RELME 15 • REUNION LATINOAMERICANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 15, año 2002
Tomo 2

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Clame

COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 15, año 2002

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
Volumen 15, año 2002

Editora:
Cecilia R. Crespo Crespo

Diseño de portada:
Ángeles Viacava

Motivo de la portada: *Seibo, flor nacional de Argentina*

Contenidos

Contenido

TOMO 1

Pensamiento matemático avanzado - Nivel Medio

Pensamiento matemático avanzado - Nivel Superior

Pensamiento numérico y algebraico - Nivel básico

Pensamiento numérico y algebraico - Nivel Medio

Pensamiento numérico y algebraico - Nivel Superior

Pensamiento Geométrico - Nivel básico

Pensamiento Geométrico - Nivel Medio

Pensamiento Geométrico - Nivel Superior

Epistemología e historia de la matemática - Nivel Medio

Epistemología e historia de la matemática - Nivel Superior

Incorporación de distintas perspectivas - Nivel básico

Incorporación de distintas perspectivas - Nivel Medio

TOMO 2

Incorporación de distintas perspectivas - Nivel Superior

Uso de tecnología - Nivel Medio

Uso de tecnología - Nivel Superior

Resolución de problemas - Nivel básico

Resolución de problemas - Nivel Medio

Resolución de problemas - Nivel Superior

Evaluación - Nivel Medio

Evaluación - Nivel Superior

Teoría y metodología

Formación de profesores - Nivel básico

Formación de profesores - Nivel Medio

Formación de profesores - Nivel Superior

Educación a distancia - Nivel Superior

Desarrollo del curriculum - Nivel Medio

Desarrollo del curriculum - Nivel Superior

Documentos de los grupos de trabajo y discusión

Incorporación de Distintas Perspectivas

Nivel Superior

Hacia una comprensión del sujeto ingresante

María Rosa Etchevers
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Rafaela. Argentina
padron@arnet.com.ar

Resumen
El presente trabajo aporta datos relevados en el Taller de Orientación Universitaria del Seminario de Ingreso a la Facultad Regional Rafaela de la Universidad Tecnológica Nacional, que se desarrolla en forma paralela al del área de Matemática, con la intención de favorecer una comprensión del sujeto ingresante que permita repensar las intervenciones del área de Matemática en dicha instancia con un conocimiento más profundo de la problemática del sujeto de aprendizaje. En la consideración de que este conocimiento puede orientar el análisis de la situación didáctica, definida por Brousseau como el objeto de estudio de la didáctica de la matemática.

Introducción

Las investigaciones desarrolladas en la didáctica de la matemática en los últimos años, se orientan hacia una búsqueda de respuestas a los interrogantes que surgen en la práctica educativa. Los conceptos teóricos surgidos al interior de las investigaciones resultan de una perspectiva de análisis que enfoca las relaciones entre docente, alumno y saber a enseñar o conocimiento enseñado. En este sentido, Yves Chevallard explicita el concepto de transposición didáctica y destaca la importancia de la vigilancia epistemológica y Brun señala las condiciones que deben cumplir las situaciones problemáticas para facilitar al alumno la tarea de apropiación del conocimiento matemático. Las conceptualizaciones elaboradas por Brousseau se orientan al análisis a priori de la situación didáctica constituida por la identificación de las variables de comando y destacan la importancia de que la adquisición del conocimiento se encuentre justificada por la lógica de la situación, incorporando las nociones de “contrato didáctico”, “situación didáctica” y “situación a-didáctica”. Charnay, siguiendo a Brousseau, señala la importancia de que los conocimientos enseñados se presenten como herramientas para resolver problemas aunque advierte que dicha actividad de resolución de problemas puede ser objeto de diferentes usos que remiten a modelos de aprendizaje diferentes (López, 1995).
Estas investigaciones enfocan el análisis de la situación didáctica que Brousseau define como el objeto de estudio de la didáctica de la matemática. Cabe señalar que estos estudios así como también la presente investigación, ponen en evidencia los múltiples atravesamientos que, como señala Souto (Camilioni et al., 1998), caracterizan al acto pedagógico. La perspectiva de esta autora reconoce a la situación de enseñanza-aprendizaje como un fenómeno complejo. Desde esta concepción, adquiere importancia el abordaje de la problemática de cada sujeto inserto en la situación concreta de aprendizaje, hecho que adquiere especial relevancia en el caso de los adolescentes ingresantes a la universidad en tanto afrontan una elección decisiva en sus vidas en una etapa singular de su historia evolutiva. En este sentido, el presente trabajo aporta datos relevados en el Taller de Orientación Universitaria del Seminario de Ingreso a la Universidad Tecnológica Nacional que se desarrolla en forma paralela al del área de Matemática, con la intención de favorecer una comprensión del sujeto ingresante que permita repensar las intervenciones del área de Matemática en dicha instancia con un anclaje en la realidad de sus principales actores.

La hipótesis del presente trabajo es que en la etapa de pre-ingreso a la Universidad existen obstáculos epistemofílicos, es decir, relacionados con los factores afectivos de los propios sujetos de aprendizaje, que constituyen una variable de significativa importancia en la situación de enseñanza-aprendizaje y requieren de su especial consideración para la enseñanza en tanto son susceptibles de interferir el vínculo entre el alumno y el objeto de aprendizaje.

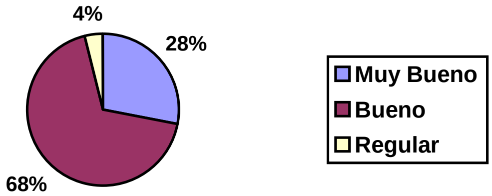
Método

La investigación se lleva a cabo en el Taller de Orientación Universitaria que se desarrolla en la Facultad Regional Rafaela de la Universidad Tecnológica Nacional. Los períodos considerados hasta el momento incluyen los Seminarios de Ingreso relativos a los ciclos 1999, 2000 y continúa en el 2001. Las áreas involucradas en el Seminario son: el Taller de Orientación Vocacional (que incluye información relativa a las carreras, orientación en el proceso de elección y estrategias de estudio) y el área de Matemática.
La recolección de datos de la investigación incluye métodos cuantitativos y cualitativos. Entre ellos pueden mencionarse encuestas cuyos cuestionarios incluyen preguntas cerradas y abiertas e informes orales. Las preguntas cerradas tienen por objeto facilitar la tabulación de los datos y la traducción de los mismos a gráficos para visualizar con mayor claridad los resultados del conjunto. Las preguntas abiertas se solicitan para superar el punto de vista del investigador y para promover una mayor apertura de los alumnos en relación con la comunicación de las dificultades individuales. La finalidad de los informes es conocer los procesos internos de los alumnos y su significado desde la perspectiva de los propios actores.
A modo de ejemplificación, se explica a continuación el procedimiento llevado a cabo en la etapa inicial aplicado a una población de 75 alumnos organizados en dos comisiones. Los alumnos responden el siguiente cuestionario.

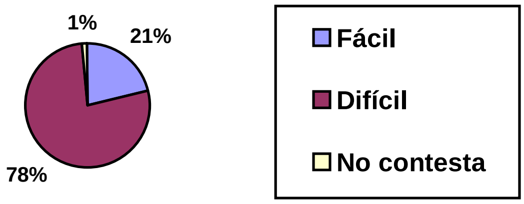
1) ¿Cómo evaluaría su desempeño en la escuela media?
   a) Muy bueno
   b) Bueno
   c) Regular
2) Considera que los resultados se relacionan con:
   a) Su capacidad
   b) Su esfuerzo
   c) Factores externos a su persona
3) Piensa que la transición escuela-universidad le resultará:
   a) Fácil
   b) Difícil
4) Si eligió la segunda posibilidad, ¿con qué relaciona las posibles dificultades?
   a) Conocimientos insuficientes
   b) Falta de hábito de estudio
   c) Forma de estudio deficiente
   d) Otros
5) ¿Por qué eligió una carrera de la Universidad Tecnológica Nacional?
   a) Por vocación
   b) Por proximidad

c) Por consejo
d) Por la posibilidad de inserción laboral posterior

El cuestionario arroja los siguientes resultados significativos en relación con el trabajo.
Resultado de la pregunta 1: Autoevaluación del desempeño en la escuela media:



Resultado de la pregunta 3: Representación mental sobre la transición escuela-universidad:



Al momento de abordar la orientación vocacional, los alumnos responden las siguientes preguntas:

1- Seguir una carrera implica una elección. ¿Cree que ha desarrollado su capacidad para elegir? Fundamente su respuesta.
2- ¿Qué sentimientos le provoca la situación de elegir?
3- ¿Considera prioritarios sus inclinaciones y gustos personales para realizar su elección o existen otros factores que la condicionan? Si existen, ¿cuáles son?

Las respuestas de los alumnos arrojan los siguientes datos:

- Los sentimientos relacionados con la situación de elegir abarcan una gama que en un extremo representa “alegría” y es significado como crecimiento y, en el otro, “inseguridad”, “temor al fracaso”, “miedo”, según sus propios términos.
- Los dos factores mencionados con mayor recurrencia como condicionantes de la elección son: el económico y, en menor medida, las expectativas de los padres.

Los informes orales se llevan a cabo a lo largo del Seminario con los alumnos que expresan dificultades emocionales y con los que manifestan obstáculos epistemológicos.
Resultado de los informes: Los primeros informes indican que los alumnos no saben concretamente a qué adjudicar el miedo que manifiestan y evidencian que el temor al fracaso se proyecta a los resultados en el área de Matemática, también sin explicación aparente. Esta dificultad para identificar causas resulta sugestiva en tanto los problemas de estudio han sido identificados como una problemática precisa en la encuesta en relación con las posibles dificultades. Algunos alumnos admiten, en informes posteriores, una concomitancia entre los factores emocionales y las dificultades en el área de Matemática.

Los hechos permiten establecer la siguiente correlación: los alumnos que presentan problemas en el nivel epistemológico han manifestado, en su mayoría, un elevado nivel de ansiedad.

Resultados

El análisis de los datos surge de una triangulación metodológica en tanto se recurre al cruce de la información obtenida a través de los diferentes métodos, en la consideración de que este abordaje resulta pertinente cuando el fenómeno que se intenta comprender es particularmente complejo (Cohen & Manion, 1990). Se mencionan a continuación los resultados obtenidos:

1) La primera encuesta refleja, entre otras cuestiones, que los alumnos conciben el pasaje de la escuela media a la universidad como un momento de cambio y que la nueva situación es percibida como un terreno inseguro. Esto se visualiza con claridad en el hecho de que mientras el 28% de los alumnos evalúa como “Muy Bueno” su desempeño en la Escuela Media y el 68% lo estima “Bueno”, un 78% considera “Difícil” la transición. Siguiendo a Pichón Rivière quien plantea que en todo proceso de cambio está presente –junto al deseo de cambiar- la resistencia al cambio, parece válido inferir que la nueva situación es portadora de ansiedad y resulta potencialmente desestructurante. Cabe señalar que el concepto de resistencia fue descubierto por Freud en el proceso de cura en la terapia psicoanalítica y planteado, desde otro contexto, por Kurt Lewin.
2) El segundo cuestionario permite ratificar que el proceso de cambio propio de esta etapa se presenta para algunos sujetos como una amenaza, descripta en ciertos casos como “temor al fracaso”, “miedo que se agranda de acuerdo a la importancia que tiene en mí esa decisión”, según sus propios términos. Este sentimiento puede encontrar su explicación en una contradicción básica: la contradicción entre proyecto y resistencia al cambio. Y permite prever que esta situación, potencialmente desestructurante, puede operar como un desorganizador de la tarea. En cuanto a los factores económicos y los deseos familiares, expuestos en algunos casos como condicionantes de la elección, resultan congruentes si se cruzan con los datos de la encuesta anterior y también pueden constituirse en obstáculos epistemofílicos interfiriendo el abordaje de la tarea explícita. Esta interpretación resulta compatible con el enfoque de Luzuriaga quien, en su libro “La inteligencia contra si misma” (1970), pone el acento en el hecho de que la inestabilidad emocional del adolescente puede, en ciertos casos –algunos de los cuales presentan evidente analogía con los factores condicionantes mencionados anteriormente- actuar en contra de la función intelectual.
3) Los informes individuales sugieren que los factores afectivos inciden, en algunos casos, desfavorablemente en el aprendizaje y se relacionan no sólo con dimensiones manifiestas sino también, latentes. Asimismo, se advierte que las expectativas familiares resultan altamente significativas para los sujetos. Si bien las demandas familiares divergentes con los deseos del alumno no resultan muy frecuentes, representan una presión importante cuando se presentan y son percibidas como un fuerte mandato del cual resulta difícil sustraerse. Cuando los elementos condicionantes de la elección son contradictorios con los deseos del alumno, es alta la probabilidad de que operen como desestructurantes. En esos casos, la primacía de la dimensión fantasmática ocupa al aparato psíquico para procesar esa situación subyacente y dificulta el abordaje de la

tarea, afectando –según los propios sujetos- la atención y la memoria y, por ende, el aprendizaje. Este hecho sugiere la importancia de favorecer la remoción de los obstáculos epistemofílicos que obstaculizan el campo, previo abordaje de los contenidos específicos. El acto de desocultar la problemática implica el reconocimiento y esclarecimiento del eventual conflicto en la persona del ingresante.

4) Los obstáculos epistemofílicos más frecuentes en esta etapa son aquellos que provienen de las ansiedades, complejos e inseguridades de los sujetos, potenciados por la problemática del momento vital del alumno ingresante. También inciden en la apropiación del conocimiento sus matrices de aprendizaje, la historia de los sujetos, de sus vínculos con los otros y con la realidad, sus prejuicios, su visión de la realidad.
5) Los resultados expuestos muestran que la realización de un estudio exploratorio sobre la problemática que enfrentan los alumnos ingresantes a la universidad resulta esclarecedora para la elaboración de estrategias didácticas. La problemática, habitualmente abordada en los Talleres de Orientación, resulta nodal para la búsqueda de estrategias didácticas que orienten la intervención, considerando la importancia de facilitar la remoción de dichos obstáculos en la enseñanza de la matemática.
6) La población ingresante presenta un alto grado de heterogeneidad no solo en cuanto a sus conocimientos y actitudes sino también en relación con su posibilidad emocional de acceder a un nuevo lugar, un lugar en el mundo de los adultos que le permita reconocerse como artífice de su propia vida. El desarrollo de este proceso depende en gran medida de las condiciones del medio en que ocurre y de la historia previa de los sujetos. El momento del desarrollo en que se encuentra cada individuo marca de manera sustantiva su posibilidad de abordar en forma autónoma los obstáculos epistemológicos que puedan presentarse. Esta zona de desarrollo real coexiste con una zona de desarrollo potencial en la cual -siguiendo a Vygotsky (1988)- el docente puede intervenir, teniendo en cuenta que los seres humanos modifican su conducta a partir de sus relaciones con el entorno. La disposición requerida para afrontar la crisis adolescente implica, básicamente, no eludir la problemática de este momento vital del alumno ingresante, centrado en la transición de la vida infantil a la adulta y caracterizado por la extrema vulnerabilidad del proceso adolescente (Kasten, 1997).
7) La funciones susceptibles de ser afectadas por los factores emocionales son: la función de adquisición de datos, la función de conservación de datos y la función de elaboración de los mismos. La primera, llevada a cabo preferentemente por los sentidos, es decir, por las funciones perceptivas, puede traducirse en una inhibición de las funciones sensoriales provocada por la contra-inteligencia (proceso activo de no aprender) o generar una toma de distancia de la realidad, mediante el desinterés, la falta de atención y el aburrimiento. También puede impedir la adquisición de la realidad con validez objetiva. La segunda, sustentada en la memoria y el establecimiento de hábitos, tiene como mecanismo principal el olvido tanto en el campo mental (opera apartando del campo perceptivo los contenidos conflictivos) como en el corporal (olvidando hábitos ya adquiridos). La tercera, que consiste en la transformación de los datos, puede limitar los aprendizajes al plano memorístico, impidiendo aprendizajes reflexivos o creadores. Estos bloqueos, interferencias y, a veces, anulación de las funciones necesarias para el aprendizaje, se vinculan, según Luzuriaga, a profundas problemáticas afectivas.

Conclusión

Se desprende de la investigación que la población que cursa el pre-ingreso a la universidad presenta diversas dificultades. En primer lugar, se encuentra mayoritariamente en una etapa singular de su historia evolutiva: la adolescencia. Cabe recordar que la Organización Mundial de la Salud ha desplazado el inicio de la adultez de los 21 a los 25 años y que existen estudios serios que indican que la adolescencia empieza cada vez más temprano. Este período psicosociológico que, en nuestra cultura, se caracteriza por la transición entre la infancia y la adultez remite a un pasaje que no siempre se produce "naturalmente". De hecho, autores como Aberastury (citado por Dolto, 1990), refieren que el adolescente debe superar tres procesos de duelo, entendiéndose por tal el conjunto de procesos psicológicos que se producen normalmente ante la pérdida de un objeto amado y que llevan a renunciar al objeto: el duelo por el cuerpo infantil, el duelo por el rol y la identidad infantiles y el duelo por los padres de la infancia. En segundo término, el alumno ingresante se enfrenta a la disyuntiva de tener que elegir un proyecto de vida. Este hecho, intrínsecamente conflictivo, incorpora otra circunstancia que aumenta su complejidad: dicho proyecto puede ser coincidente o no con las expectativas familiares depositadas en el mismo y, en este último caso, suele traducirse en una situación angustiante para el alumno desde una perspectiva psicológica. En este contexto, el Seminario de Ingreso añade una nueva dificultad al ingresante: lo inserta en una situación caracterizada por la serialidad; entendiendo por "serie" al conjunto de personas anónimas, no vinculadas pero unidas por un objetivo externo. Si bien esta serie es susceptible de convertirse en grupo, es poco probable que esto ocurra sin un proceso dialéctico de construcción en el cual se presentan los efectos concomitantes de los avances y retrocesos, hecho que repercute en los alumnos.
Esta problemática –que suele provocar efectos perturbadores en los sujetos- se constituye en una variable importante de la situación de aprendizaje según se infiere de la presente investigación: la dimensión afectiva puede provocar una interferencia entre el alumno y el objeto de conocimiento, representando un obstáculo epistemofílico que puede presentar consecuencias en el nivel epistemológico. Esta perspectiva sugiere la pertinencia de ofrecer a los docentes de Matemática que trabajen con la población ingresante a la universidad herramientas conceptuales que les permitan repensar las intervenciones del área en dicha instancia a partir de una comprensión más profunda del sujeto de aprendizaje, atendiendo a una concepción integral e integradora de la educación.

Referencias bibliográficas

Camilioni, A. et al. (1998). *Corrientes didácticas contemporáneas*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Dolto, F. (1990). *La causa de los adolescentes*. Barcelona: Editorial Seix Barral.

Kasten, M. (1997).Jornadas de Orientación Vocacional.*Servicio de Orientación Vocacional de la Universidad Nacional de Rosario*.

López, A. (1995). Didáctica de la matemática: encuadre epistemológico y algunas reflexiones en torno a su implementación en Psicopedagogía Clínica. En *Cuadernos de la Fundación E.P.P.E.C.* Buenos Aires.

Vygotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica Grijalbo.

Determinación del perfil de los ingresantes a la universidad, en relación con las estructuras lógicas que manejan, la capacidad que poseen en el uso del lenguaje simbólico y los conocimientos previos que tienen de Cálculo Diferencial

Magdalena Pagano, Walter Álvarez, Eduardo Lacués
Universidad Católica del Uruguay (UCU); República Oriental del Uruguay
mapagano@ucu.edu.uy walvarez@ucu.edu.uy elacues@ucu.edu.uy

Resumen
Se relevó información acerca del desempeño de los ingresantes a la universidad en tres aspectos: las estructuras lógicas que manejan, la capacidad que poseen en el uso del lenguaje simbólico y los conocimientos previos que tienen de Cálculo Diferencial. Para esto, se diseñó un instrumento consistente en un cuestionario de múltiple opción. Se describe la forma en que aplicado. Se concluye que los estudiantes que ingresan a la universidad confunden un enunciado con su recíproco, dan por sentado que la no aplicabilidad de un teorema implica que lo afirmado en su tesis es falso, confunden los conectivo lógicos “y” y “o” y manejan la noción de función sólo como un proceso y no como un objeto. Algunos resultados sugieren la necesidad de revisar aspectos de la confección del instrumento.

Introducción

El problema de la articulación entre el sistema de enseñanza secundario y el universitario suscita en nuestro país una gran preocupación, en particular, por el porcentaje de fracasos que se producen en el primer año de universidad. En las carreras que tienen asignaturas de Matemática en el primer año de su plan de estudios parece asociarse el fracaso con estas asignaturas.
Existen antecedentes recientes en nuestra región que analizan este tema (Belgrano, D. y otro, 2000).
La experiencia de enseñanza de los autores permite conjeturar que parte de la explicación de este problema puede darse a partir de la diferencia existente entre los presupuestos acerca de las capacidades y conocimientos previos que poseen los ingresantes a la universidad, sobre los que se elaboran los programas de las diferentes asignaturas del primer año universitario, y los que efectivamente poseen.
En base a esta experiencia y a investigaciones anteriores, se diseñó un instrumento que pretende relevar información acerca del desempeño de los ingresantes a la universidad en tres aspectos: las estructuras lógicas que manejan, la capacidad que poseen en el uso del lenguaje simbólico y los conocimientos previos que tienen de Cálculo Diferencial.
En este trabajo se establecen los supuestos teóricos sobre los que se elaboró el instrumento que fue utilizado en la investigación. Asimismo, se analizan los resultados de su aplicación y se extraen conclusiones.

Fundamentos teóricos para la elaboración del instrumento

En el anexo I se presenta el cuestionario utilizado.
El primer aspecto en el que se decidió investigar fue el de las estructuras lógicas que manejan los ingresantes. La relevancia de este problema es señalada por Duval (1999) al mostrar las diferencias existentes entre las distintas formas discursivas y la demostración y plantear la cuestión del pasaje del uso de las primeras a la necesidad de la segunda en el

trabajo matemático. Algunas propuestas didácticas en este sentido se encuentran en (Pluvinage, F., 1996).
En base a reconocimientos informales de situaciones suscitadas en la clase, fue posible aislar algunos de los errores que frecuentemente aparecen en los trabajos de los estudiantes, a saber:

a) Confusión entre enunciado de un teorema y de su recíproco.
b) Creencia de que si un teorema es válido, su recíproco también.
c) Creencia que la no aplicabilidad de un teorema implica que lo asegurado en la tesis del mismo es falso.
d) Inadecuada idea del uso de un contraejemplo para invalidar un enunciado.

Estas presunciones fueron puestas a prueba en una investigación cuyos resultados fueron presentados en la EMCÍ (Álvarez, W. y Lacués E., 2000). Para elaborar el instrumento de ésta, se seleccionaron algunos de los ítems usados en aquella ocasión, en tanto otros se agregaron, de acuerdo con la experiencia recogida al validar el primer cuestionario.

En relación con esta parte del instrumento actual, en el primer ítem la respuesta correcta es la cuarta; los que marquen la primera están confundiendo el enunciado de la afirmación hecha con su recíproco; quienes contesten como verdadera la tercera están actuando en la creencia de que la no aplicabilidad de un teorema tiene como consecuencia que lo asegurado en la tesis es falso; la segunda respuesta no tiene relación con los errores que se están analizando.
El segundo ítem busca averiguar cuál es la noción de contraejemplo que posee quien responde, mediante una formulación que usa cuantificadores. La respuesta correcta es la tercera.
El tercer ítem explora acerca de la idea de recíproco. La respuesta correcta es la segunda. Quienes contesten la primera confunden el recíproco con el contrarrecíproco y los que respondan la cuarta cometen el mismo error que los que contestaron la tercera opción del primer ítem. La tercera no tiene ningún significado.
La noción de contraejemplo vuelve a ser analizada en el cuarto item, pero con una perspectiva diferente que en el segundo. Aquí no se usan explícitamente cuantificadores, y se busca mediante la exhibición de casos particulares mostrar que una formulación constituida por la conjunción de dos predicados es falsa. La respuesta correcta es la primera, porque muestra que es falso el primer predicado y por lo tanto la conjunción.
La estructura por la cual se cree que si un teorema ese cierto su recíproco también lo es, aparece en quienes contesten como correcta la primera opción del quinto item, donde la respuesta correcta es la tercera.
Este mismo error aparece en quienes contesten como correcta la segunda opción del sexto ítem. La respuesta correcta es la tercera, aunque para reconocer este hecho debe manejarse que si un teorema es cierto también lo es su contrarrecíproco.
Los ítems quinto y sexto incorporan cuantificaciones de segundo nivel (Ramírez, J.L., 2000). Una respuesta correcta en estos evidencia entonces que se ha llegado por parte del estudiante a la etapa de encapsulación, es decir, puede considerar una formulación compleja (en la que aparezcan diversos predicados, conectivos y cuantificadores) como un objeto mental, y es capaz entonces de efectuar acciones sobre él, como por ejemplo, volver a cuantificarlo.

En el cuestionario de lenguaje simbólico se tratan dos aspectos: el primero se refiere a la traducción entre distintos registros simbólicos; el segundo tiene que ver con el uso del lenguaje algebraico para representar situaciones de la realidad.
En relación con los problemas de traducción entre diferentes modos de expresión, Douady (1995) señala que estos constituyen un aspecto del saber matemático, concretamente el sintáctico; en tanto los de construcción de modelos, que usan ciertas nociones matemáticas que funcionan como herramientas, conforman el otro aspecto, el semántico. Algunas cuestiones relacionadas con estos procesos de traducción han sido reseñadas por (Janvier, C., 1987).
Antecedentes que fueron tenidos en cuenta para elaborar esta parte del cuestionario pueden verse en (Vega, E., 1995) y (Rosas, R., 1995).
Los ítems 1 y 2 analizan la capacidad de vincular las conectivos lógicos “y”, “o”, y “no” con los símbolos de intersección, unión y complemento de conjuntos. En el 1 se da un conjunto mediante operaciones y se pide reconocerlo en términos de las operaciones lógicas entre predicados, en tanto en el 2 se plantea el proceso inverso.
Los ítems 3 y 4 exploran la relación entre la pertenencia a un conjunto y el valor de verdad de la proposición que define el conjunto. En el 3 se da un elemento de un conjunto y se pide reconocer que predicados satisface ese elemento, en tanto en el 4 se invierte tal situación.
Los ítems 5 y 6 proponen la construcción de modelos matemáticos elementales para describir una determinada situación utilizando lenguaje algebraico.

En cuanto a los ítems de cálculo diferencial se pretende detectar con ellos el nivel de comprensión de los conceptos que han alcanzado los estudiantes, en particular, si son capaces de manejar funciones como objetos o solamente como procesos.
Parece existir un desequilibrio entre el manejo conceptual y el manejo algorítmico que los estudiantes realizan, dificultad que es señalada por Artigue (1995) quien indica que las investigaciones disponibles permiten apreciar que los estudiantes logran obtener un razonable éxito en el manejo algorítmico de las reglas del cálculo pero no logran alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento.
Con los dos primeros ítems se busca detectar justamente la flexibilidad proceso-objeto para pasar del status operacional al status estructural de función, al analizar si los estudiantes logran resolver situaciones que involucran funciones independientemente del proceso o fórmula a partir del cual la función se genera. Si esta dificultad no estuviera presente quienes logren resolver correctamente el ítem 1 debieran ser capaces de resolver también el ítem 2.
Este mismo tipo de dificultad es el que buscan detectar los ítems 3 y 4, donde los estudiantes necesitan aplicar el teorema que permite el cálculo de la derivada de la función compuesta. En el primer caso pueden lograrlo usando mecánicamente la regla de la cadena; en cambio en el segundo deben independizarse del manejo algorítmico habitual pues desconocen las ecuaciones que definen las funciones involucradas en la composición.
Por último los ítems 5 y 6 buscan detectar las articulaciones entre los diferentes registros simbólicos, en particular, dentro de un mismo registro cuando deben manejar simultáneamente dos niveles de información (Artigue, 1995).
En el ítem 5 deben ser capaces de reconocer los efectos que produce sobre el gráfico de una función un incremento constante aplicado a los valores de la variable independiente.
En el ítem 6 en cambio deben reconocer las relaciones existentes entre el gráfico de una función y el gráfico de su derivada.

Análisis de los resultados de la aplicación del instrumento

En el Anexo II se presentan los resultados de la aplicación del instrumento a los alumnos ingresantes a la UCU, en dos Facultades, la de Ciencias Empresariales y la de Ingeniería, en dos carreras de la primera, la de Contador Público y la de Economía de la Empresa, y en cuatro de la segunda, las de Ingeniería en Telecomunicaciones o en Electrónica o en Informática y la de Licenciatura en Informática.

Una primera conclusión es que los resultados de los ingresantes a las carreras en Ingeniería son superiores a los de la Licenciatura en Informática y a los de la Facultad de Ciencias Empresariales, en tanto los de estas tres últimas carreras son muy similares entre sí. Una posible explicación de este hecho es que los requisitos de entrada a las carreras de Ingeniería son más rígidos que los de las otras tres.

En efecto, quienes ingresan a las carreras de Ingeniería sólo provienen de la orientación correspondiente de secundaria, que acumula en sus últimos dos años cinco asignaturas del área matemática (cubriendo temas de geometría, geometría analítica, álgebra y cálculo diferencial), mientras que los de las otras tres carreras pueden ingresar desde cualquier opción de secundaria en la que hayan tenido al menos un curso de álgebra y otro de cálculo diferencial. Presumiblemente, entonces, los alumnos de Ingeniería reciben en secundaria una preparación más amplia en matemática.

En relación con las estructuras lógicas que manejan los ingresantes, parece claro que muchos confunden un enunciado con su recíproco o creen que si un enunciado es cierto, su recíproco también. Esto resulta de considerar los porcentajes de quienes contestaron como correctas la primera opción del quinto ítem y la segunda del sexto. Éstas, junto con la primera del primero, servían para detectar este error. Sin embargo, esta última fue marcada por un porcentaje muy pequeño de alumnos; una posible explicación de este hecho proviene de que este ítem fue contestado correctamente por la mayoría y que el error más frecuente fue contestar como correcta la segunda opción, lo que podría haber sido inducido por la forma en que se diseñó el ítem.

La creencia que la no aplicabilidad de un teorema implica que lo asegurado en la tesis del mismo es falso está muy extendida, como revelan los porcentajes de los que contestaron como correctas la cuarta opción del tercer ítem y la segunda del quinto, esta última quizá un poco oculta por el alto porcentaje de errores cometido al marcar como cierta la primera opción.

En cuanto a la noción de contraejemplo, es claro que se reconoce un caso particular como tal, pero es difícil verlo cuando se presenta con una formulación que incluya cuantificadores, como muestran el alto porcentaje de los que respondieron correctamente el cuarto ítem y el también alto de los que se equivocaron al marcar como correcta la primera opción del segundo.

La segunda parte del cuestionario explora el manejo del lenguaje simbólico. Surge aquí muy claramente que los ingresantes incurren en confundir los conectivos lógicos “y” y “o”, como se ve a partir del número que contestó como correctas la segunda opción del séptimo ítem o la primera del décimo. Es también claro que los ingresantes muestran bastante competencia para traducir situaciones formuladas en lenguaje coloquial en términos de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, lo que se muestra por el hecho que la mayoría contestó correctamente los ítems undécimo y duodécimo.

Finalmente, la parte del cuestionario dedicada al cálculo diferencial, permitió observar que pocos de los ingresantes manejan la idea de función como un objeto matemático, aún cuando puedan considerarla como un proceso. Esto puede concluirse a partir de los porcentajes de alumnos que habiendo respondido correctamente el decimotercer ítem erraron al contestar el decimocuarto, donde los saberes matemáticos involucrados eran los mismos, pero en el primer caso se disponía explícitamente de la fórmula para la función y en el segundo no. Una situación análoga se da entre los ítems decimoquinto y decimosexto.
En cuanto a los dos últimos ítems los resultados son dispares. En el penúltimo, que explora una habilidad mas bien elemental de interpretación gráfica, es bajo el porcentaje de aciertos. En cambio el último, que requiere del conocimiento de la relación entre una función y su derivada, y en principio es más compleja que la anterior, recibió respuesta correcta de la mayoría de los alumnos. Es posible que aquí se haya dado una especie de adivinación, sugerida porque dos opciones eran claramente erróneas.

Conclusiones

El análisis anterior permite concluir que algunas de las presunciones que se tenían al comienzo del trabajo pueden considerarse como confirmadas por los resultados. Entre ellas se cuentan la confusión entre un enunciado y su recíproco y la creencia de que la no aplicabilidad de un teorema implica que lo afirmado en su tesis es falso. En cuanto a la noción de contraejemplo, parece que el error aparece asociado al uso de cuantificadores y no cuando se exhibe un caso concreto, que es reconocido correctamente.
La confusión entre los conectivos “y” y “o” apareció en los procesos de traducción asociados tanto al describir mediante disyunciones, conjunciones y negaciones, un conjunto dado en términos de operaciones de unión, intersección y complemento, como en el inverso. Sin embargo, se notó un muy buen desempeño de los ingresantes en cuanto a la competencia para presentar situaciones dadas coloquialmente en términos del lenguaje algebraico. Aquí se nota una discrepancia bastante marcada con los resultados obtenidos por (Vega, E., 1995) y (Rosas, R., 1995).
En cuanto a la noción de función como objeto, es claro que no la tienen la mayoría de los alumnos, aún cuando manejen funciones como procesos. Mientras tanto, las cuestiones referidas a representaciones gráficas conducen a una situación en la que es difícil extraer conclusiones; en efecto, la pregunta que se consideró a priori más sencilla resultó ser respondida correctamente por pocos estudiantes, mientras que la más difícil fue bien contestada por la mayoría.
Este hecho, junto con los comentarios ya efectuados con relación a la segunda opción del primer ítem y la segunda del quinto, pueden indicar una inadecuada redacción de estas partes del cuestionario.
Como continuaciones posibles de este trabajo aparecen al menos tres. La primera consiste en la reelaboración de los ítems cuya redacción ofrece dudas. La segunda, que ya está en marcha, es la utilización de este mismo cuestionario para medir la evolución de los estudiantes, en relación con las capacidades y habilidades relevadas, al cabo del primer semestre cuando culminan sus primeros cursos universitarios de matemática.
La tercera, que lleva a considerar un plazo más largo y también está en proceso, es el análisis de la adecuación de este cuestionario como un predictor del éxito académico de los

estudiantes, al cabo de su primer año universitario, no solamente en relación con las materias del área matemática, sino con el conjunto de la carrera elegida.

Referencias bibliográficas

Álvarez, W., Lacués E. (2000). *Detección de errores en las estructuras lógicas manejadas por estudiantes de primer año de universidad en carreras en Ingeniería*. ponencia presentada en el Primer Encuentro Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI) (Universidad Tecnológica Nacional, Regional Concepción del Uruguay).

Artigue,M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. en *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, (pp. 97-140). Bogotá: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Belgrano, D. y Herrera, G. (2000). *Análisis del nivel académico de los ingresantes a la universidad*. Reporte de investigación presentado en la RELME14 (Universidad de Panamá).

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. en *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, (pp. 97-140). Bogotá: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Janvier, C. (1987). Translation processes in Mathematics Education. En Janvier, C. (editor). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Pluvinage, F. (1996). Diferentes formas de razonamiento matemático, en Hitt, F. (editor), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 77-91). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ramírez, J. L. (2000). *Análisis del modelo de descomposición genética de la cuantificación, en dos contextos: el contexto de los enunciados en matemática y el contexto no matemático de la representación del conocimiento con la lógica de primer orden*, trabajo de investigación dirigido por la Dra. Carmen Azcárate y el Dr. Felip Manyà, presentado al programa de doctorado en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Rosas, R. (1995). La comprensión del álgebra y los números racionales. *Educación Matemática, Volumen 7, Nº 2*. (pp. 44-59), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Vega, E. (1995). El uso del lenguaje algebraico en los alumnos de bachillerato. *Educación Matemática, Volumen 7, Nº3*. (pp.27-47), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Exploración de las posibles influencias del lenguaje en la construcción del conocimiento en el campo de la matemática: una primera mirada

Patricia Viviana Pichl
Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería y Departamento de Ciencias de la Educación. Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales. Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. Comodoro Rivadavia. Chubut. Argentina
pdpichl@infovia.com.ar

Resumen
El presente escrito trata de mostrar las reflexiones que generaron que un grupo multidisciplinario se reuniera en un espacio de análisis referido a las prácticas discursivas en ámbitos de enseñanza y de aprendizaje del campo de las ciencias exactas.
Las diferentes miradas de análisis del objeto pretenden aportar información que conlleve a la estructuración de estrategias para el mejoramiento de la calidad de la enseñanza en un contexto particular.

Introducción

El presente escrito está basado en un proyecto de investigación denominado: "*Exploración de las posibles influencias del lenguaje en la educación matemática. El caso de los ingresantes a la Facultad de Ingeniería –Sede Comodoro Rivadavia- de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco*", que se encuentra en su etapa inicial de desarrollo, encuadrándose en las siguientes especialidades: enseñanza y matemática. Las mismas están representadas en tres departamentos, uno de la Facultad de Ingeniería –Departamento de Matemática- y los otros de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales –Departamentos de Ciencias de la Educación y Comunicación Social.
El fin de este proyecto es abordar una problemática específica relacionada con la enseñanza de las materias propedéuticas en el área de matemática de las carreras de la Facultad de Ingeniería ya sea en la profundización del conocimiento, cuanto a la transferencia de los mismos en la práctica docente. Al mismo tiempo nos sustentamos en la afirmación de que toda propuesta de investigación educativa cuenta entre sus preocupaciones y finalidades íntimas la formación de recursos humanos, tarea que se realiza desde un primer momento entre los integrantes de la unidad ejecutora tratando de conocer las necesidades e inquietudes que atraviesan las prácticas de la enseñanza y de aprendizaje del nivel superior.
La indagación y exposición de los resultados que se obtienen se encuentran asociados a las estrategias que buscan permitir plantear una mejora de los actuales servicios universitarios en términos de identificación de nuevas alternativas de desarrollo. Esto se sustenta en los principios de la carta fundacional de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, a la cual acceden estudiantes de toda la región con variadas propuestas de enseñanza cursadas y con diferentes trayectos técnicos pedagógicos aprobados. Por esto creemos que la reflexión acerca de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los alumnos inscriptos en las carreras de la Facultad de Ingeniería, fortalecerán el objeto de producir e impulsar criterios y pautas metodológicas para la evaluación continua y la elaboración de estrategias conjuntas, generando un mapeo de la calidad de la enseñanza.
Los objetivos que guían las tareas de este proyecto son:

- *Analizar las características que presentan las prácticas de la enseñanza en algunas de las materias propedéuticas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco a efectos de dilucidar los significantes y significados en los discursos pedagógicos del área de la matemática.*
- Cuantificar y cualificar informaciones sobre las posibilidades lingüísticas de los estudiantes de primer año de la Facultad de Ingeniería y su evolución a medida que avanzan en sus estudios.
- Generar consideraciones teóricas acerca de las prácticas de la enseñanza en matemática que coadyuven a mejorar la calidad, a partir del diagnóstico de las posibilidades lingüísticas.

