acuerdo a la multiplicidad de sus raíces.

Esta primera actividad tiene el objetivo de reflexionar sobre la multiplicidad de raíces a partir del dinamismo que permite la calculadora en las formas gráficas. Aunque dicho dinamismo logra que el profesor tenga una percepción visual de la variación del exponente en la función Y=X^A, en ocasiones no logra rescatar toda la información que contiene una gráfica, no logra identificar la naturaleza del cruce o el toque tangencial de la curva al eje "*x*" por ejemplo.

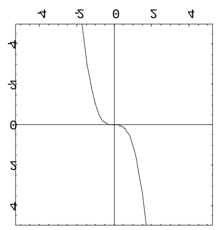
Una vez identificados los tres tipos de contacto con el eje



Y= x

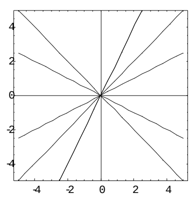


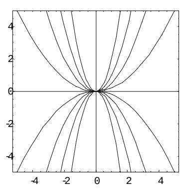
Y= x^{2n}

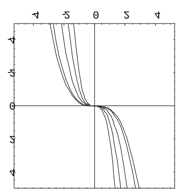


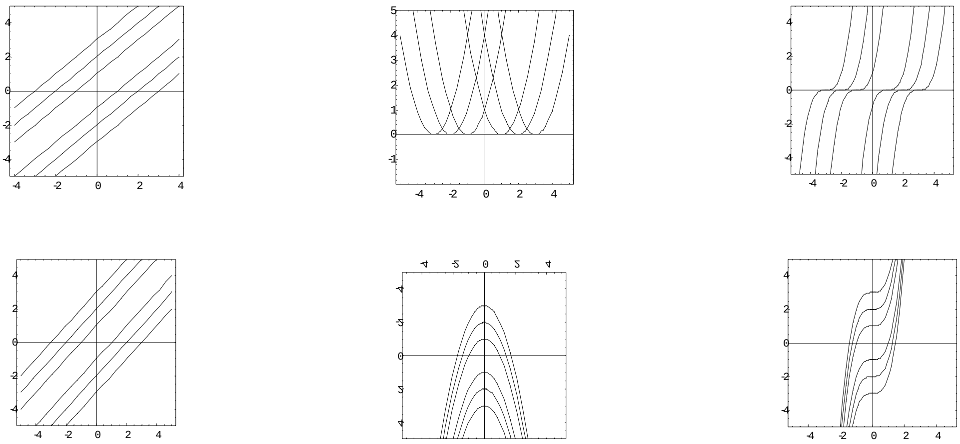
Y= x^{2n+1}

mostramos las siguientes variaciones



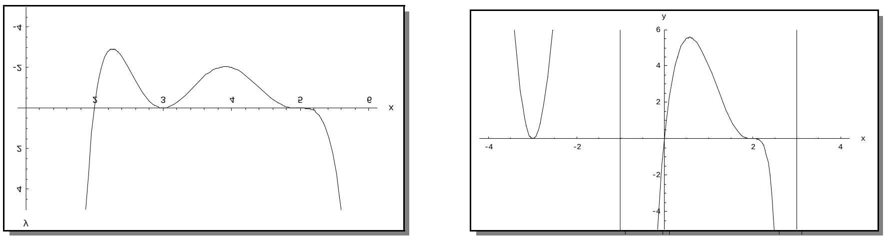






El objetivo es analizar el tipo de cambios que sufren las gráficas, las propiedades que se conservan y las que se pierden. De nuevo se hace un análisis dinámico con la calculadora a fin de relacionar el valor de los parámetros de una función con los efectos en las formas gráficas. Se hace un reforzamiento con actividades manuales y con la calculadora con el objetivo de entrar en el proceso de visualización de la función y poder contestar preguntas de la siguiente naturaleza:

- Proponga las posibles expresiones analítica que describan las gráficas siguientes



La respuesta de los profesores nos reforzó la creencia que la vida escolar tradicional no les permite desarrollar habilidades de visualización con las que puedan desarrollar su pensamiento matemático, donde puedan evolucionar sus nociones matemáticas. Por ejemplo, a pesar de observar en la calculadora las distintas formas gráficas de la función Y=X^A cuando A varía, no se percatan de la naturaleza del cruce con el eje "*x*", incluso en algunos casos no lo relacionaron con la multiplicidad de las raíces. Pero si bien la visualización debe abordarse con los objetos matemáticos pertinentes, no debe aislarse en un taller o en un cierto momento de la vida escolar, pues debe ser un tratamiento factible en cualquier etapa curricular.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2001). La predicción y la regla de los signos de Descartes. España: *Enseñanza de las Ciencias*, Barcelona Aceptado.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* México: Pearson Educación.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). (1992). *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Notes 25, MAA.

Pensamiento relacionado con Probabilidades y Estadística

Nivel Básico

Comprensión de la idea intuitiva de probabilidad en los niños de 5 años

Marina Perusini; Susana Ferrero
Instituto Superior de Profesorado nº 20 "Sdor. Néstor J. Zamaro. San Justo, Santa Fe. Argentina
isp20@mutualsj.com.ar sanperu@mutualsj.com.ar

Resumen
La intención de este trabajo es comprender la idea de probabilidad en los niños de 5 años de edad que concurren a salas de Nivel Inicial de nuestra ciudad, a partir de los juegos de azar. En este trabajo, a partir de situaciones de juego, analizaremos las intuiciones que los niños de 5 años que asisten a salas de Nivel Inicial tienen sobre el azar y la probabilidad.
La teoría de la probabilidad es una de las ramas más fecundas de la matemática, sus múltiples desarrollos teóricos y aplicaciones prácticas en distintos campos como la biología, la medicina, la economía, la sociología etc., se expanden a diario. Expresiones acerca de lo probable se usan cotidianamente: tal vez, probablemente, casualmente, etc., ¿pero cuál es su medida? De dar respuesta a este interrogante trata la probabilidad.
Los juegos de azar son también uno de los principales contextos en el que los niños toman contacto con las situaciones aleatorias, tomando conciencia de la impredecibilidad de sus resultados y de la necesidad de realizar estimaciones probabilísticas, incluso antes de la instrucción formal. Este proyecto que surge del deseo de indagar la idea de probabilidad en niños de 5 años de edad, involucra en un primer momento a las docentes de Matemática del Profesorado de Educación inicial del ISP Nº 20 , a sus alumnas del 2do año y 3er año y a docentes del nivel inicial dispuestas a indagar y profundizar en este tema para luego elaborar el proyecto que tiene como destinatarios a niños de 3 salas de 5 años de Nivel Inicial de la ciudad de San Justo.

Introducción

¿Por qué indagar sobre la idea intuitiva de probabilidad en niños que concurren a sala de 5 años?
A partir de la incorporación en los CBC de la formación docente de Educación Inicial [1], de contenidos sobre probabilidad, estadística, entre otros, y la no presencia de los mismos en los diseños jurisdiccionales de Educación Inicial (sala de 5 años obligatoria) de la Provincia de Santa Fe, Argentina, nos empezamos a cuestionar:
Si se busca una formación en matemática, que atienda no sólo al pensamiento determinista, sino también, al pensamiento probabilístico, buscando que las futuras docentes comprendan estos conceptos sin demasiado extrañeza ni duda, llegando al uso del razonamiento lógico que lo justifique, ¿ Son contenidos qué solo hacen a su formación como docentes, o en algún momento, pueden ser enseñados?, y de ser así, ¿ Cómo?
Estos interrogantes indujeron a proponer una misma situación problemática a: alumnos de nivel superior: desde el enunciado verbal y, a alumnos de una sala de 5 años: desde el recurso material, pudiendo vivenciar que los niños respondían con naturalidad, mientras que los adultos manifestaban no recordar la fórmula para abordar las respuestas.
Esta situación llevó a plantear este proyecto como docentes de Matemática del Profesorado de Educación inicial del ISP Nº 20 involucrando a: las alumnas de 2do año y 3er año, y docentes del nivel inicial de los Jardines destino. En la primera etapa se capacitó sobre esta temática, en la segunda etapa se elaboró una agenda de trabajo, que en la tercera etapa se concretó en 3 salas de 5 años de Nivel Inicial de la ciudad de San Justo.
En la elaboración de la misma se tuvo en cuenta el cambio en la perspectiva con la que se afronta esta temática en la actualidad que pasa de una visión formalista, influenciada por las teorías de Piaget donde la comprensión de la idea de azar y probabilidad requiere la adquisición de razonamiento combinatorio y proporcional y la idea de causalidad ; a otra de carácter frecuencial que admite un tratamiento mas experimental, basada en Fischbein (1975), quien sostiene que: "con una elección adecuada de tareas a plantear a los niños se

puede llegar a hacer intuitivas las leyes del azar, incluso a edades inferiores a los 10 años". En esta línea, Glaymann y Varga, sostienen: " ante una situación aleatoria, hasta los 5 o 6 años, el niño piensa que puede prever el resultado; un poco más tarde responde que no puede afirmar nada y, gradualmente, descubre que existen, en el caos aparente del mundo aleatorio, leyes que permiten estimar la realidad". Además, J.S. Bruner insiste sobre la necesidad de estimular el pensamiento intuitivo en los niños y ejercitar la comprensión intuitiva , juntamente con el pensamiento analítico , para ayudar a la asimilación de conocimientos.
Al plantear las actividades para llevar a las salas , consideramos adecuado seleccionar las misma asociadas al juego, ya que a través del juego y de la manipulación los niños organizan esquemas y representaciones lógicas que permiten dar sentido a los fenómenos aleatorios y adquirir intuiciones probabilísticas, para luego en años posteriores formalizar y abstraer conceptos de dichas experiencias .

Investigaciones previas

- Watson y Collis (1994): mostraron resultados de la fase piloto de un proyecto realizado en niños australianos sobre la idea que tenían de algunas cuestiones relacionadas con el azar y la probabilidad, en particular estudiaron la interpretación de diagramas de barra y la toma de decisiones sobre el sesgo o no de un elemento (dado). La mitad de los alumnos creían que había Nº que tenían mas posibilidades que otros; otros mostraron concepciones antropomórficas o se guiaron por las características físicas de los dados.
- Lidster y cols. describen estudios en niños de 8 a 14 años que trataron de relacionar las experiencias dentro y fuera de la escuela con el desarrollo de la equitatividad. Los autores creen que la noción de equitatividad y sesgo se desarrolla antes del comienzo de la escuela y se preguntan si hay un desajuste entre el aprendizaje previsto por el maestro y el conocimiento construido por el alumno.
- Scholttmann y Anderson (1994) ha estudiado las intuiciones de los niños de 5 a 10 años de edad sobre la esperanza matemática, utilizando para ello dos tipos de juegos con un solo jugador: a) juegos con un solo premio, donde el niño puede obtener o no un premio en caso de resultar uno, entre dos sucesos de un experimento aleatorio, b) juego de dos premios , el niño obtienen premio de diferente valor, según el resultado de un experimento aleatorio con dos resultados posibles. Los autores concluyen que, incluido los niños más jóvenes, tienen una intuición correcta sobre la idea de probabilidad,. Sin embargo, tanto la asignación de una probabilidad, como la puesta en relación del premio y la probabilidad de ganar siguen estrategias aditivas.
- Bosch Casabó y Vargas Norambuena (2000), dentro del marco de la Teoría Antropológica en Didáctica ilustran, a partir de una investigación sobre el " razonamiento intuitivo sobre probabilidad" (Silvette Maury , 1984)la importancia del análisis a priori de las situaciones propuestas en las investigaciones en didáctica.

A partir de estas investigaciones centramos la mirada en la investigación en "didáctica de la matemática" anteponiendo en el desarrollo metodológico del análisis , las "variables matemáticas" de la situación o actividad que se realiza.

Metodología

Convenimos utilizar : a) Observación / documentación: si bien la observación no es neutra, consideramos que esto se constituye en una fuerza y no en un límite, dado que , como afirman Fabbri y Munari: La búsqueda de la objetividad frecuentemente se configura como

miedo de la responsabilidad., la observación no es sólo una acción, sino que, también, es una relación de reciprocidad , un proceso que nos hace conscientes de todo lo que está sucediendo. Observar es, antes que nada elegir, por eso es indispensable delimitar el campo de observación , pero además, es una interpretación: lo que observo es un posible indicio que confirmará o desmentirá hipótesis.
b) Entrevistas: mediante éstas tratamos de valorar otra dimensión fundamental en los niños que es el reconocimiento , dado que el niño es competente, tiene conocimiento y teorías alrededor de lo que le es propuesto como elemento de investigación, o sea, cada niño tiene una valija propia de hipótesis sobre los posibles sentidos y significados de las cosas, que derivan de las experiencias personales , y desea comunicarla a los otros , en este caso a los investigadores. Por lo tanto mediante esta metodología entendemos que el niño buscará re-entender, re-pensar lo que sucede, destacando las relaciones, y construyendo nuevas.
Instrumentos utilizados: registros fílmicos, grabaciones, registros escritos. La trascripción de la experiencia se hizo en tres columnas paralelas: la de la izquierda muestra la intervención de las alumnas del profesorado : sus diálogos, sus preguntas, sus comentarios; la de la derecha: las repuestas de los niños, sus comentarios y, la tercera : comentarios oportunos.
PROBLEMA: La intención de este trabajo es determinar si: ¿ los niños que asisten a salas de 5 años tienen dentro de sus saberes previos la idea de probabilidad = chance , o si la misma depende de experiencias previas obtenida en educación sistemática? , y de este modo, lograr algún aporte sobre: ¿si es factible trabajarlo como contenido en sala de 5?.
PALABRAS CLAVES: JUEGO , INTUICIÓN , AZAR Y PROBABILIDAD.
OBJETIVOS:

1. Determinar la idea de probabilidad = chance en 2 muestras de alumnos de 5 años de edad de salas de Nivel Inicial de nuestra ciudad, una con niños con experiencia previa en educación sistemática, anterior a 5 años, otra mixta (con y sin experiencia previa) y, una 3er. sala testigo.
2. -Determinar la idea de equiprobable en juegos aleatorios.
3. Analizar las respuestas dadas a las situaciones planteadas, en una muestra de 5 niños de cada sala , mediante entrevista.

HIPÓTESIS INICIALES:

1. A pesar de tener igual proporción de casos favorables y posibles, el Nº absoluto de casos favorables representa una ventaja.
2. La idea de que los jugadores tengan la misma probabilidad de ganar, o si uno de ellos lleva ventajas, las ganancias deberán ser inversamente proporcionales a la esperanza de ganar de cada jugador.

HIPOTESIS REFORMULADAS

- La intuición que tienen los niños del concepto de juegos de azar justos e injustos , permiten explorar la existencia de conceptos probabilísticos parcialmente formados

JUEGOS – AZAR. (1º ENCUENTRO)
PROPÓSITOS:

- Analizar distintas categorías, según las repuestas de los niños, con respecto al azar y a los juegos de azar.
- Indagar sobre la idea de juego justo que tienen los niños en sala de 5 años.

DESARROLLO:1º Momento:

Se presentan distintos juegos de azar: Naipes. Oca. Perinola.

Se interroga a los niños sobre: ¿ Los conocen? ¿ Cómo se llaman? ¿ Jugaron alguna vez con ellos?.Para ordenar la información, confeccionaremos una tabla :

SALA H **SALA A**

Juegos	**Chicos que eligen**	**Cantidad**	**Juegos**	**Chicos que Eligen**	**Cant.**
NAIPES	XXXXXXXXXXXX	12	NAIPES	XXXXXXXXXXXXXXXXX	17
OCA	X	1	OCA	XXXXXXX	7
PERINOLA	XXXXXXXXXX	10	PERINOLA	XXXX	4

SALA TESTIGO

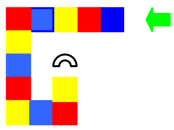
Juegos	**Chicos que eligen**	**Cantidad**
NAIPES	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	20
OCA		0
PERINOLA	XXX	3

PROBABILIDAD = CHANCE

2º Momento:

JUEGO : de la Oca.

Tablero:



Dados: 2 . Distribución de colores en cada dado : D={ azul, azul, azul, rojo, rojo, amarillo}

Espacio muestral: 36 pares.

Consigna: se avanza cuando al tirar los dados simultáneamente, sale al menos una cara del color del equipo.

De los registros fílmicos y Diálogos grabados se establecen los siguientes resultados:

Respuestas de los Alumnos	CANTIDAD DE ALUMNOS	
	SALA H	SALA A
Gana siempre él Azul	14	15
El azul salió más veces	16	14
Gana el Azul, porque el dado tiene más azul Porque había mucho azul.	10	12
Gana el azul porque tiene tres.	12	14
Gana el azul porque es más ligero.	4	--
Si juego otra vez elijo azul Porque es el que gana.	12	10

Porcentaje de respuestas obtenidas sobre juegos justo e injusto.

		Juego justo	Juego no justo	No responde
Juego de la Oca	SALA H	-----------	75 %	25%
	SALA A	-----------	72%	28%
	SALA TESTIGO	La escasa construcción de la idea de número, torna imposible establecer comparaciones y, más aún, no se logra despertar interés por el juego en un 80%.		

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y ARGUMENTOS UTILIZADOS POR LOS NIÑOS

AZAR Y JUEGOS DE AZAR: Los chicos conocen los juegos, el más conocido fue el juego de naipes: (truco, loba, casita robada, etc). Sala H 70,6% , Sala A 90% No los reconocen como juegos de azar, si que en ellos pueden ganar o perder y que existe la posibilidad de hacer “ trampa” (anecdotario: mi abuela me deja hacer trampas para ganar).

JUEGO JUSTO: Reconocen juego injusto. Sala H 75%, Sala A 72%, Plantearon alternativas para hacerlo justo “Despintar una azul y pintarla amarilla”
A partir de las respuestas dadas, correctas o no , podemos destacar las siguientes argumentos:
A-Comparación de casos favorables / casos desfavorables. Ej; “ gana el azul porque tiene 3”. B- *Área:* “ gana el azul porque hay más.” C-*Casos favorables:* “ el azul salió más veces”. D-P*osibilidad de hacer trampas:* en el experimento trata de eludir el carácter aleatorio, en este caso acomoda el dado de modo de conseguir el resultado favorable. E- *Ser mas ligero:* argumento sin información relevante .F-*Suerte:*”Elijo azul porque siempre gana”

SUCESO SEGURO, INCIERTO , PROBABLE (2º ENCUENTRO)

PROPÓSITO: *******Trabajar Sucesos seguros, posibles e imposibles y comparación de posibilidades.
1º Momento: Se trabaja con el grupo en forma total
Elementos: 14 bolsitas con 1 caramelo y 1 masita.7 bolsitas con 1 chocolatín y 1 caramelo.
Se solicita que cada niño retire una bolsita de la canasta que está sobre su mesa.
Y una vez que tiene la bolsita en la mano, que mire lo que tiene adentro, y lo coloque sobre la mesa. Con estos datos, se confecciona una tabla .
2º Momento: el comodín toma una bolsa de la canasta , y en función de los resultados de las tablas anteriores se pregunta:

¿Qué habrá dentro de la Bolsa del Comodín?	Número de Alumnos	
	SALA H	SALA A
Caramelo	12	10
Chocolate	2	4
Masita	12	10
Chupetín.	4	5

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y ARGUMENTOS UTILIZADOS POR LOS NIÑOS
SUCESOS CIERTOS O SEGURO: Sala H 86%. Sala A 63%
SUCESO INCIERTO: En ambas salas se dio aproximadamente el 70% ..
MAYOR PROBABILIDAD: Masita sobre Chocolates: Primó la percepción del *tamaño* de los objetos:
A partir de las respuestas destacamos los argumentos: C- C*asos favorable*:“ caramelos porque TODOS tienen uno”. D-*Posibilidad de hacer trampas* El 30 % apostó a la existencia del suceso incierto sosteniendo que en ése paquete estaba *la trampa:* chupetín. B-*Área:* “ Es masita porque es mas grande que el chocolate, mirá”

COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES (3º ENCUENTRO)

Propósito: trabajar comparación de probabilidades, evitando comparación de magnitudes.
Se trabajará por mesa. El personaje presentará los elementos con que se va a jugar, y se lo entregará a cada señorita para que trabaje en su mesa.
Elementos: Caja con caramelos.11 por mesa. 8 de frutilla y 3 de Limón. Bolsita de papel para introducir los caramelos.2 canastas, una con carita alegre y otra con cara triste.
Consigna**:** Cada integrante de la mesa saca un caramelo del paquete con los ojos cerrados, pero antes, adivina de qué gusto es; si acierta, lo pone en la canasta de cara alegre, y si no acierta, lo pone en la canasta de cara triste. Al terminar la ronda, se determina cuál de las dos caras es la ganadora.
Se presentan los resultados por mesa:

MESA	Nº de alumnos que	
	Aciertan	No aciertan
1	4	3
2	5	2
3	4	2

MESA	Aciertos		No aciertos	
	F - F	L - L	L - F	F – L
1	3	1	2	1
2	4	1	2	0
3	4	0	2	0

ARGUMENTOS UTILIZADOS POR LOS NIÑOS

A- *comparación de casos Favorables / Desfavorables*: " Elijo frutilla porque hay más" o "no elijo limón porque hay menos"

Conclusiones

Podemos destacar que los argumentos de tipo A,B,C usan datos de la situación problema en forma directa; sin realizar operaciones, sólo utilizan relaciones de tipo comparativo. "mas que..., menos que...". Las comparaciones se establecen desde las frecuencias absolutas dado que se trabaja solamente con cantidades de magnitudes : comparación de áreas, Nº de elementos, etc. Mientras que los argumentos D,E,F son totalmente subjetivos .

Los niños que no respondieron argumentando A,B, o C , y lo hicieron con D, o F evidenciaban no haber construido ciertos aspectos del Nº, como cardinalidad, orden, comparación de cantidades pequeñas, conteo, etc. En tanto que los niños que argumentaron con E primaron en la situación el contexto de la misma : llegar 1º a la meta .

Por último consideramos que esta investigación más que responder al "cómo", planteado en la introducción, nos condujo al "qué", dado que la elaboración de situaciones didácticas que propiciaran la formación de intuiciones que permitan pensar el azar y los fenómenos aleatorios, fueron centrales y, nos permitieron vivenciar que se puede construir desde temprana edad una cultura que nos ayude a desmitificar estos conceptos, pero es necesario profundizar la investigación en cuanto a los argumentos utilizados por los niños en sala de 5 años, los componentes del razonamiento probabilísticos que ellos involucran, como así también el tratamiento didáctico específico , buscando dar sustento teórico a la iniciación de la enseñanza de la probabilidad basada en una metodología heurística y activa.

Referebcias bibliográficas

INTERNET: http://www.ugr.es Universidad de Granada, España. Didáctica de la matemática: Estudios sobre didáctica de la probabilidad:

Cañizares,M. J., Batanero, C., Serrano, L.; Ortíz, J. J. (1999): Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños.

Battanero, C.; Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas.

Contexto educativo: revista digital de Educación y nuevas Tecnologías. Número 12, Octubre 2000.

Notas y Artículos: Huerta, Antonio Alanis: "*Saber y saber hacer en la investigación educativa":*

Ortiz de Haro J.J. (1996) :Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de bachillerato.

Revista UNO Nº 10. España: Editorial GRAO

Serrano Luis. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. *Revista UNO*, Nº 12. España: Editorial GRAO.

Crippa, Ana L.; Arias Mercader María J.; Marcos Guillermina (1998). Combinatoria, Estadística y Probabilidades en la EGB. Buenos Aires: Editorial El Ateneo.

Cañizares, Batanero(1996). Azar y Probabilidad. España: Editorial Síntesis.

Taller de estadística para maestros

Gabriela Net, Daniel Vazquez Vargas, Ana Silvia Haedo
Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Argentina
haedo@qb.fcen.uba.ar mourenet@ciudad.com.ar

Resumen
En este artículo se presenta el reporte de un taller de capacitación docente sobre contenidos de Estadística, realizado en dos sesiones de trabajo durante la RELME 15. Durante el mismo se propuso una aproximación intuitiva a nociones básicas mediante la participación activa de los docentes en juegos de azar, y se promovió una discusión sobre distintos tipos de gráficos estadísticos. Se describe aquí la metodología aplicada, y se presentan algunas reflexiones surgidas a partir del desarrollo del taller.

Introducción

En sus orígenes la estadística era la ciencia que se ocupaba de los números del Estado: censos, relevamientos, tasa de natalidad, de mortalidad, etc. En la actualidad, si bien esas cuestiones siguen siendo válidas, su dominio de aplicación se ha ampliado y la metodología estadística es imprescindible para diseñar experimentos, interpretar resultados, hacer inferencias. Por otra parte su difusión y aplicación es tal que el hombre de la calle es continuamente asediado por datos presentados en forma gráfica en los distintos medios de comunicación, enfrentado a resultados, y resulta protagonista él mismo de encuestas de opinión. En la vida cotidiana son frecuentes las situaciones que dependen del azar, y es por esto que es necesario cierto "pensar estadístico y probabilístico" que ayude al individuo a desenvolverse en las mismas. Por lo tanto, hoy existen muchas razones por las que se deben introducir conceptos estadísticos en la escuela: el valor de su empleo en la vida diaria, el rol del razonamiento y la metodología estadística en muchas disciplinas, la necesidad de confeccionar e interpretar gráficos, y reconocer la importancia de la información en la toma de decisiones en el ámbito público y privado.

Actualmente los maestros deben iniciar a sus alumnos en el análisis de datos, trabajando sobre su realidad cotidiana, y aplicar la estadística a situaciones estudiadas en otras áreas del saber, como: Ciencias Naturales y Sociales, Lengua, etc. También deben impulsar a sus alumnos a explorar, visualizar e interactuar con datos y simulaciones.

Por este motivo es ineludible familiarizar a los docentes responsables de la educación de Nivel Básico (alumnos de 7-12 años) con los conceptos estadísticos elementales, para que sean capaces de interpretar críticamente la información, y de elaborar recursos que permitan mejorar la enseñanza de la Estadística en el ámbito escolar. El principal objetivo de este taller consistió en proponer **una acción de capacitación inicial** que permitiera a los docentes participantes:

- aproximarse intuitivamente a nociones básicas de la probabilidad y la estadística, e interesarse en continuar el estudio de estos temas.
- desarrollar habilidades instrumentales, favorecer el pensamiento abstracto y adquirir una actitud reflexiva y crítica frente a la realidad , en particular frente a los mensajes de los medios de comunicación.
- modificar algunas concepciones erróneas sobre conceptos básicos.
- desarrollar estrategias didácticas para llevar adelante actividades de enseñanza-aprendizaje que estimulen el juicio crítico y la creatividad de sus alumnos.

La metodología aplicada en el taller intentó producir una participación activa de los docentes en distintas tareas:

- experimentación con juegos de azar.
- análisis de los propios procesos de pensamiento, los errores y aciertos, las diferentes formas de validación, etc.
- confección y análisis de gráficos estadísticos.

Las actividades grupales desarrolladas implicaron la utilización de materiales concretos que permitieron la realización de series de experimentos a fin de recolectar datos, organizar recuentos de frecuencias, estudiar regularidades, analizar gráficos estadísticos , etc.

Marco teórico

Como describen Batanero, Garfield, Ottaviani, y Truran (2000) las teorías pedagógicas actuales acerca de la formación de profesores distinguen dos tipos de conocimiento que los docentes deberían adquirir: conocimiento del contenido y conocimiento didáctico. Éste último incluye conceptos pedagógicos, psicológicos, conocimientos sobre las concepciones erróneas, epistemología, currículo, materiales a emplear, etc. Es necesario, por lo tanto, diseñar "situaciones didácticas" apropiadas para promover la adquisición de estos conocimientos; desde este punto de vista resulta natural no emplear métodos expositivos si el objetivo es que los profesores desarrollen métodos constructivistas de enseñanza.

Acorde a la teoría constructivista, el taller se planteó de acuerdo a una premisa fundamental de la misma: los coordinadores no presentaron "temas acabados", sino que jugaron fundamentalmente el rol de presentadores del material , solicitando participación y respuestas de los docentes; se privilegió la oportunidad de construir activamente el conocimiento, a pesar de la limitación del tiempo destinado al taller (3 hs. reloj repartidas en dos encuentros).

El abordaje de las actividades realizadas durante el primer encuentro del taller permitió ejemplificar tres tipos de situaciones didácticas planteadas en la teoría de G. Brousseau (1986): de acción, (desarrollo del juego, en el cual el jugador puede construir la solución eligiendo entre diferentes alternativas, y como consecuencia del intercambio de información), de formulación (la estrategia elegida debe poder ser comprendida por los demás) y de validación (se trata de probar la validez del modelo elegido ante un interlocutor oponente, aportando pruebas). Brousseau distingue además una cuarta fase, la de institucionalización. En la misma el nuevo conocimiento es nombrado y declarado, tomando sus convenciones de una cultura. Los coordinadores se refirieron a los conocimientos matemáticos en juego (noción de experimento aleatorio, espacio muestral , posibles notaciones, etc.) que deben ser retenidas para el trabajo posterior.

Por otra parte, el material manipulativo empleado desempeña un papel básico en los primeros niveles de enseñanza por la función instrumental que cumple en los procesos de contextualización de las técnicas y conceptos matemáticos, y por la necesidad que tienen los alumnos de contar con referentes concretos de los conceptos abstractos.(Godino, Batanero, Cañizares y Vallecillos, 1998).

Desarrollo del taller

El objetivo de la primera de las sesiones del Taller consistió en lograr una aproximación intuitiva a nociones probabilísticas empleando un juego de azar con reglas simples, a fin de analizar algunos comportamientos probabilísticos de la realidad. Los participantes trabajaron en pequeños grupos, registraron los resultados obtenidos, y posteriormente reunieron los resultados de una misma experiencia realizada por grupos diferentes a fin de obtener un importante número de repeticiones. El problema planteado consistió en investigar si es posible predecir, con cierto grado de confianza, una estrategia para ganar el juego; interesó saber también si al repetir una experiencia un número elevado de veces se puede observar alguna regularidad en los resultados. En el **ANEXO** se incluye la consigna de algunas de las actividades realizadas.

La puesta en común de los resultados del juego permitió al equipo docente promover la reflexión acerca de:

- la consideración de los participantes sobre las hipótesis realizadas antes de las experiencias: ¿son "adivinanzas" sobre hechos fortuitos, o predicciones basadas en razonamientos que tienen en cuenta, por ejemplo, la simetría de las configuraciones?
- la conveniencia de la elección de ciertas formas de registro y organización de la información obtenida.
- las diferentes modos de construir modelos probabilísticos de ciertos fenómenos.
- la influencia de los conceptos teóricos adquiridos, y las concepciones previas de los docentes al intentar establecer una "estrategia ganadora".

y, también, presentar formalmente algunas nociones y sus expresiones simbólicas: sucesos, sucesos favorables, estimación de la probabilidad a partir de las frecuencias, etc.

En la segunda sesión de trabajo el objetivo consistió en revisar algunos gráficos estadísticos, y focalizar la atención en algunos de ellos, probablemente menos familiares para los maestros (y, por lo tanto, para sus alumnos): tallo y hojas, cartogramas, caras de Chernoff, dendogramas, etc. Se realizó, además, el análisis detallado de un gráfico multivariado realizado en 1861 por el ingeniero francés Charles Minard, que describe el recorrido del ejército de Napoleón durante la campaña en Rusia. Esto fue utilizado como punto de partida para ubicar en un marco histórico el diseño de gráficos, analizando diferencias y similitudes tanto en las formas de presentación como en las ideas subyacentes sobre el significado de la información.

Los ejemplos de las caras de Chernoff, y los dendogramas, suscitaron gran interés entre los asistentes al taller y mostraron la importancia de focalizar la atención no sólo en la construcción de representaciones, sino también en el análisis y la interpretación de las mismas: conclusiones no explícitas que pueden obtenerse, sugerencias para nuevas exploraciones, etc. Al tratarse de representaciones mayormente desconocidas para los participantes resultó muy interesante observar su rol de alumnos enfrentados al problema de analizar críticamente un gráfico complejo, descubrir las convenciones que rigen esa forma de representación, etc.

Conclusión

La dinámica de trabajo propuesta durante la realización de este taller permitió establecer un vínculo estrecho de los maestros participantes entre sí y con el equipo capacitador, creando un compromiso de los docentes con los conocimientos en juego. Los capacitadores pudieron percibir las dificultades en los esquemas individuales y proponer caminos alternativos. Los tiempos de aprendizaje se manejaron de manera flexible, privilegiando la adquisición del sentido de los contenidos. Se discutió sobre el status de "natural " que se da al uso corriente de conceptos teóricos al presentar información estadística a través de representaciones gráficas. Existen gran cantidad de presupuestos asociados: los docentes

pueden interpretar “naturalmente” muchos tipos de gráficos estadísticos, pero se produce un desequilibrio cuando se enfrentan con un gráfico absolutamente desconocido.
Se intentó asimismo conocer algunas características de la población escolar destinataria, en última instancia, de los conceptos estadísticos desarrollados.
Además, como propuesta de continuación del taller los participantes recibieron un cuadernillo con materiales didácticos y referencias bibliográficas de interés.
Es claro que esta experiencia, si bien posibilitará cambios en el futuro desempeño en el aula de los participantes, no es suficiente. Es necesario que la capacitación docente sea un proceso a largo plazo, dado que la formación de maestros en el dominio de la estadística puede ser concebida como el punto de partida para:

- la profundización y ampliación de los contenidos matemáticos adquiridos.
- el trabajo sobre los libros de texto empleados en la escuela: análisis crítico, selección de actividades y justificación.
- la selección de contenidos escolares estadísticos.
- la creación de actividades y propuestas didácticas para los alumnos.
- el análisis crítico de situaciones didácticas y protocolos escolares, incluyendo la formulación de los objetos matemáticos involucrados; la organización de los distintos procedimientos y estrategias de resolución empleados; reflexiones acerca de las dificultades didácticas halladas y/o previstas, etc.
- análisis de las concepciones de los alumnos y de sus procesos de evolución.

Estas actividades favorecerán la adquisición de habilidades que permitan a los maestros adquirir variados recursos tendientes a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística en sus ámbitos de docencia, y pueden interpretarse como una línea de acción en el campo del perfeccionamiento docente.

Referencias bibliográficas

Batanero, C.,Garfield, J., Ottaviani, M.G., & Truran, J. (2000, Mayo) . “Research in Statistical Education: Some priority questions” . *Statistical Education Research Newsletter 1* (2) [On line]. <http://www.ugr.es/~batanero/Newsletters/newsmay00.PDF> .[2002, 20 de febrero].
Brousseau, G.(1986): “Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques”, *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33-115.
Filipozzi Maricchiolo., G. (1987): *Yo, la estadística y la informática.* Buenos Aires, Argentina: Estrada.
Godino, J.D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1987) : *Azar y Probabilidad.* Madrid, España: Síntesis.
Godino, J.D., Batanero, C., Cañizares, M.J., & Vallecillos, A. (1998) : “Recursos para el estudio de los fenómenos estocásticos”. [On line]:
http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/material.htm [2002, 20 de febrero].
Green, D. (1997): “Recognising randomness”. *Teaching Statistics 19*(2) 36-38.Hawkins, A. (1990): *Training teachers to teach statistics*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
Huberman, S. (1996). *Cómo aprenden los que enseñan.* Buenos Aires, Argentina: Ed. Aique.
Masip, C. (1995). *Aula taller.* Buenos Aires, Argentina: Novedades Educativas .
N.C.T.M. (1992): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática* . Sevilla, España: S.A.E.M. Thales.
Pereira-Mendoza,L.(1995) “Graphing in the primary school”. *Teaching Statistics 17*(1) 2-6.

Perry, B.,Jones,G., Thornton, C., Langrall,C., Putt, I., & Kraft, C. (1999): “Exploring visual displays involving Beanie Baby data”. *Teaching Statistics 21*(1) 11-13.
Santaló, L. (1994) : *Enfoques. Hacia una didáctica humanística de la Matemática* . Buenos Aires, Argentina: Troquel Educación.
Santaló, L., Palacios A., & Giordano, E. (1997): *Serie Eureka de Educación Estadística.* Buenos Aires, Argentina: Kapeluz.
Vere-Jones, D. (1995) : “The comming of age of statical education”. *International Statistical Review 63*(1), 3-23.

ANEXO

Se adjuntan aquí dos ejemplos de las actividades realizadas en el Taller.

1º Sesión

JUEGO: “Barcos”

Éste es un juego en el que participan dos jugadores (o dos equipos) .

Se necesitan: un tablero con dos “embarcaderos” con sus rampas para subir a los barcos numeradas de 1 a 12; un par de dados (preferentemente de colores distintos); 24 fichas: 12 de un color, y 12 de otro; hojas para ir anotando resultados, conjeturas o conclusiones.

Reglas:

- ♦ Cada jugador posee 12 fichas, cada una de las cuales representa un pasajero del barco. Cada uno de ellos distribuye sus 12 fichas (“pasajeros”) en las rampas de su embarcadero, representadas por las casillas numeradas, de la manera que desee. (Un jugador en un embarcadero, y el otro en el de la orilla opuesta). No tiene por qué haber pasajeros en todos los rampas , y puede haber más de un pasajero en cada rampa.
- ♦ A su turno cada jugador lanza el par de dados, y observa la suma de los números obtenidos en las dos caras superiores. Si el valor de esta suma coincide con el número de alguna de sus casillas donde hay fichas, uno de los “pasajeros” ubicado en esa rampa sube al barco.
- ♦ Un barco puede zarpar cuando todos sus pasajeros están ubicados en el mismo, de manera que gana el juego el participante *que logra subir primero a todos sus pasajeros a la embarcación.*

¡A jugar!

Después de jugar por lo menos un par de veces les pedimos que piensen y respondan:

- ¿Habrá alguna “estrategia” para ganar en este juego?
- ¿Existirá alguna forma de disponer las fichas inicialmente para ganar? ¿Por qué?
- Si idearon alguna estrategia, vuelvan a jugar utilizándola, y lleven un registro detallado del desarrollo del juego. ¿Da resultado?

Vuelvan a jugar, y registren en esta tabla los resultados de las tiradas de los dados a lo largo del juego:

Suma de los dados	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
f :número de veces que aparece la suma.												
$f_r = f / n$												
***n* es el número total de lanzamientos del juego.**												

2º Sesión

➢ **Actividad 1 (en pequeños grupos)**

Responder por escrito el siguiente cuestionario:

- ¿Qué tipos de gráficos estadísticos conocen? Nombren y construyan un ejemplo de cada uno de ellos.

- ¿Por qué piensan que resultan útiles estas formas de representación de los datos? Intenten especificar ventajas (y/o desventajas) del uso de algunos de ellos.
- ¿Usan estas representaciones con sus alumnos? En caso afirmativo, especifiquen algunas dificultades que hayan observado en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las mismas.

➢ **Actividad 2 (en pequeños grupos)**

Lucía y 10 compañeras de su grado han registrado qué día del mes es su cumpleaños, utilizando el siguiente diagrama, llamado de *tallo y hojas*:

	3 4 4 6
1	1 1 4 7
2	0 8 9

Nota: 2 | 8 = 28

Respondan el siguiente cuestionario:

- ¿Conocían este tipo de representación de datos estadísticos?
- ¿Qué información se puede extraer del diagrama anterior?
- ¿Cómo se pueden representar los mismos datos de maneras diferentes? Dar ejemplos.

➢ **Actividad 3.**

- Elaboren un diagrama de tallo y hojas similar al dado, correspondiente a las fechas de cumpleaños de todos los docentes del Taller.
- Elaboren un diagrama de tallo y hojas correspondiente a las estaturas de los docentes integrantes del Taller.
- Den ejemplos de otros tipos de datos que sean factibles de ser representados mediante diagramas t-h.

➢ **Actividad 4. (Individual).**

Lea esta situación:

Un maestro participante de una Jornada de Capacitación, al que se le presentó la situación anterior sobre diagramas de tallo y hojas, opinó lo siguiente:
"Al mostrar el ejemplo del diagrama construido por Lucía directamente a los alumnos, como actividad inicial, estamos invirtiendo el orden "natural" de presentación de un concepto nuevo en la clase de matemáticas. Yo prefiero presentar a los chicos la colección de datos, y explicarles cómo se construye el diagrama. Después mostrar otro ejemplo, y, por último, darles a los chicos abundante ejercitación para que construyan diagramas t-h."

¿Qué opinión le merece este comentario? Exprese su acuerdo o desacuerdo, justificando con el mayor detalle posible.

Como trabajo independiente se propondrá a los docentes participantes la siguiente tarea:

a) Imagine y escriba un diálogo entre tres alumnos a los que se les presenta la situación planteada en la Actividad 2) y se les solicita extraer información del diagrama t-h.

(Suponga que ésta es la *primera aproximación* de los alumnos a este tipo de representación).

(Por supuesto, si Ud. puede directamente realizar esta experiencia con tres alumnos suyos, y tomar nota del diálogo, ¡muchísimo mejor!) .

b) Lea el artículo citado en la bibliografía:

- Perry, B., Jones,G., Thornton, C., Langrall,C., Putt, I., & Kraft, C. (1999): "Exploring visual displays involving Beanie Baby data". *Teaching Statistics 21*(1) 11-13.

c) Establezca comparaciones entre el diálogo que Ud. ideó y los comentarios de los alumnos citados en el artículo. ¿Está Ud. de acuerdo con la conclusión del mismo? Justifique.

Pensamiento relacionado con Probabilidades y Estadística

Nivel Medio

Análisis de aprendizajes en inferencia estadística a través de proyectos de investigación

Angustias Vallecillos Jiménez
Universidad de Granada. España
avalleci@ugr.es

Resumen
En este trabajo se describen en síntesis dos proyectos de investigación centrados en el aprendizaje y la enseñanza de la inferencia estadística en el nivel de enseñanza secundaria en España que se están desarrollando en la actualidad. Con esta presentación pretendemos un doble objetivo: por una parte, sensibilizar a los profesores acerca de la importancia de la estadística inferencial para la formación básica de los ciudadanos y por otra parte, informar sobre los múltiples problemas de aprendizaje detectados que plantean la necesidad urgente de investigar sobre el tema con el fin de mejorar los procesos de instrucción. Resaltamos la importancia de la organización de la investigación en forma de proyectos que nos sirve, básicamente, para priorizar las necesidades y tareas, marcar pautas y organizar la agenda de investigación para un tiempo determinado. Los resúmenes de algunos trabajos y las referencias incluidas dan cuenta de los principales resultados obtenidos, tanto de tipo teórico como en forma de recursos para el aula, que han sido publicados hasta el momento.

Introducción

Uno de los rasgos característicos de la sociedad actual ha sido el enorme desarrollo tecnológico producido en la segunda mitad del siglo XX. La tecnología ha sido eficazmente aplicada para la mejora social y económica de los ciudadanos, pero muy en concreto, en el ámbito de la información y la comunicación. La revolución informática ha producido cambios notables en las posibilidades educativas, formativas e informativas, de los ciudadanos del siglo XXI. La educación, en general, tiene unas perspectivas más amplias, más creativas y universalizadas de las que jamás había soñado. No se pueden seguir priorizando los ‘conocimientos’ tradicionales sin reconocer que cada vez es más necesario el dominio de habilidades relacionadas con el manejo de la información disponible para la autoformación y adecuación social y profesional permanente a un mundo sometido a cambios rápidos y profundos. Por tanto, la educación actual, además de proporcionar a los ciudadanos los conocimientos necesarios, deberá propiciar el desarrollo de las capacidades necesarias para desenvolverse en la sociedad de la información. Algunas de estas capacidades son las siguientes: de acceder a la información proporcionada, especialmente por las nuevas tecnologías como internet, de seleccionar y analizar la información relevante, de usarla con flexibilidad, sentido crítico, etc. Además deberá ser consciente de la necesidad e importancia de tomar decisiones juiciosas e informadas para el buen desarrollo de su vida ordinaria, de la necesidad creciente del trabajo en equipo, de que la formación cada vez será más polivalente y más necesaria la puesta al día, etc. Muchas de estas capacidades están relacionadas con la obtención de datos, su tratamiento y la toma de decisiones en situación de incertidumbre, basadas en la información obtenida de ellos, esto es, en contenidos matemáticos incluidos en la actualidad en las áreas de estadística y estadística inferencial. Esto hace que la formación básica en estos temas sea reconocida, cada vez más, como elemento formativo básico general.

En el ámbito de la inferencia, los nuevos currículos para la educación básica, primaria y secundaria, en España incluyen contenidos en el área de matemáticas que vienen a certificar oficialmente la necesidad de la preparación general en estos temas. Sin embargo, esta nueva

situación plantea una nueva perspectiva de gran amplitud y responsabilidad para los profesores de estos niveles que necesitan gran ayuda para su actualización profesional, tanto en relación con el contenido científico cómo pedagógico.
Uno de los objetivos que debe cubrir la investigación educativa específica es proporcionar los recursos necesarios, debidamente contrastados científicamente, con el fin de optimizar los procesos de aprendizaje y enseñanza a todos los niveles. Con el fin de organizar y rentabilizar socialmente nuestras investigaciones previas (Vallecillos, 1996; 1998; 1999; 2000; 2001), estudiar el aprendizaje del tema en otros niveles así como obtener la información precisa para diseñar los recursos didácticos que pretendemos, venimos desarrollando proyectos de investigación, dos de los cuales presentamos aquí muy resumidamente.

Proyectos investigación sobre el aprendizaje de la inferencia

La organización de la investigación en forma de proyectos nos sirve, básicamente, para conseguir tres objetivos: priorizar las necesidades y tareas, marcar pautas y organizar una agenda de investigación para un período de tiempo determinado. También para distribuir las tareas a realizar entre los componentes del grupo. En lo que sigue vamos describir, en forma sintética, dos proyectos de investigación centrados en el aprendizaje y la enseñanza de la inferencia estadística en los niveles de enseñanza secundaria y la universidad. Cada uno de ellos está en una fase distinta de realización y todos ellos han recibido financiación pública del Ministerio de Educación español dentro de sus Planes Nacionales de Investigación.

1. *Dificultades teóricas, metodológicas y curriculares de la estadística inferencial en la enseñanza secundaria.* Duración: 1998-2001.
En una primera fase de desarrollo del Proyecto de Investigación, hemos realizado trabajos, fundamentalmente de tipo teórico, de actualización y recopilación de la información relativa al tema en los distintos niveles de enseñanza, consultas bibliográficas, etc. Simultáneamente, hemos llevado a cabo la labor de difusión de los resultados de investigaciones anteriores del grupo aplicables al nivel de enseñanza secundaria por medio de la redacción de artículos, reseñas de libros, etc. y su publicación en revistas con difusión entre los profesores, presentación de comunicaciones en Congresos y Jornadas de tipo profesional, participación en cursos de formación continua u otras vías. Una vez obtenida y analizada la información necesaria pretendemos diseñar recursos didácticos que puedan ser sometidos a prueba en unidades piloto y debidamente evaluados. Para ello contamos con algunos colaboradores que son profesores de enseñanza secundaria, que participan como asesores expertos en el nivel de secundaria, y que formarán parte del equipo de investigación en una segunda fase de este proyecto. Terminada la primera fase del Proyecto y redactados los recursos didácticos necesarios, pretendemos ampliar el equipo de investigación con la incorporación de un equipo de profesores de secundaria que nos permita validar científicamente los resultados obtenidos en este Proyecto.
Una **primera meta** que se pretende con este Proyecto de Investigación es completar y rentabilizar socialmente los resultados de las investigaciones teóricas realizadas por el grupo con anterioridad. En el curso de las investigaciones teórico-experimentales realizadas se han obtenido resultados que han sido publicados en revistas y han sido presentados en congresos tanto nacionales como internacionales. Estas repercusiones, en los ámbitos de la

investigación y académico, sin embargo, no pueden considerarse suficientes para un trabajo de investigación de esta índole de interés social y aplicado evidentes. La introducción de la inferencia como novedad en la enseñanza secundaria en España plantea, por una parte, la necesidad de analizar las implicaciones curriculares que, para esta etapa de enseñanza, tienen las investigaciones llevadas a cabo; por otra parte, la necesidad de completarlas en otros aspectos y, posteriormente, llevar a la practica docente los resultados, y contrastarlos y validarlos científicamente. Se trataría, en definitiva de un planteamiento que podemos calificar como de colaboración en el desarrollo de innovación educativa, esto es, en alguna medida como de innovación y desarrollo.

La **segunda meta** que pretendemos es conectar la investigación educativa realizada en el ámbito universitario con la práctica docente en niveles no universitarios de enseñanza. Se trataría así de la puesta en práctica de un planteamiento metodológico para la investigación educativa que, en nuestra opinión, debe integrase en la labor de un equipo de investigación en Didáctica de la Estadística: tomar como parte del trabajo de investigación las tareas que se refieren a las repercusiones del mismo en los niveles de enseñanza correspondientes y organizar los canales de difusión necesarios para que la labor investigadora encuentre sus cauces de aplicación óptimos.

Por último, nos proponemos como **meta** igualmente la consolidación de un equipo de investigación pluridisciplinar y pluriprofesional. Este equipo está formado inicialmente con especialistas en las materias científicas implicadas, la Estadística y la Didáctica de la Estadística, encargados de poner, previamente, los cimientos científicos necesarios para la organización de un equipo de trabajo más amplio que pueda, posteriormente, poner a prueba y validar los resultados de este proyecto de investigación.

Estas metas u objetivos generales pueden concretarse en los siguientes **objetivos**:

- Difundir entre los profesores de enseñanza secundaria los resultados de las investigaciones realizadas. Esto exige el uso de los canales de difusión apropiados, revistas profesionales, asistencia y participación en reuniones de profesores de esos niveles de enseñanza, etc. ya que las revistas científicas en donde normalmente se publican los resultados de las investigaciones no tienen gran difusión o no son consultadas usualmente por los profesores de secundaria por dificultades de acceso a las mismas o por problemas de idioma.
- Analizar, desde un punto de vista teórico, las dificultades de tipo didáctico que plantea la introducción de la inferencia estadística en la enseñanza secundaria. Esto exige un análisis conceptual del tema con profundidad que incluya además las consideraciones de tipo didáctico precisas, esto es, aunar la teoría científica con la didáctica para producir un conocimiento nuevo aplicable y científicamente basado. Igualmente exige el análisis detallado de las nuevas orientaciones curriculares para la enseñanza secundaria.
- Recopilar la información previa existente acerca de las concepciones previas de los alumnos, errores sistemáticos, etc., que pueden erigirse en obstáculos para el aprendizaje de conceptos básicos en inferencia en los niveles preuniversitarios de enseñanza.
- Analizar, desde el punto de vista del profesor, los condicionantes tanto de tipo teórico como práctico, que pueden tener influencia decisiva en el desarrollo y puesta en práctica de las nuevas enseñanzas. Esto supone, además, la realización de un análisis pormenorizado del currículo de formación de los profesores de enseñanza secundaria

con el fin de diseñar planes de formación o actualización específicos que pueden favorecer la mejora de los procesos de instrucción.

- Desarrollar unidades didácticas específicamente diseñadas para la introducción de los nuevos contenidos en la enseñanza secundaria que tengan en cuenta las aportaciones recientes de la investigación educativa. Después deberán ser sometidas a la crítica de los profesores expertos y debidamente evaluadas.

En este proyecto venimos trabajando los dos últimos años y sus principales resultados están recogidos en un libro, (Moreno, 2000), y varias publicaciones. El primero contiene el análisis crítico del marco curricular de la inferencia en el nivel de secundaria en Andalucía, la recopilación de los trabajos de investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del tema publicados con anterioridad así como la descripción de una actividad docente planteada y analizada con el fin de estudiar las concepciones de los estudiantes sobre el razonamiento inferencial. Esta actividad docente y los resultados obtenidos del análisis de sus resultados están contenidos en Moreno y Vallecillos (2002). En este trabajo hemos realizado una primera clasificación de las concepciones de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de muestreo, la mayor parte de ellas incorrectas, y analizado su idea sobre una idea básica en inferencia como la variabilidad muestral. También hemos encontrado interesantes hallazgos sobre la noción intuitiva de espacio muestral en alumnos de este nivel así como sobre la contraposición entre las dos ideas fundamentales en inferencia de *representatividad* y *variabilidad* y los problemas que esto puede acarrear para la enseñanza. En varias comunicaciones a congresos, (Vallecillos y Moreno, 1997), (Moreno y Vallecillos, 1998; 1999a; 1999b; 2001) se informa a los profesores de los resultados que vamos obteniendo o se da cuenta de algunos diseños de actividades didácticas para ser llevadas al aula en forma de proyectos adecuados al nivel de los alumnos. Este proyecto se sigue desarrollando en la actualidad.

2. *Estudio empírico sobre el aprendizaje de la estadística inferencial en secundaria: proyección sobre la enseñanza y la formación básica de los ciudadanos del siglo XXI.*

Nos proponemos una meta que es *determinar áreas de interés para la educación básica de los ciudadanos en relación con la inferencia estadística*. Se trata de una meta ambiciosa que puede ser concretada en los siguientes **objetivos**:

1. Completar nuestros estudios, teóricos y empíricos, sobre el aprendizaje de la estadística inferencial en el nivel de secundaria. Este objetivo se concreta en el estudio de los siguientes aspectos:
    1.1. Determinar barreras psicológicas o didácticas para el aprendizaje de la estadística inferencial en secundaria.
    1.2. Determinar concepciones previas de los estudiantes de secundaria que dificultan o impiden el aprendizaje de conceptos básicos en inferencia estadística.
    1.3. Determinar posibles causas para las dificultades y errores de aprendizaje detectados en nuestras investigaciones previas.
2. Diseñar secuencias didácticas, contrastadas científicamente, para la implementación en las aulas de los contenidos de estadística inferencial incluidos en el currículo de matemáticas de secundaria. Este objetivo se concreta en los siguientes:
    2.1. Diseñar y elaborar recursos didácticos para el uso de los profesores en el aula.
    2.2. Difundir los resultados obtenidos entre los profesores pertinentes.

3. Organizar los resultados de las investigaciones didácticas pertinentes con el fin de precisar las áreas de interés para la formación básica de los ciudadanos del siglo XXI, en relación con la inferencia estadística.

Este último objetivo, a más largo plazo, nos servirá para organizar los resultados de las investigaciones, ajenas y propias del grupo, con la meta puesta en la determinación del potencial formativo y educacional de la inferencia estadística para el ciudadano del siglo XXI, por su gran incidencia en la toma de decisiones y la indudable trascendencia social y económica que ello conlleva.

Este proyecto, que puede considerarse una continuación del anterior, se desarrollará a partir de la conclusión del mismo, aproximadamente de los años 2002 al 2005. En este momento estamos trabajando ya en el diseño de un marco teórico propio basado en la revisión de la literatura de investigación que hemos realizado hasta el momento. Este consiste en la organización de un esquema teórico para la enseñanza y la evaluación del aprendizaje de la estadística inferencial en alumnos de secundaria que consta de cuatro constructos básicos que son: a) poblaciones y muestras y sus relaciones; b) proceso de inferencia; c) tamaño muestral y d) tipos de muestreo y sesgos. En cada uno de estos constructos consideramos cuatro niveles que constituyen un continuo desde el razonamiento idiosincrático hasta el formal (Vallecillos y Moreno, en prensa).

Cuestiones metodológicas

Muy resumidamente, en ambos proyectos nos planteamos llevar a cabo estudios con carácter teórico y experimental. Nuestros sujetos de estudio serán varios: el propio contenido de la estadística inferencial, los alumnos de secundaria y el aprendizaje observable de éstos en relación con la estadística inferencial. Los análisis teóricos se llevan a cabo, básicamente, en dos campos distintos: a) sobre la acotación de los contenidos a trabajar en el nivel de enseñanza secundaria, esto es, sobre la transposición didáctica de la inferencia estadística en el currículo de la secundaria y b) sobre la identificación de las áreas de interés, en relación con la inferencia, para la formación básica de los ciudadanos.

La parte experimental será un diseño cuasi-experimental dada la imposibilidad de contar con muestras aleatorias. Se lleva a cabo un estudio piloto para poner a prueba los instrumentos de toma de datos y analizar su fiabilidad y, una vez revisados todos los aspectos pertinentes, se toman datos de una muestra experimental amplia. Los datos son tanto de tipo cuantitativo como cualitativo y son analizados usando paquetes informáticos como SPSS o Statgraphics.

Conclusiones

A pesar del poco tiempo transcurrido desde la iniciación de los trabajos de investigación que llevamos a cabo sobre el aprendizaje y la enseñanza de la estadística, tenemos ya una cierta estructura de investigación en el tema, organizada en forma de proyectos que nos han proporcionado una agenda de investigación para los próximos años. En todos los proyectos mantenemos dos objetivos básicos: a) estudiar teóricamente los procesos de enseñanza-aprendizaje en todas sus facetas y b) conectar la investigación con la práctica docente a todos los niveles. Apenas hemos alcanzado a ver la magnitud del problema y tratar de establecer las prioridades necesarias, así es que tenemos todo el trabajo por hacer. Los estudios específicos sobre la inferencia estadística tienen una especial importancia por las implicaciones sociales, e incluso económicas, que tiene en la toma de decisiones por los ciudadanos en situación de incertidumbre y las heurísticas y sesgos descritos. Creemos que estos justifican con creces la necesidad de mejorar los procesos formativos en general, con el fin de minimizarlos en lo posible, y que para ello es necesaria la formación de equipos pluridisciplinares y pluriprofesionales que investiguen organizadamente sobre el tema.

Agradecimientos: a los Proyectos de Investigación PB97-0827 y BS02000-1507, financiados por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, España.

Referencias bibliográficas

Moreno, A. (2000). *Aprendizaje y Enseñanza de la Inferencia Estadística.* Granada: El autor.

Moreno, A. y Vallecillos, A. (1998). El Muestreo en la Enseñanza Secundaria. *Actas de las VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales",* pp. 249 – 254. Jaén: S.A.E.M. "Thales".

Moreno, A. y Vallecillos, A. (1999a). La Educación Estadística en la Sociedad Actual. *Investigación en el aula de Matemáticas: Matemáticas en la sociedad,* pp. 253 - 261. Granada: S.A.E.M. "Thales".

Moreno, A. y Vallecillos, A. (1999b). ¿Cuántas Ranas Hay en la Charca?. *Actas de la 9as Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas,* pp. 294 - 298. Lugo: Cefocop.

Moreno, A. y Vallecillos, A. (2001). Exploratory Study on Inferential' Concepts Learning in Secondary Level in Spain. En M. Van der Heuvel (Ed.): *Proceedings of the 25 PME,* p. 343. The Netherlands: Freudenthal Institute y University of Utrech.

Moreno, A. y Vallecillos, A. (2002). Exploración de Heurísticas y Concepciones Iniciales sobre el Razonamiento Inferencial en Estudiantes de Secundaria. *Educación Matemática.*

Vallecillos, A. (1996). *Inferencia Estadística y Enseñanza: un Análisis Didáctico del Contraste de Hipótesis Estadísticas.* Granada: Comares.

Vallecillos, A. (1998). Research and Teaching of Statistical Inference. *International Conference on the Teaching of Mathematics,* pp. 296-298. Cambridge, USA: John Wiley & Sons, Inc. Publishers.

Vallecillos, A. (1999). Some Empirical Evidences on Learning Difficulties About Testing Hypotheses. Ponencia invitada. *Proceedings of the 52nd Session of the International Statistical Institute,* Vol. 2, pp. 201-204. The Netherlands: ISI.

Vallecillos, A. (2000). Understanding of the Logic of Hypothesis Testing Amongst University Students. *Journal für Mathematik-Didaktik,* Vol. 2, 101-123.

Vallecillos, A. (2001). Evidencias Empíricas sobre Dificultades en el Aprendizaje de los Tests de Hipótesis. En P. Gómez (Ed.): *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática: Homenaje al profesor Mauricio Castro,* pp. 381-398. Granada: Universidad de Granada.

Vallecillos, A. y Moreno, A. (1997). Los Profesores de Matemáticas y la Inferencia Estadística en la Enseñanza Secundaria. En: *Investigación en el aula de Matemáticas: La tarea docente,* pp. 279-*287.* Granada: Universidad de Granada y S.A.E.M. "Thales".

Vallecillos, A. y Moreno, A. (en prensa). Framework for Instruction and Assessment On Elementary Inferential Statistics Thinking. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics.* Creta, Grecia.

Análisis de los errores metodológicos en trabajos escolares de estadística

Dora Franzini de Livia, Nancy Muñoz, Roberto Sánchez, Magdalena Pekolj, Olga Vannucci, María I. Blois
Universidad Nacional de San Luis. Argentina
dfranz@unsl.edu.ar

Resumen
En este artículo se presenta un análisis de los errores detectados en trabajos escolares de Estadística. Los mismos fueron presentados en las Primeras Jornadas de Enseñanza Interactiva de la Estadística, que se realizaron en la Universidad Nacional de San Luis, Argentina, en octubre de 2000. El evento se organizó con las características propias de los congresos científicos, pero estuvo dirigido a los alumnos de EGB3º y Polimodal de las escuelas de San Luis, supervisados por sus docentes. El comité evaluador realizó una intensa tarea de corrección, dado que la mayoría de los trabajos presentaron falencias en la especificación de las poblaciones en estudio, objetivos muy ambiciosos y confusos, no coordinables con los diseños y los tamaños muestrales utilizados, errores conceptuales, gráficos incompletos, etc.

Introducción

En la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas y Naturales de la Universidad Nacional de San Luis, en 1999, se puso en marcha el Proyecto Educativo "Enseñanza de la Estadística". Los miembros del proyecto, hemos asumido el desafío de provocar un impacto real en el mejoramiento de la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Estadística, en todos los niveles educativos de la ciudad de San Luis. Para ello diseñamos, planificamos y experimentamos distintos tipos de estrategias , recursos y actividades, dirigidas a los docentes y a los alumnos, según el nivel educativo y la carrera. El presente trabajo se refiere a los niveles Educación General Básica y Polimodal.

La postura epistemológica constructivista que caracteriza nuestra propuesta, exige la participación activa del alumno en la selección del tema o problema, la selección de variables a analizar, el diseño del experimento, la ejecución, recolección y análisis de datos, confección de tablas y gráficos mediante el uso de la computadora, la extracción de conclusiones y finalmente la comunicación de resultados. Queremos romper con la perniciosa tradición del docente que presenta una muestra, o a veces tan sólo un conjunto de números, y solicita a sus alumnos que calculen las características de posición y de dispersión, perdiendo así la posibilidad de experimentar , de construir nociones y conceptos tales como los de experimento aleatorio, variable, medición, dato, error experimental, etc. y de desarrollar habilidades y actitudes que solamente pueden factibilizarse mediante las vivencias correspondientes.

Durante 1999 experimentamos con alumnos de polimodal, de tres escuelas de la ciudad de San Luis, en el estudio del comportamiento del tránsito vehicular, logrando despertar mucho interés y curiosidad por el análisis de fenómenos y procesos aleatorios.

En aquella ocasión , tomamos conocimiento de la precariedad de las condiciones de enseñanza de la estadística en esas escuelas y del hecho que algunos docentes colocan los temas de estadística al final del programa de matemática, con la esperanza de no desarrollarlos "por falta de tiempo".

Para diseñar un plan de acción, a mediano y largo plazo, que produjera un impacto real en la calidad, necesitábamos conocer más fehacientemente el estado inicial real de las condiciones de enseñanza-aprendizaje de la estadística en todas las escuelas de la ciudad.

El problema era ¿con qué instrumento? Había que buscar una estrategia que eliminara la posibilidad de que los docentes ocultaran las falencias. Decidimos apuntar a detectar cual era ***el nivel máximo alcanzado o alcanzable sin nuestra participación*** , puesto que de allí para abajo se podía imaginar un amplio espectro de niveles y calidades hasta llegar a cero. Nos pareció que lo más adecuado era organizar un evento, donde los propios alumnos mostraran los trabajos realizados en la escuela. Decidimos entonces organizar las Primeras Jornadas de Enseñanza Interactiva de la Estadística, otorgándoles las características propias de los congresos científicos, con comité evaluador, con normas y cronograma para la presentación de resúmenes y de trabajos completos , impresos y en discketes, duración de las comunicaciones orales , etc. Pusimos como condición , que los trabajos deberían ser realizados por los alumnos, desde la propuesta del problema hasta la comunicación de los resultados en las jornadas y que deberían estar supervisados por un docente responsable.
Con el objetivo de lograr la participación del mayor número posible de escuelas nos empeñamos en hacer una intensa difusión de las Jornadas, enviamos invitaciones, posters y folletos informativos a todas las escuelas de la ciudad de San Luis y entrevistamos a los docentes con la intención de motivarlos a participar con sus alumnos. Esto nos permitió constatar que los docentes reconocen falencias en su formación estadística y una gran inseguridad respecto a sus conocimientos sobre el tema. Pese a todas las estrategias aplicadas, sólo se inscribieron diez escuelas de la ciudad de San Luis que participaron con doce trabajos. Aceptamos la participación, como invitada especial, de una escuela de Concarán con un trabajo y de seis escuelas rurales de Mendoza que participaron como invitadas extraprovinciales, con un solo trabajo realizado en forma conjunta..
El evento se desarrolló en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas y Naturales de la Universidad Nacional de San Luis, los días 20 y 21 de octubre de 2000. El primer día se dedicó a Comunicaciones de Trabajos de los alumnos de EGB-3 y Polimodal y el segundo día se ofreció un Taller para Docentes y la Conferencia de Cierre .
La ejecución del evento fue sumamente enriquecedora para todos los participantes -alumnos, docentes y organizadores- y la experiencia nos permitiría escribir sobre distintas problemáticas , pero abordaremos ahora sólo el análisis de las fallas y errores conceptuales y de procedimiento que detectó el comité evaluador en los trabajos presentados. Algunos de ellos fueron subsanados antes del evento , pero otros resultaron irresolubles y con altísimo costo.

El problema del diseño del experimento y de la muestra

En muchas ciencias el conocimiento científico avanza mediante el estudio de muestras extraídas de poblaciones. El objetivo último de cualquier trabajo de investigación es hacer inferencias confiables y con errores tolerables. Aún cuando la muestra esté bien diseñada y correctamente recolectada, el conocimiento obtenido por un razonamiento de tipo inferencial posee un riesgo de ser falso, que es inherente al mismo y debido al método de muestreo. Pero este riesgo puede cuantificarse mediante los recursos que provee la teoría de la probabilidad
Sin embargo, cuando la muestra está bien diseñada pero mal recolectada o cuando está mal diseñada, el riesgo de obtener conclusiones falsas aumenta y escapa a nuestras posibilidades la determinación de su magnitud.
Si bien es cierto que en los trabajos escolares, en EGB y Polimodal, generalmente no están dadas las condiciones para trabajar con la rigurosidad de los trabajos científicos, especialmente en lo que respecta a los diseños y tamaños muestrales, esto no nos libera de

la responsabilidad de enseñar contenidos correctos, aunque adaptados a la realidad institucional.
Las violaciones groseras a los supuestos básicos de los métodos de muestreo, de estimación o aún de las herramientas básicas de estadística descriptiva o de las normas usuales para realizar tablas y gráficos estadísticos, generan una cantidad de errores conceptuales y procedimentales que seguramente costará corregir, tanto en los docentes como en los alumnos.
Para enfrentar un problema concreto de estimación de algún parámetro poblacional, hay diversos métodos que pueden resultar adecuados para diseñar la muestra . Cada uno de ellos provee un estimador diferente , con sus propias características, distribución muestral y error estándar. Por otra parte, la calidad de la muestra depende de la pericia del que la diseña y de la bondad del proceso de recolección.
En los trabajos escolares no es usual contar con el asesoramiento de especialistas y es el docente, a veces de matemática y a veces de otras asignaturas, el que diseña la muestra o simplemente elige el tamaño de la misma sin dar demasiadas explicaciones sobre el modo en que se seleccionarán las unidades.
Frecuentemente los trabajos escolares son encuestas de opinión, estudios de mercado o similares, pero el problema es que suelen considerar como población objetivo todos los habitantes de la ciudad o alguna población muy grande, heterogénea y geográficamente dispersa. De modo que la muestra que es factible tomar, debido a las limitaciones económicas, de tiempo, de permiso paterno para realizar las entrevistas y las limitaciones de conocimientos de muestreo, finalmente resulta no representativa.
En el otro extremo están aquellos docentes que conociendo, sus limitaciones respecto al manejo de métodos de muestreo , prefieren utilizar muestras muy grandes con un alto costo de tiempo para los alumnos y que ofrecen la misma precisión en las estimaciones que otras muestras de tamaño moderado bien diseñadas.
Esta problemática del diseño muestral, es también un punto álgido en muchas investigaciones en ciencias fácticas y sociales. La diferencia está en que, en los trabajos escolares hay ciertas soluciones posibles, que no pueden darse en la investigación científica. El docente tiene un amplio margen de maniobrabilidad respecto a la selección de problemas y actividades. Esto le permite disminuir la magnitud del problema del diseño muestral, recurriendo principalmente a limitar el tamaño de la población objeto y a seleccionar problemas que se refieran a la población escolar de la propia institución, donde tendrá disponible información fehaciente respecto al marco muestral, tamaños de estratos, etc. Otras opciones experimentales se refieren a la ejecución de experimentos áulicos, generando muestras al azar.

Detección de errores en trabajos escolares de estadística
Las afirmaciones sobre la problemática escolar expresadas en el punto anterior, son producto del análisis de casos realizados en escuelas de la ciudad de San Luis , no sólo en ocasión de las Jornadas antes mencionadas, sino también dentro de las actividades del Centro de Servicios Estadísticos, de la UNSL, a donde suelen recurrir algunos docentes del nivel medio, en búsqueda de asesoramiento para el diseño de muestras.
La información del cuadro siguiente permite brindar una idea de la riqueza temática de los trabajos, niveles educativos y tipos de establecimiento que participaron en las Primeras Jornadas de Enseñanza Interactiva de la Estadística . Seis de ellos se basan en encuestas realizadas por los alumnos en la ciudad de San Luis sobre temas de su propio interés (Nº1,

2, 4, 6, 11, 13). El trabajo sobre Ley de Ohm consistió en una verificación experimental de la ley determinando las rectas de regresión a partir de mediciones realizadas por los alumnos en el laboratorio de Física. En los trabajos Nº 5, 12 y 14 , se determinaron entre otros indicadores, los flujos de tráfico en distintas calles de la ciudad, las horas pico, tamaños de colas en los semáforos, porcentaje del flujo que corresponde a remisses y taxis, etc. En los trabajos 7 y 8 se utilizaron las bases de datos de la escuela, sobre las notas obtenidas por alumnos en los últimos años, se determinaron distintos indicadores de rendimiento y también rectas de regresión.

Titulo	**Nivel educativo**	**Tipo de establecimiento**
1.- Adolescencia y Sexualidad	1º Polimodal	**Privado**
2.- Tabaquismo en los jóvenes	9º EGB	Privado
3.- Ley de Ohm	2º Polimodal	Provincial
4.- Internet en San Luis	2º Polimodal.	Privado
5.- Incursionando en la Estadística mediante el tráfico vehicular	2º Polimodal.	Privado
6.- Mercado de Diarios	2º Polimodal.	Privado
7.- ¿Hay relación entre el rendimiento en las distintas materias? -	2º Polimodal	Provincial
8.- Situación de los alumnos desde 1991 a 1995	2º Polimodal.	Provincial
9.- Población de Concarán con capacidades diferentes	2º Polimodal.	Provincial
10.- Prevención de daños causados por accidentes meteorológicos en cultivos. (Participante extraprovincial)	9º EGB	Trabajo Conjunto de 6 Escuelas rurales de Mendoza.
11.- Los puntanos y el turismo	2º Polimodal	Privado
12.- Tráfico en la ciudad de San Luis	9º EGB.	Provincial
13.- El derecho de opinión de los ciudadanos	2º Polimodal	Provincial
14.- Los cuenta-autos	9º EGB.	Provincial

Los errores más destacados, se refieren a :

- Falta de claridad en los objetivos , en la mayoría de los trabajos presentados.
- Falta de precisión en la definición de la población objeto y de las unidades de muestreo.
- Diseños muestrales prejuiciosos, en varios de los trabajos presentados.
- Muestras muy pequeñas o muy grandes. (oscilaron entre 20 y 40 las menores y entre 600 y 1600, las mayores)
- La población muestreada, en ningún caso correspondía, al menos cercanamente con la población objeto. Se infiere sobre poblaciones objeto mucho más amplias que las poblaciones efectivamente muestreadas.
- En el trabajo nº2, se calculó la media de la variable edad de jóvenes fumadores, sin ponderar por las frecuencias. Además se informó como un gran hallazgo que el mayor porcentaje de fumadores se presentaba a los 15 años, sin tener en cuenta que en la muestra total esa edad era la más representada y que también entre los no fumadores el porcentaje mayor correspondía a los jóvenes de 15 años.
- El caso del error más costoso, se presentó en el trabajo nº 9 de la tabla. El objetivo fundamental era estimar el porcentaje de personas discapacitadas en el pueblo de Concarán. Los alumnos recorrieron una muestra de 1600 viviendas, aproximadamente el 80% del pueblo, registraron cuantas personas discapacitadas había, pero no registraron la cantidad de personas en cada vivienda. Por omitir esa pregunta en el cuestionario, no pudieron calcular el porcentaje que era el objetivo . El trabajo se presentó con un porcentaje del 14% de discapacitados en el pueblo, calculado

erróneamente usando como denominador el número de viviendas. Esto produjo una gran sobreestimación. Recién cuando el comité evaluador marcó el error, los alumnos tomaron conciencia de que una pregunta necesaria había sido omitida. Para subsanar el mismo, se sugirió utilizar un tamaño familiar de cuatro miembros, considerándolo como tamaño de la familia tipo. De otro modo, el trabajo hubiera quedado excluido de la comunicación oral, produciendo un daño moral más grave, dado el empeño , la dedicación y el esfuerzo realizado por los alumnos . Con este recurso extremo, se determinó un porcentaje del 3.5% de discapacitados, que es más coherente con la realidad. Cabe destacar que , pese al error cometido, la experiencia de entrevistar a tantos discapacitados de diversos tipos o a sus familiares, constituyó una experiencia de incuestionable valor en la formación integral de los alumnos.

- En los trabajos nº 4, 6 y 11, que fueron dirigidos por la misma docente, se intentó aumentar la representatividad de las muestras utilizando algo similar a un muestreo estratificado, tomando al azar una muestra bipartita en dos barrios de la ciudad. Un barrio residencial de clase media alta y otro de clase media baja. En uno de los trabajos el tamaño de la muestra era de 40, con 20 en cada barrio. Se informaron los resultados por barrio, pese a la escasa representatividad de las muestras producida no sólo por el tamaño muestral, sino por el hecho que algunas de las preguntas tenían 5 o 6 opciones fijas, donde se distribuyeron las respuestas de los 20 entrevistados. Éstas resultaron muy dispersas, generando la pérdida de representatividad de las distintas alternativas. También se informaron los resultados globales, obtenidos agrupando los datos en una sola muestra de tamaño 40 , pero omitiendo las ponderaciones correspondientes en las estimaciones y quedando sin representación otros sectores de la población.
- Hubo gráficos de sector circular con las referencias de clase de cada sector, pero sin los porcentajes correspondientes. Además, dos gráficos de barras, uno para femenino y otro para masculino, con opciones de respuestas Si y No. Como se utilizaron frecuencias absolutas en muestras de distinto tamaño, compararon erróneamente. Como la barra del “Si” en las mujeres era más alta que la barra del “Si” en los hombres, concluyeron que el porcentaje de “Si” en las mujeres era mayor que en los varones, cuando la realidad indicaba exactamente lo contrario.

Conclusiones

- Las entrevistas realizadas a docentes de las escuelas que no participaron, las consultas que formulan los docentes en el Centro de Servicios Estadísticos y la amplia difusión y folletería realizadas para inducir a participar en las jornadas, nos permiten inferir que participaron en las Jornadas los grupos que se sentían más seguros y mejor preparados de las escuelas de San Luis.
- Los elementos de juicio con que contamos nos hacen pensar que efectivamente estos grupos son los que están en mejores condiciones y manifiestan falencias importantes, por lo que el diagnóstico general respecto al estado de la enseñanza-aprendizaje de la estadística en las escuelas de San Luis es que hay una gran debilidad en la formación de los docentes y que se requiere el apoyo y la realización de acciones concretas y efectivas para modificar esta realidad.
- Debe quedar claro que los trabajos presentados no constituyen una muestra representativa de los trabajos que se realizan en todas las escuelas de San Luis, sino que el experimento fue diseñado de modo que permitiera conocer el máximo nivel

alcanzado previo a la ejecución de acciones por parte del equipo de la universidad. Por el contrario, si se pretendiera considerar los trabajos presentados en las Jornadas como una muestra representativa de la realidad de todas las escuelas, pese a los errores cometidos, se estaría sobre-estimando el nivel de calidad general.