Los mismos se concretarán en las siguientes metas, que guiaron la selección y organización de tareas que se están realizando: 1.- indagar sobre las posibilidades lingüísticas de los ingresantes a la Facultad de Ingeniería; 2.- recabar información sobre los obstáculos que las falencias lingüísticas provocarían en los procesos de aprendizaje en el área de matemática; 3.- analizar conjuntamente con docentes y alumnos las estrategias que implementan en las diferentes propuestas de enseñanza para lograr aprendizajes de calidad; y 4.- reflexionar acerca de los criterios epistemológicos establecidos con relación a las características idiosincráticas de los alumnos destinatarios.
Cabe aclarar que este proyecto de investigación basa sus raíces en las conclusiones del Proyecto de Investigación *"Una propuesta para recuperar la calidad de la enseñanza de la matemática"*, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, contando con la dirección del Dr. Jorge Vargas (setiembre de 1994 – abril de 1998), realizado en escuelas de nivel medio de la ciudad de Comodoro Rivadavia, que han permitido reflexionar acerca de las prácticas educativas en las asignaturas propedéuticas de las carreras de las ciencias exactas, como así también conocer diferentes prácticas de la enseñanza y los desarrollos cognitivos de los alumnos involucrados en ellas.

Algunas cuestiones de fundamento

El espacio y los protagonistas de este proyecto de investigación están circunscriptos a una de las sedes académico-administrativa de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. Esta universidad fue creada en el año 1974, con un área jurisdiccional muy extensa: la región patagónica sur. Esta región presenta índices demográficos muy bajos, a los cuales se suman las características actuales del contexto latinoamericano: globalización de los mercados; interdependencia; celeridad en la producción, el desarrollo y la difusión de tecnologías, con impacto sobre la dinámica de la significación social del conocimiento; incorporación de la robótica a la producción industrial; pobreza como efecto no deseado de la aplicación de políticas de ajuste estructural; explosión del conocimiento; introducción de un nuevo paradigma científico-tecnológico en el sistema productivo; y procesos más acelerados de urbanización y de comunicación extendida. La situación descripta origina particularidades en los diferentes contextos y en sus instituciones específicamente. Las propuestas educativas que se generan en el marco de la casa de estudios anteriormente mencionada intentan, por tanto, adecuarse a su idiosincrasia, respondiendo -de alguna manera- a sus problemáticas estructurales. Un caso de esto son las carreras que se dictan en la Facultad de Ingeniería, en donde constantemente se realizan procesos de indagación y evaluación, internos y externos con el objeto de mejorar la calidad de los procesos.

La educación de una persona consiste principalmente en crear condiciones favorables para el desarrollo de sus competencias. Estas pueden ser específicas de un campo de la experiencia o de un campo conceptual. Las instituciones educativas en general, y la universidad en particular, deberían generar y promover una mayor comprensión del proceso de aprendizaje de la ciencia, como así también diseñar estrategias que conlleven a superar los obstáculos que pudiere acarrear el desconocimiento del propio idioma o la pobreza de vocabulario, que pueden interferir en la construcción del lenguaje propio de la ciencia, en este caso particular ciencia matemática. Por consiguiente creemos que para la educación matemática se torna necesario estudiar los condicionamientos que el uso y conocimiento del lenguaje provoca en el aprendizaje. Asimismo se considera de importancia estudiar las estrategias que los estudiantes desarrollan para apropiarse de los conocimientos de matemática y de su vocabulario propio, como así también del uso de la simbología.

El estudio que se pretende llevar con esta investigación no sólo busca que se genere conocimiento sino también insumos necesarios para la *economía cognitiva* (Perkins, 1995) de los involucrados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Los resultados se cree que podrían impactar en las decisiones vinculadas a la enseñanza en ciencias exactas y en la enseñanza de la lengua, dada la necesidad de conocimiento de los procesos desarrollados.

A pesar que desde algunos discursos el tema educativo no pareciera constituirse relacionado con la variable económica, sabemos que el mejoramiento de las situaciones de aprendizaje, el conocimiento de los obstáculos que estudiante y mediador deben superar o ayudar a superar puede colaborar en la resolución de situaciones problemáticas en el área de la enseñanza de la matemática de manera contextuada.

El rol del educador en el nivel superior es brindar a los alumnos ayudas y mediaciones muy diversas. El sujeto individual es el protagonista de sus propios aprendizajes, por adaptación de sus esquemas y conocimientos anteriores a las situaciones nuevas, pero al mismo tiempo la ayuda y la mirada de los otros regulan en gran medida estos aprendizajes. Estas ayudas y mediaciones se relacionan con la elección de las situaciones, la clarificación de los objetivos por alcanzar, la guía, la planificación de las acciones y la toma de información, el cuestionamiento, la toma de conciencia y la explicación. Por esto es propósito de este proyecto dar herramientas a los mediadores en el conocimiento de algunos de los obstáculos y dificultades que se producen en los procesos de aprendizaje de los alumnos de los primeros años de la Facultad de Ingeniería. De esta manera se pretende dar respuestas no compartimentadas y al mismo tiempo, se busca que surjan reales beneficios de un mejor conocimiento de las problemáticas y de los resultados que atañen a un área de competencias: matemática. Aquí vale recordar que el mediador desempeña también un papel muy importante en la transmisión de los valores culturales, en particular de aquellos relacionados con la ciencia, el conocimiento racional, el rigor o la honestidad intelectual.

La matemática, campo de nuestro interés, la consideramos como poseedora y elaboradora de un lenguaje, que en algunos casos se construye montado en el lenguaje común, del cual suele extraer significantes y significados. El lenguaje natural o cotidiano posee una gran riqueza y por eso hace que muchas veces se comporte como no apropiado para su uso en matemática. Al mismo tiempo este lenguaje está poblado de sentidos diferentes, de tiempos, de deseos y de sutilezas de expresión inteligibles tal vez para un círculo muy reducido de personas afines al que habla. En el caso de la comunicación en el área de la matemática, lo que interesan son las situaciones claras, unívocas, que para todos y en todas

las circunstancias signifiquen lo mismo y las conexiones lógicas que dan precisión al lenguaje matemático.
En el campo de la enseñanza de la matemática la conceptualización tiene un papel fundamental, siguiendo a Vergnaud (1997) podríamos decir que: “ ha llegado la hora de darle por fin el lugar que le corresponde en los procesos cognitivos y en el aprendizaje. (...) La conceptualización está fundamentalmente presente en la percepción, ya que la identificación de los objetos y las propiedades invariables es la fundamentación misma de la percepción. Pero el estudio de los aprendizajes, así como el estudio de la historia de las ciencias o el análisis de la estructura lexical y sintáctica de las lenguas, muestra que más allá de las regularidades perceptivas el pensamiento construye objetos y predicados para los que sería aberrante buscar las razones en la mera percepción, pues responden en realidad a interrogantes que surgen de la necesidad de actuar, de prever y de integrar en sistemas coherentes, fenómenos que eventualmente contradicen la intuición perceptiva, o cuyas relaciones no son observables en forma directa.”
Por otra parte consideramos que no hay teoremas sin conceptos, ni conceptos sin teoremas y que el proceso de conceptualización se apoya en ambas categorías a la vez, logrando mediante la conceptualización, la abstracción y la simbolización independizar el lenguaje matemático de la lengua natural.

De la dimensión metodológica

Dos son las preocupaciones que encierra este diseño investigativo: la enseñanza matemática en el nivel superior y el uso –entendido en sentido amplio- de los significantes y significados del lenguaje científico de la matemática y su incidencia en los aprendizajes actuales y posteriores.
Nuestra intención es dar pistas y algunas perspectivas que puedan favorecer las prácticas de la enseñanza en las materias propedéuticas y de primer año de la Facultad de Ingeniería, centrándonos fuertemente en el uso de los discursos pedagógicos, sus significados y sus significantes. Este estudio analiza un conjunto diversificado de situaciones, de esquemas y representaciones simbólicas lingüísticas y no lingüísticas para aprehender los vericuetos de los procesos de conceptualización.
Las características del objeto de investigación, las finalidades y el encuadre teórico condicionan las decisiones tomadas –y por tomar- al proponer una definición metodológica en este campo particular, que tiene un objeto novedoso y como tal en construcción. En este sentido, y considerando que se trata de incursionar en el campo de la enseñanza matemática es que definimos una metodología de investigación que articula perspectivas cuantitativas y cualitativas. La primera nos permite recoger datos e información puntual, que opera como indicador de acontecimientos, mientras que la segunda nos posibilita analizar, de modo reflexivo, los aspectos contextuales que definen un modo de comportarse del objeto que se estudia, en este caso aspectos vinculados a la enseñanza, el aprendizaje, el conocimiento, la matemática y los discursos.
El proceso de implementación de la dimensión metodológica ha pasado por varias etapas. La primera fase consistió en un estudio sistemático de las últimas investigaciones y publicaciones acerca de la temática abordada, con el objeto de clarificar el estado del arte, conocer los diferentes códigos lingüísticos y la lógica de organización del área, proceso que se convirtió en parte de la rutina necesaria de trabajo. Para lograr tal fin se realizaron –ciclo

lectivo 2001- reuniones de análisis de documentos y debates de situaciones, en las cuales participaron la unidad ejecutora y los asesores –vía virtual-. Se decidió realizar observaciones –por parte de los profesionales provenientes del área de las Ciencias Sociales- de las clases de Análisis Matemático I con el objeto de comprender los contenidos y "detectar" alumnos para el grupo testigo y para la prueba de los instrumentos que se aplicarán en el ciclo lectivo 2002. Al mismo tiempo se estudiaron diferentes variantes de cuestionarios autoadministrados y formas de entrevista, llegándose a la conclusión que para esta situación se aplicarán entrevistas cognitivas con modalidad clínica y cuestionarios autoadministrados de carácter breve. Ambos recursos serán implementados en el primer cuatrimestre del ciclo lectivo venidero – fase de aplicación -.
La forma de organizar la información fue otro de los temas del primer año de implementación. Por sugerencia de los Asesores se decidió trabajar con la UVE de Gowin. Esta decisión se basa en que la UVE nos permitirá abordar una doble perspectiva. Por un lado una perspectiva de aprendizaje como construcción de significado; y por el otro la enseñanza en el compartir significados usando materiales educativos del currículum. La UVE es un instrumento acorde a las tareas propuestas desde este proyecto de investigación, dado que permite saber lo que realmente el estudiante sabe en términos conceptuales, es decir, como él estructura, jerarquiza, diferencia, relaciona y discrimina e integra conceptos en una determinada unidad de estudio.
Esta manera de investigar en colaboración (Contreras Domingo, 1990; Litwin, 1997) necesita de una implicación participativa de todos los involucrados, dado que la producción del conocimiento no la van a realizar los investigadores, sino que resultará de la sumatoria de la producción, la investigación y la práctica pedagógica. Esto significa dar voz al conocimiento público, estableciéndose comunidades de diálogo en las que se busca la relación entre los marcos normativos en los que se quiere profundizar y las prácticas específicas que se estudian. Es de resaltar que para la realización de este trabajo se cree importante que los alumnos y los docentes involucrados conozcan, previo al trabajo de campo, el diseño de investigación. Por eso se dispusieron copias del mismo para cada uno de los involucrados, así como espacios de entrevistas –si eran solicitadas- partiendo de la premisa de que es necesario transparentar la propuesta de trabajo.

Comentario final

El objeto de estudio de este proyecto de investigación es establecer las posibles influencias del lenguaje en la enseñanza de los contenidos básicos de matemática para alumnos ingresantes, tomando como referencia una asignatura: Análisis Matemático I.
En un principio se presentó brevemente algunas ideas teóricas que dan sustento a nuestra tarea, referidas al lenguaje, la comunicación, la enseñanza y la constitución del campo de la enseñanza de la matemática en el nivel superior. Éstas son primigenias y por tanto totalmente insuficientes para dar una imagen in extenso del objeto de estudio abordado. Aún así creemos importante compartir una primera conclusión basada en las observaciones realizadas referida al juego de lenguajes que se da en los procesos de enseñanza. El lenguaje matemático que se utiliza en las clases y en diferentes textos es una depuración y al mismo tiempo empobrecimiento del lenguaje cotidiano, es decir que posee mayor precisión y la cualidad de no prestarse a interpretaciones subjetivas. El lenguaje matemático comparte con el lenguaje cotidiano vocablos y expresiones, y busca hacer más exacta,

coherente y lógicamente consistente la comunicación. En él se dan las mismas expresiones del lenguaje cotidiano en un sentido técnico, que no siempre coinciden con el uso habitual.
Las modificaciones en la dimensión metodológica tomadas en el presente ciclo lectivo nos han llevado a pensar el trabajo de campo como fundamental en este proyecto de investigación, aunque no debemos confundirlo con el proceso metodológico global, el cual incluye otro tipo de tareas. Paralelamente comentamos las decisiones metodológicas que se sustentaron en la premisa de que la relación teoría-empiria, con todos los matices posibles, contribuye a ampliar el panorama conocido hasta el momento. Es por esto que la indagación sobre las posibilidades y falencias lingüísticas de los ingresantes a la Facultad de Ingeniería y su influencia en los procesos de aprendizaje y en las decisiones que se toman referente a las estrategias a implementar en las diferentes propuestas de enseñanza de la asignatura Análisis Matemático I se convierten en las metas a lograr durante el próximo ciclo lectivo.

Referencias bibliográficas

Bernstein, B. (1997). *La estructura del discurso pedagógico.* Madrid, España: Editorial Morata.

Bruner, J. (1997). *La educación: puerta de la cultura.* Madrid, España: Editorial Visor.

Contreras Domingo, J. (1990). *Enseñanza, currículum y profesorado.* Madrid, España:Editorial Akal.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado*. Barcelona, España: Editorial Paidós.

Litwin, E. (1997). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la enseñanza superior.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Mc Ewan, H. & Egan, K. (1998). *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Amorrortu.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente.* Madrid, España: Editorial Gedisa.

Pozo, I. & Gómez Crespo, M. (1998). *Aprender y enseñar ciencia.* Madrid, España: Editorial Morata.

Vergnaud, G. (1997). *Aprendizajes y didácticas. ¿Qué hay de nuevo?.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Edicial.

Wittrock, M. (1989); *La investigación en la enseñanza.(Tomos I, II y III).* Barcelona, España: Editorial Paidós.

La autorregulación: un recurso metacognitivo en el aprendizaje del cálculo

Margarita Veliz de Assaf ; Isabel del Carmen Isaya
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
mveliz@herrera.unt.edu.ar

Resumen
La finalidad de este trabajo es mostrar algunos de los resultados de nuestro análisis teórico y práctico sobre los procesos de autorregulación como un recurso metacognitivo.
Se comienza mostrando la necesidad de desarrollar en nuestros alumnos la autorregulación como una actividad consciente, sustentando la propuesta sobre la base de la Psicología cognitiva (Glaser), y la teoría sobre Metacognición (Flavell, Schoenfeld). En este trabajo se puede ver la primera parte de la investigación, donde se analizan los efectos producidos por un material especialmente elaborado para ese fin, en un grupo de alumnos que en el año 2000 cursó el primer año en la Facultad de Ciencias Económicas de nuestra Universidad, según sus propias opiniones. Dicho material se preparó apuntando al desarrollo de habilidades o destrezas en la solución de ejercicios y de situaciones problemáticas, destacando además el trabajo dirigido a la capacidad del alumno para examinar, controlar y evaluar su propio modo de aprender (metacognición).

Introducción

Es innegable la necesidad de que nuestros alumnos en el nivel superior aprendan a estudiar, a pensar, a realizar el trabajo independiente de forma tal que contribuya a su formación integral. Para ello consideramos que es preciso hacer un trabajo sistemático, y somos justamente los docentes los encargados de brindarles tareas que vayan incrementando los niveles de complejidad.
Nuestro propósito es que los estudiantes adquieran un sistema de conocimientos y habilidades, acrecentando la capacidad de aplicarlos de manera independiente y creadora, a la vez que sean conscientes de lo que se proponen lograr y cómo, por qué vías, mediante qué estrategias lo pueden alcanzar.
Para responder a este objetivo consideramos importante estimular el desarrollo de experiencias en las que los estudiantes participen activamente en el proceso docente, organizando productivamente esa participación.
Precisamente, la actividad propuesta con sus estrategias para solucionar ejercicios y problemas creemos que posibilita en cierta medida la función reguladora (de seguimiento y control) de la actividad metacognitiva del alumno

Desarrollo

Los Planes de Estudio de las tres carreras que se cursan en de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán (Contador Público Nacional, Licenciado en Economía y Licenciado en Administración) están elaborados a partir de las incumbencias profesionales, las que actúan como objetivos.
En nuestra Facultad la Matemática es una disciplina instrumental, y el contenido de la asignatura Introducción al Análisis Matemático (Cálculo Diferencial de una variable independiente) es de particular importancia para las distintas carreras que en ella se dictan. Es una materia del 2º cuatrimestre del primer año e integra el ciclo básico común a las tres carreras, y aporta en diferente medida a las distintas áreas disciplinarias.

La situación que presentan los estudiantes de primer año en el aprendizaje de la Matemática, constituye una preocupación permanente de los docentes. Se evidencian dificultades tanto en el aprendizaje como en la enseñanza.
Con relación al aprendizaje , los estudiantes realizan, en general, una falsa generalización de reglas y resultados obtenidos anteriormente. Ante un problema nuevo, hacen adaptaciones incorrectas de reglas conocidas, incluso inapropiadas para la nueva situación. Tienen dificultades en la interpretación del problema, en el establecimiento de la formulación matemática, en distinguir datos e incógnitas y establecer relaciones entre los mismos. O sea, tienen dificultades para elaborar un plan de soluciones.
Con respecto a la enseñanza, los docentes universitarios enfrentamos numerosos problemas, siendo la masividad uno de los más preocupantes por su fuerte incidencia en los niveles de enseñanza y aprendizaje. Las actuales políticas de ajuste han impedido que el desmesurado crecimiento de la matrícula vaya acompañado por un aumento del plantel docente y una infraestructura y equipamiento acordes a las necesidades. Se trabaja con grupos numerosos con capacidades, comportamientos e intereses diferentes
Los resultados insatisfactorios en cuanto al aprendizaje de la Matemática por parte de los alumnos ya señalados, y que se pueden sintetizar en dificultades para plantear y resolver problemas, así como también un bajo grado de reflexión, independencia y generalización, nos indican que también en este nivel se deben hacer cambios.
Se trata de organizar la enseñanza de modo que el alumno aprenda a pensar, que de sujeto pasivo se convierta en el centro del proceso de aprendizaje, propiciando el desarrollo de su capacidad de autoaprendizaje, tan necesario en una sociedad donde el ritmo de cambios y avances de los conocimientos es acelerado.
Dice Palou, M.: "*La toma de conciencia de su modo de aprender y de la complejidad del mismo son fundamentales para poder controlar su aprendizaje y, desde allí, planificar y organizar sus propias actividades de aprendizaje, tratando de gestar una disposición habitual que pueda ser intrínsecamente provechosa, donde se articulen armónicamente la reflexión, la interpelación y la imaginación*".
Ante los resultados de múltiples investigaciones coincidentes en resaltar el carácter reproductivo que aún caracteriza el pensamiento de los estudiantes, y considerando que cada persona tiene un sistema personal de aprender que ha ido construyendo progresivamente a lo largo de su vida, nos preguntamos ¿es posible ayudar a los alumnos en la construcción de este sistema personal de aprender?. Es decir: ¿podemos enseñarles a aprender?.
Partimos con la idea de favorecer la autorregulación , ya que ésta constituye un elemento clave en el proceso de aprendizaje. Consiste en darse cuenta de las modificaciones que uno mismo debe hacer en las estrategias que utiliza para lograr un objetivo propuesto y luego actuar en consecuencia.
Por lo tanto entendemos la autorregulación del aprendizaje como el ajuste que el alumno aprende a hacer de sus estrategias de aprendizaje. A medida que es más capaz de autorregular, más autonomía consigue en su aprendizaje y va configurando sus sistemas de aprender.
Se podría decir que la autorregulación es la actividad mental que permite crear un sistema personal de aprendizaje. Así pues, mientras se aprende se construye también un sistema de aprender.

Según Jorba, J. y Casellas, E. (1997), *"En la autorregulación se pretende que los alumnos sean cada vez más autónomos, formándolos en sus propios procesos de pensamiento y de aprendizaje, es decir, enseñándoles a aprender a aprender"*.

Según Labarrère, A. (1994): *"Tal vez la particularidad más interesante de la autorregulación durante la solución de problemas es que ella puede expresarse como actividad consciente"*.
"Dentro de la actividad autorreguladora producida a un nivel consciente, está la actividad metacognitiva, sumamente importante en el funcionamiento cognoscitivo humano".

Flavell, J.H.(1971) fue el pionero en el estudio de la metacognición dentro de la teoría cognitiva. La definió como *"el conocimiento que uno posee acerca de sus propios procesos cognoscitivos y sus productos, o sobre algo relacionado con ellos"*.
Distinguió dos aspectos ligados a la metacognición:
1) *el conocimiento sobre los procesos cognitivos* ,y
2) la regulación de dichos procesos
Este último aspecto se refiere al aspecto procedimental del conocimiento y permite encadenar de forma eficaz las acciones necesarias para alcanzar una meta.

Flavell (1987) distingue tres categorías de conocimientos metacognitivos:
1.- *conocimientos sobre personas*
2.- conocimientos sobre tareas
3.- conocimientos sobre estrategias (conocimientos que las personas tienen sobre la manera de ejecutar una serie de acciones para resolver una tarea)

Todos estos autores coinciden en que la función principal de la metacognición es la de regular o controlar, en forma consciente, la actividad cognoscitiva que está teniendo lugar, de los procesos que en ella se generan y de los resultados que se van obteniendo.

El mecanismo principal de la metacognición es la reflexión.

Con respecto a la actividad de aprendizaje del sujeto, la **función de la metacognición** es una **función facilitadora** porque favorece la **autorregulación** del sujeto, lo cual sabemos es un componente esencial de toda actividad cognoscitiva, ya que presupone aplicar correctivos y realizar ajustes.

El estudiante no puede actuar sobre su propio pensamiento, sobre sus propios procesos intelectuales, si no se le ha revelado, en toda su magnitud, primero la existencia de dichos procesos, y después que él puede y debe actuar sobre ellos.

¿Cómo propiciar el desarrollo de la autorregulación de los alumnos en el plano metacognitivo?

En primer lugar, desarrollando las posibilidades de autorregulación del alumno en su sentido más general y, en este contexto, la metacognitiva. Para ello el docente debe

proponerse conscientemente, estructurar la enseñanza con vista a que los alumnos puedan autorregularse.
Un requisito que no se puede obviar es la concepción y empleo de tareas y situaciones que le permitan observar y diagnosticar cómo los alumnos efectúan la regulación de su comportamiento intelectual en dichas tareas y pueda determinar los progresos que se van produciendo.
A partir de la representación que conforman los conocimientos, el alumno regula conscientemente su propia actividad cognoscitiva durante el estudio, modifica acciones incorrectas y programa nuevas, fija, analiza los resultados o fines parciales que va obteniendo, etc. Realizando así el control de la ejecución que está teniendo lugar.
Toda esta actividad del alumno es un ejemplo de regulación metacognitiva, que al ser propia de los alumnos, se convierte en una autorregulación.

Glaser, R. se refiere a la autorregulación como *"un aspecto relevante en el aprendizaje y en el desarrollo cognitivo"*. La identifica junto con la metacognición como conocimiento que facilita a los individuos el reflexionar sobre sus propias actividades y al mismo tiempo controlarlas.
Además, plantea como acciones de regulación:

- Conocer cuándo aplicar un procedimiento o regla
- Predecir el éxito de una tarea o su grado de corrección o certeza
- Planificar anticipadamente
- Distribuir eficientemente el tiempo y los recursos cognitivos.

Para Schoenfeld, A., en la investigación sobre metacognición se trabaja sobre tres categorías una de las cuales es *"Control o autorregulación"* que puede ejercer el alumno sobre sus acciones mentales a la hora de resolver una tarea o una situación problemática.
Otra categoría corresponde a la esfera afectiva, e influye en la aceptación de la acción para evaluar y tomar decisiones.

En nuestro trabajo, no identificamos control con autorregulación. El control abarca el control de lo que se planifica, el de las operaciones, y el control según los resultados finales de las tareas realizadas. Es decir que el control se produce tanto en el momento de orientación como en el de ejecución de la actividad.
La autorregulación supone una acción de corrección y ajuste hecha por el propio alumno dentro del autocontrol.

En esta investigación se trabajó con una muestra de 150 alumnos elegidos al azar sobre un total de 1100 que en el año 2000 cursaron nuestra asignatura.
Se confeccionó un material (guías de estudio) sobre los temas de "Derivada y sus aplicaciones", el cual fue distribuido entre los 150 alumnos elegidos a fin de que abordaran el trabajo independiente usando dicho material, tanto en las clases prácticas como en su trabajo individual.
Al finalizar este periodo, se los encuestó para obtener información sobre el material entregado, y en qué medida el mismo les había ayudado para resolver en forma independiente las tareas propuestas; además, si pudieron en su opinión darse cuenta de sus propios logros y en cuanto a las dificultades con que se encontraron tanto en el manejo del material como en su estudio, y si les ayudó o no a vencerlas.

En este trabajo se muestra los resultados sólo de una parte de la investigación donde se analiza el material, considerando como variables de estudio: Comprensión, Redacción, Orientación, Ejercitación, Utilidad del material.
Estos resultados son alentadores, como lo muestra el siguiente cuadro:

CUADRO 1

	TOTAL DE ALUMNOS ENCUESTADOS	COMPRENSIÓN FACIL	REDACCIÓN CLARA O MUY CLARA	ORIENTACIÓN PRECISA O MUY PRECISA	EJERCITACION CONDUCENTE O MUY CONDUCENTE	MATERIAL UTIL O MUY UTIL
	150	131	141	135	107	132
%	100 %	87 %	94 %	90 %	71 %	88 %

También se analizaron las variables discriminando a los encuestados por carrera y si trabajan o no, de donde surgieron los resultados que se muestran en los cuadros siguientes:

CUADRO 2

CARRERA	COMPRENSIÓN FACIL	REDACCIÓN CLARA O MUY CLARA	ORIENTACIÓN PRECISA O MUY PRECISA	EJERCITACION CONDUCENTE O MUY CONDUCENTE	MATERIAL UTIL O MUY UTIL
CPN	99	106	103	82	101
LICENCIATURAS	32	35	32	25	31
TOTAL	131	141	135	107	132

CUADRO 3

TRABAJA		COMPRENSIÓN FACIL	REDACCIÓN CLARA O MUY CLARA	ORIENTACIÓN PRECISA O MUY PRECISA	EJERCITACION CONDUCENTE O MUY CONDUCENTE	MATERIAL UTIL O MUY UTIL
NO	***135***	118	127	121	96	119
SI	***15***	13	14	14	11	13
	TOTAL	131	141	135	107	132

Todavía está en proceso el estudio de la información obtenida para las otras variables que contenía la encuesta, como así también los resultados de la evaluación, que será otro indicador a analizar.

Conclusiones

- Con la autorregulación el alumno se va haciendo responsable de su aprendizaje, de sus actividades y producciones. En este proceso el docente lo ayuda a ser crítico, a evaluar y reflexionar acerca de como desarrolla la tarea, para poder poco a poco, realizar ajustes en sus estrategias de aprendizaje, de manera autónoma.

- Analizadas las respuestas de los alumnos con respecto a las guías de estudio especialmente preparadas para favorecer dicho proceso, surge que el material confeccionado fue, según la opinión de los alumnos, de fácil comprensión, redacción clara, orientación precisa, ejercitación conducente y útil.
- Consideramos que no es suficiente enseñar los procesos reguladores (por ej. planificar, detectar y corregir errores, evaluar) como habilidades generales que después el alumno pueda aplicar en cualquier dominio de conocimiento, sino que esta enseñanza debe llevarse a cabo en el contexto de las diferentes áreas curriculares del alumno. De este modo, el desarrollo de las estrategias de autorregulación puede facilitar la adquisición de nuevos conocimientos específicos y éstos, a su vez, pueden favorecer una autorregulación cada vez más eficaz.

Referencias bibliográficas

Camilloni, A.; Celman, S.; Litwin, E.; Palou, M. (1998). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Buenos Aires, Argentina: PAIDOS.

Czar, M.T. (1998). “Incidencias de las concepciones del aprendizaje en la práctica docente” en *La Relación pedagógica y concepciones del aprendizaje en la práctica docente.* Instituto Coordinador de Programas de Capacitación. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

Jorba, J.; Sanmartí, N. (2000). La función pedagógica de la evaluación en *Evaluación como ayuda al aprendizaje*. España: Editorial Graó.

Jorba, J.; Casellas, E. (1997). *La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. Barcelona, España: Síntesis/ICE de la UAB.

Labarrere, A. (1994). *Fundamentos psicopedagógicos de la enseñanza de la resolución de problemas*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Pozo, J. I. (1994). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. España: Editorial Morata.

Pozo, J.I.; Monereo, C. (1999). *El aprendizaje estratégico. Enseñar a aprender desde el currículo.* Madrid, España: Aula XXI. Santillana.

Rico Montero, P. (1996). *Reflexión y aprendizaje en el aula*. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Schoenfeld, A.H. (1987). What´s all de fuss about metacognition?, en A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*. Nueva Jersey, USA: Lawrence Erlbaum. Hillsdale.

Vizcarro, C. (1998). La evaluación como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje: la evaluación tradicional y sus alternativas En *Nuevas Tecnologías para el Aprendizaje.* Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Las cápsulas en las estructuras de la matemática

Juan Carlos Bressan*, Ana E. Ferrazzi de Bressan**
*Universidad de Buenos Aires, Argentina. **Universidad Argentina de la Empresa. Argentina
jbressan@mybfyb.ffyb.uba.ar ferrazzi@campus.uade.edu.ar

Resumen
En este trabajo, las estructuras algebraicas nos permitirán introducir los sistemas axiomáticos de *espacios interseccionales* y *operadores de cápsula*, los cuales pueden tomarse como punto de partida para obtener un nuevo enfoque axiomático de la geometría y realizar investigaciones originales sin utilizar un gran bagaje matemático. En cada estructura algebraica encontraremos, al menos, una familia de subconjuntos y un operador de cápsula asociado con ella. Por ejemplo, para un grupo G tomamos la familia $\mathcal{G}$ de todos sus subgrupos; si S es un subconjunto de G, la cápsula de S respecto de la familia $\mathcal{G}$ es el subgrupo generado por S, es decir, el menor subgrupo de G que contiene a S. La función que a cada subconjunto S de G le asigna la cápsula de S es el operador de cápsula. En los espacios vectoriales reales hay varios operadores de cápsula. Si salimos de las estructuras algebraicas, la familia de los subconjuntos cerrados de un espacio métrico tiene a la clausura como operador asociado. El enfoque aquí seguido fue experimentado exitosamente en un curso optativo de convexidad para alumnos del profesorado y licenciatura en matemática, a quienes se les dio algunos trabajos de investigación para que profundizaran sus estudios en el tema.

Familias interseccionales y cápsulas

Generalmente, en Álgebra se estudian los sistemas axiomáticos de las estructuras de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial. Para cada una de las estructuras, los subconjuntos que son cerrados para las correspondientes operaciones forman una subestructura. Así, surgen respectivamente los subgrupos, subanillos, subcuerpos y subespacios. Además para cada subconjunto S de una estructura se obtiene la subestructura generada por S. Los ejemplos que daremos a continuación aclararán lo anterior.
La notación que adoptaremos en lo que sigue, si bien no es la más difundida en matemática, facilita la lectura de los trabajos de la bibliografía, a los que podría acceder el lector interesado en ampliar sus conocimientos sobre este tema. Además, abreviaremos la expresión *si y solo si* escribiendo simplemente *sii*. En los siguientes ejemplos analizaremos el concepto de cápsula en los grupos, luego en los espacios vectoriales reales, finalmente veremos la clausura que es una cápsula de origen topológico.

Ejemplo 1. Consideremos un grupo G y la familia $\mathcal{G}$ de todos sus subgrupos. Evidentemente, el propio G es un subgrupo de G. Si S es un subconjunto de G, el *subgrupo* $\mathcal{G}$(S) *generado* por S, es el menor subgrupo de G que incluye a S.
El conjunto $\mathcal{G}$(S), es la cápsula de S con respecto a la familia $\mathcal{G}$ de los subgrupos de G. Observemos que la intersección de cualquier número de subgrupos de G es nuevamente un subgrupo de G, es decir, $\mathcal{G}$ es cerrada para intersecciones, o más brevemente $\mathcal{G}$ es *interseccional*. Como consecuencias de esta propiedad, obtenemos:

a) $\mathcal{G}$(S) es la intersección de todos los subgrupos G_i de G que incluyen a S.
b) La intersección de todos los miembros de la familia $\mathcal{G}$ es un miembro de $\mathcal{G}$; dicha intersección es el subgrupo trivial {e}, donde e es el elemento neutro de G.

Ejemplo 2. En un espacio vectorial real V hay varios tipos de cápsulas; cada una de ellas está dada por una familia interseccional. En todos los casos V cumple, en forma trivial, las condiciones requeridas y en consecuencia pertenece a cada una de estas familias. Para simplificar la ejemplificación vamos a trabajar con $V=\Re^3$. Las familias y las correspondientes cápsulas que analizaremos son las siguientes:

i) Sea $\mathcal{V}$ la familia de todos los subespacios de V. Como la intersección de subespacios de V es un subespacio de V, resulta que $\mathcal{V}$ es una familia interseccional. Sea $\mathbf{0}=(0;0;0)$ el vector nulo. La familia $\mathcal{V}$ está formada por $\{\mathbf{0}\}$, las rectas que pasan por el origen $\mathbf{0}$, los planos que pasan por el origen $\mathbf{0}$ y el espacio $V=\Re^3$. Dado S subconjunto de V, el *subespacio* $\mathcal{V}$(S) *generado* por S, es el menor subespacio de V que incluye a S, lo que es igual a la intersección de todos los subespacios de V que incluyen a S.

ii) Recordemos que A es una *variedad afín* sii cualesquiera sean $a\in A$, $b\in A$, con $a\neq b$, la recta determinada por a, b está incluida en A. Sea $\mathcal{A}$ la familia de todas las variedades afines de V. En este caso, no existen elementos de V comunes a todos los miembros de $\mathcal{A}$; así la intersección de todas las variedades afines de V es el conjunto vacío, que es una variedad afín trivial. La familia $\mathcal{A}$ está formada por el conjunto $\emptyset$, los conjuntos unitarios, las rectas, los planos y el espacio $V=\Re^3$. Dado $S\subseteq V$, la *variedad afín* $\mathcal{A}$(S) *generada* por S es la menor variedad afín de V que incluye a S, lo que es igual a la intersección de todas las variedades afines de V que incluyen a S.

iii) Recordemos que C es un *conjunto convexo* sii cualesquiera sean $a\in C$, $b\in C$, el segmento cerrado [a, b] está incluido de C. Sea $\mathcal{C}$ la familia de todos los subconjuntos convexos de V. El vacío, así como los subconjuntos unitarios son convexos. Dado $S\subseteq V$, la c*ápsula convexa* $\mathcal{C}$(S) *generada* por S, es el menor conjunto convexo de V que incluye a S, resultando $\mathcal{C}$(S) igual a la intersección de los $C_i\in\mathcal{C}$, tales que $S\subseteq C_i$.

Ejemplo 1.3. Tomemos $X=\Re^3$ con la métrica euclidiana definida para todo $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$ de $\Re^3$ por $d(\mathbf{x}; \mathbf{y})=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2]^{1/2}$. La bola abierta $B(\mathbf{x}, r)$ de centro $\mathbf{x}$ y radio $r>0$ esta formada por los $\mathbf{y}\in\Re^3$ tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})<r$. Un conjunto A es abierto sii para todo $\mathbf{x}\in A$, existe $r>0$, tal que $B(\mathbf{x}, r)\subseteq A$. La familia $\mathcal{F}$ formada por todos los subconjuntos complementarios de los abiertos es la familia de los subconjuntos cerrados de X. Así, X y $\emptyset$ son cerrados y además abiertos. La familia $\mathcal{F}$ es interseccional y cumple una *propiedad específica de la familia de los cerrados* la cual afirma que la unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Dado $S\subseteq X$, denotaremos con cl(S) la *clausura* de S, es decir el menor conjunto cerrado que incluye a S. Evidentemente, cl(S) es la cápsula de S con respecto a la familia $\mathcal{F}$ de los cerrados. Así, siguiendo la nomenclatura utilizada en los ejemplos anteriores, escribiremos cl(S)=$\mathcal{F}$(S).

El concepto de cápsula y su relación con las familias interseccionales

En esta sección formalizaremos algunos de los conceptos utilizados en los ejemplos de la sección 1. Las dimensiones del trabajo nos impedirán desarrollar las demostraciones, que en la mayoría de los casos pueden quedar como ejercicios para los alumnos.

Sea X un conjunto y $\mathcal{P}$(X) la familia de todos los subconjuntos de X. El concepto de cápsula dado en el Ejemplo 1.1 nos lleva a la siguiente definición general de cápsula.

Definición 1. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}(X)$. Si $S\subseteq X$, diremos que $\mathcal{C}$(S) es la *cápsula de* S *respecto de la familia* $\mathcal{C}$, o que es la $\mathcal{C}$*–cápsula de* S, sii existe un conjunto $\mathcal{C}(S)\subseteq X$ tal que sea **el menor** conjunto de la familia $\mathcal{C}$ que incluya a S.

Por 2.1, si $S_1 \subseteq S_2 \subseteq X$ y existen $\mathcal{C}(S_1)$ y $\mathcal{C}(S_2)$, entonces $\mathcal{C}(S_1) \subseteq \mathcal{C}(S_2)$. Además, $\mathcal{C}$ es la familia de los subconjuntos invariantes para la $\mathcal{C}$–cápsula, es decir, $\mathcal{C} = \{S \subseteq X: \mathcal{C}(S)=S\}$. Pero, de 2.1 no se deduce la existencia de la $\mathcal{C}$–cápsula para todos los subconjuntos de X; para que esto ocurra habrá que imponer alguna condición a la familia $\mathcal{C}$.

Definición 2. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathcal{C}$ es una *familia interseccional* sobre X, o que $(X, \mathcal{C})$ es un *espacio interseccional* sii la intersección de los miembros de cualquier subfamilia de $\mathcal{C}$ es un miembro de $\mathcal{C}$.
Puesto que $\varnothing \subseteq \mathcal{C}$, resulta $X = \cap\varnothing \in \mathcal{C}$. De esta forma, si la familia $\mathcal{C}$ es interseccional entonces $\mathcal{C} \neq \varnothing$. La siguiente proposición relaciona las definiciones 2.1 y 2.2.

Proposición 1. *Sea* X *un conjunto no vacío y* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. *Entonces son equivalentes:*
i) $\mathcal{C}$ *es una familia interseccional sobre* X.
ii) *Para todo* $S \subseteq X$, *existe la* $\mathcal{C}$*–cápsula de* S, *siendo* $\mathcal{C}(S) = \cap\{C_i \in \mathcal{C}: S \subseteq C_i\}$.
Demostración: Probaremos únicamente ii) $\Rightarrow$ i). Sean $\varnothing \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ y $S = \cap\mathcal{F}$. Por hipótesis existe $\mathcal{C}(S) \subseteq X$. Así, para todo $C_i \in \mathcal{F}$, $\mathcal{C}(S) \subseteq \mathcal{C}(C_i) = C_i$, de donde $\mathcal{C}(S) \subseteq \cap\mathcal{F} = S$. De esta forma, $\mathcal{C}(S) = S$ y $\cap\mathcal{F} \in \mathcal{C}$. Si $\mathcal{F} = \varnothing$, entonces $\cap\mathcal{F} = X = \mathcal{C}(X) \in \mathcal{C}$.
En el siguiente corolario figuran algunas propiedades de la $\mathcal{C}$–cápsula.

Corolario. *Sea* $(X, \mathcal{C})$ *un espacio interseccional, entonces la* $\mathcal{C}$*–cápsula* $\mathcal{C}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *cumple las siguientes propiedades:*
i) Respeta inclusiones, es decir, si $S_1 \subseteq S_2 \subseteq X$ entonces $\mathcal{C}(S_1) \subseteq \mathcal{C}(S_2)$.
ii) Es idempotente, es decir, si $S \subseteq X$ entonces $\mathcal{C}(\mathcal{C}(S)) = \mathcal{C}(S)$.
Hasta ahora sabemos que, si $(X, \mathcal{C})$ es un espacio interseccional, entonces la familia $\mathcal{C}$ define una función $\mathcal{C}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, tal que $\mathcal{C}(S) = \cap\{C_i \in \mathcal{C}: S \subseteq C_i\}$, donde $\mathcal{C}(S)$ es la $\mathcal{C}$–cápsula de S; además, $\mathcal{C} = \{S \subseteq X: \mathcal{C}(S)=S\}$. Ahora, teniendo en cuenta 2.4 y que por 2.1 $\mathcal{C}(S)$ incluye a S, daremos la definición de operador de cápsula, a partir del cual construiremos un espacio interseccional.

Definición 3. Sea X un conjunto no vacío. Diremos que una función $\mathbf{K}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un *operador de cápsula* en X sii cumple las siguientes propiedades:
(K-1) Cualquiera sea $S \subseteq X$, $\mathbf{K}(S)$ incluye a S, es decir: $S \subseteq X \Rightarrow S \subseteq \mathbf{K}(S)$.
(K-2) $\mathbf{K}$ respeta inclusiones, es decir: $S_1 \subseteq S_2 \subseteq X \Rightarrow \mathbf{K}(S_1) \subseteq \mathbf{K}(S_2)$.
(K-3) $\mathbf{K}$ es idempotente, es decir: $S \subseteq X \Rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{K}(S)) = \mathbf{K}(S)$.
Observemos que, por 2.1 y 2.4, si $(X, \mathcal{C})$ es un espacio interseccional, entonces la $\mathcal{C}$–cápsula $\mathcal{C}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador de cápsula en X.

Proposición 2. Sea X un conjunto no vacío. Una función $\mathbf{K}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador de cápsula en X sii cumple las siguientes propiedades:
i) $S \subseteq X \Rightarrow S \subseteq \mathbf{K}(S)$.
ii) $S_1 \subseteq X$, $S_2 \subseteq X$ y $S_1 \subseteq \mathbf{K}(S_2) \Rightarrow \mathbf{K}(S_1) \subseteq \mathbf{K}(S_2)$.
La siguiente proposición relaciona los operadores de cápsula con los espacios interseccionales.

Proposición 3. *Sea* $\mathbf{K}$:$\mathcal{P}$(X)$\to\mathcal{P}$(X) *un operador de cápsula en* X *y* $\mathcal{C}$={S$\subseteq$X: $\mathbf{K}$(S)=S}. *Entonces* (X, $\mathcal{C}$) *es un espacio interseccional y para todo* S$\subseteq$X, $\mathcal{C}$(S)=$\mathbf{K}$(S).

Construcción de algunos sistemas axiomáticos

En esta sección bosquejaremos sistemas axiomáticos utilizando los resultados de la sección 2. Dichos sistemas pueden aplicarse al estudiar las estructuras algebraicas aún en cursos elementales de Álgebra. Su estudio se puede formalizar utilizando como *Teorías subyacentes* la Lógica de predicados y la Teoría de conjuntos.

1. Sistema axiomático de espacios interseccionales

Tomaremos como *concepto o término primitivo* un par ordenado (X, $\mathcal{C}$), que llamaremos *espacio interseccional*, donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}$(X). El único axioma que consideraremos será:

($\mathcal{C}$–1) $\mathcal{C}$ es una familia interseccional sobre X, es decir: $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{C}\Rightarrow\cap\mathcal{F}\in\mathcal{C}$.

El término definido será una función $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}$(X)$\to\mathcal{P}$(X), que llamaremos $\mathcal{C}$*–cápsula*, definida para todo S$\in\mathcal{P}$**(X)** por $\mathcal{C}$(S) = $\cap$\{$C_i\in\mathcal{C}$: S$\subseteq C_i$\}, es decir, $\mathcal{C}$(S) es la intersección de todos los miembros C_i de la familia $\mathcal{C}$ tales que S está incluido en C_i.

Sin utilizar ($\mathcal{C}$–1) y en virtud de la definición que acabamos de dar para $\mathcal{C}$(S), sabemos que efectivamente $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}$(X)$\to\mathcal{P}$(X) es una función. El axioma ($\mathcal{C}$–1), nos permite obtener como teorema que X$\in\mathcal{C}$ y que para todo S$\subseteq$X, $\mathcal{C}$(S) es el menor conjunto de la familia $\mathcal{C}$ que incluye a S, es decir, cumple la definición 2.1. Además, se puede probar que la $\mathcal{C}$-cápsula, definida en este sistema axiomático, cumple las propiedades de la definición de operadores de cápsula y, en consecuencia, las de 2.6.

2. Sistema axiomático de operadores de cápsula

Tomaremos como conceptos o términos primitivos un conjunto no vacío X y una función $\mathbf{K}$: $\mathcal{P}$(X)$\to\mathcal{P}$(X), que llamaremos *operador de cápsula* en X. Los axiomas que deberá cumplir $\mathbf{K}$ serán:

(K-1) Para todo S subconjunto de X, $\mathbf{K}$(S) incluye a S, es decir: S$\subseteq$X $\Rightarrow$ S$\subseteq$ $\mathbf{K}$(S).
(K-2) $\mathbf{K}$ respeta inclusiones, es decir: $S_1\subseteq S_2\subseteq X \Rightarrow \mathbf{K}(S_1)\subseteq\mathbf{K}(S_2)$.
(K-3) $\mathbf{K}$ es idempotente, es decir: S$\subseteq$X $\Rightarrow$ $\mathbf{K}(\mathbf{K}$(S)) = $\mathbf{K}$(S).

Como *términos definidos* tomaremos una familia $\mathcal{C}$={S$\subseteq$X: $\mathbf{K}$(S)=S} y una función $\mathcal{C}$:$\mathcal{P}$(X)$\to\mathcal{P}$(X), que llamaremos $\mathcal{C}$*–cápsula*, tal que para todo S$\in\mathcal{P}$(X)

$$\mathcal{C}(S) = \cap\{C_i\in\mathcal{P}(X): S\subseteq C_i \text{ y } C_i=\mathbf{K}(C_i)\}.$$

En este sistema axiomático se deducen como teoremas que $\mathbf{K}$ cumple las propiedades dadas en 2.6, que (X, $\mathcal{C}$) es un espacio interseccional y para todo S$\subseteq$X, $\mathcal{C}$(S)=$\mathbf{K}$(S).

3. Sistemas axiomáticos equivalentes

Los dos sistemas axiomáticos dados en 3.1 y 3.2, si bien tienen distintos términos primitivos son equivalentes. En efecto, dos sistemas axiomáticos, con las mismas teorías subyacentes, se dicen *equivalentes* cuando, para cada uno de ellos, los términos primitivos de uno son términos primitivos o definidos del otro y los axiomas de uno son axiomas o teoremas del otro.

Observemos que se puede obtener un sistema axiomático con los mismos términos primitivos y equivalente al dado en 3.2 si sustituimos (K-2) y (K-3) por el axioma:

(K-2') $S_1 \subseteq X$, $S_2 \subseteq X$ y $S_1 \subseteq \mathbf{K}(S_2) \Rightarrow \mathbf{K}(S_1) \subseteq \mathbf{K}(S_2)$.

Los sistemas axiomáticos hasta aquí desarrollados cumplen las condiciones mínimas comunes a todas las cápsulas algebraicas o topológicas. Pero hay otras propiedades de las que gozan únicamente un grupo de cápsulas, que analizaremos a continuación.

4. Una propiedad específica de todas las cápsulas algebraicas

Recordemos que una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *cadena* sii dados dos elementos cualesquiera $F_1 \in \mathcal{F}$ y $F_2 \in \mathcal{F}$, siempre son comparables, es decir, $F_1 \subseteq F_2$ o $F_2 \subseteq F_1$. Las familias interseccionales que generan las cápsulas de origen algebraico gozan de la siguiente propiedad de *unión de cadenas*:

($\mathcal{C}$–2) Si $\mathcal{F}$ es una cadena de miembros de $\mathcal{C}$, su unión es un miembro de $\mathcal{C}$, *en símbolos:*
$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{F}$ cadena $\Rightarrow \cup\mathcal{F} \in \mathcal{C}$

En el sistema axiomático dado en 3.1 podemos agregar al axioma ($\mathcal{C}$–1), el ($\mathcal{C}$–2) y obtener así un sistema axiomático para las familias interseccionales de las cápsulas algebraicas.
La propiedad de unión de cadenas dada en ($\mathcal{C}$–2**)** también puede expresarse utilizando el operador de cápsula, mediante la siguiente propiedad llamada de *dominio finito*:

(K-4) Si $S \subseteq X$, $\mathbf{K}(S)$ es la unión de todos los $\mathbf{K}(F)$ para F subconjunto finito de S, es decir:
(K-4) $S \subseteq X \Rightarrow \mathbf{K}(S) = \cup \{\mathbf{K}(F) \colon F \subseteq S \text{ y card } F < \infty\}$.

Si a (K-1), (K-2), (K-3) le agregamos el axioma (K-4), obtenemos un sistema axiomático para las cápsulas algebraicas. Estos dos sistemas obtenidos en 3.4 resultan equivalentes.

5. Un sistema axiomático para las familias de variedades afines y de convexos

Todos los axiomas del sistema axiomático dado por ($\mathcal{C}$–1), ($\mathcal{C}$–2) y además

($\mathcal{C}$–3) El subconjunto vacío es miembro de la familia $\mathcal{C}$, en símbolos, $\emptyset \in \mathcal{C}$

los cumple la familia de variedades afines y la de los convexos. Si consideramos los correspondientes axiomas para los operadores de cápsula, obtendremos que los axiomas (K-1), (K-2), (K-3), (K-4) y además

(K-5) El subconjunto vacío es invariante para el operador **K**, es decir, $\mathbf{K}(\emptyset)=\emptyset$

los cumplen la variedad afín generada y la cápsula convexa. Estos dos nuevos sistemas son equivalentes y caracterizan las *estructuras de convexidad* (Van de Vel, 1993). Una propiedad de la cápsula convexa no cumplida por la variedad afín generada, dice que si $x \in X$ y $\emptyset \neq S \subseteq X$, la cápsula convexa $\mathbf{K}(\{x\} \cup S)$ de $\{x\} \cup S$, es la unión de todos los segmentos cerrados $\mathbf{K}(\{x, s\})$ uno de cuyos extremos es el punto x mientras que el otro extremo varía por todos los puntos s de la cápsula convexa $\mathbf{K}(S)$ de S. Así obtenemos:

(K-6) $x \in X$ y $\emptyset \neq S \subseteq X \Rightarrow \mathbf{K}(\{x\} \cup S) = \cup\{\mathbf{K}(\{x, s\}) \colon s \in \mathbf{K}(S)\}$

Si consideramos los seis axiomas (K-1) hasta (K-6) obtenemos el sistema axiomático de los *espacios de* **JD**-*convexidad* , que permite obtener interesantes resultados geométricos (Bressan, 1972, 1998 y 2000; Bressan & Toranzos, 1992).

6. Axiomas para la familia de cerrados y para la clausura

En cualquier espacio topológico, la familia $\mathcal{C}$ de los subconjuntos cerrados de X queda caracterizada por los axiomas ($\mathcal{C}$–1), ($\mathcal{C}$–3) y además:

($\mathcal{C}$–4) La unión de dos subconjuntos cerrados de X es un subconjunto cerrado de X, o sea:

$$S_1 \in \mathcal{C} \text{ y } S_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow S_1 \cup S_2 \in \mathcal{C}$$

Por otra parte, la clausura tiene por axiomas (K-1), (K-2), (K-3), (K-5) y además:

(K-6) La clausura de la unión de dos subconjuntos de X es igual a la unión de sus clausuras:

$$S_1 \subseteq X \text{ y } S_2 \subseteq X \Rightarrow \mathbf{K}(S_1 \cup S_2) = \mathbf{K}(S_1) \cup \mathbf{K}(S_2)$$

Como de (K-6) se deduce (K-2), este sistema es equivalente al formado por los axiomas (K-1), (K-3), (K-5) y (K-6), conocidos como *axiomas de clausura de Kuratowski*.

Conclusión

Hemos visto que, a partir de las estructuras algebraicas, se pueden introducir otros sistemas axiomáticos no tradicionales como las *estructuras de convexidad* (Van de Vel, 1993) y aproximarse a una novedosa fundamentación de la geometría (Coppel, 1998). Este tipo de desarrollos permite recuperar la claridad geométrica muchas veces perdida al utilizar el álgebra lineal. En el curso donde se experimentó se notó un mayor entrenamiento en el pensamiento axiomático y un incremento en el análisis de las demostraciones. Estos desarrollos axiomáticos permiten realizar una tarea creativa y de investigación interesantes, ya que utilizan sistemas axiomáticos en desarrollo. Este aspecto es fundamental para la formación del docente, por cuanto le posibilita que, pese a su carga horaria en la docencia, desarrolle una tarea de investigación que, aún siendo pequeña, le despertará una actitud y disposición positivas para transmitirles los conocimientos a sus educandos, fomentando en los mismos la capacidad de abstracción, de creación y de razonamiento.

Referencias bibliográficas

Bressan, J. C. (1972). Sistemas axiomáticos para operadores de cápsula convexa, *Revista de la Unión Matemática Argentina 26*, 131-142.

Bressan, J. C. (1998). Operadores de Convexidad y una Generalización de las Propiedades **JHC** y de Pasch, *Revista Serie A: Matemática y Física Teórica, Fac. de Cs. Exactas y Tecnología, Univ. Nac. de Tucumán 32 (1, 2)*; 203-216.

Bressan, J. C. (2000). Polítopos en espacios de convexidad con una condición de alineación, *Anales de Academia Nacional de Ciencias. de Bs. Aires, T. XXXIV (1)*, 459-466.

Bressan, J. C. & Toranzos, F. A. (1992). Visibility cells and T-convexity spaces, *Compos. Math. 83*, 251-257.

Van de Vel, M. L. J. (1993). *Theory of Convex Structures*. The Netherlands: North Holland.

Coppel, W. A. (1998). *Foundations of Convex Geometry*, Australian Mathematical Society Lecture Series 12. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Aprendizaje cooperativo en la Universidad

Lilian Cadoche ; Adriana Engler ; Sonia Pastorelli; Malva Alberto
Universidad Nacional del Litoral. Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
lcadoche@fcv.unl.edu.ar

Resumen
En este trabajo pretendimos analizar cómo repercuten en las **actitudes** hacia la enseñanza y el aprendizaje de la matemática de los alumnos del ciclo básico universitario, el planteo de una forma diferente de intervención en el aula, empleando la propuesta de Aprendizaje Cooperativo. Los resultados obtenidos permiten inferir que este tipo de trabajo, que centra su atención en la mutua colaboración, influye positivamente en el cambio actitudinal hacia el proceso de aprendizaje de la matemática.

Introducción

En carreras universitarias de perfil social, no matemático, ¿qué ocurre con las actitudes hacia la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática?: el problema es serio, los alumnos resisten la materia por varios motivos pero que se sustentan en la creencia generalizada que no la necesitarán para su futuro profesional.
Las actitudes que se perciben son de desinterés, apatía, poca o nula participación en clase, desagrado, ansiedad, poco compromiso con las tareas a desarrollar, etc.
Esta mala predisposición para el aprendizaje, resulta en un bajo rendimiento y un alto de número de fracasos. Más aún, los aprendizajes resultan frágiles, poco perdurables, y a la hora de dar cuenta de los conocimientos adquiridos, la resistencia ofrecida, se manifiesta en la imposibilidad de aplicar estos conocimientos en las disciplinas que lo demandan.
Frente a esta actitud negativa ¿qué se puede hacer como docentes para estimular el aprendizaje y motivar el estudio?. ¿Es posible que un propuesta didáctica diferente, rompa con los preconceptos, y posibilite el cambio de actitud?. ¿Puede la metodología empleada para el desarrollo de la clase influir en el compromiso del alumno con la propuesta, estimulando su interés, participación y agrado por la tarea emprendida?.

Desarrollo de la propuesta

La investigación que presentamos se propuso como objetivo estudiar los efectos que produce en las actitudes hacia la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, el planteamiento de una forma diferente de intervención en el aula. En particular se realizó un estudio sobre alumnos de primer año de Ciencias Veterinarias de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina).
En primer lugar se analizaron las distintas conceptualizaciones del término ACTITUD para hallar la que mejor se adapte al ámbito de la educación matemática. Seguidamente se planteó la experiencia, la metodología a utilizar y los instrumentos necesarios para analizar los resultados.

Concepto de actitud

De las numerosas definiciones halladas, se convino en aceptar que entenderemos que la actitud *es una predisposición evaluativa (es decir positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento* (Hernández, y Gomez Chacón, 1997). Las actitudes constan, por tanto, de un componente cognitivo, que se manifiesta en las creencias subyacentes; otro afectivo, que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o de rechazo; y un componente intencional o de tendencia a un cierto tipo de comportamiento.

Objetivo

La finalidad del estudio es investigar los efectos que se producen en las actitudes hacia la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, el desarrollo de un módulo de aprendizaje en el que se propone fomentar la resolución de problemas de forma cooperativa, reforzando la reflexión en el propio proceso de pensamiento.

Planteamiento de la intervención

Marco de referencia: Las investigaciones llevadas a cabo ponen de manifiesto que las actitudes de los alumnos hacia la enseñanza y el aprendizaje de la matemática están muy influenciadas por tres factores: la naturaleza misma de la disciplina Matemática; las características individuales: motivación, confianza, agrado, intereses, ansiedad, etc. y el método del profesor (Mohd Yusof ,1994)

Esta propuesta para trabajo en el aula, se planteó a través de clases de resolución de problemas, cuyo enfoque, diseño y desarrollo de las actividades trató de incidir sobre algunos de los factores configuradores de las actitudes de los alumnos. En la propuesta de trabajo cooperativo, se intenta que los alumnos perciban que forman parte de un equipo y que tienen una meta común, procurando que los miembros del grupo se den cuenta que sus éxitos o fracasos serán compartidos por todos.

Metodología

La mayoría de los investigadores coinciden en considerar cinco elementos básicos necesarios para llevar a la práctica el aprendizaje cooperativo. Son los siguientes:

- Interdependencia positiva.
- Interacción cara a cara.
- Responsabilidad individual y de grupo
- Aprendizaje de habilidades sociales.
- Revisión del proceso del grupo.

El dominio de la práctica del aprendizaje cooperativo se logra aprendiendo cómo estructurar estos cinco componentes dentro del aula (Johnson y Johnson, 1994).

Comentamos brevemente a continuación como estructuramos la tarea, en la experiencia realizada, para el alcance de estos componentes:

La **interdependencia positiva** constituye el núcleo del aprendizaje cooperativo. La misma está asegurada cuando todos los miembros del grupo son conscientes de que no pueden alcanzar el éxito a menos que también lo alcancen sus compañeros. En el aula los docentes insistimos en que los alumnos reconozcan que del esfuerzo que realiza cada persona se beneficiaría ella misma y los demás. Enfatizamos que el trabajo individual afectaría el éxito o fracaso de los demás compañeros del grupo, provocando esa doble responsabilidad: individual y de grupo (Hwong, Caswell y Johnson ,1990)

La interdependencia positiva juega un papel importante en los conflictos cognitivos. Cuanto mayor sea, con más seguridad se producirá el conflicto intelectual, es por ello que tratamos de que los grupos se involucren en discusiones en las que cada uno vertiera sus puntos de vista, sus diferentes posturas, sus opiniones, procesos de pensamiento, etc.

La experiencia mostró que cuando el conflicto se resuelve constructivamente, desemboca en un cuestionamiento de las posturas de cada persona, en una búsqueda activa de información, en una reconceptualización del conocimiento y, en consecuencia, aumenta el dominio y la retención de la materia discutida y se observa un nivel mayor de estrategias de razonamiento.
Para poder trabajar cooperativamente es necesario la **interacción cara a cara** con las demás personas del grupo, a fin de completar las tareas y contribuir con el esfuerzo propio al esfuerzo de los demás. Esta interacción se caracteriza por el empeño que pone cada persona para que las demás alcancen la meta prevista.
En el ensayo realizado, los estudiantes fueron instados a trabajar juntos, compartiendo recursos y ayudándose mutuamente. Los docentes estimularon a los miembros de cada equipo de trabajo para que se expliquen unos a otros sus mecanismos de razonamiento, sus deducciones, etc. , haciendo hincapié en la idea de que todos eran necesarios y valiosos para la consecución de sus metas.
Para el alcance de la **responsabilidad individual y de grupo**, remarcamos que trabajar en grupo no puede significar que los integrantes diluyan la responsabilidad de su propio aprendizaje en el grupo. El grupo debe ser una plataforma que les facilite la construcción de su aprendizaje, del que son los únicos responsables. Se insistió en afirmar que la idea era "aprender juntos para poder actuar después individualmente".
Para facilitar esta doble responsabilidad, se organizaron 9 grupos de 4 alumnos cada uno, y cada grupo tuvo un tutor (docente) que observó la participación individual y grupal de cada estudiante, llevando un registro de esta actividad mediante una planilla elaborada para este objetivo. Los resultados mostraron que en todos los grupos los alumnos fueron solidarios, algunos alumnos resultaron más persuasivos a la hora de imponer sus opiniones que otros pero en los informes finales todos los jóvenes participantes de la experiencia demostraron cualidades valorables de generosidad, consideración y voluntad de apoyo y superación.
El aprendizaje cooperativo es intrínsecamente más complejo que el aprendizaje competitivo o individual porque los estudiantes tienen que comprometerse simul-táneamente con la tarea asignada (aprender la materia) y con el trabajo en equipo (funcionando eficazmente como integrante de un grupo). Para esto fue preciso estimular el **desarrollo de habilidades sociales** que garanticen un trabajo cooperativo eficaz.
En la experiencia desarrollada, se alcanzó a observar en los alumnos evolución en la capacidad de decisión, autoestima, habilidad para la resolución de conflictos, autoconfianza etc., preparando el camino para que pueda aprender no solo Matemática sino cualquier disciplina .
El quinto elemento básico del aprendizaje cooperativo es la **revisión del proceso del grupo.** En esta etapa los alumnos identificaron por sí mismos sus debilidades y fortalezas, descubriendo qué acciones resultaron útiles y cuáles había que cambiar para ser más eficaces.
La revisión de la tarea realizada permitió en esta ocasión analizar permanentemente el proceso de aprendizaje, observándose una progresiva mejora tanto en las capacidades cognitivas y de retención de conceptos y métodos como en las afectivas y actitudinales.

Trabajo realizado

Para el logro de la interdependencia positiva y estimular la interacción, se ofreció a los alumnos un material de trabajo autosuficiente, con consignas claras, generador de actividad, motivante y riguroso. Se insistió para que los alumnos lean detenidamente cada ítem,

busquen en el material la información que necesitaban, discutiendo y reflexionando en grupo.
El tema elegido fue: FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA, tema muy importante en una carrera de perfil biológico que, a pesar de su sencillez, presenta serias dificultades para su comprensión y valoración por parte de los alumnos.
Esquemáticamente, se evaluaron inicialmente las actitudes del grupo antes del desarrollo del módulo de aprendizaje programado. Luego se desarrolló el trabajo cooperativo, para posteriormente realizar una nueva evaluación de las actitudes a posteriori de esta experiencia.

Actitudes a priori

Para la medición de las actitudes se confeccionaron escalas, de tipo Likert, de puntuaciones sumadas. Para la escala de actitudes a priori, se realizaron entrevistas al grupo de alumnos con el objeto de conocer la forma y lenguaje con la que se comunican, sus percepciones respecto de la Matemática, etc. Contrastando esta información con datos obtenidos de distintos autores que han elaborado escalas, redactamos la nuestra, valorando su confiabilidad y validez.
La confiabilidad se analizó aplicando la escala en distintos grupos de alumnos (de Cs. Veterinarias, Cs. Agrarias de la UNL y Licenciatura en administración rural de la UTN). Estas replicaciones permitieron calcular un coeficiente de Cronbach de valor $\alpha = 0.92$, que indica una alta consistencia interna y confiabilidad.
La validez del instrumento se verificó contrastando reportes bibliográficos, entrevistas informales a los encuestados, registros observacionales, etc. que permitieron verificar que los datos arrojados por la escala son similares a estos.

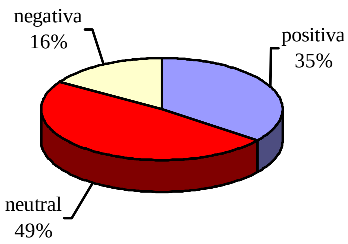
Escala de actitudes hacia la enseñanza y aprendizaje de matemática (A priori)

Esta escala pretende conocer tus actitudes hacia la matemática. No persigue otro objetivo que el de mejorar nuestro trabajo. Te rogamos contestes con confianza, señalando con una cruz tu opinión. Las opciones posibles son: **1: totalmente en desacuerdo**; **2:en desacuerdo;3:neutral;4:de acuerdo;5:totalmente de acuerdo**

1.-Considero que la matemática es una materia necesaria en mi carrera
2.-La matemática no me gusta porque los profesores la enseñan mal
3.-No me asusta pensar que tendré que estudiar Matemática
4.-Estudiar matemática me resulta entretenido
5.-La matemática es poco práctica para que pueda servirme de algo
6.-Me gustaría tener más horas de Matemática
7.-Siempre me intimido ante un problema de Matemática
8.-Tengo confianza en que aprenderé bien Matemática
9.-La matemática puede ser útil para otras carreras pero no para la mía
10.-Creo que no aprenderé matemática por más que lo intente
11.-Si tuviera la oportunidad estudiaría más Matemática
12.-Aprender matemática puede ayudarme para otras materias de mi carrera
13.-Espero no tener que usar mucha matemática en mi carrera
14.-Yo no estudiaría matemática si no estuviera obligado a hacerlo
15.- Sería muy bueno que en otras materias se necesite de la Matemática
16.-Me gusta estudiar matemática

17.- Considero que saber matemática incrementará mis posibilidades laborales
18.-Me siento incómodo y nervioso en las clases de matemática
19.-Me siento tranquilo porque siempre entendí matemática
20.-Estudiar matemática es aburrido

<u>Distribución porcentual de las Actitudes Previas</u>



Trabajo Cooperativo
Se desarrollaron las clases especiales , basadas en un enfoque de trabajo cooperativo.
El esquema de trabajo consistió, en la presentación por parte del docente de las tareas a realizar en una breve introducción.
A continuación los alumnos se reunieron en grupos para tratar de resolver los problemas, buscando juntos estrategias, formulando conjeturas, comprobando, etc.
Algunos de los problemas propuestos fueron:

📖 **<u>Problema 1</u>**:
Si un adulto toma una tableta de 100 mg de determinada medicina, bucalmente, la tasa <u>R</u> con la cual el medicamento entra al flujo sanguíneo a los <u>t</u> minutos después se predice que es : $R = 5 . (0,95)^t$ mg/min. Se puede demostrar que la cantidad <u>A</u> del medicamento en la sangre, en el momento t, se puede aproximar mediante: $A = 97,4786[1 - (0,95)^t]$ mg
a)Estimar cuánto tiempo tardan 50 mg del fármaco en entrar a la corriente sanguínea
b) Estimar el número de mg de la medicina en el flujo hemático cuando está entrando a razón de 3 mg/min

📖 **<u>Problema 2</u>**
Un cultivo de bacterias crece de acuerdo con la fórmula $f(x) = 10.000\ e^{0,6\,x}$ donde <u>x</u> es el tiempo en días.
a)Calcule el número de bacterias que habrá después de una semana
b)¿Cuál es el número de bacterias después de 12 horas?
c)¿Cuánto tiempo se necesitará para que se duplique la cantidad de bacterias?

📖 **<u>Problema 3</u>**:
Uno de los ejemplos más comunes de decrecimiento exponencial es la desintegración de una sustancia radiactiva. La ***vida media*** de un isótopo radiactivo es el tiempo que tarda en desintegrarse la cantidad original en una muestra dada. Por ejemplo si de una sustancia se tienen inicialmente N_0 gramos, la vida media es el tiempo <u>t</u>, que tiene que transcurrir para que la sustancia se reduzca a $N_0/2$.

Esta vida media se usa frecuentemente para diferenciar una sustancia radiactiva de otra. El yodo radiactivo ^{131}I , que se usa en estudios de glándulas tiroides, se desintegra según $N(t) = N_0 (0,5)^{t/8}$ en donde N_0 es la cantidad inicial de yodo , y t es el tiempo, en días.

a) Analice la gráfica de N , para $N_0 = 64$
b) Estime la vida media del yodo radiactivo

📖 **Problema 4:**

En química se usa un índice llamado pH, para representar en forma cuantitativa la acidez o basicidad de soluciones. Por definición , $pH=-\log[H^+]$ donde $[H^+]$es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro. a)Calcule el pH aproximado de cada sustancia:

- Vinagre: $[H^+] = 0,0063$ $\Rightarrow$ pH=.........................
- Zanahoria: $[H^+] = 10^{-5}$ $\Rightarrow$ pH=.........................
- Agua de mar: $[H^+]=5.\ 10^{-9}$ $\Rightarrow$ pH=.........................

b)Estime la concentración aproximada de iones hidrógeno de las sustancias:

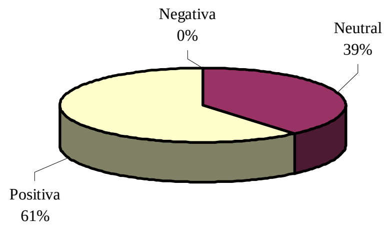
- Manzanas: pH = 3 $\Rightarrow$ $[H^+]$=.........................
- Cerveza: pH = 4,2 $\Rightarrow$ $[H^+]$=.........................
- Leche: pH = 6,6 $\Rightarrow$ $[H^+]$=.........................

En la última fase de la experiencia, cada grupo expuso sus dificultades, logros, tareas asignadas, y presentó el resultado de su trabajo.
Los alumnos trabajaron con entusiasmo y dedicación, alentándose mutuamente, en un clima de distensión que favoreció el intercambio de ideas y la participación de todos.
Para la medición de las actitudes a posteriori, se confeccionó una escala con ítems similares a los de la escala previa pero orientados hacia el tema objeto del trabajo.

Escala de actitudes hacia el tema: funciones exponencial y logarítmica

1. Considero muy útil este tema
2. Trabajar en este tema no me gusta en lo absoluto
3. El tema no se dio bien
4. Este tema me pareció entretenido
5. No me asusta pensar que tendré que trabajar en este tema
6. El tema me pareció demasiado teórico como para que pueda servirme de algo
7. Quiero tener más información sobre este tema
8. Este tema me intimida más que otros
9. Tengo confianza en que podré resolver bien los problemas de este tema
10. Este tema es divertido
11. Este tema puede ser útil para otros pero no para mí
12. Entender bien este tema puede ayudarme a entender otros temas interesantes
13. Cuando terminó la clase sentí que no sería capaz de resolver ningún problema de este tema
14. Me siento tranquilo porque entendí el tema
15. El tema es interesante y motivador
16. Espero no tener que usar mucho este tema más adelante
17. No deberíamos perder tiempo en temas como estos, hay otros temas que son más importantes
18. Me pone nervioso pensar que tendré que estudiar este tema

19. No me molesta estudiar estos temas
20. Sería muy bueno que en otras materias se necesite trabajar con este tema
21. Creo que estudiar temas de este tipo es muy importante para mis próximos estudios
22. Este tema es muy poco interesante
23. Distribución porcentual de las actitudes a posteriori



Algunas conclusiones

- El trabajo cooperativo favorece mejores aprendizajes tanto en lo cognitivo como en los afectivo y/o actitudinal
- Pueden desarrollarse experiencias de trabajo cooperativo en el ámbito universitario
- Puede estimularse el estudio de la Matemática en carreras no Matemáticas modificando la metodología de trabajo en el aula
- Pueden producirse cambios en las actitudes de los alumnos modificando la propuesta de intervención en el aula

Referencias bibliográficas

Hernandez , R. ; Gomez Chacon, I (1997): “Las actitudes en educación matemática: Estrategias para el cambio”. Revista UNO nro. 13 España .Ed. Graó.

Mohd Yusof, Y. (1994) : "Changing attitudes to mathematics through problem solving"en J.P. Da Ponte; J.F. Matos (eds.) : Proceeding of 18 Annual Meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) , Lisboa. vol 1.

Likert, J. (1932) : “Technique of Attitudes Scale Construction”. Nueva York. Appleton Century Crofts. Inc.

Johnson, D.; Johnson, R.; Holubec, E. (1999): “El aprendizaje cooperativo en el aula”. Buenos Aires. Ed. Paidós

Johnson, D.W.; Johnson, R. (1994): "Learning togheter and alone: Cooperation, competitionand individualization". (4ª ed). Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.

Davidson, N. (1990): "Cooperative Learning in Mathematicas". Addison-Wesley Publishing

Análisis de Casos para el Aprendizaje de la Matemática a Nivel Superior

Claudia María Lara Galo, Carelia de Rosenberg, Ricardo Ajiataz
Universidad del Istmo. Guatemala
cmlaragalo@hotmail.com cderosenberg@unis.edu.gt rajiataz@unis.edu.gt

Resumen
La problemática de la enseñanza de la matemática a nivel superior en carreras aplicadas se evidencia en los altos índices de reprobación y en las actitudes de temor, pasividad y desinterés que muestran los estudiantes, entre otras. Uno de los factores que merece ser estudiado es el uso exclusivo del método tradicional (explicación, libro de texto, ejercitación, pruebas escritas) que no ha logrado resolver dicha problemática.
Este trabajo presenta una propuesta metodológica que integra los principios de la Educación Personalizada y adapta los métodos de "Análisis de Casos" (propio de la Enseñanza de la Dirección) y de "Resolución de Problemas" (propio de la Matemática Educativa) diseñado por un equipo de docentes de Matemática 1 de la

Justificación

La Universidad del Istmo es una institución privada, fundada en 1997, que inició su primer ciclo lectivo en enero de 1998 con las Facultades de Dirección y Administración de Empresas y Arquitectura. El objetivo principal de la Universidad es formar profesionales capaces que ayuden a construir, por medio del servicio y de la solidaridad, una sociedad mejor. La orientación filosófica es humanista y se expresa claramente en su lema: "Saber para Servir": se concibe a la persona como más importante que las cosas y considera indispensable ofrecer una formación ética paralela a una formación profesional académica y práctica dentro de un rico y completo ambiente cultural. La orientación educativa es personalista y, por lo tanto, se pretende la atención y la formación individual de cada estudiante para que desarrolle al máximo todas sus capacidades (físicas, emocionales, morales, intelectuales, profesionales, etcétera) y luego las ponga al servicio del bien común.
En la Facultad de Dirección y Administración de Empresas existen varias carreras (Negocios Internacionales y Administración de Empresas de Servicio –hotelería, hospitales, industria del vestuario, mercadeo-). El principal objetivo de la Facultad es formar líderes que puedan dirigir, no solamente administrar, distintos tipos de empresas. Todas las carreras tienen un área común donde los estudiantes reciben 2 cursos de matemática básica que incluyen temas como álgebra polinomial, análisis de funciones y álgebra lineal. El curso de Matemática 1 se empezó a trabajar de forma tradicional (explicación de parte del docente, uso de un libro de texto, ejercitación escrita dentro y fuera de clase, evaluaciones escritas. Se hacía énfasis en los conocimientos que poseía el docente y que debían ser transmitidos a los estudiantes). Los problemas más significativos con relación a los estudiantes eran

1) altos niveles de reprobación (en 1998 ingresaron 107 estudiantes y 32 aprobaron el curso regular. Se organizó un curso de vacaciones y en esta ocasión aprobaron otros 20, llegando a 52 aprobados que representan el 48.60 % ; en 1999 ingresaron 119 estudiantes, aprobaron 62 el curso regular y en curso de vacaciones aprobaron 19 para un total de 81 aprobados, es decir el 68.06 %)
2) actitud pasiva, de desinterés o temor hacia la matemática
3) falta de esfuerzo y perseverancia
4) bajo nivel de lectura e interpretación de textos
5) sin hábitos de estudio
6) poca habilidad para resolver problemas

7) deseo de recibir instrucciones breves y sistemáticas (algoritmos sencillos) para generalizar en la solución de cualquier problema.