- Los trabajos fueron realizados por los alumnos, pero bajo la supervisión de los docentes. Esto implica que la responsabilidad de los errores es de los docentes.
- Tanto en entrevistas como en los talleres, los profesores de matemática reconocieron que poseen una formación muy precaria en estadística. Además los conocimientos que han adquirido, se refieren sólo a nociones teóricas sobre muestreo simple al azar, nunca han realizado experiencias reales, y por tanto no se han enfrentado con los problemas propios de la recolección de datos. Solo visualizan la muestra como un conjunto de letras x inicializadas con un índice que varía entre 1 y n.
- Hay asignaturas de estadística a cargo de docentes con otros títulos, como Profesor de Ciencias Jurídicas y Contables, o Licenciado en Ciencias Sociales, que han realizado experiencias de campo y están mejor preparados para la ejecución de experimentos que los profesores de matemática.
- Se ha puesto de manifiesto, tanto del análisis de los trabajos como en las entrevistas con los docentes participantes en el taller, la necesidad de ofrecer cursos de muestreo e inferencia dirigidos a los docentes. Pero es fundamental reforzar la formación de los profesores de matemática en el aspecto experimental.
- La riqueza de las experiencias vividas por los alumnos al realizar las entrevistas, el procesamiento, la elaboración de informes y aún los errores cometidos, han constituido un aporte valioso a la formación integral de los alumnos y de los docentes.

Referencias bibliográficas

Batanero Carmen (2000). *Didáctica de la Estadística*. GEEUG. Universidad de Granada.

Batanero C, Godino J.,Vallecillos A. (1992). *El análisis de datos como útil y objeto de la didáctica de la matemática.* Educación Matemática 4(1),46-53.

Godino J, Batanero C. (1995). *Contenidos teóricos y metodológicos para la formación de investigadores en didáctica de la matemática.* Proceedings of Nordic Simposium, Preparation of Researchers in Mathematics Education.University of Umea-Suecia.

Godino J, Batanero C., Flores P. *El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas.* Proceedings of 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Univ. of Stellenbosh, South Africa.

Aliaga Martha; Gunderson Brenda (1998). *Interactive Statistic*s New Jersey: Prentice Hall.

Farfan Rosa María (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cochran William G. (1977). *Técnicas de muestreo*. C.E.C.S.A.

Dalenius Tore (1986). *Elements of Survey Sampling*. S.A.R.E.C.

Franzini Dora (1999). *El estudio del trafico vehicular como recurso didáctico para la enseñanza de la Estadística* -CD de Conferencias y Comunicaciones del IV Congreso Latinoamericano de Estadística. Mendoza.

Klimovsky Gregorio (1994). *Las Desventuras del Conocimiento Científico*. Buenos Aires: A Z Editora.

Una propuesta de enseñanza de la probabilidad y la estadística en el bachillerato: Taller de actividades

René Ramírez Ruíz
Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). UNAM. México
reneramirezr@yahoo.com.mx

Resumen
El Taller consiste en una serie de actividades tomadas de un curso práctico de un año impartido en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la UNAM (México), constituído por prácticas que tienen como objetivo determinar un concepto o una ley estadística o probabilística. El principal objetivo del Taller es hacer una reflexión sobre la enseñanza de la estadística y la probabilidad a nivel medio superior, y mostrar los procedimientos metodológicos instrumentados en el CCH a partir del cambio de Plan de Estudios en 1996. La propuesta de enseñanza contempla el uso de problemas específicos para abordar los conceptos de la materia y se apoya en el uso de software y de nuevas tecnologías. En el caso particular del presente taller se utilizará la calculadora TI-92 como apoyo de las actividades. El Taller está dirigido a profesores y educadores del nivel medio superior (grados 10-12). No es requisito saber utilizar la calculadora, pues las actividades contemplan una introducción sobre su uso.

Introducción

Con la instrumentación de los nuevos programas de estudios en el Colegio de Ciencias y Humanidades, se modificaron los tiempos, los contenidos y las metodologías de los cursos de matemáticas, en especial los de Probabilidad y Estadística. En lo que a estos respecta, se constituyeron dos cursos semestrales llamados Estadística y Probabilidad I y II. En el primero se cubre la modelación de los procesos aleatorios y en el segundo distribuciones muestrales, estimación y pruebas de hipótesis. Con base en estos programas y la metodología propuesta (basada en la resolución de problemas), se inició la tarea de diseñar cursos en los que el alumno participara activamente en su ejecución. Por otra parte, es conocido por todos aquellos que imparten Estadística y Probabilidad, que el mal manejo de las distribuciones y sus parámetros, impide una cabal comprensión de los métodos estadísticos y probabilísticos. Por ello, entre las principales dificultades que los alumnos enfrentan en estos cursos es la interpretación y el cálculo de la probabilidad, además de que los cálculos rutinarios de, por ejemplo, los intervalos de confianza, no aportan mucho al pensamiento estadístico de los estudiantes. Tomando en consideración ambas experiencias, se diseñó un par de cursos semestrales de Probabilidad y Estadística, que incluyeran los temas antes mencionados, y que consistieron en prácticas cuyo propósito fundamental es que el alumno comprenda y maneje los conceptos de variable aleatoria, parámetros, distribuciones, estadísticos y las relaciones que se dan entre ellos. La elaboración de la mayoría de las prácticas de Estadística se fundamentó en el uso de la calculadora graficadora TI-92. Las prácticas de Probabilidad se basaron en problemas que se seleccionaron de libros de probabilidad, en revistas, periódicos y libros de otras materias. Adicionalmente, las prácticas se complementaron con tareas numeradas, cuyo objetivo es reforzar el concepto que el alumno ha reflexionado y desarrollado en las prácticas.

Actividades del Taller

Se han seleccionado para el Taller 2 actividades del curso completo de Probabilidad y Estadística que se imparte en el CCH. El curso completo consta de 6 prácticas, cuya duración es variable, que están constituidas por diversas actividades que se realizan en clase. Los temas que se tratan en cada práctica son:

- Práctica 1: Histogramas. Población, muestra, polígonos de frecuencia. Modelos de población. Función normal. Muestreo aleatorio simple. Parámetros y estadísticos. Distribuciones muestrales, Teorema central del límite.
- Práctica 2: Estimadores. Error máximo de estimación. Tamaño de muestra. Intervalos de confianza. Distribuciones t-student y ji-cuadrada.
- Práctica 3: Regla de decisión. Tipos de errores. Pruebas de hipótesis.
- Práctica 4: Probabilidad. Teorema de Bayes. Arboles. Esperanza.
- Práctica 5: Distribuciones discretas: binomial, hipergeométrica y de Poisson. Curvas características de operación.
- Práctica 6: Distribuciones continuas: normal, uniforme, exponencial, asimétricas.

Se hará a continuación una breve descripción de la práctica 1 pues de ella se han seleccionado las 2 actividades para desarrollar en el Taller.

El desarrollo del curso es de la siguiente forma: en la primer actividad de la práctica 1, cada alumno realiza el histograma de una población de 250 datos y calcula sus parámetros, se construye el histograma, el polígono de frecuencias y se infiere el modelo de población. Aquí se discuten los conceptos de azar, muestra aleatoria, población e inferencia y se introduce la función de distribución normal.

Conocidas las características de la población, cada alumno toma una muestra de tamaño 30 y calcula la media muestral. Al reunir las medias muestrales se examina su variabilidad. Posteriormente se calculan los parámetros de esta distribución y se construye su histograma. Este procedimiento puede repetirse para muestras de distinto tamaño, de manera que cada alumno aporta una media muestral que sirve para propiciar la explicación del TCL, y que posteriormente usará para calcular intervalos de confianza y otros conceptos estadísticos. El alumno contrasta sus cálculos con los que el TCL predice para comparar la teoría con la práctica.

En suma, la primer práctica consta de cuatro actividades: la primer actividad realiza el estudio de la media muestral porque es la que el alumno usa de manera más frecuente, y en segundo lugar porque tiene características más fáciles de manejar en relación a su cálculo e interpretación. La segunda actividad de la primer práctica consiste en hallar la distribución muestral de la proporción y sus parámetros. Usualmente es necesario realizar el proceso de muestreo para obtener la distribución muestral de la proporción y se identifique la variable (p), y luego calcular los parámetros de p e inferir la distribución de esta variable (construyendo un histograma con la TI-92). Las actividades 3 y 4 estudian las distribuciones muestrales de la diferencia de medias y diferencia de proporciones. En todo momento el alumno interpreta las probabilidades utilizando la interpretación frecuentista de esta.

Daremos de manera sucinta una descripción del resto de las prácticas, que aunque no se realizarán en el Taller, consideramos que será de utilidad para comprender el fundamento y desarrollo del curso mediante la resolución de problemas.

En la práctica 2, se hace uso de los distintos estadísticos (por ejemplo, la media muestral) calculados por los alumnos, y son localizados en la distribución muestral correspondiente para estudiar los intervalos de confianza e interpretarlos de manera frecuentista. El tratamiento y estudio de los intervalos de confianza para la proporción, diferencia de medias y de proporciones y de la varianza es semejante al hecho para la media.

En la práctica 3, la introducción de los errores de tipo 1 y tipo 2 se realiza planteando problemas de proveedores como una aplicación del TCL. El alumno decide el valor crítico, discute la falta de datos en el problema y cómo calcularlos, establece la regla de decisión y construye las pruebas de hipótesis para μ (y los demás parámetros.)

El curso de Probabilidad se plantea con problemas seleccionados de textos que están en la bibliografía. La práctica 4 tiene como objetivo estudiar la probabilidad, el teorema de Bayes y la esperanza y varianza de una variable aleatoria; la práctica 5, se refiere a las distribuciones discretas y se construyen las curvas características de operación (CCO) utilizando las distribuciones binomial e hipergeométrica, con las que se establecen nuevamente las reglas de decisión para estas distribuciones, (aquí se usa la TI-92). Las técnicas de conteo sólo se utilizan como auxiliares en cálculo de probabilidades y sólo se usan las combinaciones. La práctica 6 estudia las distribuciones continuas y es aquí donde se pueden mostrar las funciones de densidad distintas a la normal.

En las prácticas 5 y 6 se examinan la distribución y los parámetros de una variable. Es en este momento donde se ha notado la ventaja de impartir primero un curso de Estadística y luego el de Probabilidad. Una vez que se ha discutido y trabajado constantemente en el salón de clases y que se ha verificado que se pueden hacer predicciones probabilísticas de una variable discreta o continua cuando se conocen su distribución y sus parámetros, el alumno atiende las condiciones que debe cumplir la variable para que se distribuya en forma binomial, hipergeométrica o de Poisson y en los valores de la esperanza y la varianza.

El Taller tiene como propósito discutir con los asistentes tanto el desarrollo del curso como la metodología empleada. Se plantea compartir con los asistentes los resultados de la experiencia docente al impartir un curso de Probabilidad y Estadística donde los alumnos realizan prácticas, construyen gráficas y funciones y recrean los conceptos. Se presenta además una muestra de los problemas que se estudian en Probabilidad y los resultados que se han obtenido con ellos.

Conclusiones

El curso de Probabilidad y Estadística se ha adaptado además del bachillerato, al nivel superior. El grado de dificultad del Taller varía en cada uno de esos niveles educativos. Las prácticas y las tareas se adaptan a los objetivos y los tiempos .

En lo referente al bachillerato, no es por completo necesario que los alumnos dispongan de una TI-92, pero sí debe el profesor hacer uso de la TI-92 para que se desarrollen las prácticas. Es suficiente que cada alumno tenga una calculadora de bolsillo y que sepa manejarla, particularmente en lo que respecta a los cálculos estadísticos. Dado que a falta de la calculadora graficadora el tiempo empleado para construir histogramas es mayor, lo que lleva el riesgo de no completar los cursos, se han obtenido resultados semejantes si la construcción de los histogramas se integra a las tareas, y se examinan en sesiones posteriores. Es importante subrayar que las tareas se discuten y resuelven en a lo más una semana después de haberlas propuesto, debido a la necesidad de reafirmar conceptos.

Actualmente se está trabajando en la elaboración de evaluaciones para los cursos de Probabilidad y Estadística y en la evaluación del curso considerando la metodología de resolución de problemas. Con ellas se espera determinar el grado de avance conceptual de los alumnos y detectar el aprendizaje logrado. Sin embargo, es necesario llevar un seguimiento de los alumnos egresados para mejorar o corregir el método expuesto, lo cual está en su período embrionario puesto que los alumnos eligen distintas carreras que pueden incluir Probabilidad y Estadística. Nuestro propósito es fortalecer éste método de enseñanza y afinarlo para apoyar a los alumnos que llevarán carreras de Ingeniería o Ciencias y para que los alumnos de las demás disciplinas, donde la Probabilidad y la Estadística no sean su especialidad, sepan interpretar cuidadosamente cualquier tipo de datos probabilísticos o estadísticos.

Referencias bibliográficas

Programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades. (1996). *Estadística y Probabilidad I y II*. México: UNAM,

Sutherland, S. (1996). *Irracionalidad, el enemigo interior*. Madrid: Alianza.

Miller, I., Freund, J. y Johnson, R. (1992). *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* México: Prentice-Hall.

Chou, Y. L.. (1971). *Lecturas sobre análisis estadístico.* México: Interamericana.

Paulos, J. A. (1998). *Un matemático lee el periódico.* México: Tusquets.

Scheaffer, R., Gnanadesikan, M., Watkins, A. y Witmer, J. (1996). *Activity-Based Statistics. Student Guide & Instructor resources.* New York: Springer.

DeGroot, M. (1988). *Probabilidad y Estadística.* México: Addison-Wesley.

Isaac, Richard. (1995). *The pleasures of probability.* Nueva York, Springer.

Pensamiento relacionado con Probabilidades y Estadística

Nivel Superior

Propuesta de enseñanza de probabilidades para la formación de profesores

Andrea Lavalle, Lisandro Curia
Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina
alavalle@uncoma.edu.ar lcuria@uncoma.edu.ar

Introducción

La propuesta académica del plan de estudios de la carrera "Profesorado en Matemática" de la Universidad Nacional del Comahue, está basada en un currículo que incluye materias propias de la especialidad y materias de didáctica o metodología. En la última reformulación de este plan de estudios, se agrega una asignatura nueva llamada "Seminario de Enseñanza de la Matemática", en la cual se propone un espacio de discusión y reflexión sobre temas fundamentales relacionados con la enseñanza de la matemática. En el marco de este seminario se llevó a cabo un taller sobre enseñanza de la probabilidad destinado a aquellos alumnos que ya hubieran cursado la materia "Probabilidad y Estadística". El propósito del mismo es el de completar los aspectos teóricos y metodológicos necesarios en la formación de profesores y propiciar que los alumnos del profesorado valoren la probabilidad como un contenido con alto valor educativo.

Fundamentación teórica

Los nuevos enfoques de la formación de profesores (García Cruz, 2000; Boero et al, 1996; Santaló et al, 1994) consideran esencial que en las materias de matemática de la formación de grado se aplique la misma metodología que luego se recomienda en las materias de didáctica. Es decir, que los resultados obtenidos en la investigación sobre enseñanza de la matemática sean conocidos y practicados en el profesorado (Santaló et al, 1994). De esta forma los futuros profesores deben pasar por los mismos estadios y procesos por los que pasarán sus alumnos, enfrentando los mismos obstáculos, de manera que esta formación les sirva de modelo para su futura profesión. Por otro lado, la probabilidad y la estadística forman parte de una línea de pensamiento esencialmente distinta del razonamiento determinístico. Esto implica que los profesores deben recibir formación adecuada para poder reflexionar sobre diversos aspectos entre los que se destacan: los problemas filosóficos derivados de las diferentes nociones de probabilidad; los aspectos referidos al desarrollo cognitivo incluyendo las características del razonamiento probabilístico en contraposición con el determinístico y los problemas didácticos y sus soluciones (Fischbein, 1990). Con la finalidad de ubicar al futuro profesor frente a los elementos teóricos y prácticos necesarios para desarrollar las competencias profesionales de su futuro desempeño laboral, se optó por un diseño basado en un *"análisis didáctico del contenido matemático"* (Godino et al, 1998a) que contempla los siguientes aspectos:

a) la reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos particulares que se pretende enseñar y el estudio de las transformaciones que experimentan los mismos para adaptarlos a la enseñanza.
b) el conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias de resolución de problemas.

c) la ejemplificación de situaciones didácticas, metodología de enseñanza y recursos didácticos específicos.

A través de este diseño se intenta que los alumnos de profesorado conozcan diferentes perspectivas y enfoques de la enseñanza de la probabilidad con la finalidad de que adquieran herramientas útiles a la hora de precisar las opciones que deban hacer en su actividad profesional con relación a este campo de conocimientos. Por otro lado se trata de fomentar la reflexión sobre el valor de este contenido como referente del pensamiento no determinístico, tan ausente en las currícula actuales.

Metodología

El taller fue realizado a lo largo de siete encuentros de aproximadamente tres horas de duración cada uno. Las actividades desarrolladas en los mismos fueron básicamente de dos tipos: por un lado se planteó la lectura y discusión de bibliografía específica, y por otra parte se resolvieron situaciones problemáticas y juegos. Así mismo se les pidió que elaboren una propuesta de enseñanza de algún contenido referido a probabilidad en la que pongan en juego los aportes recibidos en los diferentes encuentros, la cual sirvió de evaluación del mismo.

La bibliografía seleccionada comprendió las distintas concepciones de aleatoriedad y su desarrollo formal como así también las características del pensamiento probabilístico y las investigaciones sobre el desarrollo psicológico de la intuición probabilística en el niño (Godino et al, 1987). Por otro lado, se consideraron los resultados de las investigaciones en estocástica referidos a juicios heurísticos y sesgos, entre los que se destacan la heurística de la representatividad y la de disponibilidad (Shaugnessy, 1992). Además se discutió sobre los obstáculos encontrados en la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de probabilidades, considerando los obstáculos epistemológicos, didácticos, matemáticos, psicológicos y aquellos ligados a las concepciones de los alumnos y los profesores (Girard, 1997).

Las situaciones propuestas abarcaron problemas históricos, juegos de estrategia óptima, problemas con probabilidades geométricas, problemas para utilizar frecuencias, problemas para resolver utilizando grafos y series geométricas. Los materiales y recursos utilizados en forma complementaria con los problemas, son algunos de los sugeridos en la bibliografía (Godino et al, 1998b): dados, ruletas, urnas con bolas y tarjetas, tableros, cartas, fichas, tablas de números aleatorios, juegos simulados con computadoras, diagramas de barras, cartesianos, de árbol, de Venn y grafos. En estos problemas se priorizaron estrategias de simulación (con artefactos aleatorios y con computadoras), visualización y analogía (Borovcnik & Peard, 1996). También se realizó una experiencia en escuelas secundarias, donde los alumnos de profesorado asistentes al taller pusieron a prueba juegos y cuestionarios que les sirvieron para elaborar su propuesta áulica.

Debido a que los participantes del taller habían cursado la asignatura “Probabilidad y Estadística” se les pidió que tratasen de resolver los problemas situándose en el lugar de un alumno de secundario, es decir, tratando de buscar estrategias diferentes a las que involucren la solución del problema desde una perspectiva normativa. También se les pidió que identificaran posibles errores o dificultades que suponen pueden presentarse en la puesta en práctica de las situaciones desarrolladas en el contexto de la enseñanza media. En este sentido, se propuso trabajar sobre la anticipación del funcionamiento del problema considerando no solamente las estrategias y los errores, sino también los conocimientos previos que se suponen disponibles en los alumnos que lo deben resolver.

La metodología utilizada en el taller respondió básicamente a las recomendaciones de enseñanza de diversos autores como Glayman y Varga, Bruni y Silverman (Godino et al, 1987) y Batanero y Serrano (1995). Siguiendo esta perspectiva, en una primera etapa se busca favorecer la experimentación y manipulación del material a través de repeticiones de los ensayos en las mismas condiciones. Esto lleva naturalmente al registro de los resultados conseguidos a través de tablas, diagramas y gráficos. A partir de los datos recogidos por el conjunto de la clase se trata de observar que las secuencias obtenidas carecen de un patrón controlable a corto plazo, pero que es posible describir regularidades en el conjunto total de datos. De esta manera se favorece el conocimiento de uno de los rasgos principales de los fenómenos aleatorios. Luego se buscó utilizar el conocimiento normativo para la comprobación de los resultados.

Otra etapa de la puesta en práctica involucró juegos de comparación de probabilidades para concluir sobre la existencia de una estrategia óptima que asegure la máxima probabilidad de ganar. En estos juegos, en los que se utilizaron ruletas (Borovcnik & Peard, 1996) y tarjetas de colores (Godino et al, 1998a), se propició la discusión sobre las diferentes estrategias encontradas y la necesidad de utilizar el cálculo de probabilidades como herramienta idónea para validar las conclusiones empíricas. Los juegos simulados en computadora se utilizaron para obtener secuencias más extensas de resultados antes de arribar a conclusiones sobre los mismos. En estos juegos es posible manipular la probabilidad de éxito y así generar diferentes propuestas y soluciones. Otras actividades desarrolladas estuvieron orientadas a completar algunos aspectos del cálculo de probabilidades que no habían sido contemplados en la materia “Probabilidad y Estadística” y que se consideran útiles para ampliar el campo de problemas que pueden resolverse a través de estos contenidos. Las mismas incluyeron el planteo problemas para la utilización de grafos como forma de representación de la información. El grafo se transforma en un registro idóneo en el caso en que el árbol de probabilidades es infinito, por ejemplo, en problemas de extracciones con reposición hasta obtener éxito. Aquí la solución requiere el uso de series geométricas, aplicación no contemplada en el programa de la materia. En otros casos más sencillos, se utilizó como estrategia de resolución el ábaco probabilístico (Engel, 1988).

Se seleccionaron algunos de los problemas clásicos vinculados con el origen del cálculo de probabilidades como el problema de Galileo y los propuestos a Fermat y Pascal por el Caballero de Meré (Santaló, 1955). Los primeros argumentos utilizados para asegurar equiprobabilidad o equitatividad en el juego están basados en propiedades de simetría, lo que posibilita una forma de validación intuitiva y experimental, apropiada para su utilización en el nivel medio. De esta manera se propicia el acercamiento a los problemas y dificultades que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales y se da la posibilidad de construir el conocimiento a partir del sentido que históricamente le dio origen.

Discusión

Durante el primer encuentro del taller se entregó a los participantes el listado de los contenidos referidos a probabilidades que se deben impartir en la enseñanza secundaria. Ellos debían elegir uno y proponer una primera estrategia de enseñanza. Se les pidió que modifiquen esa propuesta a partir de lo desarrollado a lo largo de los encuentros, agregando lo que consideren adecuado y formulándose las siguientes preguntas: ¿qué me aportó la clase de hoy, los problemas trabajados, la teoría, la discusión planteada?; ¿cómo modifico mi propuesta de enseñanza a partir de estos aportes? Para ello, se sugirió que trabajaran con un portfolio temático (Snyder et al, 1999) en el que debían volcar no sólo los conocimientos aprendidos, los datos relevantes de la bibliografía, los éxitos y fracasos en la elaboración de la propuesta, sino también las reflexiones sobre el propio aprendizaje y sobre su identidad como futuros docentes. Es decir, en este documento quedó reflejada la evolución de la propuesta desde la idea inicial y las reflexiones profesionales de los futuros docentes.

Los contenidos seleccionados fueron: sucesos equiprobables; juego equitativo; probabilidad condicional e independencia; definición frecuencial de probabilidad; experimento y suceso aleatorio. Las estrategias iniciales se basaron en la concepción de enseñanza desde el modelo normativo (Charnay, 1994) en el que es el docente quien introduce las nociones mediante ejemplos y definiciones. Por ejemplo una de las propuestas dice: “daría la definición clásica y ejemplos con un dado”. Otras respuestas fueron: “no cuento con estrategias para dar este contenido”, “me falta inventiva”. Una sola alumna planteó introducir sucesos equiprobables “con una urna con cinco bolas blancas y cinco negras y realizando muchas extracciones”.

Luego del segundo encuentro incorporaron a su propuesta alguno de los juegos trabajados en clase y que les pareció adecuado para el tema elegido. En todos los casos solamente eligieron el juego sin explicitar la organización de la clase en torno al mismo. Otra de las modificaciones presentadas incluye la incorporación de preguntas a priori sobre la intuición sobre el juego y otras a posteriori para validar estos supuestos. También agregaron preguntas para indagar sobre las diferentes concepciones de aleatoriedad que manejan los alumnos del secundario. Luego de varios encuentros donde los participantes pudieron jugar y aplicar la metodología presentada, hubo un cambio en el diseño en función de las acciones del docente y los alumnos. Presentaron el juego con una etapa de trabajo individual a través de las preguntas a priori, luego una etapa grupal de juego propiamente dicho y recolección de datos y por último el análisis de resultados. Este nuevo proyecto fue el que pusieron a prueba en los colegios secundarios que se visitaron. Si bien cada participante trabajó con un grupo reducido de alumnos, pudieron hacer modificaciones en función de las respuestas obtenidas analizando las dificultades que pueden presentarse al implementar estas actividades un curso completo.

Con respecto a las simulaciones con computadora comentaron que si bien les parece interesante y adecuado no lo consideraron en sus propuestas debido a que en la realidad no se cuenta con computadoras en las escuelas. Aquellos que lo agregaron a sus diseños aclararon esta dificultad. Tampoco incorporaron el uso de series ya que lo consideraron complicado para el nivel medio. Luego del encuentro donde se trabajó sobre los resultados de investigación acerca de los errores, sesgos y obstáculos en la enseñanza – aprendizaje, algunos alumnos incorporaron preguntas referidas a la falacia del jugador y la falacia de la conjunción, o algún ítem particular como por ejemplo “el dilema de Monty” (Shaugnessy, 1992).

Conclusiones

Esta propuesta de enseñanza, incorporada como un taller complementario de la materia específica “Probabilidad y Estadística”, se mostró sólida y completa, ya que abarcó una gran cantidad de aspectos relacionados con la enseñanza – aprendizaje de este contenido y propició que los futuros docentes construyan situaciones de enseñanza y las pongan a prueba en su futuro medio laboral. Los trabajos finales presentados por los alumnos incluyen la elección de un problema y el detalle de la organización del trabajo en función de algún objetivo explícito, orientándose a los aspectos que caracterizan a las situaciones de aprendizaje (Camuyrano et al, 1998). A través de estos trabajos, se observa un cambio de perspectiva en las relaciones docente – alumno – saber, partiendo desde un modelo normativo hacia posturas que involucran la participación activa y comprometida del alumno en la construcción del saber y donde el docente no es un mero transmisor sino un “facilitador” del aprendizaje, proponiendo problemas y organizando situaciones. Las sucesivas modificaciones realizadas en las propuestas ponen de manifiesto que los aportes recibidos a través del análisis didáctico planteado en cada encuentro han motivado la reflexión sobre el contenido matemático como objeto a enseñar, abarcando el análisis, por un lado, de la adecuación de los problemas al tema seleccionado y por otro lado, el grado de dificultad del mismo en relación con los contenidos previos supuestos y la edad de los alumnos de secundario a quienes va dirigido. Se observa que los alumnos de profesorado que ya están ejerciendo en escuelas secundarias mostraron mayores habilidades para analizar y anticipar el funcionamiento de los problemas en la clase. Esto sugiere que sería oportuno orientar la currícula de manera que en la etapa de formación inicial los profesores permanezcan en contacto con la escuela para no crear un desfasaje entre formación y trabajo que dificulte la comprensión de la tarea educativa en toda su complejidad.

A partir de esta experiencia, los docentes del área de estadística resolvieron replanificar la asignatura “Probabilidad y Estadística” de manera de aplicar la metodología descripta en la materia completa y no depender de la posibilidad de realizar un taller complementario. Para ello se realizarán algunos cambios en el material utilizado en el taller de manera de abarcar todos los contenidos relacionados con probabilidades y se agregarán problemas para los restantes tópicos abarcados en la materia. Este diseño se pondrá en práctica y se evaluará en el transcurso del corriente año.

Así mismo, otra conclusión que deriva de la puesta en práctica de este taller consiste en la utilización del portfolio temático. Este instrumento demostró ser de gran utilidad durante el análisis del proceso de aprender a enseñar, poniendo de relieve aspectos de la propia práctica del docente al tiempo que sirve como base para una reflexión que permita comprender y mejorar la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Serrano, L. (1995) *Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas.* Revista UNO 5, 15 - 28.

Borovcnik M., Peard R. (1996). *Probability*. En Bishop et al (editores*). International Handbook of Mathematics Education*. Part 1. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands.

Boero, P., Dapueto, C, y Parenti, L. (1996). *Didactics of Mathematics and the Professional Knowledge of Teachers*. En Bishop et al (editores). *International Handbook of Mathematics Education*. Part 2. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands.

Camuyrano, Crippa, Déboli, Guzner, Hanfling, Savón, Sessa. (1998). *Matemática. Temas de su didáctica.* Programa Prociencia CONICET. Buenos Aires.

Charnay Roland. *Aprender (por medio de) la resolución de problemas*. (1994). En: Parra Cecilia, Saiz Irma (comps). *Didáctica de matemáticas.* Editorial Paidós. Buenos Aires.

Engel, A. (1988). *Probabilidad y Estadística 2*. Editorial Mestral. Valencia. España

Fischbein Efraim. *Training teachers for teaching statistics*. (1990). En: Hawkins Anne (Ed.) *Training teachers to teach statistics.* International Statistical Institute.

García Cruz, Juan A. (2000). *Didáctica de la Matemática para la formación del Profesorado de Secundaria*. Proyecto docente. Universidad de La Laguna. Tenerife.

Girard Claude. (1997). *Algunas hipótesis sobre las dificultades encontradas en la enseñanza de las probabilidades*. En *Enseigner les probabilités au lycée*. Edición: IREM de Reims.

Godino Juan D., Batanero Carmen, Cañizares Ma. Jesús. (1987). *Azar y probabilidades*. Síntesis. Madrid.

Godino Juan D., Batanero Carmen, Flores (1998a). *Contextualising didactical knowledge on stochastics in mathematics teacher´s training.* En A. Olivier y K. Newstead (Eds.) *Proceedings of the 22 International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. University of Stellenbosch. South Africa.

Godino Juan D., Batanero C., Cañizares MJ, Vallecillos, A. (1998b). *Recursos para el estudio de los fenómenos estocásticos*. Federación Española de Profesores de Matemáticas y S. A. E. M Thales.

Santaló, Ottolenghi, Tricarico, Hernaiz, Marbach, Couy Aguirre, García, Marmorato, Greco, Gómez, Galagovsky, Cetkovich, Fauring. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Editorial Troquel. Buenos Aires.

Santaló L. (1955). *La probabilidad y sus aplicaciones*. Editorial Ibero americana. Buenos Aires.

Shaugnessy Michael. (1992). *Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions*. En: Douglas A. Grouws (editor). *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM.

Snyder Jon, Lippincott A., Bower Doug. (1999*) Los portfolios en la formación docente: ¿instrumentos técnicos o transformadores?* En: Lyons Nora (comp*.) El uso de portfolios. Propuestas para un nuevo profesionalismo docente.* Amorrortu Editores. Buenos Aires.

Enseñanza de correlación y regresión lineal simple.
Una experiencia en carreras de ingeniería

María Rosa Chillemi, Emma Estela Morales
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de San Juan. Argentina
chillemi@unsj.edu.ar emorales@unsj.edu.ar

Resumen
La enseñanza de los temas Regresión Lineal Simple y Correlación es de importancia en las carreras de Ingeniería, dada la gran aplicación en las distintas especialidades. En general estos temas se desarrollan en forma excluyente y sin diferenciar en qué casos prácticos se aplica cada tipo de análisis. La presente propuesta didáctica consiste en ordenar en una forma secuencial particular el desarrollo de los temas Regresión Lineal Simple y Correlación, para contribuir a mejorar su enseñanza, optimizando la interpretación y aplicación adecuada de los mismos a situaciones reales. Esta se formula con el propósito de ser implementada en cursos de Estadística de ciclo básico de carreras de Ingeniería, requiriéndose conocimientos básicos de Algebra, Análisis Matemático, Geometría y Computación.

Introducción

La teoría de regresión y correlación simple involucra el estudio de dos variables cuya relación puede ajustarse a un modelo lineal simple. En el estudios se trabaja con supuestos de normalidad requeridos para las variables, según el análisis utilizado. El método de mínimos cuadrados proporciona los mejores estimadores de los coeficientes de regresión bajo suposiciones estadísticas. La inspección de los datos por medio de gráficos, coeficientes y pruebas de inferencia estadística, conducen a apreciar si el ajuste lineal es adecuado. El análisis de la varianza, permite estudiar la influencia de la recta de regresión.

Metodología

Mediante el estudio de un problema real, se desarrollan los temas utilizando una metodología teórico práctica que incentive al alumno a identificar las técnicas estadísticas adecuadas, aplicarlas, interpretar y valorar los resultados obtenidos.

Desarrollo de la propuesta didáctica

Objetivos**:**

Al desarrollar esta propuesta se espera que el alumno pueda:

- Construir e interpretar diagramas de dispersión.
- Calcular e interpretar el coeficiente de correlación entre dos variables.
- Determinar la ecuación de regresión, usando el procedimiento de mínimos
- cuadrados.
- Interpretar la pendiente (coeficiente de regresión) y la ordenada al origen.
- Calcular e interpretar el coeficiente de determinación simple.
- Probar hipótesis para determinar si dos variables están relacionadas linealmente.

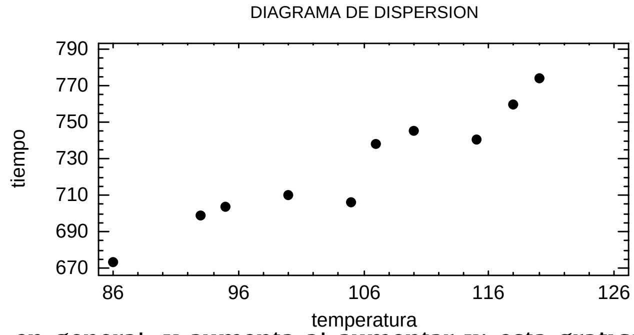
Consideremos el siguiente problema:

Un ingeniero en electrónica sospecha que la duración de un componente electrónico (y) está linealmente relacionada con la temperatura en el medio de operación (x).

Realiza un experimento con 10 componentes y registra los siguientes datos:

x	86	93	95	100	105	107	110	115	118	120
y	673	699	704	710	706	738	745	740	760	774

Notemos que la información disponible está formada por 10 pares ordenados: $(x_1;y_1),...,(x_{10};y_{10})$.
Graficando estos pares en el plano, ubicando en el eje x: temperaturas (ºC), y en el eje y: tiempo (horas), se obtiene:



Puede observarse que, en general, y aumenta al aumentar x; esta gráfica se conoce como **diagrama de dispersión**. Los diagramas de dispersión tienen la ventaja de permitir ver la relación entre las dos variables de interés.
En particular son valiosos para descubrir la presencia de relaciones no lineales. El análisis de la relación lineal entre dos variables continuas denominadas x e y puede realizarse poniendo especial atención en la relación funcional que las vincula (Regresión Lineal Simple) o en evaluar el grado de relación lineal entre las mismas (Correlación).

Coeficiente de correlación

Desde el punto de vista numérico, una medida del grado de asociación lineal entre las variables x e y, es el coeficiente de correlación lineal, un valor entre -1 y 1, que indica la fuerza de la relación lineal entre dos variables cuantitativas. El coeficiente de correlación para una población de valores, es el parámetro simbolizado con ρ. Su estimador, obtenido a partir de una muestra se simboliza con r. Se demuestra que la ecuación para el coeficiente de correlación muestral es:

$$r = \frac{n\sum_{1}^{n} x_i y_i - \sum_{1}^{n} x_i \sum_{1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{1}^{n} x_i\right)^2}\ \sqrt{n\sum_{1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{1}^{n} y_i\right)^2}}$$

En el ejemplo dado resulta r= 0.96. En base al diagrama de dispersión y al valor de r obtenido, podemos pensar que puede existir una relación lineal positiva entre la duración del componente electrónico y la temperatura en el medio de operación.
Un método gráfico para obtener una ecuación que relacione x con y es colocar una regla de dibujo sobre el conjunto de puntos y moverla hasta que parezca pasar entre medio de los puntos, y así obtener lo que podríamos considerar el ¨mejor ajuste¨ de los datos. Para determinar la relación lineal que vincula x con y estudiamos:

Regresión lineal simple

En el problema planteado, queremos hallar la ecuación de una recta que ajuste a los datos y permita estimar la duración como una función de la temperatura. Para hacerlo, se elige un modelo matemático que exprese la supuesta relación funcional entre x e y.

Hay que repasar algunos aspectos relacionados con la graficación de funciones matemáticas. Primero, la ecuación de una línea recta es: $y = \beta_0 + \beta_1 x$ donde β_0 es la intersección u ordenada al origen, es decir, el valor de y cuando x=0, y β_1 es la pendiente de la recta (el cambio en y por una unidad de cambio en x). En segundo lugar, la recta que puede trazarse correspondiente a cualquier ecuación lineal es única. Cada ecuación corresponde a una sola recta y viceversa. Así, al dibujar una recta por los puntos, automáticamente se determina una ecuación o expresión matemática:

$y = \beta_0 + \beta_1 x$ con valores numéricos de los parámetros β_0 y β_1.

El modelo lineal propuesto es un modelo matemático determinista, porque al sustituir un valor de x en la ecuación, el valor de y queda determinado sin ningún error.

Los modelos deterministas son apropiados sólo en los casos en que los errores de predicción, diferencia entre el valor de y_i observado y el valor de y_i calculado por la recta estimada, sean despreciables.

En los casos en que sea necesario tener en cuenta dichos errores, es adecuado elaborar un modelo matemático probabilístico, que contenga una o más componentes aleatorias que se añaden a la parte determinista del modelo para tomar en cuenta el error aleatorio e inexplicable de la predicción.

Así, un modelo probabilístico para el problema presentado que relacione la duración del componente electrónico (variable aleatoria Y) con la temperatura en el medio de operación (variable matemática x) es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

donde ε es una variable aleatoria de error que se supone tiene distribución normal con un valor esperado igual a cero y una varianza igual a σ^2.

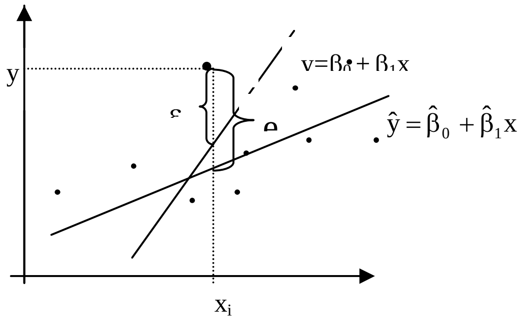
Sobre la base de lo analizado, en el modelo probabilístico, y es el valor de una **variable aleatoria Y** tal que para un valor dado de una **variable matemática x,** se puede demostrar que

$$E[Y/x] = \beta_0 + \beta_1 x \quad \text{y} \quad V[Y] = \sigma^2$$

Además, se considera que la distribución de los errores respecto a la línea es idéntica, sin que importe el valor de x, y que hay independencia de los errores entre sí.

El método de mínimos cuadrados

Un procedimiento para estimar los parámetros de cualquier modelo lineal es el método de mínimos cuadrados (M.M.C.). Se puede ilustrar sencillamente cuando se ajusta una línea recta a un conjunto de puntos que representan los datos.



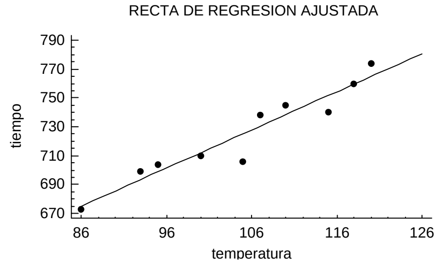
Supóngase que se desea ajustar al conjunto de puntos mostrados en la figura, el modelo:

$$E[Y/x]=\beta_0+\beta_1 x$$

Es decir se postula que: y= β_0 +β_1 x+ ε

ε tiene una distribución de probabilidad con E(ε)=0. Si $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ son estimadores de los parámetros respectivos, luego: $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ es obviamente un estimador de E[Y/x]. El M.M.C. es similar al método que podríamos utilizar para ajustar una recta a simple vista, es decir, se pretende que las desviaciones sean ¨pequeñas¨ en cierto sentido. Una manera conveniente para lograr esto, y que nos aporta estimadores con propiedades adecuadas, es minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales de la línea ajustada. Por lo tanto si: $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ es el valor que se predice del iésimo valor de y para un valor dado de x, entonces la desviación del valor observado de y a partir de la recta $\hat{y}$ (a veces llamada error) es: $y_i - \hat{y}_i$ y la suma de cuadrados de las desviaciones que pueden minimizarse es:

$$SCE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \right) \right]^2$$



La cantidad SCE se llama suma de los cuadrados de los errores por motivos que son obvios. SCE se llama suma de los cuadrados de los errores por motivos que son obvios. Si SCE tiene un mínimo, este ocurrirá para los valores de $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ que satisfagan las ecuaciones: $\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0$; $\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0$, denominadas ecuaciones de los mínimos cuadrados para estimar los parámetros de una recta. Puede verificarse que las soluciones son:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i}{n\sum_1^n x_1^2 - \left(\sum_1^n x_i \right)^2} \; ; \; \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Además se puede demostrar que la resolución simultánea de las dos ecuaciones de los mínimos cuadrados produce valores de $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ que minimizan SCE. En el ejemplo $\hat{\beta}_0 = 447.3$; $\hat{\beta}_1 = 2.6$, es decir la recta que ajusta a los datos tiene ecuación $\hat{y} = 447.3 + 2.6\ x$

Residuales

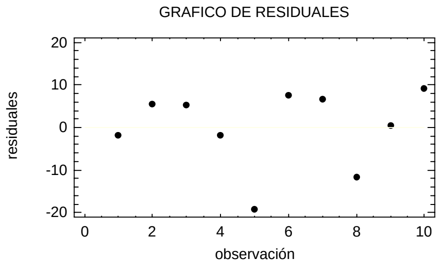
La diferencia entre una observación y_i, y su valor estimado por la recta de regresión $\hat{y}_i$ se llama: error estimado o residual, e_i = y_i -$\hat{y}_i$. Los valores residuales en el ejemplo son, respectivamente: -1,8; 5,6 ;5,3 ;-1,9 ;-19,2; 7,5 ; 6,6 ; -11,6 ; 0,4 ; 9,1

Una medida de la variabilidad o dispersión de los valores de y observados en la muestra, alrededor de la recta de regresión es:

error estándar de la estimación: $s_{y-x} = \sqrt{\dfrac{\sum_1^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\dfrac{\sum_1^n e_i^{\,2}}{n-2}}$ El valor de S_{y-x} en el ejemplo es: 9.7

La suposición sobre la distribución de los errores, N(0, σ^2) se evalúa analizando el comportamiento de los residuales. Un método sencillo consiste en evaluar en un gráfico de residuales versus el orden de obtención, si el 95% de los mismos se encuentran entre (-2 S_{y-x}, 2 S_{y-x}).

La recta de regresión ajustada y los residuales correspondientes al ejemplo son:



Observando el gráfico de los residuales, podemos concluir que el 100% de ellos se encuentra entre los límites esperados, por lo tanto no hay razón para descartar el supuesto de normalidad.

Inferencia

a- Predicción e Intervalos de Confianza: La ecuación de regresión muestral se utiliza con frecuencia para hacer predicciones, dentro del rango de los valores observados de la variable x. El valor obtenido para y es una estimación puntual: $\hat{y}$. Este valor se utiliza tanto para estimar un valor específico de y, o para estimar el valor esperado de la variable aleatoria $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ .La estimación puntual no informa sobre el error de estimación. Para ello, es necesario construir intervalos de confianza. Se puede elegir entre dos tipos de intervalos: intervalo de predicción (para un valor específico de y) o intervalo de confianza (para el valor esperado de Y).Los intervalos de predicción y de confianza, respectivamente, son:

$$\hat{y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{y-x} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_o - \overline{x})^2}{\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2}} \qquad \hat{y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{y-x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_o - \overline{x})^2}{\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2}}$$

Donde t ~ t de Student con n-2 grados de libertad

Nota: Estimar un valor de la variable aleatoria y para un x dado, llamado predicción, produce mayor dispersión que estimar el valor del parámetro $E[Y/x] = \beta_0 + \beta_1 X$

En el problema, para una temperatura de 105 ºC , los límites de predicción obtenidos son:(701,7;748,6) y los límites de confianza: (718,1; 732,2)

b- Pruebas de hipótesis: El estadístico $t = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}} \sim t_{(n-2)}$ se usa para probar la hipótesis de que la pendiente de la ecuación de regresión poblacional es 0, es decir, $H_0 : \beta_1 = 0 \quad vs \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$ donde:

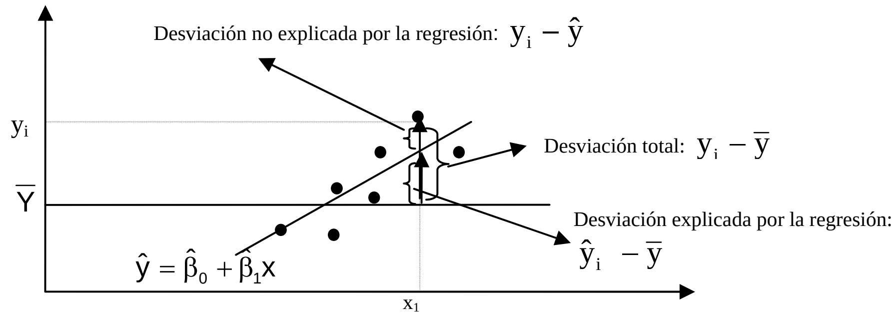
$S_{\hat{\beta}_1} = \dfrac{S_{y-x}}{\sqrt{\sum_{1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}}$. Si una ecuación de regresión tiene pendiente 0, un cambio en x no afecta a y.

El estadístico $t = \dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\hat{\beta}_0}} \sim t_{(n-2)}$ se usa para probar la hipótesis de que la ordenada al origen de la ecuación de regresión poblacional es 0, es decir, $H_0 : \beta_0 = 0 \quad vs \quad H_1 : \beta_0 \neq 0$

donde: $S_{\hat{\beta}_0} = \dfrac{S_{y-x}}{\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{x}^2}{\sum_{1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}}}$. Si una ecuación de regresión tiene ordenada al origen 0, el modelo adecuado a usar es $y=\beta_1 x$, debiendo recalcular $\hat{\beta}_1$ con el MMC. Cuando la variable X es considerada aleatoria, es decir, se tiene en cuenta el error aleatorio asociado a su medición, el **coeficiente de correlación** mide la asociación lineal entre X e Y. A veces resulta útil probar la hipòtesis $H_0 : \rho = 0 \quad vs \quad H_1 : \rho \neq 0$ para lo cual se utiliza el estadístico

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t_{(n-2)}$$

Coeficiente de determinación: Un estadístico útil en el análisis de regresión es el coeficiente de determinación simple: R^2 el cual mide el porcentaje de variabilidad en y que puede ser explicada o atribuida a la variable predictora x. Esto puede ser interpretado gráficamente. En la siguiente figura reproducimos una muestra de pares (x, y) con la recta de regresión ajustada de y sobre x. Ahora, si queremos predecir un valor de y sin conocer x, podríamos hacerlo con $\bar{y}$. En un x_i dado, es claro del diagrama que podemos cometer un error grande: $y_i - \bar{y}$, que es la desviación de y_i a su media.



Cuando x_i es conocido, y la recta de regresión de y sobre x ha sido calculada, predecimos y_i con $\hat{y}_i$ sobre la línea. Notemos como se reduce el error, ya que $\hat{y}_i - \bar{y}$ es una parte de la desviación y ahora está explicada. Así, solamente queda una desviación pequeña no explicada: $y_i - \hat{y}_i$. Este procedimiento de analizar o descomponer la variación total en sus componentes es llamado ANÁLISIS DE LA VARIANZA EN REGRESIÓN. Se demuestra que R^2 en función de la variación de y es :

$$R^2 = \frac{\sum_1^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\text{variación explicada de y}}{\text{variación total de y}}$$

En nuestro ejemplo, R^2=92%, lo que significa que el 92% de la variabilidad en la duración del componente electrónico, es atribuida a la temperatura del medio.
Un ajuste lineal se considera bueno si el coeficiente de determinación supera el 50 %.

Conclusiones

Ante un problema experimental que involucre dos variables, se utilizará:

- Regresión lineal simple, cuando el propósito sea determinar la ecuación de la recta que se ajusta a los datos, para predecir valores de y en el rango de las observaciones de x. La variable x es controlable (matemática), es decir no se tiene en cuenta el error de medición, en cambio la variable y es aleatoria con distribución normal.
- Correlación, cuando el propósito sea evaluar el grado de asociación lineal entre las variables x e y. Las variables x e y son aleatorias con distribución normal bivariada.

A pesar de las diferencias en las variables involucradas en los análisis de regresión y correlación, en la práctica pueden utilizarse ambos para un mismo conjunto de datos, haciendo las suposiciones necesarias. Teniendo en cuenta todo lo expuesto, desde el punto de vista didáctico es importante recalcar las diferencias entre ambos análisis, y también la conveniencia de utilizarlos adecuadamente como herramientas complementarias para optimizar la interpretación de los resultados, especialmente los obtenidos a partir de paquetes estadísticos específicos.

Referencias bibliográficas

Devore, Jay (1998). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* Méjico: Thomson.

Mendenhall,W.; Scheaffer R.; Wackerly, D. (1986). *Estadística Matemática con Aplicaciones.* Méjico: Iberoamérica.

Miller, I.; Freund J., (1992). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Méjico: Prentice Hall.

Montgomery, D.; Hines, W. (1987). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Administración*. Méjico: Cecsa.

Montgomery, D.; Runger, G. (1996). *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería.* Méjico: McGraw-Hill.

Walpole, R.; Mayer, R. (1992). *Probabilidad y Estadística.* Méjico: McGraw-Hill.

Weisberg, S. (1984). *Applied Linear Regression.* Canadá: John, Wiley and Sons.

Wonnacott, T. ; Wonnaccott, R. (1981). *Regression: A Second Course in Statistics*. Canadá: John, Wiley and Sons.

Los malentendidos en las conclusiones estadísticas

Beatriz Spagni de Barletta*; Sara Lilian Cadoche**
*Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Santa Fe). Argentina
**Universidad Nacional del Litoral (Facultad de Ciencias Veterinarias) Argentina
bspagni@frsf.utn.edu.ar lcadoche@fcv.unl.edu.ar

Resumen
En el Proyecto de Investigación "Enseñanza para la comprensión: análisis y evaluación de sus posibilidades de aplicación en Matemática y Estadística para Ingeniería" hemos observado que uno de los problemas de los alumnos en el estudio de la Estadística es la falta de una actitud reflexiva y razonada. Frente a la situación de tener que resolver un problema de la Estadística el alumno inmediatamente piensa cuáles son las técnicas apropiadas que le permitirán resolverlo exitosamente, sin realizar previamente un análisis crítico de la situación global.
El presente trabajo consiste en la elaboración de ejemplos que muestran a los alumnos situaciones que ponen de manifiesto que, tanto el trabajo de analizar distintas estrategias para resolver un problema, como el análisis de los resultados obtenidos, deben realizarse con mucho cuidado si no queremos cometer errores.
Se muestran casos en los que el trabajo estadístico está mal realizado y esto conduce a la obtención de resultados erróneos, como el hecho de adoptar parcialidades al tomar una muestra y casos en los que, por el contrario, un buen análisis del trabajo estadístico ayuda a detectar errores, como son los casos de presentación de estadísticos aislados, patrones de comparación incorrectos y distribuciones de frecuencia raras.

Marco teórico

Uno de los problemas en los estudiantes es la falta de una actitud crítica frente a la situación de resolver problemas y frente al análisis de los resultados obtenidos.
A pesar de los múltiples nuevos desarrollos y de la intensidad en la formación estadística que se imparte en los distintos ámbitos universitarios, los estudiantes, en general, parecen más confundidos que nunca.
Luego de observar a nuestros alumnos durante largos años pensamos que la dificultad radica en la falta de razonamiento. Desde el punto de vista educativo se trata de enseñar a nuestros alumnos, no una simple Estadística sino una *"Estadística razonada"*.
En este proyecto nos proponemos diseñar, poner a prueba y evaluar unidades didácticas de Matemática universitaria, utilizando como marco conceptual *la enseñanza para la comprensión*, en la línea propuesta por Gardner, Perkins y Perrone de la escuela de Harvard (1998). Este marco conceptual está constituído por cuatro partes claves: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua. La estructura de trabajo supone el alcance de desempeños que impliquen comprensión entendiendo que ***"comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe"***. (Perkins, 1998).
Se buscará analizar los programas de trabajo de las asignaturas Cálculo y Estadística de las distintas carreras de ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, a fin de ofrecer un marco metodológico para el planteo de propuestas de intervención que permitan lograr aprendizajes significativos y perdurables, valorados a partir de desempeños activos. Se emplearán mecanismos de análisis y de metaanálisis que permitan analizar la eficacia de la propuesta educativa tanto en lo cognitivo como en lo actitudinal y/o afectivo. El trabajo de campo se desarrollará con alumnos con experiencia en matemática universitaria, ya que se propone trabajar en segundo año y tercer año de las distintas ingenierías, de este modo se espera realizar aportes teórico- metodológicos a la didáctica de la matemática y de la

estadística en un contexto prácticamente inexplorado (alumnos del ciclo superior universitario)

Metodología

Muchas veces, la evidencia estadística que parece correcta a primera vista, termina siendo defectuosa.
Entre los posibles indicios de error en las apreciaciones estadísticas podemos mencionar los siguientes:

- ✓ Estadísticos aislados y patrones de comparación incorrectos.
- ✓ Distribuciones de frecuencia raras, con presentación de *outliers, caídas y picos*.
- ✓ Parcialidades al tomar una muestra.

Trataremos cada uno de estos indicios de error y mostraremos ejemplos ilustrativos en cada caso.

Estadísticos aislados y patrones de comparación incorrectos

A continuación se analizan dos ejemplos que son presentados a nuestros alumnos. A partir de ellos se busca mostrar que a lo largo del tiempo se han realizado afirmaciones aisladas sobre la observación de los hechos que poco reflejaban la realidad.
Ejemplo 1
En 1978, en el Atlas Anual de Estados Unidos apareció la siguiente afirmación:
"La esperanza de vida media de los directores de orquesta famosos es de 73.4 años"
Ejemplo 2
En 1992, los investigadores Tucker y Bagwell, publicaron lo siguiente:
"Los adultos que vieron televisión durante 3 o 4 horas diarias tienen prácticamente el doble de probabilidad de padecer colesterol alto si se los compara con aquellos que miraron menos de 1 hora al día"
El problema de realizar este tipo de afirmaciones con un número aislado es que uno no puede ubicar la cifra dentro de un contexto. Por lo tanto, en el 1er. Ejemplo cabe preguntarnos: ¿Hasta qué punto es inusual vivir hasta los 73.4 años? ¿Cuál es la esperanza de vida media del hombre común?
En el 2do. Ejemplo nos preguntamos: Entonces, para no padecer colesterol alto, ¿deberíamos ver hasta 1 hora de televisión por día, o, en lo posible, no ver televisión?
La idea de la comparación es crucial. Para elaborar una cuestión enteramente significativa, las presentaciones estadísticas deben hacer referencia a las diferencia entre lo observado y lo esperado, o a las diferencias a través de las observaciones. Las diferencias observadas llevan a interrogantes, los cuales a su vez provocan la búsqueda de factores explicativos.
Tomemos el ejemplo de los directores de orquesta. Nos preguntamos: ¿Con qué grupo deberíamos comparar su esperanza de vida media? ¿Con los músicos de la orquesta? ¿Con los directores no famosos? ¿Con el público en general?
Todos los directores estudiados fueron hombres que vivían en los E.E.U.U. (aunque la mayoría eran nacidos en Europa).
El autor utilizó como patrón de comparación la esperanza de vida media en hombres de la población de E.E.U.U.. En el momento en que se realizó el estudio ésta era de 68.5 años.

Por lo tanto los directores famosos gozaban de unos 5 años más de vida y el autor se lanzó a la aventurada conclusión de que *la actividad de dirigir causa una vida más larga*.
A partir de este estudio, otras personas han intentado explicaciones para una conexión causal. Por ejemplo, Brody, un columnista del área de la Salud de importantes periódicos norteamericanos escribió en uno de sus artículos: “ Se cree que el ejercicio del brazo juega un papel fundamental en la longevidad de los directores de orquesta”.
En 1978, Carroll realiza una crítica de este estudio. El cálculo de la esperanza de vida media para todos los hombres de los E.E.U.U. incluye las muertes infantiles y las muertes de los adolescentes. Ambos grupos, niños y adolescentes, son muy jóvenes para dirigir una orquesta. Luego, estos grupos deberían ser excluidos en el cálculo de la media general. Carroll afirma que un corte de edad adecuado para el grupo de comparación es de al menos 32 años. Este valor es una estimación de la edad media de designación a un primer puesto de director de orquesta. Carroll recalcula la esperanza de vida media para los hombres norteamericanos que ya han alcanzado la edad de 32 años y obtiene un valor de 72.0 años. Luego, la ventaja de los directores famosos, si es que la hay, es relativa.
En el caso del 2do. Ejemplo, se comprueba más tarde, que el aumento en el nivel de colesterol está relacionado con la ingesta de comida *“chatarra”* mientras la gente mira televisión, costumbre bastante frecuente entre los norteamericanos.

Distribuciones de frecuencia raras

Normalmente, las realizaciones repetidas de la mayoría de los procesos aleatorios producen distribuciones con forma de campana de Gauss, con un pico único.
Cuando esto no ocurre aparecen las denominadas *“distribuciones compuestas” o “distribuciones contaminadas”* (Hoaglin y otros, 1983) que hacen referencia a una distribución que proviene de una mezcla de procesos aleatorios, es decir, coexisten un proceso regular que produce la mayoría de las observaciones, mezclado con un proceso divergente que aporta el resto. Si el proceso divergente tiene una varianza mucho mayor que el proceso regular, una o más observaciones tenderán a aparecer separadas del corpus principal de la distribución. Esos puntos se denominan *outliers*. Si hay un número suficiente de observaciones de un proceso divergente con una media claramente más alta o más baja que el proceso regular, el compuesto resultante tendría dos picos, separados por un hueco o una caída.
Veamos el ejemplo siguiente:
En las elecciones democráticas a la Alcaldía de New Haven, Connecticut, en 1969 y 1971, los oponentes fueron los mismos: un candidato dispuesto a la reforma frente al alcalde nominal. Votó más gente en las elecciones de 1971 que en las de 1969, tengamos presente que allí el voto no es obligatorio, reflejando una campaña más intensa y feroz. Sin embargo hubo denuncias de trampa y mal recuento de votos en ciertos distritos electorales. Circulaban rumores de que los militantes de un partido habían presentado papeletas de votantes ya fallecidos y en otros casos se había omitido el conteo de algunos aparatos de votación (en los casos de distritos con sistemas de votación electrónica).
En la Tabla 1 presentamos la proporción de voto total informada en la noche electoral de 1971 con respecto al voto total de 1969 para cada uno de los 30 distritos.

Tabla 1

Distrito	Proporción	Distrito	Proporción	Distrito	Proporción
1	1.11	2	1.18	3	1.04
4	1.59	5	1.15	6	1.23
7	1.35	8	1.00	9	1.27
10	1.15	11	1.20	12	1.20
13	1.22	14	1.26	15	1.24
16	1.28	17	1.03	18	1.08
19	1.11	20	1.04	21	1.09
22	0.70	23	1.10	24	1.09
25	1.20	26	1.05	27	1.12
28	1.11	29	1.17	30	1.09

Se puede observar a simple vista que hay un caso de proporción inusualmente alta y un caso de proporción inusualmente baja. El caso más alto, del distrito 4, muestra un aumento sospechosamente grande en el voto de 1971 con respecto al de 1969. El inferior, del distrito 22, representa una disminución importante en el voto de 1971 con respecto al de 1969. Ambos resultan sospechosos porque las votaciones fueron aumentando homogéneamente en todos los demás distritos, y no hubo cambios sustanciales ni reestructuración de los límites de los distritos electorales.

Por supuesto, todas las distribuciones presentan observaciones más altas y más bajas. Necesitamos algún procedimiento sistemático para decidir si los casos extremos están tan separados del corpus de la distribución como para poder concluir con garantía que se han originado por un proceso divergente diferente del proceso regular que generó el resto de la distribución. Aquí los puntos sospechosos de los datos se encuentran en la "barrera exterior" al final y al principio de la distribución. Ambos pueden considerarse lo suficientemente desviados como para requerir una explicación especial. En efecto, tal como se sospechaba había explicaciones muy concretas para estas dos aberraciones. En el distrito 22, con la proporción baja, se descubrió la mañana postelectoral que se había omitido el conteo de uno de los tres aparatos de votación. Con la corrección, la proporción se convertía en 1.05. Un año después estalló un escándalo cuando se descubrió que se habían utilizado falsas papeletas de personas fallecidas en algunos de los distritos. La mayor parte de esta trampa se había concentrado en el distrito 4, donde se había observado que el nº de votantes en 1971 con respecto a 1969 había aumentado el 59%.

Parcialidades al tomar una muestra

Generalmente uno trata de recabar la mayor cantidad de información posible sobre un evento, antes de extraer una conclusión, o de evaluar una hipótesis o de hacer una generalización. Sin embargo, la gente tiende a hacer muestreos mucho más pequeños de lo que sería óptimo. Esto se debe principalmente a dos razones. En primer lugar porque uno podría estar sobrecargado de información cuando hay muchas variables a considerar en el problema y en segundo lugar, por lo general, adquirir la información implica un costo alto y es bienvenida toda idea que implique reducir el presupuesto de la investigación.

Muchas veces, en situaciones inductivas, extraemos las pruebas de nuestra memoria. El empleo del material disponible en la memoria para estimar frecuencias existentes en el mundo ha recibido el nombre de *heurístico de disponibilidad.* Por lo general el uso del heurístico de disponibilidad nos da buenos resultados, a menudo uno puede inferir una gran frecuencia frente a una elevada disponibilidad de un hecho en nuestra memoria. Sin embargo, hay muchos casos en los que el empleo del heurístico de disponibilidad puede

llevarnos a errores de razonamiento inductivo. Esto sucede cuando la gente recupera de su memoria una muestra parcial, que por otro lado es lo que más recuerda y eso lo conduce a una evaluación errónea de una determinada hipótesis.
Un ejemplo de muestreo parcial es el estudio realizado por Kahneman y Tversky en 1972. Se pidió a los sujetos que estimasen qué es más frecuente en el inglés, si las palabras que empiezan con la letra k o las palabras que tienen la k como tercera letra. La mayoría de los sujetos encuestados respondieron que es más frecuente encontrar palabras que comiencen con k. De hecho, en inglés, hay mucho más palabras que tienen a la k como su 3ra. letra. El motivo de este error está, al parecer, en que es más fácil recuperar de la memoria las palabras a partir de su letra inicial que a partir de su tercera letra. De esta manera se produce un muestreo parcial. Este mismo tipo de razonamiento se puede aplicar para explicar por qué la gente sobreestima la frecuencia de hechos que parecen tener cierto valor de shock, como los asesinatos y los accidentes mortales[1]. La disponibilidad de la memoria para este tipo de hechos resulta ser relativamente alta. La gente muestra tendencia a sobreestimar la probabilidad de acontecimientos espectaculares o catastróficos de por sí raros y a subestimar la probabilidad de otros sucesos menos espectaculares pero más corrientes.

Conclusión

Se espera que al mostrar estos casos se genere en el alumno una actitud más crítica y de análisis profundo al momento de interpretar conceptos y resultados obtenidos en la resolución de problemas.
Una vez realizada una investigación estadística conviene someter nuestras conclusiones a la opinión de un crítico benévolo pero insistente, que realice un trabajo detectivesco y traiga a la conciencia todas aquellas sospechas que probablemente levanten otros más tarde, antes de dar a luz los resultados de las investigaciones. De todos modos, debemos aprender a calibrar el volumen de esas voces interiores, de tal manera que no sean demasiado suaves como para no prestarles atención, ni demasiado altas como para que resulten entorpecedoras para nuestra investigación.

Referencias bibliográficas

Abelson, Robert P.(1995). *La estadística razonada.* Barcelona, España: Editorial Paidós.
Ausubel,D.; Novak, J; Hanesian ,H. (1987). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.
Blythe, T. y colaboradores (1999). *La enseñanza para la comprensión : Guía para el docente.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.
Mayer, R.E (1989). *Models for Understanding.* Review of Educational Research. pp.59 , 43-64. México.
Nickerson, R.; Perkins, D.; Smith, E. (1998). *Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual.* Barcelona, España: Editorial Paidós.

[1] Según estudios de Lichtenstein, Slovic, Fischhoff, Layman y Coombs en 1978; Tversky y Kahneman en 1973.

Una aplicación de matrices en modelos estadísticos

María Rosa R. de Estofán, María Angélica Pérez de del Negro
Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
vestofan@tucbbs.com.ar mperez@herrera.unt.edu.ar

Resumen
Las matrices representan herramientas convenientes para la sistematización de cálculos laboriosos, ya que proveen una notación compacta para almacenar información y relaciones complicadas. Por ello, la teoría de matrices tiene gran aplicación en áreas técnicas, especialmente en Estadística. Se sabe que a través del uso de matrices se puede expresar, de manera concisa, relaciones entre conjuntos de números de gran extensión que surgen con frecuencia de la información adquirida de observaciones temporales.
Este trabajo muestra aquellas manipulaciones algebraicas con matrices que son la base de la formulación de los modelos estructurales en series de tiempo. Estos modelos utilizan estas herramientas matemáticas para su formulación, donde la clave de su tratamiento estadístico consiste en presentarlos en forma de espacio de estado (state space), esta forma posibilita la estimación de sus parámetros, que describen las características más relevantes de la serie observado.

Introducción

El álgebra matricial es parte esencial de la herramienta matemática que se requiere en la actualidad para el estudio de muchas áreas de las ciencias, permitiendo la organización y clarificación de conjuntos complicados de relaciones.
Cuanto más complicado es un problema, más útil resultan las matrices. Lo importante es el hecho de que las matrices proporcionan conocimientos que no podrían obtenerse fácilmente mediante otros procedimientos.
En muchas aplicaciones, la utilidad de las matrices surge del hecho que pueden representar un arreglo de muchos números como un solo objeto designado mediante un solo símbolo, permitiendo que las relaciones entre las variables puedan expresarse de un modo conciso, permitiendo que se vea más claramente las relaciones entre ellas.
Un tema que ocupa el total de la matemática aplicada es el del modelado: ¿ Cómo se pueden construir modelos matemáticos que reflejen de manera, lo suficientemente precisa, las propiedades del mundo real?.
Una aplicación en Estadística, del uso de matrices, es poder expresar mediante una relación la información adquirida de observaciones temporales.
El objetivo de este trabajo es mostrar aquellas manipulaciones algebraicas con matrices, que son la base de la formulación de modelos, permitiendo su tratamiento estadístico posterior a través de algunos métodos computacionales.

Modelos Estructurales

Los modelos estructurales de series de tiempo tienen la característica de capturar las componentes inobservables de una serie, sin tener que reducirla, previamente, a una forma estacionaria, como en los modelos tradicionales; y necesitan ser planteados de tal manera que sus componentes sean estocásticas, o sea guiadas por disturbios aleatorios.
Esta nueva forma de modelar una serie constituye un sistema dinámico donde las componentes inobservables varían con el tiempo, logrando de esta manera una mejor explicación de su comportamiento. Además, muestra los efectos reales de la serie por medio de una descomposición en componentes no observables, tales como tendencia,

estacionalidad, ciclos e irregularidades. Estas componentes tienen una interpretación directa y son de interés en sí mismas, resaltando las características de la serie en la formulación del modelo.

Una vez que el modelo es puesto en forma de espacio de estado se aplican los algoritmos el filtro y suavizado de Kalman lo que posibilita la obtención, por máxima verosimilitud, de los estimadores de los parámetros desconocidos del modelo, que describen las características más relevantes de la serie observada. El filtro realiza las estimaciones condicionales, dada la información, hasta el momento que se estima. El suavizador usa toda la muestra para efectuar las estimaciones. Ambos procedimientos son iterativos. Estos modelos tienen su aparición a fines de la década del 80´, debido al avance de la informática, lo que permitió realizar numerosas operaciones iterativas en solo escasos segundos.

Hay distintas formas de formular un modelo, cuando se pretende que este explique las características particulares de la serie. Un punto de partida útil es asumir que las componentes de la serie pueden ser expresadas en la siguiente ***forma aditiva***:

Serie Observada = Tendencia + Estacionalidad + Ciclos + Irregular

Otra manera de modelar una serie es mediante la siguiente ***formulación multiplicativa***, que puede ser más apropiada, en el caso en que la serie presenta un patrón muy variable. Pero un modelo multiplicativo puede ser tratado como si fuera aditivo, simplemente al modelar el logaritmo de las observaciones.

El **modelo estructural** que describe una serie observada $\{y_t\}$, en término de sus componentes de interés, se expresa:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon) \qquad t = 1,2,.....,T. \qquad (1)$$

Donde μ_t representa la componente tendencia, γ_t la componente estacionalidad, ψ_t la componente cíclica, y ε_t la componente irregular que refleja los movimientos no sistemáticos de la serie. Cuando la componente cíclica no está presente en el modelo (1), este recibe el nombre de Modelo Estructural Básico.

La componente **tendencia** se expresa:

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$$
$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \qquad \text{con} \quad t = 1,2,3,....T. \qquad (2)$$

Donde el disturbio del nivel $\eta_t \sim$ NID (0, σ^2_η) y el disturbio de la pendiente $\zeta_t \sim$ NID (0, σ^2_ζ), son disturbios ruido blanco con media 0 y varianza σ^2_η, y σ^2_ζ respectivamente, ambos mutuamente no correlacionados entre sí y con ε_t. La varianza de los disturbios recibe el nombre de *hiperparámetro*, estos describen el comportamiento de las distintas componentes. El efecto de η_t es permitir que el nivel de la tendencia cambie hacia arriba o hacia abajo, mientras que ζ_t permite los cambios en la pendiente, varianzas mayores, indicaran grandes movimientos estocásticos en la tendencia. El caso límite $\sigma^2_\eta = \sigma^2_\zeta = 0$ indicará la presencia de una tendencia determinística. Las magnitudes por las cuales el nivel μ_t y la pendiente β_t cambian a través del tiempo, están gobernadas por las expresiones: $q_\eta = \frac{\sigma^2_\eta}{\sigma^2_\varepsilon}$ y $q_\zeta = \frac{\sigma^2_\zeta}{\sigma^2_\varepsilon}$, llamadas *hiperparámetros relativos*. En el caso que $q_\zeta = 0$, tenemos que $\beta_t = \beta_{t-1} = ... = \beta$ y si β es diferente de cero, la tendencia es un camino aleatorio más una constante.

Expresamos la componente **cíclica** ψ_t como una función cíclica del tiempo con frecuencia λ_c en radianes; con *período* $\frac{2\pi}{\lambda_c}$ tiempo en el que recorre una secuencia completa. La especificación estadística del ciclo ψ_t se expresa:

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi^*_t \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\lambda_c) & \operatorname{sen}(\lambda_c) \\ -\operatorname{sen}(\lambda_c) & \cos(\lambda_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi^*_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t \\ k^*_t \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad t = 1,2,...,T. \qquad (3)$$

Los disturbios ruido blanco k_t y k_t^* mutuamente no correlacionados con media cero y varianza común σ^2_k y un factor amortiguador ρ, con $0<\rho\leq 1$.
Los hiperparámetros son σ^2_ψ y σ^2_k que para algunos propósitos es conveniente tomar uno de ellos, teniendo en cuenta la relación que existe entre ellos.

$$\sigma^2_k = \left(1-\rho^2\right)\sigma^2_\psi \quad \text{para} \quad 0<\rho<1 \qquad (4)$$

Cuando $\rho = 1$ el ciclo es determinístico pero estacionario, pues σ^2_k es nula, de (4). Si se realizara el análisis espectral, su espectro presentará un pico alrededor de λ_c el cual se hace más agudo a medida que ρ se aproxima a uno. El análisis espectral de una serie permite detectar la existencia de componentes cíclicas. (Brockwel, Davis,1987)
Una forma de expresar la componente **estacional** cuando la serie observada presenta "s" observaciones por año, es:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{[s/2]} \gamma_{j,t} \qquad \text{donde} \qquad \gamma_{j,t} = \gamma_{j,t-1}\cos\lambda_j + \gamma^*_{j,t-1}\operatorname{sen}\lambda_j + w_{jt}$$

$$\gamma^*_{j,t} = -\gamma_{j,t-1}\operatorname{sen}\lambda_j + \gamma^*_{j,t-1}\cos\lambda_j + w^*_{j,t} \qquad j = 1,2,3....[s/2] \qquad (5)$$

Los disturbios ruido blanco $w_{j,t}$ y $w^*_{j,t}$ mutuamente no correlacionados, con media cero y varianza común σ^2_w, para $j = 1, 2, 3, ... ,[s/2]$. Si "s" es par, La componente se expresa: $\gamma_{j,t} = \gamma_{j,t-1}\cos\lambda_j + w_{j,t}$ para j = s / 2

Estas expresiones matemáticas permiten describen el comportamiento de un suceso observado en el tiempo mediante componentes, el análisis de los hiperparámetros relativos posibilita determinar cuan variable son las componentes inobservables de la serie respecto a sus movimientos irregulares, para concluir si estas componentes son tratadas como estocásticas, determinísticas o simplemente no están presentes. La descripción del comportamiento de una serie explicada mediante expresiones matriciales, permite ver más claramente las relaciones entre las componente brindando información sobre el suceso observado.

Formas de Espacio de Estado

La forma de espacio de estado (SSF) es una poderosa herramienta que permite manipular un amplio rango de modelos de series de tiempo. Esta representación lineal de operaciones matriciales relaciona el vector de disturbios $\{\varepsilon_t\}$ con el vector de observaciones $\{y_t\}$ a través de un proceso de Markov $\{\alpha_t\}$. Todo modelo estructural lineal univariado, especificado por la ecuación (1), tiene una representación en la forma de espacio de estado, expresado por las ecuaciones siguientes:

La *ecuación de medida:* $y_t = \mathbf{z}'_t \alpha_t + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,......,T.$

La *ecuación de transición:* $\alpha_t = \mathbf{T}_t \alpha_{t-1} + \mathbf{R}_t \eta_t$ $\quad t = 1,2,......,T.$ (6)

Donde α_t es un vector de orden mx1, llamado *vector de estado en el tiempo t,* $\mathbf{Z}_t$ es un vector fijo de orden mx1, $\mathbf{T}_t$ y $\mathbf{R}_t$ son matrices fijas de orden mxm, ε_t es un término disturbio escalar y η_t es un vector de disturbios de orden mx1 los cuales están distribuidos independiente unos de otros, $\varepsilon_t \sim IID\,(0,h_t)$ y $\eta_t \sim IID\,(\mathbf{0},\mathbf{Q}_t)$.
Todos los modelos lineales de series de tiempo tienen una representación de espacio de estado, presentaremos diversos modelos estructurales que se deducen de (1), que se modelan teniendo en cuenta las formas de espacio de estado.

1.- Nivel Local
El modelo estructural "nivel local ", también llamado camino aleatorio más ruido blanco, describe la tendencia por medio del nivel, que cambia a través del tiempo, y es el más simple de los modelos.

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID\,(0,\sigma^2_\varepsilon)$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \qquad \eta_t \sim NID\,(0,\sigma^2_\eta) \qquad t = 1,2,...,T. \qquad (7)$$

Donde los dos disturbios ε_t y η_t son mutuamente no correlacionados, en todos los períodos de tiempo. Al cotejar estas expresiones con (6), se tiene que el vector de estado es de orden m=1. Forma parte de este vector la componente tendencia, por lo que el vector de estado está definido por $\alpha_t = \mu_t$. Además se tiene que $Z_t = T_t = 1$, $R_t = 1$.
Se hace notar que, este modelo de espacio de estado, cumple con la propiedad de ser invariante, pues el sistema de matrices, en este caso particular, está formado por escalares fijos para todo tiempo *t*.

2.- Tendencia Lineal Local
Un modelo estructural de serie de tiempo, que describe la componente tendencia por medio del nivel y de la pendiente, ambos siguiendo un camino aleatorio, se expresa:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID\,(0,\sigma^2_\varepsilon) \qquad (8)$$

La componente **tendencia** μ_t se expresa mediante las ecuaciones (2). Entonces el modelo puesto en forma de espacio de estado se expresa:

$$y_t = [1 \quad 0]\alpha_t + \varepsilon_t$$
$$\alpha_t = \begin{bmatrix}\mu_t\\ \beta_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{t-1}\\ \beta_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_t\\ \zeta_t\end{bmatrix}, \quad \eta_t \sim NID\,(0,\sigma^2_\eta) \quad \zeta_t \sim NID\,(0,\sigma^2_\zeta)$$

Comparando con las ecuaciones (6) que definen la forma de espacio de estado en modelos univariados, se tiene:

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_t = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_t = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \eta_t = \begin{bmatrix}\eta_t\\ \zeta_t\end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix}\sigma^2_\eta & 0\\ 0 & \sigma^2_\zeta\end{bmatrix} \quad \varepsilon_t$$
$$\sim NID\,(0,\sigma^2_\varepsilon), \qquad \eta_t \sim NID(\mathbf{0},\mathbf{Q}_t)\,. \qquad (9)$$

Los elementos de $\mathbf{z}_t$, $\mathbf{T}_t$, $\mathbf{R}_t$ son escalares fijos: 0 y 1 , estos permiten la conformación de la representación lineal de operaciones matriciales.

3.- Modelo Tendencia y Ciclo

El modelo estructural tendencia y ciclo que consiste en una tendencia lineal local, un ciclo y una componente irregular, se expresa:

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \text{NID}\,(0, \sigma_\varepsilon^2) \qquad t = 1,2,.....,T. \qquad (10)$$

Donde μ_t es la componente tendencia definida por las ecuaciones (2). La componente cíclica ψ_t definida por la expresión (3). Una representación en forma de espacio de estado para este modelo es:

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_t + \varepsilon_t$$

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \cos(\lambda_c) & \rho\, \text{sen}(\lambda_c) \\ 0 & 0 & -\rho\, \text{sen}(\lambda_c) & \rho \cos(\lambda_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ k_t \\ k_t^* \end{bmatrix}$$

Comparando con las ecuaciones (6) que definen la forma de espacio de estado en modelos univariados, se tiene:

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \cos(\lambda_c) & \rho\, \text{sen}(\lambda_c) \\ 0 & 0 & -\rho\, \text{sen}(\lambda_c) & \rho \cos(\lambda_c) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\eta_t = \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ k_t \\ k_t^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_t \sim \text{NID}\,(0, \sigma_\varepsilon^2), \;\; \eta_t \sim \text{NID}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t) \quad (11)$$

4.- Modelo Tendencia y Estacionalidad

El modelo que combina en forma aditiva, las componentes tendencia, estacionalidad e irregular, se expresa:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \text{NID}\,(0, \sigma^2) \qquad t = 1,2,.....,\text{T}. \qquad (12)$$

Donde μ_t es la componente tendencia definida por las ecuaciones (2) y la componente estacional γ_t definida en forma trigonométrica por las ecuaciones (5).

Consideraremos s =12, es decir para observaciones mensuales:

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_t + \varepsilon_t$$

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{1,t}^* \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{2,t}^* \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{3,t}^* \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{4,t}^* \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{5,t}^* \\ \gamma_{6,t} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_t \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \gamma_{1,t-1} \\ \gamma_{1,t-1}^* \\ \gamma_{2,t-1} \\ \gamma_{2,t-1}^* \\ \gamma_{3,t-1} \\ \gamma_{3,t-1}^* \\ \gamma_{4,-1t} \\ \gamma_{4,t-1}^* \\ \gamma_{5,t-1} \\ \gamma_{5,t-1}^* \\ \gamma_{6,t-1} \end{bmatrix} + \mathbf{I}_{13} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ w_{1,t} \\ w_{1,t}^* \\ w_{2,t} \\ w_{2,t}^* \\ w_{3,t} \\ w_{3,t}^* \\ w_{4,t} \\ w_{4,t}^* \\ w_{5,t} \\ w_{5,t}^* \\ w_{6,t} \end{bmatrix}, \mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_3 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_4 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_5 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \eta_t = \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ w_{1,t} \\ w_{1,t}^* \\ w_{2,t} \\ w_{2,t}^* \\ w_{3,t} \\ w_{3,t}^* \\ w_{4,t} \\ w_{4,t}^* \\ w_{5,t} \\ w_{5,t}^* \\ w_{6,t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{12} j\right) & \text{sen}\left(\frac{2\pi}{12} j\right) \\ -\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{12} j\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{12} j\right) \end{bmatrix} \qquad j = 1,2,3,4,5 \;, \; \mathbf{z}'_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_t = \mathbf{I}_{13}$ ε_t ~NID $(0, \sigma^2_\varepsilon)$ η_t ~NID$(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t)$ (13)

Con $w_{j,t}$ ~NID $(0, \sigma^2_w)$ y $w^*_{j,t}$ ~NID $(0, \sigma^2_w)$, j= 1,2,...,6, no correlacionados entre sí.
En las expresiones matriciales, formas de espacio de estado para cada uno de los modelos tratados en secciones anteriores, vemos que los elementos del vector de estado α_t , lo constituyen todas las componentes que explican el comportamiento de una serie para cada momento en que esta es observada. La matriz de covarianza del vector η_t es $\mathbf{Q}_t$, una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son las varianzas de los correspondientes disturbios. Las representaciones de espacio de estado, en los modelos estructurales de series de tiempo univariadas, cumplen con propiedades que permiten su posterior tratamiento estadístico. Harvey (1989, p.116).
Estos modelos estructurales con sus formas de espacio de estado se utilizaron para explicar, analizar y modelar la serie "Precipitaciones en San. Miguel de Tucumán", en las periodicidades anuales, trimestrales y mensuales. Pérez (2001).

Conclusiones

Cuando se trata de modelar una serie, sabemos que no existe un único modelo. En este caso el modelo propuesto cumple con el objetivo de explicar las características sobresalientes de la serie a través de sus componentes, que se manifiestan en el vector de estado.
Las matrices representan instrumentos convenientes para la sistematización de cálculos laboriosos, ya que proveen una notación compacta para almacenar información y describir nexos complicados. Para sistemas matriciales de grandes dimensiones, con un gran porcentaje de ceros, las técnicas iterativas son eficientes en términos de almacenamiento en computadora y del tiempo requerido.
En este trabajo se muestra la utilidad de las matrices, donde la disposición matricial permite la aplicación de algoritmos iterativos, admitiendo investigar el comportamiento de las características de interés en las componentes del vector de estado, al variar a través del tiempo. Estas aplicaciones del Álgebra Matricial son de importancia en los campos de la investigación científica, donde el conocimiento de estos saberes permite reflejar de manera precisa, las propiedades del mundo real. Por lo que resultaría de gran beneficio presentar estas aplicaciones matriciales en cursos de Matemática Superior.

Referencias bibliográficas

Abril, J. C. (1997). *Series de Tiempo: Un Enfoque Unificado*. Conferencia durante el XXV Coloquio Argentino de Estadística.

Brockwell, P.J. y Davis, R. (1987). *Time Series: Theory and Methods*. New York. Spring-Verlag.

Burden, R. L. y Faires, J. D. (1992). *Análisis Numérico*. México. Grupo Editorial Iberoamericana.

Grossman, S. (1995). *Álgebra Lineal*. México. Ed. Mcgraw-Hill.

Harvey, A. C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models And The Kalman Filter*. Cambridge University Press.

Harvey, A. C. (1993). *Times Series Models.* Cambridge University Press

Noble, B. y Daniel, J. (1997). *Álgebra Lineal Aplicada*. Prentice-Hall. Ed. Hispanoamericana.

Pérez, M. A. (2001). *Estudio Estadístico de Las Precipitaciones en Tucumán*. Tesis de maestría a ser publicada próximamente, Universidad Nacional de Tucumán. Tucumán, Argentina.

Reflexiones sobre el curso de estadística para profesionales no estadísticos

Noemí Ferreri , Elda Gallese
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, Universidad Nacional de Rosario, Argentina
fliakarko@radar.com.ar egallese@agatha.unr.edu.ar

Resumen
Este trabajo es parte de un proyecto de investigación, aún en ejecución, cuyo objetivo es reformular los cursos de Estadística para no estadísticos (concretamente, para futuros contadores) en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario, y surge como fruto de toda la investigación bibliográfica realizada. ¿Qué clase de estadística le enseñamos a nuestros alumnos de carreras no estadísticas? ¿Cómo lo hacemos? ¿De qué forma evaluamos su aprendizaje? Éstas y otras cuestiones son objeto de debates, jornadas, publicaciones y congresos en muchos países en la actualidad. Ya se esta hablando de la “llegada de la Era de la Educación Estadística” . Las opiniones sobre los cursos para no estadísticos son variadas pero aparecen muchos elementos comunes: abandonar la clase tradicional y darle más participación a los alumnos a través de actividades y proyectos, enfatizar en los conceptos fundamentales y no en las técnicas o fórmulas, reducir el espacio dedicado a probabilidad, trabajar con datos reales... Quizás el curso de estadística que tomen estos alumnos sea el único en sus vidas. Debemos, por lo tanto, enseñarles qué es la Estadística y convencerlos de su importancia en el mundo. ¿Somos conscientes de nuestra responsabilidad?
En el presente trabajo, presentamos un resumen de las opiniones de distintos autores sobre los cursos para no estadísticos; pero también buscamos dejar planteada una inquietud: ¿qué pensamos sobre estos temas los estadísticos de la Argentina?

Introducción

Los docentes a cargo de los cursos de Estadística para alumnos de carreras no estadísticas, sabemos de los muchos problemas que se nos plantean a la hora de diseñar cada curso. Más allá de los condicionantes que habitualmente aparecen en el momento de la planificación, como por ejemplo la cantidad de horas disponibles, la duración anual o cuatrimestral de la asignatura, etc., la enseñanza de la Estadística para no estadísticos nos enfrenta a una gran cantidad de interrogantes que debemos ir respondiendo día a día. ¿Qué pretendemos para nuestro curso? ¿Qué contenidos son los que debemos enseñar? ¿Cómo debemos hacerlo? ¿De qué forma es conveniente evaluar el aprendizaje en nuestros alumnos? ¿Es importante la utilización de programas de computación? ¿Conviene usar un texto determinado? ...
En primer lugar es importante tener claro que tratamos con alumnos que no serán estadísticos y que, en la mayoría de los casos, juzgan a nuestros cursos como inútiles, aburridos, irrelevantes, ajenos a la realidad, llenos de fórmulas que reemplazar. Cambiar todo esto requiere de mucho esfuerzo; pero fundamentalmente nos exige que respondamos a las preguntas que mencionábamos en el párrafo anterior de manera adecuada a la realidad del mundo de hoy.
La Estadística es, sin dudas, una disciplina de gran utilidad en nuestros días. En un mundo globalizado, en el cual circulan grandes volúmenes de información, fundamentalmente cuantitativa, los ciudadanos deben estar preparados con más herramientas. Nuevas tecnologías de producción, de comunicación, de informática, etc., exigen a los profesionales una actitud más crítica. Más allá de la profesión que cada uno decida para su futuro, cualquier estudiante de nivel superior necesita al menos un curso de Estadística.
En este trabajo analizamos las distintas respuestas encontradas en la bibliografía consultada para las preguntas más importantes que debemos formularnos. Sobre los objetivos del curso trataremos en la siguiente sección, en la sección tres hablaremos sobre los contenidos, la metodología de trabajo la expondremos en el apartado cuatro y la forma de evaluar los

conocimientos en la sección cinco. Finalmente, en la sección seis, haremos las últimas reflexiones sobre todas las ideas expuestas en los distintos trabajos consultados

¿Qué pretendemos para el curso de estadística que vamos a desarrollar?

Ésta es la primera pregunta que debemos formularnos y es de fundamental importancia, ya que su respuesta guiará toda nuestra labor.

En el trabajo de Tannuri y Cabrini (1999) se menciona la opinión de Potter, que considera como objetivo fundamental *el alentar a los estudiantes a utilizar la Estadística.* Allí se afirma que enseñar un conjunto de técnicas, aisladas de problemas reales, no significa nada para los alumnos. El fruto de esto es que ellos terminan aprobando una materia y no aprendiendo una herramienta de tanta utilidad. Es importante, por un lado, *lograr que los estudiantes sean capaces de enfrentar un problema real seleccionando la o las técnicas que sean adecuadas* y por el otro, *estimular a que lo puedan hacer desde distintas perspectivas*.

Cumpliendo los objetivos planteados anteriormente, se logra otro: *que los alumnos vean a la Estadística como ventajosa, práctica, en fin, como una herramienta para la solución de problemas.*

Sembrar en los alumnos una actitud reflexiva, desarrollar el pensamiento crítico necesario para comprender la gran cantidad de información cuantitativa que reciben o frente a los datos que ellos mismos deben analizar, es otro logro que deberíamos buscar en nuestras clases. Moore (1992) afirma que sería deseable que los alumnos aprendieran a "leer" datos como se aprende a leer palabras. Otro objetivo, de fundamental importancia, es *que los alumnos sepan comunicar los resultados obtenidos usando lenguaje estadístico, tanto en forma oral como en forma escrita.* ¿Alentamos esa actividad?

Está claro que falta uno muy importante, asociado con los contenidos que se enseñarán. En nuestro curso, seguramente, buscamos *que los alumnos conozcan los fundamentos de la Estadística para poder entender y evaluar información.* Pero, ¿cuáles son esos fundamentos? Esto nos conduce a la próxima pregunta…

¿Qué deberíamos enseñar a nuestros alumnos?

Cobb (1993) sugiere que nos preguntemos a nosotros mismos: De las cosas que hacemos como estadísticos, ¿cuáles son aquellas que consideramos más básicas? La respuesta nos orientará sobre los contenidos que debemos enseñar. Si analizamos lo que actualmente enseñamos, veríamos que los temas de nuestros cursos son bastante similares. Sin embargo, hace ya un tiempo que se manifiesta la necesidad de un cambio.

Hay un tema que es muy importante. Se trata de lo que se denomina "el pensamiento estadístico", y que tiene que ver con cómo formular preguntas, cómo seleccionar las variables y cómo medirlas, cómo recolectar la información de manera adecuada, cómo evaluar la validez de las conclusiones, etc. Si bien es cierto que estos temas pueden discutirse en forma simultánea, cuando se abordan otros, es importante tenerlos en cuenta. ¿Lo hacemos? ¿Transmitimos la idea que si los datos están mal recolectados, las conclusiones no sirven? Si sólo trabajamos con problemas "de libro" o con problemas "tipo", es difícil poder discutir esto. Con los problemas y situaciones reales, sí tenemos un marco adecuado para ello.

En relación a esto último, además de destacar la importancia de la calidad del dato para su posterior análisis, es importante que los alumnos conozcan la forma en que se obtienen la estadísticas oficiales, los problemas que tiene la construcción de indicadores como "tasa de desempleo", "índices de precios al consumidor", etc. Nuestros alumnos, ¿los conocen?
Si enseñamos sólo un conjunto de técnicas, estamos suponiendo implícitamente que ellas funcionarán por sí solas; pero nosotros sabemos que no es así. De ahí la importancia de transmitir el pensamiento estadístico. ¿Qué temas enseñar, entonces? Wood y Wasimi (1998) sugieren partir de problemas reales y abordar los temas de diseño de experimentos, muestreo, construcción de modelos y predicción, y las herramientas básicas del análisis descriptivo, y luego, abordar los que vayan surgiendo para poder dar solución a los problemas planteados. Estos últimos temas tienen que ver, por supuesto, con probabilidad e inferencia. Otros autores también ponen énfasis en esta idea: hay que dedicar más tiempo al "pensamiento estadístico", a técnicas descriptivas y mucho menos tiempo a probabilidades y a inferencia. Hay que luchar por que los alumnos piensen, y no porque apliquen fórmulas que no tienen significado para ellos.
Los conceptos centrales de la Estadística también deben ser un tema principal: la aleatoriedad, la variabilidad, los distintos tipos de errores (de muestreo, sistemáticos, vicio). ¿Asociamos el concepto de distribuciones a la idea de variabilidad?
Moore (1992) habla de tres contenidos básicos: <u>la organización y el resumen de los datos</u>, que incluye las herramientas y las estrategias para saber leerlas y comunicar lo encontrado; <u>la producción de los datos</u>, que incluye todos lo del diseño de una investigación y <u>la obtención de conclusiones</u>, que abarca fundamentalmente inferencia estadística. ¿Dónde están las Probabilidades? Según su opinión, también compartida por otros, sólo deben darse aquellos contenidos de probabilidad que se necesiten para poder comprender los aspectos de inferencia estadística: las ideas estadísticas son importantes en sí mismas, más allá de los conceptos de probabilidad, y es en ellas donde debemos poner el énfasis. *¿No es mejor orientar el curso hacia los conceptos principales y al pensamiento estadístico?*

¿Cómo deben desarrollarse nuestras clases?

La respuesta a esta pregunta, que se asocia a nuestra metodología de trabajo, es muy importante. Casi la totalidad de los trabajos analizados sobre el tema hacen una crítica a la forma tradicional de enseñanza: un docente que explica un tema, los alumnos que lo escuchan pasivamente y que luego realizan ejercicios de aplicación sacados de libros. ¿Aprenderán realmente así nuestros alumnos? ¿Podrán aplicar la Estadística en situaciones reales cuando termine el curso? Muchos autores proponen diferentes alternativas para mejorar la forma en que se desarrollan nuestras clases; pero en todos se observan casi las mismas recomendaciones:

- sin descartar los ejercicios de libro, una sugerencia bastante frecuente es <u>trabajar con datos reales.</u>
- <u>organizar actividades en clase</u>, ya sea para que los alumnos las lleven a cabo individualmente o en grupos o para que las realicen con el profesor. Además de más útiles, las clases "activas" son atractivas para los alumnos y les permiten trabajar de manera entusiasta.
- <u>el trabajo en grupos</u>, tanto dentro como fuera de la clase, es muy enriquecedor y ayuda a que los alumnos comprendan los conceptos estadísticos.

- <u>la realización de proyectos por parte de los alumnos</u> pone al alumno en el papel de investigador, lo obliga a considerar todos los aspectos que hacen al tema, a recolectar los datos, a analizarlos, etc. Es decir, a poner en práctica todo lo que denominábamos en el punto anterior como “el pensamiento estadístico”.

¿Cómo evaluamos el aprendizaje?

Esa pregunta es de fundamental importancia, ya que, como afirma Hubbard (1997), la evaluación conduce el aprendizaje de los alumnos. La autora cita también una expresión de Resnick en la cual se menciona que se logra lo que se evalúa, mientras que lo que no se evalúa no se logra.
Respecto de cómo evaluamos debemos pensar qué resultados buscamos obtener. Si siempre preguntamos de la misma manera o si les presentamos a los alumnos en los exámenes los mismos problemas estereotipados de un libro que ya practicamos durante el año, favorecemos que memoricen. Tampoco podemos evaluar desconociendo los objetivos que nos propusimos al inicio, ni los contenidos o la forma en que los enseñamos. Pero, a veces, la forma en que evaluamos los desmienten. ¿Cuántas veces enunciamos hermosos objetivos tales como que los alumnos comprendan las ideas fundamentales de nuestra asignatura, etc y terminamos pidiéndoles que busquen un valor en la tabla de la distribución normal?
Debemos encontrar, entonces, ejercicios en los cuales los alumnos muestren lo que comprenden de Estadística y no lo que saben calcular o lo que memorizaron. Preguntas conceptuales, con un toque de ambigüedad, pueden ser una buena idea. Hay muchas más alternativas: armar pequeños exámenes conceptuales para los 10’ últimos de cada clase, o exámenes de 1’ preguntándoles qué es lo que mejor entendieron y qué es lo que más les costó entender, darles problemas para resolver y pedirles informes escritos, etc. También las actividades en clase y los proyectos de investigación constituyen espacios en los cuales los alumnos pueden ser evaluados.

Reflexiones finales

Como ya mencionamos al comienzo, este trabajo es parte de un proyecto de investigación, aún en ejecución, cuyo objetivo es reformular los cursos de Estadística para no estadísticos (concretamente, para futuros contadores) en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Rosario, y surge como fruto de toda la investigación bibliográfica realizada.
En los párrafos anteriores se mencionan sintéticamente algunas ideas importantes para tener en cuenta sobre el curso de Estadística para profesionales no estadísticos; pero existen muchas más reflexiones sobre estos y otros temas de interés. La bibliografía que se presenta no es sino una selección de las referencias más significativas, ya que sería muy extenso detallar todos los trabajos consultados.
Más allá de las diferentes opiniones recogidas sobre los cursos de Estadística en todos los trabajos, hay sí una conclusión muy clara: los docentes debemos aceptar el desafío de descubrir caminos nuevos y emprender con éxito la fascinante tarea de ayudar a nuestros alumnos a descubrir lo maravillosa y útil que les resultará nuestra disciplina y la importancia de tenerla como aliada en la toma de decisiones.

Sin embargo, nuestra práctica cotidiana puede estar muy alejada de este gran objetivo. En la tercera sección se plantea que en casi todos nuestros cursos enseñamos lo mismo, que hace falta un cambio. Al comienzo del trabajo también se afirma que, para muchos, nuestros cursos resultan inútiles, ajenos a la realidad, aburridos. Estas ideas se repiten prácticamente en todos los artículos consultados. Y nosotros, como docentes, solemos poner nuestras excusas: el cuatrimestre es corto, tenemos muchos alumnos, etc.

Frente a todas las limitaciones, reales, sin dudas, debemos oponer nuestra creatividad y el sentido común. Y, además, tenemos que quitarnos el miedo al cambio: No importa que los alumnos sepan una fórmula menos; pero sí importa que hayan tenido la posibilidad de aplicar la Estadística, de trabajar con datos, de estar "en la cocina" y de "ensuciarse las manos con la masa". Tendremos, quizás, que eliminar algunos temas que sean irrelevantes y darle más espacio a otros, priorizando siempre el uso de datos reales y preferentemente, locales. **¿Aceptamos ese reto?**

Referencias bibliográficas

Cobb, G. (1993). Reconsidering Statistics Education. *Journal of Statistics Education (on line), 1 (1) (www.amstat.org/publications/jse/v1n1/cobb.html)*

Garfield, J. (1994). Beyond Testing and Grading: Using assessment to Improve Student Learning *Journal of Statistics Education (on line), 2 (1) (www.amstat.org/publications/jse/v2n1/garfield.html)*

Garfield, J. (1995). How students learn Statistics. *International Statistical Review, 1,* 25-34.

Hogg, R. (1992). Towards Lean and Lively Courses in Statistics. En Gordon Florence and Sheldon (Edit.), *Statistics for the XXI Century, MAA Notes Nº 26, Washington: Mathematical Association of America, pp.*3-13.

Hubbard, R. (1997). Assessment and the Process of Learning Statistics. *Journal of Statistics Education (on line), 5 (1) (www.amstat.org/publications/jse/v5n1/hubbard.html)*

Mackisack, M. (1994). What is the Use of Experiments Conducted by Statistics Students? *Journal of Statistics Education (on line), 2 (1):www.amstat.org/publications/jse/v2n1/mackisack.html*

Moore, D. (1992) Teaching Statistics as a Respectable Subject. En Gordon Florence and Sheldon (Ed.), *Statistics for the XXI Century, MAA Notes Nº 26, Washington: Mathematical Association of America, pp* 14-25

Rinaman, William (1998). Revising a Basic Statistics Course. *Journal of Statistics Education (on line), 6 (2) (www.amstat.org/publications/jse/v6n1/rinaman.html)*

Swanson, D. y Mckibben, J. (1998). On teaching Statistics to Non-Specialists: A course aimed at increasing both Learning and Retention. En L. Pereira-Mendoza (Ed.), *Proceedings of the V International Conference on Teaching of Statistics: Vol. 1. Statistical Education at the Post-Secondary Level (pp 159-166).* Singapur.

Tannuri, E. y Cabrini Gracio, M. (1999). O ensino da Estatistica na graduacao: ensaios para sua reformulacao. Florianópolis: Conferencia Internacional sobre Experiencias y Perspectivas de la Enseñanza de la Estadística. Desafíos para el Siglo XXI

Wood, G. y Wasimi, S. (1998) Transforming First Year University Statistics Teaching. En L. Pereira-Mendoza (Ed.), *Proceedings of the V International Conference on Teaching of Statistics: Vol. 1. Statistical Education at the Post-Secondary Level (pp 167-172).* Singapur.

Epistemología e Historia de la Matemática

Nivel Medio

¿Los números a través de la historia o la historia de los números?

Adriana B.Berio; Silvana N.Mastucci
ECOS Escuela Secundaria. Buenos Aires. Argentina
aberio@ciudad.com.ar   smastucci@ciudad.com.ar

Resumen
La propuesta de nuestro trabajo es hacer una introducción histórica para el tema de *sistemas de numeración* y el desarrollo de algunos ejercicios donde los alumnos se involucren desde un trabajo de investigación y donde puedan recrear las acciones llevadas a cabo por los pueblos propuestos de antiguas civilizaciones.
En este trabajo dedicamos una primera parte para el análisis de diversos textos en donde se rescata la necesidad de la creación de un sistema de numeración, la utilidad de asignar un símbolo a la idea de número y la incorporación del cero entre otras características importantes de los sistemas de numeración. Con esto queremos que nuestros alumnos adquieran un conocimiento más profundo de la numeración y de las razones que han conducido su expresión y forma actual. La segunda parte es una secuencia de actividades para lograr que los alumnos adquieran el manejo operatorio en los distintos sistemas de numeración y reconozcan la conveniencia del uso del sistema decimal.

Introducción

A nuestro parecer y para comenzar con la introducción del tema rescatamos las ideas de Miguel de Guzmán donde comenta la importancia del estudio de la historia de las ciencias: “el conocimiento de la historia de la matemática debe formar parte indispensable de la formación de aquel que enseña o estudia matemática, porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática.
La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Al incluir en los contenidos el contexto histórico y biográfico de determinado conocimiento, cambia el sentido de los mismos.
La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz de corregir sus errores.
Desde el punto de vista del conocimiento más profundo de la propia matemática, la historia nos proporciona un cuadro en el que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva, con lo que redunda en un gran enriquecimiento tanto para el matemático técnico como para el que enseña.
Conocer como se desarrollaron los conceptos a lo largo de la historia sirve para:

- Comprender mejor las dificultades del hombre genérico, de la humanidad, en la elaboración de las ideas matemáticas, y a través de ello la de sus propios alumnos.
- Entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática.
- Utilizar este saber como una sana guía para su propia pedagogía.

El conocimiento de la historia proporciona también una visión dinámica de la evolución de la matemática. Se puede barruntar la motivación de las ideas y desarrollos en el inicio. Ahí es donde se pueden buscar las ideas originales en toda su sencillez y originalidad, todavía con su sentido de aventura, que muchas veces se hace desaparecer en los textos secundarios. Nunca se suscita la cuestión del por qué de las cosas o cómo se llegó a ellas. Volver al origen de las ideas, logra que se pierda la apariencia de muerte y la visión de las mismas como hechos disecados y vuelven a tomar una vida fresca y pujante.
Tal visión dinámica nos capacitaría para muchas tareas interesantes en nuestro trabajo educativo:

- Posibilidad de extrapolación hacia el futuro.
- Inmersión creativa en las dificultades del pasado.
- Comprobación de lo tortuoso de los caminos de la invención, con la percepción de la ambigüedad, oscuridad, confusión iniciales, a media luz, esculpiendo torsos inconclusos."

¿El por qué de nuestra elección del tema?

El comienzo de las matemáticas fue originado, básicamente, por las necesidades de la vida cotidiana y estuvo influenciado también por la religión y la magia. La necesidad de la creación de un sistema de numeración proviene de la naturaleza de las actividades propias de un pueblo primitivo. La utilización de números grandes y la invención de un calendario son ejemplos de las necesidades que provinieron al tener grandes rebaños domesticados y la práctica de una agricultura diversificada.
Además con la aparición del comercio, la industria y la agricultura, el hombre primitivo debió no solamente saber contar, sino también ser capaz de hacer un balance de sus actividades comerciales. La realización del mismo implicaba necesariamente conocer las reglas elementales del cálculo numérico.
Los sistemas de numeración desarrollados por los hombres primitivos fueron de tipo aditivo no posicional, que le permitían efectuar cálculos con números naturales (adición, sustracción, multiplicación).

Actividades propuestas:

A continuación se muestran algunas actividades que realizamos con los alumnos:
Actividad 1:

- *A)Realizar las siguientes lecturas*:

- ✓ Texto 1: "Contemos con nuestros ancestros" (Parte 1, 2 y 3)
  GOMEZ, P. *Matemática Básica, Una empresa docente,* Universidad de los Andes, Colombia, 1990.
- ✓ Texto 2: "Las varitas mágicas"
  REVISTA CORREO DE LA UNESCO. *El nacimiento de los números,* Noviembre 1993.
- ✓ Texto 3: "Contar"
  NEWMAN. J. R .*Sigma, El Mundo de las Matemáticas,* Vol. IV, Ed. Grijalbo, Barcelona, 1968

B)Comentarlas, discutirlas y responder las siguientes preguntas:

a)El concepto de número, ¿Nació con el hombre?. Explica tu postura.
b)¿Cuál crees que fue la necesidad y la utilidad de asignarle un símbolo a la idea de número? Ejemplifica.
c)¿Qué significa contar? Ponte a contar y trata de identificar el tipo de proceso mental que estás llevando a cabo.
d)Piensas que el método que realizaste en el punto anterior tiene alguna analogía o similitud con el proceso de contar que utilizaron los hombres primitivos.
e)¿Qué es una correspondencia biunívoca?
f)¿Qué es la base de un sistema de numeración?
g)¿A qué se llama sistema posicional?
h)Explicar la importancia de la creación del **cero.**

Actividad 2:

- *Investigar y completar el siguiente cuadro* comparativo teniendo en cuenta todos los textos sugeridos y otros que puedes utilizar a tu elección.

	Civ. Egipcia	Civ. Babilónica	Civ. China	Civ. Árabe	Civ. India	Civ. Maya
Ubicación geográfica						
Ubicación temporal						
Tipo de escritura						
Símbolos utilizados						
Tipo de sistema						
Características de cada civilización						
Aportes al sistema decimal						

Estas actividades son de lectura y análisis de textos histórico-informativos. Son realizadas en clase y por grupos durante dos bloques (80 minutos cada uno), y en caso de no ser suficiente el tiempo en clase se otorga un tiempo adicional como tarea para el hogar.

Cumplido este plazo se hace una puesta en común donde el docente actúa como mediador y tiene que tener como objetivos:

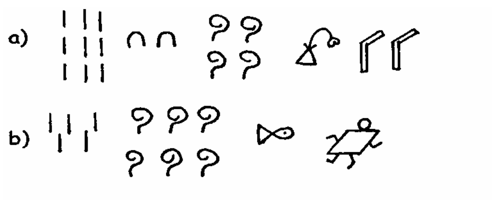
- Que los alumnos *tomen apuntes* de los conceptos matemáticos que van surgiendo a través de la discusión en clase y que van a ser necesarios para la comprensión matemática del tema de *sistemas de numeración.*
- Que queden claros los siguientes *conceptos:* base, elementos, reglas de formación, pasaje de un sistema a otro.

Para complementar estos objetivos, el docente debe dar la información y explicación teórica necesaria teniendo en cuenta: las inquietudes que surgieron de la actividad, las ideas previas y los contenidos curriculares preestablecidos.

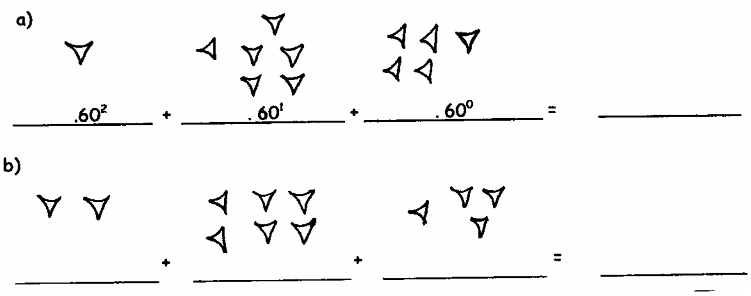
Posteriormente las actividades que realizan los alumnos tienen la finalidad de utilizar los conceptos anteriores, en situaciones de dentro y fuera de la matemática misma. Algunas de las mismas son:

Actividad 3:

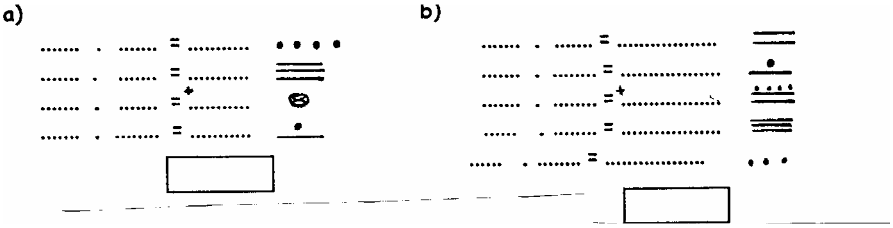
- Ejercicio histórico
  - Completa colocando en cada caso el número correspondiente en sistema decimal:



  - Traduce al sistema decimal:



- ¿Qué números representan en el sistema decimal?. Completa los lugares en blanco.



Actividad 4:

Completa la siguiente tabla:

Antecesor	Número	Sucesor
	$1101_{2)}$	
	$122_{3)}$	
	$323_{4)}$	
	$444_{5)}$	
	$1455_{6)}$	

Actividad 5:

Realiza una lámina en la que quede expresado el **año de tu nacimiento**, en cada uno de los siguientes sistemas de numeración:

- Decimal
- Binario
- Egipcio
- Babilónico
- Chino-japonés

Actividad 6:

Inventa símbolos para representar números en base cinco, utilizando el sistema de agrupación   simple.

- Expresa en este sistema, los números que en base diez son 38, 45 y 134.
- Muestra en una lámina tu propio sistema de numeración.

Con la realización de estas actividades, que se vienen evaluando y modificando de acuerdo a la puesta en práctica en el aula, podemos inferir que los alumnos:

- ✓ Aceptan la guía satisfactoriamente. Incrementando con la búsqueda de material y bibliografía extra, lo sugerido por nosotras.

- ✓ Adoptan el “rol de nuestros ancestros” y pueden enunciar ventajas y desventajas de los distintos sistemas de numeración, a través de un debate realizado en clase.
- ✓ Logran establecer relaciones con otras materias, especialmente historia, ya que al analizar las distintas civilizaciones logran transferir lo aprendido mediante esta guía.

Conclusión

Con este trabajo consideramos que la comprensión del sistema de numeración posicional decimal brinda una herramienta universal de comunicación que permite representar en un mismo código todos los números e ingresar de esa manera a la operatoria aritmética. Las reglas de formación que rigen este sistema no resultan *evidentes* para los alumnos, por tal motivo proponemos la realización de las dos primeras actividades, para conocer y comprender la evolución de nuestro sistema de numeración con sus ventajas y desventajas.

Se intenta destacar, a través de la ejercitación propuesta, la significación y la funcionalidad de la matemática a través de la conexión con el mundo real, entre sus diversas ramas y la historia de las ciencias. Queda de manifiesto el valor de la historia de la matemática en la cultura y la sociedad, en el pasado y en el presente.

Se espera que el alumno con este trabajo pueda:

- ✓ Percibir que la matemática forma parte del entorno cotidiano, comprendiendo la naturaleza del pensamiento matemático, manejando y pudiendo comunicar las ideas y los procedimientos básicos de esta ciencia.
- ✓ Valorar un espacio de investigación y el trabajo cooperativo en grupo para lograr objetivos en común.
- ✓ Tener curiosidad, apertura y duda como base del conocimiento científico.
- ✓ Valorar a la matemática como una construcción humana.

Sabemos que el mundo de hoy exige miradas alternativas para un mismo problema, al igual que la búsqueda de relaciones comunes en situaciones de apariencias diferentes. La realización y el análisis de este trabajo permiten la comprensión de conceptos que asegura, que los contenidos aprendidos pueden ser aplicados a situaciones nuevas, surgidas desde otros ámbitos ajenos a la matemática, reinterpretándolos en los contextos culturales que se presenten.

Referencias bibliográficas

Collette, J. P. (1998). Historia de las matemáticas I. *La civilización babilónica.* (pp.19-38). *La civilización egipcia.* (pp.39-63). México: Siglo Veintiuno Editores.

Du Shi-ran. (1993, noviembre). Las varitas mágicas. *Revista el Correo de la UNESCO*. (pp.18-21). París, Francia.

Gómez, P. (1990). Matemática básica. *Contemos con nuestros ancestros*. (pp.216-225). Colombia: Universidad de los Andes, una empresa docente.

Gomis, A. (1992). Historia de la ciencia y de la técnica 2. *Egipto.* (pp.9-15). *Mesopotamia*. (pp.33-39). Madrid: Ediciones Akal.

Guzmán, M. (1992). Tendencias innovadoras en educación matemática. *Cambios en los principios metodológicos aconsejables*. (pp.13-26). Buenos Aires, Argentina: O. M. A.

Newman, J. R. (1968). Sigma, El mundo de las matemáticas, Vol. IV. *Contar* (pp.20-29). Barcelona, España: Editorial Grijalbo.

La complejidad del continuo numérico

Jeannette Vargas Hernández
Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. Bogota, Colombia
yanow43@hotmail.com

Resumen
En este proceso de investigación se busca primordialmente ilustrar sobre algunos caminos que se van estableciendo a medida que se avanza en la indagación de un objeto de estudio. En este caso en particular los investigadores consideran que su indagación sobre el continuo numérico, un concepto que ha sido designado para ser enseñado, debe tener como eje inicial la formación del profesor, es decir, el estudio y conceptualización en el ámbito de la matemática, para poder observar el "concepto" en una situación escolar, por ello el escrito girará sobre el número y dejará planteadas varias preguntas en el ámbito del salón de clase y en general en la Educación Matemática.

Desarrollo

En el sistema escolar colombiano; en el currículo, el sistema de los números reales está designado para ser enseñado, decisión que obliga a tener en cuenta la múltiples implicaciones que conlleva para los diferentes agentes que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Desde la práctica docente se observa que el paso de los números racionales a los reales resulta complejo tanto para estudiantes como para maestros. El docente, en determinados momentos de manera consciente y en otros de manera inconsciente, presenta este paso sin permitir que el estudiante establezca diferencias conceptuales profundas entre el dominio numérico de los racionales y el de los reales. En la mayoría de los casos se limita a dar algunos ejemplos y a justificar la existencia de los irracionales asociados a situaciones geométricas o diferenciándolos de los racionales solamente por las características en su escritura decimal. Posteriormente se "ubican" los reales en la recta numérica, recurriendo en unos casos a los racionales y en otros al uso de procesos geométricos, aduciendo luego que existe una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, dando por hecho que a cada punto de la recta le corresponde un número y a cada número un punto.

Contrastando con el proceso anterior, una mirada al desarrollo histórico-epistemológico induce a preguntarse : si el salto de los racionales a los reales es "inmenso", ¿Hasta dónde el espacio de la escuela permite que el alumno establezca diferencias entre la conceptualización de racionales que puede ir ligado a actividades concretas y una conceptualización como la de los números reales que es de tipo matemático formal?, ¿Hasta qué punto nuestros estudiantes se ven abocados a serios obstáculos al acercarse a la conceptualización del continuo numérico?

Se pueden observar en las anteriores preguntas de manera explícita una variable del problema., la conceptualización. Conceptualización que examinada desde el enfoque cognitivo de la Teoría de Raymond Duval, nos remite a la siguiente afirmación: "todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos. En este enfoque se enfatiza en la existencia de diversas representaciones semióticas ligados a un mismo concepto matemático".

Son también una variable mas los textos escolares. Los textos son una herramienta de apoyo tanto para docentes como para estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, los textos escolares de matemáticas presentan definiciones de conceptos y/o

nociones matemáticas, desarrollan procedimientos, haciendo además uso de diversas formas de representación. Todo lo anterior permite evidenciar las concepciones del conocimiento matemático que se manejan en el texto, concepciones sobre cómo se aprenden las matemáticas, qué es comprender matemáticas y cómo se evalúan las matemáticas.
Para este primer esbozo de la problemática se acude tanto a la experiencia como docente, como a una revisión teórica, teoría de la cual vale la pena retomar los siguientes elementos:

Elementos teóricos
Historia de la matemática

Desde la historia de la matemática uno de los aspectos que se aborda es la formulación del interrogante *¿qué es un número?* Con el propósito de acercarse a una respuesta, se recurre al documento "Definición de número" de Bertrand Russell (1872 – 1970. Filósofo y matemático inglés, uno de los fundadores de la lógica simbólica. (Nobel 1950). En el documento establece que en lugar de hablar de conjuntos se hablará de clases y luego precisa que éstas se pueden definir por intensión o por extensión y afirma que la definición por intensión es la fundamental, lo cual puede demostrarse mediante dos consideraciones
(1). Una definición extensiva puede siempre ser reducida a una intensiva.
(2). A menudo la intensiva no puede ser reducida ni tan solo teóricamente a la extensiva.
Enseguida se afirma que cuando se busca la definición de número, las observaciones anteriores son relevantes en tres aspectos distintos. El primero es que los números forman un conjunto infinito y no pueden por tanto, ser definidos por enumeración. En segundo lugar porque cabe presumir que los conjuntos de un número dado de términos forman ellos mismos un conjunto infinito. En tercer lugar, porque queremos definir el "número" de modo que infinitos números sean posibles; tenemos así que poder hablar del número en términos de un conjunto infinito y tal conjunto tiene que ser definido por intensión, es decir por una propiedad común a todos sus miembros y peculiar de ellos.
Desde la perspectiva de Russell la definición de número *"no debe presuponer que todos los números son finitos; y en todo caso no podemos, sin caer en un círculo vicioso contar para definir números, pues los números son empleados al contar. Necesitamos, por lo tanto, algún otro método para decidir cuándo dos conjuntos tienen el mismo número de términos. De hecho, es más simple descubrir si dos conjuntos tienen el mismo número de términos que definir lo que es número"*
Con miras a precisar la definición de número, Russell establece la siguiente definición de semejanza *"Se dice que una clase es semejante a otra cuando existe una relación uno-uno de la que una clase es dominio mientras que la otra es el dominio converso"* Entiende en general que: (a). La conversa de una relación dada, es la relación que existe entre ***y*** y ***x*** cuandoquiera que la relación dada existe entre ***x*** e ***y***. (b). El dominio converso de una relación es el dominio de su conversa.
El autor justifica que la relación de semejanza definida anteriormente es una relación de equivalencia y de acuerdo con ello establece la siguiente definición *"El número de una clase es la clase de todas aquellas clases que son semejantes a ella"*.
La definición anterior se podría expresar diciendo que el número de un conjunto es la clase de todos aquellos conjuntos semejantes con él.

A continuación define los números en general como cualquiera de las clases en que la semejanza reúne a los conjuntos, lo cual expresa de la siguiente manera “un número es cualquier cosa que es el número de alguna clase”.
Tal definición tiene la apariencia verbal de ser circular, pero de hecho no lo es. Definimos “ el número de una clase dada” sin emplear la noción de número en general; por consiguiente podemos definir el número en general en términos de “el número de una clase dada” sin cometer ningún error lógico.
También es posible acercarse al concepto de número, desde la historia de la matemática, a través de la lectura de “Variación y representación. Del Número al Continuo” Luis E. Moreno Armella y Guillermina Waldegg. En este estudio se preguntan ¿***cuándo el número y la magnitud continua se integran en un mismo concepto****?* Para efectos de esta investigación se elaboró el siguiente paralelo de dos concepciones.

Concepción Euclidiana	**Concepción de Stevin**
De la concepción euclidiana se resaltan dos características: 1) El 1 no es un número 2) El número solo puede aplicarse al estudio de colecciones discretas. Dado que no hay noción de continuidad asociada al concepto de número, en este estudio se preguntan *¿cuándo el número y la magnitud se integran en un mismo concepto?* **El concepto griego** Para Aristóteles, la continuidad puede caracterizarse como divisibilidad indefinida . Esta definición exige hablar de *divisibilidad*, que define como la operación fundamental que permite la clasificación y definición de las cantidades: “Una *magnitud*, es una cantidad divisible adinfinitum; su característica definitoria es ser *continua*. Un *número* es una *cantidad* divisible solo un número finito de veces; su característica definitoria es ser *discreto”*. La *divisibilidad* está en la raíz de la definición de conmensurabilidad e *inconmensurabilidad.* La unidad aritmética no es un número, y la unidad geométrica es una magnitud. La unidad aritmética es única; la geométrica depende de las magnitudes que se midan. La unidad aritmética es el principio de generación del dominio numérico, pero la unidad geométrica no puede ser un principio generador puesto que no es única.	En la obra matemática de Stevin, se visualiza la ruptura explícita con la concepción euclidiana a través de las siguientes premisas: 1. La unidad es un número 2. La unidad es divisible ilimitadamente 3. Las partes de la unidad son a su vez números. El gran cambio que encierra la concepción de Stevin es el que número es el medio para hacer evidente la cantidad (que es una propiedad de las cosas). Stevin pasa a un segundo nivel de representación, su número se refiere no solo a la cantidad numerable sino también a la medible, lo que implica un cambio de las acciones asociadas al número: no solo se emplea para contar sino también para medir. Stevin borra la dicotomía continuo-discreto de la cantidad, al negar la “discretez” del número como una característica de su esencia. En un pasaje de la Arithmetique Stevin argumenta que negar la *divisibilidad* de la unidad es limitar la naturaleza del número. A partir de la identificación de magnitud y número , atribuye propiedades numéricas a las cantidades continuas y propiedades de continuidad a los números. La siguiente cita de Stevin, referente a los inconmensurables describe su posición epistemológica: “Pero, aunque este teorema es verdadero, nosotros nunca podremos conocer por tal experiencia la inconmensurabilidad de dos magnitudes dadas; primero, porque a causa del error de nuestros ojos y manos concluiríamos de que al fin todas las magnitudes, tanto conmensurables como inconmensurables son conmensurables”.

Otro aspecto teórico desde la historia de la matemática sobre el cual es preciso interrogarse con el fin de aproximarse a la comprensión del objeto de estudio, es: *¿Qué es número real?* Para ir elaborando una respuesta a esta pregunta se considera necesario retomar una breve reseña de un segmento del recorrido histórico-epistemológico, de nuestro objeto de estudio.

"Uno de los principales fundamentos del pitagorismo establecía que la esencia de todas las cosas es explicable en términos de arithmos, es decir, de propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones. Sin embargo, algunos diálogos de Platón (por ejemplo el Menon) ponen de manifiesto que la comunidad matemática Griega se vio grandemente sorprendida por un descubrimiento que prácticamente demolía las bases de la fe pitagórica en los números naturales. Este descubrimiento fue el de que, dentro de la geometría misma los números naturales y sus razones resultaban inadecuados para dar cuenta de algunas propiedades fundamentales, algunas muy sencillas; no obstaban, por ejemplo, para comparar la diagonal de un cuadrado, de un cubo o de un pentágono regular con su lado o arista respectivamente. Tales parejas de segmentos son ***inconmensurables****, por muy pequeña que sea la unidad de medida elegida*" (Citado por Romero I.)

"...Fue Eudoxo de Cnido quien con su noción de magnitud y su teoría de las proporciones ata las nociones de razón y proporción a la geometría, permitiendo extender pruebas que consideraban magnitudes conmensurables a problemas que contemplaban las magnitudes inconmensurables... La Teoría de las proporciones de Eudoxo se encuentra en el libro V de los elementos de Euclides. Allí encontramos la siguiente definición que permite evitar de manera extraordinaria a los irracionales: "Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta... Idea que usara Dedekind 2000 años después para definir los números irracionales". (Citado por Sánchez C.)

Se llega así al siglo XIX con el siguiente concepto: número racional es el que puede representarse por medio de un expresión decimal periódica y número irracional el que no tiene un período en su expresión decimal. Pero se hacia necesario dar una definición de número irracional independiente del sistema de numeración y es allí en donde se hace necesario mencionar cuatro importantes trabajos sobre dicha construcción: (a) Karl Weierstrass, (b) Charles Méray, (c) George Cantor, (d) Richard Dedekind.

De estas construcciones, la construcción realizada por Dedekind aborda de manera explícita la continuidad de los reales, razón por la cual se presenta un "bosquejo" de su trabajo a través de una síntesis de su artículo "Números Irracionales".

Para su trabajo Dedekind considera la línea recta completa, sin huecos o sea continua. Y plantea la siguiente pregunta: *¿En qué consiste pues esta continuidad?* Según la respuesta que se dé se obtendrá una base científica para la investigación de todos los dominios continuos.
Dedekind se expresa de la siguiente manera: "*Cada punto p de la recta produce una separación de la misma en dos porciones de manera que cada punto de una parte está a la*

izquierda de cada punto de la otra parte. Encontré la esencia de la continuidad en el recíproco, es decir en el siguiente principio: Si todos los puntos de la línea recta son de dos clases, de manera que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un punto y únicamente uno que ocasiona la partición de todos los puntos en dos clases separando la recta en dos porciones. La suposición de esta propiedad de la recta no es más que un axioma por el cual atribuyo a la línea su continuidad en la línea".
Plantea enseguida que el dominio discontinuo de los números racionales puede rehacerse hasta formar un dominio continuo, para lo cual define las cortaduras de la siguiente manera: *"Cualquier separación del sistema R de los racionales en dos clases A_1, A_2 que poseen la propiedad característica de que cada número a_1 de A_1 es menor que cada número a_2 de A_2, entonces llamaremos a esta separación una cortadura y la designamos por (A_1 , A_2)".* Si A_1 tiene máximo o A_2 tiene mínimo entonces la cortadura está determinada por dicho número. Dedekind plantea entonces que hay infinidad de cortaduras que no son definidas por números racionales, (citando y demostrando un ejemplo). En esta propiedad de que no todas las cortaduras son producidas por un número racional consiste el estado incompleto o discontinuidad del dominio R de todos los números racionales.
Afirma luego que cada cortadura (A_1, A_2) no producida por un número racional produce un nuevo número, llamado número irracional, que se considera completamente definido por dicha cortadura. En adelante a toda cortadura (A_1, A_2) de números racionales se le llamará número real.
Enseguida procede a establecer un criterio de orden en los números reales, tomando como base el orden de los racionales y la definición de cortadura de racionales. Usa este criterio para demostrar que *el dominio de los reales posee continuidad*, es decir que se cumple el siguiente teorema: *Si el sistema R de todos los números reales se divide en dos clases U_1 y U_2 tales que cada número a_1 de la clase U_1 es menor que cada número a_2 de la clase U_2, entonces existe un solo número a que puede producir dicha separación***.**

Estudios Cognitivos

De los estudios cognitivos existentes se retoma "*Elementos Históricos y Psicogenéticos en la Construcción del Continuo Matemático".*
Se presentan elementos nuevos para el estudio, bajo los títulos: *Actualización de procesos y conjuntos infinitos: infinito actual e infinito potencial;* El sistema de los números reales como objeto teórico; La recta analítica de Dedekind y, *La Continuidad como predicado de estructuras.* El aporte para este proceso la investigación, radica en algunas relaciones explícitas que plantean *entre el infinito actual y continuidad.*
En la segunda parte del documento se encuentra un análisis a las respuestas de un cuestionario aplicado a un grupo de 14 profesores de matemáticas de enseñanza media, quienes relacionan continuidad con infinito pero con procesos de infinito potencial. Igualmente *casi todos identifican el conjunto de los números naturales y los números racionales como conjuntos continuos.*
Con esta breve mirada al concepto, a su desarrollo histórico, a las situaciones de los profesores y de los estudiantes; el continuo numérico, no solo por los obstáculos epistemológicos, sino por ser un tema designado a ser enseñado, justifica formular más de una pregunta que conlleve a problemas de investigación. Como ejemplo de algunos

caminos a seguir, se pueden plantear preguntas relacionadas sobre las representaciones de los reales, y sobre los nexos necesarios o suficientes de la continuidad numérica con el infinito potencial y el infinito actual.

Referencias bibliográficas

Dedekind, R. (1969). *Números Irracionales*. En Newman, J. (comp) Sigma, el mundo de la Matemática. Vol. 4 (pp. 119-128) -. Barcelona, España: Grijalbo.

Johnson, S. (1969). *El Concepto de Número*. En Newman, J. (comp) Sigma, el mundo de la Matemática. Vol. 4 (pp. 129-135) -. Barcelona, España: Grijalbo.

Russell Bertrand. (1969). *Definición de Número*. En Newman, J. (comp) Sigma, el mundo de la Matemática. Vol. 4 (pp. 116-118) . Barcelona, España: Grijalbo.

Rigo. M. (1994). Elementos Históricos y Psicogenéticos en la construcción del continuo matemático. En Educación Matemática. No1. Vol 6.

Romero I. (1997). *La Introducción del Número Real en Enseñanza Secundaria: Una Experiencia de Investigación – Acción*. Granada.

Romero I., Rico L. (1999). *Representación y Comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria*. En revista EMA. No 2. Vol 4.

Sanchez, C. (1997). *Construcción de los Reales* .Universidad Nacional de Colombia.

Orígenes del Cálculo Infinitesimal: De la antigüedad al Teorema Fundamental

Gabriela Pérez, Verónica Molfino, Marcelo Lanzilotta, Mario Dalcín
Instituto de Profesores Artigas (IPA). Uruguay
gepe@adinet.com.uy veromol@adinet.com.uy marclan@ime.usp.br filomate@adinet.com.uy

Resumen
Este taller consiste en una revisión histórica de los orígenes y el desarrollo de los conceptos, definiciones y métodos del cálculo infinitesimal, desde la Antigüedad hasta el siglo XVII. Se analizan algunos resultados alcanzados por matemáticos de distintas épocas durante ese período como Arquímedes, Oresme, Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Roberval, Wallis, Barrow hasta culminar con Newton y Leibniz**,** buscando discutir sus posibilidades de trabajo en el aula. Está pensado para instrumentar en cursos introductorios de cálculo, de nivel preuniversitario y universitario, especialmente en la formación de profesores, con el fin de visualizar a la actividad matemática como un proceso histórico y no sólo como proceso lógico o producto acabado.

Introducción

El estudio histórico de la construcción social de cada uno de los conceptos, permite determinar los mecanismos presentes en el desarrollo del mismo y la transposición que un concepto sufre cuando es llevado al aula. Entender cuáles fueron los obstáculos que ha tenido la humanidad en su conjunto en el desarrollo de un concepto puede ser significativo para comprender los obstáculos que tienen nuestros alumnos en ese proceso, construcción del conocimiento matemático que concebimos indisociable del contexto sociocultural en el que se produce.
Se presentan dos cuestionamientos centrales: ¿qué relación existe entre la concepción histórica de un concepto y las de profesores y alumnos? ¿qué elementos se pueden rescatar para insertar en la enseñanza?

Podemos distinguir en el surgimiento y desarrollo del cálculo los siguientes momentos:

- Invención de mecanismos para la resolución de problemas particulares. El cálculo no tiene identidad propia, es un período de "acción" con algunos problemas particulares, caracterizado por la exactitud en los resultados presentados y la rigurosidad en los razonamientos. Se desarrolla en la Antigua Grecia, y si bien son muchos los matemáticos que hicieron aportes en este sentido, nos centraremos en el trabajo realizado por Eudoxo (408-355 a.C.) y Arquímedes (287-212 a.C.).
- Consideración de un mayor espectro de problemas, motivados por el avance de la tecnología y el enriquecimiento con otras ciencias y otras ramas de la matemática. Si bien este período comienza con algunos estudios en Oxford durante la Edad Media, es en los siglos XVI y XVII cuando la "resurrección" de la curiosidad griega, junto a una revalorización de la intuición y dejando de lado por el momento los métodos rigurosos, le dio un nuevo impulso al Cálculo. Se da una búsqueda de procesos y de generalización. Analizamos algunos resultados obtenidos por Galileo(1564-1642), Kepler (1571-1630), Cavalieri (1598-1647), Roberval (1602-1675), Evangelista Torricelli (1608-1647), Wallis (1616-1703), Fermat (1601-1665), Pascal (1623-1662) y Descartes (1596-1650).
- Generalización y hallazgo de un método general para la resolución de una cantidad considerable de problemas. Especial mérito se debe otorgar, en este período, al inglés

Isaac Barrow (1630-1677), maestro de Newton en su cátedra de Cambridge, quien estableció de manera irrefutable que los procesos de cálculo de tangentes y de cuadraturas son inversos, cediendo su cátedra y, en definitiva, el descubrimiento del cálculo infinitesimal, a su discípulo Isaac Newton. Los conceptos centrales del cálculo, la derivada y la integral fueron desarrollados, pues, durante los siglos XVII y XVIII, aunque sin una fundamentación rigurosa, principalmente por el inglés Isaac Newton (1643-1727) y el alemán Gottfried W. Leibniz (1646-1716).

- Consolidación del cálculo como un objeto de estudio. Desde el primer cuarto del siglo XIX se produce una fundamentación y abstracción de los conceptos relacionados al Cálculo, adquiriendo la configuración que actualmente presenta.

En lo que sigue sólo expondremos algunos resultados trabajados en el taller referidos al segundo período debido a las limitaciones de espacio, acotándonos a mencionar el resto de los manejados en el mismo.

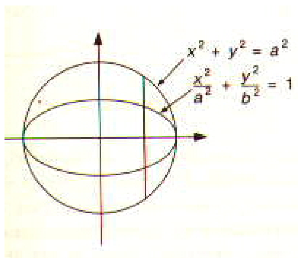
Cálculo en la Antigua Grecia: Arquímedes y Eudoxo

Dentro de la obra de Arquímedes que abarca muchas y variadas ramas de la matemática y la física - *Medida del Círculo*, *Cuadratura de la Parábola*, *Sobre las Espirales*, *Sobre esfera y cilindro*, *Sobre conos y esferoides*, *Sobre el equilibrio de las figuras planas* y *Sobre cuerpos flotantes* -, profundizaremos en el cálculo de superficies y volúmenes, ya que los resultados obtenidos son un antecedente importante para el cálculo integral actual y conservan aún hoy una sorprendente vigencia. Para hacerse una idea de la influencia de su obra, baste decir que hasta el final del siglo XVII era el autor más citado en los escritos relacionados con el cálculo infinitesimal.
Las aportaciones de Arquímedes al desarrollo del cálculo se pueden centrar en la deducción y demostración altamente rigurosa de sus resultados sobre cuadraturas y cubaturas usando el **método de exhaución** de Eudoxo. Matemáticos anteriores habían sugerido ya el método de inscripción y circunscripción de figuras rectilíneas a la figura curvilínea y proceder a multiplicar el número de lados o de caras indefinidamente, con lo que las figuras rectilíneas se iban aproximando cada vez más a la figura curvilínea. Sin embargo, no se sabía cómo formalizar este razonamiento, ya que se hace necesaria la idea de límite, desconocida en el momento. Fue Eudoxo quien dio una solución a este problema a través del lema que se suele conocer como Axioma de Arquímedes:
"Dadas dos magnitudes que tengan una razón (que sean del mismo tipo y ambas distintas de cero), la mayor excede a la menor por una cantidad que, si es añadida a sí misma, puede exceder cualquier magnitud prefijada del mismo tipo."
Utilizando este principio y a través de una doble reducción al absurdo, Arquímedes logra demostrar rigurosamente los resultados obtenidos de áreas y volúmenes.
En el taller se trabaja detalladamente, a modo de ejemplo, con los razonamientos referidos a la cuadratura del segmento parabólico y de la espiral.

Predecesores del cálculo infinitesimal: Cavalieri, Torricelli y Roberval

En el siglo XVII, luego de más de diez siglos durante los cuales el cálculo de áreas y volúmenes no fue un asunto prioritario para los matemáticos, Buonaventura Cavalieri se ocupa del tema con razonamientos similares a los de Arquímedes; basándose en el concepto de los *"indivisibles"* que aparece por primera vez en su libro "Geometría Indivisibilibus" (1635).
La idea de "indivisibles" en una figura plana, hace referencia a cualquier cuerda de ella. Así, una figura plana estaría formada por una infinidad de cuerdas paralelas que Cavalieri denominó *"omnes lineae"*.
A los efectos de resolver el problema que lo ocupaba –el cálculo de áreas y volúmenes- Cavalieri debió definir las *potencias de todas las líneas,* calculando así la integral de x^k para $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 9. (Se analizan los pasos y los resultados de dichos cálculos para los casos $k = 1, 2$ y 3).
Otro relevante aporte de Cavalieri en torno al mismo tema fue la formulación de sus principios:
1. *Si dos figuras planas tienen la misma altura y si las secciones determinadas por líneas paralelas a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las áreas de las dos figuras están también en esa misma razón.*
2. *Si dos cuerpos sólidos tienen la mima altura y si las secciones que determinan planos paralelos a las bases y a distancias iguales de ellas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los dos sólidos están también en esa misma razón.*

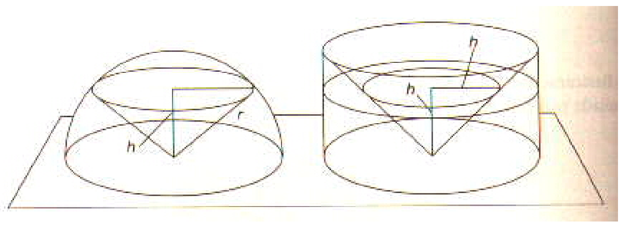
Como aplicación del primer principio, calculemos el área de una elipse. Para ello, consideremos la elipse y la circunferencia



$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b$ y $x^2 + y^2 = a^2$,
que podemos escribir:
$y = (b/a)\,(a^2 – x^2)^{1/2}$, $y = (a^2 – x^2)^{1/2}$.
De esta forma, la razón entre ordenadas correspondientes, y por tanto entre cuerdas verticales correspondientes, de la elipse y la circunferencia es b/a.
Usando el primer principio podemos concluir que:

área de la elipse = (b/a) área del círculo
área de la elipse = $(b/a)\,\pi a^2 = \pi ab$.

El segundo principio puede ser aplicado para calcular el volumen de una esfera.

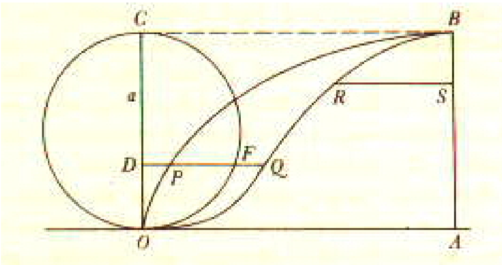


En la figura tenemos:
área del círculo = $\pi\,(r^2 – h^2)$
área de la corona = $\pi r^2 – \pi h^2$
$= \pi\,(r^2 – h^2)$

Además: volumen de la esfera = 2 (volumen del cilindro – volumen del cono)
volumen de la esfera = $2\,(\pi r^3 – 1/3\pi r^3) = 4/3\pi r^3$

Vemos a continuación dos aplicaciones del uso de indivisibles; una para el cálculo de áreas y otra para volúmenes.

Nos ocuparemos en primera instancia del razonamiento seguido por G. P. Roberval para calcular el área de la cicloide.

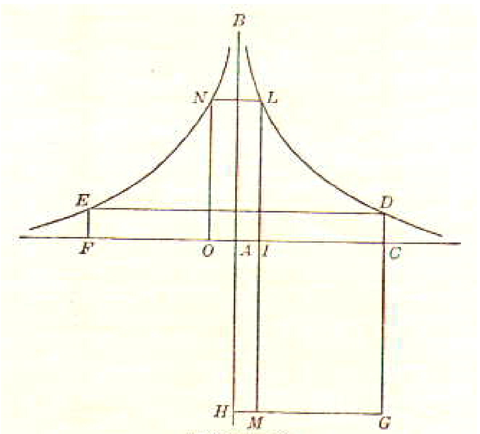


Comenzamos calculando la mitad del área buscada, es decir el área de la región encerrada por OABP. Si P pertenece a la cicloide se considera un punto Q tal que PQ = DF; cuyo lugar geométrico es la curva OQB asociada a la cicloide.
La curva OQB divide al rectángulo OABC en dos partes iguales, pues para cada segmento DQ hay un segmento igual RS.

Área OABC = (perímetro de la circunferencia/2). OC = (π.OC/2).OC = π.OC^2/2.
Area círculo = π.(OC/2)^2 =π.OC^2/4.
Sumando:

área de la región OABQ = área círculo
<u>área entre las curvas OPB y OQB = área semicírculo.</u>
Área ½ cicloide = 3/2 área círculo

Otra aplicación interesante aparece en los trabajos de Evangelista Torricelli. En su *Obras Completas* presenta la siguiente demostración relativa al volumen finito de un cuerpo infinito.
Consideremos el sólido (infinito) engendrado por la rotación del arco LD (también infinito) de hipérbola equilátera y del segmento DC alrededor de la asíntota HB. Torricelli demuestra que el volumen de ese sólido es igual al del cilindro que tiene como base el círculo de diámetro AH -siendo AH el doble de la distancia del punto A a la hipérbola- y cuya altura (constante) es AC.



Siendo ED una línea horizontal fija, se puede ver que para cualquier posición de la línea NL (paralela a ED), el cilindro de altura NO y diámetro OI tiene un área lateral igual a la de la sección transversal IM del cilindro ACGH. Pero así como las superficies laterales de los cilindros NLIO "llenan" el volumen del sólido de revolución FEBDC; las superficies de los círculos de diámetro IM "llenan" el volumen del cilindro ACGH. De esta forma concluimos que los dos volúmenes son iguales.

Isaac Barrow

Si bien se ha mencionado en numerosas ocasiones a Isaac Barrow como uno de los pilares fundamentales en la invención del cálculo diferencial e integral (a tal punto que su nombre está ligado al "Teorema Fundamental"); también podemos encontrarnos con opiniones que disienten con lo anterior debido al carácter geométrico (en un sentido euclídeo clásico) de sus trabajos. Ese "apego" a las figuras redundó en detrimento de lo analítico y lo algebraico, impidiendo un desarrollo algorítmico de sus descubrimientos. Sólo en una oportunidad Barrow se manejó con argumentos analíticos y fue cuando desarrolló el método infinitesimal para determinar las tangentes. Lo esencial en este método es el uso del triángulo característico. Si bien este enfoque es similar al realizado con anterioridad por Torricelli, Descartes y Pascal, parece interesante abordarlo por la condición de excepcional dentro de la obra de Barrow. Pero sin duda, lo más relevante en la obra de Barrow es el reconocimiento de la relación inversa entre los problemas de cuadraturas y tangentes (aunque la formulación de un algoritmo que permita solucionar un problema a partir del inverso recién llegará con los trabajos de Newton y Leibniz).

Newton y Leibniz

Si bien los siglos XVI y XVII representaron un fructífero período en la historia de la creación del cálculo, con una gran cantidad de resultados particulares motivados por problemas físicos: cálculo de máximos y mínimos, trazado de tangentes y resolución de cuadraturas, no se puede hablar aún de la existencia del cálculo como un conjunto unificado de conceptos y resultados, aplicables con generalidad para resolver determinados problemas.

Hubo que esperar a que Isaac Newton, desde Inglaterra, y Gottfried W. Leibniz, en el continente europeo, realizaran sus aportes que conducirían a la fundación -aunque sin una fundamentación rigurosa- del cálculo. Podemos sintetizar en dos dichos aportes:

a) El desarrollo de un *método general* para el cálculo de la variación de una variable con respecto al tiempo, en el cálculo de Newton, o la diferencial de una variable, en el cálculo de Leibniz.

b) El conocimiento claro y contundente, y de nuevo con generalidad, de que los problemas de tangentes y cuadraturas son recíprocos, lo que suponía una nueva herramienta para el cálculo de áreas. Frente al contenido geométrico y parcial en que Barrow presentó este resultado, Newton y Leibniz le dieron en primer lugar más generalidad en su aplicación, en segundo lugar una presentación más analítica, y en tercer lugar la importancia que dicho resultado tiene dentro del cálculo.

Desarrollamos un bosquejo de los razonamientos de cada matemático, enfatizando especialmente el hecho de que ambos llegaron a resultados similares desarrollando su método de forma independiente, si bien la prioridad del descubrimiento fue causa de una gran disputa entre naciones enteras, que se prolongaría durante el siglo XVIII.

Creemos interesante plantear, una vez analizado cada uno de los caminos seguidos, las diferencias entre los razonamientos de ambos matemáticos, permitiéndonos así afirmar que fue una *fundación* casi simultánea, pero independiente, aunque por mucho tiempo se haya querido demostrar lo contrario.

Comentarios finales

La puesta en práctica del taller durante RELME resultó muy enriquecedora tanto para los asistentes como para nosotros en la medida que posibilitó un interesante intercambio de trabajos y propuestas referidos al tema y formas de enfocarlo en distintos países de Latinoamérica. Asimismo, se compartió la necesidad de introducir curricularmente la historia de la Matemática en todos los niveles, para contribuir a la visualización de la misma como un proceso histórico íntimamente relacionado con el contexto sociocultural en el que se produce.

Referencias bibliográficas

Arquímedes. (1986). *El método*. Madrid, España: Alianza.

Babini, J. (1957). *Biografía de los infinitamente pequeños*. Buenos Aires, Argentina: Raigal.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza.

Boyer, C. B. (1959). *The history of calculus and its conceptual development*. New York, USA: Dover.

Descartes, R. (1997). *La geometría*. D.F., México: Limusa.

Dunham, W. (1993). *Viaje a través de los genios*. Madrid, España: Pirámide.

Durán, A. J. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid, España: Alianza.

Eves, H. (1995). *Introducao á história da matemática*. San Pablo, Brasil: Unicamp.

Eves, H. (1983). *Great moments in mathematics*. *Before 1650*. Washington, USA: MAA.

Eves, H. (1983). *Great moments in mathematics*. *After 1650*. Washington, USA: MAA.

González Urbaneja, P.M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid, España: Alianza.

Heath, T.L. (1953). *The works of Archimedes*. New York, USA: Dover.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I*. Madrid, España: Alianza.

Kline, M. (1994). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. D.F., México, Siglo XXI.

Koyré, A. (1995). *Estudios de historia del pensamiento científico*. D.F., México, Siglo XXI.

Leibniz, G.G. & Newton, I. *El cálculo infinitesimal*. *Origen-polémica*. Buenos Aires, Argentina: Eudeba.

Rey Pastor, J. & Babini, J. (1984). *Historia de la matemática*. Barcelona, España: Gedisa.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Moscú, URSS: Mir.

Sestier, A. (1983). *Historia de las matemáticas*. D.F., México: Limusa.

Smith, D.E. (1959). *A source book in mathematics*. New York, USA: Dover.

Stein, S. (1999). *Archimedes. What did he do besides cry eureka?* Washington, USA: MAA.

Tikhomirov, V.M. (1990). *Stories about maxima and minima*. Washington, USA: MAA.

Aplicaciones e historia de la Geometría Analítica

Alexander Bell Mejía, Roberto Torres Hernández
Instituto Tecnológico de Querétaro, Universidad Autónoma de Querétaro, México
abell@itq.edu.mx robert@sunserver.uaq.mx

Resumen
En el presente taller se expondrán y trabajarán algunos temas para enriquecer el curso tradicional de geometría analítica a nivel medio-superior y superior. La idea principal consiste en proponer, analizar y desarrollar una serie de suplementos a los temas usuales con el objeto, por un lado, de ilustrar algunas aplicaciones y problemas que pueden resolverse con herramientas elementales y por otro, dar un vistazo a la historia y origen de algunos conceptos, así como su evolución y utilidad a través del tiempo. Lo anterior se hará con ejemplos concretos que, de paso, muestran como se eslabonan diversos aspectos de las matemáticas escolares sobre un problema común.

Introducción

Dos de las principales líneas en la didáctica de las matemáticas son la enseñanza a través de la resolución de problemas y la incorporación de la historia de las matemáticas a las clases cotidianas. Con esto en mente, este trabajo propone una serie de temas complementarios a los temas usuales del curso promedio de geometría analítica con los siguientes objetivos:

1. En cuanto a la formación de profesores, creemos importante que el instructor de un curso de geometría analítica tenga un panorama más o menos amplio acerca de los diversos alcances del material que enseña, en cuanto a los problemas que resuelve. Por otro lado, consideramos que conocer el origen de algunos conceptos posibilitará entender de manera clara algunas de las dificultades encontradas en la evolución y por ende en la enseñanza de los mismos.
2. Articular y eslabonar diversos temas de las matemáticas elementales sobre un problema común.

La propuesta, en términos concretos, se resume en la siguiente tabla:

TEMA:	Plano cartesiano y fórmula de la distancia.

- *Planos coordenados.*
- *Distancia urbana y otras métricas.*

TEMA:	La línea recta.

- *Programación Lineal.*

TEMA:	La circunferencia.

- *Solución de ecuaciones cuadráticas.*

TEMA:	La parábola.

- *Solución de ecuaciones de grado tres y cuatro.*
- *La propiedad de reflexión.*

TEMA:	La elipse.

- *La segunda ley de Kepler.*

TEMA:	La hipérbola.

- *Funciones hiperbólicas.*

Estos temas, por un lado, muestran que no es necesario poseer conocimientos muy avanzados de matemáticas para resolver problemas útiles y nada triviales (como es la optimización en el caso de la programación lineal y la línea recta) y, por otro, permiten repasar el nacimiento y evolución de algunos conceptos lo que, a su vez, ayuda a entender la relación que existe entre diversos temas de las matemáticas y otras áreas del conocimiento (como son los inicios del cálculo infinitesimal, la segunda ley de Kepler y la elipse). Como ejemplo de estas ideas, se expone a continuación uno de los suplementos correspondiente a la parábola.

Propiedad de Reflexión de la Parábola

Cuando en la segunda guerra púnica el pueblo de Siracusa estuvo sitiado por el general romano Marcelo, Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.) puso su habilidad técnica a la disposición de los defensores de la ciudad. Sólo al cabo de tres años, pudo Marcelo apoderarse de Siracusa y en castigo por su terquedad, la dejó a merced de los soldados. En el saqueo perecieron muchos ciudadanos, Arquímedes entre ellos.[1]

Algunos historiadores cuentan que Arquímedes desarrolló una estrategia para incendiar los barcos de los invasores. Se dice que hizo que la luz del Sol fuera reflejada mediante un gran número de espejos planos, hacia los barcos, que bajo la acción concentrada de los rayos del Sol terminaban por incendiarse.

Este relato nos recuerda el hecho de que, desde la antigüedad se conoce una curva *C* tal que, bajo ciertas condiciones, si sobre cualquier punto de ella incide, por ejemplo, un rayo de luz, éste será reflejado en un único punto. Esta curva *C* se denomina *Parábola* y en este apartado se estudiará su *propiedad de reflexión*. Esta propiedad, la cual sugiere el arreglo diseñado por Arquímedes, consiste en que si un rayo de luz, u otro tipo de onda, paralelo a su *eje* choca contra ella, será reflejado hacia el *foco* de la parábola y recíprocamente, si se coloca una fuente de luz en el *foco* de la parábola, los rayos que sean reflejados por ella serán paralelos a su eje (*Figura* 1).