Además los docentes manifestaban cansancio y frustración por los altos niveles de reprobación, por tener qué volver a dar el curso en vacaciones y por la apatía de los estudiantes hacia la clase. El método tradicional no llenaba las necesidades ni de los estudiantes ni de los docentes, ni de la Facultad en cuanto a la formación de líderes.

En equipo, los docentes con el Consejo de Facultad diagnosticaron las posibles causas de los problemas indicados

1) el uso exclusivo del método tradicional
2) la falta de adecuación entre el método usado en clase y las necesidades de la carrera
3) la falta de atención a los intereses de los estudiantes
4) evaluación tradicional basada únicamente en trabajos escritos y pruebas escritas

Es importante señalar que en ningún momento se consideró que la falta de capacidad de los estudiantes fuera el factor determinante para que aprobaran o no el curso (todos los estudiantes fueron aceptados bajo los mismos parámetros: se les aplicó una prueba de admisión y se les hizo una entrevista personal). Más bien se consideró que con el método y la motivación apropiadas, ellos podían alcanzar los objetivos eficientemente.

El equipo de docentes desarrolló un método que resolviera la problemática descrita anteriormente, de la Facultad y la clase de Matemática 1 y el resultado de ese trabajo es el método que se presenta en este reporte. Este trabajo no es el resultado de una investigación educativa formal, sino una solución creativa y particular a las necesidades planteadas. El trabajo se complementará en el futuro, con el estudio de los efectos del método en el desarrollo a largo plazo de destrezas en los estudiantes y la evaluación de su desempeño en otras asignaturas y en su trabajo profesional.

El método denominado "Análisis de Casos para el Aprendizaje de la Matemática" se diseñó dentro del marco filosófico de la Educación Personalizada y es una adaptación del método de Análisis de Casos propio de la formación de Líderes y Administradores y el enfoque de Solución de Problemas propio de la Matemática Educativa. El documento presenta una breve descripción de cada enfoque y luego, el método diseñado por el equipo de docentes.

La Educación Personalizada

El nombre de educadores y psicólogos como Pierre Faure, María Montessori, Carl Rogers y Víctor García Hoz, entre otros, está ligado a este estilo de Educación Personalizada que, según García Hoz: "*responde al intento de estimular a un sujeto para que vaya perfeccionando su capacidad de dirigir su propia vida o, dicho de otro modo, desarrollar su capacidad de hacer efectiva la libertad personal, participando, con sus características peculiares, en la vida comunitaria*".

El fundamento del estilo personalizado es el concepto de persona y de estudiante. Bajo este enfoque educativo se concibe a los estudiantes como sujetos responsables, dinámicos, capaces de elegir, interesados en relacionarse con otros, diferentes en sus aptitudes, deseos y valores. El desarrollo de las actividades de enseñanza se basa en la seguridad de que los estudiantes son capaces de lograr altos niveles de esfuerzo, de proponerse metas y de evaluarlas. Para implementar un estilo de educación personalizado es imprescindible creer en la persona y esperar más de ella ("particularmente en la curiosidad y el ansia de saber", según Rogers).

El estilo de Educación Personalizada es, en si, es integrador y abierto a técnicas y otros métodos variados. Se considera que el conocimiento se refiere más a relaciones que a temas aislados, y que los estudiantes deben conocer por qué y cómo aprenden, para evitar un aprendizaje inconexo y superficial. El desarrollo de valores a la par de conocimientos teóricos y técnicos se considera fundamental.

El estilo de educación personalizada considera imprescindible la interrelación entre estudiantes, favoreciendo actividades de creación y de discusión, de tal manera que los estudiantes aprendan unos de otros. Entre las técnicas propias de la educación personalizada se encuentra la "Puesta en Común" donde los estudiantes pueden escuchar, fijar, comparar, presentar y admitir diferentes puntos de vista y reafirmar el aprendizaje.

La calidad de la educación se mide, según el estilo personalizado, por las respuestas que ofrece el sujeto educado ante las situaciones de la vida en todos sus aspectos; en la medida en que puede satisfacer sus necesidades biológicas, psicológicas, sociales, trascendentes.

Método de Análisis de Casos

El núcleo de la metodología del Análisis de Casos, que se empezó a usar formalmente en la Universidad de Harvard en la Facultad de Derecho en 1914, es el diálogo sistemático de situaciones reales con fines de aprendizaje. En Harvard se pedía a los alumnos que buscaran la solución a una historia concreta, y la defendieran. Más adelante, alrededor de 1935, el método se aplicó a otros campos como metodología docente.

En la aplicación del método de análisis de casos el docente debe investigar por medio de entrevistas con expertos, observaciones directas o bibliográficamente (revistas, archivos, biografías, incidentes técnicos, etcétera) y redactar una situación basada en datos reales.

El caso se les presenta a los estudiantes (puede ser por película, video, entrevista, texto escrito) que deben analizarlo individualmente y a profundidad, sacar sus conclusiones o responder a las preguntas que se les planteen.

Luego, viene la sesión general donde los estudiantes, expresándose libremente, analizan el caso descubriendo y aprendiendo a tolerar diferentes puntos de vista. En todo momento se pide a los estudiantes que se sometan a la realidad de la situación presentada sin deformarla (que emitan juicios objetivamente).

La fuerza del método del caso deriva del vigor de la asimilación (o sea que lo que aprende el alumno no ha debido sufrir un proceso de apropiación sino que de construcción). Es un ejercicio de observación y de juicio que convierte la experiencia en un factor educativo. Es un proceso didáctico por descubrimiento que no pretende que el alumno reciba sino que descubra, que desarrolle su capacidad de inventiva (creación). La enseñanza con el método del caso se aproxima a la que proporciona la vida.

El método del caso, como lo describe Carlos Llano, especialmente usado para el desarrollo de facultades directivas o de liderazgo, no pretende enseñar una solución que deba ser sabida, ni aún siquiera enseñar a configurar varias soluciones para una situación real; busca enseñar a decidir una solución ya que la enseñanza de la dirección exige una inteligencia intuitiva además de una deductiva o analítica.

Enfoque de Resolución de Problemas

Muchos de los trabajos relacionados con la metodología de Resolución de Problemas hacen referencia a las ideas de G. Polya, descritas en el libro "Cómo resolverlo" publicado en

1945. Polya indica que la misión primaria del docente es ayudar a sus estudiantes, no hacer todo el trabajo por ellos, ni hacer tan poco que los deje con ayuda insuficiente.
Según Polya, es deseable que el docente se ponga en el lugar de los estudiantes para anticipar las dudas o pasos que se les podrían ocurrir durante la resolución del problema. El docente que quiere ayudar a sus estudiantes a desarrollar la habilidad de resolver problemas debe darles suficientes oportunidades para que lo hagan dentro y fuera de clase.
Por otro lado, Eduardo Mancera en el libro "Saber Matemática es Saber Resolver Problemas" considera otros enfoques además del de Polya (cita a Shoenfeld y a Gascón) y propone estos pasos para aplicar el enfoque de Resolución de Problemas en la clase de Matemática:

1. Se plantea un problema contextualizado, es decir en un contexto no matemático.
2. Se pide a los alumnos que presenten individualmente algunas posibles soluciones.
3. Los alumnos trabajan con algunos compañeros de grupo para discutir cuáles de las soluciones son las más viables y por qué.
4. Los alumnos deben volver a resolver el problema –preferentemente en equipos— y tienen total libertad en el uso de contenidos, estrategias y materiales.
5. Se vuelven a presentar a toda la clase algunas formas de resolver el problema discutido.
6. El docente presenta, si es necesario, una forma de resolver el problema que se relacione con los contenidos matemáticos del programa.
7. El docente resalta que se desea encontrar un método de solución que sea el más general, es decir, que con éste se pueden tratar otros casos de problemas parecidos. Para lograr esta generalización, se trabajan problemas con datos distintos y se pide a los alumnos que trabajen con diferentes estrategias que sigan siendo válidas. También se puede plantear una solución distinta y solicitar todos o algunos de los datos de manera que se ajusten a la solución propuesta.
8. Luego, se solicita a los estudiantes que planteen problemas en otros contextos - con datos similares o iguales - que se resuelvan de la misma forma general.
9. Por último, Mancera propone usar una de las soluciones al problema - la que más se relacione con la teoría - para introducir conceptos y nociones del programa.

En resumen, se debe propiciar un ambiente y seguir una metodología específica para lograr que los estudiantes resuelvan problemas exitosamente.

Descripción del Método "Análisis de Casos para el Aprendizaje de la Matemática"
Este método se diseñó específicamente para el curso "Matemática 1 (Teoría y Aplicación de Funciones)" de la Facultad de Dirección y Administración de Empresas. Tres docentes conforman un equipo donde cada uno está a cargo de una sección diferente.

1. Antes de iniciar la planificación, se hace un <u>diagnóstico</u> para identificar las necesidades de los estudiantes y redactar los casos tomándolas en cuenta.
2. El equipo de docentes organiza las unidades y hace un listado de los <u>temas</u> o contenidos que los estudiantes deben aprender durante el curso teniendo en mente que lo más importante es el desarrollo de las <u>destrezas y habilidades matemáticas</u>.
3. Para cada unidad, el equipo de docentes plantea un <u>problema en forma de caso</u> relacionado con la vida diaria de los estudiantes o con algún tema específico de su carrera.

4. Los estudiantes individualmente o en equipo deben recolectar información (fuera de clase) por medio de investigaciones en periódicos, revistas, entrevistas, encuestas, realizando laboratorios (en clase) o escuchando (también en clase) alguna conferencia de especialistas en el tema seleccionado.
5. Los estudiantes, trabajando en equipos de entre 4 y 6 personas (organizados por el docente integrando estudiantes más aventajados con menos aventajados), durante la clase, deben organizar y representar la información obtenida utilizando todas las formas que se les ocurran: tablas, gráficas, esquemas, resúmenes, ecuaciones, fórmulas. Pueden usar tecnología apropiada (calculadoras gráficas) y materiales específicos (papel milimetrado). El docente asesora a los estudiantes en cada etapa del proceso.
6. Los equipos de estudiantes hacen una presentación oral o escrita donde usan la información obtenida para dar respuesta al problema o caso planteados. Cada docente evalúa la presentación que sirve como diagnóstico de los estudiantes.
7. El equipo de docentes proporciona una lista de temas y un vocabulario que los estudiantes deben investigar bibliográficamente en diferentes libros trabajando en parejas o individualmente. Es requisito presentar los temas por escrito para poder participar en la siguiente fase.
8. En clase, cada docente dirige una “Puesta en Común” de los temas y el vocabulario investigados de manera que todos los estudiantes aporten y, al final, lleguen a conclusiones generales. Además, se empiezan a asignar ejercicios “tradicionales” relacionados con el tema. Se empiezan a realizar exámenes cortos.
9. En clases magistrales el docente trabaja haciendo énfasis en el lenguaje y la simbología matemáticas. Se presentan diferentes procesos de planteamiento y resolución de problemas y casos de acuerdo a las necesidades manifiestas en el diagnóstico inicial. Se asignan tareas relacionadas con el tema y de acuerdo a las necesidades del grupo. Se hacen exámenes cortos regularmente.
10. En clase, cada equipo de estudiantes vuelve a plantear el problema con signos y lenguaje matemáticos. Usando la información obtenida y las nuevas estrategias estudiadas, cada equipo de estudiantes plantea una nueva solución o justifica la que ya tenía y la presenta oralmente (dicha presentación se califica).
11. Se asignan problemas y casos nuevos para que los estudiantes resuelvan en equipos e individualmente. Estos casos se discuten en clase antes del examen parcial.
12. El equipo de docentes diseña una hoja de trabajo o un laboratorio para que los estudiantes puedan fijar y hacer síntesis de los temas estudiados.
13. Se lleva a cabo el examen parcial que incluye un formato de autoevaluación.
14. Se retroalimenta el proceso escuchando las opiniones de los estudiantes, observando los resultados de trabajos, tareas, exámenes y presentaciones, y compartiendo opiniones con el resto del equipo de docentes. Los datos de esta retroalimentación son utilizados para planificar la siguiente unidad.

Conclusiones

El método se comenzó a aplicar en el año 2000 y se han notado los siguientes logros:

1) mejor nivel de aprobación (de 101, aprobaron 73, el 73%, y ya no hubo curso de vacaciones) y mayor coherencia en las formas de evaluación que involucran tanto a los estudiantes como a los docentes

2) mejor actitud de los estudiantes (en interés por trabajar, buscar información y presentarla, participar en el curso) que ha incidido en un aprendizaje de niveles cognoscitivos más altos
3) mejor atención y orientación personal a los estudiantes
4) ambiente de clase de trabajo y esfuerzo, de éxito y de logros compartidos
5) se ha fomentado la solidaridad entre los estudiantes que han aprendido a trabajar en equipo independientemente de sus preferencias, actitudes, habilidades y opiniones
6) se integró un equipo de trabajo permanente entre los 3 docentes involucrados y se comenzó a trabajar con docentes de otras áreas para la elaboración de los casos
7) mejor actitud de los docentes porque con esta metodología ellos también aprenden, se enriquecen y se sorprenden agradablemente con los aportes y los análisis de los estudiantes.
8) Se han sentado las bases para una investigación en Matemática Educativa

Hasta la fecha hemos tenido las siguientes dificultades:

1) aún no hemos diseñado los instrumentos para medir el impacto del método en los estudiantes en otras materias ni en su vida profesional.
2) el método requiere más trabajo y esfuerzo de los docentes tanto individualmente como en equipo.
3) el método toma más tiempo de clase.

Consideramos valioso el método porque ha propiciado una actitud abierta y positiva en los estudiantes que los ha llevado a mejorar considerablemente su aprendizaje (han aumentado su ritmo de trabajo y han desarrollado destrezas diversas, apropiadas a su carrera). El ambiente de clase es agradable, de trabajo e intercambio de ideas. El método puede ser usado en otros cursos de matemática e incluso de otras materias.

Referencias bibliográficas

Camilloni, Davini et al. (1988). *Corrientes Didácticas Contemporáneas.* Argentina: Paidós.

Galo de Lara, Carmen María (1985). *Educación Personalizada, elementos metodológicos.* Guatemala: Editorial Piedra Santa.

García Hoz, Víctor (1988*). La Práctica de la Educación Personalizada.* Madrid: RIALP.

Lara de Iriarte, Nora (1994). *Una experiencia en educación personalizada*. Guatemala: SERCAP.

Litwin, Edith (1998). *El Campo de la Didáctica, la búsqueda de una nueva agenda. Corrientes Didácticas Contemporáneas.* Argentina: Paidós.

Llano, Carlos (1996). *La Enseñanza de la Dirección y el Método del Caso*. México: IPADE.

López, Alfonso (1997). *Iniciación al Análisis de Casos*.. España: Ediciones Mensajero.

Mancera, Eduardo (2000). *Saber Matemáticas es Saber Resolver Problemas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Moreno, Salvador (1983).: *La Educación Centrada en la Persona.* Manual Moderno. México.

Marín, Ricardo (1990*). Principios de la Educación Contemporánea.* España: RIALP.

Morales Aldana, Leonel (1997). *Resolución de Problemas y Algoritmos*. Guatemala: Super Aprendizaje.

Polya, George (1945). *How to Solve It.* Princeton University Press, USA,

Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, (1995). La Habana (Cuba). Vol. 1 y 2.

Memorias de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (1997), Morelia (México).

Aprendizaje autónomo en matemática

Gloria Suhit, Ricardo Bernatene, Adriana Ilacqua, Mónica Incicco, Norberto Rossi, Marta Vidal
Facultad Regional Bahía Blanca. U.T.N. Argentina
gsuhit@criba.edu.ar

Resumen
Ante las dificultades detectadas al desarrollar los contenidos de nuestra disciplina y al analizar los resultados poco satisfactorios observados en el primer año de Universidad surgió la necesidad de un cambio metodológico.
La propuesta tiene como eje: ***Poner en actividad al alumno en el papel fundamental de la construcción de su propio conocimiento,*** para desarrollar la capacidad de **aprender a aprender** y favorecer un aprendizaje autónomo. Su implementación requiere una modificación del rol docente, quien de exponer y demostrar pasa a observar, orientar, evaluar y plantear nuevos problemas a partir de situaciones no previstas, tratando de no resolver aquello que el alumno puede hacer solo.

Introducción

Las dificultades con las que nos enfrentamos a diario al desarrollar los contenidos de nuestra disciplina (Análisis Matemático) y al analizar los resultados poco satisfactorios que observamos en el primer año de Universidad, nos llevan a reflexionar y a cuestionar nuestra práctica docente.
Con especial énfasis en los últimos períodos lectivos y casi sin excepción de asignaturas, se observa que gran parte de los estudiantes:

- Olvidan fácilmente lo que “aprendieron”
- No adquieren niveles de conceptualización apropiados
- No alcanzan un manejo operatorio adecuado
- No desarrollan estrategias de resolución de problemas
- No tienen hábitos de reflexión y crítica de los resultados.

Para intentar determinar con algún grado de certeza las posibles causas, organizamos pequeños grupos de discusión con nuestros alumnos donde expresan con total libertad sus experiencias de aprendizaje en las distintas asignaturas, sus hábitos de estudio, el tiempo que disponen para desarrollar sus tareas…

De las reflexiones (personales y/o grupales) podemos inferir que:

- Los alumnos manipulan un conjunto de símbolos sin establecer ninguna correspondencia con sus respectivos significados
- Falta hábito de relacionar, por el aprendizaje lineal de los conceptos
- No han construido los conceptos a partir de los ya existentes
- El estilo expositivo de las clases estimula un aprendizaje pasivo, se habitúan a la recepción de los conocimientos y no se los orienta a generarlos.

Creemos que estas son algunas de las posibles causas que obstaculizan el aprendizaje y muy especialmente el de los conceptos matemáticos.
Los conocimientos matemáticos como producto terminado son el punto de llegada del proceso de construcción por parte del estudiante y no el punto de partida. Los propios

conceptos matemáticos han ido modificando su significado con el transcurso del tiempo, ampliándolo, precisándolo o revisándolo, adquiriendo relevancia o por el contrario, siendo relegados a un segundo plano. Luego, presentar la matemática como algo acabado, cerrado y alejado de la realidad no refleja su evolución histórica y su carácter constructivo, provisorio y tentativo.

Sin embargo, la característica principal de los programas de matemática en cualquier curso tradicional es su linealidad, la exposición en serie de temas y unidades, que aún guardando relaciones entre sí, no le son debidamente destacadas al estudiante o éste no lo incorpora como un todo integrado. Esta puede ser una disposición válida para no perder ninguno de los importantes resultados obtenidos a lo largo de su desarrollo histórico por la ciencia, pero no tiene en cuenta las características psicológicas del aprendizaje del alumno, cuyo modo de acceder a la información, en general, está asociado a otras regularidades.

Por lo tanto la manera de garantizar la construcción, es decir, la adquisición de los conceptos, es facilitando al alumno la interacción con los procesos a partir de los cuales es posible construirlos; esta interacción con el mundo real es lo que le permite reconstruir una serie de relaciones, diferenciaciones o interacciones de los conocimientos previos para construir los nuevos.

Propuesta de cambio metodológico

La propuesta se basa en la enseñanza personalizada, dentro de una estructura grupal, con evaluaciones continuas del proceso de enseñanza- aprendizaje, donde los roles tanto de los alumnos como de los docentes cambian respecto de la enseñanza tradicional.
Las clases no son exclusivamente expositivas, no se separa la teoría de la práctica, los alumnos tienen un texto a seguir, se respeta el ritmo de aprendizaje de cada uno, tienen libertad para decidir el momento de la evaluación.
Cada estudiante puede avanzar en el curso según su estilo cognitivo y sus conocimientos previos le permitan, teniendo en cuenta también su ritmo de trabajo y el tiempo que puede dedicarle, sin dejar de lado un cronograma donde se indican los contenidos y las posibles fechas de evaluaciones que cada uno puede elegir, cuando considera que conoce y comprende bien el contenido.

El docente se transforma en un consultor de acuerdo a las necesidades de los alumnos, colabora y orienta en los aspectos teóricos y/o prácticos, guía en el trabajo con la computadora, realiza reuniones de discusión sobre determinados contenidos o desarrolla un tema para el grupo que lo solicita.

La evaluación continua formativa proporciona información acerca del desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje y permite que el alumno reconozca el valor de los errores (error constructor) en tanto que éstos le enseñan a revisar el método operativo o de demostración, buscar otros caminos, analizar si es correcta la utilización de los datos o las hipótesis de trabajo… y que adquiera la capacidad de autoevaluación como reflexión crítica de su propio proceso de aprendizaje, es decir, como un modo de favorecer la metacognición.

Las actividades, recursos y técnicas se proponen y usan en función de las necesidades de cada unidad y del grupo de alumnos.

Marco teórico

El método se fundamenta en los principios básicos de la enseñanza personalizada: **singularidad, comunicación, autonomía, libertad, actividad** a partir de los cuales se propone despertar el espíritu de iniciativa y observación, la adquisición de hábitos, la sociabilidad, la responsabilidad, favorecer la actividad, la búsqueda y la reflexión.

Un objetivo importante es desarrollar en los alumnos la capacidad de **"aprender a aprender"**, para garantizar una educación permanente y su adaptación a las condiciones de la sociedad y del mundo que le toca vivir. Para ello es necesario que los alumnos logren, por sí mismos, la capacidad de: (Aebli, H., 1991, pág. 153)

- Establecer contacto con cosas e ideas
- Comprender fenómenos y textos
- Planear acciones y solucionar problemas
- Ejercitar actividades, poder manejar información mentalmente
- Mantener la motivación para la actividad y para el aprendizaje.

Las profundas diferencias que existen entre los alumnos, tanto en su carácter, como en sus estilos cognitivos, los conocimientos previos, el ritmo de trabajo, deben tenerse en cuenta en el aprendizaje; por lo tanto debe organizarse la tarea, incentivando la creatividad, para favorecer a la vez la individualización de la enseñanza y la integración en grupos, ya que las actividades grupales constituyen el ambiente propicio para la construcción del conocimiento y favorecen el desarrollo de la actividad para llevar a cabo un contraste efectivo y respetuoso de ideas, el saber ponerse en el punto de vista del otro o cambiar el propio.

Desde la perspectiva constructivista, es el alumno quien construye significados y atribuye sentido a lo que aprende, pero esta actividad por si sola no garantiza el aprendizaje, necesita ayuda en el proceso de representación o atribución de significados.

"…El ajuste de la ayuda pedagógica se logrará ya proporcionando al alumno una información organizada y estructurada, ya ofreciéndole modelos de acción a imitar, ya formulando indicaciones y sugerencias más o menos detalladas para resolver unas tareas o permitiéndole que elija y desarrolle de forma totalmente autónoma unas determinadas actividades de aprendizaje" (Coll, C.; 1988).

El docente orienta al alumno pero nunca debe reemplazarlo en lo que él puede hacer. Dirigir adecuadamente las actividades de los alumnos demanda del docente un trabajo de generalización y reformulación a partir de los enunciados de los alumnos, una cierta habilidad para transformar propuestas particulares en enunciados más generales, una actitud abierta a nuevos aportes, orientando el trabajo en el aula con una metodología participativa

– activa, que convierta su acción y la de sus alumnos en procesos de investigación, logrando una socialización y la generación de espacios agradables, estimulantes de reflexión para la construcción del conocimiento.

Desarrollo de la experiencia

La experiencia se desarrolló por primera vez en el segundo cuatrimestre de 1988 en el curso de Ing. Eléctrica, con el compromiso de que si no estaban de acuerdo con los resultados que se obtenían, se regresaría a la clase "tradicional". Se eligió este curso porque era, de los dos a cargo de la docente titular, el que contaba con menor cantidad de alumnos y mayor número de docentes auxiliares. Lo ideal para este tipo de trabajo es un docente por cada 15 o 20 alumnos, para lograr una asistencia personal.
A partir de 1989 se trabajó con esta metodología en los cursos de las dos especialidades a cargo de la docente titular: Eléctrica y Construcciones.
En los ciclos lectivos 1990 a 1994 se efectuaron algunas modificaciones, aunque manteniéndose el espíritu de la propuesta, ante el elevado número de alumnos y la imposibilidad de mantener el mismo grupo de auxiliares docentes.
A partir de 1995 la implementación de los nuevos diseños curriculares y el cursado cuatrimestral de la asignatura exigió un replanteo en la selección y organización de los contenidos y una adecuación del método de trabajo a plazos tan cortos.
Las "bondades" del método se ponen de manifiesto en la evaluación final integradora, la que superan sin mayores dificultades y fundamentalmente año tras año se observa que los alumnos que participaron en la metodología descripta lograron una mayor autonomía en el trabajo aúlico y desarrollo de estrategias para resolver problemas, estos aspectos no sólo fueron resaltados por docentes del Área sino también por los de otras asignaturas, como por ejemplo Química.
El siguiente cuadro compara resultados obtenidos en dos cursos de Análisis Matemático II

Curso ***A:*** participó con la metodología propuesta en este trabajo en el cursado de Análisis Matemático I
Curso ***B***: desarrolló el curso de Análisis Matemático I con la metodología tradicional

Curso	**N° de alumnos**	**Alumnos que cursaron**	**Alumnos que promocionaron**
A	31	58 %	29%
B	63	23 %	14 %

Al realizar la evaluación final del curso, en los distintos ciclos lectivos y solicitar la opinión de los alumnos sobre la experiencia de enseñanza- aprendizaje, luego de las primeras lógicas resistencias al cambio, la gran mayoría apoyan la nueva metodología fundamentando sus respuestas en que:

- Posibilita la profundización de los temas

- Fomenta la responsabilidad e iniciativa propia
- Incentiva la consulta bibliográfica
- Ayuda a la autoevaluación
- Da mayor confianza en las propias habilidades matemáticas.

En el siguiente cuadro se muestran datos de las valoraciones anteriores en los períodos en los que la metodología se implementó en su diseño original

	En gran medida	**Modera-damente**	**Muy poco**	**Nada**
He mejorado mi capacidad para interpretar Información	33 %	62 %	05 %	
He mejorado mi capacidad para extraer conclusiones	44 %	45 %	11 %	
He logrado mayor confianza en mí mismo	33 %	40 %	22 %	05 %
He aumentado mi capacidad y actitud crítica	23 %	66 %	11 %	
He logrado desarrollar estrategias para plantear y resolver problemas	40 %	49 %	11 %	
He logrado autonomía para organizar la tarea y distribuir mis tiempos	40 %	27 %	22 %	11 %
He logrado integrarme en grupos de trabajo	65 %	20 %	05 %	10 %

" ….se trata de formar individuos libres y capaces de comprometerse, personas creativas a través de la puesta en práctica de todo el potencial de aprendizaje y una maduración que llevan consigo ; liberadas de todo lo que importa la libre opción en una sociedad repleta de ofertas pero injusta en sus estructuras…" Martínez, José Ma.

Referencias bibliográficas

Aebli, H. (1991) *Factores de la enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo. Madrid:* Ed Narcea.
Ausubel,Novak y Hanesian (1983).*Psicología Educativa.* México: Ed. Trillas.
Castorina, J. y otros (1996). *Piaget- Vigotsky: contribuciones para replantear el debate.* Buenos Aires: Ed. Paidós.
Coll, C. (1988) *Conocimiento psicológico y práctica educativa.* Barcelona: Ed. Barcanova.
Martínez Beltrán ,José Ma. (1994). *La mediación en el proceso de aprendizaje*. Madrid: Ed. Bruño.
Novak, J. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Ed. Martínez Roca.
Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Ed. Morata.
Resnik, L y Ford, W. (1990). *La enseñanza de la matemática.* Madrid: Ed. Paidós.
Sanjurjo, L. y Vera, Ma. T. (1999) *Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior* . Rosario, Argentina: Ed. Homo- Sapiens..

Redescubrimiento del concepto de continuidad usando métodos no tradicionales

B. J. Chahar, Ma. E. Nieva de del Pino, M.A. Correa Zeballos
Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán, Argentina
bchahar@unt.edu.ar

Resumen
La determinación del tipo de relaciones que se establecen en el aula entre profesor y estudiantes y de estos entre sí, es una consecuencia de la organización del proceso educativo y de los métodos empleados.
Una buena comunicación educativa favorece el aprendizaje, optimiza el intercambio y recreación de los significados y contribuye al desarrollo de la personalidad de los participantes.
Dentro de esta concepción pedagógica y considerando la importancia que tiene una adecuada organización y dirección de la actividad docente, para favorecer el diálogo y la retroalimentación en la relación emisor – perceptor, se realizó una experiencia utilizando métodos y técnicas participativa para desarrollar el tema "Continuidad".
Esta propuesta se presentó en la V Reunión de Didáctica Matemática del Cono Sur en Santiago de Chile en enero de 2000 bajo el título: Educación: ¿ Un proceso de interacción y Comunicación?.
El objeto del presente trabajo es mostrar los resultados de la puesta en práctica de dicha propuesta, realizada mediante un diseño experimental. Dicha experiencia se llevó a cabo con alumnos de primer año de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán.
Los resultados obtenidos muestran con claridad que las técnicas participativas son propicias para la adquisición del conocimiento, fomentando la creatividad y el razonamiento analógico.

Introducción

El aprendizaje grupal es una nueva concepción de enseñanza que utiliza como vía fundamental al grupo para la construcción y reconstrucción del conocimiento, así como para la transformación de la personalidad de cada uno de sus miembros y del grupo en su conjunto. Es un proceso de interacción e influencia mutua entre sus miembros y el profesor. Para favorecer la asimilación de los contenidos se desarrollan actividades conjuntas y se aplican métodos y técnicas adecuadas.
Dada la importancia que tiene una adecuada organización y dirección de la actividad docente, para favorecer la comunicación y la retroalimentación en la relación educativa, se utilizaron métodos y técnicas participativas en el desarrollo del tema "Continuidad".
Esta propuesta se presentó en la V Reunión de Didáctica Matemática del Cono Sur en Santiago de Chile en enero de 2000 bajo el título: Educación: ¿ Un proceso de interacción y Comunicación?.
El objeto del presente trabajo es mostrar los resultados de la puesta en práctica de dicha propuesta, realizada mediante un diseño experimental. Esta experiencia se llevó a cabo con alumnos de primer año de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán.

Importancia del tema

El aprendizaje grupal es elaboración y construcción del conocimiento a partir de las necesidades, intereses y objetivos de los miembros, mediante su participación en la organización y desarrollo del proceso docente. Esto supone una verdadera transformación en las concepciones y prácticas educativas tradicionales, así como en las funciones de profesores y alumnos.

Es conocido que en la práctica, los métodos tradicionales de enseñanza tienen al docente como centro del proceso y a los alumnos como receptores pasivos. Por todo esto, la comunicación, considerada en la actualidad como la acción dominante en las relaciones áulicas, se ve dificultada. En un intento de superación, se realizó esta experiencia poniendo en práctica métodos y técnicas participativas.

Objetivos del tema

- Lograr que los alumnos adquieran los conceptos mediante un proceso constructivo, desarrollando su creatividad y reflexión.
- Fomentar el espíritu investigativo aplicando un razonamiento analógico.
- Propiciar la interacción de los alumnos en los grupos de trabajo, aprovechando la efectividad de la comunicación en el intercambio de ideas.

Diseño experimental

La experiencia se llevó a cabo realizando un muestreo sistemático de cincuenta estudiantes, sobre una población de quinientos que estaban cursando la asignatura Matemática I en el primer cuatrimestre del año 2000. Se asignaron, en forma aleatoria, veinticinco alumnos al grupo testigo y veinticinco al grupo experimental. El tamaño muestral se determinó teniendo en cuenta los requerimientos de las técnicas participativas.
Los grupos trabajaron en forma simultánea, en distintas aulas; el grupo experimental fue coordinado por un docente para trabajar con los métodos participativos en un "aula taller", mientras que el grupo testigo asistió a una clase magistral.
El grupo experimental desarrolló una prueba al finalizar las actividades propuestas en el aula taller, mientras que el grupo testigo realizó la misma prueba al finalizar la clase magistral.

Metodología

Dentro de los Métodos Participativos se seleccionaron para esta experiencia "Lluvia de Ideas", "Búsqueda Parcial" y "Discusión Reiterada". La Lluvia de Ideas garantiza la participación de todos los miembros del grupo y la evaluación de las mejores ideas. Se recomienda en problemas que requieren un enfoque creativo grupal, donde los aportes de cada participante estimulan la generación de nuevas ideas en los demás. El método Búsqueda Parcial permite al profesor desarrollar los contenidos sobre la base de la participación de los estudiantes. Para ello, debe descomponer una tarea de mayor complejidad en otras más sencillas, que constituirán los pasos a seguir para llegar a la solución de la tarea principal. La Discusión Reiterada brinda la posibilidad de mayor actividad por parte de los estudiantes. Estas tareas deben garantizar un "hilo conductor" que lleve al estudiante paso a paso a encontrar lo desconocido.

1. Primera etapa
Recurriendo a ideas previas que trae el alumno sobre el término continuidad se implementa una Lluvia de Ideas sobre las preguntas del Anexo 1, generándose un listado de conceptos sobre la frase “proceso continuo”. Del mismo se seleccionaron los más claros y sencillos relacionados con el tema.

2. Segunda etapa
A fin de implementar la Discusión Reiterada se formaron grupos de cinco alumnos cada uno para desarrollar la Tarea 1 del Anexo 2.
En esta etapa tiene lugar la contradicción entre lo conocido y lo desconocido, lo desconocido tiene que interesar al alumno a fin de motivar el desarrollo de la actividad cognoscitiva y debe poder resolverse.
Para completar esta etapa con el fin de reformular los conceptos obtenidos en cada grupo se recurrió a una discusión plenaria.

3. Tercera etapa
Se reúnen nuevamente los mismos grupos, para realizar la Tarea 2 del Anexo 2.
En esta instancia, el problema docente consiste en plantear la definición formal de función continua en un punto y obtener las tres condiciones que ella implica.
En la discusión plenaria, donde cada grupo expuso su conclusión, se formalizó el concepto de función continua en un punto.
La primera y segunda etapa corresponden al período inicial de la comunicación mientras que en la tercera se lleva a cabo la dirección de la comunicación, según la estructuración dada por V. A. Kan Kalik.

Resultados

Al analizar las pruebas de ambos grupos se observan los siguientes resultados:
El grupo experimental llegó a formalizar el concepto de función continua en un punto mediante un trabajo de indagación y reflexión, evocando los conceptos previos que tenían del tema, usando analogías y un vocabulario cotidiano. El grupo testigo también respondió satisfactoriamente la prueba, pero usando en su respuesta una terminología formal que reflejaba el haber recibido en forma acabada estos conocimientos.

Conclusiones

La metodología seleccionada favoreció la comunicación entre profesor y alumnos y de éstos entre sí y posibilitó la concreción de los objetivos propuestos. El grupo consideró la tarea como un objetivo que se propuso alcanzar, lo que generó condiciones favorables para lograr un aprendizaje significativo.
Durante el desarrollo de la experiencia se observó en los estudiantes cierta independencia cognoscitiva, trabajo cooperativo y habilidad para interpretar conceptos matemáticos, a partir de las gráficas.
El alumno, en la búsqueda del conocimiento, dejó de ser un receptor pasivo para transformarse en un sujeto activo, desarrollando la creatividad y el pensamiento científico e investigativo que se considera prioritario en la formación de un estudiante de ciencias.

Anexo 1

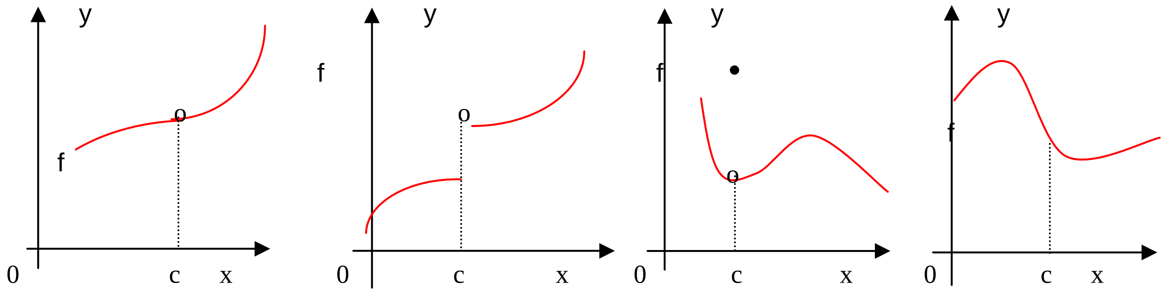
a) ¿Qué se entiende por proceso continuo en el lenguaje ordinario?

b) ¿Cómo aplicaría este concepto a la gráfica de una función?

Anexo 2

Tarea 1

a) Analice las siguientes gráficas:



b) ¿Conoce alguna relación entre la existencia del $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ y la existencia de la función en $x = c$, o sea $f(c)$?

c) ¿Qué diferencias observa en el comportamiento de las funciones en el punto $x=c$?

Tarea 2

a) ¿La existencia del límite de una función en un punto es suficiente para asegurar la continuidad de la función en dicho punto?

b) A su criterio, ¿qué condiciones debe cumplir una función en un punto para que resulte continua en él?

Referencias bibliográficas

Colectivo de autores. (1995). Los Métodos Participativos, ¿Una Nueva Concepción de la Enseñanza?. CEPES. Universidad de La Habana.

Freire, P. (1971). *La Educación como Práctica de la Libertad.* Siglo Veintiuno, México: Editores S.A.

Vigotsky, S. L. (1987). *Historia del Desarrollo de las Funciones Psíquicas Superiores*. La Habana: Editorial Científico-Técnica.

Kaplun, M. Del Educando Oyente al Educando Hablante. Perspectivas de la Comunicación Educativa en Tiempos de Eclipse. En Revista Diálogos de la Comunicación. Nro. 37. Set/1993. FELAFACS.

Pichón-Riviere, E. (1985). *Del psicoanálisis a la Psicología Social.* Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.

Leontiev, A. A. (1979). *La Comunicación Pedagógica*. Moscú: Editorial Znanie, Dto de Traducciones Mined.

Kan Kalik, V. A. (1987). *Para el Maestro, Sobre la Comunicación Pedagógica*. Moscú.

Una situación problemática: *"La Empresa DISCRETIZADA"*

Claudia Guzner, Alejandra Cívico, Liliana Collado, Verónica Gayá, Alicia Gil, Amalia Kaczuriwsky, Cecilia Polenta, Liliana Zaragoza
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Mendoza, Mendoza. Argentina
lauma@nysnet.com.ar sistemas@frm.utn.edu.ar

Resumen
El trabajo del docente de matemática supone, por una parte, el conocimiento del objeto del saber matemático correspondiente, y por la otra, tener una hipótesis de aprendizaje que le permita llevar a cabo la enseñanza del saber matemático puesto en juego que, desde el punto de vista de la Didáctica, es tratar de analizar cómo debe llevarse a cabo esta actividad para que el alumno efectúe sus aprendizajes matemáticos, en el seno de una institución universitaria.
Pero hay otras preguntas también importantes: ¿cómo se enseña? ¿Cuáles son los métodos de enseñanza adecuados?, ¿Cómo se evalúa el progreso? . El tema que se presenta pertenece a la materia Matemática Discreta, en la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la U.T.N. y se trata de un problema integrador de la misma y de gran aplicación a situaciones reales, por lo que despierta fuerte interés por parte de los alumnos y, en consecuencia, al aprendizaje resulta más significativo. Así, debieron tratar los datos, emitir juicios, probar su validez. El poder realizar esta integración dependía de los conocimientos adquiridos durante el cursado y de la posibilidad de desarrollar la propia personalidad en cuanto a la capacidad de resolver situaciones profesionales con madurez y equilibrio, favoreciendo la autoestima.

Enseñanza y aprendizaje de Matemática

Es habitual que se utilice el término "matemática" tanto para referirse a una actividad como al resultado de esa actividad. En este sentido, el investigador matemático ejerce la actividad y el resultado de la misma es un producto matemático y, en consecuencia, una cosa como la otra, son matemática. Sin embargo, desde el punto de vista de la enseñanza y del aprendizaje, hacer la diferenciación entre actividad y resultado es fundamental. El alumno no produce matemática ni se espera de él resultados originales; simplemente se pretende que conozca algo de lo que los matemáticos desarrollaron a través de los siglos. Lo importante, desde el punto de vista de la Didáctica, es tratar de analizar cómo debe llevarse a cabo esta actividad para que efectúe él mismo sus aprendizajes matemáticos, en el seno de una institución universitaria.
El trabajo del docente de matemática supone, por una parte, el conocimiento del objeto del saber matemático correspondiente, y por la otra, tener una hipótesis de aprendizaje que le permita llevar a cabo la enseñanza del saber matemático puesto en juego.
Desde la Psicología, muchos investigadores (Piaget, Skinner, Vigovsky, entre otros) trataron de dar respuesta al "cómo se aprende". Pero hay otras preguntas también importantes: ¿cómo se enseña? ¿Cuáles son los métodos de enseñanza adecuados? O, aún más previamente: ¿Por qué se enseña matemática? Freudenthal (1973) lo justifica *"por la importancia de sus aplicaciones, porque es una disciplina mental de gran interés, como instrumento de entrenamiento para el pensamiento lógico, enseña a resolver problemas, etc..."*
La Didáctica de la Matemática postula que la explicación de un fenómeno didáctico no puede reducirse a factores psicológicos, actitudinales o motivacionales de las partes involucradas, ni a los métodos pedagógicos empleados.
La concepción moderna de la enseñanza establece que "la enseñanza es la devolución o traspaso al alumno de una situación a- didáctica. El aprendizaje es una adaptación a esta situación" (Brousseau).

Para que un concepto matemático se forme, es necesario realizar un estudio en tres direcciones: a) la evolución histórica, b)los trabajos sobre los procesos de construcción de aprendizajes y c) la reflexión matemática sobre las relaciones entre estos conceptos. En el trabajo que se presenta, se hace hincapié en la reflexión matemática que permite relacionar conceptos.
El tema que se presenta pertenece a la materia Matemática Discreta, en la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Tecnológica Nacional y se trata de un problema integrador de la misma y de gran aplicación a situaciones reales, por lo que despierta fuerte interés por parte de los alumnos y, en consecuencia, al aprendizaje resulta más significativo.
En el trabajo que se presenta, los alumnos debieron tratar los datos, emitir juicios, probar su validez. El poder realizar esta integración dependía de los conocimientos adquiridos durante el cursado y de la posibilidad de desarrollar la propia personalidad en cuanto a la capacidad de resolver situaciones profesionales con madurez y equilibrio, favoreciendo la autoestima..

Situación problemática

En una empresa del ramo alimenticio se observa una crisis económica severa. Aún así, el directorio decide seguir adelante reorganizándola. Después de muchos estudios legó a la conclusión de que la causa principal de la crisis es la forma en que se maneja la información que llega desde el exterior de la Empresa.
1.- Se llama a una licitación de expertos en sistemas para que la misma se distribuya en forma eficaz, siguiendo las pautas:

- “Toda información que proviene del exterior es útil al sector que llega”.
- “No todos los sectores necesitan de la información adicional de otros sectores”.
- “Si la información pasa de un sector a otro, ya no puede volver”.
- “Existen sectores que aportan información a un solo sector”.
- “El Directorio debe recibir toda la información que se procese”.
- “La Mesa de Entradas es la única encargada de recibir toda la información del exterior”.
- “A todo sector le es útil la información que procesa”.

a)Detallar en un esquema las condiciones de la organización teniendo en cuenta los sectores involucrados en 1.

2.- En los pliegos de licitación se establece la relación que debe existir entre los sectores de la empresa ya mencionados.

1) La información del equipo técnico de Producción no es valiosa para Recursos Humanos ni para Compras y Ventas.
2) Los gerentes sólo envían información al Directorio.
3) El sector Compras y Ventas sólo envía información al Gerente Administrativo y al Gerente Comercial.
4) El Equipo Técnico de Producción envía información al Gerente de Producción, pero no envía al Gerente Comercial.
5) La Mesa de Entradas recibe información útil para el Equipo de Producción, entre otros, y la envía sin pasar por otro sector.
6) Cada gerente recibe información de dos y sólo de dos sectores del nivel inferior.

a) Realizar un nuevo esquema con las bases del pliego de licitación (2.-).

3.- Se presentan tres equipos a la licitación: I, II, III cada uno de los cuales presenta su propuesta. Así:

I.- Establece que la relación de la información útil respeta el siguiente criterio:
Para x; y; z sectores diferentes de la Empresa:
R ={(x; y) / x es cualquier sector de la Empresa} $\cup$ {(x; y)/(y; x) $\notin$ R $\wedge$ x $\neq$ y}$\cup$ {(x; y)/ $\exists$z[(x; z)$\in$ R $\wedge$ (z; y)$\in$ R]}

II afirma que si se respetan las pautas establecidas, se cumplirá lo siguiente:

- Entre dos sectores cualesquiera siempre se podrá comprobar que la información llegará a uno de ellos o a otro sector de mayor nivel jerárquico.
- Todo sector tendrá su sector complementario de forma tal que la información de ambos conforme al Directorio y haya siso enviada a ellos por la Mesa de entradas.
- Las operaciones establecidas entre los sectores se denominarán *receptor de información* y *administrador de información*.
- Se pueden combinar las operaciones mencionadas, distribuyendo su beneficio.
- Las pautas de la empresa dan por sentado qué sector suministrará la primera información y qué sector recibe toda la información.

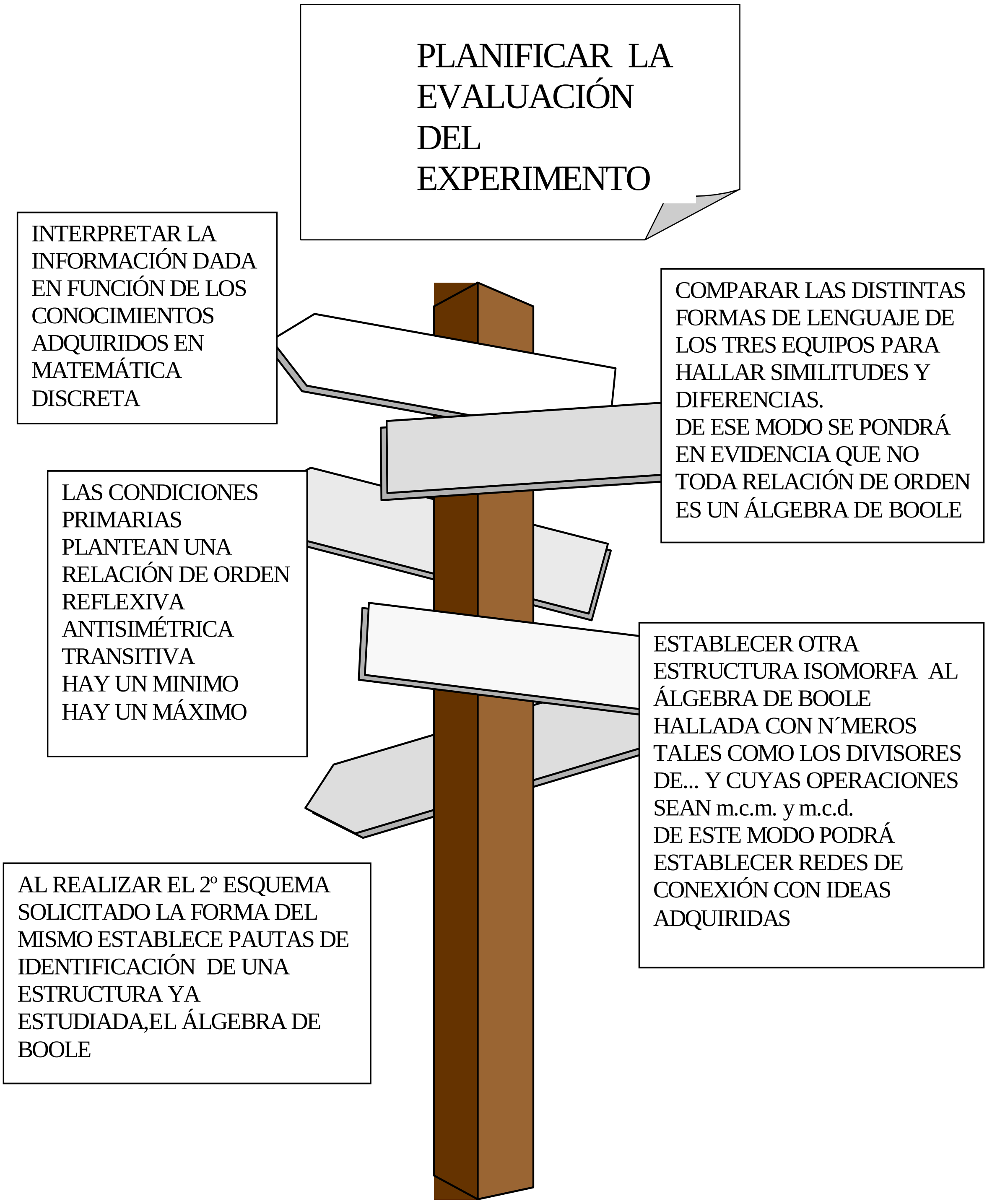
III tuvo grandes conflictos internos y a última hora presenta su propuesta diciendo que si plantean el conjunto de sectores con una relación de orden, cualquiera sea ésta, podrán establecer un diagrama de pasaje de información de poco costo y gran eficacia.

c. Diagrame las tres propuestas. ¿Qué interpretación se le puede dar a cada una?
d. ¿Por qué la Empresa rechaza la propuesta III en primera instancia y duda entre las restantes? ¿Cuál es la mejor y por qué?
e. Agrupe los sectores de forma tal que se sigan respetando las pautas y traduzca al lenguaje empresario las mismas estableciendo los pares que se conectan. ¿Resulta beneficioso para la Empresa?

Resultados obtenidos

Este trabajo fue presentado por la cátedra en el año 2000 al grupo de alumnos que, con sus calificaciones durante el cursado, acreditaba la promoción. Se les había entregado la información sobre la misma el primer día de clases y en la semana siguiente a la finalización de clases, ellos optaban por presentarse a defender su postura sobre el trabajo encomendado.
Entre las situaciones problemáticas planteadas se destacaba la de Álgebras de Boole por la cantidad de preguntas que tenía y por la importancia que debía tener la buena interpretación de las consignas, así como el modo de comunicar la información que se debía elaborar para llegar a la solución.
Sin embargo, un grupo de los alumnos eligió este problema y lo resolvió, individualmente, **con éxito**. Esto fue uno de los factores por lo que lo elegimos como ejemplo para presentar. El otro, fue porque con él se podían observar las competencias desarrolladas durante el aprendizaje de muchos contenidos de la asignatura, lo que hacía de este ejemplo una verdadera integración para demostrar que el aprendizaje era significativo.
Consideramos que tenía sentido esta experiencia si la comentaba uno de esos alumnos, por ello pedimos a quien quisiera participar de la presentación , y así fue cómo el Sr Ghilardi nos acompañó en esta empresa.

Por ello, teníamos que responder a las preguntas que nos llevaban a trabajar con los alumnos buscando que las respuestas fueran las que estaban involucradas para desarrollar ese aprendizaje significativo que tanto esperábamos lograran los alumnos .
Para ello fue determinante la planificación:

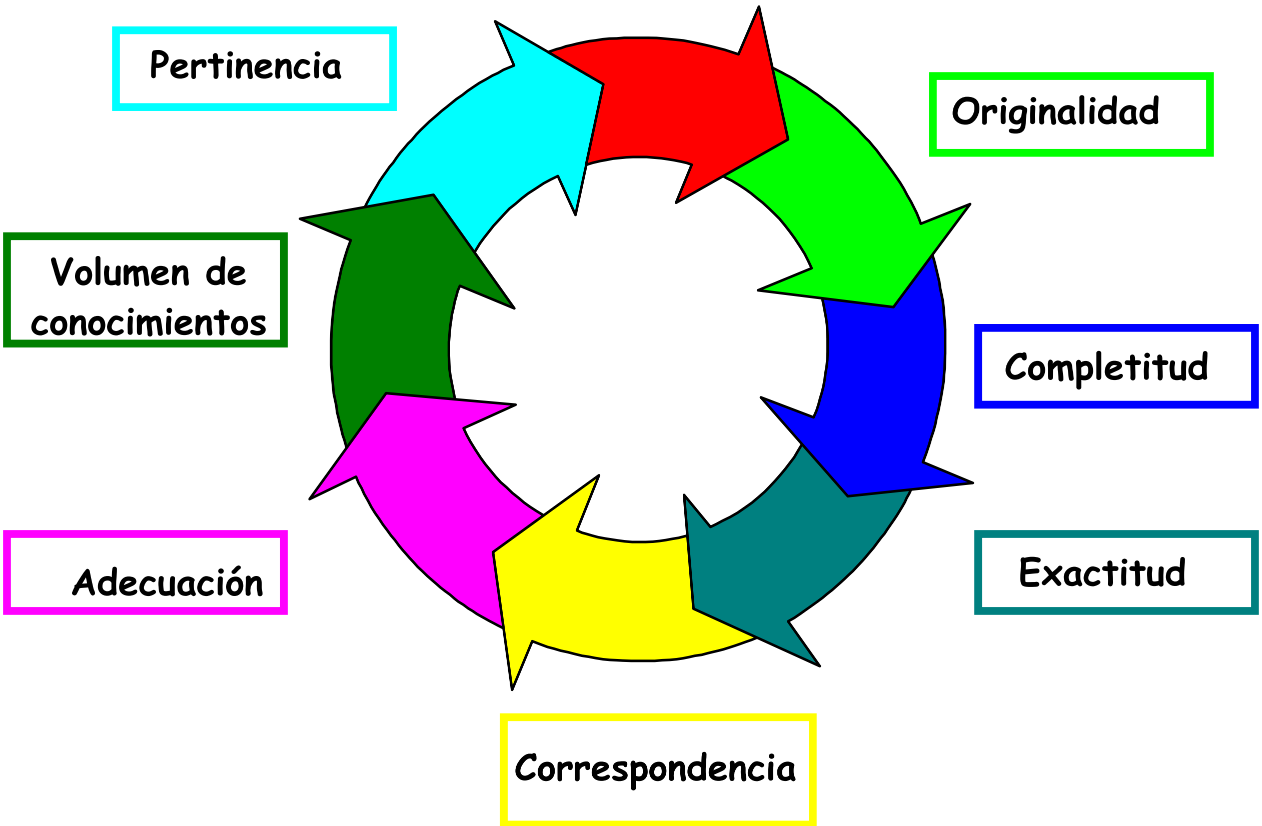


Y también planteamos los criterios de acuerdo a las competencias que queríamos desarrollaran los alumnos

¿qué competencias se ponen en juego?

SER CAPAZ DE:
- Utilizar las ideas adquiridas
- Traducir a otras formas de lenguaje
- Comunicar claramente
- Demostrar seguridad en las ideas matemáticas involucradas

Criterios de evaluación



Esta experiencia nos dio oportunidad de aplicar el sistema en años venideros, cambiando algunas instancias de evaluación , pero con igual intención. La cantidad de alumnos promovidos y regularizados ha aumentado. Este es el objetivo principal.

Referencias bibliográficas

Matemática Discreta y Lógica. W. Grassmann y J. Tremblay. Segunda edición. Ed. Prentice Hall. 1998.

Elementos de Matemática Discreta. C. Liu. Mc: Graw Hill Segunda edición. 1995 . ISBN 0-07-100- 544-7.

Matemática discreta. Kenneth Ross y Charles Wright. Ed. Prentice Hall. Segunda edición.1990 ISBN 0- 13-215427-7.

Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación. Kolman, Busby, Ross. Tercera edición. Ed. Prentice Hall. 1997. ISBN 968- 880- 799- 0.

Matemática Discreta. Richard Johnsonbaugh. Cuarta edición. Ed. Prentice Hall.1999. ISBN: 970-17- 0253- 0.

Graphs and mathematical models; Chartrand, Gary; Wadsworth, Inc.; California; 1977; ISBN 0-534- 98039- 2.

Modelos y realidad. Héctor Hevia. Apuntes de clase. Universidad Adolfo Ibáñez. Valparaíso. Chile. 1999.

Encounter with Mathematics; Garding, Lars; Ed. Springer- Verlag; Nueva York; 1977.

"Fondements et mèthodes de la didactique des mathématiques"; Brousseau, Guy; RDM; Vol7; Nº 2.

La tranposition didactique; Chevallard, Yves, Joshua, Marie Alberte; éditions de la Pensée Sauvage, ed. 1991.

Transposición didáctica; Guzmán, Ismenia; Apuntes de Cátedra. Universidad Católica de Valparaíso; Chile; 1999.

Chevallard, Yves; Bosch, Mariana; Gascón, Joseph; Cuadernos de Educación –22- "Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje" Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Barcelona. Editorial Horsori. 1997. 84- 85840- 50- X.

Relación entre la capacidad intelectual abstracta y el rendimiento académico de los alumnos en una materia del Ciclo Matemático

Marta I Cirilo, Mercedes Verón de Martini, Marta Lía Molina, Marco Bueno Villagarcía
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
mcirilo@herrera.unt.edu.ar mveron@herrera.unt.edu.ar

Resumen
La función prioritaria del Gabinete Psicopedagógico de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán es brindar un asesoramiento a los alumnos con problemas académicos, para lograr su inserción, integración y adaptación a la Facultad. Somos conscientes que el rendimiento del alumno y su permanencia en la Facultad, es un fenómeno complejo donde intervienen diversos factores. Pero también es cierto que un factor importante, por tratarse de situaciones de aprendizaje, es su capacidad intelectual, y que la falta de cierto nivel de la misma lleva indefectiblemente al fracaso del alumno. Dentro de este contexto, nos interesó averiguar, en una primera aproximación, la relación entre la capacidad intelectual abstracta y el rendimiento académico de los alumnos.

Introducción

Ante la preocupante realidad que vivimos en nuestra Facultad por el crecimiento sostenido de la matrícula ocurrida en estos últimos años, las excesivamente bajas relaciones egresados–ingresantes y docente-alumno, el alto porcentaje de deserción, agravado por la significativa cantidad de alumnos con un gran número de aplazos lo que prolonga su permanencia en la Facultad, factores éstos que se traducen en costos improductivos que la universidad tiene que afrontar con un presupuesto fijo y con tendencia a ser disminuido, nos planteamos la necesidad de paliar estos problemas de nuestra tarea docente que afectan la calidad y el control de la enseñanza.
La toma de conciencia de este problema ha hecho que nuestra Facultad haya implementado el funcionamiento del Gabinete Psicopedagógico de la Facultad de Ciencias Económicas (F.C.E.) de la Universidad Nacional de Tucumán, según Res. Nº 121-D-00, de abril de 2000, cuya función prioritaria es brindar un asesoramiento psicológico a los alumnos con problemas académicos, de modo tal que se trate de lograr su inserción, integración y adaptación a la Facultad.
Dentro de este contexto, seguramente son numerosos los factores que inciden en la deserción o el excesivo número de aplazos, entonces, ¿por dónde empezar?. Así surgió una primera idea: averiguar la relación entre la capacidad intelectual abstracta, medida por el test de Dominós (Anstey, E. 1959) y el rendimiento académico de los alumnos de la F.C.E. con la ventaja de ser factible su estudio.
Entendemos por capacidad intelectual abstracta la culminación del proceso intelectual que alcanza su máximo desarrollo entre los 17 y 18 años, ella nos permite desconcretizar la realidad, enfrentar lo mediato y no sólo lo inmediato, hacer frente a lo posible, llevar a cabo procesos de síntesis (generalizaciones) y análisis (deducciones). La mayor parte de los autores sostienen que esa adquisición se debe al desarrollo del lenguaje. La edad de los alumnos y la enseñanza de la Matemática, se ajustan a estos conceptos (Pozo, 1994. 209)
Somos conscientes que el rendimiento del alumno y su permanencia en la Facultad, es un fenómeno complejo por los muchos factores que intervienen. No creemos que sea difícil determinar esos factores, lo difícil es generalizar, dado que la incidencia de cada uno de ellos varía en cada situación particular. Pero también es cierto que un factor importante, por

tratarse de situaciones de aprendizaje, es su capacidad intelectual, y que la falta de cierto nivel de la misma lleva indefectiblemente al fracaso del alumno.
La pretensión de este trabajo es constituir una primera aproximación o, mejor dicho, un primer intento en dar respuesta a interrogantes que normalmente se responden con muy poco sustento verificable.
Esperamos con el tiempo, pulir nuestras herramientas, aplicar controles más rigurosos en el proceso, seguimientos más prolongados con correlaciones con otras materias, etc., y así poder extraer conclusiones válidas que nos lleven de los hechos a las conceptualizaciones sin pretender que la realidad se ajuste a nuestra imaginación.
OBJETIVO GENERAL:

- Relacionar el test de Capacidad Intelectual de Dominós con el rendimiento académico del alumno. El presente trabajo sólo muestra el inicio de un plan más ambicioso.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Comparar las distribuciones de frecuencia porcentual de los puntajes obtenidos en el test por los alumnos de la muestra con la del test estandarizado.
- Analizar los puntajes obtenidos en el test de Dominós (en percentiles), entre los grupos de alumnos que regularizaron, los que promocionaron o quedaron libres en la materia Introducción al Análisis Matemático.
- Establecer la correlación, si existe, entre los resultados obtenidos por los alumnos en el Test de Dominós (en percentiles) con su rendimiento académico, expresado por la evaluación del alumno, en una materia del ciclo matemático de las carreras de Contador Público Nacional, Licenciaturas en Administración de Empresas y en Economía de la F.C.E. de la UNT.

Pensamos en analizar esta correlación ya que suponemos que cuanto mayor sea la capacidad intelectual abstracta del alumno mayor será su rendimiento académico en las materias del ciclo matemático; que se basan fundamentalmente en aprendizajes con enfoques deductivistas.

Factores a considerar en la elección del test de Dominós

Consideramos que este test es el que mejor se ajusta a nuestros objetivos por sus grandes ventajas comparativas en relación con otros tests. Se presta especialmente para el examen de la inteligencia en adolescentes y adultos, y resulta adecuado cuando se desea obtener rápidamente una estimación de la capacidad intelectual abstracta de grupos estudiantiles numerosos con un margen suficiente de confiabilidad.
El Test de Dominós es un test gráfico, no verbal, de administración individual o colectiva, mide la capacidad intelectual general, valora la capacidad de una persona para conceptualizar y aplicar el razonamiento sistemático a nuevos problemas. El ambiente, la educación, el nivel sociocultural o la experiencia del examinado, no inciden en forma notoria en el rendimiento de este Test.
Según la Teoría Factorial de la Inteligencia de Spearman, este test posee una saturación alta del factor general (factor g = 0,82 en 1), lo que significa que la incidencia de otros tipos o factores de inteligencia que no mide el test es bastante pequeña.

Las especificaciones del test indican entre 30 y 45 minutos de duración. Sin embargo, nosotros hemos concedido mayor libertad en el tiempo, por considerar que es un test de capacidad y no tanto de rapidez y que nuestro interés apunta a determinar el máximo de capacidad posible reflejado en el número de ítems bien resueltos. La rapidez de resolución no dejaría de tener importancia si los objetivos fueran diferentes. Además, los ítems están, en general, dispuestos en orden de dificultad creciente (dificultad estadística no absoluta), por lo que, los menos inteligentes no podrán resolver los problemas más difíciles independientemente del tiempo que se tomen para resolverlo. Además, la posibilidad de dar una respuesta correcta por azar es de 1/49. Otra ventaja es que clasificar los protocolos lleva unos dos minutos por protocolo.
Es un test con una confiabilidad alta (0,85 a 0,91 test-.retest), lo que significa que sus medidas poseen gran estabilidad.
Sus resultados se expresan en percentiles (escala que va de 1 a 100) lo que significa por ejemplo que una persona que obtiene un percentil 70 equivale a decir que su rendimiento está por encima de un 70% y por debajo de un 30% comparado con una población similar al examinado. En el futuro será necesario hacer los ajustes para confeccionar un propio baremo que nos permita comparar de acuerdo a nuestra población estudiantil.
Este test tiene una gran trayectoria que ha demostrado su utilidad en gabinetes educacionales, en clínicas psicológicas, en orientación y selección profesional.
Los items del test, están construidos en base a principios tales como simetría, alternancia y progresión simple, asimetría, progresión circular, progresión compleja, combinaciones de principios previos y de relaciones, de completamiento de series numéricas, adiciones y sustracciones, todo ello presentado en forma gráfica no verbal. Es claro que estos principios representan bases sustentadoras para toda actividad matemática.

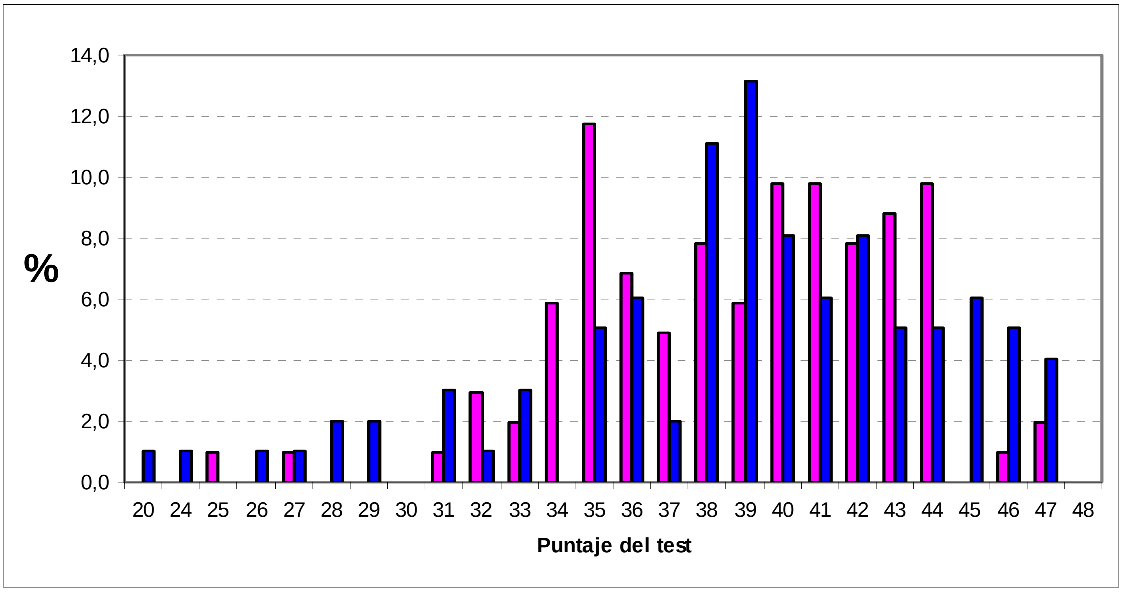
Metodología del trabajo

Dada la avanzada fecha de la implementación del Gabinete Psicopedagógico, estando ya iniciadas las actividades académicas del año 2000, se decidió la aplicación del Test de Dominós, a los alumnos que cursaban la segunda materia del Ciclo Matemático de esta Facultad, dado que la primera materia del mismo (Álgebra), funciona como un selector natural de la matrícula estudiantil, puesto que los alumnos no pueden cursar las otras materias de Primer Año, si ésta no está aprobada. Por lo tanto, los alumnos que cursaban Introducción al Análisis Matemático eran los más adecuados para realizar un primer seguimiento del rendimiento académico.
El tiempo dado fue un mínimo de una hora con la idea de que todos los sujetos tengan la oportunidad de intentar la resolución de todos los problemas, ya que una experiencia similar realizada muestra que no hubo diferencias significativas entre la ejecución a tiempo fijo y a tiempo libre, circunstancia que está considerado comprobar en el presente año.
Se aplicó el test a una muestra aleatoria de 201 individuos de una población de 1173 alumnos, cuya edad va desde 17 a 46 años. El porcentaje de alumnos mayores de 30 años en la muestra que recién inicia su carrera es de 2,5 %.

Análisis de los resultados

La edad de casi todos los individuos de la muestra (un 99 %), corresponden al grupo de adultos, que ubica en ella a sujetos de 18 o más años.

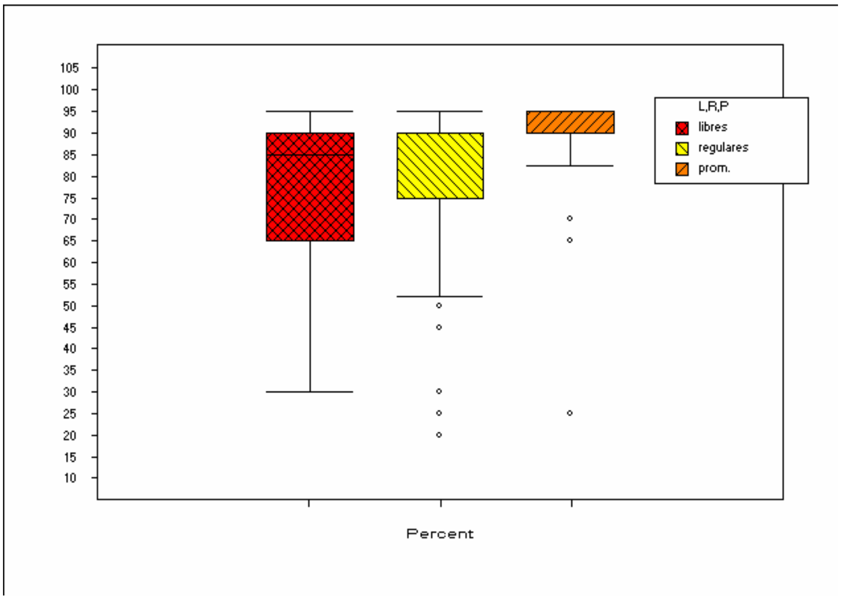
Gráfico Nº 1: DISTRIBUCION PORCENTUAL DE LOS PUNTAJES OBTENIDOS EN EL TEST POR LOS ALUMNOS DE LA MUESTRA SEGÚN SU SEXO.



FUENTE: Gabinete Psicopedagógico Facultad de Ciencias Económicas. U.N.T. Año 2000.
En cuanto al sexo la muestra tenía un 49,3 y 50,7% de varones y mujeres respectivamente sobre el total (201).
La distribución de frecuencia porcentual de los datos obtenidos en el test por los alumnos de la F.C.E. es similar a la del test estandarizado, o sea que tiene asimetría izquierda.
Se probó que no hay diferencias significativas entre las medianas de los puntajes obtenidos en el test entre varones y mujeres (se usó el Test no paramétrico Prueba de Rangos de Kruskal- Wallis, pues se violaba la hipótesis de normalidad).El valor obtenido de la probabilidad es: P = 0.8992.
En el gráfico Nº 2 de Box Plot se observa que:

- Un 50% de los alumnos libres obtuvieron altos puntajes en el test (percentiles entre 85 y 95).
- En el grupo de los regulares se observa que el 50% de los encuestados obtuvo percentiles entre 75 y 90 (valores dentro de la caja).
- Más de un 75% de los alumnos promocionados obtuvo un percentil entre 85 y95.
- Se puede observar del Box Plot para todos los grupos (libres, regulares y promocionados) la falta de simetría en las cajas que muestra la existencia de un sesgo hacia la izquierda (falta de normalidad en los tres grupos).

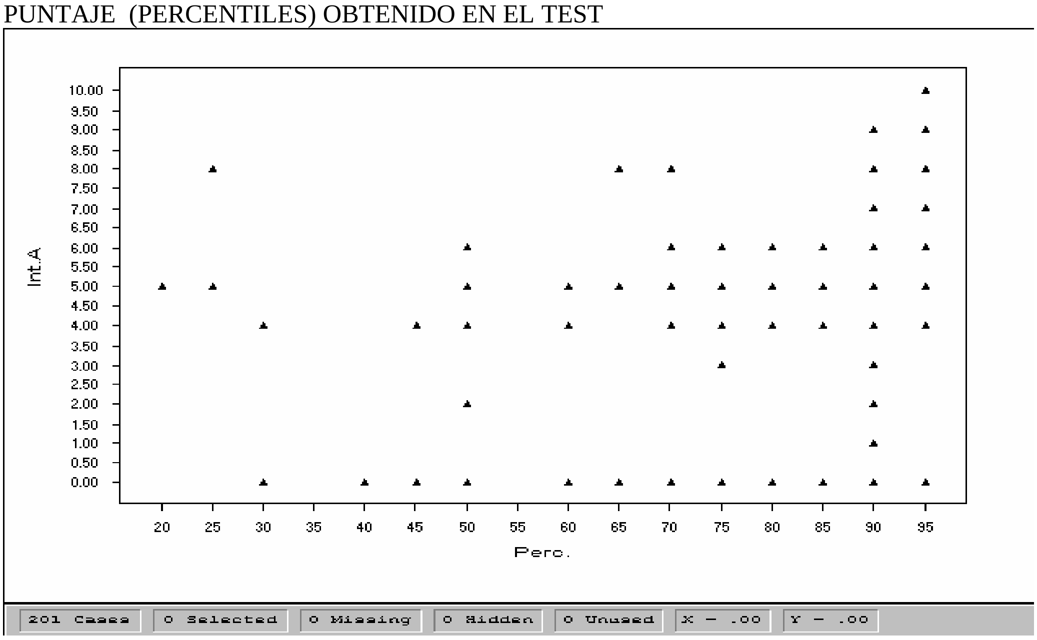
Gráfico Nº 2: BOX PLOT: PUNTAJE OBTENIDO EN EL TEST (PERCENTILES) POR LOS ALUMNOS DE LA MUESTRA SEGÚN SU RENDIMIENTO ACADÉMICO



FUENTE: Gabinete Psicopedagógico Facultad de Ciencias Económicas. U.N.T. Año 2000.

Se puede asegurar que existe una diferencia significativa entre las medianas de los puntajes del test de Dominos (en percentiles) de los diferentes grupos de libres, regulares o promocionados considerados. Se usó el test no paramétrico de Prueba de rangos de Kruskal-Wallis. El valor del estadístico del test de Kruskall-Wallis es = 13,16 y el valor de la probabilidad es de 0,0014.

Gráfico Nº 3: CORRELACIÓN ENTRE EL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE LOS ALUMNOS Y EL PUNTAJE (PERCENTILES) OBTENIDO EN EL TEST



FUENTE: Gabinete Psicopedagógico Facultad de Ciencias Económicas. U.N.T. Año 2000.

Se encontró que la correlación entre el puntaje alcanzado en el test (percentiles) y la nota de la materia, aunque positiva, es baja (r-Pearson =0,17). Pensamos que este hecho se debe a que no se tomaron en cuenta otras variables como ser: el horario de la comisión, si el sujeto trabaja o no, el profesor a cargo del dictado de la clase práctica, etc.