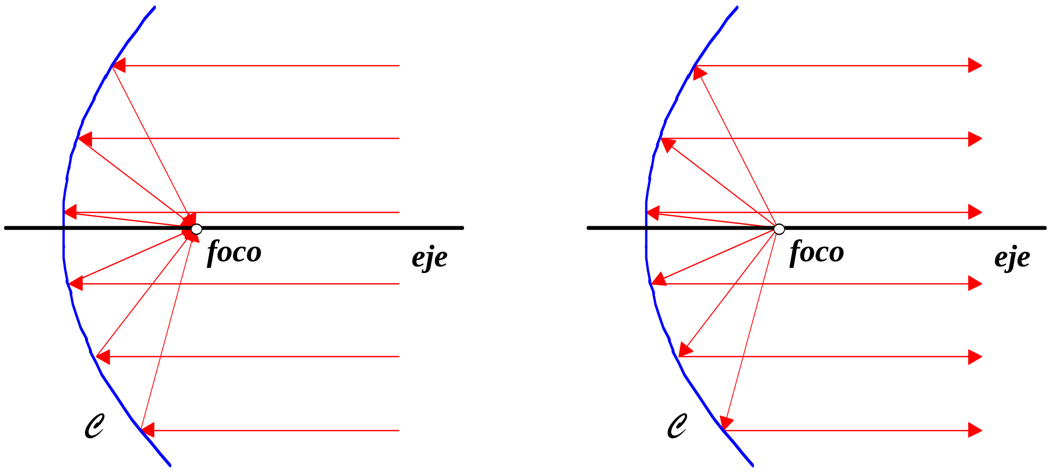


Figura 1

Para iniciar este estudio y para que desde un principio esté fundamentado sobre bases sólidas, nos remitiremos a un hecho que habitualmente se demuestra en la Física:

[1] Se dice que un soldado romano que penetró en el jardín del sabio, lo encontró sumido en el estudio de unas figuras geométricas trazadas en la arena. Tan absorto estaba Arquímedes en sus estudios, que ni siquiera advertía lo que pasaba en torno suyo. “No pises mis círculos”, dijo al legionario, y éste, que ignoraba quién era, lo atravesó con su espada.

Principio de Fermat (del tiempo mínimo). De todos los posibles caminos que la luz puede seguir para llegar de un punto a otro, utilizará el que ocupe el menor tiempo para recorrerse.
Así, este principio garantiza que si un rayo de luz viaja de un punto ***A*** a un punto ***B***, la luz recorrerá el camino más corto y, por lo tanto, desde la perspectiva de la geometría euclidiana, afirma que la luz viaja en línea recta.

Bajo esta idea, considérese un espejo plano (***EE'***) y un rayo de luz que sale de ***A*** hacia el espejo, reflejándose en el punto ***X*** para posteriormente llegar a ***B***, tenemos entonces que la luz viajó por la línea quebrada ***AXB*** (*Figura* 2). Esto es inmediato del principio de Fermat, pues la luz viaja en línea recta. Sin embargo, la cuestión aquí es ¿qué relación existe entre el ángulo α y el ángulo β?[2]

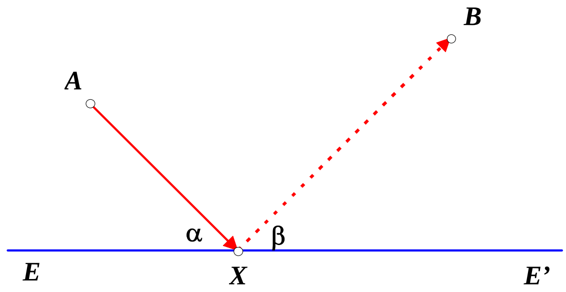


Figura 2

Para responder este cuestionamiento, supóngase que ***B'*** es un punto tal que ***BB'*** es perpendicular a ***EE'*** en ***C*** y ***BC* = *CB'*** (*Figura* 3).

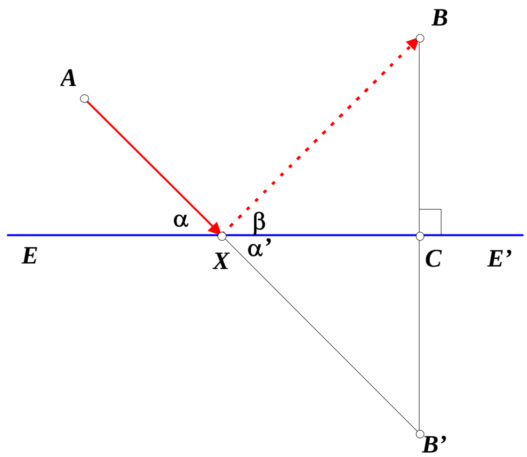


Figura 3

Claramente, los triángulos ***XBC*** y ***XB'C*** son congruentes[3] por lo que:

$$\beta = \alpha'$$

y como α y α' son ángulos opuestos por el vértice se tiene que:

$$\alpha = \beta.$$

[2] El ángulo α se denomina ángulo de incidencia y β ángulo de reflexión.

[3] Esto es cierto dado que por hipótesis $BC \cong B'C$ y $\angle B'CX \cong \angle BCX$ y, por otro lado, CX es común para ambos triángulos.

En el análisis anterior, en el cual se muestra que el ángulo de incidencia tiene la misma medida que el ángulo de reflexión, la mayoría de las consideraciones que se realizaron parecen razonables. Sin embargo, antes de precisar este resultado, puede ser conveniente estudiar la siguiente cuestión ¿Es verdad qué el punto ***X***, punto donde el rayo de luz incide con el espejo ***EE'***, está sobre el segmento ***AB'***? en otras palabras ¿es cierto qué el punto de intersección de las rectas ***EE'*** y ***AB'*** es ***X***?

Obsérvese que si esto no se verifica, entonces existe un punto ***X'***, distinto de ***X***, donde se intersectan las rectas ***EE'*** y ***AB'*** y, con esto, la posibilidad de que la igualdad establecida entre los ángulos de incidencia y reflexión sea falsa.

Para aclarar esta situación basta observar que si el punto de intersección entre las rectas ***EE'*** y ***AB'*** fuera un punto distinto a ***X***, por ejemplo ***X'*** (*Figura* 4), entonces (por la desigualdad del triángulo) se tendría que

$$AX + XB' > AB'.$$

Pero, por un lado, la congruencia entre los triángulos ***X'BC*** y ***X'B'C*** garantizaría que ***X'B'*** $\cong$ ***X'B*** y, de este modo

$$AB' = AX' + X'B' = AX' + X'B.$$

Y, por otro lado, dada la congruencia entre los triángulos ***XBC*** y ***XB'C***, se tendría que

$$XB' = XB.$$

De este modo, si estas dos últimas expresiones se sustituyen en la desigualdad, resulta que

$$AX + XB > AX' + X'B,$$

lo cual afirmaría que la luz siguió el camino más largo y sería una contradicción con el principio de Fermat. Esto significa que los puntos supuestos, ***X'*** y ***X***, no son distintos

$$X' = X,$$

que el punto ***X***, punto donde es reflejado el rayo de luz, es único y se localiza en la intersección de las líneas ***EE'*** y ***AB'*** tal y como se consideró en un principio.

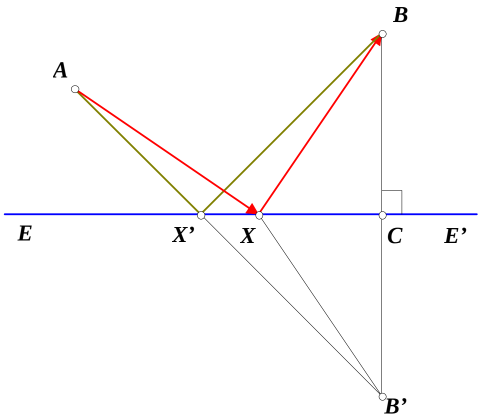


Figura 4

Ahora observemos como la incorporación de un resultado que tradicionalmente se demuestra en los cursos de geometría analítica nos permite continuar con nuestro análisis.

Teorema . La ecuación de la recta tangente a la parábola $\boldsymbol{y^2 = 4px}$ en el punto $\boldsymbol{P = (x_1, y_1)}$ es[4]: $y_1 y = 2p\ (x + x_1)$.

Luego, nombrando como "**t**" a la recta tangente a la parábola $\boldsymbol{y^2 = 4px}$, en algún punto, $\boldsymbol{P = (x_1, y_1)}$; como **h** a la recta que pasa por $\boldsymbol{P}$ y que es paralela al eje de simetría de la parábola (*Figura* 5).

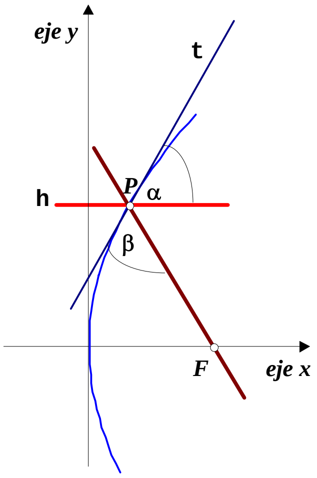


Figura 5

Si se designa como $\boldsymbol{m_t}$, $\boldsymbol{m_h}$ y $\boldsymbol{m_{FP}}$, a las pendientes de la recta tangente a la parábola en el punto $\boldsymbol{P}$, de la recta paralela al *eje x* que pasa por $\boldsymbol{P}$ y de la recta que pasa por el foco y el punto $\boldsymbol{P}$, respectivamente, se tiene que:

$m_h = 0$	Puesto que la recta **h** es horizontal.
$m_t = \dfrac{y_1}{2x_1} = \dfrac{2p}{y_1}$	Esta igualdad es el resultado inmediato de calcular la pendiente en el teorema anterior y despejar $\dfrac{y_1}{2x_1}$ en la igualdad $y_1^2 = 4px_1$
$m_{FP} = \dfrac{y_1 - 0}{x_1 - p} = \dfrac{y_1}{x_1 - p}$	Puesto que $\boldsymbol{F = (p, 0)}$ y $\boldsymbol{P = (x_1, y_1)}$, basta determinar la razón entre los desplazamientos vertical y horizontal para determinar la pendiente de la recta $\boldsymbol{FP}$.

Con estos valores y aplicando la fórmula para calcular el ángulo entre dos rectas, se tiene que:

$$\tan\alpha = \frac{m_t - m_h}{1 + m_h m_t} = \frac{\dfrac{2p}{y_1} - 0}{1 + 0\left(\dfrac{2p}{y_1}\right)} = \frac{2p}{y_1}$$

---

[4] Recuérdese que la ecuación de una parábola con *vértice* en el origen y eje el *eje x*, es $\boldsymbol{y^2 = 4px}$, en donde el *foco* es el punto **(*p*, 0)** y la ecuación de la directriz es $\boldsymbol{x = -p}$. Si $\boldsymbol{p > 0}$, la parábola se abre hacia la derecha; si $\boldsymbol{p < 0}$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Por otro lado:

$$\tan\beta = \frac{m_{FP} - m_t}{1 + m_t m_{FP}} = \frac{\dfrac{y_1}{x_1 - p} - \dfrac{2p}{y_1}}{1 + \left(\dfrac{2p}{y_1}\right)\left(\dfrac{y_1}{x_1 - p}\right)} = \frac{y_1^2 - 2px_1 + 2p^2}{x_1 y_1 - p y_1 + 2p y_1}$$

pero como $y_1^2 = 4px_1$

$$\tan\beta = \frac{4px_1 - 2px_1 + 2p^2}{x_1 y_1 - p y_1 + 2p y_1}$$

$$= \frac{2px_1 + 2p^2}{x_1 y_1 + p y_1}$$

$$= \frac{2p(x_1 + p)}{y_1(x_1 + p)}$$

$$= \frac{2p}{y_1}$$

Luego, *tan* α = *tan* β y, dado que todos los ángulos son agudos, se tiene finalmente que $\alpha = \beta$.

Por tanto, y en virtud del principio de la reflexión (ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión), un rayo de luz (o de cualquier otro tipo de onda) que emerja del foco ***F*** y que se refleje en un punto de la parábola (cuya dirección coincide con la de la tangente) partirá con una dirección paralela al eje de simetría de la parábola y recíprocamente, una onda que sea paralela al eje de simetría de la parábola que se vea reflejada en un punto de ella incidirá en el foco.

Comentarios y reflexiones finales

Aunque la idea de este trabajo nació para complementar el curso de geometría analítica en el primer año de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Querétaro, ha servido fundamentalmente para apoyar los cursos para profesores de nivel medio superior y superior (la mayoría de ellos con formación no matemática) en la misma Universidad. La respuesta a estos materiales ha sido, en general, positiva, actitud que se observó durante su presentación en el RELME 15. Parece ser que la característica que más gusta de este trabajo es el hecho de que eslabona y unifica temas tanto de matemáticas (como la geometría euclidiana y la analítica, en este caso) como de otras ramas (la física) sobre un problema concreto, dando una sensación de armonía en el estudio y aprendizaje de las ciencias.

Referencias bibliográficas

Katz, Victor. (1999). *A history of mathematics. An introduction.* USA: Addison-Wesley.
Lehmann, Charles. (1986). *Geometría Analítica.* México, D.F.: Editorial Limusa.

Epistemología e Historia de la Matemática

Nivel Superior

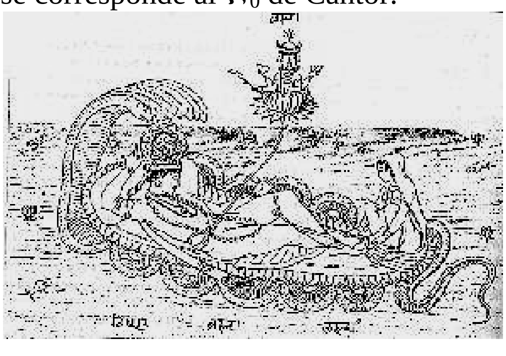
La noción de infinito a través de la historia

Cecilia R. Crespo Crespo
Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires, Argentina
ccrespo@sinectis.com.ar

Resumen
El infinito siempre ha ejercido una extraña atracción y admiración entre los matemáticos, pero también en el hombre en general. El infinito ha planteado uno de los más serios problemas filosóficos. Desde épocas remotas se lo unió a preguntas como: *¿Qué es?, ¿Existe realmente o no?, ¿Cómo trabajar este concepto?* Esta idea apareció en las palabras de muchos poetas y pensadores a través del tiempo, mezclándose con los temas más diversos. David Hilbert, uno de los matemáticos más importantes del siglo XX, decía de él que se trataba de una idea que había excitado profundamente la imaginación del hombre de todas las épocas. Cuando el hombre aprendió a contar en abstracto y a agrupar todo tipo de elementos también aprendió a valorar, evaluar y medir diversas magnitudes, a concebir y alcanzar números cada vez mayores. Pero esto sucedió mucho antes de hallarse en posición de dominar la idea de infinito.
En este trabajo, recorreremos brevemente las ideas que sobre el infinito ha tenido el hombre en Oriente y en Occidente a través de la historia, analizando cómo surgieron y se desarrollaron hasta llegar a las nociones que hoy tenemos sobre el mismo.

Los sabios indios y el infinito

En la India en el primer milenio antes de nuestra era, los sabios eran los pensadores dedicados a la reflexión y al estudio de problemas de diversas áreas: místicas, metafísicas, religiosas y científicas. Los sabios indios del movimiento religioso *jaina*, tras la disminución de los sacrificios védicos, se familiarizaron con las especulaciones numéricas puestas en juego por medio de grandes números, calificando a los números compuestos por ochenta o incluso cien cifras como pequeños. Para ellos, por ejemplo, la totalidad de los seres humanos de la creación son 2^{96}, definían distancias como la recorrida por un dios en seis meses si éste cubre una distancia de 100.000 yojanna (aproximadamente un 10 km) en cada parpadeo de sus ojos, o bien el tiempo que tardaría en vaciarse una vasija cúbica de un yojanna de lado llena con lana de corderos recién nacidos si se quita una hebra de lana cada cien años. Al intentar situar los límites cada vez más lejos las cantidades, aparecieron conceptos como lo "imposible de contar", lo "innumerable", "el número imposible de concebir" y finalmente, el infinito. Para esta doctrina el universo es indestructible porque es infinito tanto en tiempo como en espacio.
Reconocen cinco tipos de infinitos: infinito en un sentido, en dos sentidos, en volumen, en todas partes y perpetuamente infinito. Los jainas fueron los primeros en desechar la idea de que todos los infinitos eran iguales, aunque con distinta concepción que nosotros. La idea de igualdad era aún aceptada en Occidente hasta los trabajos de George Cantor a fines del siglo XIX. Para ellos el número máximo numerable se corresponde al $\aleph_0$ de Cantor.



Las especulaciones aritméticas permitieron a este pueblo descubrir de manera natural el cero en su función posicional, pero también con toda la connotación abstracta que lleva consigo este concepto. Mil años antes que en occidente, los indios reconocían al cero y al infinito como conceptos inversos. Para ellos, dividir por cero equivalía a infinito. Definieron al infinito como la cantidad que no sufre modificación alguna si se le

suman o restan números finitos.
La palabra sánscrita cuyo significado es infinito es *ananta*. Había sido empleada anteriormente para designar diez millones, y también curiosamente, con anterioridad para denominar al cero. Esta es una clara muestra de la relación existente entre dos conceptos tan distintos. En la mitología hindú designa una gigantesca serpiente que simboliza la eternidad y la inmensidad del espacio. Ananta, el señor de los infiernos, es representado como una serpiente enroscada sobre sí misma en una especie de "8" acostado o en la repetición de este símbolo, sobre la que muchas veces descansa Vishnú.
En 628 d.c., el matemático y astrónomo indio Brahmagupta habla del infinito matemático, al que llama *khachheda*, que define como la "cantidad cuyo denominador es cero".
Para Ganesha, en 1558, "*el khachheda es una cantidad indefinida, ilimitada e infinita, puesto que es imposible saber cuán grande es. No puede ser modificada ni por la suma ni por la resta de cantidades limitadas, puesto que en la operación preliminar de reducción de todas las fracciones a común denominador, que debe efectuarse previamente para poder realizar la suma o la diferencia, el numerador y el denominador de la cantidad finita se anulan simultáneamente".*
Cabe destacar que desde la matemática, infinito e indefinido representaban conceptos distintos: Indefinido significa vago, impreciso. El error cometido por los indios se basa claramente en la confusión de estos conceptos. Sin embargo, no puede decirse que desluzcan los descubrimientos que debemos a este pueblo.

Los griegos y el infinito
Sin lugar a dudas, la influencia aristotélica en Occidente dejó su sello en la forma de pensar a través de los siglos.
Con anterioridad a Aristóteles, en época de Pitágoras surge en Grecia la concepción de infinito como algo a lo que no se puede asignar ningún tamaño.
También en esta época, el infinito sufre una de las primeras crisis. La paradoja de Zenón fue enunciada hace veinticinco siglos por Zenón de Elea, un discípulo de Parménides. Aparentemente, una de sus intenciones era probar la inconsistencia de las ideas pitagóricas respecto del número. Se ocupó de tres problemas: lo infinitesimal, lo infinito y la continuidad, los tres tratados a partir del movimiento y las contradicciones a que su análisis conducía.
Una de las versiones de esta paradoja es la siguiente:

> *Aquiles y la tortuga deciden jugar una carrera. Aquiles, gran corredor da a la tortuga una ventaja: le permite que recorra la mitad del trayecto antes de que él parta. Luego, Aquiles corre tras la tortuga. Cuando llega a la posición en que ésta se encontraba, la tortuga ya ha recorrido la mitad del tramo que le faltaba. Aquiles no se detiene, sigue corriendo hasta esa posición, pero nuevamente la tortuga ha recorrido la mitad del trayecto restante. Y así se repite esta situación sucesivamente.*

Mediante el razonamiento de Zenón, la carrera no llega a terminar ni Aquiles logra alcanzar a la tortuga. Sin embargo, todos sabemos que en la práctica esto no es así. Entonces, ¿cuál es el engaño? Zenón explicó que el problema era que el movimiento no existe, sino que es un engaño de nuestros sentidos. Pero en realidad, el problema es que estamos analizando las distancias recorridas a través de este movimiento como una serie, mientras que olvidamos que el tiempo es continuo. Es el tratamiento discreto del movimiento el que ocasiona la paradoja.

La principal objeción de Aristóteles a Zenón, consistió en la distinción entre infinito por suma e infinito por división. Si se considera una unidad de longitud y se la suma infinitas veces, se obtiene una distancia ilimitada no recorrible en un tiempo finito. Pero si se prefigura lo ilimitado conforme a un procedimiento "en cierto modo opuesto", como el llevado a cabo por Zenón, dividiendo la unidad de longitud en infinitos intervalos, entonces la infinitud puede considerarse agotable en un intervalo limitado de tiempo.

Los matemáticos griegos a partir de Aristóteles, concibieron el infinito sólo en su esencia potencial. El infinito potencial es lo que siendo de hecho finito, crece y puede crecer sin límite alguno. El pensamiento de Aristóteles halló eco en la obra de Euclides: todas las figuras geométricas consideradas en los Elementos son finitas y limitadas. Este concepto de infinito se pone en evidencia claramente en la idea euclidiana de recta. La recta concebida por Aristóteles es subdivisible de manera potencialmente infinita y no atómica. Dicho en otros términos: siempre es posible "alargar" la recta hacia ambos lados y, dos puntos de la recta determinan un segmento que siempre es posible dividir en otros dos segmentos. Ambos procesos se pueden repetir hasta el infinito. Claramente encontramos en estas ideas la noción de infinito potencial, tanto en el caso del alargamiento, como en el del corte.

Volvamos un poco a las ideas de Aristóteles (384 aC-322 a.C.). Inicia su tratamiento del infinito en la *Física*, al afirmar:

> *..."El creer en la existencia del infinito proviene principalmente de cinco consideraciones: del tiempo, que de hecho es infinito, y de la divisibilidad de las magnitudes, porque los matemáticos emplean también el infinito. Por otra parte, sólo es infinito aquello de lo cual proviene el devenir, se dará la generación y la corrupción. Además dado que cada cantidad limitada siempre tiene un límite, es necesario que exista un límite particular si todo fin está limitado por algo diferente de sí mismo. Pero sin duda alguna, el motivo más importante, que representa una dificultad sentida por todo el mundo y no puede eliminarse del pensamiento, es que tanto el número como las magnitudes matemáticas y lo que está más allá del cielo, parecen ser infinitos"...*

Para Aristóteles, el infinito existe en la naturaleza: en el tiempo que no tiene principio ni fin y en las magnitudes que pueden dividirse y seguirse dividiendo. Para él se presenta en tres formas: por composición (dado un número natural, si le sumo la unidad, obtengo otro número más grande), por división (al cortar una magnitud) y por composición y división (en el caso del tiempo se combinan las formas anteriores).

El infinito de los pitagóricos, Aristóteles lo caracteriza de la siguiente manera:

> *..."Si el infinito no es ni una magnitud ni un número, sino que es en sí mismo una sustancia y no es atributo, será indivisible, porque lo divisible es magnitud y número; pero si esta es indivisible no es infinita [...]. No obstante, esto no es lo que dicen aquellos que sostienen la existencia del infinito, ni nosotros lo investigamos como tal, sino como lo que no alcanza su fin."...*

Y agrega:

> *..."¿Cómo es posible que el infinito sea una cosa en sí, si no lo son ni el número ni las magnitudes, de las que el infinito es una propiedad?"...*

Estas ideas de Aristóteles se orientan al concepto de límite en una primera aproximación del mismo.

Para los atomistas, como Demócrito, Epicuro y Lucrecio, el infinito en acto existe. *Demócrito sostiene que la materia de lo que es eterno consiste en un número infinito de*

pequeñas sustancias y supone que éstas están contenidas en otro espacio de dimensiones infinitas. El infinito, por lo tanto, se manifiesta en la extensión del universo y en el número de los átomos. Si el universo tuviera límite y se lanzara una piedra, o rebotaría o iría más allá. Los átomos por su parte, son cualitativamente finitos y cuantitativamente infinitos.
Proclo de Alejandría (siglo V) realizó comentarios detallados de los Elementos de Euclides. Con respecto al infinito, afirmó que, aún en acto, es muy útil en la matemática. Pero encuentra que el infinito en acto es contradictorio: considera un círculo y sus infinitos diámetros; cada uno divide al círculo en dos semicírculos, o sea que existe el doble de semicírculos que de diámetros, por lo tanto llega a obtener un infinito mayor que otro, lo cual considera una contradicción.

El infinito y Dios

Durante la Edad Media, el concepto de infinito es abordado con una nueva óptica: se lo relaciona con la religión, con la creación, con Dios, desde la teología. El halo de misterio que rodea al infinito en esta época se relaciona directamente con la divinidad, intentando relacionarlo con la doctrina cristiana. Por otra parte, se discutió acerca del infinito actual y el potencial. Un típico ejemplo de paradoja de esta época que aparece en textos medievales consiste en comparar la cantidad de puntos de dos circunferencias concéntricas. Por un lado, pueden ponerse en correspondencia biunívoca los puntos de ambas circunferencias, por otro, al tener mayor longitud la de mayor radio, los estudiosos medievales afirmaban que tenía más puntos.
Para Nicolás de la Cusa (1401-1464), *"la forma infinita es recibida únicamente de modo finito, de tal manera que cada criatura es, por así decir, una infinitud finita o un Dios creado, para ser del mejor modo posible: como si el Creador hubiese dicho: "Hágase". Pero como Dios que es la eternidad, no podía ser hecho, fue hecho lo que podía ser más semejante a Dios".*
Santo Tomás (siglo XIII) negó la existencia de conjuntos infinitos argumentando que si se pudiesen concebir simultáneamente todos los elementos de un supuesto conjunto infinito, podrían ser contados uno a uno, con lo que inevitablemente serían un número finito y se produciría una contradicción. Santo Tomás negaba la existencia del infinito en acto fuera de Dios, aduciendo para probar su tesis un argumento basado en la omnipotencia de Dios: Dios puede hacer lo que quiera, pero el hacer provoca la existencia de lo que es hecho, por lo cual no puede darse en todo y para todo sin límites aquello que produzca contradicciones.
El obispo inglés Robert Grosseteste, en el mismo siglo, afirma que el único que puede manejar el infinito es Dios, pues para Él los infinitos son finitos.
Por su parte, Gregorio de Rimini, en el siglo XIV, se apoya en Dios para demostrar la existencia del infinito. El infinito en acto existe pues es pensable, por lo que Dios tiene que haberlo pensado y si lo pensó ya es acto. Afirma que no se puede hablar de todo y parte en el caso del infinito, pues la parte de un infinito puede ser infinita y no tiene sentido comparar infinitos.

El símbolo del infinito

El inglés John Wallis (1616-1703) fue el primer matemático que utilizó en este contexto a la lemniscata ∞ como símbolo para representar el infinito en 1655.
Este símbolo, sin embargo, se encuentra previamente en numerosas representaciones simbólicas a lo largo de la historia de la humanidad, con significados relacionados con la

unión eterna o la dicha infinita tanto en oriente como en occidente. Por ejemplo, para los hindúes, el infinito era custodiado por una inmensa serpiente enroscada sobre sí misma en una especie de ocho acostado: la serpiente del infinito y de la eternidad.
Este símbolo, además se encuentra en numerosas representaciones astrológicas, mágicas, místicas o adivinatorias, en talismanes antiguos y medievales, orientales y occidentales, como símbolo de sabiduría, unión eterna o dicha o poder infinito.
Un ejemplo es la carta de Tarot El Mago. En sus diferentes versiones, muchas de ellas del siglo XVI, aparece este símbolo sobre la cabeza de este personaje, en forma de sombrero o directamente como símbolo de su poder infinito para manejar los elementos.
En la Edad Media, se utilizaron tres eses para simbolizar lo que se relaciona con alquimia, la abundancia de lluvias y de riqueza.
También los asirios, simbolizaron con una S la serpiente de la vida eterna.
Leonardo Da Vinci utilizó ornamentos en forma de 8 y S entrelazados unos con otros en una sucesión sin fin, como símbolo de lo acuático, de la ondulación perpetua. Igual simbolismo tiene para los celtas. Algunos autores relacionan también este símbolo con el ying y el yang.

Los pensadores occidentales y el infinito
El matemático Juan de Sevilla en su *Liber algarismi de practica aritmetrice* (1150), afirma: *..."Un número es un conjunto de unidades, como es infinito, pues al multiplicarlo crece indefinidamente, los indios, en su ingenio extremo, han acotado esta multiplicidad infinita dentro de ciertas reglas y determinadas restricciones, con el fin de que del infinito surja una ciencia bien definida, y que leyes severas de algún arte impidan la huida de estas cosas tan sutiles"...*
René Descartes fue uno de los primeros matemáticos europeos que plantearon al infinito como una realidad no deducible de otros conceptos.
Gauss dijo en 1831: *"Protesto contra la utilización de una cantidad infinita como si fuera una entidad real; en las matemáticas esto está prohibido. El infinito no es más que un modo de hablar, en el que se mencionan en el sentido propio, aquellos límites a los que ciertas razones se pueden aproximar tanto como se desee, mientras que a otras se les permite crecer sin límite."* Los que se ocuparon en esta época del infinito actual, tuvieron que oponerse a la autoridad de Gauss. Sin embargo, este es el uso que se le da al infinito en los cursos universitarios de análisis matemático.
El problema de infinito empezó a presentarse con mayor frecuencia cuando el cálculo comenzó a desarrollarse, por ejemplo a través de las series infinitas.
Galileo ante el infinito y las paradojas relacionadas a él, afirmó que el infinito se comporta en forma diferente que cualquier otro concepto, y que lo mejor era evitarlo. Fue él quien enunció la existencia de una correspondencia biunívoca entre los números naturales y sus cuadrados y deduce de allí que el conjunto de los números naturales es equiparable (coordinable, para nosotros), a un subconjunto propio suyo.
En Paradojas del infinito, obra póstuma de Bolzano publicada en 1851, encontramos una clara comprensión del concepto de coordinabilidad. *..."Ya en los ejemplos del infinito considerados hasta ahora, no se nos podía escapar que no todos los conjuntos infinitos se han de considerar con respecto a su multiplicidad iguales uno a otro como una parte (o recíprocamente él mismo está contenido en el otro como subconjunto propio)."... "Afirmo que entre dos conjuntos que sean ambos infinitos se puede establecer una correspondencia tal que por una parte sea posible unir un objeto de un conjunto con otro del segundo para*

formar un par de manera que ningún objeto de ambos conjuntos deje de formar parte de algún par y tampoco forme parte de dos o más pares; y por otra parte es también posible que uno de estos conjuntos esté contenido en el otro como un subconjunto propio, de forma que las multiplicidades de estos representan, cuando consideramos todos los objetos de los mismos como iguales, es decir como unidades, tengan las más diversas relaciones unas con otras"...

Es imposible hablar del concepto de infinito sin mencionar al matemático alemán de origen ruso George Cantor. A él debemos el descubrimiento de los números transfinitos y las nociones de potencia numerable y del continuo, sentando las bases de la teoría de conjuntos. Cantor definió formalmente conjunto infinito como aquel en el que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre el mismo conjunto y una parte propia de él, idea ya perfilada por Bolzano. Probó que un espacio de dimensión n tiene exactamente el mismo número de puntos que un espacio de dimensión 1 y escribió al respecto: *"Lo veo, pero no lo creo".*

Las ideas de Cantor no fueron aceptadas por la mayoría de los miembros de la comunidad matemática de su época. Algunos lo expresaron con mayor contundencia. Paul du Bois-Reymond afirmó: *"Resulta incompatible con el sentido común".*

Por su parte, los intuicionistas, no aceptaron en absoluto estas ideas. Henry Poincaré, en 1909, no dudó en afirmar que *"no existe ningún infinito actual"* y que con el infinito se designa sólo la posibilidad de crear permanentemente nuevos objetos, tan numerosos o más de lo que son los objetos ya creados.

Finalmente...

El terreno del infinito, no parece ciertamente regido por el sentido común. Contradice ideas "evidentes" e "intuitivas", como el axioma griego*: "El todo es mayor que las partes"*. Su enseñanza presenta, sin lugar a dudas un reto a los docentes. El estudio de la evolución histórica de este concepto puede, sin lugar a dudas, dar luz de cómo nace y se desarrolla, cómo se plantean y construyen los procedimientos relacionados y qué limitaciones conceptuales aparecen en el aprendizaje de la noción de infinito.

Referencias bibliográfícas

Bell, E. T. (1996). *Historia de las Matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, Karl (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid, España: Alianza Universidad.

Crespo Crespo, Cecilia. (2001). *Acerca de la comprensión del concepto de continuidad*. En Boletín de SOAREM nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.

Gheverghese Joseph, George (1996). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid, España: Pirámide.

Ifrah, Georges (1997). *Historia universal de las cifras.* Madrid, España: Espasa Calpe.

Kline, Morris (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Vol I, II y III.* Madrid, España: Alianza Universidad.

Vita, Vicenzo (1992). *El infinito matemático en Aristóteles y en su tiempo.* En *Mathesis* Vol VIII n° 2. México: Universidad Autónoma de México.

Wussing, Hans (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid, España: Siglo XXI.

Zellini, Paolo (1991). *Breve historia del infinito.* Madrid, España: Ediciones Siruela.

Pensamiento Algebraico en Babilonia

Egbert Agard
Universidad de Panamá Panamá
eagard@sinfo.net

Resumen
La Historia de la Matemática es una de las principales fuentes que nos permiten analizar, en su justa dimensión, los conocimientos matemáticos de una de las primeras civilizaciones de la antigüedad: la Civilización Babilónica. Los estudiosos de la disciplina antes mencionada relatan que, aproximadamente dos milenios antes de Cristo, la Antigua Babilonia fue la sede de la creación del álgebra; pero no fue sino a mediados del siglo XIX que se exhuman alrededor de 500,000 tablillas de arcilla con escritura cuneiforme, entre las cuales, alrededor de 300 son de contenido matemático.
Durante los años 1929 y 1930, estos contenidos fueron descifrados por O.Neugebauer, cuyo trabajo constituyó la semilla para una serie de futuras investigaciones.
Por cincuenta años, se pensó que el método y conceptualización del álgebra de la Antigua Babilonia era aritmético; sin embargo, durante las dos últimas décadas del siglo pasado, las investigaciones nos indican que estaba basada en la *geometría intuitiva*, específicamente en el tema de áreas; tal giro en la interpretación de la resolución de las ecuaciones cuadráticas en la Antigua Babilonia se debe a los estudios realizados por Høyrup a mediados de la década de los ochenta, en el siglo pasado.

Las investigaciones sobre el uso de la historia en la enseñanza de la matemática, surge como una de las respuestas a las dificultades de nuestros estudiantes sobre el tópico de las ecuaciones cuadráticas. El estudio se inicia con una síntesis sobre el pensamiento algebraico. Posteriormente, se estudia, a través de un ejemplo, un caso de pensamiento algebraico en Babilonia.

Uno de los elementos que contribuyen al desarrollo de un país es el fortalecimiento y mejoramiento de su Sistema Educativo; esto ha motivado que un número, cada vez más creciente, de estudiantes ingresan en las aulas con el objetivo de finalizar sus estudios tanto en la Educación General Básica como la Educación Media. El fortalecimiento antes mencionado consiste en una completa revisión del currículo escolar. El avance de la tecnología en el sector educación durante la segunda mitad del siglo veinte, motivó a las autoridades, que toman las decisiones en lo concerniente a las reformas curriculares, hicieran más énfasis en el currículo de álgebra, que en cualquiera otra parte de la matemática. Lo cierto es, que el álgebra escolar es la puerta de entrada al estudio de múltiples carreras universitarias y, el freno de muchos para no continuar sus estudios. Es quizás por esta razón que para un número plural de la Básica y la Media la introducción de este tema constituye un problema para los educadores.

¿Qué es álgebra ? no pretendemos proporcionar una definición del término, sino indicar que en el currículo panameño, el álgebra escolar, ha sido asociado con símbolos literales y las operaciones realizadas con éstos símbolos. El álgebra escolar,“ ha sido visualizado como un curso en el cuál el estudiante es introducido a las principales maneras en que las expresiones literales son utilizadas para representar números y relaciones numéricas”
(Kieran, 1996). Las actividades indicadas en nuestro currículo son: la simplificación de las expresiones algebraicas y las ecuaciones; en este artículo, nos dedicaremos solamente al estudio de la ecuación cuadrática.

Durante las últimas décadas del siglo pasado y el amanecer del nuevo siglo, el álgebra escolar tiene una nueva visión puesto que se incorporan nuevas perspectivas que anteriormente no fueron considerados; esta interpretación más amplia es lo que se conoce como pensamiento algebraico. Se han formalizado varias caracterizaciones en torno a ese término: (Biggs & Collis, 1982); (Lins, 1992); (Kieran, 1996); y (Boero, 2001) son algunos de los ejemplos; además, numerosos artículos y libros se han constituido en órganos de difusión de esas ideas; además,“ este flujo de ideas ejercen un fuerte impacto sobre el desarrollo de la Matemática Educativa en el aula de clases” (Lins & Gimenez, 1997). La introducción del computador como un elemento de apoyo en la enseñanza, ha permitido el desarrollo, en forma más amplia, de la representación que generaliza la forma clásica de simbolismo del álgebra escolar; bajo esa perspectiva, definimos el pensamiento algebraico como “ el uso de cualesquiera de las distintas representaciones con el objeto de manejar situaciones cuantitativas de manera clara” (Kieran, 1996).

La matemática babilónica surge por una necesidad de seleccionar una serie de problemas sociales de sus habitantes; a través de sus tablillas de arcilla de arcilla, el órgano de difusión de su matemática, lograron ilustrar mediante su escritura cuneiforme el grado de profundidad y solución de distintos tipos de problemas. Problemas de geometría plana, geometría sólida cálculo de intereses sobre un préstamo son algunos ejemplos; otros, a pesar de estar relacionados con la vida diaria, no tiene relación con necesidades prácticas. (Radford, 2001).

Los problemas, cuyos tipos están arriba mencionados, están resueltos en el marco de las razones y proporciones; ésta forma de pensamiento aritmético en Babilonia, constituyó la génesis del pensamiento algebraico; uno de los métodos que mayor influencia ejerció en el surgimiento de éste pensamiento fue el método de la falsa posición. Ésta relación fue establecida inicialmente por Threau-Dangin a través de su artículo titulado; **La Méthode de Fausse Position et** L´ **origine de l´algebre** (1938).

Hace aproximadamente quince años, surgió una interpretación que es completamente nueva y diferente en torno a la interpretación de los escritos en las tablillas babilónicas.
¿Quién ha sido el precursor de ésta nueva interpretación del álgebra babilónica? ¿En qué consiste esta nueva interpretación del álgebra babilónica? J. Høyrup, un matemático completamente entregado a la historiografía, ha consagrado los últimos veinte años del siglo pasado a hacer un análisis filológico de las tablillas babilónicas dedicadas a la solución de la ecuación cuadrática; como resultado de ese nuevo estudio, produjo un cambio al punto de vista tradicional de la matemática de los babilonios, puesto que la lectura tradicional de los textos nos proporciona un marco matemático homomorfo pero no aporta un imagen claro sobre los tópicos que incluyen área y longitud. La nueva interpretación proporciona un método denominado " **geometría intuitiva babilónica "** o **"geometría de cortar y pegar".** Con el propósito de ilustrar este método, propongo discutir el problema n° 1 de la tablilla que actualmente reposa en el British Museum y clasificada como BM 13901. El enunciado del problema es el siguiente:

La superficie y el lado – cuadrado I ha acumulado ¾.

El enunciado del problema es sumamente conciso; pues consiste en determinar la longitud del lado de un cuadrado si la suma de su área y un lado es ¾ . El método utilizado para la solución del problema no está explicado en la tablilla; sólo existe una lista de instrucciones que nos permita obtener la solución. A continuación, presento una traducción de esas instrucciones:

Tú pondrás 1, la unidad.
Tú divides la unidad en dos partes iguales: ½
y ½ extenderá un extremo del rectángulo,
añades ¼ a ¾ : 1. Es un cuadrado de lado 1.
Restarás ½ que añadiste a 1.
El lado cuadrado tiene longitud ½. (Høyrup¸1986).

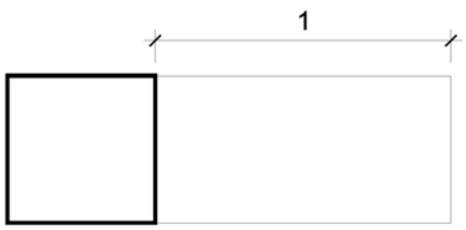


fig. 1

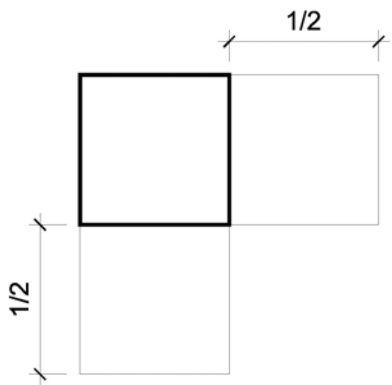


fig. 2

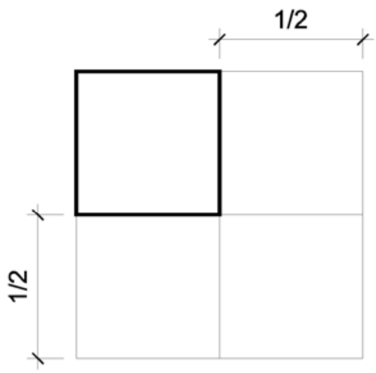


fig. 3

Conclusión

a) De los estudios de Høyrup se concluye que existe, desde la antigüedad, un estrecho vínculo entre el pensamiento y el geométrico pensamiento algebraico.
b) A través del ejemplo presentado (figs. 1-3), se muestra la influencia del pensamiento proporcional y la geometría de cortar y pegar.
c) Una reflexión sobre los trabajos de Radford en esa dirección nos indican que es posible que en la tablilla BM13901, haya información que aún no ha sido descifrado.

Referencias bibliográficas

Bashmakova, I., G. Smirnova (2000): "The Beginnings and Evolution of Algebra". Dolciani Mathematical Expositions .No 2 Mathematical Association of America.

Barahona, M. (1992): *Una Historia Dramática para la Resolución de las Ecuaciones de Tercer y Cuarto Grado.* Librería Francesa, San José, C.R.

Høyrup, J. (1986): "Al-Khwarizmi, Ibn-Turk, and the Liber Mensuration:o The Origins of Islamic Algebra". *Erden 2* (Ankara), 445-484.

Høyrup, J. (1990a): "Dynamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7-148 *Historia Mathematica*, vol 17, 201-222.

Høyrup, J. (1990b): "*Algebra and Naïve Geometry. An Introduction of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Though Altorientalischeschungen*, vol.17,
27-69, 262-354.

Kouteynikoff, O. (1997). Répers IREM n° 28, Topiques éditions, France.

Neugebauer,O.- A.Sachs (1986). *Mathematical Cuneiform Texts.* American Oriental Society. New Haven, Connecticut.

Radford, L.y G.Guérette (2000). "Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach Using History to teach Mathematics: An International Perspective. *Mathematical Association of America*, Notes # 51.

Radford, L. (2001). "The Historical Origins of Algebraic Thinking" en *Perspectives o School Algebra.* R. Sutherland, A. Bell, T. Rojano y R. Lins. (eds.)

Una epistemología del concepto de periodicidad a través de la actividad humana

Gabriela BuendíaAbalos, Francisco Cordero Osorio
CINVESTAV. México
buendiag@hotmail.com fcordero@mail.cinvestav.mx

Resumen
En este reporte se presentan los avances en la investigación que se realiza para establecer una epistemología de la periodicidad. Esta epistemología tiene la característica de ser a través de la actividad humana, por lo que pueden tomarse en cuenta elementos, como el comportamiento periódico, que no forman parte de ninguna definición matemática y que, sin embargo, están presente en la actividad que se realiza en el salón de clases. Sostenemos que el conocimiento en el aula se construye de manera discursiva, por lo que se hace énfasis en las herramientas que permiten poner en juego argumentos en dicha actividad.

Uno de los objetivos de la Matemática Educativa es formular explicaciones acerca de la construcción del conocimiento matemático. Para ello han surgido diversos esquemas explicativos con una inclinación cognitiva principalmente, en los que la tendencia es analizar el estatus de los conceptos matemáticos entre los estudiantes.

En la disciplina se ha acuñado el término reificacionista[1] para designar a aquellas aproximaciones que presentan una dialéctica proceso-objeto y giran alrededor de la construcción del objeto matemático. El foco de interés de sus respectivos marcos teóricos está en la actividad matemática que desarrolla el individuo y en la cognición individual respecto a la adquisición de ese objeto. Se han formulado, entonces, epistemologías modelizadas por esta actividad matemática.

Sin embargo, diversos autores (Confrey y Costa,1996; Wertsch,1993; Cordero, 2001; Cantoral, 2000) han señalado la necesidad e importancia de ampliar dichos esquemas explicativos ya que se está minimizando el papel de la interacción humana en la práctica matemática, se está separando al pensamiento matemático de sus orígenes en contextos sociales y se obscurece el papel que juega el desarrollo y uso de las herramientas para construir el objeto matemático.

De esta manera, este proyecto se encuentra dentro de la línea de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav en la cual se considera necesario "dotar a la investigación de una aproximación sistemática que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza." (Cantoral, 2000). A esta aproximación se le llama socioepistemológica.

> *Este acercamiento permitirá el estudio de nociones que de otra manera, aunque estén presentes, no se hubiera podido realizar por no ser parte del foco de atención. Tal es el caso de la noción de comportamiento. Es por ello que este proyecto forma parte de un estudio general del comportamiento tendencial de las funciones (Cordero, 2001)*

---

[1] En la descripción del pensamiento matemático avanzado es central la discusión entre el "proceso" y el "objeto" al aprender matemáticas. Ver, por ejemplo, Confrey y Costa (1996) o el trabajo desarrollado por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community.)

Esta noción sui generis *tiene un carácter funcional del conocimiento matemático, y su construcción está en relación con la modelización y el uso de las herramientas matemáticas. Esto permite formular categorías del conocimiento matemático que a priori no están en la estructura matemática y su importancia radica no en establecer una definición matemática, sino más bien en establecer o identificar todas las relaciones en el marco de referencia del contenido matemático.*

Problemática del concepto de periodicidad

La visión socioepistemológica con la cual estudiamos esta problemática nos advierte acerca de la importancia de no centrarnos únicamente en la definición de la propiedad periódica sino en la existencia de más elementos alrededor de la misma. Por ello, el comportamiento periódico parece estar englobando todo nuestro estudio y es el que nos ha permitido darnos cuenta de diversos elementos que están presentes alrededor del concepto de periodicidad, incluyendo a la definición misma.

Existe poca literatura en Matemática Educativa relacionada con el tema de periodicidad. Sin embargo, hemos tomado como fuente un estudio acerca del entendimiento del concepto de periodicidad en alumnos de nivel medio (Shama,1998) donde se muestra evidencia acerca de la problemática en la identificación del periodo y de que los estudiantes entienden a la periodicidad como un proceso y no necesariamente como un objeto, lo cual los lleva a cometer errores en la identificación de fenómenos no periódicos como periódicos.

Shama agrega que los alumnos que dudan hacer la identificación como periódica de una función por el solo hecho de que el proceso de dibujar su gráfica fue periódico es porque se percatan de que los valores de la gráfica así obtenidos no obedecen necesariamente un patrón periódico. Parece que la autora nos está reportando la existencia, entre los alumnos, de la noción comportamiento periódico.

Otra fuente de información acerca de la problemática alrededor del concepto, la constituye el artículo de (Cordero y Martínez, 2000). Los autores señalan que la noción de comportamiento periódico parece estar de nuevo presente en los alumnos, pues, por ejemplo, al intentar reconocer las gráficas de las funciones como periódicas, sólo se fijan en el comportamiento de la gráfica.
También reportan que aunque el alumno puede nombrar la definición[2] de periodicidad no logra identificar correctamente la generalidad de la misma en un contexto distinto al continuo, o bien, identifica como periódicas, funciones que sólo presentan comportamientos periódicos.

---

[2] Como definición de periodicidad, estaremos utilizando la que la propia Shama propone en su documento: “Una función real no constante f es una función periódica en su dominio si existe $t>0$ tal que para cada d en el dominio, $d \pm t$ está también en el dominio y $f(d) = f(d\pm t)$. t es la longitud de un periodo de la función. Sea I una intersección no vacía del dominio con un segmento semiabierto de longitud t, entonces el conjunto $\{ (x, f(x)) / x \in I\}$ es un periodo de la función.
Una serie no constante $\{a_n\}$ es una serie periódica se existe $k > 0$ tal que para que todo natural n, $a_n = a_{n+k}$. k es la longitud de un periodo de la serie. $\{a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+k}\}$ es un periodo de la serie.” (p. 256)

Por otra parte, (Callahan et al.,1992) mencionan que al buscar describir y entender los procesos naturales, buscamos patrones y gracias a ellos podemos predecir lo que va a pasar en el futuro. Dichos autores afirman que el interés de la ciencia está alrededor de ejemplos de comportamientos periódicos o casi periódicos. De esta manera, la definición se deja de lado para dar paso al comportamiento.

Vemos, entonces que en primera instancia, existe una necesidad de describir un movimiento que se lleva a cabo en el tiempo con la finalidad de manipularlo, lo cual permitiría predecir etapas posteriores en ese movimiento e informar también acerca de etapas previas al momento del análisis. Para ello, un primero modelo predictivo hace referencia a la analiticidad de la función. A través del análisis local, en un punto, de la gráfica del fenómeno podemos obtener diversas características de la misma y entonces, podremos predecir.

Incluso, si se presenta la gráfica de una función periódica, pueden predecirse características particulares extraídas del análisis en un instante de tiempo. Pero, además, dichas características se repiten en ciertos intervalos regulares. Esto le daría a este tipo de funciones un status especial pues la propiedad está jugando un papel importante en la predicción del comportamiento. ¿Qué elementos de nuestra percepción deben cambiar para valorar un movimiento periódico?

(North, 2000) menciona que existen fenómenos que no pueden estudiarse por medio de una aproximación puntual como la anterior, pues hay sistemas que no son nada en un instante: necesitan de todo el periodo para manifestarse. Esto implica "abandonar el instante"; es más, es necesario mantener en nuestro sistema de referencia una dualidad instante-periodo porque para entender la naturaleza de un fenómeno periódico habrá que pasar continuamente del instante al periodo y viceversa. De esta manera podrá ser relevante que lo que sucede en un instante sucede en todo un periodo.

Para referirnos a esta idea de dualidad, utilizaremos el término "destemporalización", el cual refleja dos aspectos de los fenómenos periódicos: el abandono del instante y una visión global. Estas son implicaciones que surgen al analizar lo periódico , pero ¿cómo reconoce el alumno lo periódico?

La revisión de textos escolares indica que la propiedad periódica se introduce a partir de movimientos típicamente periódicos en condiciones idealizadas: el movimiento de un resorte, de un péndulo y de un cuerpo alrededor de una circunferencia. La peculiaridad que presentan es que los desplazamientos vuelven a pasar exactamente por la sucesión anterior de valores; esto es, presentan un "ir y venir" continuo.

En el salón de clases tenemos entonces los tres movimientos estudiados por medio del modelo puntual instantáneo con lo cual se puede reconocer[3] que es factible representarlos a través de una función senoidal. Esto implica que las características del fenómeno podrán

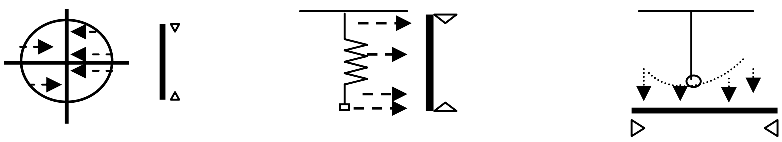
[3] Puede verse las construcciones que proponen varios autores (Kline, 2000; Callahan et al. 1992)acerca de la construcción de la función seno como modelo para el movimiento de un resorte.

ser reflejadas con cambios de argumento, de frecuencias y amplitudes en la función trigonométrica seno: $f(x) = A \, sen \, (Bx + C)$

Ahora tenemos ya elementos que nos permiten reconocer que algo es o no periódico y con ello determinar el tipo de análisis que podemos hacer. Los estudios sobre periodicidad hallados hasta ahora, (como (Shama, 1998) y (Cordero y Martinez, 2000))abordan aspectos de esta problemática.

Aún falta por conocer cómo el alumno se apropia de lo periódico. Esto resulta relevante porque la forma cómo el alumno hace suyo un concepto es la que va se va a hacer patente en el momento en el que se enfrente a argumentar, en la organización social del salón de clases, acerca del tema y participa así en la construcción social del conocimiento. (Candela, 1999). Esa es la actividad humana en la que la socioepistemología enfoca su atención

Para ello, proponemos enfocarnos en lo que tienen en común los tres movimientos. (Kline 2000) sugiere observar las proyecciones lineales de las diferentes posiciones de un cuerpo que se desplaza en una trayectoria circular. Este procedimiento puede generalizarse a los tres movimientos.



Al analizar esas proyecciones sobre el eje vemos cómo "las marcas" que van quedando se desplazan continuamente sobre él, de un límite al otro. A ese desplazamiento que se va dibujando sobre la recta, le llamaremos *desplazamiento lineal.*

Este desplazamiento se realiza de forma continua de un límite hasta otro, lo cual refleja la idea de regularidad cuya presencia habíamos notado ya anteriormente. El término lineal no se refiere exclusivamente a las proyecciones en el eje vertical, porque de hecho, podría hacerse el reflejo hacia el eje horizontal, como se hace en el péndulo. Si hacemos referencia a los ejes de coordenadas, el desplazamiento lineal empieza en el origen, pero no tiene que ser necesariamente así, pues no tiene que recorrer la misma distancia hacia arriba que hacia abajo (o derecha-izquierda en caso de que se hagan las proyecciones sobre el eje horizontal). Lo que caracteriza al desplazamiento lineal en movimientos periódicos es que se realiza entre dos límites fijos y su punto inicial coincide con su punto final.

Si nos preguntamos entonces cuándo se reconoce el periodo, pareciera que es a través de las proyecciones lineales después de que el cuerpo haya realizado todo el recorrido; es decir, a través del desplazamiento lineal . Y dado que este desplazamiento lineal no es un argumento puntual, entonces reflejará la existencia de un tiempo de análisis distinto al instante

Este "desplazamiento lineal" no es un sustituto de la definición porque nuestro objetivo no es redefinir todo movimiento periódico en términos de las proyecciones lineales, sino más bien, mostrar que este elemento puede ayudar a reconocer la periodicidad en la argumentación alrededor de dicho tema.

Por otra parte, los tres fenómenos que hemos descritos están modelizados a través de una ecuación diferencial autónoma, en la que por ser autónoma en el lado izquierdo de la ecuación no aparece la variable *t* de forma explícita.

La autonomía es una forma de pensar con relación en el sistema de referencia en el cual se encuentra uno ubicado: aunque no se vea al tiempo variar, lo que sucede en un instante es válido para todo tiempo. Así pues, la autonomía es también un elemento importante de la periodicidad.

De esta manera, al intentar delinear una socioepistemología de la periodicidad, hemos hallado que el desplazamiento lineal, y sus implicaciones, son un elemento importante de ella. Creemos que, dadas las características del mismo, puede ser un argumento en la estructura discursiva alrededor del concepto de periodicidad porque, además esta noción se encuentra más relacionada con el comportamiento periódico que con la definición misma lo cual la hace propia de la actividad humana, como hemos ya mencionado.

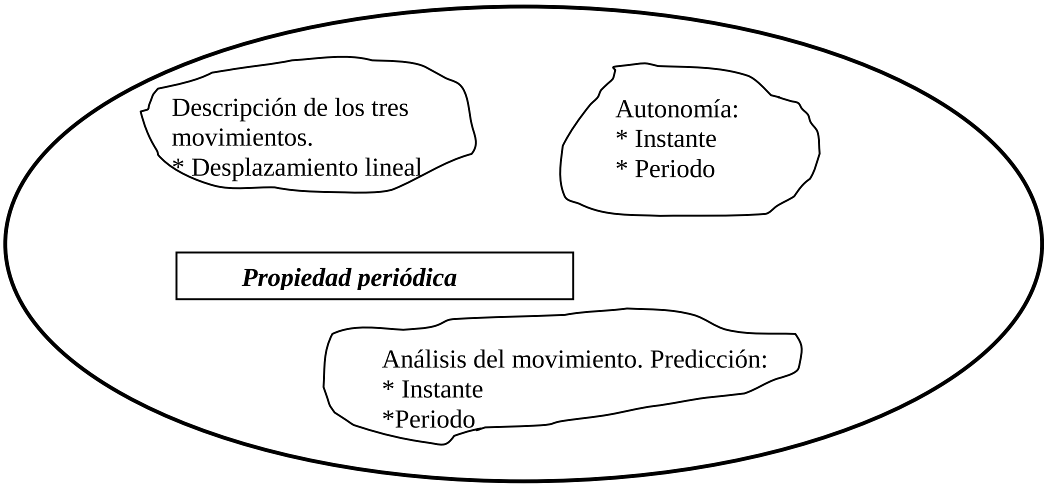
Vemos entonces cómo no estamos partiendo de la definición de periodicidad porque, aunque no se le está negando, no resulta ser un marco de referencia suficiente para pensar en la periodicidad. Es decir, existe un contenido matemático pero se está pretendiendo una reconstrucción de significados en términos de elementos propios de la actividad humana

Hemos elaborado un diagrama en el que se establece cómo el comportamiento periódico se encuentra englobando nuestro estudios pero existen también elementos nuevos; ello hace que el análisis sobre el concepto de periodicidad se enriquezca pues además de tomar en cuenta la definición de la misma, se están valorando elementos alrededor de la construcción de dicho concepto.

Comentarios finales

La socioepistemología propuesta como aproximación teórica pretende mostrar cómo alrededor de una definición matemática hay elementos que muestran las actividades necesarias en la construcción de dicha definición. Estas actividades son las que conforman nuestro foco de atención más allá de sólo la actividad matemática desarrollado por el individuo en un salón de clases.

El siguiente paso en esta investigación consiste en dar evidencia acerca de cómo estos elementos propuestos entran en juego en el salón de clases. Esto es, reconocerlos dentro de la estructura argumentativa del salón de clases. Para ello, se diseñarán secuencias a partir de los elementos socioepistemológicos hallados y se realizará le correspondiente puesta en escena.



Referencias bibliográficas

Callahan, J.; Cox, D.; Hoffman, K.; O'Shea, D.; Pollatsek, H.; Senecnal, L. (1992).Periodicidad. En *Calculus in context.* Mc Millan. (p. 413-453)

Candela, A. (1999) *Ciencia en el aula*. México: Paidós, Educador.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 13.* México: Grupo Editorial Iberoamérica (pp. 54-62)

Confrey, J. y Costa, S. (1996). A Critique of the Selection of "Mathematical objects" as Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(2),. 139-168.

Cordero, F (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.4(2),103-128

Cordero, F y Martinez, J. (2000). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. Artículo aceptado para su publicación en *Actas de la 14 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Panamá.

Kline, M. (2000) *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México, Fondo de Cultura Económica. Segunda reimpresión.

Shama, G.(1998) "Understanding Periodicity as a Process with a Gestalt Structure." En *Educational Studies in Mathematics* Vol. 35 (pp. 255-281)

Wertsch, J. (1993) *Voces de la Mente*. España: Visor Distribuciones, S.A

Vygotsky, L. (1981) The Instrumental Methods in Psychology. En *The Concept of Activity in Soviet Psychology* NY: M.E. Sharpe, Inc.Publisher.

Desarrollo y evolución del Cálculo Integral desde Euler hasta Lebesgue

Encarnación Rosado Zavala, Carlos Armando Cuevas Vallejo
Universidad Autónoma del Carmen. Ciudad del Carmen Campeche. México
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN. México
erosado@delfin.unacar.mx ccuevas@mail.cinvestav.mx

Resumen
La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas reúnen en su investigación a muchas ciencias y disciplinas. Una de las más importantes es la historia; en efecto el acudir a la historia cuando se planea un proyecto didáctico para la enseñanza de un concepto matemático tradicionalmente complejo, como es el caso de la *integral*, nos aporta una serie de beneficios entre los que podemos enumerar a los siguientes: El tomar conciencia por parte del profesor de la verdadera complejidad del tema a enseñar al ver los innumerables intentos por definir con precisión el concepto matemático, y que sólo la contribución de notables matemáticos durante cientos de años han logrado. El poder vislumbrar diversas aplicaciones del concepto matemático a partir de sus orígenes. Y algo de suma importancia para nuestro estudio que es el poder, a partir de su génesis aportar mediante el marco conceptual de una didáctica piagetiana, un planteamiento didáctico que tenga como fin la comprensión del concepto. Esta es precisamente la idea de este estudio, aportar un ensayo de los orígenes y desarrollo del cálculo integral, con la idea de rescatar los elementos más útiles bajo nuestro punto de vista para desarrollar un proyecto didáctico aplicado a su enseñanza. Este ensayo reúne la investigación desarrollada durante el período de Euler a Lebesgue, como tercera y última etapa, formando conjuntamente con una primera anterior, que comprende de 3500 a. C. hasta 1450 d. C. (Rosado, 2000), y, con una segunda etapa también anterior que comprende de 1500 a 1760 a.C. , el proyecto histórico; el cual nos servirá de fundamento para nuestra propuesta didáctica.

La forma dada por Euler al análisis

Podemos afirmar que Leonhard Euler (1707-1783), reestructuró el cálculo de Leibniz y lo convirtió en un cuerpo de conocimientos matemáticos organizado, la influencia de Euler sobre el análisis en general lo fue por medio de sus grandes tratados, dando forma y clarificación al análisis, forma que se conservó hasta bien entrado el siglo XIX.
Durante el período de Leibniz, de los primeros Bernoulli y de I´Hôpital, el cálculo consistía en una colección de métodos analíticos para resolver problemas sobre curvas. Euler refuerza esta transición al afirmar explícitamente que el análisis es una rama de la matemática que trabaja con expresiones analíticas y especialmente con *funciones*.
Bos, nos dice que Euler, en su obra *textos sobre el cálculo diferencial* (1755b) comienza con el cálculo de diferencias finitas, y a continuación introduce el cálculo diferencial como un cálculo de diferencias infinitamente pequeñas, concepción más afín con Leibniz que, con I´Hôpital.

> Los tres volúmenes: Textos sobre el *cálculo integral* (1768-1770a) viene a ser la culminación de libros de texto. Euler nos presenta una discusión casi completa de la integración de funciones en términos de las funciones algebraicas y las trascendentes elementales; [Bos 1984, 103-107].

Más interrogantes sobre las cuestiones de fundamentos

El primer postulado de I´Hôpital dice que *una cantidad podía incrementarse en un diferencial sin incrementarse nada en absoluto.* Las diferenciales de orden superior, deben considerarse como despreciables con respecto a las diferenciales ordinarias, y análogamente las diferenciales ordinarias tienen que despreciarse con respecto a las cantidades finitas. Se nos plantean tres interrogantes, veamos lo que nos dice Bos(1984), al respecto

FQ 1: ¿Existen cantidades infinitamente pequeñas?
Los que aplicaban el cálculo de Leibniz aceptaron que la respuesta es “sí”. Leibniz tenía sus dudas acerca de la existencia de cantidades infinitamente pequeñas, e intentó en consecuencia demostrar que utilizando las diferenciales como símbolos posiblemente sin significado, y aplicando las reglas del cálculo, se llegaría a resultados correctos.
FQ 2: ¿Se puede garantizar que es seguro el uso de cantidades infinitamente pequeñas en el cálculo?
A esta pregunta Leibniz no le encontró una respuesta satisfactoria.
FQ 3. ¿Existen las razones primeras o últimas?

Los límites y otros intentos de resolver los problemas de fundamentos

George Berkeley en su crítica a los fundamentos del cálculo, pregunta ¿Y, qué son estas Fluxiones? ¿Las velocidades de Incrementos evanescentes? ¿Y que son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas sin ser tampoco una simple nada. ¿No podríamos llamarlos los Fantasmas de las Cantidades desaparecidas?. Bos, nos dice, las críticas de Berkeley fueron sólo el inicio de un largo debate sobre los fundamentos del cálculo. La forma moderna del cálculo, asocia a la función f su derivada f', que es a su vez una función.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right).$$

La idea de la compensación de errores de Berkley fue utilizada para tratar de demostrar que el cálculo, lejos de proceder a ciegas, consigue compensar escrupulosamente errores iguales y de sentido opuesto y llegar así, a la verdad, a lo largo de un camino seguro y bien equilibrado.

> Los conceptos fundamentales de los dos cálculos: para Newton era el de *fluxión, la velocidad finita o rapidez de cambio de la variable con respecto al tiempo*, para Leibniz el diferencial, es decir, *la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos en la sucesión*…[Bos 1984, 123].

El análisis matemático y los progresos en su fundamentación de 1780-1880

La integral se suele interpretar como un área y se define como el valor límite de una sucesión de sumas definidas por particiones de un intervalo.
Una necesidad apremiante para el desarrollo del análisis matemático, fue el de los problemas relacionados con la *educación matemática*. El cálculo se enseñaba en un estilo de libro de texto a partir de la publicación del texto de I´Hòpital (1661-1704) escrito en (1696 a), manteniendo una estrecha relación entre el *cálculo en sí, y su enseñanza*.
Grattan Guinness, nos dice que, no es a Lagrange (1736-1813), ni a Laplace (1749-1827), ni a Prony que debemos la síntesis del análisis, sino que se debe en gran medida a *Augustín Louis Cauchy (1789-1857)*, su primer volumen, se subtituló “Análisis Algebraico”. Este volumen incluía las teorías de límites, de funciones continuas y de series aunque también otros temas. El cálculo quedaba reservado para su Résumé de 1823. Estos y otros textos escritos por Cauchy impusieron su propio estilo.
Los siguientes progresos importantes en Análisis matemático fueron debidos a Karl Weierstrass (1815-1897), con aportación especial, de sus alumnos en Berlín a los inicios de 1860. A esta escuela se debe, más que a la época de Cauchy, el análisis matemático en los

textos modernos o la fundamentación rigurosa del análisis matemático que se enseña en nuestros días.

> El giro a favor del cálculo de Liebniz se debió a un cambio de punto de vista entre los matemáticos irlandeses, especialmente con la "Analytical Society", de Cambridge, con tres estudiantes futuros importantes científicos: Charles Babbage (1792-1871), William Herschel (1792-1871) y George Peacock (véase Dubbey 1963 a). Como contribución importante tenemos la publicación de 1816 de la traducción al inglés de un texto de cálculo escrito por Sylvestre-Francois Lacroix. [Grattan Guinness 1984, 127-130].

Los orígenes de las teorías de integración moderna

Henri Lebesgue (1871-1941) creó la teoría de integración que lleva su nombre, modelo de todas las teorías modernas de la integral.

El problema de la integración era el de determinar una función primitiva $F(x)$ que tiene como derivada $f(x)$, o más general, como el problema de hallar una ecuación que representase la solución de una ecuación diferencial. Ya en manos de Newton, Leibniz, Euler y otros, había demostrado ser un aparato increíblemente potente para resolver una amplia gama de problemas geométricos y mecánicos.

> La concepción de una función *como una correspondencia* $x \to f(x)$ y de la integral *como un área* esencialmente, traía como consecuencia un regreso a un punto de vista orientado de una manera más geométrica [Hawkins 1984, 194-195].

Como respuestas a Fourier (1821-1854). Cauchy da un enfoque del análisis de inspiración más geométrica, al problema suscrito por Fourier acerca del significado de la integral definida. Según Hawkins, el punto de partida de la reconstrucción del análisis de Cauchy estaba en la idea de función continua. Cauchy abandona la caracterización usual de la continuidad durante el siglo XVIII a favor de otra más analítica: una función univalente $f(x)$ que toma valores finitos para todo x entre a y b, es continua entre estos dos límites si el valor absoluto de $f(x+\alpha)-f(x)$ "disminuye indefinidamente con el de α". Y precisamente porque es independiente de la manera en que venga representada $f(x)$ mediante una o varias ecuaciones, concuerda con la concepción de Fourier de una función como una sucesión de ordenadas.

En su Résumé (1823a) Cauchy procede a utilizar este concepto de función continua para presentar una teoría de integración que también era compatible con el punto de vista de Fourier. Limitándose a considerar funciones continuas, define Cauchy la integral $\int_a^b f(x).dx$ de la manera siguiente: Consideremos una partición $\boldsymbol{P}$ del intervalo $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots < x_n = b$; y la "suma de Cauchy" correspondiente

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

De acuerdo a la continuidad supuesta de $f(x)$ Cauchy puede demostrar que las sumas S y S' correspondientes a dos particiones $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P'}$ que difieren en una cantidad arbitrariamente pequeña con tal de que las longitudes de todos los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ en las dos particiones sean lo suficientemente pequeñas. Así, "el valor de S terminará por ser constante… este límite se denomina la integral definida" (Cauchy, 1823a, lección 21).

> Su manera de introducir la integral definida demostraba que su existencia no dependía de la existencia o no de una ecuación que defina a la función f , e implicaba además que $\int_a^b f(x).dx$ tiene un valor determinado para cualquier "función arbitraria", con tal de que dicha función sea continua en el sentido que él le daba. [Hawkins 1984, 200-201].

El problema de la integrabilidad de funciones arbitrarias altamente discontinuas, que Dirichlet había dejado sin resolver, fue recogido por Riemann (1826-1866), doctorado en 1851 en la Universidad de Gotinga; recibió el apoyo de Dirichlet, profesor en la Universidad de Berlín.
Al respecto Hawkins, de su trabajo nos dice que, el problema elegido por Riemann suponía obviamente todo un reto, ya que significaba ir más allá de los resultados de Dirichlet, considerar "funciones arbitrarias" más generales. Riemann también aceptó la definición de integral dada por Cauchy: una función f definida y acotada en el intervalo $[a,b]$: es integrable si las sumas de "Cauchy-Riemann "

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

van tendiendo a un único valor límite cuando todos los $x_i - x_{i-1}$ tienden a cero, donde $a = x_0 < x_1 < x_2 <........< x_n = b$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Este valor límite va a ser, por definición: $\int_a^b f(x).dx$.

> Según Riemann, una función podría ser mucho más discontinua de lo que había imaginado Dirichlet y ser sin embargo integrable; de hecho, ¡podría tener incluso una cantidad infinita de puntos de discontinuidad en cualquier intervalo, por pequeño que fuera!, será conveniente comenzar con un ejemplo concreto, éste resultó ser más de consecuencias de lo que el propio Riemann podía sospechar… [Hawkins 1984, 200, 201 y 204].

Limitaciones de la integral de Riemann

El ejemplo de Weierstrass de una función continua no diferenciable en ninguna parte era típico de esta actitud crítica. Demostraba de que la extendida creencia de que las funciones continuas eran en general diferenciables, excepto en unos pocos puntos excepcionales, no podía mantenerse de una manera rigurosa, y que la definición de integrabilidad de Riemann no era tan general como se hubiera deseado.
Howkins, nos dice y muestra de la gran importancia del teorema de Darboux; el primer tratado que intentó sintetizar los resultados del nuevo enfoque del análisis fue los *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*"; (1878a) de Dini. Dedicando un lugar destacado dentro de su tratado a la teoría de integración de Riemann. Dini presentaba el siguiente teorema, debido a Gaston Darboux (1875a, págs. 111-112): Si una función f tiene una derivada f' acotada e integrable en el sentido de Riemann en el intervalo $[a,b]$: entonces para todo $x \in [a,b]$: $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$.

Cauchy había establecido ya la expresión anterior para derivadas continuas, de acuerdo con su teoría de integración, pero la generalización de Darboux representaba un triunfo significativo del punto de vista de Riemann, ya que demostraba que sus condiciones de

integrabilidad, mucho más débiles, eran suficientes para establecer la expresión anterior, fundamental en el cálculo.
Dini observó de que si f tiene la propiedad de que en todo intervalo, por pequeño que sea, existen puntos t tales que $f'(t)=0$, entonces o bien f es constante o f' no es integrable en el sentido de Riemann. El teorema de Darboux implica que estas son las únicas alternativas, ya que si f' tiene la propiedad anterior y está acotada, entonces para todo $x \in [a,b]$ se tiene: $\int_a^x f'(t).dt = 0$, pero en las sumas de Cauchy-Riemann que definen esta integral: $S = \sum_{i=1}^{n} f'(t_i)(x_i - x_{i-1})$

podemos tomar los t_i tales que $f'(t_i)=0$, y por tanto la única manera de que estas sumas tiendan a un límite único, es que el límite sea cero. Tenemos del teorema de Darboux que si f' es integrable, entonces

$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = 0,$ así, que $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a,b]$.

> Dini intuía que existieran funciones no constantes que tuvieran la propiedad mencionada, de manera que f' no sería integrable. Volterra dio un ejemplo de una función f no constante, con una derivada f' acotada y que se anula en un conjunto denso de puntos. Volterra con su ejemplo demuestra que dentro del contexto de la teoría de integración de Riemann, las operaciones fundamentales *de diferenciación e integración no son completamente reversibles*; el proceso de diferenciación podría producir funciones acotadas f' que no son integrables de Riemann, [Hawkins 1984, 207-208].

Cuando Lebesgue creó su generalización de la integral de Riemann, pudo demostrar que se verifica para cualquier sucesión convergente y uniformemente acotada; la integrabilidad, ahora en el sentido de Lebesgue, de la función límite, se sigue del hecho mismo de ser una función límite. En términos de los descubrimientos de Lebesgue, la teoría de Riemann se revela así como insuficientemente general, pero anteriormente a estos descubrimientos nadie consideraba que la posibilidad de que tal función límite no fuera Riemann-integrable.
También Howkins, nos ilustra y afirma que, si tenemos una sucesión uniformemente acotada de funciones $f_n(x)$ integrables en el sentido de Lebesgue, que converge a la función $f(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $f(x)$ también es integrable en el sentido de Lebesgue y se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Y así la función $f(x)$ tiene una derivada acotada $f'(x)$ sobre $[a,b]$, entonces $f'(x)$ siempre es integrable según Lebesgue y se verifica

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

> El éxito más notable de Lebesgue fue el descubrimiento de que su generalización de la integral tiene éstas y otras muchas propiedades importantes. Al crear su teoría de integración, Lebesgue consiguió confirmar de hecho la creencia intuitiva de Fourier de que las “funciones

arbitrarias" no quedan fuera del marco general del análisis matemático… [Hawkins 1984, 233 y 234].

Conclusión

La idea de la compensación de errores de Berkley fue utilizada para tratar de demostrar que el cálculo, lejos de proceder a ciegas, consigue compensar escrupulosamente errores iguales y de sentido opuesto y llegar así, a la verdad, a lo largo de un camino seguro y bien equilibrado.
La integral se suele interpretar como un área y se define como el valor límite de una sucesión de sumas definidas por particiones de un intervalo.
No es a Lagrange, ni a Laplace, ni a Prony que debemos la síntesis del análisis, sino que se debe en gran medida a *Cauchy*. El problema de la integrabilidad de funciones arbitrarias altamente discontinuas, que Dirichlet había dejado sin resolver, fue recogido por Riemann, los siguientes progresos importantes en análisis matemático fueron debidos a Weierstrass. En términos de los descubrimientos de Lebesgue, la teoría de Riemann se revela así como insuficientemente general, pero anteriormente a estos descubrimientos nadie consideraba que la posibilidad de que tal función límite no fuera Riemann-integrable.
Si tenemos una sucesión uniformemente acotada de funciones $f_n(x)$ integrables en el sentido de Lebesgue, que converge a la función $f(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $f(x)$ también es integrable en el sentido de Lebesgue y se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Y así la función $f(x)$ tiene una derivada acotada $f'(x)$ sobre $[a,b]$, entonces $f'(x)$ siempre es integrable según Lebesgue y se verifica

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Referencias bibliográficas

Andersen, Kirsti. (1980). *Las técnicas del cálculo. Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910 Una introducción histórica*. comp.. Grattan-Guinness.
Analysis (in Mathematics): Real Analysis Measure and ... the period of indivisibles. Encyclopaedia Britannica 1994-1999
Berlisky, David. (1995). A Tour of the Calculus. Vintage Books.
Bos, H. J. (1980). Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910 Una introducción histórica. comp.. Grattan-Guinness.
Bourbaki, N. (1969). *Elementos de historia de las matemáticas*. Alianza Universidad.
Boyer, Carl B. (1949). *The history of the Calculus and its Conceptual Development*. Dover Publications, Inc. New York.
Edwards, C. H. Jr. (1937). *The Historical Development of the Calculus*. U.S.A: Springer Verlag.
Eves, Howard. (1953). *An Itroduction to the History of Mathematics*, U.S.A: Holt, rinehart and Winston.
Grattan-Guinness, Ivor. (1991). *Mathesis: Filosofía e Historia de las Matemáticas*. México: Volumen VII, Número 3,
Grattann-Guinness, Ivor. *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910*
Smith, D. E. (1953). *History of Mathematics*. Dover
Struik, Dirk J. (1967). *A Concise History of Mathematics*. Dover.