Reflexiones finales

De los análisis realizados podemos concluir lo siguiente:

- El rendimiento del test de Dominós no es significativamente diferente si se considera la clasificación por sexos corroborando un resultado de la estandarización del test.
- El rendimiento del test de Dominós es significativamente diferente según la situación académica de los alumnos en Introducción al Análisis Matemático (libres, regulares y promocionados), observándose que las medianas de los puntajes del test van aumentando de grupo a grupo.
- En cuanto a la correlación entre las notas de Introducción al Análisis y el puntaje obtenido en el test se observa que es baja y la dispersión es bastante irregular. Es decir no se verificó nuestro supuesto inicial que la relación entre el puntaje obtenido en el test y el rendimiento académico del alumno ,en general, es directa. Pensamos que esto se debe a la omisión en el estudio de otras variables que sesgan las relaciones. Este primer ensayo puede ser perfeccionado realizando un análisis más fino y exhaustivo incluyéndose otras variables importantes

En el futuro realizaremos controles más rigurosos, seguimientos más prolongados analizando las correlaciones con otras materias. De este modo se podrán extraer resultados más precisos y completos que nos lleven de la realidad a conceptualizaciones acertadas y científicamente verificadas, condición sine qua non de una investigación seria, firme y responsable.

Referencias bibliográficas

Anstey, E.(1959). *Manual Test de Dominos*, Buenos Aires: Paidós.
Best, J. W. (1983). *Como Investigar en Educación.* Madrid: Morata.
Hopkins, K.D., Hopkins, B.R. y Glass, G.V. (1997). *Estadística básica para las Ciencias Sociales y del comportamiento*. Buenos Aires: Prentice Hall.
Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Editorial.
Polya, G. (1966). *Matemáticas y Razonamiento Plausible*. Madrid: Tecnos.
Pozo, J. I. (1994). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje*. Madrid: Morata.
Walpole, R.E. y Myres, R.H. (1996).*"Probabilidad y Estadística"*.México: McGraw - Hill.

Sobre la experiencia de la enseñanza de la investigación de operaciones

Eloy E. Rico R.
Universidad de Panamá, Departamento de Matemática. Panamá
ricoeloy@hotmail.com

Resumen
Esta conferencia desea mostrar una serie de experiencias docentes en torno a la enseñanza de la Investigación de Operaciones, particularmente en las asignaturas de Programación Lineal y Simulación. Las mismas están desarrolladas en las carreras de Matemática, Ingeniería en Informática e Ingeniería Industrial. En ellas intentamos realizar una serie de reflexiones que nos conduzcan a formular mejores estrategias metodológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje en esta disciplinas.

Introducción

Es conocido que la Investigación de Operaciones (IO) se encuentre formalmente localizada en el mundo científico y profesional como todas las demás disciplinas. Es decir, con su marco teórico y práctico, ella ha planteado y revolucionado el pensamiento científico en sus distintas áreas que la integran y ha ofrecido una gama de soluciones a los distintos problemas de la vida humana.
Por otro lado, la IO tiene sus orígenes como disciplina científica, a raíz de las investigaciones efectuadas durante la Segunda Guerra Mundial, por la Real Fuerza Área Británica y posteriormente los militares de Estados Unidos. En una colaboración estrecha entre grupos de investigadores científicos notables como Blackwell y Dantzig y los militares de esa época, se pudo armonizar la teoría y la práctica de manera que los resultados de esos encuentros, dieran la victoria a los aliados, y al mismo tiempo ve surgir un nuevo pensamiento científico, que se denominará ***Investigación de Operaciones***.
Pero ¿**qué es la Investigación de Operaciones?**. Conocida con los nombres de Investigación Operacional o Ciencia de la Administración, la Investigación de Operaciones se le define como la disciplina científica que hace uso de las técnicas matemáticas en la formulación de modelos para la solución de los problemas reales y complejos, con el fin de ofrecer alternativas para una adecuada toma de decisiones. La IO involucra un proceso de toma de decisiones, que es controlado por criterios previamente establecidos.
En términos muy generales, podemos afirmar que la metodología de trabajo de la Investigación de Operaciones, considera los siguientes pasos o etapas:

- Definición del **problema** de interés y recolección de los datos relevantes.
- Formulación de un **modelo matemático** que represente el problema.
- **Solución** del modelo matemático.
- Prueba del modelo (etapa de **validación**).
- Puesta en práctica de la solución (etapa de **toma de decisión**).

Como hemos indicado, la Investigación de Operaciones hace uso de **modelos matemáticos,** para lo cual desde su punto de vista, un modelo se define como ***"una representación abstracta de los fenómenos reales y complejos que interactúan en el problema y que son abordados por medio de relaciones matemáticas."***

Reflexiones sobre la enseñanza

Es precisamente a partir de este concepto donde empieza la enseñanza de los principales cursos de IO, como es la Programación Lineal (PL) y la Simulación (S). En las carreras de Matemática, Informática y de Ingeniería Industrial, en términos generales, sus planes de estudios abarcan durante el tercero o el cuarto año académico, al menos un curso de IO. Este curso puede durar un semestre o un cuatrimestre.
A través de esta investigación, observo que existen bastantes similitudes en lo que respecta a los contenidos conceptuales de los cursos de Programación Lineal, en las tres carreras mencionadas. En general, estos cursos contienen los siguientes conceptos: modelos de la dieta y transporte, método gráfico, algoritmo simplex y su forma tabular, método de las dos fases, nociones de dualidad y análisis de sensibilidad. Sin embargo, sus diferencias más sobresalientes están entre las siguientes:

- Algunas universidades denominan al curso de Programación Lineal como Investigación de Operaciones I.
- El número de horas semanales de clases varía de 3 a 5.
- La estructura académica comprende semestres de 16 semanas de clases en unos y cuatrimestres de 14 semanas en otros.
- En los programas académicos, no se especifica con claridad o no se incluye, el uso de paquetes computacionales para el curso.
- Los docentes que dictan los cursos son en muchos casos ingenieros industriales, ingenieros de sistemas, matemáticos o economistas. Algunos de estos han llevado solamente cursos a nivel de postgrado en Investigación de Operaciones en su preparación profesional. Muy pocos poseen maestrías y doctorados en la especialidad.

Estas diferencias y algunas otras más que podríamos seguir señalando, nos han llevado a cuestionar acerca de la calidad en la enseñanza de la Programación Lineal. Antes de continuar, queremos mencionar que hay colegas que muy acertadamente a la par de la enseñanza de los conceptos teóricos, introducen el uso de paquetes computacionales de optimización para desarrollar aplicaciones más amplias y dinamizar la materia. Programas como el LINDO, GAMS, GINO, TORA, EXECL y otros más, gozan de popularidad en estos cursos.
Son varias preguntas que me han surgido durante este planteamiento y que representan la razón de esta comunicación, a saber: ¿Cuál deberá ser el rigor matemático necesario, o bien mínimo, que tiene que contemplar o exigir todo docente para una excelente enseñanza de un curso de Programación Lineal?. ¿Influye la esta determinación del rigor en el tipo de estudiantes que toman el curso, o el tipo de carrera que se ofrece, o el docente que la imparte?. Dentro de este cuestionamiento podríamos también preguntarnos ¿el texto o los textos escogidos dentro de la bibliografía tendrán algo ver en este rigor?
En lo que respecta a los textos usados para la enseñanza de la Programación Lineal, existe una amplia variedad en lo que es el enfoque y su orientación: hay textos que no contienen absolutamente ningún tratamiento matemático en la presentación de los conceptos como el

Algoritmo Simplex o la Teoría de la Dualidad. Tal es el caso del libro“Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa”, de Eppen, Gould y otros.
Sin embargo, están los otros, que son realmente pocos, los cuales introducen los conceptos teóricos dentro de un marco matemático, incluyendo hasta los problemas propuestos, como son: “Programación Lineal y Flujos de Redes” de Bazaraa, Jarvis y Sherali; “Investigación de Operaciones, aplicaciones y algoritmos” de Winston.
Finalmente, están todos aquellos textos que se encuentran dentro del intervalo de estas dos alternativas señaladas. Allí podemos mencionar el de “Investigación de Operaciones, una introducción” de Taha; “Investigación de Operaciones, el arte de la toma de decisiones” de Mathur y Solow; “Introducción a la Investigación de Operaciones” de Hiller y Lieberman.
Estimo que el criterio de escogencia del texto debe considerar una correcta presentación de la teoría, que combine al mismo tiempo, o en lo posible, suficientes problemas prácticos.
Otro aspecto que hemos observado, pero que no lo analizaremos en esta presentación, es el siguiente. Aquellas universidades en donde ofrecen las carreras de Administración de Empresas o de Finanzas, sus estudiantes reciben también ciertos cursos de Programación Lineal, que denominan Técnicas Cuantitativas o Métodos Cuantitativos. Su contenido programático se centra en la presentación superficialmente o muy ligera de las fórmulas y problemas ya resueltos. Al no enfatizar la parte matemática, pensamos que se perdería una oportunidad con estas carreras de aplicar los conceptos teóricos, puesto que ellas ofrecen variadas situaciones reales para realizar las prácticas.
Cuando se tiene la ocasión de enseñar un curso de Programación Lineal a estudiantes de Matemática, siempre es posible hallar un ambiente académico propicio de acogida de esta materia. Tal podría ser el caso de la presentación del análisis convexo a través de la región de factibilidad y sus puntos extremos. Para el docente con una buena base matemática, esto permitiría presentar en el aula, variados problemas de conjuntos y funciones convexas.
De esta forma, si consideramos por ejemplo el capítulo dos del libro de Bazaraa, Jarvis y Sherali sobre convexidad, los estudiantes de matemática apoyados en sus cursos de Álgebra Lineal y Análisis, se motivarán a resolver los problemas propuestos al final del texto. Su formación les sería de gran ayuda. Sin embargo, si se desea lograr esto mismo con los estudiantes de Informática o de Ingeniería Industrial, nos veríamos en serias dificultades académicas, a pesar que ambos grupos llevan cursos previos de Álgebra Lineal. Por tal razón, recomiendo no introducir, en este caso, los conceptos de convexidad en estas carreras, corriendo el riesgo de que estos estudiantes ignoren el origen matemático de la Programación Lineal. Tal vez una recomendación sería dejarlo como investigación al final del curso o a mediados del mismo.
Estas ideas nos lleva a recordar el acertado comentario siguiente: **“Un curso de Programación Lineal puede ser dado en varios niveles, clasificados estos desde un libro de recetas de cocina, el cual incluye pocos conocimientos de la teoría, hasta los altamente teóricos, que comprenden pocos aspectos prácticos”** L. W. Swanson “Linear Programming, basic theory and applications”. Muy a su manera, Swanson sostiene que su libro no intentará seguir ninguno de estos extremos, pero sí incluirá las mejores características de cada uno.

Compartiendo su opinión, sostengo que una adecuada enseñanza de la Programación Lineal debe tener la cualidad pedagógica de balancear la enseñanza de lo teórico como lo práctico. Balance este que una vez haya sido descubierto, los resultados que se obtengan en lo que ha enseñanza se refieren, serán de la mejor calidad. Sin lugar a dudas, no debe olvidarse acompañar a estas clases con el uso de algún paquete computacional para la solución de los problemas de mayor dimensión.

Características entre grupos

Los resultados académicos que se logran con la enseñanza de la Programación Lineal con estudiantes de Matemática en comparación con los estudiantes de las carreras de Informática e Industrial podríamos pensar que son diferentes. Sin importar a que alumnos se les enseñe, la mayor dificultad que ellos afrontan es en la etapa de diseñar los modelos lineales. Por un lado, los estudiantes de matemática les dificulta interpretar los vocablos como: utilidades, beneficios, unidades producidas por unidad de tiempo, recursos disponibles, etc.

En este sentido, los otros estudiantes asimilan sin dificultad estos últimos conceptos. Pero, ocurre exactamente todo lo inverso con los siguientes conceptos: al menos, a lo sumo, por lo menos, restricción, función y ecuación, etc.

Pienso que el fondo de esta situación, proviene de la formación académica de ambos grupos. Por otro lado, los estudios de Matemática tienen una orientación muy distinta a la los ingenieros, estos últimos los orientan a desarrollar y aplicar los conceptos dados en clases en los lugares de trabajo y por consecuencia, se ven obligados a tomar decisiones sobre recursos limitados en situaciones concretas.

Los egresados de Matemática, al menos en nuestra región latinoamericana, **nos dedicamos** en la gran mayoría de los casos a la docencia y algunos pocos a la investigación; otros tal vez se desempeñarán en el campo empresarial, industrial o administrativo. No adquirimos el hábito de asumir responsabilidades administrativas al momento de graduarnos ni mucho menos tenemos la destreza de cómo aplicar los conceptos adquiridos una vez graduados. De allí es posible que surge la pregunta que nos hacen a diarios nuestros estudiantes, **¿para que nos sirve en la "vida" lo que nos enseñan?**

Como apuntamos anteriormente, la Investigación de Operaciones tiene la finalidad de que una vez se obtengan los resultados por medio de sus diferentes técnicas, se debe decidir el curso de acción para que sean llevados estos a la realidad del problema. Reconocemos que esta es una etapa bastante difícil en esta teoría, y sabemos que no se podrá lograr en un período académico.

Muchas veces el asesoramiento de los trabajos de graduación son muy buenas oportunidades para llegar a esta etapa. Pero como los estudiantes siempre tienen la necesidad de titularse lo más pronto posible, estos trabajos son escasos. Los que logran asumir el reto de efectuar su tesis en el área, afronta después el inconveniente de recabar los datos que se requieren para aplicar la teoría.

Por otro lado, intuyo que independientemente que se estudie Matemática, Ingeniería en Informática o Ingeniería Industrial, son muy pocos los cursos de Programación Lineal que llegan a cubrir las etapas completas y es precisamente esto en donde flaquea la calidad en la enseñanza de esta asignatura. No debemos ver la IO como el menú de recetas como bien lo señala Swanson. De procurarse enseñarla como una técnica propicia para forjar la toma de decisiones, sea cual sea los carrera que se enseñe.

No esperar que los estudiantes nos pregunten, cómo se aplicarán los resultados en la realidad, qué se necesita para formular un modelo matemático particular, o bien, cómo se toman las decisiones para desarrollar o ejecutar la solución al problema. A propósito de ello, H. M. Wagner, observaba que cuando sus estudiantes tomaban sus cursos le preguntaban, “¿qué debo aprender sobre Investigación de Operaciones si quiero aplicar esto a problemas reales?”. Con esta pregunta, nuevamente surge la polémica entre el papel que desempeña la teoría versus lo que le toca a la práctica, como lo hemos indicado anteriormente.

Sobre simulación

Hasta aquí dejamos el análisis sobre la Programación Lineal y comentaremos sobre Simulación. Quizás esta asignatura genere menos comentarios, puesto que a excepción de las carreras ya mencionadas, muy pocas o ninguna otra tienen cursos de Simulación como asignatura en sus planes de estudios; posiblemente puede aparecer como materia optativa o electiva.
Una diferencia notable en la enseñanza de la Simulación, con respecto a su contraparte, es que la primera ofrece una buena oportunidad para desarrollarla más rápidamente en forma práctica, y el esfuerzo en lo teórico es menos costoso. No significa que se deje de enseñar teoría en estos cursos, en comparación con los otros; resulta que aquí la presentación teórica va inmediatamente ligada a la práctica. Esta es una característica muy atractiva para los estudiantes.

Recomendaciones para su enseñanza

Actualmente, la Simulación goza de una amplia aceptación en todos los niveles profesionales y académicos, como la técnica poderosa en el análisis de lo sistemas complejos y la reducción de costos de las operaciones. Ello tiene que ver, muy posible, por el auge de la computación y el avance de la tecnología. Las máquinas cada vez son más versátiles y los lenguajes hombre-máquina más amigables. Así esta disciplina ha encontrado terreno fértil para su difusión.
Algo que no se pudo indicar en el análisis de la Programación Lineal y es propicia la ocasión señalarlo ahora también para la Simulación, es el uso de la Internet como instrumento de enseñanza. Esta novedosa e increíble herramienta de nuestros tiempos puede jugar un papel preponderante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y estas asignaturas no son la excepción.
En ambas se puede acceder a diferentes “sitios”, los cuales ofrecen además de actualizada bibliografía, ofertas académicas de programas computacionales. Tal es el caso del *LINDO.COM* el cual permite “bajar” uno de sus programas gratis, el famoso LINDO, para resolver programas lineales se dimensión relativamente pequeña. Para el caso de la Simulación se tiene el sitio *MINUTEMAN.COM*, que nos permite obtener una muestra del software GPSS, para simulación de sistemas discretos. Ambos se encuentran en ambientes Windows.
Estos dos programas brindan tanto al profesor como al alumno la oportunidad de interactuar e interrelacionarse con la materia. No debe olvidarse que cualquier curso de Simulación, tiene que tener un programa de computadora recomendado, para ser usado en cualquier momento del curso. Esto es con el fin de poner en práctica los conceptos teóricos presentados y acelerar otros.

Todo curso de Simulación debe contener por lo menos, los siguientes conceptos:

- Repaso de la Teoría de la Probabilidad.
- Generadores de números aleatorios uniformes
- Generación de variables aleatorias y de las distribuciones de probabilidad clásicas.

De aquí en adelante, el docente puede escoger el tipo de sistema en donde va ha realizar la simulación, ya sean Discretos o Continuos.

La experiencia nos indica que enseñar los cursos de Simulación para matemáticos, informáticos o bien, industriales, tiene tanto o mejor acogida por los estudiantes, que en lugar de la Programación Lineal.

Razones de ello podrían ser:

- El contenido del curso de Simulación es menos extenso que el de Programación Lineal.
- El curso de Simulación facilita el uso de lenguajes de programas de computadora.
- Se aplica a la solución de problemas y situaciones reales, como es el caso de los sistemas de colas de espera.

Conclusiones

- Hacer una llamado a los colegas en torno a la metodología utilizada en los cursos de Programación Lineal y de Simulación y la responsabilidad que se tiene en cuanto a su adecuada enseñanza.
- Producto de mis experiencias como docente en la especialidad nos hemos percatado que no se hace un mayor uso del software en cada caso.
- La comunidad académica en general no percibe aún, el valor que tiene para el campo laboral, el aprendizaje de estos cursos.
- El docente que imparte los cursos de Programación Lineal y Simulación debe velar que los textos recomendados conserven el rigor matemático propio de cada caso.
- El desarrollo de cada curso no debe ser ofrecido a los estudiantes únicamente como un recetario de fórmulas, sino más bien un curso más creativo y dinámico.

Referencias bibliográficas

Bazaraa, Mokhtar ; Jarvis, John J; Sherali, Hanif D. (1990). *Linear Programming and Network Flows*. USA: John Wiley and Sons.

Eppen, G.D. y otros. (2000). *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*. México: Prentice-Hall.

Mathur, Kamlesh; Solow, Daniel (1997). *Investigación de Operaciones, el arte de la toma de decisiones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sheldom, Ross. (1997). *Simulation*. USA: Academic Press.

Taha, Hamdy (1998). *Investigación de Operaciones, una introducción*. USA: Prentice-Hall.

Winston, Wayne L. (1994). *Investigación de Operaciones, aplicaciones y algoritmos*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

La enseñanza de la matemática basada en las técnicas del aprendizaje significativo y grupos colaborativos

María González Cerezo
Dpto. de Ciencias. Instituto Tecnológico de Monterrey, Campus Cuernavaca. México
mgonzale@campus.mor.itesm.mx

Resumen
Este trabajo describe el uso de técnicas que no habían sido frecuentemente usadas en la enseñanza de las matemáticas.
En él se narra la experiencia de la autora , de cómo los cursos básicos de Matemáticas que imparte en las carreras de Ingeniería del Tecnológico de Monterrey, en el Campus Cuernavaca, han sido diseñados para desarrollarlos de manera constante en grupos de trabajo y de acuerdo a los principios del aprendizaje significativo.
Basada en esos principios, la actividad se centra en el salón de clase, organizado en pequeños grupos de a lo más cinco personas. Las actividades complementarias se realizan fuera de la clase , preferentemente con la ayuda de software especializado. Sea con la ayuda de una computadora, con páginas diseñadas ad hoc o con problemas que al inicio de la clase (como una motivación) , o al final de la clase como una manera de dar significado al aprendizaje, los alumnos construyen su aprendizaje a partir de sus experiencias personales hasta llegar a la conceptualización.
La responsabilidad de el proceso de enseñanza aprendizaje se centra en el individuo en primer término y en su grupo informal de trabajo.
Esta forma de realizar las actividades implica una modificación de las formas de evaluación, se da importancia significativa a la autoevaluación y a la coevaluación , adicional a la evaluación del docente. Adicionalmente se muestran algunos resultados de un curso estructurado en grupos de trabajo colaborativo y un ejemplo de una actividad colaborativa.

Introducción

A partir de la convicción de que en el siglo que se está iniciando el desarrollo de la tecnologías se dará a pasos agigantados se puede afirmar que en consecuencia la enseñanza de la matemática es y seguirá siendo crucial en el desarrollo integral del individuo. Bajo esta premisa es necesaria la búsqueda constante de métodos idóneos para su aprendizaje.
De la experiencia se observa que la importancia de enseñar bien la matemática, el desarrollo y uso de la tecnología y la preocupación por hacerlas comprensible a los alumnos sin importar su preferencia u orientación profesional, ha permitido que la investigación en la Enseñanza de la Matemática haya cobrado un auge notable en las últimas décadas.
Por fortuna esta preocupación es internacional, y se observa en los trabajos presentados en los foros de Matemáticas por educadores de diferentes países. Es satisfactorio encontrar que cada vez es mayor el grupo de personas que de manera sistemática, formal o informal buscan nuevos caminos como este foro para socializar el conocimiento y en consecuencia, la investigación educativa, y una ciencia como la Matemática no podía ser la excepción.

Bases metodológicas

Antecedentes

Existen numerosos estudios y teorías sobre como desarrollar en el individuo ideas matemáticas que finalmente devengan en el conocimiento, en particular yo considero de vital importancia también el proceso para alcanzarlo.

Desde las teorías que se basan en procesos donde el individuo en forma aislada propone, desarrolla , modifica y revisa sus propias ideas para después ponerlas a prueba con la aceptación o el rechazo comunitario (método usado generalmente por los investigadores); pasando por la teoría Gaussiana de transitar en uno y otro sentido entre la aplicación y la conceptualización, hasta llegar a las teorías que parten de un uso adecuado de la tecnología y que permiten una construcción paso a paso del conocimiento matemático y la conceptualización Esto último, mediante la visualización de las transformaciones de una gráfica o el desarrollo de un problema en la pantalla de una computadora. Es posible, por ende, darse cuenta que existe toda una gama de posibilidades en la metodología a seguir para la enseñanza de las matemáticas.
En este reporte se señala el uso de los elementos básicos del aprendizaje significativo y la implementación de las técnicas del trabajo de grupos colaborativos. En este contexto, tras una búsqueda de las aportaciones pedagógicas de algunos autores se incursiona en las bases del conocimiento matemático de los alumnos, para fortalecerlas u orientarlas.
De la práctica de muchos años se concluye que una concepción empírica puede estar muy lejos de la verdad, o que un concepto matemático pudo haber sido fundamentado erróneamente (sobre todo si se toma en cuenta que en los niveles medio y medio superior es igualmente heterogéneo el grado de conocimiento de las matemáticas o de fundamentos epistemológicos de la misma) , sin embargo esa es la realidad de toda institución educativa en la cual se imparten cursos de Matemáticas y es un hecho de que muchas veces es mejor partir de una base que puede ser reforzada, que partir de la nada.
Por si esta argumentación fuese insuficiente, se ha observado una mayor adaptación de los alumnos a usar nuevas técnicas metodológicas de los que poseen conocimientos más o menos formales de las Matemáticas y a partir de una nueva perspectiva, construir paso a paso los conceptos de la matemática que requieren en los cursos de física e ingeniería, que aquellos que las desconocen y por tanto infieren grandes dificultades en su aprendizaje.
Por las razones expuestas, y por una necesidad de transformar la forma de trabajo de los alumnos, se ha elegido como objetivo adicional a la enseñanza de la matemática, el enseñar a pensar y como técnica predominante, el trabajo colaborativo.
El hombre es por naturaleza un ser social, que según Savater cobra importancia como tal cuando interacciona con otros seres humanos, cuando existe una interacción con los demás. La vida cotidiana está constituida con encuentros y desencuentros con otras personas bajo reglas que la sociedad impone y que pueden ser relativas al lugar y al momento, sin embargo, de todas estas reglas dos que parecieran imprescindibles para una buena convivencia que facilite el aprendizaje en el salón de clase bajo la técnica elegida: el respeto y la tolerancia por la diversidad.
Se observa y se capitaliza que al socializar en un medio afectuoso las situaciones de conflicto, se propicia el conocimiento
Desarrollo.
En el plano profesional , tras revisar los contenidos de algunos cursos que el Sistema Tecnológico de Monterrey ofrece, se decidió seguir los métodos constructivistas para lograr el aprendizaje significativo con las técnicas del aprendizaje colaborativo y la resolución de problemas.
La idea se generó de la observación de los resultados obtenidos con alumnos rezagados que se acercaban al Departamento de Matemáticas por asesorías adicionales. Cuando otras actividades impedían a los docentes atenderlos se organizó un grupo de becarios que , como parte de sus actividades de servicio tenían la obligación de asesorar a los solicitantes.

Fue bueno descubrir que algunos temas analizados en clase por tal o cual maestro y que no habían sido comprendidos perdían en gran parte la dificultad de comprensión al ser explicados por los becarios con palabras propias. Entonces se decidió hacer cambios, incipientes al principio y con mayor determinación a partir del 98. Si bien los cambios han sido llevados a cabo en todos los cursos de la autora, se reconocen cambios más drásticos en los cursos de Cálculo Diferencial y de Ecuaciones Diferenciales.
A pesar de un inicio tortuoso, se inició la experiencia con cambios de forma en el programa: Diferente orden en los contenidos del programa, la introducción de un análisis sobre el perfil de estudio de los alumnos para después adicionar al curso actividades que permitieran el desarrollo de unos y otros alumnos en sus fortalezas y debilidades.
Una vez que se decidió realizar toda actividad en grupos colaborativos , se utilizaron los perfiles de los alumnos para fortalecerlos. Sin embargo, la introducción de una cultura de trabajo distinta no se da sin dolor. Se observó que no faltaban los oportunistas que aprovechaban la holgura social, ya del estudioso del equipo o del grupo en general, y que los problemas elegidos no siempre resultaban apegados a la realidad. Por otro lado, hubo necesidad de inducir esta forma de trabajo con dinámicas apropiadas, de crear reglas y códigos del trabajo colaborativo en concordancia con los objetivos.
Al pasar de las formas al fondo se fijó como uno de los objetivos fundamentales enseñarlos a pensar.
Los pasos a seguir sugeridos por Polya y Natanson en sus libros respectivos y las propuestas de algunos autores que sugieren caminos para enseñar a pensar habían sido utilizados durante mucho tiempo en temas específicos como aplicaciones de la derivada . Partiendo de estos principios fueron elaboradas "hojas de trabajo" para cada clase, que parten del conocimiento empírico, de la experiencia cotidiana , ese "algo " que alguna vez todos escucharon o que utilizan en otras asignaturas.
Dada una situación de conflicto, acompañada de preguntas (en general abiertas) los alumnos discuten y analizan el problema y , cuando llegan a una posible respuesta colectiva, la dan conocer a l resto del grupo.
Es importante señalar que la discusión, la observación , el análisis y la síntesis , deben darse bajo un espíritu de apertura a escuchar y dar argumentos, para convencer con los mejores; a comunicar sus ideas y finalmente, a concretar sus resultados.
Como consecuencia de la introducción de elementos que no necesariamente caracterizan a los cursos de ciencias, fue necesario cambiar la manera de evaluar el grado de avance en el aprendizaje. Al principio, en los grupos que se iniciaron bajo este modelo, los alumnos consideraban que los cuestionarios, contenían problemas "triviales", sin embargo, éstos se elaboran con la lectura de puntos de vista de otros autores cuyos planteamientos resultan complementarios a la idea concebida originalmente. En este sentido, en las primeras semanas los problemas y cuestionarios que se plantean y desarrollan contienen una presentación más sencilla que los problemas resueltos en la preparatoria y, dado que las respuestas pueden encontrarse de manera lógica y simple, parecen triviales, sin embargo , ellos mismos perciben que al tratar de argumentar por escrito sus conclusiones es necesario pensar más en el porqué de las respuestas.
Ahora bien, entre las reglas del juego que se han aprobado por alumnos y profesores, la calificación obtenida es compartida por igual por todos los miembros del grupo colaborativo de tal suerte que es posible que algún alumno quiera trabajar solo y no compartir la responsabilidad con los miembros del equipo, alumnos que se sienten

limitados al desarrollar el trabajo colaborativamente, y a quienes no resulta tarea fácil convencerlos de la necesidad de trabajar en grupos.
Adicionalmente, se introduce un examen colaborativo con las mismas reglas de evaluación, mismo que representa un porcentaje por ahora bajo en relación a su calificación obtenida en los exámenes individuales, esto como medida para evitar que los alumnos que no han logrado alcanzar el conocimiento aprueben la materia solamente con base en el conocimiento de sus compañeros de grupo de trabajo.
Cabe mencionar que en los exámenes colaborativos se analizan , de manera general, problemas que no fueron analizados en clase pero en los cuales se introducen varios temas relevantes cuya conceptualización ha sido llevada a cabo con anterioridad.
Además de lo expuesto , se han desarrollado para el curso una serie de instrumentos de autoevaluación (que contrasta su grado de avance en cuanto a conocimientos) y de coevaluación en el cuál una persona evalúa a los miembros de su equipo, pero no a si mismo .
Al finalizar los módulos o temas , después de la presentación de los grupos de trabajo, se cruzan los resultados de los instrumentos de evaluación sumativa con los de evaluación formativa. En las gráficas que se presentan, de un curso que elegido como ejemplo, los resultados saltan a la vista.
A pesar del escepticismo o sobrevaloración de los alumnos sobre sus conocimientos de matemáticas al iniciar el curso, terminan convencidos de que existe un grado mayor de dificultad en el, cuando se tienen que descubrir los conceptos (que se encuentran plasmados en numerosos libros de Matemáticas) y que no basta con resolver una serie de ejercicios en forma mecánica para aprender la materia; que resulta hasta divertido lograr su sueño de contestar el examen de equipo en compañía y, finalmente , que es mucho más agradable estar en una clase en la cual pueden indagar, interrogar al vecino, emitir juicios, hacer preguntas, sacar conclusiones, transitar por el salón, sin que nadie se moleste por ello y, lo que puede resultar más importante, recibir una retroalimentación inmediata, (no necesariamente de su profesor) , justo en el momento en que surgen sus dudas y darse cuenta , demostrar a si mismos y a los demás que pueden resolver problemas de otras asignaturas con relativa facilidad y constatar la importancia y relación de los temas estudiados en la clase.
Resulta hasta conmovedora la preocupación genuina de aquellos a los cuales les da resultado el sistema de trabajo, tratando de explicar la clase a los que llevan un ritmo más lento y observar de que manera se estrechan las relaciones en el primer entorno señalado por Vigotsky. Así mismo , la preocupación real de hacer la presentación de sus avances de tal manera que hasta los menos informados puedan adquirir o reafirmar los conocimientos.

Ejemplo de una actividad colaborativa simplificada

Se forman grupos de trabajo de tres personas y se asignan responsabilidades.
Se entrega la información de un problema o ejercicio.
Se determina el tiempo de trabajo.
Cada grupo informa de sus resultados.
Problema:

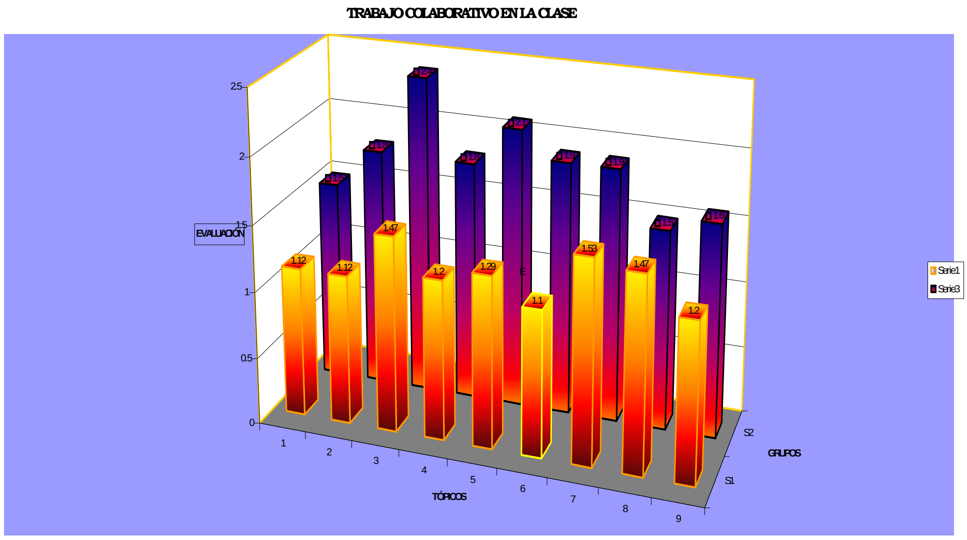
Determinar, previo un análisis matemático completo, la gráfica de la función cuya regla de correspondencia es $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{(x+2)(x-3)}}$.

Alumno A. Determine el dominio y contradominio de la función.
Alumno B. Determine, por límites, las asíntotas verticales y horizontales de la función.
Alumno C. Determine la derivada de la función e indique en que puntos alcanza valores extremos, así como los intervalos de crecimiento de la gráfica.
Todos. Reunir la información y concluir la gráfica de la función. Indicar , mediante una ponderación adecuada , el grado de participación de los integrantes del equipo, el respeto por los tiempos y la integración al grupo de trabajo. Indicar qué tanto se identificaron con el grupo de trabajo.

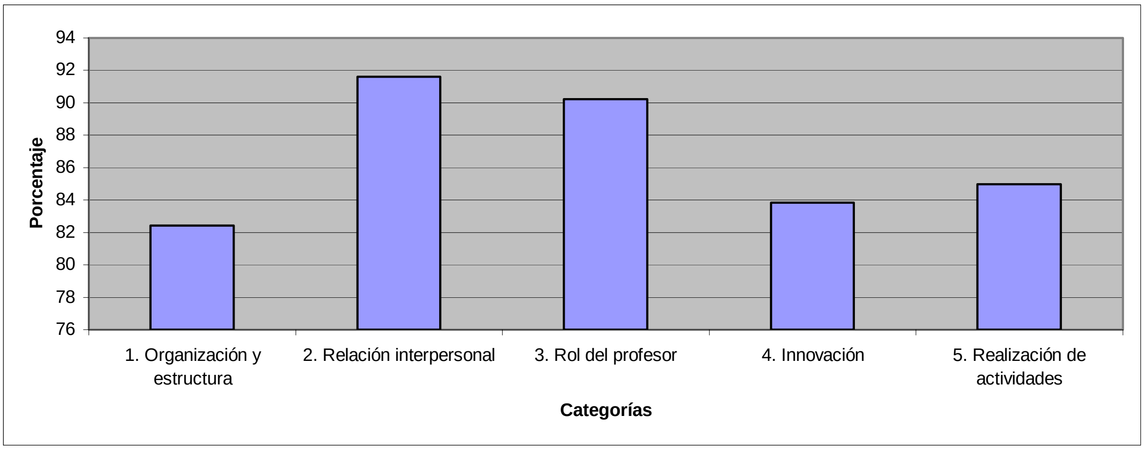
Algunos resultados de un curso rediseñado con la técnica de aprendizaje colaborativo

En las gráficas 1 y 2 se muestran algunos resultados de la investigación realizada con un grupo al que se le ha dado seguimiento por más de un semestre. Algo que puede resaltarse es que cuando fueron enterados de que se estaba realizando un estudio de sus resultados se notó en ellos un mayor compromiso y tomaron una actitud abierta ante la observación de profesores ajenos al curso y a la matemática.
En cuanto a los resultados cuantitativos, se puede destacar que aún cuando siempre existe la posibilidad de cometer errores por parte del profesor, que los alumnos se cambien de grupo o den de baja la materia , se han mantenido como fieles seguidores del método, y aún cuando hubo alumnos que no aprobaron el curso , como puede apreciarse de los resultados, el equipo que falló fue aquel en que la cohesión y el entendimiento entre los miembros del grupo colaborativo no se dio con la misma fuerza que en los demás.

Gráfica 1.Resultados de la encuesta sobre aprendizaje colaborativo



Gráfica 2
Resultados de la opinión de los alumnos en relación al trabajo colaborativo.



Referencias bibliográficas

Cuadernos editados dentro del sistema ITESM. Monterrey, Nvo. León, México.1976-2001:

Innovación Educativa en el sistema ITESM**.**

Aprendizaje Significativo

Aprendizaje Colaborativo

Enseñar a Pensar. Aspectos de la aptitud Intelectual. *Nickerson, Perkins y Smith*. Ediciones Paidos. México. 1994

Raths L.E. y otros (1994). *Como Enseñar a Pensar. Teoría y aplicación.* México: Paidos estudio.

Eduardo Mancera Martínez. (1998). Errar es un placer. México: .Grupo Editorial Iberoamericana.

Díaz Barriga, Frida; Hernández Rojas, Gerardo (1994). *Elementos del Aprendizaje Significativo.* México: Mc Graw Hill.

Savater, Fernando (1999). *Los Caminos Para la Libertad. Ética y Educación*. México: Ariel ITESM.

Polya, George. (1975). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Stanford, Gene (1982). *Desarrollo de Grupos Efectivos en el Aula. Una guía práctica para Profesores.* México: Editorial Diana.

Johnson, David W.;. Johnson, Roger T; Johnson Holubec, Edithe (1995). *Los nuevos círculos de Aprendizaje. Cooperación en el salón de clases y en la escuela. Asociación para la supervisión y desarrollo de programas de estudio*. Virginia EEUU, Alexandría.

Russell L. Ackoff (1992). *El Arte de Resolver Problemas. Las Fábulas de Ackoff.*. México: Editorial Limusa S.A. de C. V.

Matemática creativa y servicio comunitario. Proyecto: Aprende, Crea y Ofrece

Cecilia Vidal Castro
Universidad de Ciencias Aplicadas. Perú
pcmacvid@upc.edu.pe

Resumen

Entre las misiones de la UPC, como formadora de futuros profesionales, están el desarrollo de la Creatividad y el Liderazgo. Si empezamos desde los primeros ciclos a formar un alumno seguro de sí mismo, creativo, comprometido con su país, el producto final será un profesional competente que aporte soluciones.

En el transcurso de las clases con los alumnos que inician su formación universitaria se viene promoviendo en la UPC el uso Metodología Activa para la introducción ó reforzamiento de diferentes conceptos matemáticos, haciendo el proceso de enseñanza - aprendizaje más dinámico.

Tomando como referencia las actividades realizadas en clase, este proyecto consistió en que los propios alumnos crearan actividades, juegos, material audiovisual, o cualquier otro medio gráfico, que propiciara el entendimiento de un concepto en forma divertida; para ser implementado como experiencia didáctica por los propios alumnos a la enseñanza de niños ó adolescentes de menores recursos, sea que estos vivan en albergues ó que estudien en colegios humildes.

Permitiendo así el desarrollo de sus habilidades creativas, trabajo en equipo, y explotar su capacidad servicio a través la ayuda comunitaria a niños de sectores más necesitados.

Este trabajo es una adaptación del Proyecto Matemáticas en el Parque desarrollado por la profesora Joyce O'Halloran en la Universidad de Portland, cuyo objetivo principal fue lograr una popularización de matemáticas. En el presente proyecto el objetivo fue además promover la ayuda social desde las matemáticas.

Para nuestros alumnos fue una experiencia formativa, pues le ofrecimos la oportunidad de ayudar de otra manera, que fue mas allá del hecho de dar cierta cantidad de dinero o ir un domingo a hacer una visita, sino con el aporte afectivo e intelectual a través de un trabajo académico y creativo. Siendo generadores de cambio, a través del trabajo en equipo, y la puesta en común final construyendo, aprendiendo y ofreciendo.

Introducción

Durante mucho tiempo hemos sido testigos, algunas veces víctimas, de una enseñanza de las matemáticas encapsulante donde lo único que se buscaba que el alumno aprendiera de manera eficiente ciertas reglas y procedimientos para aplicarlos en "problemas de la vida real" dejando de lado el desarrollo de una actitud crítica, reflexiva, creativa.

En estos últimos tiempos esta imagen ha ido cambiando a través de investigaciones y desarrollo de nuevas metodologías en la enseñanza, lo que nos ha permitido empezar a mostrar una matemática desde otra perspectiva. Donde sean nuestros alumnos los protagonistas de la elaboración, producción y procesamiento del conocimiento.

Pero surge aquí una pregunta, ¿habría alguna manera de desarrollar además de habilidades creativas, habilidades socio afectivas, de liderazgo, y desarrollar la capacidad servicio?, ¿De que manera podríamos promover una educación para la vida?, quizá promoviendo el desarrollo del pensamiento critico, la creatividad, la comunicación y ciudadanía, fomentando el liderazgo, y el respeto a la diversidad sea de genero , social o cultural.

Al contestarnos la pregunta anterior, surgió la pregunta del ¿Cómo? ¿Cómo podíamos lograr todo lo anterior, como desarrollar la capacidad de servicio de nuestros alumnos a través de un trabajo creativo y en equipo?. Fue entonces en estas reflexiones que decidimos hacer una adaptación del trabajo Matemáticas en el Parque realizada por Joyce O'Halloran en la Universidad de Portland, naciendo así el Proyecto: Aprende, Crea y Ofrece, que tendría como componente adicional promover la ayuda social.

Este Proyecto consistió en que los alumnos crearan actividades, juegos, material audiovisual, o cualquier otro medio gráfico, que propiciara el entendimiento de un concepto en forma divertida; para ser implementado como experiencia didáctica por los propios alumnos a la enseñanza de niños ó adolescentes de menores recursos, sea que estos vivan en albergues ó que estudien en colegios humildes.
Permitiendo así el desarrollo de sus habilidades creativas, trabajo en equipo, y explotar su capacidad servicio a través la ayuda comunitaria a niños de sectores más necesitados.

El presente proyecto tuvo dos objetivos:

1°. Que nuestros alumnos desarrollen sus habilidades creativas, a través de la producción de diferentes actividades que expliquen o fortalezcan un concepto (Desde construcción de maquetas, juegos, cuentos, hasta videos).

2° Explotar su capacidad de servicio a través de la ayuda comunitaria a niños de sectores más necesitados, aplicando y enseñando las actividades diseñadas. Es decir darle la oportunidad de ayuda con su aporte intelectual y afectivo mas que monetario, a través de una matemática humanista.

El éxito de esta experiencia radicó en la creación del entorno adecuado para facilitar el desarrollo de sus habilidades creativas y socioafectivas, a través de la aplicación de Metodología Activa en nuestras clases, y algunos componentes del Aprendizaje Cooperativo, describiremos a continuación el desarrollo de las fases de esta experiencia educativa, los resultados obtenidos y recomendaciones para las personas que quieran implementar este proyecto.

Factores ambientales

Condiciones Intelectuales y pedagógicas

Antes de plantear la idea del proyecto a nuestros alumnos era necesario establecer las condiciones favorables desarrollando tanto en el estudiante como en el profesor actitudes psicológicas especificas, en el campo afectivo, social y por ultimo en el campo intelectual incitando al aprendizaje creativo.

Para lograr un ambiente favorable a la creatividad, tuvimos que:

- Crear situaciones de aprendizaje de tal manera que las preguntas y discusiones exijan la participación activa de todos los alumnos.
- Equiparamos el salón de tal manera que el alumno pudo explorar, manipular, descubrir, resolver problemas y trabajar con material nuevo, medio y materiales ricos y variados. Poder modificar con facilidad la disposición topográfica del material y del mobiliario del salón. Asegurarse de que la organización de la clase permita el trabajo individual, en grupo y en equipo.

Estas dos condiciones las logramos usando durante nuestras clases Técnicas de metodología activa que implican por parte del alumno un protagonismo en el proceso de

aprendizaje, realizando actividades de fabricación, efectuación, actividad creativa, usando desde instrumentos de construcción hasta comics, videos etc.
Como menciona Piaget (1969) una metodología activa, no es necesariamente un trabajo manual , en otros niveles las mas autentica actividad de investigación puede desarrollarse en el terreno de la reflexión, de las más avanzada abstracción y de manejos verbales.

El hecho que el profesor utilice esta metodología implicaba que desarrolle un sistema de organización pedagógica y un sistema de motivación de los alumnos previo a sus clases.
Esto no fue problema ya que en la Universidad de Ciencias Aplicadas innovadora en Metodología Educativa, desde hace unos años se viene aplicando Metodología Activa en la desarrollo de las clases de matemáticas teniendo como objetivo mover el pensamiento del alumno, con actividades donde él descubre el porque y origen de determinados teoremas y la aplicación de los conceptos estudiados. Introduciéndolos así en el mundo de las matemáticas de una manera ágil, reflexiva y divertida, sin dejar de ser rigurosa.

Condiciones Socioemocionales y grupales

Era necesario también crear las condiciones socio emocionales, para ello desde las primeras clases tuvimos como objetivo instaurar una atmósfera mentalmente saludable, lograr una empatía afectiva que generara relaciones interpersonales armoniosas.

Como menciona Martín Lopez “ .. de esta convivencia cotidiana, de esta construcción con el otro, es responsable el profesor, que facilita u obstaculiza el encuentro humano, que genera experiencias o crea barreras a la comunicación, que promueve la identificación emocional..”

Para lograr estas condiciones tuvimos en cuenta las tres fases de evolución del Grupo-Clase, la Fase individualista, la de identificación y la de interacción (Aurele St-Yves,1998).
En la primera fase los estudiantes que recién se conocen, durante cierto tiempo tienden a consolidarse como individuos, dar a conocer sus cualidades personales, su competencia, su status. Mientras se lleva a cabo esta búsqueda de individualidad, los alumnos experimentan un período de ansiedad que se manifiesta muchas veces con comportamientos incorrectos que tiene como objetivo llamar la atención.

En la segunda fase, de identificación, una vez que han sido aceptados y forman parte del grupo se refugian en subgrupos .Por último en el momento que los estudiantes obtienen ciertas garantías que son aceptados como son, es decir como nos dice Aurele St- Ives “cuando sienten que pueden ocupar su lugar como individuos reconocidos por el conjunto del grupo-clase incluyendo al profesor se inicia la fase de integración. A partir de este momento la clase de vuelve capaz de asumirse, de considerar al maestro como un conductor- participante”.

Además de tomar en cuenta las etapas por las que pasa el grupo, cabe recalcar que el punto de partida esta en el docente, es vital que asuma una actitud de apertura, de vulnerabilidad, de humanidad frente al grupo.

Desarrollo del proyecto

Esta experiencia educativa se realizo con 46 alumnos ingresantes a la UPC por la Modalidad de Selección Preferente (alumnos del tercio superior de su colegio).
Al ingresar a la universidad estos alumnos pasan por una prueba que mide sus habilidades básicas en Aritmética, Álgebra y Geometría, en caso de no aprobar se les invita a seguir un curso de Nivelación de matemáticas que no es obligatorio. Este curso tuvo una duración de seis semanas, de tres sesiones de 3 horas por semana. La fase final del proyecto se dio al finalizar el curso, que correspondería a la séptima semana.

En la primera semana se dio una explicación escueta del proyecto porque pensábamos que el momento propicio seria cuando hubiera pasado la etapa individualista del grupo, para catalizar el paso de esta etapa, en ambas secciones se tuvo mucho cuidado en como abordar las contigencias presentadas, tratamos de solucionar los conflictos de indisciplina, de manera creativa, puesto que sabíamos que el hecho de hacer una broma para todo el grupo o fastidiar, era un llamado al reconocimiento, por lo que se trato de ensalzar a los alumnos que presentaban este comportamiento, alentándolos y felicitando sus logros académicos, delante del grupo, logrando que tuvieran reconocimiento académico y social, a la tercera semana los alumnos que tuvieron este comportamiento dejaron de hacerlo, y es en este tiempo cuando el grupo entraba a la etapa de identificación presentamos el proyecto con fuerza. El uso de metodología activa fue de gran ayuda pues el 90% de las actividades diseñadas eran grupales, y esto estimulo la identificación.

Fase I

Dadas las condiciones previas presentamos el proyecto, esta fase fue primordial pues la Motivación que lográramos en esta Fase seria la base para el éxito del Proyecto, era necesario además lograr cierta Interdependencia positiva (como lo llama el Aprendizaje Cooperativo), para que el trabajo en equipo posterior fuera fructífero.

¿Qué hicimos entonces? Les explicamos de que se trataba el proyecto y a modo de ejemplo les presentamos una serie de actividades posibles, estas actividades tenían como ingrediente principal el juego, lo divertido. Se les presento un juego de Productos Notables, un Cómic, Geometría del Cuerpo, Un vídeo y un juego de formación de símbolos (en el que tenían que formar con su cuerpo cierta simbología conjuntista), con este último se cerró como se esperaba, porque creó una cohesión en los alumnos de la clase, exteriorizando su alegría cada vez que se le otorgaba un punto en los juego realizados.

Terminada esta presentación el ambiente era propició para la explicación extensa y un poco mas formal del trabajo, se reunieron en grupos de cuatro, y la indicación fue que, dieran rienda suelta a su creatividad y traten de diseñar una actividad, para aprender o reforzar algún tema de aritmética, álgebra o geometría, podían usar vídeos, cuentos, títeres, etc.
Es importante recalcar que la formación de los grupos estuvo a cargo del profesor tomando en cuenta uno de los factores de éxito del aprendizaje cooperativo, cuando se trabaja en equipos, la Heterogeniedad del grupo. Para esto el profesor dividió a la clase en grupos de cuatro, tomando en cuenta el status social, el genero y el nivel académico.

Como menciona Cooper, “... Los limites que establecen el vecindario, el status social, o el grupo racial que los pueden mantener separados en otros escenarios se debe saltar para lograr el reconocimiento del grupo...”

Fase II.
En la Segunda Fase tenían que presentar su proyecto por escrito, tomando en cuenta los siguiente ítems:

Título del Juego
Área
Materiales
A quién esta dirigido
Propósito
Descripción del Juego

El grupo tenía que explicar su juego o actividad para hacerles las respectivas sugerencias, y modificaciones a su trabajo. Después de hacer las modificaciones tuvieron una segunda revisión antes de presentar la maqueta.

Fase III

Después de hacer todas las correcciones necesarias, vino la presentación del juego o actividad diseñada, ante todos sus compañeros, los cuales podían dar alguna sugerencia para potencializar el trabajo.

A estas alturas era notoria la cohesión del grupo y lo involucrados que estaban en el proyecto. El liderazgo resultado de las fuerzas del grupo, aparecía como un proceso que había cristalizado las fuerzas personales e interpersonales del equipo.

Fase IV

Esta fue la Fase que cerraría todo el proyecto, la Fase final como les mencionamos al grupo de alumnos sería la prueba de fuego, porque iban a probar sus actividades con su real publico objetivo, pues en esta fase en que visitaríamos el albergue, tenían que lograr captar la atención de su grupo a través de su juego.

A estas alturas se había logrado una cohesión bastante intensa entre los miembros de los grupos, se había formado un sentimiento de pertenencia, lográndose identificar como un equipo cuyo fin era ofrecer su aporte afectivo e intelectual a este grupo de niñas.

La aplicación del proyecto se hizo en el Hogar de niñas “Santísimo Salvador” de Barrios Altos, este hogar alberga niñas de 5 a 17 años cuya familia más cercana no las puede criar.
En el albergue se dividió a las niñas de acuerdo al año que cursaban, la infraestructura del albergue se presto para dividir a los grupos de alumnos en diferentes “salas de juego” a los cuales se les asignaba un grupo de niñas con quienes aplicarían la actividad, que debería tener una duración entre 15 a 20 minutos dependiendo del juego, luego se le asignaba otro grupo, lo curioso es que algunos juegos eran tan entretenidos que las niñas no querían cambiar de juego.

Resultados finales.

Los alumnos durante todo el proyecto mostraron bastante entusiasmo que no disminuyó hasta el final, algo bastante sorprendente y gratificante fue ver el cambio actitudinal evidenciado en varios alumnos, estuvieron tan involucrados con el proyecto y su grupo, que se mostraron, más sociables, más seguros de si mismos.
Al estar ellos ahora en la posición de profesor, tomaron con bastante responsabilidad esta tarea, en algunos casos los alumnos se encontraron con que sus alumnas no tenían los prerrequisitos requeridos, y tuvieron que adaptar su juego e incluso improvisar a modo de introducción.

En el caso de las niñas, éstas estuvieron bastante involucradas durante los juegos, lográndose también el objetivo de mostrarle las matemáticas desde otro punto de vista.

Alcances para proyectos futuros

Se recomienda realizar este proyecto en el transcurso de un semestre regular para que la etapa creativa sea más holgada y algunos juegos no se conviertan en un cuestionario disfrazado. En este proyecto a pesar de que algunos trabajos fueron cuestionario disfrazado tuvieron buena aceptación, pues para revisión de conceptos fue más divertido hacerlo con un juego de cartas o una competencia de por medio.
Para lograr un cambio significativo en ambos grupos, emisores y receptores, sería adecuado realizar unas tres visitas en el semestre.
El proyecto original incorporaba una última fase en la que los alumnos receptores tenían que crear a su vez nuevas actividades, esta fase no la pudimos realizar por el poco tiempo disponible. Sería recomendable llevarla a cabo pues el cambio seria total en ambos grupos de alumnos, para lo cual la coordinación entre ambos grupos de profesores es primordial.

Referencias Bibliográficas

Cooper, J. (2000). Estrategias de enseñanza. Editorial Limusa. Cuarta edición. pp. 453-470
Cabrera M., Collin V., Cuevas J., Vidal C. (2000). Actas del Congreso Nacional de Educadores . Metodología Activa en la Enseñanza de las Matemáticas. UPC
O'Halloran Joyce. (2000) The Story of Service - Learning Project: Mathematics in the Park. Humanistic Mathematics Network Journal. Issue # 23.
St.-Yves Aueréle.(1988). Psicología de la enseñanza-aprendizaje. Editorial Trillas. pp. 75-88.

Etnomatemática y cooperativismo: Una vía de auto-transformación en busca de la ciudadanía[1]

João Ferreira dos Santos, Rosana Ananias Silva da Costa, John A. Fossa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, RN. Brasil
roscinsuol.com.br

Resumen
Describimos en este trabajo el fortalecimiento de los principios de la etnomatemática asociados al cooperativismo mediante un abordaje con características transdisciplinares, a través de la práctica de un proyecto de investigación y extensión, buscando la fundamentación teórica necesaria para la formación de una cooperativa en una comunidad en el interior de la provincia de Rio Grande do Norte – Nordeste de Brasil. Mostramos que, contrastando con el gran desarrollo experimentado por buena parte de la población del mundo, muchas personas, e incluso comunidades enteras, viven completamente al margen del desarrollo. La educación matemática detiene grandes responsabilidades por la situación en la cual se encuentra el mundo hoy en día; por ello, su participación es fundamental en un proyecto con intenciones holísticas direccionado para el rescate de la valorización del ser humano.

Introducción

En este trabajo emprendemos un abordaje histórico y mostramos cómo buena parte de la población del mundo sale perdiendo con la forma que el conocimiento viene desarrollándose. Procuramos mostrar la etnomatemática redireccionando la educación matemática para el desarrollo político, económico y social, sirviendo como instrumento de rescate de la historicidad de las gentes, asociándose a otras formas de conocimiento como el cooperativismo, la filosofía, el servicio social, etc., en la busca de medios para organizar y dotar la comunidad con el conocimiento necesario al desarrollo sostenible.
Como parte del proyecto, estamos realizando un curso de extensión que contempla una participación activa de la comunidad. Los debates ocurren en el contexto de la comunidad, adonde el respeto y la aceptación de las diferencias conducen a una verdadera transdiciplinaridad, puesto que a través de la interacción de conceptos filosóficos lógicos y matemáticos, los participantes desarrollan cambios de actitudes, valores, habilidades y razonamientos, tornando posible construir las bases de una organización cooperativa con vistas a la auto-sustentación de la comunidad. Los siguientes objetivos orientan nuestras actividades en la comunidad donde actuamos: 1 - Describir la etnomatemática utilizada por los vecinos de la citada región en sus relaciones económicas y sociales; 2 - Describir las creencias filosóficas de los habitantes, referentes a la libertad y ciudadanía; 3 – Promover un curso de extensión que abordará los principios éticos y filosóficos orientadores del cooperativismo, bien como nociones de matemática financiera que es la base de esta modalidad de organización; 4 – Instituir procedimientos de orientación, apoyo y acompañamiento de la administración de la entidad cooperativa que garantice superar las dificultades inherentes del primarismo y de la inexperiencia de los participantes.

[1] Los autores agradecen a los profesores Dra.Maria Emilia Monteiro Porto y Dr.Oscar Federico Bauchwitz por la traducción de este trabajo.

Aspecto Histórico

Desde la antigüedad el hombre ha realizado sus experimentos, interfiriendo en la naturaleza y modificando las condiciones del ambiente.
Instrumentado por el arte y por la técnica, adquiridos con el conocimiento acumulado a lo largo del tiempo, el hombre moderno incorporó a su cultura las creaciones de la tecnología. Este instrumental permite al ser humano crear objetos y transformar el mundo en el que vive. Son actitudes conscientes y planeadas, aunque ni siempre se perciba la real consecuencia de estas transformaciones. No debemos ignorar que casi la mitad de los seres humanos del planeta aun labra la tierra. Sin embargo, los avances en las ciencias de la información y en las ciencias humanas amenazan acabar con la agricultura de subsistencia. Los cambios tecnológicos en la producción de alimentos conducen a un mundo sin agricultores, con consecuencias imprevisibles para más de dos mil millones de personas que dependen de la tierra para su sobrevivir. (Rifkin, 1995).
La ciencia puede traernos beneficios incalculables, empero cómo se orienta la investigación científica es el punto crucial. La investigación científica debe estar orientada según prioridades y las nuestras son, básicamente, la mejoría de nuestro pueblo. (D'Ambrosio, 1986).
El hombre es el resultado de su historia. Durante mucho tiempo la mayoría de los seres humanos ha sido llevada a pensar que vivir bien era pecado. Retirado de su historicidad, el hombre es llevado por el propio hombre a creer que precisaba sufrir para poder alcanzar la felicidad que vendría con la salvación del alma. Dotados de un conocimiento superficial y dirigido, privados de la visión del todo por la dificultad de comunicación, nuestros antepasados eran presas fáciles para el dominio, pues sin el conocimiento necesario, no podrían hacer la elección de un camino para su propia vida. Pues es el conocimiento y la información los que llevan a las gentes a cuestionar y, a partir de ese cuestionamiento, evaluar si las condiciones en las que viven son, de hecho, buenas para promover calidad de vida digna y patrones mínimos de supervivencia. (D'Ambrosio, 1999).

El Mundo Globalizado

Era de se esperar que en las condiciones en que se encuentra el mundo hoy en día respecto al conocimiento y a la capacidad de difundir informaciones a través de las comunicaciones globalizadas, no hubiera más tanta miseria y que las diferencias políticas, económicas y sociales entre los pueblos, no fueran tan discrepantes. El mundo globalizado posibilita que, en los más lejanos rincones, el hombre pueda comparar las cosas y ver si su patrón de vida es realmente digno de un ser humano. Sin embargo, en que pese toda esa potencialidad, no es lo que ocurre. La globalización es un proceso que se realiza sin solución de continuidad. En muchos casos, la gente desconoce por completo este avance tecnológico, permaneciendo en la más absoluta ignorancia, y sujetas a las peores condiciones de vida. El conocimiento quedó particularizado y, en la mayor parte de las veces, es utilizado con objetivos dudosos que en nada contribuyen para el bien común de la gente y de la comunidad en general. Creemos ser dispensables los ejemplos. (Singer, 2000).
Mas, si el mundo globalizado pone todo a la disposición de todos, ¿qué falta para que toda la gente pueda vivir de modo digno y con una buena calidad de vida en cualquier lugar del

planeta? Nos parece que todas las áreas del conocimiento deberían plantearse este cuestionamiento.
Inexorablemente, estamos frente a una nueva realidad donde el ser humano no se contenta solamente con comida. Ha percibido que tiene otras necesidades y que estas necesidades son tan importantes cuanto el alimento. A rigor, también son alimentos, sin los cuales la calidad de vida está comprometida.

Etnomatemática, Educación Matemática, Cooperativismo y Transdisciplinaridad

Lamentablemente continuamos a insistir en que la inteligencia y la racionalidad están identificadas con la matemática. La realidad de hoy requiere un conocimiento ampliado, rompe con el concepto de excelencia que a lo largo del tiempo ha sido atribuido a ciertas disciplinas, de las cuales la matemática es el mejor ejemplo. Esta nueva realidad tiñe concomitantemente a todas las áreas del conocimiento. Bajo la óptica de esa nueva realidad y con un abordaje transdisciplinar, la etnomatemática se propone a analizar el conocimiento como una totalidad que debe estar direccionado a promover el bienestar y la felicidad de la gente. (D'Ambrosio, 1996).
La etnomatemática aborda el conocimiento como una totalidad en movimiento y, en esta totalidad, la educación matemática es muy significativa por su historicidad y por el valor que se le atribuye en todas las partes del mundo. Con tal amplitud de presencia, es imprescindible que la educación matemática actúe como facilitadora para el entendimiento de todas las demás áreas del conocimiento dentro del espíritu de la transdisciplinaridad, donde los niveles de realidad son inseparables de los niveles de percepción, pues la transdisciplinaridad está relacionada tanto a una nueva visión de mundo como a una experiencia vivida (Nicolesco, Internet, Site perso.club).
A partir de esta experiencia vivida, la etnomatemática lleva a la gente a elaborar sus teorías, tomar ciencia de la realidad y partir para la acción. Es en este momento de la acción que el contacto entre la etnomatemática y las otras áreas del conocimiento suscita el espíritu transdisciplinar.
Cada situación exige una ación determinada por la realidad del local en el cual el individuo está inserto. Es la realidad de cada local la que determina en qué área del conocimiento debe actuar con más énfasis, buscando las otras áreas como complementares, mas no una complementaridad descartable, y si una complementaridad que busca la unidad. Es en este espíritu que la etnomatemática, a través de la educación matemática, busca el cooperativismo como medio para la resolución de los problemas de la exclusión social. Lo busca, no como una ciencia nueva, sino como una ciencia que tiene la edad del hombre y que siempre fue preferida por ideologías de las más diversas.
La realidad que se presenta, requiere una nueva forma de organización social que pueda enfrentar y dar respuestas a los problemas que estamos viviendo, pues es difícil, e incluso imposible negar que en el mundo, más de mil millones de seres humanos viven en una pobreza odiosa y que la mayoría tiene hambre todos los días, o que más de 120 millones de personas viven oficialmente el desempleo, siendo que un número mayor vive en el subempleo. (Delors, 1999).
Estamos delante de una realidad. Como la etnomatemática tiene la intención de llevar a la gente a actuar a partir de la realidad, recurre al cooperativismo para promover la reorganización social dentro de la realidad de cada comunidad, contemplando las

diferencias y aprovechando sus potencialidades. Podemos decir que es una esperanza concreta. (Nascimento, 2000).
La etnomatemática actúa junto al cooperativismo como un instrumento de transformación económica, social y política, con un cierto grado de eficiencia, a partir del abordaje transdisciplinar, como viene ocurriendo en el Proyecto “Etnomatemática y Cooperativismo: una vía ética para la ciudadanía” desarrollado en la Comunidad de Baixinha dos Franças, Municipio de São Miguel do Gostoso, en el interior de la provincia de Rio Grande do Norte, Nordeste de Brasil.
La “etnia”, estudiada en el referido proyecto, consiste primordialmente de parte de la población de Baixinha dos Franças, que pueda integrar una futura asociación o cooperativa, bien como los profesores de las escuelas de esa comunidad. Los profesores participan del estudio porque representan un eslabón histórico, ayudando a garantizar la continuidad de las instituciones sociales, incluyendo una posible cooperativa de la comunidad.
Los conceptos matemáticos más importantes para el estudio de esta etnia se clasifican en dos grandes categorías: la matemática financiera y la lógica informal. La relevancia de la matemática financiera para el establecimiento y manutención de una cooperativa es obvia. La inclusión de la lógica informal en el estudio tiene por objetivo la identificación de patrones de inferencia utilizadas por la comunidad, pues los mismos pueden ser determinantes cuando se hace necesario tomar una decisión basada, como casi siempre lo es en la vida cotidiana, en evidencia parcial y con referencia a metas mutuamente conflictuantes.
La parte del proyecto que se refiere al curso de extensión se materializa en encuentros quincenales. Los participantes son la gente sencilla del pueblo adonde la mayoría de ellos aun no tiene concluida la enseñanza fundamental y media. Algunos son profesorandos del curso de magisterio; uno tiene curso superior completo, otros aun lo tienen en curso. Mas lo que se puede observar y poner en relieve es la posición asumida por ellos delante de la nueva forma de ver el mundo, lo que puede verificarse en los informes de algunos de los participantes:

1 . Heldene- *"comencé a valorar más a las cosas que tenía, el miedo de la matemática se fue porque yo solamente sabía la matemática de los números, pero ahora aprendo la matemática de la vida, lo que es muy bueno"*. [2]

2 . Arimatéia- *"me pareció muy bueno porque el profesor habla con mucha facilidad lo que yo mismo pensaba decir"*.[3]

3 . Iara- *"en el inicio no valoraba mucha cosa, pero ahora comienzo a dar valor a muchas cosas que no lograba ver anteriormente"*.[4]

Como la transdisciplinaridad puede ser entendida como una actitud de buscar comprender el conocimiento, o como una postura de respecto a la diversidad, o aun, como un movimiento de reintegración de la ciencia, del arte y de las tradiciones, a partir de los relatos, podemos decir que ella es también una herramienta que se utiliza para comprender el hombre en una visión total, y que incontestablemente está envuelta en los cambios de valores.

---

[2] *“comecei a valorizar mais as coisas que eu tinha, o medo da matemática foi embora porque eu só sabia a matemática dos números, mas agora aprendo a matemática da vida que é muito bom”.*
[3] *“achei muito bom porque o professor fala com muita facilidade o que eu mesmo pensava em dizer”*
[4] *“no início não dava valor a muita coisa, mas agora começo a dar valor a muitas coisas que não conseguia enxergar antes”.*

Conclusión

Aunque el proyecto todavía se encuentre en su etapa inicial, los primeros resultados ya se hacen aparentes. Nuestra presencia viene contribuyendo para grandes cambios de actitudes entre los participantes. Su participación en un curso promovido por la Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), resultando en el recibimiento de un certificado, suscita en los participantes y sus vecinos un sentido de *empowerment* sobre su propio destino. Además, las discusiones y la valorización de hechos de la historia de la comunidad ha provocado una revalorización de la cultura local por parte de los participantes y contribuido para la construcción de su propia identidad como individuos valorizados.
Así, creemos que la etnomatemática, buscando el cooperativismo y actuando dentro de los principios de la transdisciplinaridad, puede contestar a las necesidades del conocimiento de hoy, tomar conocimiento de la realidad y partir para la acción.

Referencias bibliográficas

D'Ambrosio, Ubiratan (1999). *Educação para uma sociedade em Transição*. Campinas: Papirus.

D'Ambrosio, Ubiratan (1986). *Da realidade à ação: reflexão sobre Educação e Matemática*. São Paulo: Summus.

D'Ambrosio, Ubiratan. *Educação Matemática: Da Teoria à Prática.* São Paulo: Papirus.

Delors, Jacques (1999). *Educação: Um Tesouro a descobrir - Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação*, Cortez/Mec/UNESCO, Brasília.

NASCIMENTO, Fernando Rios do (2000). *Cooperativismo como alternativa de mudança: Uma abordagem normativa.* Rio de Janeiro: Forense.

Nicolescu, Basarab. "*Evolução Transdisciplinar à Universidade: Condição para o Desenvolvimento Sustentável"*, Site *internet.fr/nicol/ciret/bulletin/b12/b12c8por.htm*.

Rifkin, Jeremy (1995). *O fim do emprego: O Declinio Inevitável dos Níveis dos Empregos e a Redução da Força Global do Trabalho*, Tradução de Rutth Gabriela Bahr, São Paulo: Makron Books.

Singer, Paul (2000). *Economia solidária no brasil: A Autogestão Como Resposta ao Desemprego.* São Paulo Contexto.

Singer, Paul (2000). *Globalização e desemprego: Diagnóstico e alternativas.* São Paulo Contexto.

Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio del concepto de función real de una variable real

Otilio Mederos Anoceto; Dámasa Martínez Martínez
Universidad Central de Las Villas. Cuba
damasa@uclv.edu.cu Oma8111@yahoo.es

Resumen
En todas las carreras universitarias está presente la Matemática de una manera u otra; pero en muchas carreras, a pesar de la existencia de paquetes profesionales, se hace mucho énfasis en los aspectos técnicos y no queda el tiempo suficiente para el desarrollo de aspectos teóricos y conceptuales muy importantes para los graduados de esas carreras, y que las asignaturas de Matemática podrían contribuir extraordinariamente a formar.
En el trabajo con conceptos en Matemática juegan un papel muy importante las operaciones definición, generalización y clasificación. En nuestro trabajo nos proponemos dar una adecuada definición de la operación clasificación de conceptos y mostrar cuales son los pasos que deben seguirse para aplicar esta operación a diferentes conceptos. Se realizan, como ejemplos ilustrativos, dos clasificaciones de las funciones reales de variable real.

Introducción

En todas las carreras universitarias está presente la Matemática de una manera u otra; pero en muchas carreras, a pesar de la existencia de paquetes profesionales, se hace mucho énfasis en los aspectos técnicos y no queda el tiempo suficiente para el desarrollo de aspectos teóricos y conceptuales muy importantes para los graduados de esas carreras, y que las asignaturas de Matemática podrían contribuir extraordinariamente a formar.
En la enseñanza de la Matemática tiene mucha importancia la formación de conceptos lo que podemos caracterizar en forma breve por: la comprensión de conceptos y definiciones matemáticas es fundamental para el entendimiento de relaciones matemáticas, la formación de conceptos es una condición importante para la capacidad de aplicar lo aprendido de forma segura y creativa y en la elaboración de conceptos pueden transmitirse importantes nociones ideológicas y referentes a la teoría del conocimiento, y pueden desarrollarse una serie de valiosas propiedades del carácter, Zillmer Wolfgang (1981)
En el trabajo con conceptos en Matemática juegan un papel muy importante las operaciones definición, generalización y clasificación. En nuestro trabajo nos proponemos dar una adecuada definición de la operación clasificación de conceptos y mostrar cuales son los pasos que deben seguirse para aplicar esta operación a otros conceptos. Se realizan, como ejemplos ilustrativos, dos clasificaciones de las funciones reales de variable real.
Con el objetivo de facilitar la lectura del trabajo en todo lo relativo a las operaciones con conceptos, planteamos algunas ideas al respecto.
Se denomina extensión de un concepto a la colección E de todos los objetos que corresponden a ese concepto, y se llama contenido de un concepto a una colección $X=\{P_i\}_{i\in I}$ (I es un conjunto) de propiedades P_i, que cumplen todos los elementos de E y sólo estos elementos. Un concepto se indica con frecuencia en el trabajo mediante un par (E, X) o simplemente por E cuando no haya dudas. Pueden encontrarse diferentes colecciones X de propiedades que sólo cumplen los elementos de E. Cualquier otra colección por la cual pueda sustituirse X sin alterar E recibe el nombre de caracterización del concepto (E, X).

Desarrollo

1. La operación clasificación de conceptos.

Para el estudio de muchos conceptos, sobre todo cuando su extensión tiene una cardinalidad grande, no basta con las operaciones definición y generalización. Es necesario realizar una o varias clasificaciones, y de esa forma particionar su extensión para poder realizar un estudio más profundo de cada una de esas partes y obtener una mejor información de la extensión inicial. Para precisar esta idea pasamos a dar dos definiciones.

Definición 1:

Dado un concepto (E, X), se denomina criterio de clasificación a un conjunto de colecciones de propiedades $P = \{P_i : i \in I, \text{I es un conjunto}\}$ de los elementos de E, tal que se obtiene una partición de E con la colección de las extensiones de los conceptos $(E_i,X_i)\}_{i\in I}$, que se definen agregando al contenido X las propiedades P_i, $i\in$ I., o sea, $X_i = X \cap P_i$, $i\in$ I.

Definición 2:

Dado un concepto (E, X) y un criterio de clasificación $P = \{P_j\}_{j\in I}$ (I es un conjunto), se denomina clasificación de (E, X) relativa a ese criterio a la operación que asocia al concepto (E, X) la colección de conceptos $\{(E_i,X_i)\}_{i\in I}$, donde $X_i = X \cap P_i$, $i\in$ I.

Reglas que deben tenerse en cuenta al realizar la clasificación de un concepto.

1. La clasificación debe realizarse partiendo de un solo criterio $P = \{P_j\}_{j\in I}$.

Cuando para el estudio de un concepto es necesario realizar diferentes clasificaciones, éstas no deben mezclarse y cada una de ellas debe cumplir esta regla.

2. Se debe comprobar que $E = \bigcup_{j\in J} E_j$.

La extensión del concepto que se clasifica debe ser igual a la unión de las extensiones de los conceptos surgidos como consecuencia de aplicar el criterio de clasificación.

3. Se debe comprobar que $E_j \cup E_k = \varnothing$, para todo j de J \{k} y para todo k de J.

Las extensiones de los conceptos surgidos como consecuencia de realizar una clasificación deben ser disjuntos dos a dos.

4. La clasificación debe ser proporcionada.

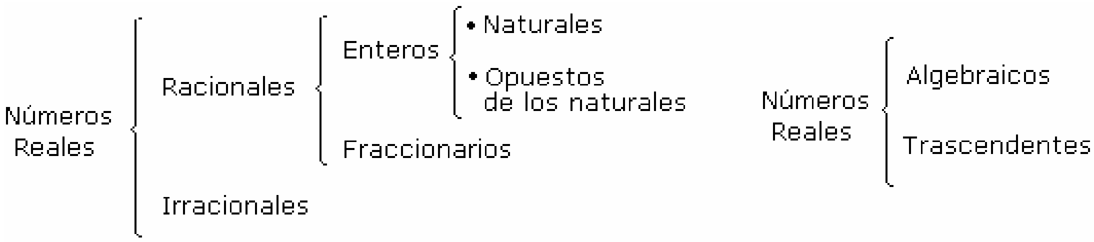
El objetivo fundamental que se persigue al realizar una clasificación de un concepto es obtener una extensión de nuevos conceptos cuyas extensiones sean “más pequeñas” que la extensión del concepto de partida. Se debe evitar aquellos casos en que la cardinalidad de algunos E_j coincide con la de E y la de otros es mucho más pequeña. En este caso se dice que se ha realizado una clasificación desproporcionada.

5. La clasificación debe realizarse sin saltos.
Se realizan clasificaciones con saltos cuando se realiza una clasificación, posteriormente se realiza la clasificación de algunos conceptos que surgen como resultado de la primera clasificación y se presentan todos los conceptos de estas clasificaciones como conceptos de una sola clasificación.

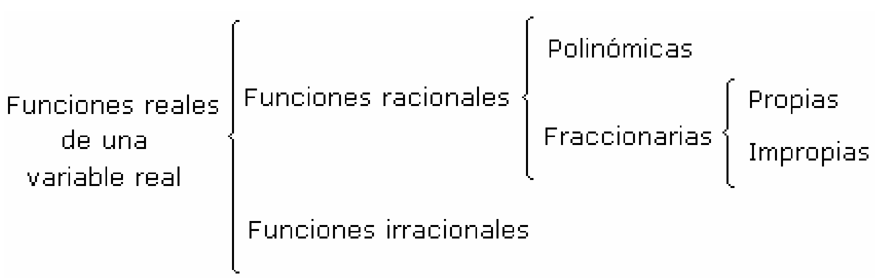
6. Determinación de un criterio óptimo.
La clasificación debe hacerse de tal forma que el criterio que se tome para realizarla sea el más útil para determinar las propiedades de los elementos de cada una de las subclases en que quede dividida la extensión del mismo, de acuerdo a un determinado propósito científico o metodológico.