La inducción y el método hipotético – deductivo en el contexto de la verificación

Blanca Estela Lezana; Margarita Veliz de Assaf
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
mveliz@herrera.unt.edu.ar

Resumen
La formación de un profesional de Ciencias Económicas, exige que el egresado domine un sistema de referencias matemáticas, de métodos y procedimientos de modelación. Los modelos matemáticos se emplean en Economía como una forma de representar la compleja realidad económica (problema), escogiendo los factores más importantes para establecer sus interrelaciones, y poder estudiar la esencia del problema (análisis teórico). Pero los estudios empíricos y los análisis teóricos son complementarios; las teorías deben ser confirmadas por los datos antes de poder aplicarlas con confianza. Presentamos así el **Método hipotético – deductivo,** propuesto por Karl Popper, los fundamentos y la importancia de la **inducción**, y la **inducción completa o inducción matemática.**

Introducción

El hombre siempre ha tratado de conocer, entender y hacer más confortable el mundo en que vive. Pero es el deseo de hallar explicaciones sistemáticas de los datos obtenidos de la experiencia cotidiana, del comportamiento de los grupos sociales, etc., lo que da origen a la ciencia. El hombre comienza a construir teorías, a efectuar descubrimientos, o como dice Bunge (1997, p. 11): " En este proceso, construye un mundo artificial: ese creciente cuerpo de ideas llamado "ciencia", que puede caracterizarse como conocimiento racional, sistemático, exacto, verificable, y por consiguiente falible".
A partir del Siglo XVII el proceso de constitución de la ciencia adquiere un carácter sistemático, cuyo punto de partida son los datos obtenidos de la experiencia cotidiana. Estos datos constituyen lo que algunos autores llaman " base empírica epistemológica", a partir de los cuales se formulan conjeturas, simples o complejas (teoría científica), que permitan justificar y explicar el comportamiento de algún sector de la realidad.
Sin embargo, no toda ciencia procura el conocimiento objetivo. Así, la Lógica Formal y la Matemática pura, son racionales, sistemáticas y de estructura deductiva, pero no se ocupan de los hechos, no nos informan acerca de la realidad ni se preocupan por ella.
La Matemática y la Lógica, por ocuparse de crear entes formales (objetos ideales, algoritmos, etc.) y establecer relaciones entre ellos, se llaman *ciencias formales.* Son ciencias deductivas a las cuales la experiencia jamás podrá cuestionar; es más, tarde o temprano la experiencia se adaptará perfectamente a ellas.
Las *ciencias fácticas* emplean símbolos que interpretan la realidad. En cuanto a la racionalidad, es necesario el empleo de algún sistema lógico, pero ello no es garantía de que se obtenga la verdad. Los enunciados de las ciencias fácticas deben ser **verificables** con la experiencia. Sólo la experiencia puede decirnos si una hipótesis acerca de un grupo de hechos es adecuada o no. Pero la experiencia no es concluyente; sólo nos dirá que es probablemente adecuada.
En resumen, dice Bunge (1997, p. 19): "Las ciencias formales demuestran o prueban; las ciencias fácticas verifican (confirman o desconfirman) hipótesis que en su mayoría son provisionales".
Tradicionalmente en la filosofía y en la historia de la ciencia, prevalece la idea de que el conocimiento está asociado a algún tipo de **prueba** o **verificación**. También se suelen

utilizar los términos **verificado** y **refutado**, en el sentido en que un enunciado verificado es aquel cuya verdad ha sido probada, y si el enunciado es falso se dice que está refutado.
Klimovsky (1994) clasifica los enunciados científicos en tres niveles:

- 1º Nivel: *enunciados empíricos básicos*, que son singulares o muestrales y se refieren a la base empírica epistemológica.
- 2º Nivel: *enunciados empíricos generales*. Se refieren también exclusivamente a la base empírica, y son afirmaciones generales que establecen regularidades en conjuntos tan amplios que no son directamente accesibles (como lo son las muestras). Pueden ser generalizaciones universales, existenciales o mixtos.
- 3º Nivel: *enunciados teóricos* (generales). Cumplen con la condición de contener al menos un término teórico, y pueden ser singulares o generales como también puros o mixtos.

Se plantea así el problema de la justificación de los enunciados del 2º y 3º Nivel. El *racionalismo* (o apriorismo) y el *empirismo* resuelven de manera diferente la exigencia de verificación.
El apriorismo enfatiza el aspecto teórico al postular que podemos establecer premisas universales, independientemente de la experiencia. El empirismo pone el acento en la experiencia, y plantea que los conocimientos universales se derivan de la observación.
El apriorismo y el empirismo se traducen metodológicamente en la deducción y en la inducción, respectivamente. La deducción garantiza conclusiones verdaderas pero sólo a condición de que las premisas se consideren verdaderas. En la lógica formal una deducción es, por definición, un *razonamiento correcto*, es decir, bien construido. Para los lógicos la corrección de un razonamiento depende del orden y de las repeticiones de los términos en los distintos enunciados. Es lo que se llama *forma* del razonamiento. Si esta forma garantiza la conservación de la verdad, es decir, que de premisas consideradas verdaderas se obtenga una conclusión necesariamente verdadera, el razonamiento es correcto o *válido*.
Es nuestro propósito transmitir esta fundamentación a nuestros alumnos, con el objeto de que adviertan la importancia de la Matemática en este proceso, tan empleado en la Facultad de Ciencias Económicas.

Desarrollo

La Inducción

Los modelos matemáticos pueden interpretarse como planteos puramente matemáticos o teorías acerca de la realidad. Para Klimovsky (1994), son sistemas axiomáticos construidos que se desarrollan hasta conocer su alcance, para luego confrontarlos con la realidad que se investiga. Dada la vinculación de la matemática con esta estrategia, nos pareció interesante realizar un análisis teórico de los métodos que se aplican en este proceso, como así también de la pertinencia de estos métodos en la matemática.
La *inducción* permite acceder a conclusiones generalizadoras *probablemente* verdaderas, a partir de premisas particulares (u observaciones). En este sentido y de acuerdo al uso tradicional del término, la inducción significa *el paso de lo particular a lo general*. Sin embargo, actualmente la palabra inducción se emplea con un significado más amplio: el proceso mediante el cual a partir de datos de la experiencia se accede a teorías que permiten explicarla.

El método inductivo es motivo de grandes controversias. Comparado con la deducción lógica silogística presenta una ventaja manifiesta, por cuanto en esta última a partir de premisas consideradas verdaderas, sólo se encuentra en la conclusión lo ya contenido en ellas, mientras que la inducción arriba a resultados cuyo contenido no siempre está dado de antemano. Pero precisamente por ello, la validación de la inducción presenta dificultades frente al mecanismo deductivo, cuya seguridad no ofrece dudas.

En la inducción, los casos particulares que figuran en las premisas provienen de la observación; son enunciados empíricos básicos (de primer nivel), y por consiguiente, no contiene términos teóricos. La generalización de tales enunciados sólo nos puede conducir a una generalización de segundo nivel. Parece claro que no pueden aparecer términos teóricos por inducción a partir de premisas que no los contienen. De esta manera, la obtención de enunciados de tercer nivel no sería, en sentido estricto, una inducción a partir de datos reales, sino que se vincularía con las facultades creativas del investigador, que trata de diseñar modelos de la realidad para explicar por que las cosas observables suceden de cierto modo y no de otro. En verdad se trata de estructuras asignadas provisoriamente a la realidad, y que como tales deben abandonarse en cualquier momento si resultan ineficaces. Sin embargo, tomando en cuenta esas limitaciones, se puede aplicar inducción con la condición de no olvidar que las afirmaciones generales que se obtienen son sólo probables. .

Karl Popper no comparte este enfoque; en su opinión, desde el punto de vista epistemológico (que pone el acento en la producción y validez de las teorías científicas), el método inductivo no tiene características probatorias. Sin embargo, este método resulta ser muy importante en el contexto de descubrimiento, como un instrumento apto para inferir generalizaciones que resultan útiles como hipótesis para investigaciones ulteriores. Al respecto señala Russell (citado por Klimovsky, 1994) que la inducción verdaderamente da algo nuevo, pero que se duda de que lo que da sea conocimiento.

Teniendo en cuenta los instrumentos metodológicos que utiliza la Matemática para su desarrollo, parece claro que no es posible aplicar la inducción en esta disciplina. Sin embargo, tanto Polya como otros inductivistas, plantean que en ciertos problemas matemáticos es posible formular hipótesis que pueden ser analizadas “sin el concurso de aspectos empíricos” (Klimovsky, 1994, p. 289).

La Inducción Completa

Con respecto a la llamada *inducción completa,* método de demostración de fundamental importancia en todas las ramas de la Matemática, y en especial en la Aritmética, cabe señalar que el término “inducción” está usado en un sentido diferente al que se dio a esta palabra en los párrafos anteriores. Este método, también llamado *razonamiento por recurrencia,* establece lo siguiente:

si i) una propiedad es válida para el número , y

ii) la validez de la propiedad para un número n implica que también es válida para n + 1, entonces la propiedad es válida para todos los números naturales.

Es claro que si el conjunto de los números naturales fuera finito, la conclusión generalizadora quedaría demostrada, pues con un numero finito de pasos se demostrarían todos los casos particulares. Pero como el conjunto de los números naturales es infinito, la validez general de la propiedad debe aceptarse como axioma.

Este principio forma parte del Sistema Axiomático con que Peano fundamenta la Aritmética. La partes i) y ii) son dos demostraciones verificables en el campo finito, y de ellas se deduce una conclusión aplicable a una infinidad de casos particulares.

El Método Hipotético – Deductivo de Karl Popper

Popper rechaza la inducción por entender que el conocimiento sólo se puede fundamentar por la vía deductiva a partir de teorías conocidas o conjeturadas.
La contribución más significativa de Popper a la filosofía de la ciencia es su caracterización del método científico. En su *Lógica de la Investigación científica* (1934) critica la idea prevalente de que la ciencia es en esencia inductiva. Propone un criterio de comprobación para determinar la validez científica, que él denominó ***falsabilidad o refutabilidad*** y subraya el carácter hipotético – deductivo de la ciencia. En general dice que una teoría ha sido refutada cuando de ella se deducen proposiciones que, al cotejarlas con los hechos no se verifican.
La forma de razonamiento empleada generalmente para refutar teorías es la regla del *Modus Tollendo Tollens:* $(A \supset B \wedge -B) \supset -A$
La idea central de Popper es que mientras la evidencia nunca implicará que una teoría es verdadera, puede rebatir la teoría suponiendo que sea falsa.
Propone otra manera de vincular la base empírica con el conocimiento. Es el llamado *Método hipotético - deductivo*, que consiste en lo siguiente: partiendo de hipótesis o teorías conjeturadas, deducir de ellas conclusiones que hagan referencia a situaciones particulares u observacionales. Si estas situaciones particulares verifican la conclusión, entonces podemos mantener la teoría (no podemos decir que sea verdadera). Se tiene en este caso la corroboración o confirmación provisional de la teoría. Pero si en cambio alguna de las situaciones observacionales revelan la falsedad de la conclusión, entonces sí podemos decir que la teoría es falsa (por el momento).
Para Popper, “una teoría es científica sólo si es falsable”
Señala que el científico debe tratar de describir situaciones en las cuales las hipótesis sean refutadas. Si esas tentativas fracasan, decimos que la teoría ha sido *corroborada* momentáneamente (la prueba vale para ese momento). Este enfoque de Popper implica la no existencia de teorías o hipótesis absolutas. Por otro lado, el método hipotético - deductivo requiere que las hipótesis tengan consecuencias observacionales que puedan ponerse a prueba mediante la contrastación. Además, enfrentados a una elección entre dos teorías opuestas, los científicos pueden ejercer una preferencia racional si una de las teorías ha sido refutada y la otra no; entonces es racional preferir una teoría que podría ser verdad respecto a una que se sabe es falsa. Pero también podría, rigurosamente, no ser adecuada ninguna.
En síntesis, el método científico consiste para Popper en enfrentar problemas, proponer la hipótesis, deducir en el sentido lógico más riguroso nuevos enunciados a partir de aquélla (etapa deductiva), confrontar sus consecuencias con la realidad observable y de acuerdo con el resultado, abandonar la hipótesis por refutación o conservarla por corroboración. Resulta entonces que el método hipotético – deductivo es una especie de combinación de la orientación racionalista aristotélica y del empirismo asociado al método inductivo tradicional.
Además, ocurre que a medida que refutamos teorías, en el mejor estilo popperiano de eliminación de errores, el conocimiento progresa por la negativa: aprendemos gradualmente, cada vez con mayor precisión, *cómo el mundo no es.*
Es interesante la opinión de Popper en cuanto al concepto de **probabilidad**: lo que importa en ciencia a propósito de las hipótesis y teorías es su valor informativo, que aumenta cuando

ellas se hacen menos probables desde el punto de vista clásico. Esto es así porque a medida que elaboramos hipótesis de la realidad cada vez menos probables, desde el punto de vista científico se hacen cada vez más interesantes, porque cada una proporciona información más precisa que las anteriores. Es decir que para Popper, el interés de las hipótesis y teorías radica en su capacidad explicativa y predictiva, y en modo alguno puede ser evaluado recurriendo al concepto de probabilidad.
La teoría de Popper comparte con el empirismo el papel decisivo de la experiencia en el control del progreso científico. Sin embargo, rechaza el principio de verificidad empírica, para reemplazarlo por la noción, mucho más sutil y compleja, de "*corroboración empírica*".
Comparte con el apriorismo clásico el rechazo a la idea de que la experiencia sea punto de partida y fundamento de las ideas científicas y además, desestima toda posibilidad de fundamentar una lógica inductiva. Consecuentemente, si la inferencia inductiva "no es lógica", entonces no es posible progresar desde las observaciones empíricas hacia la teoría de manera válida.

Otra versión del Método hipotético – deductivo

Hemos presentado el Método hipotético-deductivo en la llamada <u>versión simple o ingenua</u>, y que ha merecido objeciones basadas en el argumento de que no refleja la complejidad de la investigación científica. En efecto, si se examina en detalle el proceso de contrastación de una teoría, veremos que este esquema del método es insuficiente, porque los enunciados utilizados en el curso de dicho proceso incluyen muchos otros además de los específicos de la teoría que se está considerando: se presupone un marco teórico formado por hipótesis que se admiten en el desarrollo deductivo de la teoría específica en estudio, hipótesis que conciernen al material empleado durante la investigación, a las que deben agregarse también los datos observacionales que intervienen en la contrastación.
En este nuevo esquema, si como resultado de la contrastación una consecuencia observacional resulta ser falsa, no hay la menor duda, por razones lógicas, de que alguna de las premisas debe ser falsa; pero no hay ningún fundamento para que deba serlo justamente alguna de las hipótesis de la teoría específica en estudio, ya que la falla podría deberse a la falsedad de cualquiera de las otras hipótesis, incluso de los datos.
Popper plantea que la refutación implica la obligación de abandonar la teoría, aunque admite que, en algunos casos, podría estar fallando alguna otra hipótesis, la que podría ser modificada con la finalidad de impedir la refutación de la teoría.
Otras posiciones más conservadoras ante la refutación, proponen buscar la hipótesis "culpable" por etapas, investigando cada estrato, desde los datos hasta las teorías supuestas involucradas en la investigación.
Se tiene el llamado "Método hipotético- deductivo en versión compleja" que consiste en aceptar que toda contrastación de una teoría obedece al esquema presentado, y que la estrategia a emplear en caso de refutaciones responde al temperamento conservador.
El método fundamental de la Matemática es el método axiomático. Tanto los axiomas como los teoremas de un sistema axiomático, pueden ser *interpretados*, es decir, utilizados en una aplicación concreta. En tal caso, el sistema axiomático se transformará en una teoría fáctica o sistema hipotético – deductivo. De ahí la vinculación de la Matemática con el Método hipotético – deductivo.

Conclusiones

El método inductivo es un instrumento apto para construir hipótesis para ulteriores investigaciones, pero se cuestiona su capacidad a propósito de la justificación.
El método hipotético – deductivo, dirigido especialmente a las ciencias fácticas, ofrece un modo de ordenación, de fundamentación y propagación del conocimiento que, en principio, sería aplicable a todo tipo de problema, investigación y disciplina, salvo en el caso de las ciencias formales como la Matemática. Sin embargo, la Matemática está presente hoy en todas las ciencias de la naturaleza y en las ciencias sociales. Por ello la investigación científica se apoya en una metodología caracterizada por el uso de modelos matemáticos. Una vez detectado un problema real que merezca ser resuelto, se inicia el proceso de construir un modelo matemático que lo represente. A continuación se utilizan las herramientas de deducción disponibles para obtener conclusiones sobre el modelo, las que se tratarán de trasladar al problema de partida. La validez real de estas conclusiones es el aval de la validez del modelo propuesto. Si las conclusiones no son trasladables al problema de referencia, el modelo construido no es válido y se imponen modificaciones o propuestas de modelos alternativos. En este proceso se puede ver que la Matemática y el Método hipotético deductivo se vinculan notablemente.

Referencias bibligráficas

Bunge, M.(1989). *La Investigación Científica*. Barcelona, España: Ariel.

Bunge, M.(1997). *La ciencia. Su método y su filosofía.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Sudamericana.

Iglesias, S.(1981). *Principios del Método de la Investigación Científica*. México: Editorial Tiempo y Obra.

Klimovsky, G.(1994). *Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología.* Buenos Aires, Argentina: A-Z Editora

Piaget, J.(1978). *Introducción a la Epistemología Genética. El pensamiento matemático.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Samaja, J.(1996). *Epistemología y Metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica.* Buenos Aires, Argentina: Eudeba,

Interrelación de las ciencias formales y las ciencias económicas

Jesús Alberto Zeballos; María Rosa Rodríguez de Estofán
Fac. Ciencias Económicas. Universidad Nacional Tucumán. Argentina
vestofan@tucbbs.com.ar jesuszeballos@tucbbs.com.ar

Resumen
En este trabajo nos proponemos analizar las relaciones epistemológicas entre la lógica y la matemática con la contabilidad y las finanzas. Constituye una propuesta teórica acerca de una sistematización lógico-matemática de conocimientos contables y financieros. Para ser más precisos, todo el trabajo es una reflexión metateórica acerca de la contabilidad y las finanzas.
En la construcción de los modelos económicos y, entre ellos los contables y financieros, es imprescindible tener conocimientos lógicos y metodológicos acerca de la axiomatización y los sistemas lógico-matemáticos. Por otra parte, se requiere de argumentos rigurosos que justifiquen su pertinente correlación, lo que implica conocimientos sólidos de la teoría matemática que se propone aplicar y una formulación precisa de los conceptos económicos, a los cuales dicha teoría pretende "modelar".

Introducción

En la actualidad, las Ciencias Económicas son consideradas como las más desarrolladas entre las Ciencias Sociales. Este desarrollo se fundamenta en la construcción, cada vez más frecuente y más precisa, de modelos matemáticos. Al presente, ninguna teoría deja de construir su propio modelo.
Los principios, axiomas o postulados de las teorías y modelos determinan *a priori* la esfera objetiva o campo de aplicación de la teoría misma. Las hipótesis o leyes que, en conjunto constituyen la teoría, *explican* los fenómenos económicos, por una parte, y *predicen* su comportamiento futuro, por otra. En las predicciones de una teoría, denominadas *consecuencias observacionales*, puede corroborarse su validez o adecuación legal-científica o su inadecuación e invalidez. Pero, en ningún caso estas hipótesis pueden ser aceptadas si no se deducen lógicamente o, en otros términos, si no tienen compatibilidad formal con los principios o axiomas de la teoría. Además, la corroboración o refutación de hipótesis y teorías por medio de sus consecuencias observacionales esta regida por estrictos cánones lógico-matemáticos de derivación. Por todas estas razones, ningún cuerpo de conocimiento puede tener pretensión de saber científico sin la lógica y la matemática.

Contabilidad

La Contabilidad es entendida como una teoría descriptiva, por un lado, y como una teoría normativa, por otro. Lo cual muestra su doble aspecto de ciencia y tecnología. Como *teoría descriptiva*, caracteriza lo que de hecho realizan los profesionales en su actividad habitual; mientras que como *teoría normativa*, indica o prescribe las normas a las que los contadores deben atenerse en sus prácticas profesionales.
Además, la determinación de sus conceptos básicos supone una fundamentación, lógico-matemática. Es función de la Lógica precisar su ámbito, discernir sus elementos esenciales como *ente económico, objeto, recurso, objetivo, comerciante, sociedad comercial, empresa, etc...* La Contabilidad supone estos conceptos, no los define. Asimismo, cuantificar las relaciones entre *recursos, fuentes y aplicación de recursos, inversión, financiación...*, y establecer *unidades de medida y criterios de valor*, son tareas tradicionalmente asignadas a la Matemática. Esclarecer las interconexiones teóricas y prácticas entre la Contabilidad, la Economía, la Administración y las Ciencias de la

Información..., son actividades que sobrepasan los límites de la Contabilidad y sólo pueden ser llevadas a cabo por un análisis metateórico.

Los instrumentos lógico-matemáticos necesarios para esa fundamentación epistemológica son, entre otros: la Definición, el Algebra de Conjuntos, el Cálculo de Funciones o Predicados de Primer Orden, la Lógica de la Identidad... Estructuras y Cálculos Algebraicos, Funciones de una y de Varias Variables, Álgebra de Funciones, Gráficos, etc...

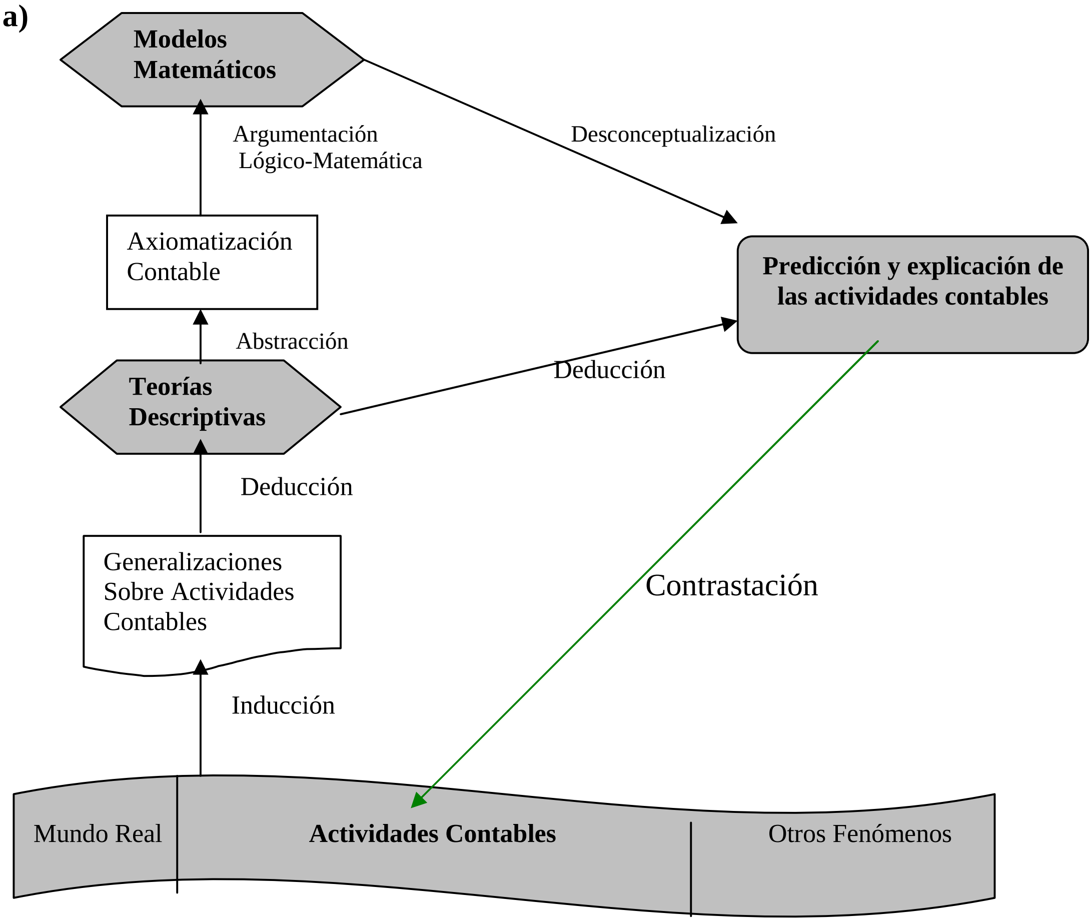
En la actualidad la Contabilidad tiende a suministrar su información enmarcada dentro de un sistema contable formal y axiomáticamente deductivo. De este modo, será posible examinar la estructura lógico-algebraica de ese sistema contable, para luego contrastarlo con las actividades de una unidad económica, que permita tanto predecir como explicar las actividades contables en el mundo real de los hechos.

La práctica habitual de la Contabilidad se ejerce en un nivel básicamente empírico y es compendiada a través de generalizaciones teóricas y prescripciones "generalmente aceptadas" por los profesionales. De acuerdo con tales generalizaciones se formulan los principios universales de esta actividad, construyéndose así la base axiomática de las teorías contables. La adecuada (o inadecuada) descripción y la eficacia de las normas comprobarían (o refutarían) lo pertinente de la teoría en cuestión.

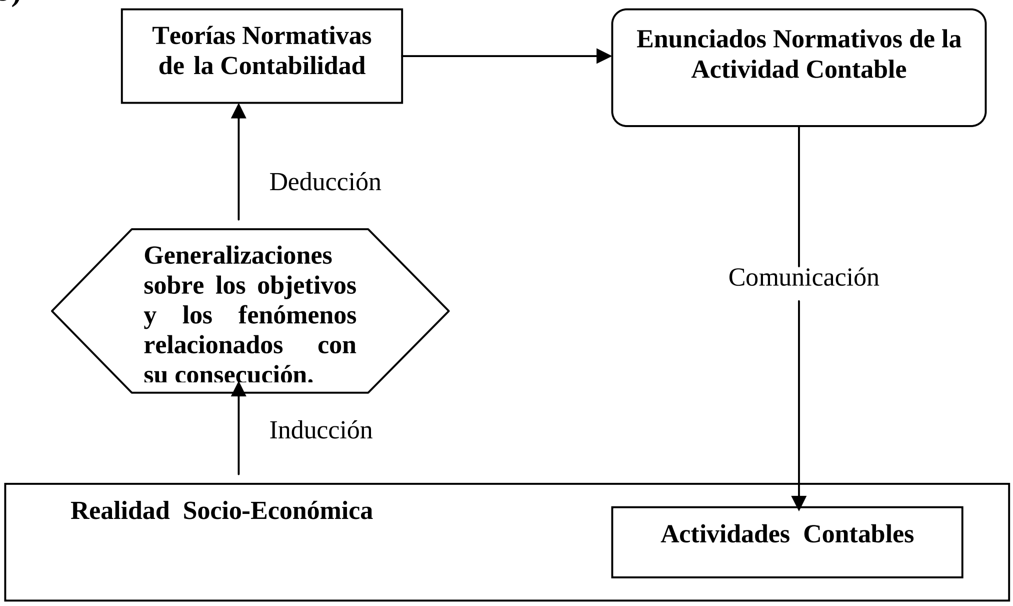
Estas construcciones culminan en modelos matemáticos, que mediante reglas apropiadas de interpretación pueden aplicarse a los fenómenos contables.

Los siguientes esquemas muestran, respectivamente, los aspectos **descriptivos** y **normativos** de una construcción axiomática de la contabilidad:

a)



b)



Las direcciones de las flechas ascendentes indican el proceso empírico-genético de la construcción de un sistema axiomático para la contabilidad (contexto de descubrimiento) que concluye en una axiomática contable y su modelización matemática. Las flechas que, desde la el modelo matemático y la axiomática contable descienden por medio de la desconceptualización, la deducción y por último la contrastación, indican el proceso lógico-deductivo de las consecuencias observacionales, que hacen aplicable esta teoría axiomática a la realidad concreta (contexto de justificación).

Finanzas

El mercado financiero en nuestro mundo globalizado ha alcanzado un alto nivel de complejización e hizo imprescindible una paralela evolución en los modelos teóricos para explicarlo. Utiliza dos ramas de la matemática aplicada, la estadística y la matemática financiera, que formalizan y ordenan la práctica real de las finanzas y, al mismo tiempo aportan los instrumentos para tomar decisiones y hacer pronósticos financieros. Una decisión financiera será tanto más científica y racional cuanto mayor sea la certeza con que se conozca el valor en el tiempo futuro de una suma de dinero, comparándolo con el monto que esa suma representa en el día de hoy.

Para ello, los financistas apelan a la lógica, a la estadística y a la matemática financiera. Por medio de ellas, se analizan e interrelacionan los conceptos de capitalización, actualización, rentas, amortizaciones de préstamos, etc... obteniendo como conclusión la operación financiera considerada óptima.

1- Formalización de la Práctica Financiera

Las presentes reflexiones se refieren especialmente al tema que consideramos fundamental en la práctica financiera: *la capitalización*. De la cabal comprensión de este tema se deriva la intelección de los restantes.

1.1- Capitalización

Toda operación financiera tiende a un único fin, la *capitalización*, que es el valor final que denominamos *monto*, resultado de la transformación del *capital* inicial. Esta transformación del capital en monto se consigue por la interacción de dos factores: *tiempo* y *tasa de interés*.

La capitalización se realiza bajo dos regímenes alternativos, que son el de *interés simple* y el de *interés compuesto*. En el primer régimen los intereses se calculan sobre el capital inicial, o sea que los intereses no producen interés; en tanto que en el segundo, también llamado acumulativo, se calcula sobre el monto obtenido en el período inmediato anterior.

1.1.1- Monto a Interés Simple

La fórmula financiera que representa el ***monto a interés simple***, se obtiene por medio del *principio de inducción completa*. De tal inducción resulta la fórmula financiera que se expresa como $C_n = C_0\ (1 + n\ i)$ donde C_n es el monto, C_0 es el capital inicial, n el tiempo e i la tasa de interés. Esta expresión para el monto tiene la forma de una *función lineal* donde la variable independiente es el tiempo n, cuya gráfica es una recta con ordenada al origen C_0 y la pendiente es la tasa de interés i ganada en un período, la que debe estar en sincronía con la variable independiente n.

Podemos apelar a la fórmula del interés simple para despejar diversas incógnitas.

1.1.2- Monto a Interés Compuesto

Como se sabe, en cada período de tiempo convenido en una obligación se obtiene una capitalización, a la que se denominó “monto”. Si, sobre este monto se calculan los intereses correspondientes al siguiente período, los intereses se capitalizan, obteniéndose un nuevo monto. En este caso el capital inicial no permanece constante todo el tiempo; y, se dice que la operación financiera es a interés compuesto.

La fórmula del ***monto a interés compuesto,*** $C_n = C_0\ (1 + i)^n$, obtenida en base al *principio de inducción completa*, donde i es la tasa de interés por período de capitalización, nos muestra que los intereses devengados en cada período van creciendo en una proporción geométrica, cuya razón es $(1 + i)$. Esta expresión legaliforme, cuya forma es una *función exponencial del tiempo* n, es universalmente válida para cualquier par de valores sincrónicos de i y de n positivos, sea n entero o no.

El cálculo de $(1 + i)^n$ para distintos valores de i y de n, esta predeterminado en tablas financieras de aceptación universal, siguiendo los cánones del teorema del Binomio de Newton, en caso de que n sea entero positivo. En caso contrario se recurre al desarrollo de la Serie de MacLaurin.

Las diferentes empresas recurren a tablas específicas, según sus propios intereses, para calcular: interés simple, interés compuesto, seguros de vida, créditos, rendimientos de bonos y obligaciones, etc. Los criterios básicos para la construcción de cualquier tabla financiera son: alto grado de confiabilidad, mayor rapidez operacional y mínimo costo de los resultados.

Sin embargo, es preciso tener presente que ninguna tabla, sea esta financiera o de cualquier índole, es exhaustiva y contempla todos los infinitos casos posibles.

Para los casos no contemplados en la tabla, se utiliza *el método de interpolación lineal*. Hay inevitables errores que se cometen *por defecto o por exceso* al interpolar.

Si, por ejemplo, se quiere conocer el valor de i para un monto determinado se comete error por defecto.

1.2- Comparación de Montos a Interés Simple y Compuesto

Ahora mostraremos cómo interactúan estos elementos en una confrontación formal del monto a interés simple con el monto a interés compuesto:

Frente a un capital inicial $C_0 = \$1$ comparamos el monto a interés simple $M_s = 1 + i\,n$ con el monto a interés compuesto $M_c = (1 + i)^n$

De la Serie de Maclaurin:

$$M_c = 1 + i\,n + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!} i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} i^3 + \ldots}_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M_c = M_s + \alpha}$$

Según sea *n*, se pueden presentar tres casos:

1. Si $n < 1$ será $\alpha < 0$ entonces $\mathbf{M_c < M_s}$
2. Si $n = 1$ será $\alpha = 0$ entonces $\mathbf{M_c = M_s}$
3. Si $n > 1$ será $\alpha > 0$ entonces $\mathbf{M_c > M_s}$

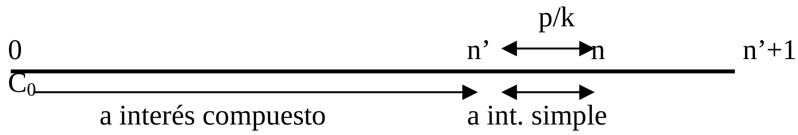
De aquí se concluye que no siempre el monto a interés compuesto es mayor que a interés simple, pues si el tiempo es menor a un período el monto a interés simple es mayor.

2- Cálculo del Monto en Tiempo Fraccionario

Algunos de los cálculos fundamentales en la práctica financiera son la *tasa media de inversión de varios capitales*, *monto en caso de tiempo fraccionario*, *monto con tasa variable.* Su determinación depende de una combinación entre procedimientos lógicos de derivación, interpretaciones formales de la naturaleza del tiempo y sus consecuencias en las diferentes tasas. Como ilustración nos referiremos sólo al *cálculo del monto en caso de tiempo fraccionario*.

Supongamos que el tiempo sea representado por un lado como una parte entera y, por otro, una fraccionaria. Esta doble concepción temporal posibilita dos procedimientos lógico-matemáticos para calcular el monto:

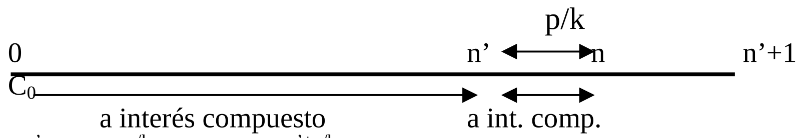
1º- Combinación de ambos tipos de interés. Capitalización en la parte entera de tiempo a interés compuesto y en la fraccionaria a interés simple.



$n = n' + p/k$ siendo n' la parte entera y p/k la fracción.

Entonces $C_n = C_0\,(1 + i)^{n'}\,(1 + i\,\frac{p}{k})$,denominado monto comercial o bancario.

2º- Capitalización en la parte entera y en la fraccionaria a interés compuesto.



$C_n = C_0\,(1 + i)^{n'}\,(1 + i)^{p/k} = C_0\,(1 + i)^{n'+p/k} = C_0\,(1 + i)^n$, denominado monto teórico.

Desde un punto de vista financiero, el primer procedimiento es más redituable que el segundo. Efectivamente, se observó que en las fracciones de período el monto a interés simple es mayor que a interés compuesto. Razón por la cual los bancos otorgan préstamos a interés simple, cuyas tasas son anuales pero recuperables en cuotas mensuales.

Resultados y Conclusiones

La perspectiva axiomática general fue expuesta y discutida en un curso de Epistemología de la Economía desarrollado durante las XV Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas, realizadas en Octubre del año 2000 en la Universidad Nacional de Jujuy, Argentina. Este análisis metateórico, que intersecta el saber matemático con el económico, se mostró como una nueva y eficaz herramienta para la enseñanza de la Matemática en facultades de Ciencias Económicas.
Luego, interesados en la aplicabilidad de estos conocimientos en las prácticas profesionales de los egresados en Ciencias Económicas, desarrollamos estas ideas en un curso de postgrado de Metodología y Técnicas de Investigación en Auditoria, dictado en el año 2001 en la Universidad Nacional de Santa Cruz de la Sierra, Bolivia. Allí comprobamos su eficacia como instrumento ordenador de la multiplicidad de normas internacionales, prescripciones y "reglas generalmente aceptadas" de registros contables y de auditorias. Además, este modelo axiomático se mostró no sólo deductivamente consistente, completo e independiente, sino también, prospectivamente fértil para las investigaciones teóricas y sus aplicaciones prácticas. Lo novedoso de este planteamiento es que intenta compatibilizar las normas contables de distintos países, en un sistema deductivo general, imprescindible para una economía globalizada.
En la construcción de los modelos económicos y, entre ellos los contables y financieros, es imprescindible tener conocimientos lógicos y metodológicos acerca de la axiomatización y los sistemas lógico-matemáticos. Además, si bien la aplicación de la Lógica y de la Matemática en cualquier ámbito científico responde a estrictas reglas de interrelación y contextualización, en las Ciencias Económicas se requiere de argumentos rigurosos que justifiquen su pertinencia, lo que implica conocimientos sólidos de la teoría matemática que se propone aplicar y una formulación precisa de los conceptos económicos, a los cuales dicha teoría pretende "modelar".
Con este trabajo no pretendemos agotar el vastísimo y complejo universo de las finanzas. Sólo hemos querido mostrar la ingerencia de la matemática pura y la lógica formal en alguna pequeña, aunque relevante esfera de ese universo.

Referencias bibliográficas

Blaug, M. (1985). *La Metodología de las Economía*. Madrid, España: Alianza.
González Bravo, L.; Scarano, E. (1994). *Problemas Metodológicos de la Contabilidad*. Buenos Aires, Argentina: Centro.
Nagel E. (1994). *La Estructura de la Ciencia. Problema de Lógica de la Investigación Científica*. (3ra. Edición). Buenos Aires, Argentina: Paidos.
Pascale, R. (1998). *Decisiones Financieras.* Buenos Aires, Argentina: Macchi.
Zeballos, J.; Estofán, M. R.; Gatti, M. (1999). La Lógica y la Matemática como Instrumentos Indispensables para las Ciencias Económicas. *Kipukamayo* 34, 24-25.
Zeballos, J.; Estofán, M. R. (1999). Intuición y Razón en la Administración de Empresas. *Actas de las Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas* VI, 187-190. Buenos Aires.
Zeballos, J. y Estofán, M. R. (2000). Formalización Económica. *Estudios de Epistemología* III, 255-265. Tucumán, Argentina.

Incorporación de Distintas Perspectivas

Nivel Básico

La etnomatemática y la semiología del lenguaje etnomatemático

Oscar Pacheco Ríos
Grupo Internacional de estudios de Etnomatemática. Capítulo Bolivia ISGEm. Bolivia
cepdi@mail.cotas.com.bo ospar62@latinmail.com
http:/www.geocities.com/andians/oscar/Index.htm

Resumen
Leer o escuchar la palabra Etnomatemática, parece que invariablemente nos lleva a pensar en los pueblos nativos u originarios, por lo que realizamos las aclaraciones conceptuales respectivas.
Pueblo Originario: Para quien lo escucha o lee, así simplemente, tal vez, podrá deducir que se trata de un pueblo primitivo o, quien sabe, ya ni exista. Sin embargo, semánticamente, no es ese el significado, pues, los códigos que encierra son otros, aunque guardan cierta semejanza con la deducción primigenia.
No es un pueblo primitivo. Es cada pueblo del mundo que *tiene su propia LENGUA* o signos lingüísticos de comunicación interpersonal y comunitaria, como la base de su *CULTURA*, herencia *ANCESTRAL*. Por ejemplo: *pueblo Qheswa o Aymara, pueblo Guaraní o Mapuche*. El pueblo abarca territorialmente, hasta donde se usa su lengua.
"LENGUA" ⇒ *Conjunto de hábitos convencionales de mutua convención y comprensión que existen en una colectividad, producto y función de la vida del grupo mediante los signos lingüísticos*. Que son trasmitidos generacionalmente con su oralidad o escribalidad. Por ejemplo: *lengua Qheswa o Aymara, lengua Guaraní o Mapuche*.
"LENGUAJE" ⇒ Es el u*so particular de la lengua*. Por ejemplo: Lenguaje quechua de Cusco, Bolivia o de Tucumán. El lenguaje argentino, el lenguaje boliviano.

Génesis del cálculo aritmético originario

Relataré lo que me dijo Tata Chungara: "*ves esta pila de piedrecitas largas y color café: son mis llamas, y estas otras más pequeñas color crema: son mis ovejas.*" Luego prosiguió: "*Cada día cuando las llamas u ovejas salen del corral donde pasan la noche, yo guardo una piedrita en esta bolsita, por cada llama u oveja que sale y, en la tarde cuando regresan después de haber pastado en el campo saco una piedrita y la pongo en esta otra bolsita. Cuando todas las llamas y ovejas han entrado al corral y me sobran una, dos o tres piedritas, quiere decir que se han quedado en el campo, el cóndor se ha llevado un animal o alguien me lo ha robado sin que mi nieto de cuatro años se de cuenta. Pero, otras veces me faltan piedritas, eso quiere decir que el rebaño ha aumentado, entonces tengo que aumentar más piedritas*". El relato muestra la asociación de correspondencia uno a uno, más tarde inventará una forma más abreviada de contabilizar y creará símbolos representativos.

Si se tenía diez llamas (qarwas) u objetos, era 1 qhulu (una piedra pequeña redondeada) *y, si al contar llegaba a 10 qhulus, tenía 1 muruq'u* (otra piedra un poco mayor de iguales características).
El gráfico muestra la sumatoria (∑):

100 + 100 + 100+ 100 = 400

40 + 30 + 20 + = 90. Luego, 400 + 90 = 490.

Siempre se sumaba comenzando por la cantidad mayor, en forma polinómica.

Lengua originaria y lenguaje etnomatemático

Muruq'u = pachajj; qhulu = chunka

En la lengua originaria Muruq'u, primero es un adjetivo, luego al denominar el objeto es un *adjetivo-sustantivado* y en el lenguaje matemático pachajj es *adjetivo numeral*

Simbiosis del lenguaje originario y el lenguaje matemático

Tawa muruq'us jisq'un qhulus niyujj qarwasnin (Cuatro piedras mayores y nueve menores son sus llamas).

El lenguaje originario *muruq'u*, como sustantivo expresa una *cualidad:* **forma**, **tamaño**, **característica sólida, etc,** se une al lenguaje matemático que como adjetivo cuantitativo expresa una *cantidad*.

Al producirse la simbiosis no se mantiene esa cualidad, pasa a ser cantidad. ***Tawa muruq'us = cuatrocientos***

Semiología del lenguaje matemático.

Semiología:

El concepto tradicional: **1)** ***Ciencia que estudia los sistemas de signos; como lenguas, códigos de señales, señalización vial, etc***. O también: ***Estudio de los signos dentro de la vida social*** -Unquy unancha yachaqa-

Concepto actual **2)** "***de codificación del mensaje estructurado por los signos lingüísticos de comunicación"***

-*Unquykunajj qhayranqanmanta rimajj*-

a) Tawa muruq'us ysq'un qhulus niyujj qarwasnin.

Luego, en el concepto tradicional ***sería cuatro piedras redondas grandes más nueve piedras redondas menores son sus llamas***. No existe el tamaño determinado para las piedras, es suficiente que sea un poco menor, por lo tanto no entra la palabra pequeña(o). En la decodificación y aplicando el lenguaje matemático, significará: ***cuatrocientos noventa llamas.*** Por la convención establecida de que ***1 muruq'u*** equivale a ***10*** **qhulus**. Sin embargo para que la decodificación sea completa y represente la cantidad de algo, debe acompañar el nombre del elemento del conjunto. En este caso las ***llamas***. Luego será:

Tawa muruq'us jisq'un qhulus niyujj qarwasnin (Cuatrocientas noventa son las llamas)

Por consiguiente atendiendo a la semiología de esa simbiosis del lenguaje de comunicación social y el lenguaje matemático, concluimos que esta concepción nos permite ver con mayor claridad el valor e importancia del **etnolingüismo** en la **Etnomatemática**.

Es común escuchar expresiones como las siguientes: *He aprendido un montón; hemos conversado un montón; tengo, un montón de trabajo; hace harto que no lo veo, no entiendo ni una pizca, no le alcanza ni a dos palmos, hay que tener cinco dedos de frente, un manojo de nervios, flaca cuarta de cogote*. Expresiones todas que nos dan una idea de una ***magnitud*** de *cantidad*, de *tiempo* o de *longitud*; tomadas como una unidad de medida referencial. La decodificación semiológica dependerá de quién es el interlocutor y de las circunstancias.

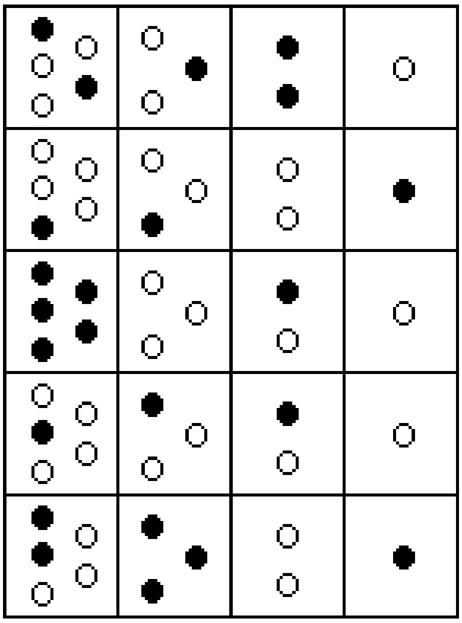
Etnomatemática = Es en su entorno natural y cultural [=**etno**], explicar, enseñar, comprender [=**matema**], las artes, técnicas, maneras, estilos [=**ticas**].
Visto así. Etnomatemática no es la matemática occidental o científica. O sea que, es la matemática del pueblo, es el camino para aprender la matemática occidental o científica. Etnomatemática es la matemática empírica que día a día aplicamos a todas nuestras actividades. Desde el campesino al citadino.
Por ejemplo: Si cada día nos levantamos de la cama a las 6:00 am., y tenemos que ingresar al trabajo a las 8:00 am. Tenemos 120 minutos de tiempo igual a “X”, luego, dividimos ese tiempo en X_1 = 15 min. aseo; X_2 = 20 min. vestirse; X_3 = 15 min. desayunar; X_4 = 15 min. alistar material de trabajo $X_n = n$ min para viaje. ¿Quién de nosotros toma un lápiz y papel para distribuir su tiempo matemáticamente, cuando el tiempo e siempre perentorio?
Otro ejemplo si somos empleados, cuando recibimos nuestro salario que puede ser Y = ±300 $us; Gastamos en luz, Y_1 = ±30 $us; en agua, Y_2 = ± 15 $us; en teléfono, Y_3 = ±30 $us; en alimentación,$Y_4$ = ±150 $us; en transporte,$Y_5$ = ± 65 $us; ropa y/imprevistos ± Y_n = ± *n* $us; Quien puede calcular o regular matemáticamente, el consumo de luz, agua, teléfono si gastamos “un montón”?
En muchas calles céntricas de La Paz, Lima, Santiago de Chile, Buenos Aires, Sao Paulo nos encontramos con los populares “cambistas” que nos ofrecen mayor tasa que las casas de cambio. Muchas de esas personas no tienen ni siquiera una primaria completa, pero están trabajando con nada menos que ecuaciones diferenciales.
Ejemplos de Etnomatemática sobran.

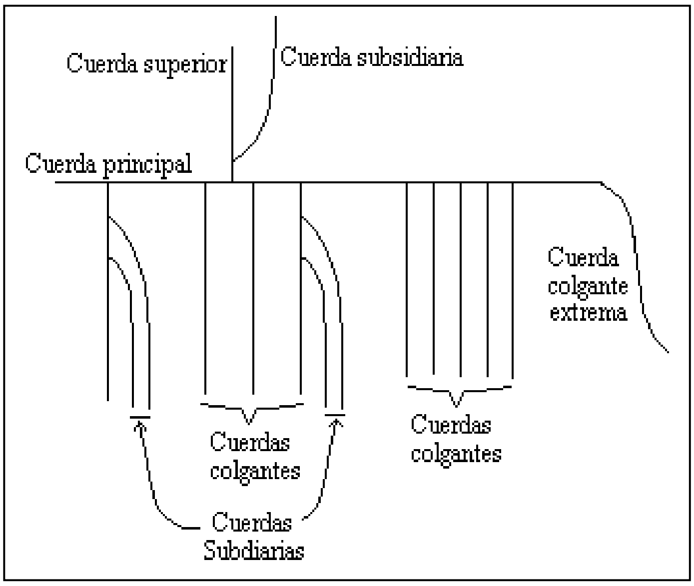
A los matemáticos toca tomar en cuenta estas experiencias y flexibilizar la epistemología matemática hacia la matemática social, para que a partir de ella se pueda aprender matemática.
Es posible que muchos de ellos argumenten indicando que no toda la matemática puede basarse en la Etnomatemática o no toda la Etnomatemática puede ser la base Matemática del aprendizaje matemático científico. Ante tal argumento podríamos responder que no todo lo que se dice matemática es ciencia, pues, consideramos que la “ciencia es hija de la experiencia” a partir de que el hombre nunca dijo o pensó primero voy a aprender a contar para cuantificar sus pertenencias. Será ciencia a partir del razonamiento deductivo cuando diga existen tres números consecutivos tales que sumados o multiplicados me da el mismo resultado y se pondrá a la búsqueda planteando ese su razonamiento.
$x + (x+1)+(x+2) = x(x+1)(x+2)$, si halla el resultado habrá hecho ciencia, pero no satisfecho tratará de ver si su hallazgo se

Quipukamayu
Pág 360 de Neuea Coroconica de Huaman Poma

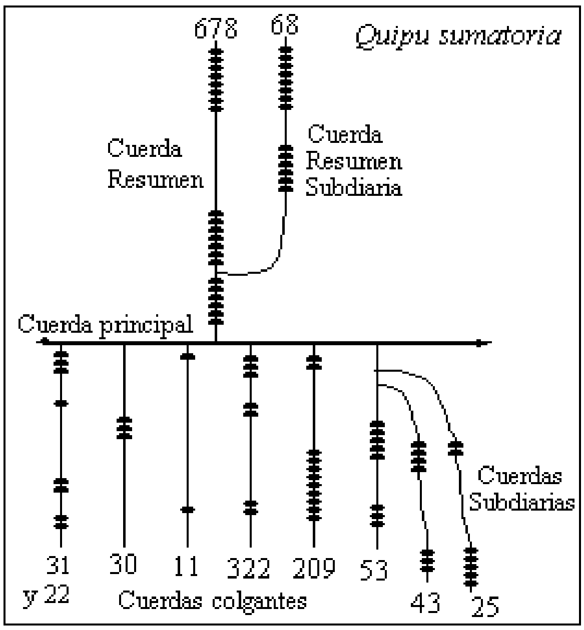
cumple para todos los números y si no lo halla intentará una nueva propuesta. Luego, contradictoriamente todos participamos de ambas.

La Etnomatemática en el incario se manejaba mediante los Quipukamayu. (Encargado de los **QUIPUS** = Contador y Tesorero) Los quipus eran el registro de las cuentas que eran el resultado final de operar con la **YUPANA** (tabla con escaques o casillas para hacer las operaciones) La **Yupana** estaba formada por 20 casillas de 4 x 5. Cuya numeración utilizada era: 1, 2, 3 y 5
Los Quipus (nudos que representaban cantidades).
Tenían la siguiente estructura.





Finalizadas las operaciones en la **Yupana** se procedía a hacer los nudos indicando las cantidades de modo posicional. La cantidades mayores siempre estaban cerca de la cuerda principal y las menores cerca de la punta del cordón colgante. Lo mismo hacía en las cuerdas subsidiarias.
Una vez hechos los nudos representativos. Si se verificaba que había un error, o aparecían cuentas de último momento, se corregía, colocando una cuerda subsidiaria con la cantidad faltante.
Concluida la colocación de todas las cuerdas colgantes con los resultados, se añadía la cuerda subsidiaria resultado salida hacia arriba de la cuerda principal. Si se verificaba que había error se corregía con otra cuerda subsidiaria. Luego se hacía una copia de ese



quipu. Se las envolvía y una se quedaba en el lugar de origen y la otra era enviada al contador mayor, quien hacía nuevas cuentas en base a las cuerdas resumen resultado.

Evidentemente, hoy en día ya no se utilizan quipus, pero, estamos volviendo a usar la yupana. Así como otras formas de nombrar términos matemáticos ligados al vocabulario informático, también ellos ingresan a la semiología del lenguaje etnomatemático, porque es el hombre quien ha creado este nuevo lenguaje.
Por ejemplo:: bit = 1/8 de byte. Byte = 8 bits. Kilobyte = 1000 bytes. Megabyte,….

Finalmente, diremos que antes teníamos bien diferenciados dos grupos: los analfabetos y los alfabetizados, debido a la semiología del lenguaje etnomatemático y etnolingüístico, esa concepción ha cambiado, pues, tenemos los analfabetos tradicionales, los analfabetos funcionales que no manejan computadora, los analfabetos que manejando computadora no manejan la Internet, los analfabetos que manejando inclusive Internet, no saben lo que es Intranet, y aun los que manejan todo lo anterior no saben en sí que es la informática y los lenguajes que maneja esta nueva ciencia. Ello implica que debemos actualizarnos lo mas pronto posible, pues caso contrario lo dicho por Durkein de que las generaciones adultas educan a las nuevas, dará un giro de 180° sexagesimales y serán las generaciones nuevas las que educarán a las adultas, por lo que consideramos que en determinados campos por lo menos debemos llegar a estar en el mismo plano. Y, la semiología del lenguaje, tal como la concebimos en la decodificación de los códigos que encierran los signos lingüísticos nos permitirá esa situación.

Referencias bibliográficas

Asher, Marcia; Asher, Robert. (1981). *Mathematics of the Incas*. New York, USA: Dover Publications Inc.

Barton, Bill (1997). *Teniendo el Sentido de la Etnomatemática: La Ethnomatemática tiene Sentido.* New Zealand: The University of Auckland.

Gerdes, Paul (1990). *Lusona: Recreações Geométricas de Africa Divisao. Grafica.* Maputo: Da Universidade Eduardo Mondlane.

Marastroni, G. (1980). *Hagamos Geometría*. Editorial Fontanela.

Pacheco R. (1999). *Un intento de Filosofía de la Matemática* Bolivia: Editorial CEPDI S.C.

Pacheco R. (1997*). Ethnogeometría para la Matemática*. Bolivia: Editorial CEPDI S.C.

Pacheco R. (2001). *Etnomatemática en las Culturas ancestrales de Bolivia*. Bolivia: Editorial CEPDI S.C.

Perero, Mariano (1994). *Historia e Historias de Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Piaget, Jean (1964). *Seis Estudios de Psicología.* Editorial Seix Barral

Santaló, L. A. (1985). *Geometría No-Euclidiana*. Buenos Aires, Argentina: Eudeba.

Smogorzhevski, A.S. (1984). *Acerca de la Geometría de Lobachevski*. Moscú: Editorial Mir

Ubitan D’Ambrosio (1993). *Educação Matemática* em Revista Número 1 y otros anexos de la UVLA.

Wyllie, C. R. Jr. (1985). *Foundations Geometry*. New York, USA: McGraw-Hill.

Comprensión de procesos de comunicación en las clases de Matemáticas y Español

María Leticia Rodríguez González
Cinvestav
marletrg@hotmail.com

Resumen

El trabajo que se presenta es una síntesis de reflexiones en torno al papel que juegan la enseñanza de matemáticas y español en el aula y su relación con la producción de procesos de comunicación; pues tal pareciera que las relaciones que se construyen fueran diálogo de sordos, lo que repercute directamente en la formación de los alumnos.

Se retoma el trabajo de investigación de la tesis "Comprensión de procesos de comunicación en el aula, en la resolución de problemas aditivos, con grupos de segundo grado de educación primaria"; así como la experiencia en la capacitación a docentes de educación primaria.

El marco teórico que fundamenta este trabajo, lo constituyen los aportes teóricos de Piaget, en matemática educativa de Carpenter, Moser, Fuson, Kamii y Puig; en español los trabajos de Gómez Palacio y Ferrerio. Metodológicamente, nos apoyamos del instrumento de la *observación fenomenológica* ,donde se registra lo que aparece, tal como se da, sin la intervención del observador y como categorías de comunicación: asignación de sentido; b) entendimiento y c) comprensión.

Uno de los desafíos que históricamente ha enfrentado la educación institucional ha sido la dificultad de lograr una formación integral de los educandos, con un sentido crítico, reflexivo y funcional.

Paradójicamente al inmensurable crecimiento de tecnología, la escuela se mueve muy lentamente ante esos cambios, originando ciertos mecanismos de enseñanza y aprendizaje que marginan aún más la actividad escolar de la vinculación directa con el mundo social.

Esto se observa en la enseñanza de las matemáticas y del español, asignaturas que por organización metodológica, pretenden promover el desarrollo de competencias y habilidades comunicativas, instrumentos intelectuales con los que los hombres podemos construir e interactuar con el mundo que nos rodea. Pero, lo que he venido observando, es que es en estas asignaturas, donde no se reconocen procesos de comunicación, presentándolas como entes aislados entre sí y de su relación con la vida cotidiana de los participantes del aula.

Una de las principales causas de esta situación, es la dificultad que tienen la mayoría de los maestros para comprender la fundamentación teórico-metodológica de los Planes y Programas 1993, oficiales desde 1993; los cuales pretenden desde una postura constructivista:

> *"....organizar la enseñanza y el aprendizaje de contenidos básicos, para asegurar que los niños:*
> *1° Adquieran y desarrollen las habilidades intelectuales (la lectura y la escritura, la expresión oral, la búsqueda y selección de información, la aplicación de las matemáticas a la realidad) que les permitan aprender permanentemente y con independencia, así como actuar con eficacia e iniciativa en las cuestiones prácticas de la vida cotidiana" (SEP, 1993).*

Agrego otro conflicto: no hay concreción teórica de la comunicación en el ámbito escolar, quienes lo han intentado, consideran sólo algunas dimensiones como por ejemplo el lenguaje.

Es en el campo de la sociología donde teóricos de la talla de Habermas, han intentado teorizar la acción comunicativa; pero resulta peligroso trasladar los aportes a una interpretación del aula de manera mecánica, porque no se trata de ponernos los lentos que

pusieron su atención en la posibilidad de dar respuestas a grandes problemas histórico-sociales.
Presentamos un análisis en el que se retoman fragmentos de las clases de matemáticas que se presentaron en la Tesis: "Comprensión de procesos de comunicación en el aula, en la resolución de problemas aditivos, con grupos de segundo grado de educación primaria"[1]; así como reconstrucción de testimonios de docentes que asisten a los cursos de capacitación, actividad que he venido desempeñando en los últimos ocho años, como apoyo técnico en el Proyecto: Propuesta para el aprendizaje de la Lengua Escrita y la Matemática y el Programa Nacional para el aprendizaje de la Lectura y la Escritura (PALEM-PRONALEES)
Durante dichos cursos, se ha puesto énfasis sobre la concepción de alfabetización, con un sentido de comunicación, el cual no se reduce a la simple transcripción de la lengua oral al código escrito. A pesar de dichas acciones, he observado que para muchos docentes usan discursivamente la concepción de alfabetización en su sentido amplio; pero paradójicamente en su práctica los actos de lectura y escritura están circunscritos a la transcripción de la lengua oral a la lengua escrita. De ahí, que muchos de ellos, no comprendan el papel que juegan la tipología de textos presentes en los libros del alumno; trabajándolos de manera desarticulada, sin considerar las sugerencias metodológicas que propone el libro para el maestro, de los materiales de apoyo. Dicha dificultad no es una carencia sólo de los docentes frente a grupo, también de muchos de los docentes con funciones técnico pedagógicas, quienes asumen que la responsabilidad de no lograr la meta propuesta en el primer grado, se debe a que los docentes no saben usar un método para enseñar a leer y escribir.
Sin embargo, esto no es tan sencillo como parece, el problema va más allá de lo evidente, y tiene que ver con los procesos de entendimiento de la fundamentación metodológica, que sustentan los propósitos de los nuevos programas de español 99, los cuales son producto de diversas acciones de investigaciones que han estado coordinando por más de 25 años Margarita Gómez Palacio y Emilia Ferreiro,
La clase de español, se concibe por muchos docentes como la asignatura en donde los alumnos de primer grado "aprenden a leer y escribir", y en los siguientes grados la tarea se centra en que los niños aprendan a usar convencionalmente reglas gramaticales, de ortografía y signos de puntuación. Con estas prácticas, la nueva concepción de alfabetización que sustenta un sentido comunicativo y funcional se pierde o se diluye.
En la clase de matemáticas, las tareas se orientan hacia el uso convencional de las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división en la resolución de problemas.
Pero no hay evidencia de la asignación de sentido para concebir las matemáticas como una herramienta intelectual que permita a los niños comprender e interactuar en el medio social.
Para nosotros, carece de sentido para comprender procesos de comunicación, cuando escuchamos decir a los maestros:

> *"Yo trabajo con maduración durante el primer mes, y después con mi método (Minjares, Onomatopéyico, Global, o Eclético) y trato de articularlo con los libros para el alumno".*[2]

[1] Tesis que se presentó en el Cinvestav, para obtener el grado de Maestro en Ciencias, con especialidad en Matemática Educativa en octubre del 2000,
[2] En el mejor de los casos, porque en otros los libros permanecen guardados hasta que los niños "ya saben leer y escribir"; en otras ocasiones, es usado como material para las tareas en casa.

porque hay incompatibilidad metodológica que no permite la articulación, entre un método y una propuesta metodológica. La mayoría de los profesores que atienden tercero y cuarto grado, tampoco le han dado sentido a los materiales, pues en su afán de que los niños usen la convencionalidad de nuestro sistema de escritura, la acción se centra en las practicas tradicionales, como sucedió con el tratamiento de la lección 8 con un grupo de tercer grado, en el que, la profesora al encontrarse con el uso de antónimos centra su tarea en ellos, les dictó a los niños la definición y les pidió que buscaran otros ejemplos.

Pero al remitirse al libro para el maestro, podemos ver que los propósitos de esta lección es que los niños usen la entrevista y la asamblea como formas diferentes para comunicación.

Algo similar ocurre, con el taller de escritura, pues la atención del maestro se centra en los aspectos convencionales del uso de la lengua escrita, perdiendo el sentido comunicativo.

Otro ejemplo de lo anterior, se dio en el curso “La escuela como espacio para la creación escrita”, que impartimos a principios de este año, a los maestros que participaron de él, se les pidió que ellos fueran participes de un taller de escritura, escribiendo sobre diversos temas, de acuerdo a la metodología propuesta por etapas, las cuales van desde la redacción del primer borrador, revisión, corrección y publicación; y como complemento del taller, se les solicitó que al mismo tiempo trabajarán con su grupo actividades prediseñadas para este fin. Se pudo observar, que las primeras dificultades se generaron en la redacción del primer borrador, porque la escritura no es una transcripción de la lengua oral, sino que implica una organización del pensamiento, en la que se ponen en juego operaciones mentales, que constituyen una actividad intelectual, imprescindible para poder convivir en el mundo social que nos rodea. Otra dificultad se generó, en la etapa de revisión de primer borrador, pues para muchos profesores se debía centrar en los aspectos convencionales del sistema de escritura, no pudiendo diferenciar que una cosa es el contenido y otra la forma; que ambas son importantes, pero para cada una hay un momento de tratamiento, por lo que es necesario trabajar siguiendo el sentido metodológico que está propuesto en los talleres de escritura.

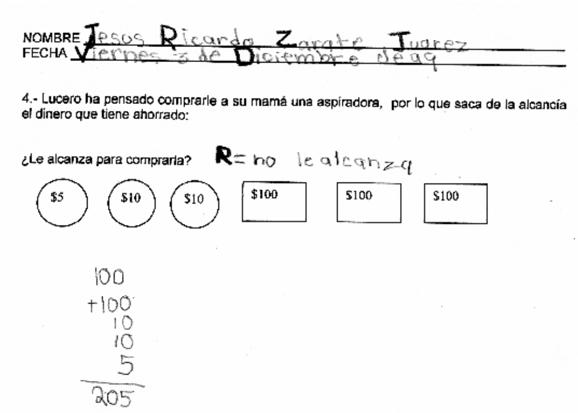
Algo similar, ocurre con el uso de talleres de lectura, escritura y expresión oral, como parte de la propuesta didáctica que promueven los nuevos materiales para el docente y el alumno, en los cuales se pretende que consolidar el sentido comunicativo y funcional.

Como docente y como investigadora, he llegado a la conclusión de que el no promover en el niño el desarrollo de las cuatro habilidades básicas: leer, escribir, hablar y escuchar, no me permitirá estructurar mi trabajo como docente. Su influencia es una constante en el tratamiento de textos de otras asignaturas, originando serias dificultades conceptuales en los niños.

Los primeros acercamientos de los niños al Sistema de Escritura en su entorno familiar, les permite reconocerlo como un medio de comunicación, sin embargo, este antecedente es poco aceptado por la enseñanza. El considerar las concepciones informales de los niños, constituyen un factor fundamental que acompañado del uso de sus competencias lingüística, comunicativa y matemática, les permite diseñar estrategias de solución y por ende de comprensión y apropiación del mundo social en el que se desenvuelve el niño.

El siguiente problema, se propuso a los niños para hacer uso de sus estrategias de inferencia para poder establecer una comprensión lectora y poder resolver el problema con éxito.

La mayoría de los niños mostraron dificultad para resolverlo, pues algunos sólo se limitaron a sumar cantidades, otros hicieron una resta y después una suma, por lo que fue necesaria la intervención de la maestra, para que comprendieran la naturaleza de la pregunta.



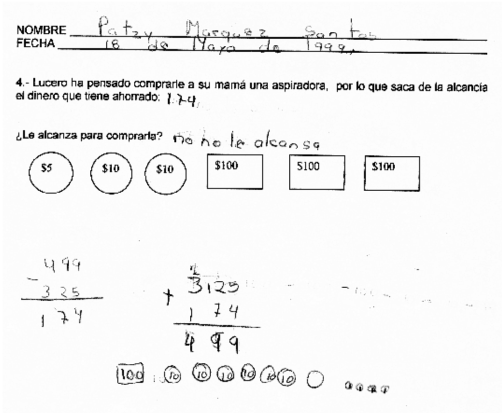
NOMBRE Jesus Ricardo Zarate Juarez
FECHA Viernes 3 de Diciembre de 99

4.- Lucero ha pensado comprarle a su mamá una aspiradora, por lo que saca de la alcancía el dinero que tiene ahorrado:

¿Le alcanza para comprarla? R= no le alcanza

$5 $10 $10 $100 $100 $100

100
+100
10
10
5
205



NOMBRE Patzy Marquez Santos
FECHA 18 de Mayo de 1999.

4.- Lucero ha pensado comprarle a su mamá una aspiradora, por lo que saca de la alcancía el dinero que tiene ahorrado: 174

¿Le alcanza para comprarla? no no le alcansa

$5 $10 $10 $100 $100 $100

499
−325
174

325
+174
499

Como puede observarse, en este problema la respuesta no estaba en términos numéricos, pues el problema propone una comparación y la respuesta que se espera, debe ser un sí o un no.

El siguiente es fragmento de otra clase, en la que también se presenta el problema (MR: maestra Rosita, L: Luis, N: niño)

MR. A ver lee todo.
N. Aroón fue la paletería y se compro 2 paletas, las paletas costaban seis pesos cada una ¿le alcanzo?.
MR. ¿Y tu que contestas?
L. 5 pesos
MR. ¿Es correcta tu respuesta? ¿Que es lo que tienes que contestar?
L. si le sobraron
MR. No, no, no, no, ve además ya se por que esta mal, ¿sabes por que esta mal? mira olvidaste algo muy importante (la maestra coloca los signos de interrogación) ¿que es esto?
L. signos
MR. ¿De que?
L. de interrogación
MR. a ver ¿que dice ahí?
L ¿le alcanzo?
ML: dame la respuesta, ¿qué tienes que responder? ¿Tenemos que decir pesos? A ver que crees que se tenga que responder ahí, que te están preguntando?
L. si le alcanzo
MR. Y tu que crees?
L. que para 2
MR. ¡ah!, Le alcanzó para 2 ¿por qué?
L: porque tenia 12 `pesos
(...)
MR. Mira otro. Tengo 10 canicas necesito jugar con 10 niños ¿me alcanzan las canicas?
L. si
MR. Ahora mira aquí te están preguntando que ella trae 12 pesos y te preguntan si le alcanzo.
N. si
MR. Entonces eso hay que contestar. Bórrale aquí. ¿Si que?
N. si le alcanzo

Por la situación anterior, la maestra le propuso varios ejemplos al niño, para que comprendiera la naturaleza de la pregunta

Como podemos apreciar, los niños estaban solamente decodificando el texto, no le dieron sentido a las preguntas de la maestra, en este caso la maestra les fue ayudando para establecer una comprensión lectora del texto.

Por lo anterior, observamos que son fundamentales los progresos que los niños van logrando en el dominio del sistema de escritura y su comprensión lectora.

Se observó también, que la enseñanza está fuertemente influenciada por tendencias que llevan a la concepción de que hacer matemáticas es resolver operaciones aritméticas siguiendo patrones de resolución por columnas. Al problema ¿cuántas serpentinas se compraron en 5 bolsas, si cada una tiene 12? los niños las resolvieron de diferentes formas (M: maestra de grupo, ML maestra Leticia, A: Antonio):

A: 60
M: ¿Cómo lo supiste?
A: ¿ah! porque 24 más 24 son 48, y doce son 60 porque le aumentan el 2 y son 50 y 10 son 60.
M: pasa al pizarrón
¿De dónde sacaste el 24?
A: es que cómo son cinco le saque, es que cómo 12 más 12 son 24 y ahí lo saqué.
M: muy bien (La maestra esperaba otra respuesta, por lo que siguió con el interrogatorio, por lo que se le pidió a Antonio que explicara nuevamente su explicación)
M L: pero dijiste de otra forma Antonio, ¿la puedes volver explicar? Él dijo: cinco veces son 50 ¿o como lo dijiste?
A: dos veces 24 son 48 más doce son 60.

Antonio, diseña una estrategia de solución en la que pone en juego lo que el conoce de los números, y la forma de operar con ellos, en diferentes direcciones (ML: maestra Leticia):

24 + 24 = 48	12 + 12 = 24
48 + 12 = 60.	24 + 24 = 48
	48 + 12 = 60, porque
2(24) + 12 = 60	2 + 10 = 12 y 48 + 2 = 50; y 50 + 10 = 60.

ML: Bueno pero Laura tenía otra forma:
Laura: sumando 60 cinco veces.
M: pasa pizarrón
¿Y si no quiero sumar de que otra forma lo puedo hacer?
N: multiplicación.
M: ¿cómo?
Alberto: 12 por cinco son 60
.M: pasa al pizarrón.

A pesar del desarrollo que describe Antonio, se observa que la maestra esperaba el uso de la multiplicación asociada a la acción de suma iterada, pero este sólo es uno de las diferentes acciones y significados de la multiplicación.

De lo anterior, podemos pensar, que los docentes escuchamos sólo lo que queremos escuchar, lo que no está de acuerdo con nuestros esquemas conceptuales, simplemente lo ignoramos.

Podríamos seguir presentando fragmentos que ilustren el problema de la dificultad de la comunicación, pero preferimos dejar a la reflexión de nuestros lectores el papel que jugamos en el desarrollo de procesos de comunicación para propiciar aprendizajes que se puedan consolidar significativamente en los niños para su eficiente desempeño como hombres para la convivencia social, y no como productos de una escolaridad sin proyección hacia el mundo que nos rodea.

Cerramos nuestra reflexión con la afirmación de que comunicar no es simplemente enseñar, es trascender los horizontes de la didáctica, la comunicación se propone como un proyecto de formación en el amplio sentido: formación de hombres en y para la vida.

Por lo tanto, no podemos marcar tan estrictamente las fronteras entre las diferentes asignaturas, mucho menos el Español y las Matemáticas. Es necesario, tratar dar sentido al fundamento teórico que sustenta el enfoque de nuestro plan de estudios, a partir de la integración de las mismas.

Conclusiones

Las fases de observación nos permitieron comprender:

- El sistema de escritura y las estructuras matemáticas, se pueden constituir en instrumentos fundamentales para indagar y actuar sobre la realidad, para poder establecer procesos de comunicación.

- En la construcción del mensaje con contenido matemático, los niños ocian diversas acciones (agregar, sumar, juntar, revolver, poner, etc.) para referirse a las operaciones de suma y las acciones (quitar, tomar de, desaparecer, gastar, resta, sustraer, etc..) las asocian a la operación de sustracción; sin embargo, estas aproximaciones son poco escuchadas o tomadas en cuenta, debido a los paradigmas de enseñanza que imperan en el aula.
- La construcción de sistemas de representación, y su apropiación, requieren de esfuerzos intelectuales, que van a constituir procesos graduales de aproximación, que le van a posibilitar a los niños comprender e interactuar con el mundo, en sus diferentes esferas.
- Las dificultades conceptuales que tienen los maestros, constituyen un verdadero obstáculo para darle sentido a las situaciones problemáticas que proponen en el salón.. Lo que también se refleja en el tratamiento de las otras asignaturas.
- El tratar de comprender los procesos de comunicación que se producen en el interior de las aulas, constituye en un verdadero desafío, para cualquier investigador del campo educativo.

Después de todo este ejercicio llegamos a las siguientes conclusiones:

1° Proyectar este trabajo hacia los horizontes de la comunicación, trascender el plano didáctico para articularlo con el sentido histórico de la Enseñanza, la cual va más allá de lo didáctico y lo escolar.

2° Por las complejidades que se dan al interior de las aulas, no es posible darle explicación desde marcos teóricos provenientes de la sociología.

3° Una alternativa de construcción de referentes teóricos, la constituyen las investigaciones que se han desarrollo en Matemática Educativa, específicamente las que tratan de comprender y explicar los procesos cognitivos que se desarrollan en la construcción de conceptos matemáticos. En el caso particular de este trabajo fueron los trabajos de Carpenter, Moser, Nesher, Fuson y Piaget.

4° Se requiere de asumir la responsabilidad ética de la enseñanza que permita reconocernos como formadores de sujetos de cambio; y una posibilidad la constituye el implementar procesos de comunicación en el aula, lo que nos compromete a romper con paradigmas y atrevernos a vivir la docencia con un sentido crítico y reflexivo.

Referencias bibliográficas

Carpenter, Moser y Romberg (1982). *Addition and subtraction: a Cognitive Perspective.* Hillsdale, New Jersey: Editorial Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Ferreiro, E; Teberosky, A. (1992). *Los sistemas de Escritura en el desarrollo del niño.* Editorial siglo XXI.

Fuson Karen, C. *Research on learning and teaching addition on subtraction of whole numbers.* Northwestern University

Gómez Palacio M. et. Al. (1995). La producción de textos en la escuela. S.E.P.

Gómez Palacio M. Et. Al. (1995). La lectura en la escuela. S.E:P:

González Gómez, Alonso *Hacia una nueva pedagogía de la lectura*. Buenos Aires: AIQUE

Kamii, Constance (1992). *Reinventando la Aritmética II.* Editorial Visor.

Piaget, Jean (1996). *La formación del Símbolo en el niños*. Editorial FCE.

Piaget, J. (1984). *Psicología del niño. Madrid:* Edit. Morata.

Puig Espinosa L, y Cerdán Pérez F. (1988) *"Problemas Aritméticos Escolares.* España: Síntesis

S.E.P. Libros para el alumno y materiales de apoyo para el maestro de Español y Matemáticas.

S.E.P. (1993). Plan y Programas de estudio Educación Básica. Primaria.

Enseñar matemática para la diversidad

María Graciela Devoto de Cortes, Marcela Alejandra Karakatsanis
Consultoría Privada, Argentina
gracielacortes@ciudad.com.ar jkoutso@ciudad.com.ar

Resumen

La siguiente propuesta surgió como respuesta a las necesidades detectadas en el trabajo aúlico con niños con Síndrome de Down integrados a cursos regulares, en el nivel preescolar.

El hecho de que el material educativo que suele usarse en estos casos, para la enseñanza de la matemática, resulte una mera adaptación de aquel que se emplea para niños normales, nos llevó a crear uno que contemplara, no sólo las limitaciones propias de la discapacidad mental, sino también las necesidades e intereses de estos niños, permitiéndoles participar activamente de una situación de aprendizaje común a la del resto de su grupo.

El PROGRAMA de ESTIMULACIÓN COGNITIVA (P.E.C) tal como lo hemos dado en llamar, fue diseñado con el propósito de facilitarles a los niños con NEE (Necesidades Educativas Especiales) la participación en la vida cultural de su entorno poniendo a su disposición un bien instrumental como lo es el saber matemático.

La propuesta intenta bajar el grado de angustia que estos niños manifiestan (en el mejor de los casos), al facilitarles el acceso a un proceso de enseñanza-aprendizaje similar al utilizado con todos los otros niños; esto no debe entenderse como un intento de normalización, ni del docente, ni del alumno, por el contrario, lo que se busca es integrar la diversidad en el aula partiendo de las diferencias.

Contenidos curriculares tales como: la serie numérica, los números, la ubicación espacial, etc., sólo cobran sentido en la vida cotidiana, en situaciones reales del mundo de todos los días. Es obligación del docente el reproducir dichas situaciones en el ámbito escolar para incitar al niño a descubrir como la Matemática responde a las necesidades sociales.

El éxito en la tarea, dependerá de cuan significativos sean los aprendizajes que se propongan a los alumnos, teniendo en cuenta no sólo su experiencia, sino también, sus intereses y conocimientos previos.

El objetivo primordial del P.E.C. (Programa de Estimulación Cognitiva) es crear las condiciones necesarias para que los alumnos construyan el conocimiento matemático, sintiéndose protagonistas, a partir de sus propias potencialidades. No se debe olvidar que el grado de complejidad de las estructuras matemáticas alcanzadas va a depender de las condiciones biológicas, psicológicas, afectivas y sociales (en especial familia y escuela) de cada uno.

Desarrollo del trabajo

Objetivos Generales:

- Trabajar en un contexto significativo los contenidos matemáticos seleccionados.
- Reforzar la función social de la información matemática.
- Incentivar la sociabilización mediante el trabajo cooperativo en el aula.
- Estimular la creación de estrategias para la resolución de situaciones problemáticas reales.
- Relacionar el plano concreto con el plano gráfico.

Metodología

El PEC está pensado para su aplicación en cursos preescolares con niños con NEE integrados al aula ordinaria.

Su implementación requiere de una “pareja pedagógica” formada por la docente o profesora a cargo del curso y la docente o profesora de apoyo (integradora); quienes tienen a su cargo seleccionar los centros de interés que se abordan. Dichos centros de interés actúan como verdaderos ejes transversales que permiten no sólo desarrollar el área que nos ocupa, sino dar cabida a otras áreas como la Lengua, las Ciencias Naturales, etc.

Al comienzo del año escolar se consideran los posibles centros de interés sobre los cuales trabajar; pudiéndoselos modificar de acuerdo a las necesidades y requerimientos del grupo. Se debe tener siempre presente la significatividad de los mismos, tanto para los alumnos del curso como para los niños con NEE integrados a él.

Propuesta didáctica

Objetivos Específicos :

- Comprender las ideas fundamentales de un texto leído en voz alta por un adulto.
- Ampliar y recrear la imaginación y la fantasía.
- Producir conversaciones y diálogos
- Utilizar de forma más precisa el lenguaje oral, adecuándose a los diferentes contextos.
- Ubicar objetos en el espacio de la sala.
- Establecer correspondencias como respuesta matemática a las necesidades cotidianas.
- Considerar la pertinencia de los datos obtenidos para desarrollar estrategias de resolución de problemas.
- Formular anticipaciones.

Desarrollo*:*

Para ejemplificar la forma de trabajo sugerida hemos seleccionado el tema: “La fiesta de cumpleaños”, cuyo esquema conceptual correspondiente al área Matemática, se adjunta en las figuras 1 y 2 del anexo.

A) Fase Motivación

La motivación es la encargada de poner en marcha el proceso de enseñanza-aprendizaje, de allí que en esta instancia se haga necesario crear un clima de interés que atrape la atención del alumno. En el caso considerado, el disparador elegido ha sido un cuento, el cual provee un contexto imaginativo al contenido matemático.

El cuento, que no necesita ser complejo en su estructura, es relatado por la docente a cargo, a todo el grupo y apoyado visualmente con una lámina de 90 cm de largo x 60 cm de ancho que reproduce una escena de fiesta infantil de cumpleaños (ver figura 3)

Como complemento de la lámina anterior se trabaja con una segunda lámina que resume la acción desarrollada en el cuento y que da lugar al trabajo de la secuencia temporal.

Durante la narración del cuento, la docente a cargo va generalizando, poco a poco, la conversación, para que todos los miembros del grupo participen de ella, contando sus experiencias personales o bien, emitiendo opiniones sobre la historia contada.

B) Fase Aprendizaje

El paso siguiente consiste en teatralizar la situación planteada: una fiesta de cumpleaños, utilizando disfraces, material concreto, elementos de cotillón.

El objetivo es que el alumno vivencie las necesidades reales que requieren soluciones matemáticas y que trate de resolverlas empleando conocimientos que ya posee.

El poner en la mesa la vajilla necesaria, preparar el cotillón, colocar las velas en la torta, son actividades que permiten generar situaciones de conflicto cognitivo, personal o grupal y ensayar todo tipo de posibles soluciones:

- ¿Cuántos vasos hay sobre la mesa?
- ¿Hay un vaso para cada invitado?
- ¿Cuántos vasos debo agregar para que todos los invitados tengan el suyo? (en el caso de faltar vasos)
- ¿Cuántos vasos sobran?

- Si queremos darle dos dulces a cada niño, ¿cuántos debo tomar de la bandeja? ¿Cómo puedo hacer para contabilizarlos?
- ¿Cuántos años cumple el personaje? ¿Cómo lo sabés?

Como se puede apreciar, el acento está puesto en el interrogatorio permanente que lleva a cabo la docente, estimulando a los niños a generar estrategias y anticipar resultados.

La participación activa del niño con NEE en la teatralización, ofrece la posibilidad de darle sentido social a su aprendizaje matemático, pues las actividades sugeridas tienen que ver con su desenvolvimiento en la vida diaria, con vivencias previas que lo conectan con la construcción de este saber.

Resulta conveniente a esta altura de los hechos darle cabida al calendario, como instrumento de registro de información, señalando las fechas de los cumpleaños del mes en curso, a la par que se interroga:

- ¿Cuántos días faltan para el cumpleaños de …?
- ¿A quiénes de los que cumplen en este mes le faltan más días para su cumpleaños?
- ¿Quiénes ya cumplieron años?
- ¿Cuántos años cumplieron?
- ¿Cuántas nenas ya cumplieron años?
- ¿Cuántos nenes?
- ¿Cuántas más nenas que nenes?, etc.

Incluso se puede construir un rudimentario gráfico de barras pegando sobre la pared columnas con las fotos de los niños que cumplen cada mes, para luego emplear la información recogida y así representada en la solución de situaciones problemáticas simples:

- ¿En qué columna está tu foto?¿Por qué?
- ¿En qué mes hay más cumpleaños?
- ¿En qué mes hay menos cumpleaños?
- ¿Cuántos más niños cumplen en el mes de mayo que en el de…?

Los niños con NEE integrados podrán realizar las actividades que respondan a sus intereses y a su nivel de desarrollo intelectual, de manera que las exigencias no sobrepasen las posibilidades que cada uno de ellos posee en sí para acceder a la resolución de las tareas propuestas.

C) Fase de fijación

Para esta instancia se utilizan actividades especialmente diseñadas para ser usadas con todo el grupo. Su particularidad radica en ser visualmente similares y diferir en el tipo de consigna que presentan.

En el anexo pueden observarse ejemplos de dichas actividades, habiéndose identificado con la sigla NEE aquellas correspondientes a los niños integrados.

Las diferencias en el tipo de actividad a desarrollar están estrechamente relacionadas con las habilidades y limitaciones motrices de estos niños.

Actividad 1 (Anexo 1)	**Actividad 2** (Anexo 2)
Objetivos (grupo/NEE)	***Objetivos*** (grupo/NEE)
• Cardinalidad	• Uso de cuantificadores.
• Reconocimiento de numerales	• Coordinación viso-motora
Objetivo (grupo)	• Establecimiento de relaciones
• Establecimiento de relaciones (tantos como)	***Objetivos*** (grupo)
	• Lateralidad
Nota En el caso de la actividad propuesta para el	• Ubicación de objetos en el plano gráfico

grupo la cardinalidad será hasta el 20 y . para los niños con NEE hasta el número 10.	(eje de referencia: figura humana)
Actividad 3 (Anexo 3) ***Objetivos*** (grupo/NEE) ♦ Coordinación viso-motora ♦ Reconocimiento de patrones ***Objetivo*** (NEE) Motricidad fina (oposición del pulgar)	**Actividad 4** (Anexo 5) ***Objetivos*** (g/NEE) ♦ Seriación: Noción tamaño ♦ Coordinación viso-motora **Nota**: El grado de dificultad depende del número de objetos a seriar.
Actividad 5 (Anexo 4) ***Objetivos*** (grupo) ♦ Ubicación espacial ♦ Discriminación numérica.	***Objetivos*** (NEE) ♦ Ubicación espacial ♦ Conteo ♦ Escritura del numeral.

Para llevar a cabo estas actividades los niños con NEE cuentan en todo momento con el apoyo de la docente integradora (refiriéndonos fundamentalmente al profesor especialista en educación especial) que en el interactuar directo con estos alumnos se vale del material manipulativo necesario. Esa es la “utilería” (Rowan-Bourne) con la que se cuenta para invitarlos a la reflexión, facilitar su expresión y ayudarlos en la explicación.
En esta etapa es fundamental que el adulto consiga el equilibrio entre tener en cuenta la iniciativa del niño con NEE y los objetivos de las actividades propuestos en el programa.

D) Fase de evaluación

Este es el momento del cierre, la puesta en común, la reflexión sobre lo actuado. El docente que hasta aquí asumió el rol de mediador entre el conocimiento y el alumno. Comienza a orientar a los niños hacia el análisis de los procedimientos usados, como una forma de comprobar la solidez de la construcción realizada.
La docente integradora acompaña al niño con NEE en este proceso. Es importante no exigirle aquello que aún no está preparado, sino por el contrario, pedirle todo aquello que él pueda hacer.

Conclusión

Queda de manifiesto por todo lo expuesto, la necesidad de una visión más comprensiva del *Proceso de Aprendizaje*, que nos ayude a analizar sus componentes no estrictamente cognoscitivos.
Toda vez que enfrentamos algo que desconocemos, se origina en nosotros cierto grado de ansiedad; se hace fundamental entonces analizar el papel primordial que el deseo de aprender, de acceder a lo desconocido, desempeña en la aplicación de nuestra capacidad de aprendizaje.
Se destaca la importancia de redefinir el significado de los “contenidos” pues, los conceptos manejados en el Area de la Matemática, en especial para los niños y niñas de menor edad, no son “afectivamente neutros”.
Los mismos números, las operaciones (sumar, restar, multiplicar, dividir) conceptos como “mayor” , “menor”, “problema”, “pertenecer o no pertenecer”, “conjunto vacío”, pueden tener una carga emocional que estimule o bloquee el aprendizaje.
En su estudio sobre la reeducación del razonamiento matemático, Ignasi Puigdellívol hace mención al papel de la afectividad en las dificultades para la matemática y su reeducación, donde describe la carga simbólica – emocional que puede tener aquel aprendizaje.

Consideramos que el material que hemos elaborado, adaptado a los contenidos propios de cada ciclo escolar contempla la diversidad como algo natural en el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje y resulta de fácil aplicación en el aula ordinaria.

Epílogo: Deseamos que la naturaleza y el alcance del Programa de Estimulación Cognitiva para niños con Necesidades Educativas Especiales que hemos elaborado, justifique con creces la dedicación que estamos dispuestas a destinarle.

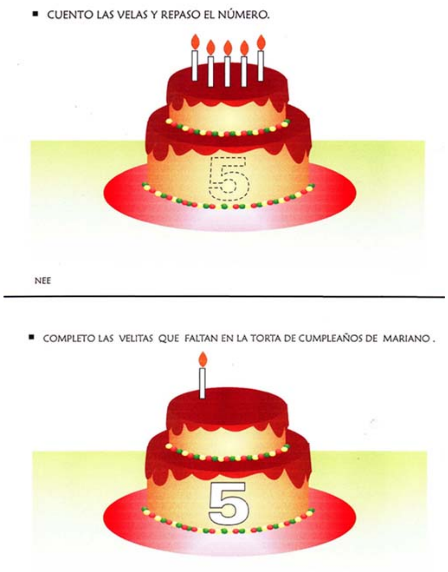
Referencias bibliográficas

Rowan, T.; Bourne, B. (1994). *Thinking Like Mathematic*ians. 1ª Ed. Portsmouth, NH. Heinemann.

Puigdellívol, Ignasi (1998). *La Educación Especial en la Escuela Integrada. Una perspectiva desde la diversidad.* 1° Ed. Barcelona: Editorial Graó.

Anexo 1

Anexo 2

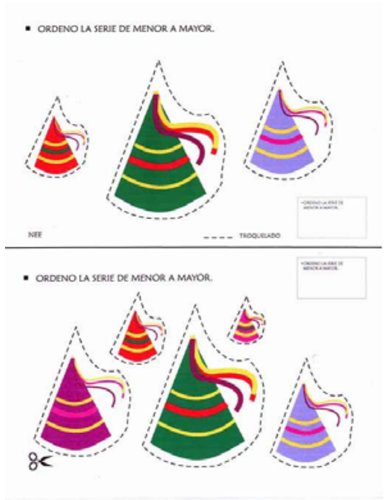


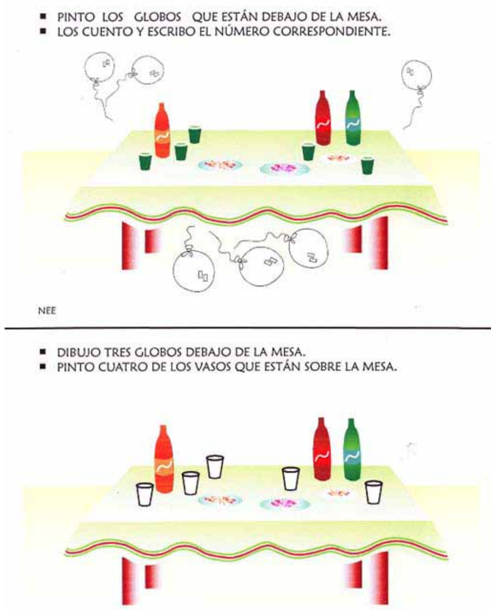
Anexo 3

Anexo 4

Anexo 5


PEGO EL BANDERÍN QUE CORRESPONDE.
FELIZ CUMPLEAÑOS
NEE
PINTO PARA COMPLETAR LA SERIE.
FELIZ CUMPLEAÑOS


ORDENO LA SERIE DE MENOR A MAYOR.
NEE
TROQUELADO
ORDENO LA SERIE DE MENOR A MAYOR.


PINTO LOS GLOBOS QUE ESTÁN DEBAJO DE LA MESA.
LOS CUENTO Y ESCRIBO EL NÚMERO CORRESPONDIENTE.
NEE
DIBUJO TRES GLOBOS DEBAJO DE LA MESA.
PINTO CUATRO DE LOS VASOS QUE ESTÁN SOBRE LA MESA.

Lectura, escrita y resolución de problemas: habilidades básicas para el aprendizaje matemático

Cláudia Tenório Cavalcanti, Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz
Mathema, Brasil
mathema@osite.con.br

Resumen
La producción de textos en las clases de Matemáticas cumple un importante papel en el aprendizaje del alumno y favorece la evaluación de ese aprendizaje en proceso. Organizar y evaluar el trabajo en Matemáticas de manera que garantice la aproximación entre esa área del conocimiento y de la Lengua Materna, además de una propuesta interdisciplinaria, ha sido la propuesta de esta investigación junto a los alumnos del nivel básico, las a 8as series, y de la educación preescolar. Hemos observado que la lectura y la producción de textos en las clases de Matemáticas favorecieran el desarrollo y la valorización de distintas habilidades que componen la realidad compleja de cualquier sala de aula.

Desde 1988 nos hemos dedicado a estudiar e investigar las relaciones entre la lectura, la escrita y la resolución de problemas en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. Este trabajo tuvo como resultado, en escuelas brasileñas, públicas y particulares, la mejora y la utilización de recursos de comunicación en las clases de matemáticas.

La utilización de recursos de comunicación en las clases de matemáticas se ha justificado por innumeras causas: la primera y más importante de ellas es la comunicación de ideas y maneras de actuar, haciendo con que el alumno refleje sobre lo que hizo o pensó, construya planes aún más elaborados de pensamiento, organice mentalmente pensamientos y acciones, es decir, aprenda nuevamente y con más calidad y profundidad aquello que podría haber sido aprendido o no durante una actividad, lectura o cualquier otra acción mental o física.

La segunda causa está en la no diferencia de los alumnos en el ámbito de la competencia o inteligencia y en el desarrollo de actividades relacionadas a comunicación, como leer, escribir, dibujar, y de actividades relacionadas a las matemáticas, siendo una la alternativa de acceso a la otra, complementariamente o como rutas distintas rumo el aprendizaje.

Derribar la práctica que viene contribuyendo para el aislamiento de las matemáticas en las estructuras curriculares es la tercera causa por la cual la preocupación con la comunicación en las clases de matemáticas se ha justificado; sabemos que el conocimiento no es segmentado en disciplinas, a pesar de éstas organizaren y permitieren un enfoque aún más específico y profundado de la realidad. Efectivamente, hablándose de aprendizaje, la artificial separación de las disciplinas viene impidiendo que las relaciones naturales entre significados importantes de conceptos y procedimientos sean notadas por los alumnos, visto que no hay espacio para el establecimiento de esas relaciones en las rigurosas programaciones disciplinares.

Luego, creemos que introducir los recursos de comunicación en las clases de Matemáticas de las series iniciales puede concretizar el aprendizaje en una perspectiva más significativa para el alumno, y favorecer el acompañamiento de este proceso por parte del profesor. Analizar el papel de la oralidad, de las representaciones pictóricas y de la escrita como recursos de enseñanza, permite vislumbrar una nueva dimensión para la práctica escolar juntamente con las investigaciones sobre la adquisición del conocimiento y del aprendizaje.

Considerando que la resolución de problemas es un elemento central para la enseñanza y para el aprendizaje de las matemáticas, este trabajo analiza como desarrollo de la resolución de problemas, como competencia fuertemente vinculada al aprendizaje de las matemáticas, la posibilidad de complementariedad y fortalecimiento al ser aproximado del aprendizaje de la lectura y de la escrita a través de los recursos de la comunicación.

Analizar la Resolución de Problemas como perspectiva metodológica a servicio de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas, amplía la visión puramente metodológica y derriba la cuestión de la gran dificultad que enfrentan alumnos y profesores, cuando se proponen resoluciones de problemas en las clases de matemáticas. La utilización de recursos de comunicación puede resolver o efectivamente acabar con esas dificultades.

Finalmente, nos gustaría resaltar que en cualquier estructura curricular, incontestablemente, están las competencias de lectura, de escrita y de resolución de problemas como objetivos centrales a ser desarrollados por los alumnos en la escuela. Efectivamente, la producción de textos en las clases de Matemáticas cumple un importante papel en el aprendizaje del alumno y favorece la evaluación de ese aprendizaje en andamiento.

Organizar el trabajo en Matemáticas con la finalidad de garantizar la aproximación entre este área del conocimiento y de la Lengua Materna, además de una propuesta interdisciplinaria, favorece la valorización de distintas habilidades que componen la compleja realidad de cualquier aula.

Ejemplificando la metodología de trabajo cuanto a la producción de textos producidos por los alumnos, observaremos la situación de un grupo de alumnos de la tercera serie que pronto había hecho una actividad sobre fracciones y notado que fracciones con el numerador *uno*, disminuyen mientras el denominador aumenta. La profesora del aula pidió que escribieran sobre lo que habían aprendido con la actividad. Ellos, entonces, producieran el siguiente texto:

En el diccionario, fracción es una parte del todo. Como un papel que es fraccionado para formar una dobladura.
$\frac{1}{10} \rightarrow$ *El número de abajo es el número de partes en que el todo fue dividido. El número de arriba es la cantidad de partes que fue sacada.*
Un cuarto es la mitad de un medio; un octavo es la mitad de un cuarto, por tanto, dos cuartos es igual a un medio y dos octavos es igual a un cuarto, cuatro octavos es igual a dos cuartos que es un medio.
Cuan mayor sea la cantidad de partes, menor el tamaño entre ellas.
Un quinto es el doble de un décimo, entonces un décimo es menor que un quinto. Para que tengamos un quinto, necesitamos dos décimos.
Un sexto es la mitad de un tercio, es necesario dos sextos para tener un tercio.

Ese pequeño texto nos ha permitido verificar que la producción dio a los alumnos la oportunidad de repensar sobre lo que hicieran, registrar sus reflexiones, percepciones, lo que descubrieran realmente sobre fracciones, de una manera propia. Es decir, los alumnos en un **proceso meta cognitivo**, pudieran pensar sobre la actividad y las relaciones y propiedades matemáticas abarcadas.

En segundo lugar, los alumnos pudieron rever y profundizar los conceptos abarcados en las acciones realizadas y, al producir un texto basado en los conocimientos abordados durante la clase, tuvieran oportunidad de tornarse mejores **lectores de textos referentes a las Matemáticas** percibiendo con más clareza como articular en un texto nociones y conceptos matemáticos.

Finalmente, esa producción escrita dio al profesor no solo la oportunidad de **evaluar** lo que el grupo aprendió en aquella clase, sino también la percepción de cómo los alumnos expresaban sus ideas y cuales dificultades presentaban ellos en ese momento del trabajo. En realidad, para el profesor la producción de textos en Matemáticas auxilia a direccionar la comunicación entre todos los alumnos del aula, a obtener datos sobre los errores, incomprensiones, hábitos y creencias de los alumnos, a notar concepciones de varios alumnos sobre una misma idea y obtener evidencias, indicios, sobre el conocimiento de los alumnos.

La práctica en clases de Matemáticas

Cuanto a la propuesta de organización de este trabajo juntamente con los alumnos, las producciones orales e escritas cumplen funciones distintas dependiendo de la forma y del momento en que son propuestas a los alumnos.

El objetivo de la producción del texto es el que determina cuando él será solicitado al alumno. Como consecuencia de nuestra práctica sugerimos que los textos orales o escritos sean propuestos a los alumnos al iniciar un nuevo tema, después de una actividad o en la sistematización de un asunto o de un conjunto de procedimientos. La producción, al iniciar un nuevo tema, tiene como objetivo investigar lo que ya sabe el alumno, lo que conoce sobre un determinado tema, concepto o idea matemática para, partiendo de sus conocimientos previos poder organizar las acciones docentes de manera a retomar incomprensiones, imprecisiones o ideas equivocadas referentes al asunto en cuestión y, al mismo tiempo, evaluar cuales avances pueden ser hechos.

El texto escrito abajo fue producido por Janaina y Ana Luiza, alumnas de la tercera serie. La propuesta de la profesora era de que los alumnos escribieran una carta para la segunda serie narrando todo lo que sabían sobre el cubo:

“São Paulo, 17 de marzo de 1998
Caros alumnos(as) y profesora de la 2ª. Serie C. Les estamos escribiendo para mostrar todo lo que sabemos sobre el cubo. Una de las 1as.cosas es: “1- El cubo es un sólido geométrico. 2- Él es formado por seis cuadrados. 3- Las caras son los lados, las arestas son las líneas y los vértices son las puntas. 4- Los cubos tienen seis caras, y también tienen 12 arestas y tiene 8 vértices. 5- La planificación es abierta y el sólido es cerrado.”
Eso es lo que saben Janaina y Ana Luiza.

Al leer la carta producida por las alumnas, la profesora tuvo conocimiento de que las dos conocían el suficiente sobre el cubo para permitir que ellas avanzasen en el estudio de esa y de otras figuras geométricas, todavía percibió que había imprecisiones, tales como llamar las caras de lados, pero sabia que eso en el momento era irrelevante

La producción de textos después de una actividad permite que los alumnos piensen sobre lo que hicieron, aprendieron, o percibieron durante la acción, que puede ser un juego, un problema u otra tarea cualquier.

Al explicitar dudas y otras impresiones, los alumnos permiten que el profesor perciba en cuales aspectos de la actividad presentan más incomprensiones, en cuales puntos avanzaron, si lo que era esencial fue comprendido, que intervenciones necesitará hacer. La producción del texto en ese caso puede ser individual, colectiva o en grupo, dependiendo de lo que desea saber el profesor sobre cada alumno, el aula o algunos alumnos en especial.

Veamos una producción individual de un alumno de la tercera serie después de haber realizado una actividad sobre medidas:

“Medidas de Comprimento

Hoy estábamos en un círculo y Marizilda dijo:

- *¡Vamos a medir esta mesa!*

Y entonces, ella invitó a André Venzom y a Maria Jimena para medir la mesa, y entonces Marizilda cogió un cordel y Venzom dijo:

- *Este cordel es muy largo. Él no tiene un metro, tiene más. Marizilda entonces cogió un pedazo más pequeño; conclusión, la mesa media 60cm.*

Conclusión:

1 metro = 10 decímetros

1 decímetro = 10 centímetros

1 metro = 100 centímetros.”

Al escribir, el alumno describió parte de la actividad y señaló las relaciones que han sido establecidas entre las unidades padrón de medida, mostrando a la profesora que eso había sido importante para él durante la realización de la tarea.

Muchas veces, el texto producido al final de una actividad sirve también para llevar el alumno a tener conciencia de sus avances y necesidades, de forma que él va percibiendo lo que hizo, lo que sabe, que dudas tiene y como las puede superar por si solo.

Al escribir al término de un asunto, lo que obtenemos, se asemeja a la producción de una síntesis, un resumen, o hasta incluso, un parecer sobre el tema desarrollado, en el cual aparecen las ideas centrales de lo que fue estudiado y comprendido.

Al producir esos textos, los alumnos deben notar el carácter de sistematización que él tiene, la importancia de presentar informaciones precisas, incluir las ideas centrales, que sean representativas de lo que de más significativo el tema abordado presenta y merece registro, más minucioso.

Específicamente a lo que toca el incremento de la habilidad de resolución de problemas, veamos un ejemplo propuesto a alumnos de la 6ª serie, que deberían encuentrar los errores en las resoluciones de cuestiones contenidas en la siguiente ficha de trabajo preparada por el profesor.

Magnólia recibió una ficha de ejercicios como tarea de casa. Después de la corrección, ella verificó que se había equivocado en algunos pasos. Seas tú el profesor, y circunde en los ejercicios que siguen abajo los errores que encuentres, rehaciendo las cuestiones y poniendo los resultados correctos.

1. El triple de un número aumentado de 15, es igual a 39.¿Cuál es el número?

$x + 3 + 15 = 39$

$x + 18 = 39$

$x = 39 – 18$ $\qquad x = 21$

2. Un número sumado a su cuarta parte es igual a 60. ¿Cuál es el número?

$x + 4x = 60$

$5x = 60$

$x = 60 : 5$ $\qquad x = 12$

3. La diferencia entre los 2/3 de un número y su mitad es igual a 10. ¿Cuál es el número?

$2/3 – x/2 = 10$

$4/6 – 3x/6 = 60/6$

$-3x = 60 – 4$

$-3x = 56$

$3x = - 56$

$x = -56 : 3$ $\qquad x = -18,6$

4. La suma de tres números impares consecutivos es 171. Determine esos números.

$x + x + 1 + x + 2 = 171$

$3x + 3 = 171$

$3x = 171 – 3$

$x = 168/3$ $\qquad x = 56$ y los otros números son 57 e 58.

5. Calcular:

a) $3.(2x + 5) = 100 – (2x – 5)$

$6x + 5 = 100 – 2x – 5$

$6x + 2x = 100 – 5 – 5$

$8x = 90$

$x = 90 : 8$ $\qquad x = 11,25$

(la ficha aun incluía otras ecuaciones resueltas con los errores más comunes cometidos por los alumnos y dos ejercicios resueltos correctamente.)

Después de las correcciones realizadas por los alumnos y discusión colectiva, el profesor propuso que los alumnos, en parejas, escribieran sobre: -¿qué debemos observar para que no nos equivoquemos? Los textos obtenidos se asemejan a:

- El triple de un número es 3x y no x + 3
- La cuarta parte de un número no es 4x, pero x/4
- 2/3 de un número quiere decir 2x/3
- Cuando haya un número antes de los paréntesis debemos de hacer la distribución y multiplicar los números dentro de los paréntesis
- Debemos hacer el mínimo múltiplo común también multiplicando el numerador
- Cuando juntamos números de un lado de la igualdad debemos mantener el sinal
- Si tuviéramos un sinal negativo adelante de una fracción debemos colocar los paréntesis.
- ...

Observando este ejemplo de producción de textos, podemos constatar que el aprendizaje de los alumnos traspasa aquella obtenida con el procedimiento convencional de apenas proponer y resolver problemas, haya visto que les fue permitido leer y producir textos matemáticos, analizar resoluciones que muchas veces aun no dominaban, refletir sobre errores semejantes a los que ellos mismos realizan y buscar el conocimiento para corregir esos errores.

En síntesis, buscamos, en ese trabajo, describir las consecuencias de nuestras investigaciones en estos años, que pueden permitir el desarrollo de estas competencias, visto que, al considerar que es responsabilidad de la enseñanza de las matemáticas la comunicación de los alumnos en el lenguaje específico de las matemáticas, juntamente con las demás formas de lenguaje, es creado un ambiente planeado y, lógicamente, interdisciplinario, lo que nos ha permitido constatar el desarrollo de nuestros alumnos.

Referencias bibliográficas

Borasi, R.(1993) The invisible hand operating in Mathematics instruction: students'conceptions and expectations. En Stephen I. B. & Marion W., *Problem Posing: reflections and applications*.(pp. 83-91) USA:Lawrence Erlbaaum Associates, Publishers.

Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematucs (1989) USA: NCTM.

Elliot, P. C., Kenney, M. J. (org.). (1996) *Communication in Mathematics K-12 and Beyond*. Reston, USA: NCTM, Yearbook.

Kaufman, A. M. et al. (1998) *Alfabetização de crianças: construção e intercâmbio*. Porto Alegre, Brasil: Artmed.

______________, Rodriguez, M. E. (1995) *Escola, leitura e produção de textos*. Porto Alegre, Brasil: Artmed.

Landsmann, L. T. (1995) *Aprendizagem da linguagem escrita: processos evolutivos e implicações didáticas*. São Paulo, Brasil: Ática.

Lerma, I.S. (1990) Comunicacion, lenguaje y matematicas. En Linares, Sánchez y Garcia. *Teoria y practica en educacion matematica.* Sevilha, Espanha.

Norwood, K. , Carter, G. (1994) Journal Writing: na insight into students'understanding. *Teaching Children Mathematics* (november), 146-148.

Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) *Introdução* / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, Brasil: MEC/SEF.

Parra, C. , Saiz I. (orgs.) (1996) *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas.* Porto Alegre, Brasil: Artes Médicas.

Smole, K.S. y Diniz, M.I. (orgs.) (2001) *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre, Brasil: Artmed.

Teberosky, A , Tolchinsky, L. (orgs.) (1996) *Além da alfabetização*. São Paulo, Brasil: Ática.

Usiskin, Z.. (1996) Mathematics as a language. En Elliott, P.C. (Ed.) *Communication in Mathematics* (pp. 231-244). Virginia, USA: NCTM, Yearbook.

La influencia de la teoría de las inteligencias múltiples y los estilos de aprendizaje en la calidad de la enseñanza de la matemática

María del Pilar Horna Bruña
Universidad Autónoma de Chiriquí. Panamá
pilyhb@cwp.net.pa maripilyhorna@hotmail.com

Resumen
Este es un trabajo de investigación que tiene como meta mejorar la comprensión de las lecciones de matemática de los alumnos de la escuela primaria del Distrito de Boquete, Provincia de Chiriquí, Rep. De Panamá, mediante el entrenamiento de los docentes sobre la Teoría de las Inteligencias múltiples y los estilos de aprendizaje para que tengan herramientas estratégicas que le permitan conocer como piensan y sienten los estudiantes con respecto al aprendizaje de la matemática además de potenciar dichas habilidades para beneficio de la comunidad educativa. Motivada por esto y con el interés de mejorar la calidad de la educación de la matemática, se realiza este estudio donde se evaluó el tipo de inteligencia múltiple y estilo de aprendizaje predominante tanto en los estudiantes como en los docentes, además de conocer la actitud hacia la asignatura de matemática con el fin de incrementar la capacidad de los maestros en la acción investigadora y pedagógica en el salón de clases. Se involucraron a directivos y maestros como colaboradores participantes activos de la investigación mediante un curso de capacitación sobre los últimos avances teóricos prácticos de la Teoría de las Inteligencias Múltiple y los estilos de aprendizaje y se pudo recoger información valiosa para implementar exitosamente estrategias de trabajo en equipo que desarrollen las inteligencias múltiples permitiendo un mejor desempeño en el área de las matemáticas y tal como dice Von Gaserfeld 1999 introducir a los niños y niñas en el arte, el misterio y la satisfacción maravillosa de las operaciones matemáticas.
Palabras claves: Inteligencias Múltiples, Estilos de aprendizaje: Estrategias de aprendizaje, Actitudes

Introducción

El presente trabajo es el resultado de lo que se podría llamar primera fase de un estudio que se esta realizando en cuatro escuelas primarias del distrito de Boquete sobre la influencia de la teoría de las inteligencias múltiples y los estilos de aprendizaje en la calidad de la enseñanza matemática.

Actualmente existen nuevas perspectivas psicopedagógicas de las didácticas constructivistas y socioconstructivistas de carácter cognitivo, que defienden el desarrollo de procesos de aprendizajes para que el estudiante "aprenda a aprender" donde se trata de dotarlo de habilidades y estrategias cognitivas y metacognitivas para que sea él mismo el que autorregule su aprendizaje. Estas nuevas perspectivas traerán como consecuencia modificaciones sustanciales en las formas de enseñar y aprender. Pero para que este proceso se de, es necesario que las y los maestros conozcan como el estudiante piensa, ya que así podrían ayudarlo a organizar su proceso de aprendizaje y específicamente de matemática, que es en este momento la asignatura que deseamos fomentar. A través de la manipulación y la observación los estudiantes pueden desarrollar sus habilidades y hacer abstracciones y generalizaciones. El uso de variadas representaciones tales como visual, auditiva y kinestésica pueden ayudar al estudiante a entender mejor los conceptos, ideas, procesos y procedimientos. La abstracción y la generalización son procesos que toman lugar En el cerebro de los estudiantes para construir conceptos matemáticos. Los conceptos de los números, por ejemplo, dos, cinco, cien son abstractos. Estos conceptos pueden ser construidos en sus mentes por abstracción o generalización Así el número dos es la abstracción de un juego de dos cosas y el alumno a través de la observación puede ver que este concepto se utiliza en otras situaciones similares.

Los conceptos de adición, sustracción, división y multiplicación son también el resultado de la observación y generalización y si los maestros comprenden y realizan ésta, ellos podrán probablemente cambiar la percepción y la forma como enseñan matemática. Los alumnos podrán utilizar la observación en la investigación matemática. Es por ello que se hace necesario que conozcamos como funciona la teoría de las inteligencias múltiples para lograr mayor eficiencia y educar desde la diversidad ya que cada persona es única e irrepetible. Así vemos que si una persona es hablantina es porque posee inteligencia interpersonal y aprende a través de lo que le comenta al otro, el que tiene inteligencia espacial, piensa y aprende a través de las imágenes. El que es inquieto y no puede parar de moverse, es dueño de la inteligencia física-cinestésica entonces hay que enseñarle a través de su cuerpo. El que tiene la lingüística se vale de palabras, el lógico-matemática razona todo el tiempo y el que está en soledad reflexionando, posee la inteligencia intrapersonal. Al educar sabemos que cada persona aprende de manera distinta y expresa mejor sus conocimientos según las características de cada uno. Al conocer esta teoría de las inteligencias múltiples y la de los estilos de aprendizaje cada docente deberá planificar valiéndose de una amplia gama de recursos, para llegar a esas siete inteligencias

Objetivos

Mejorar la calidad de la enseñanza matemática en las escuelas primarias implementando con los maestros estrategias de enseñanza derivadas de las teorías de las Inteligencias Múltiples y los estilos de aprendizaje

Metas de la Investigación

Estimular al docente para que sea un ente investigación dentro del salón de clases.

Mejorar la comprensión de los alumnos de las escuelas primarias, en las lecciones de matemática.

Problema

En la actualidad vemos como investigadores educativos y personal docente se interesan en encontrar mejores formas para que el estudiante aprenda con interés y motivación la matemática utilizando estrategias viables que mejoren la calidad de su educación. Vemos como las personas como individuos o como miembros de la sociedad manifiestan una serie de quejas con relación a como aprenden sus hijos y frecuentemente se critica al estudio de la matemática. Se dice que los niños o niñas no pueden contar bien, no conocen como dividir o multiplicar, no pueden pensar lógicamente, no pueden medir correctamente, no pueden cambiar dinero, entre otras. La comunidad educativa se queja de que los estudiantes no se pueden concentrar bien, que son muy pasivos en las lecciones de matemática o que tiene miedo de ella, que las actitudes de los estudiantes hacia la matemática es desfavorable, que muchas veces el promedio de calificación de los estudiantes en matemática es uno de los mas bajo.

Es por estas situaciones que es una prioridad estimular y potenciar las habilidades de aprendizaje a través del conocimiento por parte de los docentes de las inteligencias múltiples y los estilos de aprendizaje puesto que así se podrá motivar a los estudiantes a que aprendan activamente matemática, que los profesores cambien su percepción acerca de la forma como enseñan matemática, que la enseñanza efectiva se estimule usando diferentes estrategias de enseñanza atendiendo a las diferencias individuales y al aprendizaje cooperativo.

Marco Teórico
Aspectos Teóricos relacionados con la Teoría de las Inteligencias Múltiples y los Estilos de Aprendizaje.

Inteligencias Múltiples: La inteligencia es un constructo que no es fácil definir. Muchos autores están de acuerdo que el concepto inteligencia se refiere al conjunto o serie de capacidades mentales, otros la definen como la habilidad para solucionar problemas y que comprende el uso de la lógica, la vinculación de ideas y el ver un problema en su totalidad. Corrientemente cuando observamos a una persona que resuelve fácilmente problemas matemáticos o participa muy bien en una problemica decimos que es una persona inteligente pero no decimos lo mismo cuando vemos jugar muy bien a un deportista o cuando un mecánico resuelve con destreza un desperfecto del motor. Esto sucede ya que estamos utilizando un sistema tradicional ahora no se habla de una inteligencia sino de varias inteligencias.Howard Gardner cree que la inteligencia esta conformada por muchas capacidades separadas o inteligencias múltiples, cada una de las cuales es relativamente independiente de las otras. Es difícil determinar de manera precisa cuantas inteligencias separadas podrían existir pero Gardner y su equipo de trabajo de la Universidad de Harvard han identificado ocho tipos diferentes: la inteligencia lógico matemática, la inteligencia lingüística, la inteligencia espacial, la inteligencia musical, la inteligencia corporal-kinestésica, la inteligencia interpersonal, la inteligencia intrapersonal y la inteligencia naturalista.

Estilos de aprendizaje: Otro de los aspectos que se han de resaltar se refiere al hecho de que cuando queremos aprender algo cada uno de nosotros utiliza su propio método o conjunto de estrategias, que varían según lo que deseamos aprender y esas preferencias o tendencias a utilizar más unas determinadas maneras de aprender que otras constituyen nuestro estilo de aprendizaje. Aunque no todos aprendemos de la misma manera si recibimos estímulos a cada momento pero que procesamos de forma diferente y se le presta atención también de forma diferente, así vemos que se selecciona la información a través de nuestra preferencia e interés así tenemos que algunas personas utilizan los siguientes sistemas para representar mentalmente la información:

El Sistema de información visual: siempre se recuerda imágenes abstractas como letras y números, y concretas. **El Sistema de información auditivo:** es el que nos permite oír en nuestra mente voces, sonidos, música. **El Sistema de información Kinestésico:** cuando recordamos el sabor de nuestra comida favorita, o lo que sentimos al escuchar una canción. Teniendo siempre presente las diferencias individuales, estos sistemas de representación son utilizados de forma desigual donde cada persona utilizará o estimulará mas un sistema y sobrevalorará los otros. Cada sistema tiene sus propias características y es más eficaz en unos momentos de aprendizajes que en otros.

Así como la información se recibe a través de nuestros también ésta información se tiene que tiene que **organizar** y cada persona sigue un procedimiento diferente, sigue un estilo de aprendizaje muy propios. Para esta organización los teóricos mencionan diferentes formas de hacerlo y una de estos modelos es la teoría de los hemisferios que nos explica que cada hemisferio cerebral procesa la información que recibe en forma diferente, y también con formas de pensamiento diferentes.

Estrategias: Son los métodos que utilizamos para hacer o aprender algo e influyen en el proceso de aprendizaje. Pueden ser adecuados o no para la tarea que se quiere cumplir, es decir estas estrategias se pueden aprender y adecuar a las diferentes tareas e actividades que se plantean a diario y así como se aprenden se pueden desaprender y cambiar mediante la reflexión y el análisis del proceso de aprendizaje. El conocer cada estrategia su uso, cuando usarlo y que beneficio puede esperarse de ello favorece enormemente el aprendizaje y hace que el estudiante no " adivine " su aprendizaje. Existe una gran cantidad de estrategias, Weinstein y Mayco (1986) identificaron cinco tipos generales: las de ensayo, de elaboración, organizacionales de monitoreo de la comprensión y las afectivas. Como procesos mentales las estrategias y únicos, cada persona utiliza un rango diferente de ellas, además no son directamente deducibles. Una forma fácil y rápida de saber que estrategias utilizan nuestros alumnos es preguntarles ¿ como lo hacen ?

Procesos motivacionales y actitudinales: Existen estos otros aspectos que es menester tener en cuenta porque han de influir en el proceso de enseñanza aprendizaje tales como la motivación y las actitudes.

Motivación: se suele definirla como un estado interno de activación derivado de algún estímulo que activa la conducta y la dirige hacia la meta. Brophy (1987) recomendó una serie de estrategias que los docentes pueden utilizar para estimular la motivación del estudiante hacia el aprendizaje para que tomen en serio las actividades académicas y adquieran el conocimiento o desarrollen las habilidades necesarias y se sientan a gusto y disfruten de su aprendizaje dentro de las cuales podemos mencionar algunas que el docente puede realizar: modelar la motivación para aprender, Comunicar expectativas y atribuciones deseables., alentar el interés o el aprecio por la tarea, entre otras.

Actitudes: Como constructo psicológico se la define como un estado mental y neural de disposición adquirido a través de la experiencia, que ejerce una influencia directiva o dinámica sobre las respuestas del individuo a todos los objetos y situaciones con las que se relaciona. En ella hay tres componentes esenciales que son el cognitivo, el afectivo y el conductual.

Metodología: Aspectos metodológicos de la Investigación

En los aspectos metodológicos de la investigación se seleccionaron las técnicas e instrumentos metodológicos utilizados para la planeación y realización de esta investigación.

Para alcanzar los objetivos propuestos en esta investigación se requiere a utilización adecuada del método científico que permitirá obtener un producto final llamado conocimiento científico, organizado, sistemático, empírico y controlado. El método científico permitirá organizar el procedimiento lógico general para seguir en el conocimiento y llegar a la observación descriptiva y explicación de la necesidad de implementar las teorías de las influencias múltiples y los estilos de aprendizaje para mejorar la calidad de la enseñanza de la asignatura matemática en estas escuelas y por ende puede ser aplicado al resto de las asignaturas

Una vez realizada la revisión bibliográfica, planteado el problema de investigación mediante el establecimiento de los objetivos, las preguntas de investigación, la justificación y viabilidad de la misma, y en virtud al nivel de conocimiento científico (observación, descripción, explicación) que se desea lograr en la investigación sobre la Influencia de las teorías de la Inteligencias Múltiples y los Estilos de aprendizaje en la calidad de la enseñanza de la matemática a nivel de Escuelas Primarias (IV, V y VI grados) la investigación representa un estudio de carácter exploratorio y descriptivo.

Para la recolección, evaluación, tabulación, interpretación y análisis de la información (datos) utilizaremos las técnicas de la Estadística Descriptiva, que nos facilita la condensación de datos en forma de cuadros, la representación gráfica, porcentajes, entre otros.
En esta investigación la muestra la constituyen cuatro escuela primarias del total de 21 escuelas primarias existentes del Distrito de Boquete, Zona Escolar Nº6, circuito Nº4. La muestra estará integrada por las maestras que enseñan las asignaturas de grado incluida la matemática Debido a lo distante de las Escuelas primarias en el distrito se procedió a tomar una muestra no Probabilísticas de carácter subjetivo, es decir, aquella que involucra la selección de elementos que de acuerdo al juicio y la intención de la investigadora o experimentadora constituyen un reflejo adecuado de la población, por lo tanto la muestra estaría constituida específicamente por 12 maestras que enseñan la asignatura de matemática en los diferentes grados, es decir, tres maestras por cada escuela de los grados de IV, V, y VI.

Resultados

Este estudio está en su fase de ejecución por lo cual se presentan a continuación resultados parciales significativos. En cuanto a la información recogida a través de los cuestionarios aplicados a los maestros de las escuelas primarias seleccionadas del distrito de Boquete el 41.67% manifiesta que la materia fundamental en la cual existe mayor dificultad es la matemática en igual porcentaje está español, materias éstas que presentan mayores inconvenientes y concuerda con la información proporcionada por el Ministerio de Educación que de acuerdo a las estadísticas proporcionadas del periodo académico 2000 en estas asignaturas es donde se refleja el mayor índice de deficiencia. Dentro de las posibles causas se pueden mencionar el temor y la monotonía con que se tratan estas materias tradicionalmente por la dificultad para seguir las indicaciones.
Otro aspecto interesante a resaltar es la opinión que tiene los maestros de la asignatura que le resulta más difícil enseñar, que es la matemática, el 33.3% así lo manifiesta. Esta dificultad es debida a que la asignatura es más abstracta, hace falta material didáctico adecuado, los contenidos son muy extensos y además porque en ocasiones no les gusta a los docentes impartirla. Este resultado concuerda con lo que expresa Muñoz (1994) que uno de los factores que repercute sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas es el de las actitudes un tanto negativas que tiene el docente hacia dicha asignatura.

Conclusión

Algunas de las conclusiones que se pueden expresar de este estudio es:
- Que la calidad de la enseñanza de la matemática mejora al implementar en el proceso de enseñanza aprendizaje las teorías de la inteligencia múltiples y los estilos de aprendizaje porque permiten que el docente pueda educar desde la diversidad y estimular y potenciar al estudiante de acuerdo a su individualidad.
- Que los maestros y maestras que imparten la asignatura de matemática no han recibido capacitación a través de seminarios, charlas o actividades sobre los temas de inteligencias múltiples y estilos de aprendizaje ocasionando falta de información, creencias y actitudes desfavorables hacia la matemática, además, los maestros que imparten la asignatura de matemática no actúan como entes investigadores dentro del salón de clases pues al no tener información actualizada le coarta la posibilidad de considerar a cada estudiante desde su ser único e irrepetible afectando así la eficiencia y calidad de la enseñanza matemática

- Que las necesidades cognoscitivas, afectivas y actitudinales no se están tomando en cuenta en el momento de aplicar la enseñanza matemática. Las actitudes y los estilos de aprendizaje forman parte importante de la vida psicológica de los estudiantes y tienen una influencia en la académica y en las estrategias .

El análisis y discusión de los resultados del estudio permiten recomendar que se continúe con este proyecto tratando de abordar necesidades que no han sido cubiertas hasta el presente y se establezcan vínculos con Instituciones Nacionales e Internacionales para fortalecer y perfeccionar este estudio.

Sería interesante realizar estudios similares en los niveles de educación media y superior, además formar grupos interdisciplinarios constituidos pos psicólogos, matemáticos y pedagogos para implementar programas de capacitación para los docentes de educación básica que ayuden a resolver los muchos problemas que se presentan en el camino para una enseñanza matemática más eficaz.

Tomando como base lo anterior, al finalizar este proyecto se espera que dentro de la comunidad educativa cambie el enfoque del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, y la calidad de la enseñanza se mejore notablemente aplicando el concepto de las inteligencias múltiples desarrollando estrategias didácticas que consideren las diferentes posibilidades de adquisición del conocimiento que tiene la persona.

En esta transformación el docente juega un papel de primordial importancia ya que su cambio hará que en el grupo los estudiantes se sientan mas a "gusto" con lo que aprenden y disfruten ese mundo maravilloso, arte y misterio de las operaciones matemáticas.

Referencias bibliográficas

Álvarez, R. (1995*). Estadística multivariante y no paramétrica con SPSS.* México: Ediciones Diaz de Santos.

Beltran, J. (1996). *Para comprender la Psicología*. España: Editorial Verbo Divino

Buzan T.y Buzan, B. (1996). *El Libro de los mapas conceptuales* Ediciones Urano

Cooper R y Sawaf, A. (1999) *La Inteligencia Emocional* México: Editorial Norma

Daniel W. (1995). *Estadistica con Aplicaciones a las Ciencias Sociales y a la Educación.* México: Ediciones Mc Graw Hill

Gardner, H. (1994) *Estructura de la Mente. La teoría de las Inteligencias múltiples* México: Fondo de Cultura Económica.

Good T y Brophy J. (1996*). Psicología Educativa* México: Editorial Mc Graw Hill

Ministerio de Educación. (1999). *Programa de Educación Primaria* Panamá

Aprendo Matemática Panamá

Morris G. C. (1997). *Introducción a la Psicología* México: Editorial Prentice Hall

Stell R.; Torrie J. (1996*). Bio-Estadistica principios y procedimientos* McGraw Hill

Watson, R. (1979). *Psicología infantil* México: Editorial Aguilar

Von Glaserfield, E. (1999). *El aprendizaje como una actividad Constructiva.*

Robles, A. (2000). *Aprender a aprender*.

Tesis:

Centeno M. *Teoría del Aprendizaje a los métodos de enseñanza y sus aplicaciones a las matemáticas* David: Universidad Autónoma de Chiriquí

Gonzalez, S. *La aplicación de juegos en la enseñanza de la matemática.* David: Universidad Autónoma de Chiriquí.

Hernández, E. *Diagnostico de la diferencia en la enseñanza de la geometría en el primer ciclo de Educación Secundaria en la provincia de Chiriquí.* David: Universidad Autónoma de Chiriquí

El papel cuadriculado en el desarrollo lógico matemático del Nivel Inicial

Santa Daysi Sánchez González
Departamento de Pedagogía, Universidad Autónoma de Santo Domingo. República Dominicana
j.luciano@codetel.net.do

Resumen
En la comunicación breve presentada durante la celebración de la Relme 14, en Panamá, se mostraban las reflexiones y experiencias adquiridas en la asignatura Desarrollo Lógico Matemático que imparto en la Universidad Autónoma de Santo Domingo a estudiantes de la Licenciatura en Educación Inicial. Una de las actividades descritas que mas curiosidad despertó entre los participantes fue el taller mediante el cual las estudiantes aprenden a usar el papel cuadriculado para desarrollar diferentes conceptos y relaciones en los infantes. Este taller tiene como propósito presentar el papel cuadriculado como un recurso que ofrece amplias oportunidades para lograr que el niño pase de la manipulación concreta a la abstracción en su proceso de adquisición de conocimientos. Con el taller, también se propicia el intercambio de experiencias didácticas entre los profesores del nivel inicial.

Fundamentación

El pensamiento lógico matemático del niño de nivel inicial, con una edad que oscila entre los 2 y 5 años, es diferente al del adulto. Durante esta etapa se construye un pensamiento intuitivo, simbólico o pre-conceptual. Este pensamiento posee características especiales que han sido estudiadas y clasificadas por diferentes teóricos, entre los que Piaget es uno de los mas relevantes. Entre estas características se encuentran: **la irreversibilidad** o falta de movilidad en el pensamiento para volver al punto de partida; **el animismo** o tendencia a atribuir cualidades humanas a objetos inanimados; **el egocentrismo intelectual** que le incapacita para situarse o percibir un objeto desde un punto de vista diferente a la suya; el ser **realista y concreto** en sus representaciones al tiempo que diferencia muy poco entre la realidad y la fantasía.

La tarea de los educadores de este nivel es ayudar al niño a desarrollar su pensamiento lógico de modo que supere poco a poco estas limitaciones y sea capaz de adquirir conceptos y establecer relaciones. Es decir, que pueda formular ideas y pensar haciendo uso de la lógica y la razón, aprendiendo a pensar por sí mismo. En este proceso, el desarrollo de sus estructuras mentales le sirve como instrumento para conocer la realidad y operar sobre ella. El niño empieza por formarse los primeros esquemas perceptivos y motores para la manipulación de los objetos y luego establecer las primeras relaciones entre ellos. Posteriormente, agrupa los objetos en forma espontánea hasta llegar a la clasificación, establece entonces semejanzas y diferencias, relaciones de equivalencia, de mayor que y menor que. A partir de ahí, surgen las relaciones de orden con las primeras seriaciones que acercan al niño al concepto intuitivo de cantidad, al mismo tiempo que van organizando el espacio y adquiriendo nociones topológicas y temporales. A través de la actividad se va construyendo un pensamiento más móvil y reversible.

Las reformas educativas que se realizan actualmente a nivel mundial, propician el rescate del desarrollo de procesos cognitivos mas efectivos y con mayor significado para los alumnos. No basta con enseñar al individuo a repetir procesos o acumular gran cantidad de información, es necesario ayudarlo a desarrollar mayores habilidades intelectuales que le permitan tomar las decisiones adecuadas en cada circunstancia. Para contribuir con este desarrollo, los educadores debemos seleccionar las estrategias didácticas, los recursos y las actividades que puedan ayudar más fácilmente en estos fines. Necesitamos ofrecer las oportunidades al niño para que explore, manipule y esté en contacto con situaciones educativas variadas que le permitan desarrollar sus sentidos, despertar la curiosidad por el mundo que le rodea y adquirir así sus primeras abstracciones.

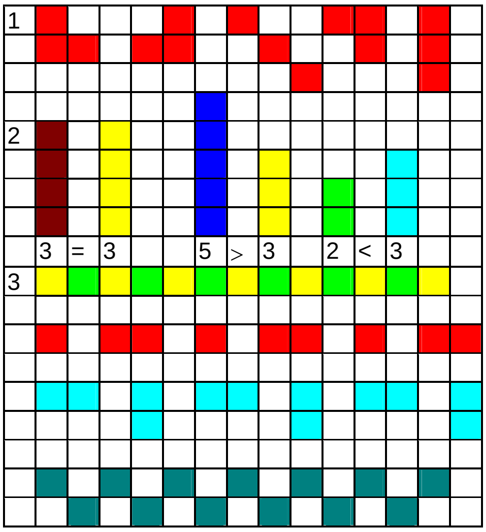
El material didáctico es de fundamental importancia para lograr estos propósitos. Es el contacto con recursos diversos, tanto en la fase manipulativa o concreta, en la gráfica-representativa o semi-concreta y en la fase simbólica o abstracta, lo que ayudará al niño en su proceso de adquisición de conocimiento. El uso de material adecuado, seleccionado y adaptado por el profesor al desarrollo intelectual de niño, facilitará el paso de una etapa a otra. El papel cuadriculado es un recurso utilizado en todos los niveles de la educación, desde el nivel inicial hasta el superior. Es un material de múltiples usos que facilita la representación de diferentes conceptos matemáticos y las relaciones que se dan entre éstos. En este taller, dirigido a profesores del nivel inicial, lo utilizamos para hacer comparaciones y seriaciones entre cantidades, para representar la idea de conservación de la cantidad, de unidades y decenas y otros muchos conceptos, así como para desarrollar la creatividad.
El taller se realiza en el contexto de una asignatura semestral que se desarrolla en sesiones semanales de 3 horas. En el transcurso de las primeras clases se analiza lo que se refiere al pensamiento lógico en sentido general, los niveles y las operaciones del pensamiento, las características y evolución del pensamiento lógico infantil, así como la relación entre las teorías existentes y la propuesta curricular de la Secretaría de Educación. Luego se estudian los procesos metodológicos del desarrollo intelectual, las etapas del aprendizaje y el desarrollo de los sentidos como base de la maduración intelectual. Se estudia el proceso de enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos matemáticos en el nivel inicial, tales como: pertenencia, correspondencia, relaciones de orden, seriaciones, clasificaciones, iniciación a las mediciones y exploración del espacio, numeración y nociones de simetría y estadística. Cada uno de los temas trabajados, de los recursos y las actividades desarrolladas, se analiza desde el punto de vista de las destrezas del pensamiento que favorece. Las operaciones de observar, comparar, clasificar, etc. forman un eje que permea todo el curso.

Desarrollo del taller

El taller se desarrolla en dos sesiones de 90 minutos, durante las cuales se realiza la presentación y fundamentación del mismo y el desarrollo de las actividades en el papel cuadriculado. Cada una de las actividades incluye instrucciones de ejecución y preguntas de reflexión que ayudan al participante a descubrir los conceptos y propiedades estudiadas. A partir del trabajo realizado, se discuten otras actividades propuestas por los participantes. A cada uno se le entregan unas cuartillas de papel cuadriculado y lápices de colores. Los cuadros representan algunos de los resultados obtenidos por los participantes en los diferentes cursos. Para el trabajo con los niños, se recomienda orientar el trabajo en cuadrículas de un centímetro o más, para facilitar el trazo dentro de los márgenes.

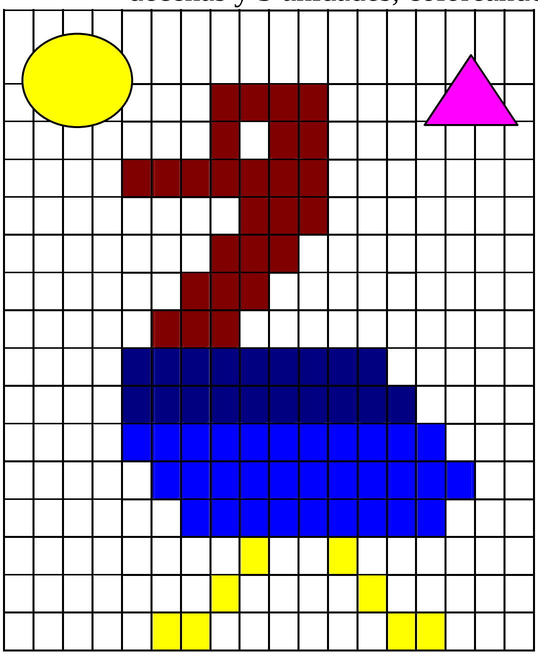
Algunos ejemplos de estas actividades son:

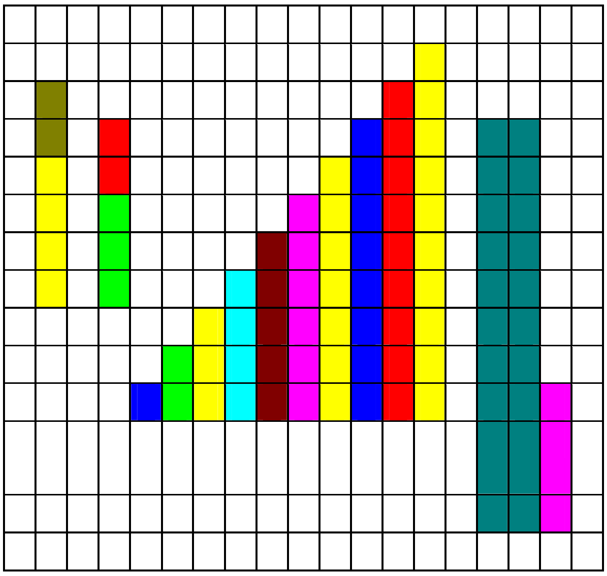
1. Rellenar 3 cuadritos consecutivos en todas las posiciones posibles. ¿Qué concepto matemático se está trabajando? ¿Qué propiedad se está aplicando?
2. **a**. Encerrar igual cantidad de cuadritos en la misma posición. Escribir la simbología correspondiente.
   b. Encerrar diferente cantidad de cuadritos en la misma posición. Simbolizar utilizando los signos: < y >. ¿Qué operación del pensamiento se está aplicando?
3. Observar secuencias dadas en el papel cuadriculado y continuarlas. Inventar 3 secuencias más.



Cuadro 1. Conservación de la cantidad, Comparaciones, Seriaciones

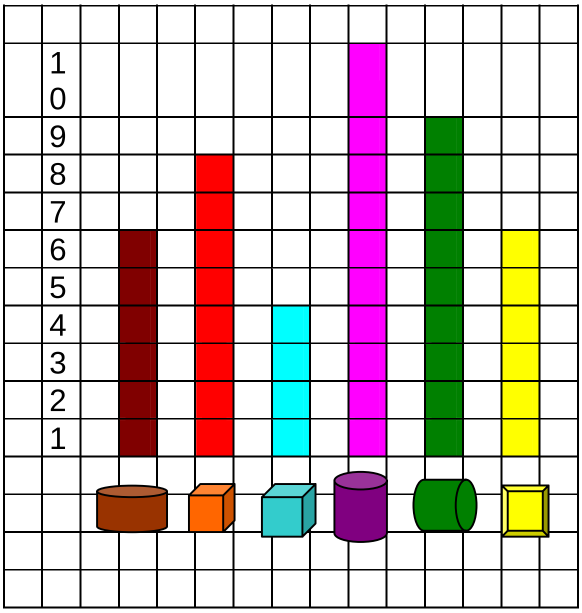
4. Dadas varias figuras, determinar qué está a la derecha, a la izquierda, arriba o debajo de alguna de ellas. ¿Qué concepto matemático se está trabajando? ¿Cuál operación del pensamiento se está desarrollando?
5. Representar los números del 1 al 10 en forma ordenada, dibujando de forma consecutiva de tal modo que cada número se represente en forma vertical y los consecutivos tengan diferente color. ¿Qué actividades pueden realizarse con esta escalera?
6. Encerrar y rellenar diez cuadritos (una decena); una decena y dos unidades; 2 decenas y 3 unidades, coloreando de forma diferente las decenas y las unidades.



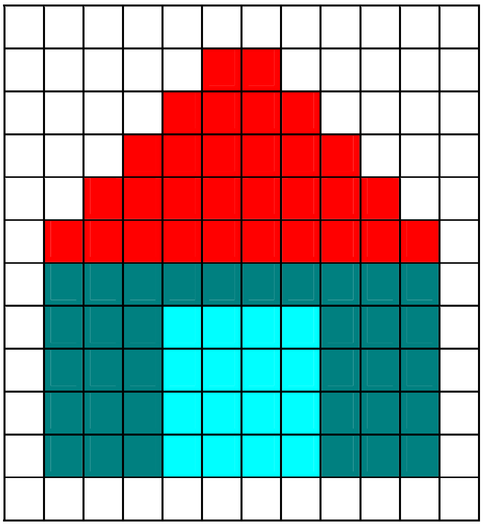

Cuadro 3. Sumas, Números del 1 al 10, Decenas y Unidades

Cuadro 2. ¿Qué está a la izquierda del pato? ¿Qué está a la derecha

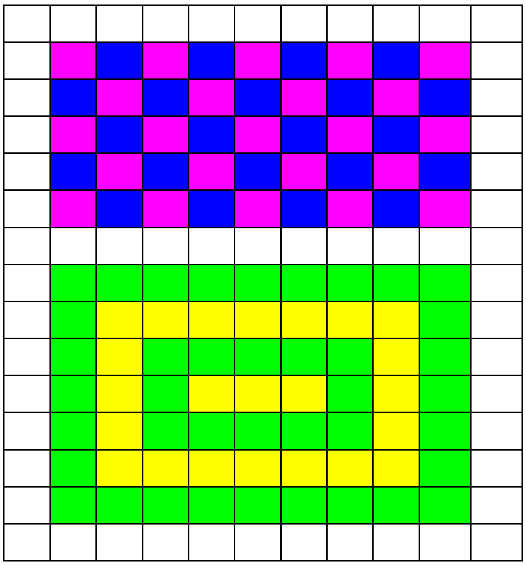
Además de las actividades anteriores se realizan otras que permiten desarrollar algunos conceptos geométricos: dibujar líneas horizontales, verticales e inclinadas, trazar líneas de la misma longitud siguiendo un patrón, dibujar y rellenar polígonos diferentes, contar las unidades de sus lados para hallar el perímetro, contar cuantos cuadritos están encerrados para hallar el área. También, trazar un eje de simetría a figuras dadas, completar figuras dada la mitad de ellas, representar datos estadísticos, hacer mosaicos, copiar una figura dada y hacer creaciones artísticas en el papel cuadriculado.



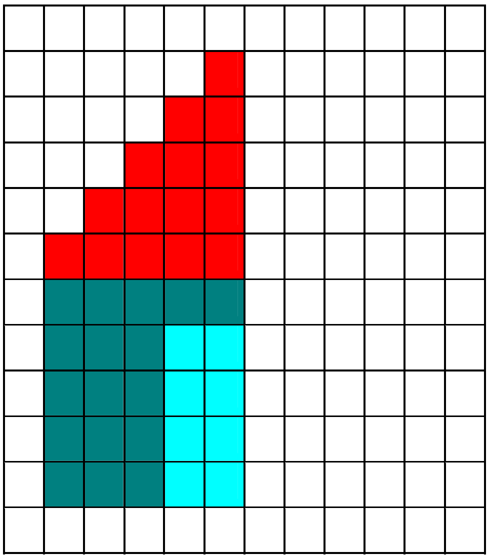
Cuadro 4. Estadística



Cuadro 5. Trazar un eje de simetría



Cuadro 7. Mosaicos



Cuadro 8. Completar la figura

La participación de los maestros fue muy activa, con importantes comentarios. Estuvimos de acuerdo en que el papel cuadriculado es un instrumento idóneo para propiciar el desarrollo lógico matemático en los niños preescolares, favoreciendo el paso de la manipulación concreta a la abstracción, permitiendo que los niños puedan observar, comparar, clasificar, ordenar, al mismo tiempo que desarrollan sus destrezas motoras. Es un material que continua utilizándose en toda la vida escolar del alumno.

La inquietud surge cuando pensamos en la capacidad de nuestras maestras preescolares y su escasa preparación académica., así como en la poca atención que se le otorga al nivel inicial en todos nuestros países. En el marco de las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa, son pocos los participantes que se interesan por esta área.

Nos planteamos entonces ciertas interrogantes: ¿Cuántas maestras de preescolar propician de forma adecuada el desarrollo lógico matemático de sus alumnos? ¿Estamos realmente enseñando a pensar en nuestras aulas? ¿Aprovechamos adecuadamente los recursos de que disponemos?

Un trabajo consciente de los dirigentes educativos permitiría el desarrollo de proyectos que pongan mayor atención a la educación inicial y nos permitan impulsar en cierta medida el desarrollo de nuestros países latinoamericanos, de modo que podamos incorporarnos ventajosamente en el mundo globalizado que se gesta en la actualidad.

Referencias bibliográficas

Cascallana, M. (1988). *Iniciación a la Matemática. Materiales y Recursos Didácticos.* Editorial Santillana, España 1988.
Estremera, R. (1993). *Conocimiento declarativo y procesal para el desarrollo de las destrezas del pensamiento.* Editorial Biblioteca del pensamiento crítico.
Luciano M. (1995). *Manual de uso del multioperatorio*. Santo Domingo.
Olivares, M (1981). *Didáctica de la Matemática Moderna. Primer Curso*. Editorial Osiris, México.

Incorporación de Distintas Perspectivas

Nivel Medio

El uso de mapas conceptuales y V de Gowin en la enseñanza-aprendizaje de la matemática

Cipriano Cruz
Universidad Central de Venezuela. Venezuela
cruzc@camelot.rect.ucv.ve

Resumen
En este trabajo se presentan los principales resultados obtenidos por algunos de los investigadores que se encuentran trabajando en la línea de incorporación de alternativas cognitivas en la Educación Matemática en instituciones y niveles diferentes del sistema educativo venezolano. Se trata de un estudio de casos con cuatro unidades de análisis (los trabajos de grado presentados por diferentes investigadores para optar a títulos de maestría en tres universidades), que, mediante un análisis evaluativo de los problemas formulados en sus respectivos contextos, los enfoques teóricos, los métodos utilizados y las conclusiones obtenidas, permite establecer la pertinencia, utilidad, relevancia y proyección del uso de los mapas conceptuales y la estrategia heurística V de Gowin en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en diferentes niveles del sistema educativo.

Introducción

La evaluación debe ser un concepto de presencia permanente en los procesos educativos y, presenta un análisis evaluativo de cuatro trabajos de grado a nivel de maestría, realizados por docentes diferentes en instituciones y niveles distintos del sistema educativo venezolano, en la línea de investigación centrada en el uso de las estrategias heurísticas mapas conceptuales y V epistemológica de Gowin.

Objetivo general de la investigación

Evaluar bajo los criterios de pertinencia, utilidad, relevancia y proyección del uso de las estrategias heurísticas mapas conceptuales y V epistemológica de Gowin, como elementos procesadores de información en la enseñanza aprendizaje de la Matemática en diferentes niveles del sistema educativo venezolano.

Justificación

En primer lugar se cree conveniente establecer que la consolidación de una línea de investigación en un área específica del conocimiento, que se encuentra en su fase de gestación, puede lograrse si los resultados que aportan los investigadores que se dedican a ella satisfacen un conjunto de exigencias mínimas que garanticen la importancia y calidad de las bases que vayan sustentando la construcción de saberes de la correspondiente disciplina.
Una segunda razón para justificar este trabajo es la necesidad de establecer una primera síntesis de estrategias y resultados que puedan ser utilizados tanto en la descripción de rumbos posibles en la línea de trabajo como en las previsiones que deban tomarse para la incorporación de los hallazgos positivos en las actividades de enseñanza-aprendizaje.
Un tercer factor a considerar es la necesidad de ir extrayendo posibles sistemas de categorías que ayuden en el necesario proceso de teorización que se genere a partir de las experiencias contextuales.

Marco teórico

El concepto central de esta investigación es el de evaluación integrativo-adaptativa (Salcedo, 1995) que establece que:

> *Evaluación es el proceso mediante el cual se delimita y describe un programa u objeto y se juzga su mérito o valor desde una visión integral, atendiendo a las necesidades, intereses y expectativas expresadas por las personas o grupos involucrados, y al contexto institucional, sociocultural y político en que se realiza, con el propósito de orientar las decisiones que contribuyan a mejorar la calidad de la entidad evaluada, tanto en su aspecto intrínseco como extrínseco (p.71).*

En concordancia con este concepto el programa es la línea de investigación, el mérito o valor se expresa a través de los indicadores de pertinencia (estudio en correspondencia con la realidad contextual, los propósitos de la educación matemática y las acciones realizadas para alcanzar dichos propósitos), utilidad (o aplicabilidad de los principios y estrategias que soportan la metodología empleada a la situación en estudio), relevancia (o importancia que tiene el estudio para obtener explicaciones acerca de cómo el profesor enseña, como aprenden los estudiantes y como es posible mejorar las estrategias de aprendizaje) y proyección (que hace referencia al impacto que la investigación tiene en la apertura de nuevos derroteros de trabajo en matemática educativa), la necesidad deriva del interés tanto grupal como institucional de fortalecer la investigación en matemática educativa en el contexto de la realidad educativa venezolana, para contribuir con acciones concretas que permitan construir aportes para superar la crítica situación actual de rendimiento en todos los niveles del sistema educativo.

Metodología

La naturaleza descriptiva de la investigación (Ary y cols. 1992) orientó las acciones hacia la elaboración de diversos cuadros comparativos entre los cuatro trabajos de grado, denominados A (Amaya, 2.000), B (Cáceres 2000), C (Cruz, 1994) y D (Morales, 1995).
Los elementos constitutivos para las comparaciones fueron: Formulación del Problema, Contexto, Marco Teórico, Marco Metodológico, Resultados, Conclusiones y Recomendaciones.

Resultados

Formulación del Problema

Los cuatro trabajos tienen en común el propósito central de determinar el efecto que tiene en el desempeño estudiantil el uso de las estrategias heurística mapas conceptuales y V de Gowin cuando las usan sistemáticamente para el aprendizaje de la Matemática, lo que varía es el nivel del sistema en el cual se trabaja y los contenidos a los cuales se aplican las estrategias

Contexto

Los contextos son diferentes: A se realiza en la Universidad Nacional Experimental de Guayana (en Puerto Ordaz, estado Bolívar), con estudiantes de tercer semestre de la carrera de Ingeniería, B tiene lugar en el Instituto Universitario de Tecnología, con estudiantes de primer año de la carrera de Técnico Superior en Electricidad (en la Región capital), C en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela (Caracas), con estudiantes del Curso Introductorio (previo a la ingreso al primer semestre de estudios) y D se realiza en el Instituto Juan XXIII, con estudiantes del noveno grado de Educación Básica (ciudad de Valencia, Estado Carabobo).

Marco Teórico

Los soportes comunes están formados por la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (1991) y el concepto de desempeño estudiantil que agrega al concepto clásico de rendimiento otras dimensiones, como por ejemplo las disposiciones del alumno frente a su proceso de aprendizaje.

Las diferencias específicas se obtienen de la operacionalización de las variables de investigación que consideran otros elementos tales como: aprendizaje eficiente de estructuras (A), estrategias para resolver problemas (B), descripción de logros de desempeño (C) y desarrollo de procesos típicos de la matemática tales como geometrización, cuantificación y formación de categorías (D).

Marco Metodológico

Dos de los trabajos (B y C) son estudios de caso interpretativo-evaluativos y los otros dos (A y D) son experimental y cuasi-experimental con diseños de pre y post prueba. Todos los marcos metodológicos se corresponden con la naturaleza de los objetivos de las respectivas investigaciones.

Resultados

Los estudios de casos señalan con precisión los aprendizajes que deben adquirir los estudiantes (conceptos, relaciones y procedimientos relacionados con los temas en estudio, métodos típicos de la matemática y estrategias generales de trabajo), las observaciones permiten asegurar que la adquisición de las nuevas estrategias no ofrece grandes dificultades y que se adquieren altos niveles de compromiso con las actividades de aprendizaje.

Los estudios de tipo experimental reportan diferencias de rendimiento favorables hacia los grupos experimentales y confirman las apreciaciones sobre la facilidad para adoptar las nuevas estrategias.

Conclusiones y Recomendaciones

En todos los trabajos pueden observarse conclusiones que señalan que las estrategias aumentan el desempeño (aunque no necesariamente el rendimiento), son de fácil adopción por los estudiantes, son aplicables a otras áreas del conocimiento, comprometen más a los estudiantes en su proceso de aprendizaje, requieren de la elaboración de materiales apropiados, son de rango más amplio en la formación que las estrategias tradicionales, ayudan a crear ambientes colaborativos para el proceso de enseñanza-aprendizaje, ayudan a transformar debilidades (baja capacidad de procesar información, falta de costumbre en

trabajar en situaciones de incertidumbre, etc.) en fortalezas, y, adicionalmente, son buenos instrumentos para autoevaluar, coevaluar y evaluar los aprendizajes.
Las recomendaciones son coincidentes al afirmar que estas estrategias deberían usarse en los diferentes niveles del sistema educativo y en otras áreas del conocimiento, y que es necesario realizar otras investigaciones en profundidad para determinar el efecto del uso de las estrategias en el desarrollo de la conciencia metacognitiva, en el trabajo en problemas abiertos, en la adquisición y uso de estrategias de solución de problemas (estructuración, análisis de medios-fines, representación, analogías, búsqueda hacia atrás, etc.) y en la construcción del pensamiento matemático (Schoenfeld, 1992).

Conclusiones y recomendaciones

La conclusión más importante es que la línea de investigación debe mantenerse, y se recomienda fortalecerla con otros investigadores que dediquen sus esfuerzos hacia los numerosos problemas abiertos y a la construcción de sistemas de categorías que constituyan el necesario paso previo a la teorización que explique los vínculos que puedan establecerse entre metacognición y matemática educativa.
En particular se concluye que la línea cumple satisfactoriamente con los indicadores de pertinencia, utilidad, relevancia y proyección, en consecuencia se recomienda incorporarla a alguno de los programas que, a nivel de doctorado en educación matemática, se están gestando en Venezuela.

Referencias bibliográficas

Amaya, M. (2000). *Efecto que produce en el desempeño estudiantil el uso de de las estrategias cognoscitivas mapas conceptuales y la heurística V de Gowin en estudiantes universitarios*. Trabajo de Grado. Universidad Experimental de Guayana.
Ary, D., Cheser, L., Razavieh, A. (1992). *Introducción a la investigación pedagógica*. México: McGraw-Hill.
Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H. (1991). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
Cáceres, R. (2.000). *Evaluación del desempeño estudiantil en Matemática a nivel de técnico superior universitario a través del uso de los mapas conceptuales y los diagramas de Gowin*. Trabajo de grado.
Cruz, C. (1994). *Evaluación del desempeño estudiantil en matemáticas a nivel superior mediante mapas conceptuales y diagramas de Gowin*. Trabajo de grado. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Humanidades y Educación. Caracas; Venezuela
Morales, E. (1995). *Efecto de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático de los alumnos de noveno grado de la educación básica*. Trabajo de Grado. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela
Salcedo*, H. (1995). La evaluación integrativo-adaptativa. Fundamentos y método. Cuadernos de Postgrado, Nº 10*. Caracas: Universidad Central de Venezuela. Facultad de Humanidades y Educación.
Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (ed.), Handbook of research on mathematics teaching and leraning (págs. 334-370). New York: Macmillan

Las ciencias de la vida

Blanca María Peralta
Centro Educativo Distrital San Bernardino, Colombia
bmpguacheta@hotmail.com blancaperalta@starmedia.com

Justificación

Normalmente las asignaturas que presentan mayor dificultad tanto en la enseñanza como en el aprendizaje, son las ciencias básicas, matemáticas, física y química; los estudiantes consideran que la causa de dicha dificultad es la poca relación de estas con la realidad. Fueron estas razones las que dieron vida a este proyecto pues, el conocimiento que pueda obtener el estudiante debe ser a partir de su propia experiencia e investigación y en esa medida será más perdurable para él mismo. Es imprescindible cambiar la imagen que tienen los estudiantes de estas asignaturas y la única manera de hacerlo es mostrando otra faceta de ellas, haciéndolas más cercanas al estudiante, que él las pueda observar, percibir, analizar desde su propia experiencia; y no una experiencia fabricada en un laboratorio, sino una verdadera vivencia, que sea significativa en su vida, de tal forma que las conclusiones que el alumno pueda extractar tengan una verdadera relevancia en el diario transcurrir.

Objetivos

1 Objetivo General

- Encontrar en algunas actividades usuales en la actualidad nociones físicas, químicas y/o matemáticas.

2 Objetivos Específicos

- Estudiar y analizar las nociones físicas, químicas y/o matemáticas, halladas.
- Fomentar el espíritu investigativo en los estudiantes.
- Incentivar el trabajo en equipo.
- Mostrar otra faceta de las asignaturas "terribles" del bachillerato.

Descripción

Antecedentes

La utilidad de algunas asignaturas fue cuestionada por los estudiantes y a raíz de estos cuestionamientos, se pretendió mostrar con ejercicios sencillos la relevancia que tienen estas en la vida futura. En el año anterior se realizó una experiencia algo innovadora en el marco de la clase de álgebra, con base en la organización de un campeonato de fútbol, se hizo el estudio de nociones de combinatoria, tema no estudiado en años posteriores ni anteriores. Dicha presentación motivó a los estudiantes a seguir participando en actividades similares, fue así como se realizaron estudios sobre la cámara fotográfica, la brújula electromagnética y el radio, principalmente se estudió el funcionamiento de ellos desde la física, los proyectos finales se presentaron en la semana cultural del colegio y en una clase de física del Liceo Segovia. La importancia de estos proyectos radica en que los estudiantes que lo realizaron eran de octavo grado y fue sorprendente para ellos, los otros compañeros y en general las personas de otra institución observar el esfuerzo que habían realizado estos niños en su deseo de aprender.

Marco teórico

Con respecto a las otras especies, el hombre se encuentra en una de las etapas más altas del desarrollo biológico y posee el cerebro, órgano básico complejo de cognición. Por eso mismo, en el análisis de las causas intrínsecas de la forma de aprender a conocer, los investigadores miden en relación con el hombre, cómo la realidad se refleja en su cerebro, esto es cómo los objetos, los fenómenos y las transformaciones de la naturaleza y de la sociedad actúan dialécticamente generando representaciones en el cerebro.

El tema del aprendizaje se ha tratado en todos los tiempos y es así como antiguamente se tenía la noción de que "aprender era memorizar"; pero no es ciertamente con textos y frases de memoria como resolvemos nuestros problemas o acertamos en nuestra empresa. Ya decía Séneca que aprendemos no para la escuela, sino para la vida, el simple hecho de guardar en la memoria textos y palabras no prepara a nadie para la realidad de la vida con sus complejos problemas, no desarrolla la inteligencia, no aguza el ingenio, ni estimula la reflexión, sólo forma alumnos que repiten pasivamente lo que estudian y que conservan esquemas mentales rígidos e invariables.

El *aprendizaje es un cambio relativamente permanente del comportamiento, que ocurre como resultado de la práctica*.

- Con respecto a lo anterior, el cambio debe ser más o menos permanente, con cierta temporalidad que manifieste un nivel de persistencia, es decir, lo que se aprende no se olvida inmediatamente y el conocimiento permanece; de lo contrario, no se aprendió nada.
- Todo aprendizaje implica una dosis de entrenamiento y su perfección no sólo resulta de una metódica repetición, sino de una adecuada asimilación.
- El aprendizaje como operación es aquello que ocurre durante el proceso que llamamos aprender, tanto en el aula de clase como en la vida corriente; situaciones que caben dentro del esquema funcional de una conducta de entrada, seguida de un proceso enseñanza-aprendizaje y que termina con la conducta final.

El aprender tiene lugar como consecuencia de distintas solicitaciones; por ejemplo, puede estar relacionado con la solución de problemas intelectuales con participación o no, de la motricidad, o con la consolidación de actitudes y respuestas en forma de esquemas lógicos y motores o de rasgos particulares del carácter (respuestas afectivas); por lo tanto, en el aprendizaje se adquieren conocimientos, hábitos, destrezas y actitudes que envuelven nuevas maneras de hacer las cosas; no es el aprendizaje un proceso hecho pedazo a pedazo, sino una forma secuencial de crecientes asociaciones o relaciones. Mediante el aprendizaje el individuo cambia su manera de reaccionar, lo cual se produce gracias a su capacidad de razonamiento, la manera de percibir el mundo circundante, las reacciones emotivas y otras actividades sicológicas.

El aprendizaje al igual que la educación, produce cambios en la manera de pensar y actuar. Aprender no sólo es retener; no consiste en repetir un contenido, se trata de un proceso mucho más complejo, eminentemente operativo y en el cual se cumple un papel fundamental todos los procesos mentales y el esfuerzo de la persona que aprende.

El aprender depende más del alumno que del maestro, pues es requisito prioritario, que el que aprende esté mentalmente activo; así el alumno es el verdadero promotor del aprendizaje. Por otro lado, la enseñanza del maestro va unida al aprender del alumno y consiste en proyectar, prever, controlar, estimular y orientar las experiencias del aprendizaje para guiar la obtención de los objetivos que se proyectan.

Se considera que el aprendizaje académico es una variable del aprendizaje humano y como tal es un cambio de conducta mediante el proceso planeado y evaluado de actividades realizadas por un individuo, para la adquisición de conocimientos y elementos afectivos y sicomotores. Así pues, cuando se habla de práctica en el campo de la educación, no se debe pensar que es otra forma de repetición; en cambio de esto, hay que aceptar que la práctica es una forma de creación, algo que ilumina el conocimiento y lo hace encajar con una mayor posibilidad de persistencia, ya sea como valor afectivo, como elemento intelectual o como aplicación neuromotriz.

La educación no es un simple proceso de instrucción de los hombres en los saberes y conocimientos desarrollados por otros. Por el contrario, es un proceso del cual es responsable el mismo hombre, ayudado por procedimientos y estrategias metodológicas que le provee la institución educativa; la educación informal pretende ampliar la cobertura de los sistemas educativos para hacerlos más democráticos y hacer más estimulante el proceso del aprendizaje.

El buen estudiante es capaz de aprender por sí mismo; al ser su propio guía, su propio maestro, se responsabiliza de su aprendizaje, se compromete voluntariamente en el trabajo de estudiar y de mejorar continuamente sus procedimientos de estudio.

Nadie puede decir sin embargo, que ha conseguido totalmente la capacidad de autoaprendizaje. Esta capacidad debe verse como un objetivo para toda la vida; tampoco debe entenderse como la capacidad de aprender sin ayuda de nadie. Ninguna persona es autosuficiente en esta empresa, se necesita algún tipo de colaboración por parte de otros; por la misma razón la función del maestro consiste en fomentar y orientar la capacidad de aprender por sí mismo y naturalmente para esto, se debe tener en cuenta la edad de los estudiantes.

No puede hablarse de capacidad de autoaprendizaje en las primeras edades de escolaridad, puesto que su aprendizaje no pasa de ser destrezas y hábitos instrumentales mínimos y necesarios. En cambio, más adelante, en la edad en que comienza a desarrollarse la aptitud para el pensamiento abstracto, a partir de los 11 años aproximadamente, puede estimularse en forma progresiva la capacidad mencionada, de acuerdo con el grado de madurez del estudiante.

Aprender por sí mismo supone muchas cosas. En primer lugar, *querer aprender*. No basta para ello la curiosidad infantil a nivel de los primeros por qué acerca de las realidades más elementales. Se necesitan motivos sólidos que nacen de la reflexión y convicción personal.

Aprender por sí mismo supone, en segundo lugar, *saber aprender* es decir, conocer procedimientos de estudio eficientes y trabajar de acuerdo con buenos hábitos. Estos procedimientos y hábitos se refieren a tres etapas de estudio: *planificación*, saber proponerse objetivo, distribuir el trabajo en el tiempo disponible; *ejecución*, llevar a cabo periódica y organizadamente la tarea prevista; *autoevaluación*, comprobar si se han conseguido los objetivos propuestos.

Saber aprender es saber trabajar de forma autónoma. Esto implica capacidad para adoptar decisiones personales en la realización del propio trabajo: qué hacer, cuándo hacerlo, cómo hacerlo, cómo averiguar si se ha hecho bien... El estudiante debe aprender poco a poco a dirigir su trabajo.

Aprender por sí mismo supone, en tercer lugar, poder aprender. Aquí juega un papel muy importante la voluntad: La adquisición de las virtudes intelectuales es un proceso que se desarrolla en un ser provisto de pasiones y que dispone de una voluntad bien o mal inclinada... Puede haber en el hombre que aprende resistencias o inclinaciones favorables...

Para el educador es más valioso conocer el verdadero significado del aprendizaje, de tal manera que pueda actuar en consecuencia. Conocer cómo se aprende, qué procesos concurren en el aprendizaje; cuáles factores influyen en el aprendizaje y qué tipos de comportamientos pueden surgir como consecuencia de fallas, alteraciones o de un mal manejo de las condiciones que favorecen ese proceso, ayudará a que la labor que a él le corresponde sea entregada al estudiante con eficiencia, ya sea de modo oral, escrito o por cualquier otro medio, que contribuya al desarrollo humano de cada alumno.

Aprendizaje creativo

Casi todas las definiciones de creatividad incluyen el elemento originalidad; el problema radica en que unos consideran que la originalidad o novedad del producto, debe ser nueva para otras personas distintas al propio creador; mientras que otros aducen que el hecho de que la sociedad considere o no una idea como nueva carece de importancia dado que un acto es creativo si implica cierta originalidad para quien la creó. Estos sicólogos están de acuerdo con que el pensamiento creativo puede darse incluso, si la idea ha sido elaborado anteriormente por otras personas.

En general la creatividad se ha considerado como una contribución a las ideas originales, puntos de vista diferentes, respuestas imaginativas y especialmente nuevas formas de enfocar y solucionar los problemas. La conformidad por otro lado, ha sido considerada como la aceptación de lo establecido, la actuación rígida sobre las normas, la dependencia de personas expertas y autorizadas y la desconfianza en los propios recursos y experiencias.

La creatividad también puede definirse como el proceso mediante el cual se descubre algo nuevo, se redescubre lo que ya había sido descubierto por otros, se reorganizan o incrementan los conocimientos existentes, considerando que la mayoría de los descubrimientos son cosas que se ven de repente, pero que siempre han permanecido allí.

Como producto, la creatividad es considerada como el acto de dar vida a algo que para mí, antes no existía. En ella se supone que la persona producirá algo nuevo, algo que implica novedad, originalidad y un esfuerzo. La creatividad como producto, concede mayor importancia al elemento producido que al proceso, por ejemplo una composición musical, una obra poética, un esquema rítmico o una destreza deportiva.

Se puede afirmar que en ninguna otra época, el mundo se ha visto habitado por un número tan grande de personas bien informadas e intelectualmente capacitadas, pero que los problemas por resolver resultan abrumadores; hasta ahora la enseñanza ha sido demasiado autoritaria y no ha proporcionado la oportunidad para el desarrollo del pensamiento. El aprendizaje creativo está dirigido a formar una persona dotada de iniciativa, plena de recursos y confianza y lista para resolver problemas. El aprendizaje creativo pone en consideración las diferencias individuales de los alumnos, es decir sus capacidades, sus intereses, sus limitaciones, sus historias sociales, familiares, culturales, etc., exigiendo máxima flexibilidad en la enseñanza, caracterizada por la consulta y e descubrimiento para individualizar y recrear el aprendizaje con base en la singularidad de los alumnos.

La consulta y descubrimiento son las bases del aprendizaje creativo, cuyas características son la espontaneidad, autonomía y comprensión, convirtiéndose el alumno en protagonista de su propio proceso de autorrealización a través del método aprender-haciendo.

Una imaginación abierta es la clave del aprendizaje creativo; la cual estimula respuestas creativas tanto en el maestro como en el alumno; la imaginación es el antídoto contra las respuestas mecánicas. El maestro utiliza experiencias anteriores, combina materiales didácticos, métodos, ideas y nuevas formas que ayuden a los alumnos al desarrollo del pensamiento creador.

La relación implica una interacción del maestro, el alumno, el tema y las experiencias de aprendizaje; no es un grito lejano del maestro que hace una exposición magistral frente a una clase, sino que es un avanzar hacia una mejor comprensión, una mayor autorrealización y desarrollo creativo conjunto. El compromiso interpersonal estimula a aprender y a buscar soluciones a los problemas que afectan al alumno ya sea a nivel personal o del contexto social en el que se desenvuelve.
A través del aprendizaje creativo se integra el alumno con la asignatura, con los medios didácticos, con el maestro y con la problemática de su medio social.
El aprendizaje creativo refuerza el autoaprendizaje en un ambiente escolar donde se fomenta la curiosidad, el descubrimiento, la investigación, la experimentación, la crítica, la reflexión y la sensibilidad frente a la problemática social; pero debido a que el aprendizaje creativo trae sus propios riesgos como el fracaso o el temor frente a lo desconocido, al ridículo, a la crítica o al error, es necesario hacer énfasis en la autovaloración, en la confianza y en la responsabilidad creciente de la autorrealización.
Además de lo anterior, el maestro debe tomar en consideración las necesidades biológicas, sociales, culturales, afectivas, de seguridad, de pertenencia, de aprecio, de saber, de comprensión, y de lo estético; necesidades que al ser satisfechas produce como resultado un sentimiento de bienestar, equilibrio y tranquilidad.

Metodología
Para este año los estudiantes, motivados por los resultados obtenidos en el año anterior, decidieron participar en este proyecto, el procedimiento fue el siguiente:
El trabajo se propuso para los estudiantes del grado noveno, ellos debían formar grupos de cuatro o cinco personas, las cuales, escogían una labor para estudiar, algunas eran, cocina, construcción, confección, calzado, etc. Una vez escogido el tema, se buscaba una persona idónea a la cual se entrevistaba, esta encuesta incluía preguntas de información general además de otras que se referían directamente con el oficio desempeñado, la última pregunta se refería a la actividad en particular que más le agradara al entrevistado, ejemplo, en el caso de culinaria, debía ser una receta. Con base en estas respuestas, principalmente la última, se realizaba el estudio.
Inicialmente se revisaban las composiciones físicas y químicas de los diferentes elementos que constituían las "preparaciones"; una vez se tenían estas composiciones se analizaban las diversas relaciones y los diferentes cambios que se debían dar entre ellas. Es decir, se debían analizar los cambios físicos y químicos que se presentaban en las diversas "preparaciones". En el caso de ser muy complejos se escogía uno de ellos, pues se debe tener en cuenta que son alumnos de noveno grado que no han estudiado física y química.
En el transcurso de la investigación se iban presentando informes de los estudios o análisis realizados, hasta culminar con una exposición del proyecto, mostrando cada uno de los cambios sufridos por los elementos de las preparaciones. Esta exposición se hizo, en el curso, usando diapositivas, maquetas y otros recursos audiovisuales.

Análisis y discusión de resultados
Los resultados obtenidos fueron muy satisfactorios porque los estudiantes mostraron un gran interés por el estudio de estos temas un poco difíciles, pero como se asumieron de manera activa y aplicada, el estudio fue más sencillo. Los estudiantes se adentraron en diversos campos como son la composición química de las sustancias, por tanto han leído sobre alcoholes, carbohidratos, hidróxidos etc. No se realizó un estudio a profundidad, pero

ya los estudiantes llegaron a grado décimo conociendo algunos términos que serán muy utilizados y trabajados tanto en este grado como en undécimo. En cuanto a física leyeron sobre elasticidad, transmisión del calor, luz, etc. Lo cual permitió en el siguiente año una visión mas amplia de la física y tal vez un aprendizaje más significativo. Por ejemplo los estudiantes que escogieron la construcción de pilotes hicieron una visita a la construcción de un puente y la edificación de una casa, luego entrevistaron a los ingenieros encargados y por último se dirigieron al referente teórico; con todo esto se dieron a la tarea de construir ellos mismos un pilote para juzgar que tanto habían comprendido; según los comentarios de los muchachos, fueron bastantes intentos para lograr la constitución adecuada del pilote. Los estudiantes que escogieron el sancocho de pescado realizaron la misma secuencia de actividades en el momento de la preparación ellos ya tenían toda la información y centraron su atención en confirmar la información recolectada previamente, es decir, observar el desdoblamiento de almidones, los cambios físicos de los ingredientes y demás. En el caso del cuero los estudiantes se distribuyeron el trabajo y realizaron la visita, la entrevista y la revisión teórica simultáneamente, luego compartieron la información y se pusieron a la tarea de recolectar muestras de cuero y hallar las diferencias entre unas y otras en cuanto a proceso y uso.

Se destacó el uso de fuentes de información muy diversas como Internet, libros y enciclopedias, profesores de diversas áreas, visitas a los diferentes lugares en donde se realizan las actividades, es decir aprovecharon todos los recursos disponibles.

En la parte humana se destacó el trabajo como equipo, la responsabilidad en el cumplimiento de los compromisos adquiridos, respeto al escuchar y compartir las opiniones de los demás, tolerancia al entender al otro en sus diferencias, solidaridad cuando se comparten información los grupos que tienen temas semejantes, alegría pues se sienten satisfechos con la labor cumplida, al estudiar por sí solos temas de grados posteriores y tener la oportunidad de mostrar estos resultados.

Conclusiones

- Los estudiantes hallaron la interrelación de las ciencias básicas en las actividades estudiadas.
- Se hizo un estudio de las nociones físicas, químicas y/o matemáticas encontradas.
- Los estudiantes asumieron de manera alegre y responsable su labor en el desarrollo del proyecto.
- Se utilizaron diversas fuentes de información, ayudando así a la autonomía de los estudiantes, pues debieron trasladarse dentro y fuera de la ciudad para encontrar los datos necesarios.
- Los estudiantes reflexionaron sobre el desempeño de ciertas labores asumiendo que todas tienen un grado de dificultad grande.
- Se mostró una faceta de las ciencias en la que el estudiante puede participar, estudiar lo que más le atraiga y aprender significativamente de ello.

Referencias bibliográficas

Lobo, Nubia; Rodríguez, Clara. (1990). *Psicologia del aprendizaje. Teorías, problemas y orientaciones educativas.* Bogotá, Colombia: U.S.T.A

Martínez, María. (1985). *Problemas escolares. Biblioteca de psicología y educación.* Madrid, España: Cincel.

Papalia, Diane.; Wendkos, Sally. (1982). *Sicología del desarrollo. "De la infancia a la adolescencia".* Bogotá, Colombia: MacGraw-Hill.

Marcos de resolución, modelos mentales y comprensión

Inés Elichiribehety, María Rita Otero
Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. UNICEN. Argentina
ielichi@exa.unicen.edu.ar rotero@exa.unicen.edu.ar

Introducción

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación más amplio, que estudia la génesis escolar de formulaciones algebraicas y la modelización de situaciones problemáticas, desde una perspectiva cognitiva. En esta instancia se presentan resultados parciales referidos a la resolución de dos problemas, en una población de N = 264 sujetos, correspondientes a tres escuelas de la ciudad de Tandil. El rango de edad es desde 13 a 18 años.

Se asume la tesis propuesta por Gascón (1999) que interpreta al Álgebra escolar, no como "aritmética generalizada" sino como un instrumento esencial de la "modelización matemática". Al entender el Álgebra de esta manera, como un instrumento al servicio del trabajo matemático, es fundamental el papel que juega la instrucción en la construcción de la modelización algebraica. Por esta razón, se decidió indagar el desempeño de los estudiantes, para analizar sus estrategias de resolución.

Cuando los procedimientos algebraicos forman parte de la estructura cognitiva del sujeto, se produce un cambio radical en las condiciones del trabajo matemático, al reemplazar mediante el trazo escrito ciertos usos de la memoria humana permitiendo, además, la explicitación y la manipulación de la estructura del problema tratado (Gascón 1999:79).

Los dos problemas elegidos para esta investigación estuvieron precedidos por diferentes estudios exploratorios. El primero pertenece a una serie de tres, utilizados para indagar si los parámetros en una ecuación, funcionan como variable didáctica (Elichiribehety et. al.,1995). Es decir, si provocan la necesidad de procedimientos algebraicos en la resolución de problemas.

El segundo, fue abordado por Otero (1998 a, 1998 b, 1998 c) quien realizó un estudio cognitivo dirigido a mostrar que los alumnos encuentran modos de resolución que pueden ser explicados a partir de la Teoría de los Modelos Mentales Johnson-Laird (1983, 1990a, 1990b,1996). "En un estudio transversal acerca de los modelos ejecutados desde los 12 hasta los 18 años en la resolución de un problema complejo, encontramos que los sujetos evalúan el modelo para un set dado de valores, parten siempre de un ejemplo particular que reúne las características del modelo, **es decir el pensamiento basado en modelos maneja lo general como si fuera particular**" (Otero, 1999). También identificó modelos aritméticos y algebraicos, encontrándose que aparecen en todo el rango de la escolaridad media. Tales estudios permitieron definir los problemas aquí presentados e identificar modelos mentales en las estrategias de resolución de los problemas abordados en el presente estudio.

Los modelos mentales del mundo pueden ser construidos como producto de la percepción, del discurso, de la interacción social y de la experiencia interna manifestada en la habilidad del sujeto para construir modelos a partir de sus componentes primitivos, o de modelos análogos que ya poseía. Por lo tanto, todo nuestro conocimiento del mundo dependería de nuestra capacidad de construir modelos mentales. Las restricciones para la construcción de esos modelos derivan de como concebimos la estructura del mundo, de las relaciones conceptuales que gobiernan la ontología de lo real y de la necesidad de mantener el sistema libre de contradicciones (Johnson-Laird, 1983:430).

Como se ha señalado en (Otero 1999) "*Johnson-Laird construye su teoría postulando un modo analógico de razonar, en oposición a la utilización de proposiciones y reglas de inferencia. El constructo Modelo Mental, es consubstancial a este modo de razonamiento, al corroborar empíricamente las predicciones realizadas, Johnson-Laird, establece la existencia de Modelos Mentales como representaciones mentales diferenciadas estructural y funcionalmente de las proposiciones e imágenes.*"
Cuando una persona comprende un suceso real o un evento discursivo es capaz de construir una representación mental significativa, sólo si tiene un conocimiento más general de esos acontecimientos. En términos de Piaget, diríamos que la comprensión depende del marco asimilador que posea el sujeto y en términos de Ausubel, afirmamos que dependerá de la presencia de los subsumidores necesarios en su estructura cognitiva Quien comprende un problema lo hace sobre la base de informaciones, percepciones y representaciones vinculadas al hecho en sí, al contexto o situación en la que el suceso tiene lugar y a lo que podríamos denominar presupuestos cognitivos personales con relación al problema, que dirigen la recuperación de representaciones de la memoria para construir un modelo mental de la situación (van Dijk, 1992). Sin embargo, los modelos mentales y las representaciones que se construyen como parte del proceso de comprensión, no son necesariamente los más adecuados. En cualquier caso, dichos modelos influyen sobre las conceptualizaciones posteriores y sobre las representaciones internas y externas generadas a partir de ellos.

Preguntas de la investigación
1- ¿Qué marcos emplean los sujetos para resolver los dos problemas planteados?
2- ¿Qué categorías de análisis se pueden formular para describir los modelos mentales que aparecen?

Metodología y diseño de la investigación
Se diseñó un estudio transversal que abarca los dos últimos años de la Educación General Básica, primero y segundo año del Polimodal y quinto año. La tarea consiste en solicitar a todos los alumnos que resuelvan dos problemas en forma individual y anónima.
Se escogieron tres escuelas del radio céntrico de la ciudad de Tandil, dos públicas y una privada. Se trata de instituciones que tienen dos y tres turnos, en las cuales funcionan todos los niveles de la escolaridad. En la elección interesó que todos los años desde octavo hasta quinto funcionaran en la misma dependencia y que la muestra de alumnos fuera heterogénea en lo que se refiere al sector social considerado. Se seleccionaron al azar tres divisiones de cada año y siete sujetos de cada una de ellas sin tener en cuenta su desempeño en Matemática. En el momento en que se realizó la selección los alumnos estaban cursando el tercer trimestre. De esta manera constituimos una población de N=264 sujetos que abordarían varias actividades, la presentación actual es una de ellas. Los alumnos recibieron los dos problemas siguientes:

”Pablo tenía 30 varillas todas iguales (no sabemos la longitud). Javier tenía 40 varillas también todas iguales y cada una medía 4 metros más que las de Pablo. Poniendo una varilla a continuación de la otra se forman 1000 metros. ¿Cuánto medía cada una de las varillas de Pablo v Javier?”

“Se desea ubicar un grupo de alumnos en aulas. Si se distribuyen 40 alumnos por aula quedan 25 y si se ubican 42 por aula queda un alumno sin ubicar. Calcular el número de alumnos y de aulas que se dispone”.

Formulación y descripción de categorías de análisis

Una vez obtenidos los registros, se realizó un primer análisis para categorizar los 264 protocolos disponibles. La categorización se realiza tomando la terminología y los criterios del Análisis Exploratorio, por lo tanto se definen variables nominales activas e ilustrativas. Los datos serán objeto de un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples, que no se presenta en esta comunicación. Se han definido las siguientes variables y sus respectivas modalidades:

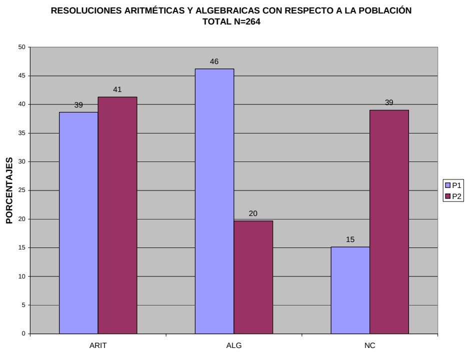
CANTIDAD DE PROBLEMAS RESUELTOS	NING: (No resuelve ninguno)
	SOLO P1: (Resuelve sólo el problema 1)
	SOLO P2: (Resuelve sólo el problema 2)
	RDOS: (Resuelve los dos Problemas)
PROBLEMAS RESUELTOS CORRECTAMENTE	SIP1: (Es correcto problema 1)
	NOP1: (No es correcto problema 1)
	SIP2: (Es correcto Problema 2)
	NOP2: (No es correcto Problema 2)
MARCOS DE RESOLUCIÓN	ARIT: (Resuelve sólo en el marco aritmético)
	ALGE: (Resuelve sólo en el marco algebraico)
	AMBOS: (Resuelve en el marco aritmético y en el algebraico)
RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DEL PROBLEMA 1	SFE1: (Formulan la ecuación pero no operan).
	OCE1: (Operan con ecuaciones mal formuladas)
	FEO1:(Formulan y operan la ecuación de manera correcta)
RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DEL PROBLEMA 1	ROS1: (Resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema)
	DIV1: (Eligen la división para resolver el problema)
	RAUM1: (Reducen a la unidad mal)
	ALGO1: (Usan el enunciado para buscar algún algoritmo)
	RAUB1: (Reducen a la unidad para encontrar el resultado correcto)
RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DEL PROBLEMA 2	SFE2: (Formulan la ecuación pero no operan).
	OCE2: (Operan con ecuaciones mal formuladas)
	FEO2:(Formulan y operan la ecuación de manera correcta)
RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DEL PROBLEMA 2	ROS2: (Resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema)
	REP2: (Resta recursiva)
	RMT2: (Resuelven mediante dos tablas)
	RCE2: (Modelo de Ana)

Presentación y discusión de datos

Para la variable *Cantidad de Problemas Resueltos* sobre N = 264 sujetos, encontramos que el 86 % intenta resolver los problemas y emplea diferentes estrategias algebraicas o aritméticas, independientemente de que los resultados sean correctos. Los datos indicarían que construyen algún modelo mental para representar y dar significado, mientras que sólo un 14% no responde.

Con referencia a la variable *Marcos de Resolución*, un 38% utiliza en ambos problemas sólo el marco aritmético, un 33% sólo el marco algebraico, mientras que un 16 % utiliza un marco distinto para cada problema. Es oportuno considerar que, el procesamiento del discurso es un proceso de naturaleza **estratégica**, en el cual una representación mental en la memoria es construida a partir de representaciones internas y externas con el objeto de interpretar y entender el discurso de otro. Los **procesos estratégicos**, como el proceso de comprensión del enunciado de los problemas, no tienen garantía de éxito, ni proporcionan una representación única del texto, las estrategias aplicadas son como hipótesis operacionales eficaces acerca de la estructura y significado del discurso y pueden ser señaladas como incorrectas en procesos posteriores (van Dijk, 1992:23). El marco de resolución que acaba siendo adoptado se vincularía con las estrategias de comprensión del discurso y con la capacidad cognitiva de sostener más de un modelo en la memoria de trabajo, en el caso en que la traducción al lenguaje algebraico no sea inmediata. El siguiente gráfico desagrega en cada problema, el marco utilizado:

Gráfico 1



En el problema de las varillas, predominan las resoluciones algebraicas (46 %) con respecto a las aritméticas (39%) y sólo el 15 % no responde. En cambio, para el problema de las aulas, las resoluciones aritméticas (41 %) prevalecen sobre las algebraicas (20%), mientras que un 39 % de sujetos no responde.

Estos resultados parecieran indicar que el problema de las varillas puede ser abordado por los sujetos desde el marco algebraico, porque su enunciado permite una traducción casi literal para plantear la ecuación. En cambio, para el problema de las aulas, la formulación de la ecuación, no parece tan inmediata y la estrategia que predomina es la aritmética. Sin embargo, notese la paridad del marco aritmético para ambos problemas, en total correspondencia con el hecho de que los sujetos construyen modelos mentales del enunciado como parte de su funcionamiento cognitivo habitual.

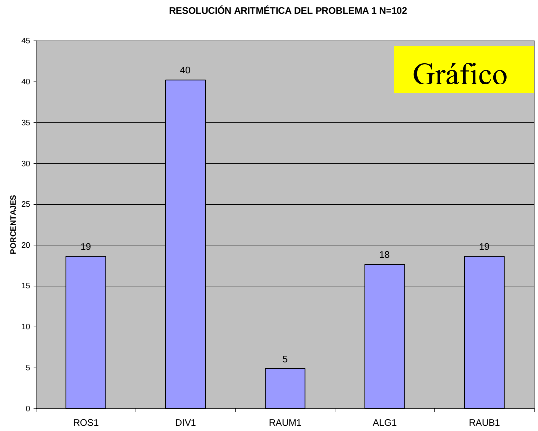
¿Cómo se resuelven los problemas?

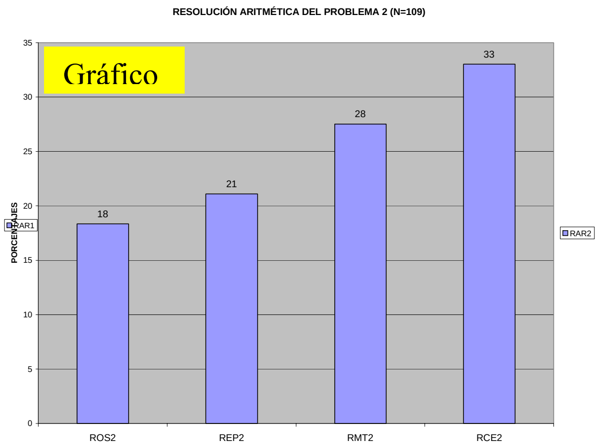
Para la variable Resolución Algebraica del Problema 1 (RAL1) las modalidades se distribuyen de la siguiente manera: los sujetos optan por formular sólo la ecuación (7%), los que operan con ecuaciones mal formuladas, sin tener en cuenta todas las relaciones del problema son un 39 % y los que demuestran una buena competencia para formular y operar con ecuaciones un 54 %. El Gráfico 2 muestra las modalidades de la variable Resolución Aritmética del Problema 1 (RAR1). La modalidad ROS1 (19 %) identifica a los sujetos que realizaron operaciones de manera errática, sin tener en cuenta las relaciones del problema.

La modalidad DIV1 presente en el 40 % de los casos, identifica al más modesto de los modelos mentales que aparecen. Los sujetos no pueden establecer todas las relaciones del problema y su estrategia se basa en realizar una división. Para comenzar a resolver consideran la longitud total (1000 m) y luego dividen, algunos por el total de varillas (70), otros, por las varillas de Javier (40). Sólo contemplan la diferencia entre ambas varillas al expresar el resultado, pero no al resolver.

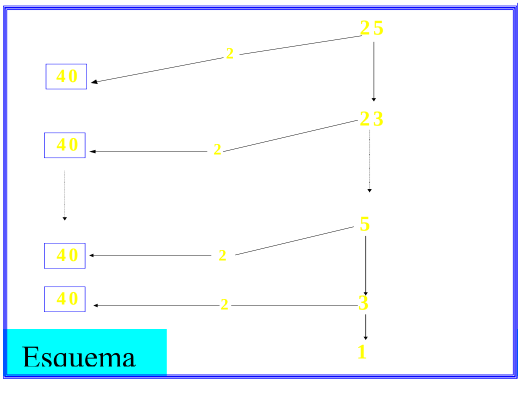
El segundo modelo que aparece se basa en la consideración de la diferencia entre las medidas de las varillas y en la estrategia de reducción a la unidad. Se ha diferenciado en las

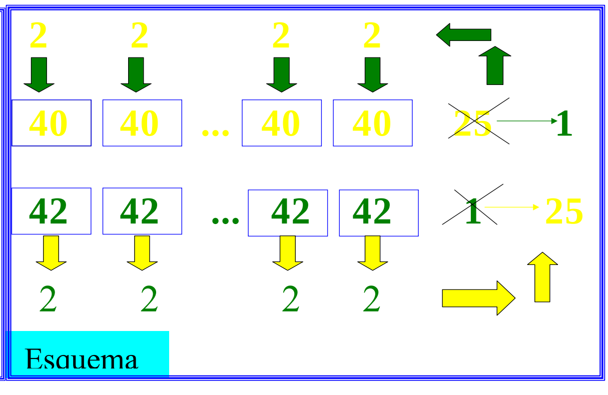
modalidades RAUM1 y RAUB1. En estos casos, los sujetos multiplican 4m x 40 y restan el valor que resulta de la longitud total. La modalidad RAUM1 presente en el 5 % de los sujetos, se caracteriza por constituir una versión fallida de la estrategia de Reducción a la Unidad, porque dividen por la cantidad de varillas de Pablo (30). La modalidad RAUB2 (19%) reduce a la unidad correctamente y al resultado le suman cuatro, indicando que es la medida de la varilla de Javier. Además, verifican el resultado
Finalmente, el modelo que corresponde a la modalidad ALG1 (18 %) consiste en utilizar el enunciado como un algoritmo. Los sujetos comienzan probando con dos números cuya diferencia es cuatro, multiplican por treinta y cuarenta respectivamente, y controlan los resultados, reiterando el proceso y deteniéndolo cuando la suma total da mil.





Las modalidades de la variable Resolución Algebraica del Problema 2 (RAL2) se distribuyen de la siguiente manera: el 2 % sólo formula la ecuación, pero no opera. El 19 % caracteriza a los sujetos que formulan la ecuación sin tener en cuenta todas las relaciones del problema y operan, sin verificar los resultados obtenidos. Mientras que el 79 % de los sujetos formulan y operan de manera correcta, verificando el resultado. Como se puede observar en el Gráfico 1, a pesar de ser menor la cantidad de sujetos que optan por la resolución algebraica (20%), los que lo hacen, tienen un alto grado de competencia.





La variable Resolución Aritmética del Problema 2 (**RAR2**) y sus modalidades se visualizan en el Gráfico 3. Sólo el 18 % de los sujetos representado por la modalidad ROS2, resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema. Las tres modalidades restantes REP2, RMT2 y RCE2 representan modelos mentales de diferente complejidad. En la primera REP2 (18%), el modelo consiste en una resta recursiva para obtener el número de aulas, luego reemplazan y obtienen el número de alumnos como se muestra en el

Esquema1. La modalidad RCE2 (33%) identifica un modelo que corrobora resultados anteriores y se representa en el Esquema 2 (Otero, 1998, 1999). Este tipo de modelo se podría considerar como espacial por la manera en que los sujetos parecen distribuir a los alumnos en las aulas. Lo que resulta muy interesante es que las operaciones realizadas remiten a la estructura de la ecuación algebraica. El Esquema 2 es nuestra interpretación (Otero, 1998, 1999) que en la actualidad está siendo empleada como representación en un marco pictórico intermedio, entre el discurso verbal del problema y la formulación algebraica. Se considera fundamental propiciar la utilización de este tipo de representaciones con los alumnos. La modalidad RMT2 (28%) designa a un modelo similar a un algoritmo que genera una tabla recursiva, que aparece en los protocolos, hasta llegar al número de alumnos buscado. Posiblemente la instrucción tenga influencia en la aparición de esta estrategia.

Conclusiones

El análisis estaría indicando que en un porcentaje elevado, los sujetos intentan algún tipo de solución orientada por los procesos estratégicos de comprensión del enunciado, en cada uno de los problemas. Cuando la transformación del enunciado verbal en formulación algebraica, no puede realizarse como una traducción literal, los sujetos emplean el marco aritmético, cuya ejecución encuentra elementos en la estructura cognitiva para desarrollar algún proceso de comprensión más o menos correcto. La ejecución del marco algebraico, dependería entonces de la existencia de informaciones y conocimientos que provienen de la instrucción.

Para el problema de las varillas es menor el porcentaje de sujetos que llegan al resultado correcto, mientras que en el problema de las aulas los sujetos que lo intentan son más exitosos. Sin embargo el primer problema intenta ser resuelto por un número mayor de sujetos, con resultados menos favorables. En cambio para el problema de las aulas, las resoluciones correctas se encuentran en mayor proporción, aunque es mucho menor el número de sujetos que lo abordan.

Con respecto a los marcos empleados, el aritmético aparece en un porcentaje apenas inferior al algebraico para el problema de las varillas y en el problema de las aulas es el marco aritmético el que predomina ampliamente. Este resultado muestra que el sujeto dispone de estrategias cognitivas en ambos casos, la diferencia reside en que los modelos mentales que se requiere ejecutar para emplear el marco algebraico son más complejos y necesitan tomar en cuenta las relaciones perceptibles a partir del enunciado y además, las relaciones que es preciso controlar para expresar algebraicamente la información del problema. Estas estrategias no están disponibles en todos los sujetos, porque dependen de la instrucción.

Sin embargo, los sujetos que resuelven con modelos aritméticos comprenden y resuelven aún cuando se controlen los parámetros, pensando en obstaculizar las resoluciones aritméticas. La clave no parecería encontrarse allí, sino en buscar ayudas que le permitan al sujeto manejar cognitivamente en la memoria de corto plazo las relaciones requeridas para la modelización. Una de estas ayudas, podrían ser los esquemas. Además, las estrategias de modelización son de carácter metacognitivo y requieren de un proceso de explicitación que no es natural ni espontáneo sino producto del aprendizaje. Un aspecto esencial de este proceso, consiste en conocer los modelos espontáneos de los alumnos y trabajar a partir de ellos, en lugar de ignorarlos.

Esta claro que los alumnos tienen que aprender a usar estrategias algebraicas en la escuela y para ello, deben hacer evolucionar sus modos espontáneos de resolver. Para que un alumno pueda llegar a ser un usuario competente del sistema matemático de signos del Álgebra se necesita que sea competente en otros sistemas de signos menos abstractos, como son el sistema de signos aritméticos y otros sistemas de signos intermedios (Filloy, 1999). También coincidimos con Gascón (1999) en que para conseguir una algebrización de la matemática en el ámbito de la enseñanza secundaria, habría que modificar *los objetivos a corto plazo,* en *objetivos a largo plazo*, porque este aprendizaje no es instantáneo.
Es muy auspiciosa la proximidad entre ciertos modelos aritméticos y la resolución algebraica, como por ejemplo para el Modelo de Reducción a la Unidad identificado como RAUB1, y el identificado como RCE2 para el problema de las aulas. El álgebra proporciona un modo de apropiarse de la estructura de los problemas, que proviene de una elaborada construcción, en la que la instrucción y la mediación escolar tienen un papel protagónico que desempeñar.

Referencias bibliográficas

Elichiribehety, I. Y Papini, C., (1995). *Los procedimientos algebraicos en la resolución de problemas,* XLV Reunión anual de Unión Matemática Argentina y XVIII Reunión de Educación Matemática, Río Cuarto ,Córdoba, 16 al 20 de Octubre.
Gascón J. (1999) *La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar.* Educación Matemática Vol. 11 Nº 1 pp. 77-88.
Johnson-Laird, P.(1983). *Mental models.* Cambridge: Cambridge University Press.
Johnson-Laird, P. (1990 a) Mental Models. In Posner, M. (de.). *Foundations of Cognitive Science.* Cambridge : MIT Press. 469-499.
Johnson-Laird, P. (1990 b) *El ordenador y la mente.* Barcelona: Ed. Paidós.
Johnson-Laird, P. (1996) *Images, Models, and Propositional Representations,* en: Models of Visuospatial Cognition, Manuel de Vega, Margaret Jean Intons Peterson, Philip Johnson-Laird, Michel Denis y Marc Marschark, Cap 3 pp 90-126, New York, Oxford, Oxford University Press.
Otero, M. R.; Papini, M. C. Elichiribehety, I. (1998 a) *Las representaciones mentales y la resolución de un problema: un estudio exploratorio.*
http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol3/n1/7indice.htm**.** Revista Investigacoes em Ensino de Ciencias. Instituto de Física, Univ. Federal de Rio Grande do Sur, Porto Alegre, Brasil.
Otero, M. R. (1998 b).*Buscando Modelos Mentales*. Disertación de Maestría. Fac de Cs. Humanas. UNICEN-UNICAMP, 243 páginas, Noviembre.
Otero, M. R.; Papini, M. C. Elichiribehety, I. (1998 c) *Las representaciones mentales y la Enseñanza de la Matemática*. Publicado en la Revista de Educación Matemática, Vol 10 (3), pág. 90. México: Grupo Editorial Iberoamericana,.
Otero, M. R. (1999) *Psicología Cognitiva, Representaciones Mentales y Enseñanza de las Ciencias* Artículo Invitado. Publicado en la Revista Investigcoes em Ensino de Ciencias. Instituto de Física, Universidad Federal de Rio Grande do Sur. PortoAlegre, Brasil. ***http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol4/n2/v4_n2_a2.htm***
Otero, M. R y Moreira M. A. (1999) *Representaciones Mentales y Significados en el Aprendizaje de la Física*. Proyecto de Tesis de Doctorado, Presentado oralmente en Julio del corriente, en el marco el Programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad de Burgos, España.
Van Dijk, T. A. (1992) *Cognição, Discurso e Interação*. Editora Contexto, S. Paulo.

Matemática y literatura

Irene Zapico; Gisela Serrano; Mónica Micelli
Instituto Superior del Profesorado "Dr. J.V. González".Buenos Aires, Argentina
izapico@yahoo.com pineiro@datamarkets.com.ar

Resumen

Esta presentación se basa en el trabajo de investigación realizado, en el transcurso del año lectivo 2000, en el marco de la UIDI (Unidad Interdepartamental de Investigación) dependiente del I.S.P. "Dr. J.V.González". Su título es *Integración de Áreas para el mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática (Conjunto de Números).* Uno de sus aspectos versa sobre algunas aplicaciones de la Matemática en disciplinas que comúnmente no se relacionan con ella; hemos investigado sobre estas relaciones y diseñado actividades, pero sólo en forma teórica ya que no estaba previsto, en el proyecto, trabajar con alumnos.

La hipótesis sobre la que nos hemos basado es que: "La enseñanza actual de la matemática provoca desinterés en los alumnos debido a que está descontextualizada.". En el mundo en que vivimos la Matemática está presente de muchas y variadas formas, nuestra intención es ponerlas de manifiesto, y mostrar que las distintas ramas del conocimiento no son disjuntas entre sí.

Nuestro universo de estudio fue la currícula actual de matemática; la historia asociada a los contenidos desarrollados en dicha currícula y las aplicaciones de estos contenidos. Para ello hemos recurrido al relevamiento bibliográfico y a entrevistas a especialistas en distintas disciplinas. En este artículo nos circunscribimos a la Literatura, en ella hemos encontrado un vasto universo, que de ningún modo hemos podido agotar. A modo de ejemplo, elegimos un texto proveniente de la Matemática Recreativa y otros pertenecientes a escritores de reconocida fama; a cada uno de ellos hemos agregado sugerencias para el docente y actividades para los alumnos.

Proponemos, como se muestra en los ejemplos, dar a conocer diferentes autores, presentar distintos aspectos extramatemáticos (lugar, época, etc.) y tomar contenidos de nuestra materia relacionándolos con ellos; relaciones que son valiosas herramientas, tanto para introducir un tema como para "finalizarlo".

Fragmento de nuestro marco conceptual

Dentro de la investigación aplicada, nuestro propósito es conectar a la matemática con otras ramas del conocimiento. Tradicionalmente, la ciencia se estudia desprovista de su historia. En otras áreas no es así. Tanto en la literatura como en todas las otras disciplinas artísticas, cada obra se estudia acompañada de la biografía de su autor, el movimiento al que pertenece, el lugar y la época en que vivió.

La ciencia, y en particular la Matemática, aparece ante los ojos de nuestros jóvenes alumnos como algo artificioso y arbitrario, desconociéndose quién la creó, por qué y para qué.

El rechazo que muchos niños y adolescentes sienten por ella, al menos en parte, se debe a que, de este modo, les resulta difícil encontrarle un sentido. Ciertamente el sólo hecho de incluir los antecedentes históricos no revertirá dicho rechazo (sería trivial pensarlo así), pero la integración de distintas áreas es uno de los aspectos que favorece el interés de los alumnos y por ello debe desarrollarse y llevarse a la práctica.

El conocimiento de sus aplicaciones y de su proceso de construcción muestra a la matemática como lo que realmente es, una actividad humana, realizada a través de los siglos, para satisfacer necesidades, tanto prácticas como espirituales, de los hombres.

La perspectiva histórica permite conocer cómo fueron creándose y construyéndose los conceptos y las teorías que hoy manejamos y también permite comparar técnicas y métodos actuales con otros que se utilizaron en el pasado.

¿Cómo se desarrolló la matemática hasta llegar a ser lo que hoy conocemos? ¿Quiénes la hicieron, porqué y para qué? ¿Qué conexiones tiene y tuvo con otras áreas? Estas y otras preguntas pueden y deberían ser respondidas.
Debemos enseñar de modo que nuestros alumnos descubran el placer de hacer matemática (resolver, demostrar, encontrar soluciones a situaciones problemáticas...) y también el placer que otorga el conocimiento en general, adquiriendo la capacidad de relacionar.
Para lograrlo no basta la formación académica específica, interesa muchísimo la actitud del docente hacia sus alumnos, hacia la matemática y hacia el saber en general.
En esta misma línea de pensamiento, tendiente a destruir el preconcepto de que la matemática es rígida, fría y alejada de toda realidad (preconcepto basado, quizás, en la forma de enseñarla), están los trabajos del Dr. Claudi Alsina, quien acuñó la expresión *una matemática feliz* y sugiere a los docentes, entre otras cosas, *mezclar enseñanza, clases y discípulos con nobleza, ilusión, ternura, emoción, estima, satisfacción,... palabras que debemos recuperar.* (Alsina, 1995).

Matemática y Literatura

El verdadero matemático es poeta, afirma Carl Weierstrass, matemático alemán del siglo XIX, refiriéndose a la obra del matemático noruego: Neils Abel (1802-1829), y agrega: *Los mejores trabajos de Abel son poemas líricos, de una belleza sublime, en donde la perfección de la forma deja transparentar la profundidad del pensamiento, a la vez que llena la imaginación de cuadros de ensueño sacados de un mundo de ideas aparte, por encima de la trivialidad de la vida y más directamente emanados del alma misma que todo lo que haya podido producir ningún poeta en el sentido ordinario de la palabra...* (Vera, 1961). Esta apreciación de un matemático de renombre sobre la obra de otro famoso matemático, puede resultar extraña a quienes son ajenos a esta ciencia, sin embargo la imaginación y la creatividad son características propias tanto de los artistas como de los matemáticos.
Quizás a algunas personas les resulte difícil pensar que la Matemática tiene conexiones con la Literatura y, también, con otras ramas tanto del Arte como del quehacer humano en general. Sin embargo, existen múltiples relaciones entre ellas. Hubo (y hay) matemáticos que se sintieron atraídos por la literatura, al punto de incursionar exitosamente en ella. Nuestro compatriota Guillermo Martínez (por ejemplo) es Doctor en Matemática y autor de espléndidos cuentos y novelas, entre éstas *Acerca de Roderer* y *La mujer del maestro*, que han sido publicadas por la prestigiosa Editorial Planeta recientemente y han alcanzado la lista de *best sellers*. El Dr. Oscar Varsavsky, quien fue profesor titular del Departamento de Matemática de la UBA, firmaba como "Abel Asquini - escritor argentino" una serie de cuentos cortos que, en clave de comedia, narran crímenes fallidos que se intentan en un laboratorio de investigaciones; estos cuentos aparecieron en la primera revista de ciencia ficción argentina: *Más Allá*, entre 1953 y 1957.
También hay quienes, desde la Matemática, orientan su talento hacia la divulgación científica y la Matemática Recreativa, transformándose en autores de verdaderas piezas literarias en las que aparecen interesantes personajes y argumentos. Se encuentran entre ellos: Yakov Perelman, Martin Gardner, Sam LLoyd, Malba Tahan, Raymond Smullyan, Jean Pierre Alem... no es posible nombrarlos a todos.
Por otro lado existen, en el campo estrictamente literario, creadores que han amado la Matemática, la han estudiado, le han dado un lugar en sus obras. Entre quienes la amaron

porque la conocieron se encuentra el poeta francés Paul Valéry; entre quienes también le dieron un lugar en sus obras: Edgar A. Poe, Antonio Machado, Jorge Luis Borges,...
Bertrand Russell es otro ejemplo de esta dualidad matemático-literaria, su obra como lógico-matemático es de fundamental importancia y fue Premio Nobel de Literatura en 1950.
Para finalizar esta breve, y muy incompleta, reseña de autores que han incursionado en la Matemática y en la Literatura, recordemos a Charles Dodgson, profesor de Matemática y Lógica, que bajo el seudónimo de Lewis Carroll nos legó sus deliciosas obras: "Alicia en el país de las Maravillas" y "Alicia a través del espejo".
Tanto los poetas y novelistas como los matemáticos desarrollan su actividad intelectual, su talento, su imaginación, capacidad creadora e intuición; no debe extrañarnos, entonces, que una misma persona tenga las condiciones necesarias para desempeñarse en ambas actividades.

A continuación, tomándolos del Trabajo de Investigación antes mencionado, presentamos algunos textos y actividades que pueden realizarse a partir de ellos.

Actividad 1
El texto que se presenta a continuación y la idea de códigos son apropiados para trabajar el concepto de función y para poner de manifiesto una aplicación de las funciones biyectivas. El mismo texto es adecuado para discutir sobre la idea de error y su importancia relativa, según el cálculo en el que intervenga.

Martin Gardner, el máximo referente de la Matemática Recreativa, nació en Tulsa, Oklahoma (EE.UU.). Ha iniciado a los lectores en cientos de entretenimientos matemáticos, desde los más raros hasta los más obvios, desde su sección "Juegos Matemáticos" en *Investigación y Ciencia* y sus publicaciones en *Time* y *Newsweek*. Es autor de más de veinticinco libros de juegos, curiosidades y entretenimientos matemáticos. Actualmente vive en Hendersonville, Carolina del Norte (EE.UU.). De su libro *¡Ajá!* hemos tomado:

El código maravilloso
El doctor Zeta es un científico de Hélix, una galaxia perteneciente a otra dimensión del espacio-tiempo. Un día, el Dr. Zeta viajó hasta la Tierra para recoger información sobre los humanos.
El Dr. Zeta se alojó en casa de un científico norteamericano, de nombre Herman.
Herman: ¿Porqué no te llevas una *Enciclopedia Británica*? Es un magnífico resumen de todo cuanto sabemos.
Dr. Zeta: Una idea formidable, Herman. Lástima que no pueda transportar un cuerpo de tanta masa.
Sin embargo, puedo codificar la enciclopedia completa con esta barra de metal. Haciendo una marca en ella tendré suficiente.
Herman: ¿Estás de broma? ¿Cómo podrías hacer que una simple marca contenga tantísima información?
Dr. Zeta: Elemental, querido Herman. En vuestra enciclopedia hay menos de 1000 signos y letras diferentes. A cada letra o símbolo le asociaré un número de 1 a 999, añadiendo a la izquierda ceros si son precisos, para que todos tengan tres cifras.
Herman: Sigo sin entenderlo. ¿Cómo vas a expresar la palabra *gato*?

Dr. Zeta: Es sencillo: gracias a esa clave que te acabo de explicar. *Gato* podría codificarse 007001020015.
Valiéndose de su potente computadora de bolsillo, el doctor Zeta revisó rápidamente toda la enciclopedia, traduciendo su contenido completo en un número gigantesco. Anteponiéndole un 0 y una coma, lo transformó en un decimal.
El doctor Zeta trazó una marca en su regla, que la dividía con mucha exactitud en dos longitudes a y b, de forma que la fracción a/b fuera generatriz el número decimal del código.
Dr. Zeta: Cuando retorne a mi planeta, una de nuestras computadoras medirá a y b muy exactamente, y después calculará el cociente a/b. Este número decimal será descodificado, y el ordenador imprimirá para nosotros vuestra enciclopedia.

Actividades sugeridas para los alumnos:
1) ¿Qué números corresponden a cada una de las letras de la palabra *gato* en el código ideado por el Dr. Zeta?
2) ¿Qué tipo de función debe establecerse entre un conjunto de símbolos y otro que lo reemplaza, para crear un código?
3) a) Completar el siguiente código. Cada par ordenado indica que la letra, que es la primera componente, debe reemplazarse por el número que es la segunda componente del mismo par: **(a; 01), (b; 02), (c; 03), (d; 04), (e; 05), (f ; 06), (g; 07), (h; 08)...** ¿Por qué utilizamos dos cifras para cada letra?
b) Descifrar el siguiente mensaje, que está escrito con este código: **0907240113040104**
c) ¿Cuál es el dominio y cual el conjunto imagen de la función que define a este código?
4) ¿Es posible llevar a la práctica lo que el Dr. Zeta propone? ¿Qué papel juega el error?
5) Para hacer una marca y luego reconstruir el número, tal como el Dr. Zeta lo propone, ¿con cuántas cifras decimales se podría trabajar?

Actividad 2

Funes, el memorioso, un texto de Jorge Luis Borges, sirve para trabajar cualquier contenido relacionado con sistemas de numeración, sus características y las facilidades que presentan para operar. Por otra parte, es interesante que los alumnos tomen conocimiento del hecho de que Borges, siendo escritor, conocía, admiraba y valoraba la Matemática como uno de los grandes logros alcanzados por el hombre.
♦ *Jorge Luis Borges (1899-1986) es, para muchos críticos, el más grande poeta de habla hispana del siglo XX. Es muy difícil hacer una breve reseña de su vida y su obra, para ello citamos a Salas,...Dentro de doscientos o trescientos años, cuando las cronologías se confundan y algunos nombres de esta época confusa hayan desaparecido de los textos de historia, la obra de Borges continuará deslumbrando, enriquecida por nuevas generaciones de lectores que descubrirán - no cabe duda - luminosidades que hoy ni siquiera intuimos. (Salas, 1994).*

Actividades sugeridas para los alumnos:
1) Leer el cuento *Funes, el memorioso* de Jorge L. Borges. Subrayar y buscar en el diccionario las palabras del texto cuyo significado no conozcas
2) ¿A quién se refiere Borges cuando dice: *Locke, en el siglo XVII, . . .*? Investigar quién fue este personaje y expresarlo en, a lo sumo tres líneas

3) Describir, en pocas palabras, al protagonista de este cuento de Borges.
4) ¿Cuáles son las tres características que definen a nuestro sistema de numeración? ¿Cuál es el origen de dicho sistema? ¿Qué otros sistemas de numeración conocen? ¿Qué características tienen? Comparando distintos los sistemas de numeración, ¿cuál o cuáles te resultan más aptos para realizar las operaciones fundamentales? El sistema de numeración ideado por Funes, ¿tiene alguna de las características mencionadas? ¿cuáles? ¿Qué crítica hace el narrador de la historia a Funes? ¿qué comparación?

Actividad 3

Antonio Machado (1875-1939) fue uno de los grandes poetas de la lengua castellana. Hemos visto que el concepto de infinito, en Matemática, está estrictamente ligado a los conjuntos de números, Machado también pensó en esto y en su obra en prosa, que lleva por título "Juan de Mairena. Sentencias, donaires, apuntes y recuerdos de un profesor apócrifo", publicado en 1936 (Palacios, 1997) se puede observar este hecho. Es notable como Machado expresa ideas sobre el infinito muy similares a las planteadas por Galileo en su *Diálogo de dos Nuevas Ciencias* (Dantzig, 1971), aparecido en 1636, que es el primer documento histórico sobre el tema de los conjuntos infinitos. Remitimos a los lectores interesados a ver los textos de Machado y Galileo para trabajarlos con los alumnos, ambos textos permiten un acercamiento al concepto de infinito, de más está decir que deben ser complementados con alguna noción de la Teoría de Cantor, para evitar que les quede una idea errónea. Si bien no es un tema que aparezca en los contenidos, implícitamente se encuentra en los Conjuntos de Números.
Hemos observado que los chicos, aún los menos partidarios de nuestra materia, se interesan en las cuestiones del infinito, se sorprenden con sus características, descubren la importancia y necesidad de las demostraciones en Matemática y, a nosotros, nos permite retomar, repasar, ahondar, temas ya dados.
Agregamos a continuación algunas sugerencias para realizar dicho trabajo.

Actividades sugeridas para los alumnos:
1) ¿Quién fue Galileo Galilei? Averiguá dónde y cuándo vivió y cuál fue su obra.
2) ¿A qué conjunto de números se está refiriendo Salviati, en el diálogo de Galileo?
3) Relacionar el poema de Machado con el diálogo de Galileo, ¿qué ideas aparecen en ambos textos?
4) ¿Qué resolución propone cada uno de ellos para las cuestiones planteadas?
5) Analizar el texto de Machado para obtener conclusiones sobre los conjuntos infinitos.
6) ¿Con qué palabras se expresa en él que un conjunto infinito puede ponerse en biyección con un subconjunto propio?
7) Demostrar que el conjunto de los números naturales es coordinable con el conjunto de los números pares. Ídem con los impares.
8) Buscar otros ejemplos de conjuntos infinitos. Discutir si cada uno de ellos es o no es numerable.

A manera de conclusión

En este artículo les mostramos una parte de nuestro trabajo, que, a su vez, sólo es una pequeñísima parte de lo que se puede hacer, relacionándonos con la Literatura.
Tomando también otras disciplinas, las posibilidades de encontrar aplicaciones, reflexionar, conectar la Matemática con otras áreas ... se multiplican.
Consideramos de fundamental importancia transmitir a nuestros alumnos el amor al conocimiento en sus diversas formas y, para hacerlo, nada mejor que mostrarles que no nos empeñamos en mantenernos aislados del resto de los saberes, sin que esto nos haga perder de vista nuestra principal función: enseñar Matemática. Precisamente es alrededor de nuestra disciplina que hacemos girar todas las actividades.
Con este material, dirigido a la Literatura, intentamos mostrar un camino que puede profundizarse encontrando otros textos adecuados (hemos sugerido algunos autores y obras en la Introducción) e ideando tareas para que los alumnos trabajen sobre ellos.
Integrando distintas áreas estamos promoviendo, en los chicos, la capacidad de tener una visión más amplia sobre el mundo. Dentro de 20 o 30 años, ellos estarán en plena actividad; no es posible saber qué conocimientos específicos necesitarán, pero una actitud abarcativa los ayudará a desempeñarse.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (1995). *Una Matemática Feliz y otras conferencias*. Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Borges, J. L. (1971). *Ficciones*. Barcelona, España: Editorial Planeta.

Dantzig, T. (1971). *El número, lenguaje de la ciencia.* Buenos Aires, Argentina: Hobbs-Sudamericana.

Gardner, M. (1981). *¡Ajá!* Barcelona, España: Editorial Labor.

Le Lionnais, F. y colaboradores (1976). *Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático.* Buenos Aires, Argentina: Eudeba.

Palacios, A. y otros (1995). *Los matematicuentos (Presencia matemática en la literatura).* Buenos Aires, Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

Palacios, A. y otros (1997). *La matemagia del laberinto (Hacia la integración del saber).* Buenos Aires, Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

Salas, H. (1994). *Borges, una biografía.* Buenos Aires, Argentina: Grupo Editorial Planeta.

Sterne, L. (1985). *Vida y opiniones del caballero Tristram Shandy.* Madrid, España: Ediciones Akal.

Toranzos, F. (1999). *Cuando Borges conoció a Cantor (Relaciones entre la matemática y la literatura fantástica moderna).* Texto de la conferencia expuesta en el marco del Primer Congreso Argentino de Educación Matemática. Buenos Aires, Argentina.

Vera, F. (1961). *Veinte Matemáticos célebres.* Buenos Aires, Argentina: Los libros del mirasol.

Acertijos: ¿sólo para jugar?

María José Arias Mercader; Guillermina Marcos
Colegio Nacional Rafael Hernández, U.N.L.P., Argentina
gmarcos@netizen.com.ar mjarias@hotmail.com

Resumen
Este trabajo describe la primera fase de una experiencia que surgió de reconocer que los acertijos no son sólo juegos, sino que constituyen problemas que involucran conceptos, y especialmente procedimientos, fundamentales tanto para Matemática como para otras Ciencias. Para su resolución son necesarios la lógica, el pensamiento lateral, la interpretación, el razonamiento, el ingenio, la creatividad y modelizaciones que tengan en cuenta los elementos pertinentes en cada caso.
Dicha primera fase consistió en un concurso de resolución de acertijos del que participaron 900 alumnos de edades entre 12 y 18 años, que concilió los aspectos mencionados con otros tales como: favorecer la integración grupal, el trabajo en equipo, la discusión, el intercambio de ideas y el hecho de considerar los aportes de todos los integrantes. Para el trabajo, los alumnos estuvieron organizados en sus respectivos cursos junto a un docente (preceptor o profesor de un área diferente a Matemática), logrando que todos se involucraran en una propuesta ante la cual todos fueron pares.

Marco teórico

Entendemos que el conocimiento matemático es una construcción, es decir, que los objetos matemáticos son construidos por los sujetos mediante la abstracción reflexiva en el sentido de Jean Piaget, no siendo entidades externas al sujeto, ni características de los objetos. Sin embargo, existe un cuerpo de conocimientos matemáticos que los hombres han ido construyendo como respuesta a problemas que se fueron presentando en las distintas épocas. En este proceso de construcción histórica, el conocimiento se fue despersonalizando y descontextualizando, pasando a ser parte de la Ciencia Matemática y, por lo tanto, de la cultura.

En el aula, los niños no construyen conocimientos matemáticos en respuesta a problemas que naturalmente surgen de su realidad. Deberá ser el docente quien favorezca la contextualización y funcionalización de ese conocimiento general y formal que elaboró el matemático en épocas con características sociales, económicas y culturales muy distintas de las que viven sus alumnos.

Dicha funcionalización se logrará a través de situaciones que permitan a los alumnos participar activamente de la comprensión del conocimiento, y pueden ser extramatemáticas (de la vida cotidiana o de otras disciplinas) o intramatemáticas. Estas situaciones didácticas deben permitir una génesis artificial del conocimiento matemático. Según este enfoque adquiere gran importancia la resolución de problemas. Siguiendo a Brousseau (1983), “No hacemos Matemática sino cuando nos ocupamos de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar las buenas preguntas es tan importante como encontrar las soluciones.”

Teniendo en cuenta que “aprender Matemática es construir el sentido de los conocimientos matemáticos” (Brousseau, 1983), los alumnos no sólo deben poder reconocer en qué situaciones un conocimiento es útil, sino también cuáles son los límites de su utilización y realizar en estos casos una búsqueda de conceptos o procedimientos alternativos. Así, es de esperar que puedan incorporar conocimientos con niveles crecientes de organización, de manera de disponer de los mismos cuando las circunstancias lo requieran, valorando su funcionalidad para resolver problemas y estableciendo a la vez alcances y limitaciones.

En numerosos casos, los acertijos no son sólo simples juegos sino que constituyen problemas que involucran conceptos, y especialmente procedimientos, fundamentales para la Matemática tanto como para otras Ciencias en tanto muestran la necesidad de considerar todas las posibilidades, por más inverosímiles o extravagantes que parezcan.

Muchas grandes revoluciones del pensamiento científico tuvieron lugar gracias a pensadores que se atrevieron a cuestionar lo que todos daban por sentado. A continuación formularon alguna hipótesis que seguramente los demás hubieran considerado absurda. Así, Copérnico se atrevió a pensar que el centro del sistema planetario es el Sol; Darwin supuso que la especie humana había evolucionado a partir de formas de vida inferiores; Einstein conjeturó que la estructura del Universo no se somete a la Geometría Euclideana.

A decir de su creador, Edward de Bono, "el pensamiento lateral consiste en intentar resolver problemas con métodos no ortodoxos o aparentemente carentes de lógica. En realidad, estas técnicas pretenden reorganizar los conocimientos y percepciones ya existentes, para llegar a una idea nueva....No importa cuán disparatadas sean las asociaciones, seguramente el cerebro sabrá hallarles significación". De Bono llegó a este concepto al preguntarse de qué no son capaces las computadoras y responderse "del pensamiento creativo y perceptivo".

La lógica, la interpretación, el razonamiento, el ingenio, la creatividad son fundamentales a la hora de resolver este tipo de acertijos y, a la vez, la discusión, la confrontación de diferentes puntos de vista y el trabajo en equipo contribuyen de manera notoria. Desde ya, todos estos son aspectos de fundamental importancia a trabajar con nuestros alumnos.

Objetivos

- Favorecer la integración grupal de los cursos a través de un desafío donde son fundamentales el trabajo en equipo, la discusión, el intercambio de ideas y el hecho de considerar los aportes de todos los integrantes.
- Contribuir al conocimiento e intercambio entre alumnos de diferentes divisiones, aun de diferentes niveles y turnos.
- Favorecer el trabajo de procedimientos que involucran necesariamente el razonamiento, el ingenio y el pensamiento lateral.
- Mostrar la limitación de modelos y la necesidad de recurrir a modelizaciones diferentes teniendo en cuenta los elementos pertinentes en cada caso.
- Fomentar el trabajo creativo y la originalidad.
- Involucrar a todos los actores intervinientes a través de una propuesta ante la cual todos fueran pares.

Destinatarios

900 alumnos del Colegio Nacional de la Universidad Nacional de La Plata de edades comprendidas entre 12 y 18 años

Desarrollo

- *Primera fase: "Concurso de Resolución de Acertijos"*

Se llevó a cabo un "Concurso de Resolución de Acertijos" entre 30 cursos del Colegio, de manera tal que cada división participó como un equipo.

Durante un tiempo estimado de una hora, cada uno de los 30 equipos resolvió los acertijos propuestos (30 en total) con el acompañamiento de uno o dos docentes (profesor y/o preceptor). Posteriormente un Jurado analizó las respuestas y determinó la división ganadora. Las reglas del concurso, explicitadas por adelantado, establecían que cada acertijo bien resuelto sumaba un punto, y cada uno mal resuelto restaba un punto y no resolverlo ni sumaba ni restaba puntos. Los equipos (divisiones de 30 alumnos cada una) sabían también qué cantidad de acertijos recibirían y cuánto tiempo tendrían para trabajar sobre ellos. Esta información les permitió ver que, a la hora del concurso, sería fundamental la organización grupal, sobre la cual pudieron trabajar previamente. Fueron los mismos alumnos los que discutieron y decidieron al respecto; así, en cada grupo surgieron diferentes estrategias: hubo quienes se organizaron en grupos más pequeños y dividieron el trabajo para realizar luego una revisión general, quienes designaron coordinadores o encargados para distintas tareas, etc.

El análisis de las producciones de los alumnos correspondientes a la Primera Fase, nos permitió categorizar los acertijos utilizados, según los aspectos que funcionaron como dificultades más importantes en cada caso, todos ellos vinculados al pensamiento lateral. Estos aspectos, que se ilustran en la Figura 1, suelen aparecer interrelacionados entre sí en muchos de los acertijos. Para ejemplificar, podemos citar los siguientes casos:

- Una persona ante un cuadro dice lo siguiente: "No tengo hermanos ni hermanas. El padre del retratado es el hijo de mi padre" ¿Qué parentesco tiene con el retratado?

Este acertijo es, claramente, un problema de lógica. La dificultad apareció a la hora de establecer relaciones y, especialmente, de validarlas.

- Aunque el transatlántico estaba atracado en el puerto, la señora Quémareo se encontraba tan mareada que no se atrevió a salir de su camarote. A mediodía, el ojo de buey situado junto a su cama se encontraba exactamente a 7 metros sobre el nivel del agua. En ese instante, la marea subía a razón de 1 metro por hora. Suponiendo que la velocidad con que sube la marea se duplique cada hora, ¿cuánto tardará el agua en cubrir el ojo de buey?

Para resolver este acertijo, muchos grupos desconocieron al sentido común y al conocimiento cotidiano (gracias al cual sabemos que el nivel de flotación no depende de la cantidad ni de la profundidad que exista debajo del objeto); e incluso al conocimiento científico escolar (nociones de empuje y flotación). Tendieron a asociar la aparición de números con la realización de cálculos y, como es habitual, recurrieron a un modelo de proporcionalidad lineal.

- Hace ya muchísimo tiempo, en una tórrida noche valenciana, cayó a medianoche una tremenda tormenta (fruto, quizá de las alteraciones climáticas que propicia el Niño) ¿Es posible que 72 horas después ya tuvieran en la hermosa ciudad de Valencia un tiempo soleado?

En este caso, operó como dificultad el manejo de la información; casi todos los grupos se distrajeron con lo que en este caso funcionaba como información accesoria y comenzaron a hipotetizar sobre cuestiones tales como el posible impacto de la corriente del Niño en Valencia, la ubicación geográfica de la ciudad, la duración de los efectos de las alteraciones climáticas causadas, etc. Muy pocos identificaron que 72 horas después de medianoche, vuelve a ser medianoche y que la pregunta no se refiere a la posibilidad o no de lluvia sino a la presencia o no del sol.

- Anteayer Candela tenía 17 años. El año próximo tendrá 20 ¿Cómo puede ser?

La resolución de este acertijo, implica la identificación del caso particular para el cual esta situación resulta posible. Se trataba de identificar cuál era el único día del año que hacía esto posible. En este caso la identificación del caso particular tiene que ver con aspectos temporales. Otros acertijos tienen igual dificultad pero en relación a aspectos espaciales ("Un cazador recorre 40 km hacia el sur, luego 20 km hacia el oeste, posteriormente recorre otros 40 km hacia el norte y se encuentra en el punto de partida, ¿cómo puede ser?")

- La superficie cubierta de camalotes de un lago se duplica cada día. En un mes exacto el lago está completamente cubierto ¿En qué momento exacto estuvo cubierta de camalotes la mitad de la superficie del lago?

Nuevamente resultó común el uso del modelo de proporcionalidad lineal. A los grupos les resultó difícil detectar que el modelo no servía para esta situación y que era necesario recurrir a otro. Por otra parte, algunos de los alumnos de los años superiores recurrieron a modelizar la situación con una progresión geométrica, lo cual resultaba adecuado, pero en muchos casos se enredaron en los cálculos en vez de hacer hincapié en el concepto, que les hubiera permitido arribar a la respuesta correcta de manera más sencilla.

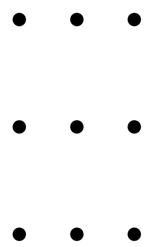
- Un niño que no tiene manzanas sube a un árbol que no tiene manzanas, pero el niño baja del árbol con manzanas ¿Cómo es esto posible?

El enunciado de este acertijo envuelve una cuestión semántica que consiste en el juego con el plural de la palabra manzana. Los que lo descubrieron pudieron resolverlo correctamente.

- Una tarta debe ser repartida entre dos niños. Cada niño presta especial atención a que su trozo de tarta no sea más pequeño que el del otro niño ¿Cómo debe ser repartida la tarta de manera que cada niño crea haber recibido, por lo memos, la mitad de ella?

La resolución solicitada consiste en un procedimiento y no en un resultado abstracto, lo cual resultó una dificultad, quizá por la falta de este tipo de problemas en nuestro Colegio.

- ¿Puedes trazar cuatro líneas rectas, sin levantar la punta del lápiz del papel, que pasen por los nueve puntos de la ilustración?



En este problema de visualización, el inconveniente deviene de la cota que las personas tienden a imponerse, tomando como límite el cuadrado mayor determinado con vértices en los puntos, cuestión que no se desprende del problema.

Cabe destacar que la selección se realizó teniendo en cuenta que hubiera acertijos de distinto grado de dificultad y, especialmente, que ni las diferentes edades de los alumnos participantes ni su grado de escolaridad influyeran en la posibilidad de resolverlos o no.

- *Segunda fase: "Concurso de Creación de Acertijos"*

En una segunda fase, se propuso a los alumnos la 'creación' de acertijos, tarea que implica un trabajo de creatividad mayor. Los mismos podrían tener uno o varios autores. En este caso, el Jurado consideró la originalidad, la creatividad, la conexión con aspectos relativos a nuestra ciudad y nuestro Colegio, etc.

- *Tercera fase: "Con los Acertijos a otra parte"*

Se implementarán Jornadas de Resolución de Acertijos en Escuelas de Educación Básica de nuestra ciudad, para propiciar el intercambio entre alumnos del Colegio y de otros contextos, y la divulgación de la producción intelectual de nuestros alumnos en el marco de una propuesta de apertura y conexión con la comunidad en general y en particular con otras Instituciones. En tal sentido, el grupo de alumnos participantes trabajará aspectos vinculados a la organización, a la divulgación, a la comunicación oral y escrita, etc.

Resultados y conclusiones

Los acertijos permiten a niños y adultos resolver problemas que rompen con las rutinas mentales y las visiones estereotipadas, además de jugar, compartir, organizar, intercambiar y ser par. Generan un ambiente distendido, en el cual alumnos y adultos no se sienten examinados como se desprende de las expresiones de satisfacción de docentes y alumnos.

Los alumnos participaron con un alto nivel de entusiasmo y compromiso. Resulta relevante el cambio de actitud hacia la propia capacidad de resolver problemas que mostraron algunos alumnos que no se destacan en Matemática. Esto, sumado a la fuerte incidencia que la eficiencia en los aspectos organizativos tuvo en los resultados del Concurso, generó reorganización de roles en algunos grupos, según las apreciaciones de sus docentes. Sería de esperar que tareas como ésta y como la prevista en la tercera fase, que involucran a todo el grupo de forma cooperativa, pudieran modificar favorablemente la dinámica grupal.

También los adultos se involucraron fuertemente en la tarea y así lo manifestaron. El trabajo realizado permitió el intercambio entre profesores de distintas áreas sobre cuestiones como el concepto de problema y la dinámica de cada grupo. Hubo, además, una repercusión muy positiva en el Colegio y en la comunidad en general.

Por otra parte, el hecho de que los alumnos de los años inferiores hayan tenidos en general mejor desempeño que los de mayor edad es un fuerte llamado de atención a los docentes, dado que el mayor grado de escolaridad parece haber influido negativamente en el pensamiento lateral de los niños, reforzando el uso de fórmulas y modelizaciones en algunos casos incorrectas. El trabajo previsto en la segunda fase podría favorecer la discusión sobre los alcances de distintos modelos, evitando las visiones estereotipadas que la escolaridad parece imprimir a los niños.

Referencias bibliográficas

de Guzmán, M (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona, España: Labor.

Weisberg, R .(1987). *Creatividad. El genio y otros mitos.* Barcelona, España: Labor.

Taton, R (1973). *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos.* Barcelona, España: Labor.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona, España: Paidós.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problèmes d´enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques* (La Pensée Sauvage), 4.2, página 170.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: S. XXI.

El pensamiento lateral en el aula de matemática

Lisa V Holgado de Mejail, Berta J. Chahar, Marta I Marcilla de Rulli, Patricia M Villalonga de García, Susana González de Galindo
Fac. de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
lvholgado@yahoo.com bchahar@unt.edu.ar mmarcill@unt.edu.ar

Resumen
El pensamiento, en sí mismo, tiene como objetivo la acumulación y desarrollo de la información en la forma más favorable posible. Para lograr tal fin, es fundamental que el pensamiento lógico se complete con las cualidades creativas del pensamiento lateral. El pensamiento lateral es un conjunto de procesos destinados al uso de la información de modo que genere ideas creativas mediante una reestructuración perspicaz de los conceptos ya existentes en la mente. Puede cultivarse y adquirir habilidad en su uso con el estudio y además, desarrollarse mediante ejercicios prácticos, de manera que pueda aplicarse de forma sistemática a la solución de problemas de la vida diaria y profesional. Si bien la enseñanza de la matemática ha rendido culto exclusivo al pensamiento lógico, las limitaciones inherentes al comportamiento de la mente constituida como un sistema de memorización optimizado, ha derivado en la necesidad del pensamiento lateral. Esta es una propuesta para que empecemos a considerar la posibilidad de dar un espacio para introducir el pensamiento lateral dentro de la clase de matemática, de modo que el alumno pueda hacer un uso óptimo de la nueva información. Así apelará al pensamiento lateral cuya función es la reestructuración (perspicacia) de los modelos fijos de conceptos y la creación de otros nuevos (creatividad). Ya que los estudiantes deben saber que una consigna o problema en matemática no siempre tiene una única vía de solución, que puede haber varias y ser todas correctas. En el aula, el pensamiento lateral tiene que ver con el mecanismo de revisión de los supuestos que se tienen frente a una situación determinada y la posibilidad de volver a elegirlos, o no, pero siempre de una manera consciente. En este trabajo se exponen los principios básicos del pensamiento lateral, su estrecha relación con la creatividad y sus diferencias con el pensamiento vertical o lógico, también se incluyen algunos ejemplos sencillos que ilustran claramente este pensamiento y servirán de punto de partida al docente para su clase.

Introducción

El término pensamiento lateral fue acuñado por Edward de Bono para describir un tipo de pensamiento distinto al pensamiento convencional o normal. El pensamiento lateral es un conjunto de procesos destinados al uso de la información de modo que genere ideas creativas mediante una reestructuración perspicaz de los conceptos ya existentes en la mente. Hoy es reconocido como una fuerza importante y necesaria para el cambio, en la manera de adquirir aprendizajes. Es una habilidad personal significativa que puede permitir resolver problemas en casa, en el trabajo o en los estudios; puede desarrollarse mediante el entrenamiento, exigiendo sólo un cambio de actitud mental y un enfoque abierto a la solución de problemas. Para lograr que los alumnos adquieran conocimientos significativos, debemos fomentar en ellos ciertas habilidades del pensamiento y capacidades de razonamiento, evitando hacer un mal uso de la memorización y repetición de conocimientos. (Durán Pomposo, 2000)

Relación entre creatividad y pensamiento lateral

La creatividad es una capacidad mental que compromete a toda la personalidad del individuo, no es un proceso exclusivamente cognoscitivo. En él intervienen además de formas específicas de pensamiento, la imaginación y la fantasía, unidos a otros procesos preconscientes e inconscientes como los afectos, motivos y necesidades del individuo.
La creatividad existe potencialmente en todos los seres humanos y es posible desarrollarla siempre que exista unidad de los procesos afectivos y cognoscitivos. (Colectivo de Autores,1997)

El pensamiento lateral desempeña un papel importante en el desarrollo de la creatividad al apartarse de concepciones rígidas y permitir la versatilidad, la ambigüedad y la incertidumbre en la generación de nuevos enfoques e ideas. Reduce la rigidez de un encadenamiento exclusivamente lógico de las ideas y permite que se supere la selectividad propia del pensamiento lógico, que obstaculiza el proceso de búsqueda de alternativas y puntos de vista novedosos. El pensamiento lateral tiene mucho en común con la creatividad, pero mientras esta última constituye con excesiva frecuencia sólo una descripción de los resultados, el pensamiento lateral incluye la descripción de un proceso.

El pensamiento lateral tiene como fin la creación de nuevas ideas. Las nuevas ideas son factores de cambio y progreso en todos los campos, entre ellos , por supuesto, nuestra querida matemática. Por ello, es conveniente emplear el pensamiento lateral de manera consciente y deliberada, en lugar de esperar simplemente que la perspicacia y la creatividad se manifiesten por sí mismas.

El desarrollo de la creatividad en los alumnos no depende sólo del uso de técnicas específicas, es preciso que en su labor cotidiana, el docente de matemática trabaje en la creación de determinadas condiciones que propicien ese desarrollo. El docente puede jugar un papel muy importante en el logro de una atmósfera creativa en el aula, que ayude a los estudiantes a conocer sus potencialidades y a aplicar sus capacidades en la solución creadora de tareas y problemas diversos. También es necesario que el profesor tenga presente las características de los miembros que componen el grupo de trabajo, además de las condiciones en las que trabaja y se desarrolla el grupo, a saber, seguridad psicológica para crear y la receptividad a todas las ideas que se manifiesten.

♦

Principios básicos del pensamiento lateral

Para comprender mejor el concepto de pensamiento lateral , veamos cuales son los principios básicos de este tipo de pensamiento, llamado también pensamiento divergente.

1 El pensamiento lateral tiene como objetivo el cambio de modelos, o sea, de la disposición u ordenación de la información en la mente.

Un modelo es cualquier concepto, idea, pensamiento o imagen que puede repetirse en su forma original cuando algún estímulo determina su reaparición. Por modelo también se entiende una secuencia de tales ideas, pensamientos o imágenes en una forma que le confiere carácter unitario; por tanto, un modelo es también un conjunto o secuencia de varios modelos que pueden constituir el enfoque de un problema, un punto de vista, un criterio. El pensamiento lateral trata de descomponer las estructuras de los modelos con el fin de obtener una ordenación óptima de la información disponible, una visión perspicaz.

Ejemplo 1

Un ejemplo que ilustra perfectamente la teoría del pensamiento lateral es el conocido problema de los dos ciclistas que estando en puntos diferentes, a 30 kilómetros de distancia, salen a encontrarse a una velocidad de 15 kilómetros por hora. Una abeja que vuela a 50 kilómetros por hora parte de la nariz de uno de ellos y vuela hasta la nariz del otro, para luego regresar. Si el insecto sigue volando en ambas direcciones hasta que los ciclistas se encuentran, ¿cuántos kilómetros recorrió?

Según De Bono, este problema se le planteó a uno de los más grandes matemáticos de este siglo, y éste lo resolvió utilizando una técnica matemática algo intrincada para trabajar con series decrecientes. Sin embargo, muchos escolares resolvieron este problema de una forma mucho más simple. Calcularon que los ciclistas tardaron una hora en encontrarse, y puesto que la abeja volaba a 50 kilómetros por hora, ésta tuvo que haber recorrido 50 kilómetros.

Es de suponer que como el matemático pudo resolver el problema de la manera más difícil (y estaba preparado para ello), ni se le ocurrió tomar en cuenta el camino más fácil.
El pensamiento lateral (el que hicieron los escolares) es un proceso generador que "busca romper la autoselección natural de los clichés. Cualquier cosa que es fija, aceptada o dada por supuesta, puede examinarse de nuevo intentando liberar la información presa allí dentro o quitar los efectos de interrupción que puede estar sufriendo".De Bono,1989

2 El pensamiento lateral es a la vez una actitud mental y un método para usar información

La base del pensamiento lateral es considerar cualquier enfoque a un problema como útil, pero no como el único posible ni necesariamente el mejor. Niega la creencia generalizada de que lo que constituye un modelo útil sea el único modelo posible y rechaza la subordinación del pensamiento al uso y combinación de modelos rígidos.

Ejemplo 2

Un profesor de física preguntó a sus alumnos cómo se podía conocer la altura de un edificio utilizando un barómetro. Obviamente, esperaba que primero midieran la presión en la planta baja, luego en la terraza y que finalmente aplicaran las leyes de Pascal ya aprendidas. Sin embargo, un alumno respondió a la pregunta de la siguiente manera: “Ato el barómetro a una piola. Subo hasta la terraza y lo voy deslizando por un costado del edificio hasta que el objeto toque el piso. Luego, hago una marca en el extremo de la piola que tengo en mi mano, mido la distancia que hay desde ahí hasta el barómetro y la longitud resultante es la altura del edificio”. En este caso, el supuesto, aunque no estaba explícito, era que los alumnos debían aplicar las leyes de Pascal.
Hay una gran cantidad de supuestos que manejan los docentes de forma inconsciente todo el tiempo. Los estudiantes deben saber que una consigna o problema no siempre tiene una única vía de solución, y que puede haber varias y ser todas correctas.
En el aula, el pensamiento lateral tiene que ver con el mecanismo de revisión de los supuestos que se tienen frente a una situación determinada y la posibilidad de volver a elegirlos, o no, pero siempre de una manera consciente.

3 El pensamiento lateral prescinde de toda forma de enjuiciamiento o de valoración

El pensamiento lateral sólo intenta contrarrestar la rigidez con que se han formado los modelos. La información no se usa por su valor intrínseco, sino por su efecto; se prescinde de las razones que la justifican y los razonamientos de que surgió. Se consideran sólo los efectos que puede tener su aplicación.
El pensamiento lateral es disgregador, tiene que descomponer las partes integrantes de los modelos para que se produzca su reordenación. Por esta razón puede emplear información que nada tiene que ver con la situación que se estudia, así como aplazar la valoración de las ideas hasta que se complete su desarrollo, evitando por consiguiente bloquear ideas que en una fase inicial de su proceso se consideran erróneas.
En su libro "El mecanismo de la mente"(1969), De Bono explica que "uno corrientemente procede paso por paso hasta que llega a alguna parte. Un problema puede tratarse avanzando desde el principio hasta el fin, pero también retrocediendo desde el final. En lugar de proceder resueltamente a lo largo de un camino, uno salta a un punto diferente, o a varios puntos diferentes por turno, y luego espera hasta que se conecten y produzcan un diseño coherente. Si este es efectivo, no importa si ocurrió de manera consecutiva o no". Es decir, si se está dentro de una estructura y no se puede alcanzar determinado objetivo, a veces hay piezas que se deben reacomodar, y esto se logra revisando los supuestos previos que se tienen de esa situación

4 El pensamiento lateral se basa en las características del mecanismo de manipulación de la información en la mente.
El pensamiento lateral descompone los modelos establecidos para liberar la información que contienen. Estimula la formación de nuevos modelos por yuxtaposición de datos provenientes de otras fuentes. La efectividad de estas medidas deriva de la propia capacidad de optimización de la mente, que espontánea y automáticamente ordena la información disponible en nuevos modelos. Sin esta reordenación automática del sistema, el pensamiento lateral sería estrictamente un factor disgregador y estéril.

♦ **Carácter distintivo del pensamiento lateral**
El pensamiento lateral tiene un carácter específico y debe tratarse en particular, teniendo en claro que es complementario del pensamiento lógico, ya que el pensamiento lateral no se basta a sí mismo y el pensamiento lógico aumenta extraordinariamente en efectividad con la adición de este nuevo proceso, que le brinda ideas para su elaboración lógica.
Veamos algunas de las diferencias entre el pensamiento lateral y el pensamiento vertical, que señala De Bono, (1989):

- *El pensamiento vertical es selectivo; el pensamiento lateral es creador*

El pensamiento vertical selecciona un camino mediante la exclusión de otros caminos y bifurcaciones. El pensamiento lateral no selecciona caminos, en cambio, trata de seguir todos los caminos y de encontrar nuevos derroteros.

- *El pensamiento vertical se mueve sólo si hay una dirección en que moverse; el pensamiento lateral se mueve para crear una dirección*

El pensamiento vertical se mueve en una dirección claramente definida en la cual se entrevé una solución. Se emplea para ello un enfoque y una técnica concretos. En el pensamiento lateral se aspira al cambio y al movimiento como medios para una reestructuración de los modelos de conceptos.

- *El pensamiento vertical se basa en la secuencia de las ideas; el pensamiento lateral puede efectuar saltos*

Mientras que con el pensamiento vertical se puede avanzar sólo de modo gradual, con el pensamiento lateral los pasos no tienen que seguir un orden determinado. Puede saltarse a una nueva idea y rellenar el lapso después.
Cuando se llega a una solución, su validez no depende de lo acertado del camino seguido; la solución puede tener sentido en sí misma independientemente del camino seguido. En general, cuando se llega a un punto dado es posible construir retrospectivamente un camino lógico que conduce al punto de partida.

- *En el pensamiento vertical cada paso ha de ser correcto; en el pensamiento lateral no es preciso que lo sea*

La esencia del pensamiento vertical es la obligada corrección de cada paso. Sin este requisito no podrían existir ni la matemática ni la lógica. En cambio, en el pensamiento lateral no es necesario este requisito, a condición de que la conclusión final sea correcta. (De Bono, 1989)

- *En el pensamiento vertical se usa la negación para bloquear bifurcaciones y desviaciones laterales; en el pensamiento lateral no se rechaza ningún camino*

Hay ocasiones en que es necesario pasar por una idea errónea para llegar a una idea correcta. Esto ocurre cuando la idea es errónea sólo en el contexto tradicional de una situación, cuando dicho contexto se reestructura, la idea aparece como correcta. Aun cuando el contexto de la situación no se cambia, el uso de una idea errónea puede determinar la consecución de una solución correcta.

Ejemplo 3

La geometría de Euclides parece contener una lógica eterna. Mucho tiempo después, alguien hizo la observación de que la geometría de Euclides sólo era aplicable al "universo" particular de una superficie plana. Por ejemplo, en una superficie esférica, los ángulos de un triángulo suman más de 180 grados. Imaginemos un globo que representa la tierra. Si elegimos dos líneas de longitud cualesquiera (a excepción de las que son exactamente opuestas), se formará un triángulo con el vértice en el polo norte y la base en el ecuador. Como las líneas cortan el ecuador en ángulo recto, la suma de los ángulos de base ya da 180 grados, sin contar el ángulo del vértice.

♦ Ejemplo 4

Consideremos la siguiente secuencia:

12	6
8	4
4	7

Se solicita a la audiencia que explique la lógica de esta secuencia. Primero, todos tienden a pensar en términos de matemáticas. Luego, piensan en términos de la ortografía de los números. En realidad, la secuencia sólo puede resolverse en Italia. La palabra correspondiente a 12 (dodici) tiene seis letras; la palabra correspondiente a 8 tiene cuatro letras (otto) y la que corresponde a 4 (quattro) siete. Ningún razonamiento del universo del "inglés" bastaría para resolver este problema. Lo que se quiere señalar es que si se está pensando en un universo equivocado, es posible que no se comprenda algo que resulta lógico, y hasta obvio, en el universo correspondiente.

- *En el pensamiento vertical se excluye lo que no parece relacionado con el tema; en el pensamiento lateral se explora incluso lo que parece completamente ajeno al tema*

El pensamiento vertical es selectivo por naturaleza y se prescinde de lo que parece ajeno al contexto de la situación que se estudia. En cambio, al problema estudiado por el pensamiento lateral se asocian factores externos a fin de provocar una disgregación de los modelos en sus partes componentes.

- *En el pensamiento vertical las categorías, clasificaciones y etiquetas son fijas; en el pensamiento lateral no lo son*

El pensamiento vertical se basa en la rigidez de las definiciones, de la misma manera que en la ciencia matemática las operaciones se basan en el carácter inalterable de los símbolos. En cambio, el pensamiento lateral utiliza la fluidez de los significados, de manera análoga a como el ingenio emplea un repentino cambio de significado para producir su efecto.

- *El pensamiento vertical sigue los caminos más evidentes; el pensamiento lateral los menos evidentes*

El pensamiento lateral busca deliberadamente los enfoques menos obvios. Esto constituye un principio básico, explorar un camino que aunque carecería de interés puede, eventualmente conducir a una solución valiosa. En el pensamiento vertical se tiende a seguir el camino más espacioso y señalizado como la dirección correcta.

- *El pensamiento vertical es un proceso finito; el pensamiento lateral, un proceso probabilístico*

Con el pensamiento vertical se confía en llegar a una solución; con el pensamiento lateral no se garantiza necesariamente una solución, simplemente se aumentan las probabilidades de una solución óptima mediante la reestructuración de los modelos.

Una solución creativa

Con la idea de sondear en qué medida el alumno hace uso de su pensamiento lateral, propusimos en el aula el siguiente problema:

La edad de Juan es el doble de la que tenía Pedro cuando Juan tenía la que ahora tiene Pedro. En total suman 49 años. ¿Cuáles son sus edades actuales?

Este problema tiene solución mediante un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, proceso que seguramente hubiera intentado cualquier profesor de matemáticas.

Sin embargo, una vez más nos vimos sorprendidos con la creativa solución que ofreció un alumno, Martín, , a este problema.

El uso consiente y deliberado del pensamiento lateral lo llevó a probar distintos caminos, los que fueron oportunamente desechados. Aquí presentamos el que finalmente lo llevó a la solución del problema planteado:

- *La suma de las edades es 49.*
- *Juan es mayor que Pedro. Es decir, Juan tiene por lo menos 25 años.*
- *La edad de Juan es par. Es decir, Juan tiene por lo menos 26 años.*

Los pares que cumplen con estas tres condiciones son:

Edad de Juan	*26*	*28*	*30*	.	.	.
Edad de Pedro	*23*	*21*	*19*	.	.	.

- *La diferencia de edades entre Juan y Pedro es siempre la misma.*
- *26 es el doble de 13 (edad que tenía Pedro). En ese momento, Juan tenía 23 años. Luego, 23- 13 = 10. Hoy la diferencia entre ellos es 3 años. Por lo que este par es desechado.*
- *28 es el doble de 14 (edad que tenía Pedro). En ese momento, Juan tenía 21 años. Luego, 21 – 14 = 7. Hoy la diferencia entre ellos es también 7 años. Por lo que este es el par que verifica el problema, es decir, la solución.*

Conclusión

Como docentes debemos trabajar de tal forma que los alumnos comprendan y valoricen que frente a un determinado problema, existen muchas vías de solución, algunas más fáciles que otras. Esta idea que en principio puede parecer obvia, no lo es tanto y requiere de mucha práctica conjunta entre profesores y alumnos. En la experiencia, se evidencia la riqueza del uso del pensamiento lateral, y nos convoca a la reflexión sobre el potencial que tienen nuestros alumnos y que nosotros, los mismos docentes, "opacamos" por intentar conducirlos hacia el uso exclusivo del pensamiento vertical o lógico.

Es un aspecto "interesante" del pensamiento lateral, el uso "motivador", ya que las habilidades creativas pueden renovar el interés en el estudio; porque habría, con ellas, alguna esperanza de mejorarlo o de hacer las cosas de una manera diferente. Se cumplan o no estas expectativas, seguirán teniendo valor como esperanza; precisamente uno de los principales beneficios es que promueven el interés de los alumnos en lo que hacen, independientemente de los cambios reales que puedan surgir como resultado del trabajo. Debemos ayudar a nuestros alumnos a mirar más allá de lo que siempre han hecho, no necesariamente para mejorar la "nota", sino para identificar otras opciones que podrían resultar igualmente positivas.

Referencias bibliográficas

De Bono, E. (1989). *El pensamiento lateral. Manual de creatividad.* Ed. Paidós

De Bono, E. (1991). *Ideas para profesionales que piensan. Nuevas consideraciones sobre el pensamiento lateral aplicadas a la empresa.* Ed. Paidós

Colectivo de Autores. (1997). *Métodos y Técnicas Participativas.*

De Bono, E. (1969). *El mecanismo de la mente.*

Revista Zona Educativa *Qué y cómo enseñar*- Nº 24. Documento en línea http://www.zona.mcye.gov.ar/ZonaEducativa/ZonaEducativa.html

De Bono, E. (1988). *Seis sombreros para pensar*. Ed. Granica.

Durán Pomposo, M. (2000): *Diagnóstico de habilidades de razonamiento (pensamiento lateral): una experiencia con alumnos de educación superior tecnológica.* (*I Fase*) Documento en línea: http://www.ciidet.edu.mx/viiicongreso/archivoshtm/T2P010.html

Juegos de ingenio del club Mensa: http://www.ciudadfutura.com/juegosmensa/

Diferencias entre el pensamiento vertical y lateral

Guillermina Emilia Vosahlo
Universidad Nacional de Tucumán, República Argentina
guillermina.vosahlo@lemel.fr

Resumen
Tradicionalmente la enseñanza de la matemática ha privilegiado el uso del pensamiento lógico, aunque se requiere habilidad en ambos tipos de pensamiento. Sin embargo, debido a su rigidez, este pensamiento no permite reestructurar los modelos de conceptos para permitir un uso óptimo de la información.
El objetivo de este trabajo es citar las diferencias entre el pensamiento lógico y el pensamiento lateral, presentando algunos ejemplos de las deficiencias del pensamiento lógico frente al pensamiento lateral y las estrategias que el docente puede usar para superar estas limitaciones.

Introducción

El pensamiento tiene como objetivo la acumulación de información y su desarrollo en la forma más favorable posible. La mente se caracteriza por la creación de modelos fijos de conceptos, lo que limita las posibilidades de uso de la nueva información disponible, a menos que se disponga de algún medio de reestructurar los modelos ya existentes, actualizándolos objetivamente con los nuevos datos. El pensamiento vertical permite refinar los modelos y comprobar su validez, pero para conseguir un uso óptimo de la nueva información debemos crear nuevos modelos, escapando a la influencia monopolizadora de los ya existentes. La función del pensamiento lógico es el inicio y desarrollo de modelos de conceptos. La función del pensamiento lateral es la reestructuración de esos modelos y la creación de otros nuevos. El pensamiento lógico y el pensamiento lateral son complementarios.

El pensamiento vertical o lógico se basa en el avance de las ideas a través de fases justificadas en sí mismas. El pensamiento lógico puede propiciar el surgimiento de nuevas ideas, a partir del razonamiento y la inferencia desde premisas de mayor grado de generalidad a cuestiones más particulares, puede volver atrás, retomar las ideas precedentes, rectificar, ajustar en función de los propósitos, del significado que para el sujeto tenga el conocimiento. En el pensamiento lateral, por el contrario, la información no se usa como un fin, sino como medio para lograr un efecto determinado: provocar la disgregación de los modelos de pensamiento existentes, y su consecuente reestructuración, el surgimiento de nuevos modelos, que permitan una visión más perspicaz y aguda del problema o situación analizada. Al emplear el pensamiento lateral, con frecuencia se parte de información que no tiene relación con el problema planteado, incluso puede partirse de planteamientos erróneos, contrarios a la realidad, en la búsqueda de soluciones al mismo, todo lo cual sería imposible en el marco del pensamiento lógico.

El objetivo de este trabajo es presentar las diferencias entre los dos tipos de pensamiento y ejemplificar algunas de ellas en el ámbito de la matemática.

Diferencias entre el pensamiento lateral y el pensamiento vertical

1. *El pensamiento vertical es selectivo; el pensamiento lateral es creador*.

En el pensamiento vertical importa ante todo la corrección lógica del encadenamiento de las ideas, este pensamiento selecciona un camino, el enfoque más prometedor para la solución y excluye los demás y las bifurcaciones. El pensamiento lateral trata de seguir nuevos caminos, buscando nuevos enfoques y explorando sus posibilidades.

2. *El pensamiento vertical se mueve sólo si hay una dirección en que moverse; el pensamiento lateral se mueve para crear la dirección.*

Ejemplo 1: En cierto lugar de la Tierra se posó una nave extraterrestre, de ella bajaron varios seres. Los testigos vieron que tenían la misma cantidad de extremidades que los humanos. Además observaron en cada mano 4 dedos y en cada pie 6 dedos. Sin embargo, en total cada ser tenía 22 dedos. Explique el porqué de esta diferencia con los humanos.

Solución: En general el pensamiento vertical lleva a los alumnos de nivel medio a responder que la información es contradictoria y que este problema no tiene solución. Esta es una de las desventajas del pensamiento vertical o lógico: hay una tendencia hacia una *concentración*, es decir, todo lo que tiene cierta semejanza con un modelo estándar se percibe como si realmente fuera el mismo. Al hablar de que el ser extraterrestre tiene el mismo número de extremidades que los humanos, inmediatamente los alumnos pensaron que tienen dos brazos y dos piernas, cuando en realidad el ejercicio no dice eso. Luego de proponer a los alumnos que revisaran los supuestos, descubrieron la introducción de este supuesto adicional y la necesidad de plantear un sistema, donde las variables son x: número de brazos, y: número de piernas.

Las ecuaciones son $\begin{cases} x + y = 4 \\ 4x + 6y = 22 \end{cases}$. La solución es x = 1 brazo, y = 3 piernas.

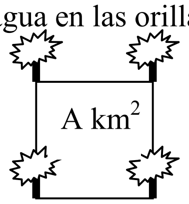
3. *El pensamiento vertical es analítico; el pensamiento lateral es provocativo.*

Cuando un alumno expresa una idea fantasiosa o inusual no se le debe bloquear la iniciativa, sino que hay que tratar de darle continuidad lógica a las ideas obtenidas originalmente.

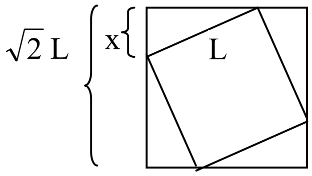
4. *El pensamiento vertical se basa en la secuencia de las ideas; el pensamiento lateral puede efectuar saltos.*

Con el pensamiento vertical se puede avanzar sólo de modo gradual. Cada paso depende directamente del anterior, al cual está firmemente asociado. Con el pensamiento lateral los pasos no tienen que seguir en un orden determinado. Puede saltarse a una nueva idea y rellenar el lapso después. A veces, cuando se llega a un punto dado es posible construir retrospectivamente un camino lógico que conduzca al punto de partida

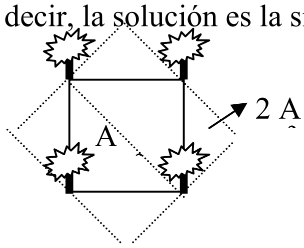
Ejemplo 2: En cada esquina de un lago cuadrado de A km^2 de superficie se encuentra un roble antiguo. ¿Se puede duplicar la superficie del lago, manteniendo su forma cuadrada y quedando los robles fuera del agua en las orillas del nuevo lago?



Solución: Este problema presentó a los alumnos de nivel medio la dificultad de percibir que aunque la forma del nuevo lago debe ser cuadrada, la figura puede estar rotada. Inicialmente trataron de expandir el cuadrado sin rotarlo y en consecuencia respondían que el problema no tiene solución. Al hacerles advertir el supuesto adicional que hacían de que no se debía rotar el cuadrado, pudieron percibir cómo resolverlo y lo hicieron pensando a qué deseaban llegar. Se tiene un lago cuadrado cuyo lado es L=$\sqrt{A}$. Si se desea que la superficie sea el doble, se busca un cuadrado circunscripto al dado que tenga lado L´ tal que $L'^2 = 2A$, o sea, $L' = \sqrt{2A} = \sqrt{2}\,L$. Cuando supieron lo que deseaban, volvieron hacia atrás para ver cómo se lo puede construir. Lo que se desea es inscribir un cuadrado de lado L en otro de lado $\sqrt{2}$ L.



Usaron el Teorema de Pitágoras: $\left(\sqrt{2}L - x\right)^2 + x^2 = L^2$ y resolviendo la ecuación obtuvieron $x = \sqrt{2}\,L/2$, o sea, los vértices del cuadrado inscripto deben estar en el punto medio de los lados del cuadrado grande. Es decir, la solución es la siguiente:



Ejemplo 3: Cada una de las siguientes cartas tiene una letra en uno de los lados y un número en el otro. Indique cuáles son las cartas que debería dar vuelta para probar la siguiente regla: si existe una D en un lado de la carta, debe haber un 3 en el otro.

D **3** **B** **7**

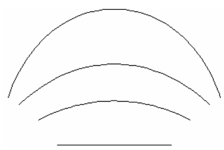
Solución: Los alumnos de primer año de universidad, intentaron resolver este ejercicio por el método directo. Respondían que la carta que debe darse vuelta es la que tiene la letra D para verificar si en verdad hay un 3 del otro lado. Eligieron sólo un camino, en este caso un solo método de demostración de implicaciones. Pero este ejercicio sólo se puede resolver combinando el método directo con el indirecto para demostrar implicaciones. La segunda carta que se debería dar vuelta es la que posee el número 7, puesto que si tiene una D del otro lado la regla sería refutada. Se tuvo que *saltar* de un método de demostración de implicaciones a otro.

5. *En el pensamiento vertical cada paso debe ser correcto; en el pensamiento lateral no es preciso que lo sea.*
En el pensamiento lateral no es imprescindible la corrección de cada paso, como en el pensamiento vertical, siempre que la conclusión final sea la correcta. En Matemática es frecuente el uso del método de demostración por reducción al absurdo, en el que suele suponerse la validez de hechos falsos para llegar a alguna contradicción.
Ejemplo 4: Teniendo algunas pilas de discos, un juego consiste en elegir una pila, descartar uno de los discos y dividir lo que resta de la pila en dos pilas no vacías, no necesariamente iguales. Si inicialmente hubiera sólo una pila con 100 discos, ¿es posible, luego de una serie de movimientos llegar a una situación donde cada pila tenga exactamente 3 discos?
Solución: Los alumnos de licenciatura en matemática, que cursan la materia Aritmética razonaron del siguiente modo: como cada movimiento disminuye la cantidad de discos en 1, y aumenta en 1 la cantidad de pilas, después de *k* movimientos, la cantidad de discos

habrá disminuido en k (habrá 100-k) y la cantidad de pilas habrá aumentado en k (habrá k+1).
Suponiendo que luego de k movimientos quedan exactamente 3 discos en cada pila, la cantidad total de discos será igual a 3 veces la cantidad de pilas. Se tiene entonces la igualdad $100-k = 3(k+1)$, de donde resulta $97 = 4k$. Aquí se ve que no es posible dicha situación, porque 97 no es múltiplo de 4; es decir, la ecuación no tiene solución entera positiva.
En este problema se ve que aún partiendo de la conjetura falsa de que es posible la situación planteada, se puede dar respuesta al problema.

6. *En el pensamiento vertical se usa la negación para bloquear bifurcaciones y desviaciones laterales; en el pensamiento lateral no se rechaza ningún camino.*

7. *En el pensamiento vertical se excluye lo que no parece relacionado con el tema; en el pensamiento lateral se explora incluso lo que parece completamente ajeno al tema.*
El pensamiento vertical es selectivo por naturaleza. Se prescinde de lo que parece ajeno al contexto de la situación que se estudia. Pero esto muchas veces tiende a perpetuar los modelos en su configuración original. En cambio, cuando se permiten asociar factores externos a fin de provocar una disgregación de los modelos en sus partes componentes, ya no es posible reestructurarlos desde adentro y resulta en una posibilidad mayor de que se altere la configuración establecida.
Ejemplo 5: En el siguiente gráfico, ¿qué arco procede de la circunferencia más grande?



Solución: Los alumnos de nivel medio dijeron que el tercer arco es el que corresponde a la circunferencia más grande y excluyeron completamente el segmento rectilíneo por considerarlo no relacionado con el tema. Sin embargo, lo que parece un segmento es en realidad un arco correspondiente a una circunferencia de radio muy grande en relación con los restantes radios, pues con el programa Mathematica se representaron los cuatro arcos correspondientes a circunferencias de radio 3, 4, 5 y 100.
Ejemplo 6: Se han pintado tres líneas paralelas de 8 m, 10 m y 13 m para señalizar el hall de un aeropuerto. El arquitecto decidió que las tres líneas deben tener igual longitud. Si el costo por metro de prolongar las líneas es igual al de reducirlas, ¿qué largo deben tener las líneas para economizar gastos?
Solución: Tanto los alumnos universitarios, que cursan la asignatura Cálculo, como los alumnos cursantes de una carrera de posgrado en Estadística propusieron la siguiente solución: sea x el largo común de las 3 líneas. El costo de reducir o prolongar las líneas hasta la longitud x es: $f(x)=k(|x-8|+|x-10|+|x-13|)$ (1), $k>0$, siendo k el costo por metro de prolongar o reducir una línea.
Representando gráficamente la función vieron que el mínimo del costo ocurre en $x = 10$. Es decir, que las líneas deben tener 10 m, por lo tanto, se deben agregar 2 m a la más corta y quitar 3 m a la más larga.
A los alumnos de la carrera de posgrado se les pidió que lo relacionaran con lo que sabían de la mediana muestral, que en apariencia no tiene nada que ver con este problema, y lo

pudieron resolver más fácilmente. La propiedad que cumple la mediana muestral es la de minimizar la suma de las distancias a los datos. Puesto que los valores absolutos involucrados en f(x) no son otra cosa que las distancias de x a los datos, entonces el valor de x que minimiza esa suma de distancias es la mediana. Por lo tanto, la longitud que deben tener las líneas es Me{8,10,13} = 10.

8. En el pensamiento vertical las categorías, clasificaciones y etiquetas son fijas; en el pensamiento lateral no lo son.

En el pensamiento vertical las categorías y clasificaciones tienen carácter permanente, y las ideas pueden usarse sólo si están señaladas con algún distintivo que permita su identificación. El pensamiento lateral cambia las etiquetas a medida que el contexto cambia como resultado de enfoques diferentes; es decir, las clasificaciones y las categorías no son casillas marcadas con el nombre de su contenido, sino letreros que señalan diferentes direcciones; las etiquetas se fijan con carácter provisional, para permitir dar mayor movilidad a las ideas. El pensamiento vertical se basa en la rigidez de las definiciones, mientras que el pensamiento lateral utiliza la fluidez de los significados, de manera análoga a como el ingenio emplea un repentino cambio de significado para producir su efecto.

Ejemplo 7: En la resolución de integrales indefinidas es frecuente clasificarlas según la forma del integrando a los fines de decidir qué método es más conveniente usar, así tenemos, entre otras categorías las siguientes:

Método de sustitución: Integrando de la forma g(f(x)).f´(x)	Integración por partes: Producto de funciones en el integrando, una se puede considerar como dv y otra como u	Sustitución trigonométrica: en el integrando aparece $(1-x^2)^{1/2}$ o $(1+x^2)^{1/2}$

Frente a una integral el alumno universitario de Cálculo normalmente analiza a qué grupo pertenece, y de acuerdo con ello intenta el método de integración correspondiente. Sin embargo, obviando esta clasificación, para una misma integral se pueden intentar distintos métodos. Por ejemplo, se desea resolver: $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Según la forma del integrando y la clasificación anterior, el alumno intentaría resolver esta integral por sustitución trigonométrica considerando x = senα ⇒ dx = cosα dα, y resulta

$$\int(\cos^2\alpha-\cos^4\alpha)\operatorname{sen}\alpha.d\alpha=-\frac{\cos^3\alpha}{3}+\frac{\cos^5\alpha}{5}+C_1=-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}+\frac{(1-x^2)^{5/2}}{5}+C_1$$

Sin embargo, a pesar de que no tiene la forma g(f(x))f´(x), se puede pensar en la sustitución $(1-x^2)^{1/2}=u \Rightarrow 1-x^2=u^2 \Rightarrow xdx=-udu$, resultando la integral:

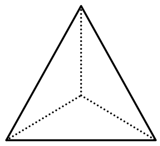
$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,xdx=-\int(u^2-u^4)du=-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C_2=-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}+\frac{(1-x^2)^{5/2}}{5}+C_2$$

También, descomponiéndola de manera adecuada, se la puede resolver por partes, considerando $u = x^2$, $dv = x(1-x^2)^{1/2}dx \Rightarrow du = 2xdx$, $v = -(1-x^2)^{3/2}/3$. La integral resultante es:

$$-\frac{x^2}{3}(1-x^2)^{3/2}+\frac{2}{3}\int x(1-x^2)^{3/2}dx=-\frac{x^2}{3}(1-x^2)^{3/2}-\frac{2}{15}(1-x^2)^{5/2}+C_3$$

9. El pensamiento lateral sigue los caminos más evidentes; el pensamiento lateral los menos evidentes.

El pensamiento lateral busca deliberadamente los caminos menos obvios. A veces, en la entrada de un camino nada sugiere que valga la pena explorarlo, pero puede ser útil. En el pensamiento vertical se tiende a seguir sólo el camino que parece el más prometedor.
Ejemplo 8: Para formar cuatro triángulos dispone de 6 segmentos congruentes. ¿Cómo lo puede hacer si los segmentos sólo se pueden intersectar en los extremos?
Solución: Al hablarles de triángulos (figuras planas), los alumnos de nivel medio y universitario pensaron que les estaban pidiendo construirlos en un plano. Sin embargo, de esta manera no se puede encontrar la solución. Luego de revisar que se está agregando un supuesto que el enunciado no da, surge la idea de construir los triángulos en el espacio como caras de un poliedro, en este caso un tetraedro regular.



10. *El pensamiento vertical es un proceso finito; el pensamiento lateral, un proceso probabilístico.*
Con el pensamiento vertical se confía en llegar a una solución; con el pensamiento lateral no se garantiza necesariamente una solución, simplemente se aumentan las probabilidades de una solución óptima mediante la reestructuración de los modelos. Es decir, el pensamiento vertical ofrece al menos una solución mínima, mientras que el pensamiento lateral incrementa sólo la posibilidad de llegar a una mejor solución.

Conclusiones

Una de las limitaciones más frecuentes del pensamiento lógico es la incorporación de supuestos que no corresponden a las situaciones planteadas. Como se mencionó anteriormente, y se vio en los ejemplos 1, 2 y 8, esto responde a su tendencia a la *concentración*. Esta tendencia no permite percibir que lo que en apariencia es un segmento rectilíneo en el ejemplo 5 puede no serlo, y que el ejemplo 6, que parece un ejercicio tipo de cálculo pueda resolverse más fácilmente con una propiedad de la mediana.
Otra de las limitaciones del pensamiento lógico es la selección de un único camino, el que parece óptimo para llegar a la solución, excluyendo a los demás. Esta limitación obstaculiza la resolución de problemas en los que se deben combinar métodos de resolución, como en el ejemplo 3. También puede ocurrir que el camino seleccionado no sea el óptimo, como en el ejemplo 7, en el que la resolución por sustitución trigonométrica que es la que normalmente se intenta puede requerir más cálculo y el conocimiento de relaciones trigonométricas.
En conclusión, se debe propiciar el uso de las estrategias de revisión de supuestos y análisis de alternativas de resolución para desarrollar el pensamiento lateral en los alumnos.

Referencias bibliográficas

De Bono. E. (1989). *El Pensamiento Lateral.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.
Fauring, P., Wagner, E., Wykowski, A., Gutierrez, F., Pedraza, J.C, Moreira, C.G. (1994). *Problemas de las Olimpíadas Matemáticas del Cono Sur* (I^{a} a IV^{a}). Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Matemática para experimentar

Liliana Valdez de Zapata, Estela Sonia Aliendro, Thomas Hibbard, Jorge Yazlle,
Camilo Jadur, Eudosia Natividad Díaz de Hibbard
Universidad Nacional de Salta. Argentina
aliendro@unsa.edu.ar endh@unsa.edu.ar valdez@unsa.edu.ar

Resumen
Se presenta una propuesta de actividades matemáticas experimentales, destinada a alumnos y docentes, centrada en la hipótesis de varios matemáticos de renombre, de que la *geometría fractal* – con sus expectaculares efectos gráficos y sus integrantes misterios – puede despertar o recuperar el interés estudiantil por la Matemática. Lo que se pretende mostrar es cómo presentar una matemática experimental, en el sentido de que quien se acerque a ella, lo haga como los antiguos egipcios a la Geometría, con la actitud de querer saber qué es lo verdadero, hacer ensayos con ese fin y buscar una confirmación formal cuando sienta la necesidad de hacerlo.

Introducción

El grupo que integramos bajo la denominación Matemática Fractal a Nivel Novicio tiene como objetivo principal captar el interés y generar el gusto de los estudiantes por las actividades matemáticas. Estamos convencidos de que la Matemática, durante demasiado tiempo, ha llegado a la comunidad estudiantil no sólo como "la ciencia por excelencia" sino también como la ciencia perfecta, consolidada y acabada. Estas características superlativas devienen de su propio método científico y de su carácter totalmente ajeno a toda subjetividad, lo que provoca en las personas la sensación de que esta disciplina poco y nada tiene que ver con la creatividad humana. La tradición ha llevado no sólo a percibir sus nociones desde el punto de vista descripto sino también sus procedimientos. La posibilidad de que los estudiantes experimenten, intuyan y arriesguen conjeturas, no se presenta con frecuencia en las clases. Sin embargo, estamos convencidos de que si el alumno no es alentado a experimentar, a hacer descubrimientos, a conjeturar, o no se le permite hacerlo, se está desvirtuando la naturaleza de la actividad matemática. Si por el contrario se lo motiva a ello, él se adentrará en la exploración de lo que no conoce, y se logrará que participe activamente en su investigación. De esta manera, encontrará a la Matemática mucho más atractiva.
La rama de la Matemática elegida como un medio para alcanzar el fin propuesto, es la Matemática Fractal, fundamentalmente por dos razones:

- Se trata de un tema de investigación actual y, parafraseando a Robert Devaney, *para mostrar que la Matemática sigue viva, que no murió en el siglo XVII*.
- Requiere el uso de la nueva tecnología, a la que son tan afectos nuestros niños y adolescentes.

Marco teórico

La Geometría Fractal es, en primer lugar, un nuevo lenguaje, y sus elementos no derivan de la intuición directa. Es una nueva geometría, que está todavía en una etapa de consolidación, como lo fue la Geometría Plana de Pitágoras. En aquella época, la geometría vibraba; era herencia de los ingenieros egipcios, que la conocían por observación; para ellos era una ciencia experimental. La búsqueda primitiva del conocimiento geométrico tenía un espíritu empírico y era de naturaleza práctica. Los griegos empezaron a demostrar proposiciones que los egipcios habían sabido por milenios. Pero eso fue hace dos mil quinientos años y ya no queda casi nada por descubrir.

El imponente edificio geométrico diseñado por Euclides, logró convertir aquellos conocimientos en ciencia. De este modo, en la actualidad, el alumno de nivel secundario recibe todo preparado; teorema y demostración, le son presentados como objetos por memorizar, perdiéndose todo sentido de descubrimiento, al negarse la posibilidad de construcción del conocimiento. Nuestro objetivo es que pueda experimentar, a la manera del matemático, para obtener sus propias ideas y conclusiones. Se trata de presentar una propuesta de Matemática Experimental, y transformar a la clase de Matemática en un laboratorio. Vivirá así a la Matemática como un territorio no del todo conocido, de cuya exploración él podrá participar.

Esta idea ya ha sido propuesta por reconocidos didactas, entre ellos Gerard Vergnaud, para quien "*la acción es fuente y criterio de saber*" (citado por M. Mathiaud, Enseñar a partir de actividades, Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas, Topiques Éditions, I.R.E.M. de París, 1996, p. 142). Esta opinión está ratificada por Mathiaud al decir que "*en Matemática la acción está relacionada con la búsqueda de problemas que representan para el que aprende una ocasión para plantearse numerosas preguntas ... Acción y resolución de problemas son pues imprescindibles en las situaciones de aprendizaje*" (M. Mathiaud, p. 143).

Desarrollo de la propuesta

Objetivos

En las Jornadas de la XVa. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa hemos ofrecido a los asistentes interesados un taller sobre Geometría Fractal, que es una de las actividades desarrolladas por nuestro grupo de investigación educativa. Los objetivos buscados son:

- Descubrir la belleza de la Matemática a través de las imágenes fractales.
- Enfrentar cuestiones téoricas sobre fractales.
- Desarrollar ejercicios de índole de Matemática Experimental.
- Aprender a utilizar el software F.T.B. diseñado, por miembros del equipo, para los fines específicos del proyecto.

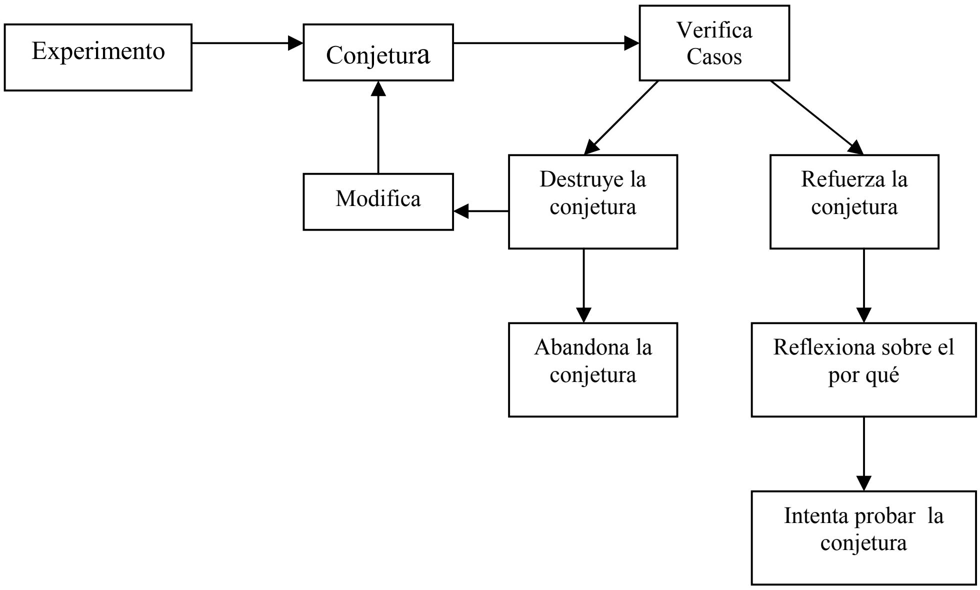
Metodología

En el camino hacia estos objetivos, la clase de Matemática se transforma en un laboratorio en el cual se puede:

- Realizar los experimentos que el estudiante diseñe y/o los que se le propongan en las guías.
- Hacer conjeturas.
- Verificar casos.

- Rechazar o reformular conjeturas.
- Volver a verificar.

El siguiente esquema, describe la metodología de trabajo:



Contenidos

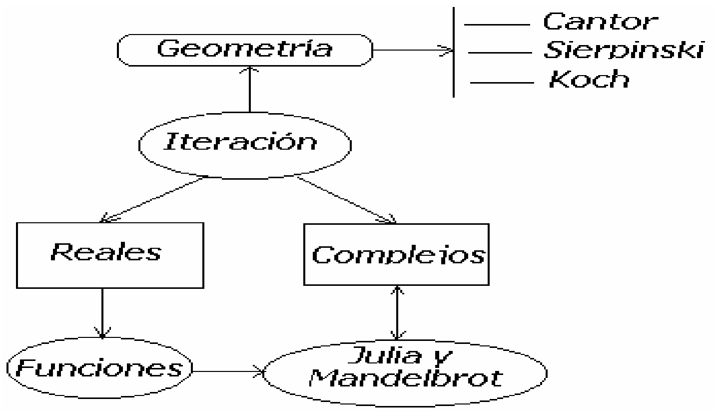
Las nociones que se rescatan para el taller, son las siguientes:

❖ *Fractales Regulares*. Conjunto de Cantor. Triángulo de Sierpinski. Copo de Koch. Dimensión fractal.

❖ *Iteración real y compleja*. Órbitas. Puntos fijos y periódicos. Distintos tipos de análisis orbital. Cuencas de atracción. Puntos periódicos atrayentes y repelentes.

❖ *Conjuntos* de Julia y de Mandelbrot.

Los contenidos se estructuran a partir de la noción de *iteración*, como se indica en la figura.



Actividades

Las actividades propuestas para los participantes del taller, se explicitan en guías de problemas que permiten:

- Iterar funciones, aplicando el concepto de composición de funciones.
- Adquirir el concepto de *conjunto de Julia* y de *conjunto de Mandelbrot*
- Interactuar con el programa F.T.B. para generar conjuntos de Julia tanto en funciones algebraicas como trascendentes.
- Estudiar la noción de órbita crítica y punto crítico.
- Estudiar el conjunto de Mandelbrot.

Estas guías se desarrollan en una clase dialogada que permite institucionalizar nociones, las cuales también son explicitadas en un resumen que se entregan durante el taller. Describimos a continuación algunas de las actividades que se proponen en las guías de problemas:

I. Para la noción de fractales regulares, se propone la siguiente actividad:

- A un triángulo equilátero extraerle el triángulo formado por los puntos medios de sus lados. Con cada uno de los triángulos obtenidos, repetir el procedimiento. Luego, reiterarlo dos veces más. Construir una tabla que indique, para cada iteración, el número de triángulos obtenidos y el factor de ampliación. Calcular la dimensión del Triángulo de Sierpinski.

Ella es introductoria a las nociones de iteración, autosemejanza y dimensión fractal. Involucra un trabajo manual, *todavía posible de ser realizado sin asistencia computacional, y para el cual las nociones matemáticas requeridas son muy simples. Tal vez lo más complejo resulte la búsqueda – en la tabla que se genera – de regularidades que permitan descubrir las fórmulas requeridas para el cálculo de la dimensión de Haussdorf. Esta última, no es requisito porque el disertante la institucionaliza.*

II. En cuanto al trabajo con la noción de órbita tanto en el conjunto de reales como de complejos, algunas de las actividades sugeridas son ejemplificadas a continuación:

- *Sea la función f definida por: $f(x) = c\,x(1 - x)$. Analizar el comportamiento de la órbita en el punto $x_0 = 0.5$ con $c = 2.4$. Hacer variar el punto x_0 manteniendo el mismo valor de c y determinar el comportamiento de su órbita. Variar c y mantener $x_0 = 0.5$ para observar el comportamiento de su órbita.*
- *Caracterizar las órbitas de los puntos dados para la función compleja definida por $f(z) = z^2 - 1$; en los puntos $z_0 = (0.47, 110º)$; $z_0 = (0.48, 110º)$; $z_0 = (0.48, 30º)$.*
- Experimentar con otras funciones complejas que el F.T.B. ofrece y con los valores que Ud. proponga.

Ellas permiten el estudio específico de los distintos tipos de órbitas, que son en definitiva, sucesiones. Cada una de estas sucesiones involucra no sólo a dicha noción (como un caso particular de la noción de función) sino también la de composición de funciones. De las sucesiones obtenidas interesa saber si convergen o no, por lo cual es necesario observar muchos términos de ellas (estamos suponiendo que tal vez el estudiante no conoce la noción de límite). Se impone, en consecuencia, el uso de computadoras, porque el cálculo manual se vuelve muy tedioso. Acotemos que este tipo de problemas, si bien era conocido antes del auge de las computadoras personales, sin ellas era imposible de resolver. Por ello es que aquí se aprecia la potencialidad del software F.T.B. que citamos anteriormente.

Como se puede colegir, las nociones matemáticas que estas actividades permiten activar, son función, sucesión, composición de funciones y límite de sucesiones, tanto en el campo real como en el complejo. No hace falta que el asistente al taller conozca o domine las mismas; las actividades propuestas resultan una oportunidad de aprendizaje o afianzamiento de ellas.

III. Los conjuntos de Julia y Mandelbrot, que extienden el estudio de las órbitas a una región del plano son factibles de estudiarse con actividades como las que siguen:

- *Experimentar con el programa F.T.B. para dibujar conjuntos de Julia 'rellenados' para la función $f(z) = z^2 + c$. Valores sugeridos: c = (1, 180º); c = (0.374; 15.57º); c = (0,81, 97.12º); c = (0.25, 15º); c = (0.5, 0º)*
- *Usar el F.T.B. para dibujar conjuntos de Julia de otras funciones. Realizar ampliaciones de partes de dichos conjuntos. ¿Qué se observa?*
- *Usar el F.T.B. para dibujarar el conjunto de Mandelbrot. Elegir en él y fuera de él, diferentes valores de c para estudiar sus órbitas y sus Julia asociados (pueden realizarse ampliaciones). ¿Qué conclusiones se obtienen*?

Para una función compleja dada, la determinación de todos los puntos cuyas órbitas no divergen, permite la construcción de los conjuntos de Julia "rellenados". Los conjuntos de Julia se definen como la frontera entre los puntos cuyas órbitas escapan (divergen) y aquellos cuyas órbitas no escapan (convergen).

Con estas actividades se inicia el estudio de las órbitas y puntos críticos, que son los que permiten configuran el conjunto de Mandelbrot, específicamente para la función cuadrática.

Además el programa FTB permite visualizar la relación entre el conjunto de Mandelbrot y los Julia asociados, lo que introduce a las nociones de conjuntos conexos y disconexos.(Los Julia asociados a los puntos en el interior del conjunto de Mandelbrot se caracterizan por su conexidad, no así los que corresponden a los puntos exteriores a Mandelbrot).

♦ La posibilidad de realizar ampliaciones tanto de los conjuntos de Julia como de Mandelbrot hace visualmente explícita la característica de autosemejanza correspondiente a los fractales.

Dificultades y logros del desarrollo del taller

No es dable hablar de dificultades en el sentido específico, ya que todos los requisitos se cumplieron. Los asistentes manifestaron su adhesión a nuestra propuesta, y su interés por profundizar contenidos y actividades. Dejaron constancia, también, de la factibilidad de su transferencia (a sus instituciones y lugares de origen). A pesar de que para algunos, el tema era completamente desconocido, lo cual en principio los mantuvo no sólo expectantes sino temerosos (sentimiento típico ante un nuevo conocimiento matemático), coincidieron con que el tema – pese a ser de investigación actual – podía ser accesible a personas novicias en el mismo. Esto ya involucra un logro importante para nosotros, el cual se incrementó con el deseo manifestado de llevar a cabo en sus países, experiencias similares en el futuro. Para ello nos pidieron el programa F.T.B. aún después de terminado el taller, vía Internet.

Conclusiones

De lo anteriormente expuesto se desprende que, seguramente, nuestra propuesta no es utópica, y es factible de ser realizada por estudiantes de los últimos cursos del nivel secundario, porque las herramientas matemáticas requeridas son suficientemente elementales, disponibles por ellos. Además las imágenes fractales logran atrapar la atención desde el principio. El interés por desentrañar su significado no es apreciable en un espacio de tiempo tan reducido (como el dispuesto para el desarrollo del taller). Pero seguramente, el profesor en su aula, tendrá logros superiores a los nuestros.

La importancia que nosotros asignamos a la propuesta descripta, es que instala el laboratorio de matemática en la clase y permite que el estudiante recorra, en parte al menos, el camino del investigador.

Referencias bibliográficas

Aguilera, N. (1995). *Un paseo por el jardín de los fractales*. Buenos Aires. Red Olímpica.

De Guzman, M. y Otros (1993*). Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Barcelona. Editorial Labor S.A.

Devaney, R. (1990). *Chaos, fractals and dynamics*. Boston (U.S.A.). Addison-Wesley Publishing Company.

Keedy, M. Y Nelson, C. (1965). *Geometría, una moderna introducción*. México. CECSA.

Mathiaud, M. (1996). *Enseñar a partir de actividades'*. Enseñanza de las matemáticas: relación entre saberes, programas y prácticas. Francia. Topiques éditions.

Vergnaud, G. (1991). *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 10. Francia. Éditions La Pensée Sauvage.

Estrategias para desarrollar la creatividad

Guillermina Emilia Vosahlo
Universidad Nacional de Tucumán, República Argentina
guillermina.vosahlo@lemel.fr

Resumen
El objetivo de este taller fue analizar las principales estrategias para pensar y crear y reflexionar en torno a su posible empleo en el campo educativo. A menudo los educadores observan que los alumnos tienen dificultad para realizar tareas que requieren creación, de allí que resulta importante que conozcan este tipo de estrategias para contribuir al desarrollo de la creatividad de los alumnos.
Se analizaron algunas estrategias que facilitan la búsqueda de soluciones, y otras que contribuyen a desarrollar diversas dimensiones de la creatividad, tales como la fluidez, la flexibilidad, la coherencia de organización, la capacidad de síntesis y la originalidad. Asimismo, dada la complejidad de cada estrategia, se discutió acerca de los niveles educativos para los que resultan útiles cada una.

Introducción

El objetivo de este taller fue analizar las principales estrategias para pensar y crear y reflexionar acerca de su posible empleo en el campo educativo, desde una perspectiva cada vez más activa del alumno y el docente dentro del proceso de enseñanza - aprendizaje.
A menudo los educadores observan que los alumnos tienen dificultad para realizar tareas que requieren creación. La asistencia a este taller permitió a los educadores conocer estrategias que les pueden facilitar la tarea de desarrollar la creatividad de los alumnos. La importancia de este taller radica en que sus actividades son muy formativas para los educadores matemáticos.
La metodología de trabajo consistió en una breve introducción teórica y ejemplificación de las distintas estrategias por parte de la coordinadora del taller para ubicar a los participantes, seguida de una discusión en pequeños grupos de los asistentes para el análisis de bibliografía y resolución de problemas y una discusión plenaria para analizar las resoluciones grupales y elaborar conclusiones.

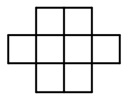
Propuesta de actividades y algunas soluciones

Luego de la exposición teórica y ejemplificación de las distintas estrategias por parte de la coordinadora, se propuso a los asistentes resolver los siguientes ejercicios en pequeños grupos. Cuando resultó necesario revisaron previamente los conceptos teóricos.

1. **Estrategias de búsqueda de soluciones**

- **Búsqueda al azar**: La misma consiste en seleccionar los caminos al azar, y encontrarse por casualidad con la solución.

Ejercicio 1: En las casillas dadas ubique los dígitos del 1 al 8 de modo que no queden dos números consecutivos juntos (ni en forma horizontal, ni vertical, ni diagonal).



Trabajando por ensayo y error, los asistentes determinaron la solución.

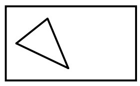
- **Búsqueda de profundidad**: El sujeto investiga un camino de solución hasta su final, si éste no es el apropiado, se empieza de nuevo la búsqueda, y así sucesivamente.

Ejercicio 2: Resuelva el mismo ejercicio anterior de ubicar los dígitos en las casillas mediante esta técnica.

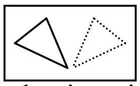
En este caso los asistentes antes de comenzar a probar distintas configuraciones dedujeron que en las casillas centrales, que poseen cada una 6 casillas adyacentes, deben ubicar el 1 y el 8, pues son los únicos que poseen 6 números no consecutivos en el conjunto dado. Luego de ubicar estos números, se deben ubicar sus respectivos consecutivos, 2 y 7, en las únicas casillas no adyacentes a cada una de las centrales (las extremas de la línea central). Finalmente se ubican los restantes dígitos en las casillas sobrantes cuidando que no queden al lado de un consecutivo.

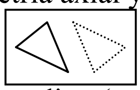
- **Análisis de medios y fines**: El sujeto averigua las diferencias existentes entre el estado inicial y final del problema, y a continuación encuentra las operaciones que las reducirán.

Ejercicio 3: En el frente de una casa hay un espacio destinado para un jardín. En el mismo ya se construyó un cantero de forma triangular como se muestra en la figura. La dueña, amante de la simetría, le pide que diseñe y trace la posición del otro cantero para que el conjunto sea simétrico.



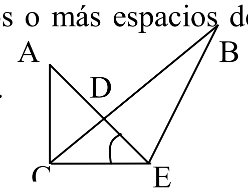
Los asistentes analizaron dos estados finales posibles para el estado inicial dado en el enunciado, correspondientes a una simetría axial y una simetría central.





Determinaron para cada situación los medios (regla, escuadra, compás) que podían usar y los pasos que debían seguir para pasar del estado inicial al final.

- **Subobjetivos**: Consiste en escoger un estado intermedio en el camino de la solución y considerarlo como un objetivo temporal. Se divide el problema en subproblemas, y consecuentemente se transforma el espacio global de búsqueda en dos o más espacios de profundidad hasta hallar la solución.



Ejercicio 4: Con los datos dados, determine el ángulo con vértice en B.

Datos: $\overline{AC} = x+3$, $\overline{AE} = \sqrt{50}$, $\overline{CB} = 8$, $\overline{EB} = 6$, $A\hat{E}C = 45º$

Los asistentes determinaron y resolvieron los siguientes subproblemas:

Subproblema 1: Determine $\overline{CE}$ usando los datos del triángulo ACE.

Subproblema 2: Usando el teorema del coseno en el triángulo BCE, determine el ángulo solicitado.

- **Generación y comprobación**: El sujeto genera posibles soluciones y luego va comprobando cada una de ellas para ver si la solución es correcta.

Ejercicio 5: Determine las raíces del polinomio $p(x)= 64x^5-64x^4-137x^3+137x^2+18x-18$.

Sabiendo que si existe alguna raíz racional, su numerador debe ser divisor del término independiente y su denominador un divisor del coeficiente principal, los asistentes generaron las posibles raíces: ±1,±2,±3,±6,±9,±18,±1/2,±3/2,±9/2,±1/4,±3/4,±9/4,±1/8, ±3/8,±9/8,±1/16,±3/16,±9/16,±1/64,±3/64,±9/64. Comprobaron usando el teorema del resto que 1 y ±3/8 son raíces; redujeron el grado del polinomio mediante Ruffini y resolvieron la ecuación de segundo grado resultante para determinar las otras dos raíces.

2. Estrategias analíticas, asociativas, estructurantes y otras

- **Las analíticas**: Suponen un análisis de los elementos con el fin de diferenciarlos en una primera etapa, y superponerlos o integrarlos en fases posteriores.
- **Las estructurantes**: Permiten organizar las ideas interrelacionadas, o que se incluyen mutuamente. Permiten una visión amplia y sintética del problema.

- **Las asociativas**: Se valen de procedimientos psicológicos como relacionar o establecer nexos entre las ideas, por medio de vías analógicas y antitéticas.
- **Las metamórficas**: Son procedimientos transportivos. Ejercitan las habilidades para la redefinición de problemas.
- **Las inferentes**: Permiten generalizaciones o descubren implicaciones. Estos procesos psicológicos se pueden desarrollar al pedir detalladamente un plan.
- **Complejas o mixtas**: Son las que ponen en juego tres o más operaciones.

A continuación se presentan ejemplos de estas estrategias.

Análisis funcional: Se puede clasificar esta estrategia como estructurante. En esta estrategia se buscan todo tipo de cualidades que nos transmitan una información del problema u objeto planteado. Generalmente se plantea una pregunta inicial que tiene la forma ¿para qué sirve?. Luego se ordenan y clasifican las funciones y se construye el árbol.

Ejercicio 6: ¿Para qué sirve el límite?.

Los asistentes construyeron el siguiente árbol para las funciones del límite.

- Límite
  - Gráfico de funciones
    - Determinación de asíntotas verticales
    - Determinación de asíntotas horizontales
    - Determinación de asíntotas oblícuas
  - Continuidad
    - Verificación del cumplimiento de las condiciones de continuidad en un punto
    - Existencia y clasificación de discontinuidades
  - Derivación
    - Derivada de una función por definición
    - Derivada de una función en un punto cuando la función está definida por partes.
  - Integración
    - Cálculo de integrales definidas por definición
    - Cálculo de integrales impropias
  - Sucesión: Estudio de convergencia
  - Series
    - Verificación de la condición necesaria para la convergencia
    - Cálculo del valor al que converge la serie (cuando es posible)

Circumrelator: Se puede clasificar esta técnica entre las asociativas. Se emplea cuando existe descontento con la calidad o pluralidad de las soluciones encontradas.

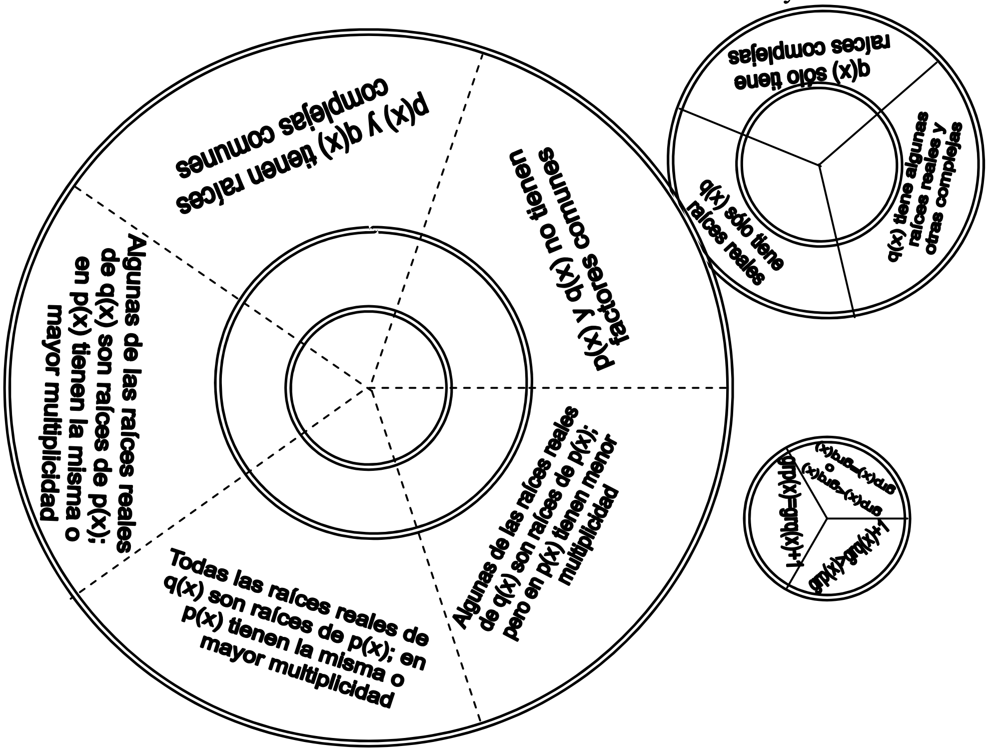
Las etapas son las siguientes: Una vez definido el problema se identifican las dimensiones fundamentales, que se plasman en círculos superpuestos, permitiendo un giro independiente de cada uno de ellos. Se inscribe en cada círculo tantos factores como sea posible. Se gira uno de los círculos, conservando fijos los demás. Una ventana selectiva permite ver a la vez sólo un factor de cada una de las dimensiones.

Ejercicio 7: En el conjunto de funciones de la forma $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios tales que $\text{grado} q(x) \geq 1$, investigue las diversas situaciones que se pueden presentar con respecto a la existencia de asíntotas y discontinuidades evitables.

Teniendo en cuenta que la existencia de asíntotas horizontales depende de la relación entre los grados del numerador y el denominador, que las discontinuidades están relacionadas con la existencia de ceros reales en el denominador, que la discontinuidad es evitable cuando hay una indeterminación que se puede eliminar y que es inevitable cuando luego de simplificar la expresión sólo se anula el denominador, los asistentes determinaron las siguientes dimensiones, encontrándose enumerados sus factores en los gráficos.

- Dimensión 1: Relación entre los grados de los polinomios numerador y denominador.

➢ Dimensión 2: Tipo de raíces del denominador.
➢ Dimensión 3: Existencia de factores comunes entre el numerador y el denominador.



Superponiendo estos gráficos de menor a mayor y agregándoles una ventana selectiva, los participantes construyeron el circumrelator.

Matrices de descubrimiento: Se puede clasificar como una estrategia analítica. Permite la intersección de las ideas en una matriz que le permite a la persona descubrir ideas nuevas y soluciones originales. Las matrices pueden ser cuadradas o rectangulares. Se escribe en la intersección fila-columna el problema que se va a solucionar.

Luego de plantear el problema, se enumeran los elementos que permiten formar la tabla de doble entrada o matriz, se valora la interrelación de cada par de elementos y se evalúan las soluciones que se pueden realizar en la que medida en que se asocian cada par de elementos.

Ejercicio 8: Si Ud. desea determinar todos los lados de un triángulo a partir de una serie de elementos que conoce del mismo, indique qué datos necesita para poder usar los teoremas que aprendió (Pitágoras, del seno y del coseno) o funciones trigonométricas.

Los asistentes identificaron como entradas de la tabla al tipo de triángulo que se desea resolver y la propiedad o teorema que se puede usar para resolverlo. En la intersección fila - columna anotaron el problema que se va a solucionar. Algunos de los resultados fueron:

	Func.trigonométr.	Teor.Pitágoras	Teor. del Seno	Teor. del Coseno
Triáng. Rectángulo	Se conocen dos lados o se conoce un lado y un ángulo.	Se conocen dos lados.	Se conoce hipotenusa y un cateto ó un cateto y un áng. agudo	Se conocen dos catetos ó hipotenusa, un cateto y áng. comprendido.
Triáng. Oblicuángulo			Se conocen dos ángulos y un lado opuesto.	Se conocen dos lados y el ángulo comprendido

Análisis morfológico: Esta técnica se puede clasificar como analítica. Se trata de descomponer un objeto o problema en sus atributos. Ellos deben recoger las características esenciales constitutivas, de tal manera que su carencia implicaría la inexistencia del objeto. Se construye la matriz a partir de la reunión de los atributos con las variantes de cada uno.

Ejercicio 9: Indique las condiciones *mínimas* que deben cumplir los elementos de los cuadriláteros para que estos pertenezcan a cada una de las siguientes categorías: cuadrado, rectángulo, paralelogramo, rombo, romboide, trapecio, trapezoide.

Los asistentes determinaron como atributos a los elementos del cuadrilátero y como variantes las propiedades que cumplen estos. Las condiciones ubicadas en una misma fila deben cumplirse simultáneamente. Las que no están en una misma fila son definiciones alternativas. A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos

	Lados	Angulos	Diagonales
Rectángulo	2 pares de lados opuestos congruentes	Un ángulo recto	
Paralelogramo	**Def. 1**: 2 pares de lados opuestos congruentes		
			Def. 2: Se intersectan en su punto medio

3. Estrategias para desarrollar el pensamiento lateral

a) **Alternativas**. Se basa en el primer principio básico del pensamiento lateral: *Cualquier modo de valorar una situación es sólo uno de los muchos modos posibles de valorarla*. Se trata de generar 3, 4 o 5 alternativas posibles de respuesta a cada problema.

Ejercicio 10: Resuelva de tres formas diferentes $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Los asistentes propusieron resolverla mediante la sustitución trigonométrica x =senα, mediante la sustitución $1-x^2 = u^2$ y mediante integración por partes, considerando $u = x^2$, dv= $x\sqrt{1-x^2}$ dx. Los resultados obtenidos difieren a lo sumo en una constante.

b) **Revisión de supuestos**. El propósito es demostrar que cualquier supuesto puede ser revisado, para liberar el pensamiento del efecto restrictivo de supuestos rígidos que limitan excesivamente su campo de acción.

Ejercicio 11: Indique la ley de formación de la siguiente serie finita: 0,5,4,2,9,8,6,7,3,1.

En general los asistentes partieron del supuesto que la ley de formación de una serie numérica responde a alguna fórmula matemática. De esta manera no pudieron encontrar la solución, o no les resultó fácil. Cuando prescindieron de este supuesto encontraron que la ley de formación es alfabética.

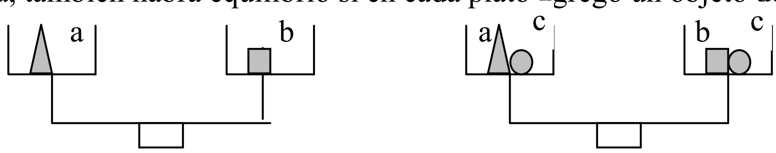
c) **Fraccionamiento o división**. Permite otra división y organización de la información, lo que facilita la reestructuración del significado.

Ejercicio 12: Indique los pasos para determinar la imagen de una función cuadrática.

Algunas de las alternativas de resolución de este ejercicio que los asistentes citaron son:

1. Completar cuadrado, determinar la ordenada del vértice k y analizar el signo de a. (si $a>0$, Imf=$[k,+\infty)$ y si $a<0$, Imf=$(-\infty,k]$).
2. Derivar la función, determinar la abscisa h resolviendo $f'(x)=0$, calcular la ordenada $k=f(h)$ y analizar el signo de la derivada (si $f'(x)>0$ en $(-\infty,h)$, Imf = $(-\infty,k]$ y si $f'(x)<0$ en $(-\infty,h)$, Imf=$[k,\infty)$).
3. Determinar las raíces x_1,x_2 de $f(x)=0$, calcular la abscisa h como la semisuma de las raíces $h=(x_1+x_2)/2$, calcular la ordenada $k=f(h)$ y analizar el signo de a.

d) **Analogías**. Se representa el problema real por una analogía, se desarrolla ésta y al final se la traduce de nuevo en el problema original.
Ejercicio 13: Deduzca propiedades de los números reales positivos usando alguna analogía.
Identificando cada número positivo con el peso de un objeto y la igualdad con el equilibrio de la balanza, los asistentes formularon la propiedad uniforme de la suma ($a = b \Rightarrow a+c = b+c$) proponiendo que si se parte de que hay equilibrio cuando coloco los objetos de pesos a y b en la balanza, también habrá equilibrio si en cada plato agrego un objeto de peso c.



Con la misma analogía se pueden deducir otras propiedades como la consistencia y la cancelativa de la suma.

Conclusiones

Algunas de las conclusiones obtenidas por los asistentes a partir de la actividad de cierre propuesta de resumir en un cuadro las dimensiones de la creatividad que desarrolla cada estrategia y el nivel educativo en el que se podría usar fueron las siguientes:

Estrategia	Dimensión de la creatividad que desarrolla	Nivel educativo
Alternativas	Flexibilidad, fluidez, originalidad.	Todos
Circumrelator	Fluidez, Coherencia de organización, capacidad de síntesis.	Medio y superior
A. funcional	Coherencia de organización, capacidad de síntesis	Todos
A. morfológico	Coherencia de organización, capacidad de síntesis	Medio y superior
M. descubrimiento	Fluidez, Coherencia de organización, capacidad de síntesis, originalidad.	Medio y superior

Las dificultades que se presentaron con más frecuencia al resolver los ejercicios fueron la incorporación de supuestos que los enunciados no daban o la elección de un único camino de resolución, las que fueron superadas poniendo en práctica las estrategias de revisión de supuestos y análisis de distintas alternativas, respectivamente.
Trabajando con las estrategias propuestas los asistentes lograron, como se espera que ocurra con los alumnos, obtener distintas y más originales soluciones.

Referencias bibliográficas

Bacus, A., Romain, C. (1992). *Creatividad. Cómo desarrollarla*. Barcelona, España: Iberia.
Betancourt Morejón, J. (1994). Estrategias para pensar y crear. En Colectivo de autores, *Pensar y crear, Estrategias, métodos y programas* (pp 18-79). La Habana, Cuba: Editorial Academia.
Davis ,G., Scott, J. (compiladores) (1980). *Estrategias para la Creatividad.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.
De Bono, E. (1989). *El Pensamiento Lateral*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.
Mitjáns Martínez, A. (1995). *Creatividad, Personalidad y Educación*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.