La aplicación al estudio del concepto de función real de variable real

Las clasificaciones usuales de los números reales son las siguientes:



La primera cadena de clasificaciones se estudia en la enseñanza general, en específico se estudia muy bien todo lo relacionado con los números racionales. El estudio de los números reales se completa durante el desarrollo de las carreras universitarias al igual que la segunda clasificación.
Gran parte del estudio del concepto de función real de una variable real que se hace en la escuela se realiza mediante el análisis de lo que hereda de ∇, tanto en lo relativo a operaciones algebraicas, como al orden. Siguiendo esta idea metodológica nos vemos obligados a realizar, con respecto a la clasificación, el análisis de la herencia de las dos clasificaciones anteriores.
Dada la cadena de clasificaciones del concepto de función real de una variable real siguiente:



El criterio de la primera clasificación es P = {P_1, P_2}, donde P_1: f se expresa como el cociente de dos polinomios y P_2: f no es posible expresarla como el cociente de dos polinomios.

El criterio $P_1=\{P_{11}, P_{12}\}$ de la segunda clasificación del concepto de función racional está definido por: P_{11}: f se expresa como el cociente de dos polinomios en el que el polinomio del denominador es 1 y P_{12}: f se expresa como el cociente de dos polinomios en el que el polinomio del denominador es diferente de 0 y de 1,y el criterio $P_{12}=\{P_{121}, P_{122}\}$ de la clasificación de las funciones fraccionarias está definido por: P_{121}: El grado del numerador de f es menor que el grado del denominador y P_{122}: El grado del numerador de f es mayor o igual que el grado del denominador.
Esta cadena de clasificaciones del concepto Φ(A), A ⊂ ∇, de función real de variable real desde el punto de vista metodológico es muy importante, pero no es una buena vía para lograr un buen estudio de Φ(A) ya que es una clasificación desproporcionada. Téngase presente que la cardinalidad de las funciones racionales definidas sobre A es □ y la cardinalidad de las funciones irracionales sobre A es $2^{□}$.
Si se considera como criterio de clasificación a $P^{'}=\{P_1^{'}, P_2^{'}\}$, donde: $P_1^{'}$: f es una función algebraica. y $P_2^{'}$: f no es una función algebraica, se obtiene para el concepto de extensión Φ(A) la clasificación siguiente:

$$\begin{array}{c}\text{Función real}\\ \text{de una}\\ \text{variable real}\end{array}\begin{cases}\text{Función algebraica}\\ \\ \text{Función trascendente}\end{cases}$$

En este caso las funciones trascendentes son obviamente las que satisfacen la propiedad $P_2^{'}$.
Esta clasificación, que también metodológicamente es muy importante, es desproporcionada, pero mejora esta situación con respecto a la clasificación anterior.
En las aplicaciones muchas veces la clasificación importante de Φ(A), es la determinada por una subclase de Φ(A) que contiene todas las funciones que aparecen en los modelos que son necesarios, para plantear y resolver los problemas en una determinada dirección.

Resultados de la aplicación de la propuesta

1. Estas dos clasificaciones se han realizado durante muchos años en los cursos de Análisis Matemático I de las carreras de Licenciatura en Matemática y de Licenciatura en Computación en la Universidad central de Las Villas, Cuba, con los resultados siguientes:

- ✓ Se ha contribuido a que los estudiantes aprendan a clasificar.
- ✓ Han sido fuente de muchos ejercicios, como por ejemplo el siguiente:
  Pruebe que las funciones trigonométricas son trascendentes.
- ✓ Debido al carácter desproporcionado de estas clasificaciones, ha quedado claro para los estudiantes que para muchos propósitos es necesario realizar otras clasificaciones el concepto Φ(A).
- ✓ Se ha insistido en que el concepto Φ(A) tiene una extensión muy amplia y que otra variante para mejorar su estudio es considerar sólo las funciones reales elementales.

2 Estas clasificaciones se han aplicado en los últimos dos años como parte de una estrategia didáctica para la introducción del concepto de función en la carrera de Licenciatura en Economía en La Universidad Central de Las Villas, mediante esta aplicación se ha logrado:

- ✓ Le ha permitido a los estudiantes a establecer relaciones lógicas adecuadas entre los conceptos estudiados de funciones y con ello “organizar” los contenidos aprendidos. Esto ha propiciado mayor eficiencia en la aplicación de las funciones en la modelización de problemas económicos sencillos.
- ✓ Contribuye a preparar a los estudiantes para que utilicen las funciones no solo como proceso sino entenderlas como objetos para procesos más complejos como son: diferenciación e integración.

Conclusiones y recomendaciones

La operación clasificación de conceptos aplicada al estudio de las funciones reales de variable real, permite organizar de forma adecuada lo que se realiza al respecto en la enseñanza de las mismas y contribuye a una mejor comprensión de este concepto, por otra parte se realiza como heredera de la clasificación de los números reales, con lo que el alumno está familiarizado de la enseñanza media. Existen dos clasificaciones de las funciones reales que se estudian con mas frecuencia, es importante usar ambas porque los alumnos deben utilizar conceptos que se derivan de las mismas.

Recomendamos a los profesores el análisis de este estudio y su aplicación en la enseñanza de acuerdo a los objetivos del curso que corresponda. Por otra parte recomendamos que se realice la demostración de la trascendencia de algunas funciones.

Referencias bibliográficas

Ballester, S.(1993). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Tomo I, Editorial Pueblo y Educación, Guantánamo.

De Zubiría, Miguel(1996). *Tratado de Pedagogía Conceptual 1*. Fundación Alberto Merani, Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Marino.

Farfán, R.M(1997). *La investigación en Matemática Educativa en la Reunión Centroamericana y del Caribe referido al nivel superior*, Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, Número 0, pp 6-20.

Jungk, W. (1989). *Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 2* (Primera Parte), Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana

Martínez, D. (1998). *Estudio el concepto de función real en la formación de profesores.* Tesis de maestría. Santa Clara. Cuba.

Mederos, O. y otros(1990). *El concepto y algunas operaciones sobre la base de los mismos.* Revista Cubana de Educación Superior, Volumen X, Número 1, pp 3-10.

Mederos, O. & Martínez, M. A. (1988). *Clasificación de las funciones elementales*. Revista Cubana de Educación Superior, Volumen VIII, Número 3. pp 71-81.

Zillmer, W.(1981). *Complementos de la Metodología de la enseñanza de la Matemática.* Ciudad de La Habana Editorial de Libros para la Educación.

Uso de Tecnología

Nivel Medio

Incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica y media

Jorge Enrique Fiallo Leal
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
jfiallo@matematicas.uis.edu.co

Resumen
En la formación de los docentes de matemáticas, se puede señalar un estilo de enseñanza tradicional que enfatiza los procesos memorísticos y repetitivos, el mínimo uso de recursos tecnológicos, el desconocimiento de existencia de materiales didácticos computarizados o el uso atomizado de los mismos pero de una forma individual sin realizar pruebas de efectividad y pertinencia, el desarrollo de programas extensos con poco énfasis en procesos de construcción de conceptos, análisis, argumentación y creación, características que generan actitudes negativas, pasividad y aburrimiento de los estudiantes y en algunos casos un alto índice de deserción y baja eficiencia en el logro de los objetivos planteados.
Teniendo en cuenta que las instituciones tienen recursos humanos tanto de profesores como de estudiantes altamente motivados por la aplicación de las Nuevas Tecnologías, y que éstas favorecen el aprendizaje individualizado, estimulan procesos de creación y abstracción, almacenan grandes volúmenes de información, realizan operaciones con rapidez y exactitud, permiten simular procesos complejos y el intercambio ágil de información, y favorecen la interactividad y el control, se propone la realización de este curso que permitirá promover de una manera sistemática una forma de uso de las nuevas tecnologías.
Durante el curso se busca familiarizar al docente en el uso de las nuevas tecnologías bajo un marco conceptual en términos de: la mediación instrumental, las representaciones semióticas, los procesos de abstracción y generalización en contexto y las situaciones problemáticas como detonadores de redes conceptuales, fruto de la experiencia del autor en la participación del proyecto “Incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica y media de Colombia”

Introducción

> *“La importancia de las herramientas computacionales para la educación matemática está asociada a su capacidad para ofrecernos medios alternativos de expresión matemática, y a su capacidad para ofrecer formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos. Cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es la tecnología en sí misma el objeto central de nuestro interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología” (Moreno L., 1999)*

En la formación de los docentes de matemáticas, se puede señalar un estilo de enseñanza tradicional que enfatiza los procesos memorísticos y repetitivos, el mínimo uso de recursos tecnológicos, el desconocimiento de existencia de materiales didácticos computarizados o el uso atomizado de los mismos pero de una forma individual sin realizar pruebas de efectividad y pertinencia, el desarrollo de programas extensos con poco énfasis en procesos de construcción de conceptos, análisis, argumentación y creación, características que generan actitudes negativas, pasividad y aburrimiento de los estudiantes y en algunos casos un alto índice de deserción y baja eficiencia en el logro de los objetivos planteados. Teniendo en cuenta que las instituciones tienen recursos humanos tanto de profesores como de estudiantes altamente motivados por la aplicación de las Nuevas Tecnologías, y que éstas favorecen el aprendizaje individualizado, estimulan procesos de creación y abstracción, almacenan grandes volúmenes de información, realizan operaciones con rapidez y exactitud, permiten simular procesos complejos y el intercambio ágil de información, y favorecen la interactividad y el control, se propone la realización de este curso que permitirá promover de una manera sistemática una forma de uso de las nuevas tecnologías.

Se propone a los asistentes un taller realizado por estudiantes de octavo y noveno grado de secundaria que plantea como situación problemática la construcción de una caja sin tapa que almacene el mayor volumen y se comenta a medida que se va desarrollando el curso las actividades que realizaron los estudiantes y los resultados y conclusiones a que llegaron después de haber resuelto la actividad con lápiz y papel y con la calculadora, en estos comentarios se hace énfasis en la presencia del marco de referencia en el planteamiento, desarrollo y evaluación de la actividad.

Antecedentes

El Ministerio de Educación Colombiano inició la discusión sobre los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas en 1996, con la participación de docentes e investigadores de universidades y de docentes vinculados a la educación básica y media. Desde entonces se ha venido reflexionando sobre las estrategias de incorporación de nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas. Se ha señalado este aspecto como fundamental para tener una nueva visión del conocimiento y de la actividad matemática en la escuela. Después de formular dichos lineamientos surgió la necesidad de profundizar sobre el papel de las nuevas tecnologías y fue así como durante 1998 se adelantó un proyecto con apoyo de la OEA y con la participación de expertos internacionales (de Gran Bretaña, México y Chile) y de facultades de educación que dio como resultado la construcción del documento Nuevas tecnologías y Currículo de Matemáticas, para orientar la incorporación de calculadoras y computadores en el aula.
En estos momentos se está culminando la fase piloto y empezando la fase de expansión del proyecto "Incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica y media de Colombia" liderado por el Grupo de Investigación Pedagógica del Ministerio de Educación Nacional, con la asesoría del Dr. LUIS MORENO ARMELLA, del CINVESTAV-IPN de México y con la participación de la Universidad Industrial de Santander como coordinadora del proyecto en Santander a través de la escuela de matemáticas.

Marco de referencia

Según los lineamientos curriculares para la incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas del Ministerio de Educación Colombiano (MEN, 1999), "las nuevas tecnologías en la clase de matemáticas deben verse como un rayo de luz que "ilumina" el currículo de matemáticas a través de un filtro, el sistema didáctico (conocimiento, alumnos y profesores). Este "filtro" que puede denominarse las "gafas conceptuales" con las cuales vamos a mirar el currículo, nos permitirá poner a prueba la tecnología en diversas funciones que contribuyen a despertar y mantener el discernimiento matemático, mediante un barrido por los diversos aspectos del currículo. El barrido nos permite hacer un análisis sobre los alcances del uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase de matemáticas. Refiriéndose esto último a la actividad del estudiante con el conocimiento matemático, en éste mismo, en otras ciencias y en el contexto sociocultural del individuo. En general, en un proceso de conceptualización matemática con la ayuda de recursos tecnológicos, el estudiante puede acceder a un campo operatorio nuevo, realizar tareas que con otros recursos resultarían dispendiosas, hacer análisis de diferentes tipos, resolver problemas utilizando diferentes estrategias y sistemas de representación y quizás sintetizar otro tipo de objetos matemáticos”.

Durante el desarrollo del proyecto, producto del trabajo en equipo y la asesoría del Doctor Luis Moreno Armella, se han destacado cinco aspectos teóricos como base fundamental del proyecto que a continuación se describirán brevemente (MEN, 2000-2001).

Situaciones problémicas entendidas detonadores de redes conceptuales: El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas es un proceso difícil para estudiantes y maestros. Por lo tanto la labor del docente es crear situaciones que motiven y desencadenen razonamientos de tipo matemático como la intuición de una ley su verificación y su motivación. Entonces lo importante es diseñar actividades que propicien un ambiente donde las respuestas no sean inmediatas, donde el desarrollo del problema permita un desarrollo lógico-matemático del estudiante y así logre la apropiación del conocimiento.

La mediación instrumental: Se trata de explorar todo el proceso de construcción del conocimiento matemático escolar a través de la mediación de la calculadora. Ver cómo esta herramienta cambia o modifica las estrategias intelectuales del estudiante, cómo moviliza las formas de conocimiento mismo que se van desarrollando a partir de la herramienta. Esto en la práctica significa ver cómo empieza a pensar el estudiante una vez que tiene este socio cognitivo. Se empieza a pensar al estudiante con la máquina como una sociedad cognitiva.

Las representaciones semióticas: Las formas de representación de un objeto son inagotables y entre más sistemas de representación se trabajen, se comprenderá mejor un concepto matemático en toda su dimensión. Dentro de este tema es importante subrayar las representaciones ejecutables.

Los procesos de abstracción y generalización en contexto: Aquí se analiza ¿Cómo aparece dentro del trabajo con la máquina lo general y lo particular?.

Aspectos a evaluar en la clase de matemáticas utilizando herramientas computacionales: En la evaluación de la clase hay muchas cosas que se pueden observar que están determinadas por las concepciones que se tengan acerca de las matemáticas y la tecnología. Pero hay dos ideas que son clave. ¿Qué ocurre si ahora los estudiantes están usando estas herramientas? Y ¿qué es lo que vamos a evaluar?

Metodología

Se planteó a los estudiantes de octavo y noveno grado (cuyas edades oscilan entre los 13 a 15 años) de dos instituciones oficiales de Santander la siguiente situación problemática “con una cartulina de 30 cm. por 20 cm., construya una caja sin tapa que almacene el mayor volumen”. A través de esta actividad se buscaba que el estudiante modelara la situación primero en forma concreta, observara los diferentes modelos de cajas, tomara datos, comparara y buscara una solución y tal vez una generalización para luego realizar la modelación y la simulación en la calculadora como otra forma de representación para analizar y resolver situaciones problemáticas.

Taller

1. **Modelando la caja**

   Construya un rectángulo de lados 3 y 2 cm. respectivamente de la siguiente manera:
   a) Represente una recta horizontal (F2-4) y trace una perpendicular a ella (F4-1)
   b) Con el editor numérico (F7-6) escriba los números 2 y 3 en cualquier lado de la pantalla

c) Transfiera el número 3 al punto de corte de las dos rectas y la horizontal (F4-9: señale con el cursor primero el número, luego, ubíquese en el punto de corte y mueva el cursor hasta que el otro punto quede sobre la horizontal). Realice lo mismo con el 2 sobre la vertical

d) Trace una perpendicular a cada una de las rectas (F4-1) que pasen por los puntos ubicados en el paso anterior y señale el punto de intersección de las dos rectas (F2-3)

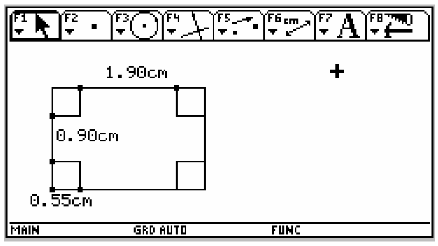
e) Trace el polígono (F3-4) que pasa por los cuatro puntos resaltados en la pantalla

f) Oculte (F7-1: señale todos los objetos a ocultar y al final oprima ESC) las rectas y los números

g) Señale el punto medio (F4-3) del lado izquierdo del rectángulo y trace un segmento (F2-5) desde este punto hasta el vértice superior izquierdo

h) Ubique un punto sobre el segmento trazado (F2-2) y construya un cuadrado utilizando la macro cuadrado (F4-6 1)en donde los puntos iniciales son el vértice superior izquierdo y el punto sobre el segmento

i) Con la opción compás (F4-8) señale el vértice superior izquierdo, el punto sobre el segmento y el vértice inferior izquierdo. Halle el punto de intersección (F2-3) de la circunferencia y uno de los lados y construya el cuadrado (utilice la macro) que pasa por estos dos puntos



j) Repita el numeral i) sobre los otros vértices

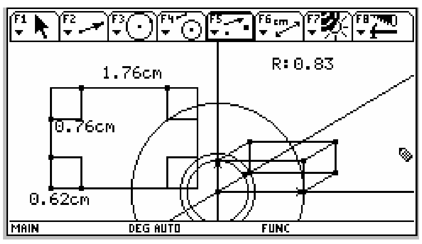
k) Tome las medidas (F6-1) del alto, largo y ancho de la caja

l) Mueva el punto sobre el segmento y observe lo que sucede con las medidas del largo alto y ancho de la caja ¿Cuál es el máximo valor de la altura?, ¿Por qué?

m) Calcule (F6-6) el producto del largo por alto, por el ancho de la caja (volumen de la caja) y mueva el punto sobre el segmento. ¿Para qué valor de la altura se obtiene el máximo volumen?.

2. Simulando la caja

a) Al lado derecho de la caja, represente una semirecta (F2-6) horizontal, una recta perpendicular (F4-1) a ella que pase por el extremo y una recta que pase por este punto y esté inclinada unos 30º



b) Con F4-8 transfiera la longitud de la altura a la vertical, la del largo a la semirecta horizontal y la longitud del ancho a la recta inclinada (Recuerde el punto 1i) y halle el punto de intersección (F2-3) de cada circunferencia con su respectiva recta

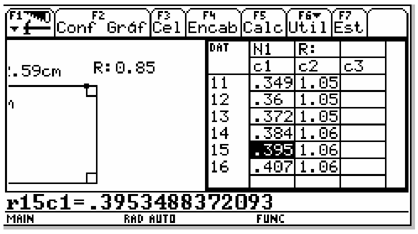
c) Trace un segmento (F2-5) que vaya desde el punto de intersección de las tres rectas hasta cada uno de los puntos de intersección de las circunferencias y sus respectivas rectas

d) Trace un vector (F2-7) que vaya desde el punto de intersección de las tres rectas hasta cada uno de los puntos de intersección de las circunferencias y sus respectivas rectas

e) Traslade (F5-1: señale primero el segmento y luego el vector correspondiente) cada uno de los segmentos en dirección de los vectores dados hasta formar la caja que muestra la figura
f) Oculte (F7-1)las rectas, las circunferencias y los vectores
g) Mueva el punto sobre el segmento, ¿Qué observa?

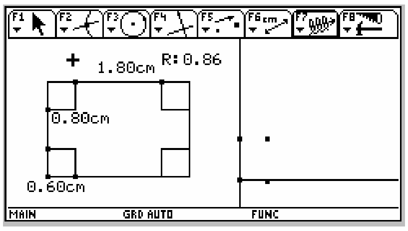
3. Tomando datos

a) Mueva el punto sobre el segmento hacia el vértice superior izquierdo
b) Con F6-7 2 defina los datos a entrar, señalando primero la altura y luego el volumen de la caja
c) Con F6-7 1 almacene los datos dando animación (F7-3) al punto sobre el segmento hacia arriba
d) Observe los datos agrupados con F8-B. Si desea examinar la tabla oprima la tecla 2nd seguida de la tecla aplicaciones (APPS). ¿Para qué valor de la altura se obtiene el máximo volumen?. Compare con el literal m de la primera actividad
e) Para regresar a cabri oprima la tecla 2nd seguida de la tecla APPS y vaya a F8-C.



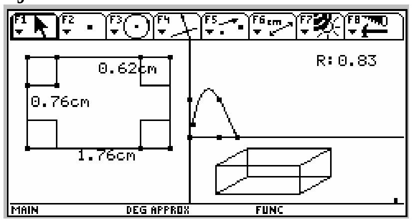
4. Realizando la representación gráfica del volumen en función de la altura

a) Al lado derecho de la caja, represente una semirecta (F2-6) horizontal y una recta perpendicular (F4-1) a ella que pase por el extremo
b) Con F4-9 transfiera la longitud de la altura a la semirecta horizontal y la del volumen a la vertical (Recuerde el punto 1c)
c) Represente una recta perpendicular a la horizontal que pase por el punto que representa la altura de la caja y otra que sea perpendicular a la recta vertical que pase por el punto correspondiente al volumen
d) Halle la intersección de las dos rectas (F2-3) y oculte las rectas (F7-1)
e) Active la traza (F7-2) y señale el punto de intersección, luego anime (F7-3) el punto sobre el segmento. Describa lo que observa
f) Puede mejorar la representación construyendo el lugar geométrico (F4-A) que forma el punto de intersección al mover el punto sobre el segmento. Para esto desactive la traza (F7-2) del punto de intersección, seleccione F4-A, señale el punto de intersección y luego el punto sobre el segmento.



Observaciones

La actividad de buscar la caja de mayor volumen con la cartulina llevó a la exploración de la variabilidad de la medida de los cortes en las puntas (que determinan la altura), también verificaron que aunque todas las cajas fueron construidas con una cartulina de igual área, no todas tenían el mismo volumen y que éste depende de la altura que tenga la caja. Observaron que una vez recortado el cuadrado, para modificar la altura de la caja tenían que utilizar un nuevo pedazo de cartulina, pegar lo recortado o tomar una longitud mayor del lado del cuadrado. Además, la medición de las longitudes no era precisa porque mediante el uso de una escuadra o una regla, la longitud en algunos casos, era aproximada, también se observó que ningún estudiante utilizó otro conjunto numérico diferente a los enteros y que la actividad requería de bastante tiempo.



Luego de resolver el problema con la cartulina se les enseñó a modelar y a simular la situación en la calculadora a través del cabri, con esta actividad se logró que los estudiantes comprendieran que del problema se podían tener varias representaciones, encontrando allí una mayor variedad de modelos y la posibilidad de explorar variaciones, puesto que al mover un punto sobre el segmento que representaba la altura se podía apreciar una buena cantidad de datos del volumen, de la altura, del largo y del ancho de la caja (variando la longitud del lado del cuadrado, obtenían una familia de cajas de diferentes volúmenes), también vieron que la longitud del lado del cuadrado podía tomar valores no enteros, que se tenía mayor exactitud si aumentaban el número de cifras decimales de los valores que da la calculadora y que las construcciones que dependían del punto que se movía se "afectaban".
Una vez se recolectaron algunos datos y se analizaron para determinar cuál caja era la de mayor volumen se representaron en un sistema de coordenadas, en el eje horizontal localizaron la altura y en el eje vertical el volumen. En primera instancia creyeron que el lugar geométrico que describe el punto que representa la altura y el volumen corresponde a una parábola que abre hacia abajo y, que su vértice determina el máximo volumen, pero al analizarlo con toda la clase, encontraron que ese lugar geométrico no tiene eje de simetría y que por lo tanto, no corresponde a una parábola; además, que la ecuación que representa el volumen es cúbica y que la parábola se representa algebraicamente con una ecuación cuadrática.
Los estudiantes concluyeron que mediante el uso de la calculadora, una situación problema puede representarse de diferentes maneras en forma rápida, exacta y sencilla; la recolección de datos, la modelación de la caja en tres dimensiones con su variación de altura y volumen y la visualización del lugar geométrico, es un proceso que permite comprender mejor el concepto de variación. La modelación con la calculadora ahorra tiempo y materiales. Esta actividad también sirvió para que los estudiantes se iniciaran en el estudio de los conceptos de variabilidad, dependencia, sistemas de representación, dominio, recorrido, función, vector, traslación en el plano los cuales no se habían estudiado hasta ese momento. Vieron además, la potencialidad de la calculadora en sus sistemas dinámicos, aspecto necesario en la solución de problemas de modelación.

Referencias bibliográficas

Fiallo L, J.; Osorio A, R y otros. (1998). *Programa de cualificación permanente de docentes de matemáticas*. Grados 6º y 7º. Módulos 1, 2 y 3. Ediciones UIS, Bucaramanga, Colombia.
Fiallo l, Jorge. (2000). *El modelo de Van Hiele y el cabri geometry en la enseñanza de la geometría.* Universidad Industrial de Santander, curso corto presentado en RELME 14, Ciudad de Panamá, Panamá.
Ministerio de Educación Nacional. (1999). Proyecto: *Incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media oficial de Colombia.* Grupo de investigación pedagógica. Santafé de Bogotá, Colombia.
Ministerio de Educación Nacional. (febrero de 1999) Serie lineamientos curriculares. Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas. Santafé de Bogotá.

La solución de problemas con tecnología de punta

José Carlos Cortes Zavala, Armando López Zamudio.
UMSNH, CBTIS No.94 México
cortes@zeus.ccu.umich.mx   larmandozam@hotmail.com

Resumen
La tecnología como son las computadoras y las calculadoras graficadoras, promete que los estudiantes puedan explorar y entender conceptos y técnicas para resolver problemas. Su uso permite que los estudiantes aborden temas dentro de la curricula formal de matemáticas, y de alguna manera ayuda a mantener la curiosidad, imaginación e interés de los estudiantes, La NCTM (1989, 2000) recomienda para los grados que corresponden al bachillerato, incluir en el curriculum, refinamiento y extensión de métodos de resolución de problemas para que todos los estudiantes puedan aplicar procesos de modelación matemática a problemas del mundo real.

Antecedentes: Cada día es más común que los profesores de matemáticas integren la tecnología en el salón de clase ya sea adecuándola a los programas vigentes y/o en el diseño de nuevas estrategias didácticas; la OCED (Black, et.al,1996) publicó 23 casos de estudio, de 13 países, referidos a la innovación en la educación científica, matemática y tecnológica. Cita, por ejemplo, que en los Estados Unidos se diseñó un curso de precálculo basado en modelación de fenómenos reales y que, según el estudio, a los profesores les resultó fundamental el uso de las calculadoras y computadoras.
Por otro lado, The National Council Teacher of Mathematics (NCTM, 1989) pone énfasis en la deducción y resolución de problemas usando como medio a las calculadoras y computadoras.
El libro "Funciones en contexto" (Hitt 1999) es un claro ejemplo de cómo las nuevas propuestas didáctica promueven el usar tecnología para que los estudiantes obtengan un mejor acercamiento al concepto de función. Al presentar problemas en diferentes representaciones y usar tecnología permitimos a los estudiantes explorar, conjeturar y visualizar relaciones matemáticas en estas múltiples representaciones; de acuerdo con lo expresado por Duval (Duval 1993) el estudiante tendrá una aprehensión del concepto en juego, en el mismo sentido Demana y Waits (1990) afirman que la habilidad de los estudiantes para operar en y entre diferentes representaciones de un mismo concepto o situación problémica, es fundamental en el aprendizaje matemático la aplicación efectiva de la tecnología.
Ahora bien ¿qué diferencias fundamentales hay entre usar calculadora o usar computadora?, una primera respuesta a esto es la portabilidad pero es aquí donde las tecnología de punta, como la "Cassipeia", nos permite incorporar esta ventaja de portabilidad con todas las demás de la computadora.

Objetivos. Dar a conocer un material que surge de un proyecto de investigación que consiste en generar secuencias didácticas que sean guía del alumno e instrumento del docente. Se ejemplifican algunas actividades mostrando el potencial didáctico que podemos obtener con la "Cassiopeia" y que nos permite llevar un laboratorio de computo (cuyo tiempo de uso es plenamente competido en nuestros países Latinoamericanos) a un salón de clases de bachillerato ya que al usarlo como un pizarrón electrónico capaz de combinar la geometría dinámica (a través del Geometer's Sketchpad), el cálculo simbólico y gráfico (a través de MAPLE), cálculo numérico (a través de Excel) y conjuntado todo ello a través del

Power-Point nos permitirá modelar y visualizar múltiples representaciones de un problema para apoyar la aprehensión de los conceptos matemáticos.

Metodología. Se realiza el diseño de las secuencias para que el estudiante las use a manera de practicas de laboratorio, usando el ambiente de Power Point, se organizan clases por módulos que permiten utilizar varias aplicaciones del software que viene implementado en la Calculadora graficadora Cassiopeia, esto nos permite articular las representaciones de un concepto tal como lo sugiere Duval (1993) en su ya famoso artículo la articulación de dos registros. El material se válida en un estudio piloto que permite analizar las dificultades de aprendizaje generales y específicas de los estudiantes y estas dan pautas para modificar las instrucciones de las secuencias didácticas. Esto también permite detectar las dificultades que el docente sortea al aplicarlas. A continuación abordaremos dos problemas en los que señalaremos el tipo de actividades que pretende este trabajo.

El problema uno:
El señor López necesita alquilar un auto por un día, pero el tiene un dilema. La agencia de arriendo de automóviles le ofrece dos planes de arriendo:
Plan 1: $400 pesos por día con kilometraje ilimitado.
Plan 2: $200 pesos por día más $2 pesos por kilómetro recorrido.

Se plantean las siguientes preguntas:
¿Cuál plan le conviene más al señor López?

- La primera Representación: Pensemos en simbolizar este problema, planteándolo como ecuaciones:

Plan 1 Costo por Día= $400(sin cobrar distancia recorrida)
$C_1=400$
Plan 2 Costo por Día= $200 +$2 X Kilómetro(*x*) recorrido
$C_2=200+2x$

- La segunda representación, tomando la aplicación de Execel podemos hacer una representación tabular (tabla 1), sabemos que el plan uno no depende del kilometraje recorrido, mientras que el plan dos si depende del kilometraje recorrido:

x	x	C_1	C_2
1	1	400	202
2	2	400	204
3	3	400	206
4	4	400	208
5	5	400	210
50	50	400	300
100	100	400	400
150	150	400	500
200	200	400	600

Tabla 1

Al abordar esta representación los alumnos notan que para ciertos kilómetros recorridos el señor López tendrá que pagar menos dinero en el plan dos, pero para otro recorrido el plan uno paga menos. Por lo que eventualmente llegan a la conclusión que su respuesta depende de los kilómetros, que desee recorrer el señor López.

Una nueva pregunta es lanzada al grupo, ¿cuál es la distancia recorrida que no se pierde ni se gana, escogiendo cualquiera de los planes?

- La tercera representación. Algunos estudiantes sugieren la utilización de la gráfica para representar los dos planes y así tener una visualización más global del problema, recurrimos a la aplicación de MAPLE para gráficar las ecuaciones (fig.1):

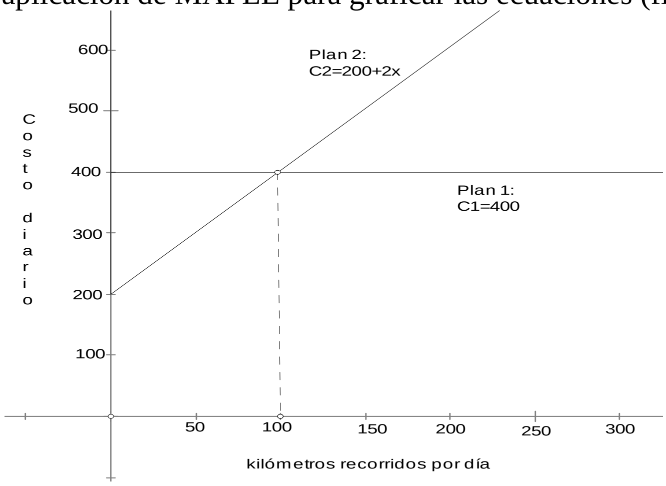


Fig. 1

Al observar la gráfica notamos que cuando se recorren 100 Kilómetros se pagan en ambos planes 400 pesos, ahora bien si regresamos a la tabla observamos que para x=100 C1 y C2 toman el mismo valor es decir 400. Los estudiantes pueden llegar a concluir que para recorridos menores de 100 kilómetros es mejor el plan 2 mientras que para recorridos mayores de 100 kilómetros es mejor que el señor López tome el plan 1.

Una nueva actividad dentro de este mismo problema puede ser planteada a los estudiantes, Como podemos encontrar ese punto critico donde se interceptan las dos rectas, es decir donde los planes no quedan en ventaja o desventaja.

- Una cuarta representación. Recurrimos a la representación algebraica usando el MAPLE podemos resolver el sistema de ecuaciones

$$C_1=y=400$$
$$C_2=y=200+2x$$

La y nos representa el costo de alquilar el auto por lo que nuestro problema queda representado mediante un sistema de ecuaciones el cual podemos resolver por algún método, o simplemente pedirle a la calculadora que resuelve dicho sistema de ecuaciones: Así la solución por igualación sería:

$200+2x=400$
$2x=400-200$
$x=200/2$
$x=100$

por lo que la solución es el punto (100,400), que es el que se encontró en la representación gráfica.

- La quinta representación: A través de MAPLE también podemos realizar la representación matricial del sistema y resolverlo encontrando la matriz inversa lo cuál MAPLE realiza fácilmente:

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 400 \\ 200 \end{bmatrix}$ entonces la solución de AB=C es B= $A^{-1}C$ así B= $\begin{bmatrix} 100 \\ 400 \end{bmatrix}$

El problema dos:
Construcción de una cerca que contenga un máximo de área.

Un granjero le dijo a su hijo que utilizara 50 metros de alambre para cercar un terreno y que ese espacio lo utilizara para construirse una casa para él solo. El hijo nada tonto se preguntó si con los 50 metros de alambre se podrían conseguir diferentes tipos de terrenos y así escoger el más grande. En los terrenos de su padre había un lado que colindaba con otra construcción donde tenían una barda. Lo primero que se le ocurrió al hijo fue construir la cerca de manera que uno de los lados fuera la barda, así podría aprovechar parte del alambre para cubrir más área (Fig. 2).

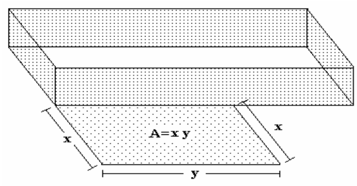


Figura 2

¿Cuál es el máximo de área que puede obtener el hijo de esta manera?

Solución Algebraica:

$2x + y = 50$ y el área A = x y. Despejando $y = 50 - 2x$, y sustituyendo en el área tenemos $A = x\,y = x(50 - 2x)$. Es decir que es posible poner al área en función de x. O sea, $A(x) = x(50 - 2x)$. Para encontrar el máximo derivamos $\frac{d(A(x))}{dx} = \frac{d(50x - 2x^2)}{dx} = 50 - 4x$ e igualamos a cero $50 - 4x = 0 \to x = 50/4$. Resolviendo para y tenemos $y = 50 - 2(\frac{50}{4}) = 25$

por lo que el área máxima será: $\frac{25}{2} * 25 = 312.5m^2$

Solución gráfica:

Grafiquemos la función para saber de qué estilo es (Fig. 3).

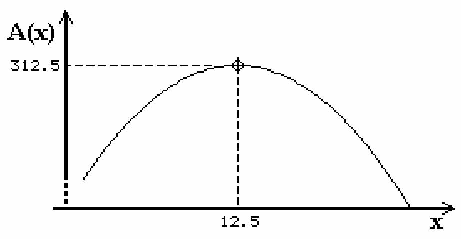


Figura 3

Es una función cuadrática donde el máximo se alcanza cuando x toma el valor de 12.5 metros, obteniéndose un área máxima de 312.5 m^2.

Solución Numérica: (*leer los valores multiplicados por 10* tabla 2).

x	área	x	área	x	área
1,75	2,62	1,54	2,95	1,33	3,11
1,74	2,63	1,53	2,96	1,32	3,11
1,74	2,65	1,52	2,97	1,31	3,11
1,73	2,66	1,52	2,97	1,31	3,11
1,72	2,67	1,51	2,98	1,30	3,11
1,71	2,69	1,50	2,99	1,29	3,12
1,71	2,70	1,50	3,00	1,29	3,12
1,70	2,71	1,49	3,00	1,28	3,12
1,69	2,73	1,48	3,01	1,27	3,12
1,68	2,74	1,47	3,02	1,26	3,12
1,68	2,75	1,47	3,02	1,26	3,12
1,67	2,76	1,46	3,03	1,25	3,12
1,66	2,78	1,45	3,04	1,24	3,12
1,66	2,79	1,44	3,04	1,23	3,12
1,65	2,80	1,44	3,05	1,23	3,12
1,64	2,81	1,43	3,05	1,22	3,12
1,63	2,82	1,42	3,06	1,21	3,12
1,63	2,83	1,42	3,06	1,21	3,12
1,62	2,84	1,41	3,07	1,20	3,11
1,61	2,86	1,40	3,07	1,19	3,11
1,60	2,87	1,39	3,08	1,18	3,11
1,60	2,88	1,39	3,08	1,18	3,11
1,59	2,89	1,38	3,09	1,17	3,11
1,58	2,90	1,37	3,09	1,16	3,10
1,58	2,91	1,37	3,09	1,15	3,10
1,57	2,92	1,36	3,10	1,15	3,10
1,56	2,92	1,35	3,10	1,14	3,10
1,55	2,93	1,34	3,10	1,13	3,09
1,55	2,94	1,34	3,10	1,13	3,09
1,54	2,95	1,33	3,11	1,12	3,09
				1,11	3,08
				1,10	3,08
				1,10	3,07
				1,09	3,07

Tabla 2

haciendo un análisis de las tablas anteriores podemos ver como se comporta el valor del área y como va aumentando hasta cuando llega al valor de x=1.29 y que se mantiene constante den el intervalo de x=1.29 hasta 1.21, si realizamos nuevamente *un "zoom tabular"* veríamos más claramente el comportamiento correcto.

Modelo Dinámico:

En el modelo Dinámico (fig. 4) podemos mover la cantidad de alambre que tenemos (punto "a"), es decir generalizar para diferentes cantidades, y podemos ver como se construye la cerca (al mover el punto "b"), al realizarlo veremos como se modifica el valor numérico del área y como va modificándose el lugar en que nos encontramos en la gráfica

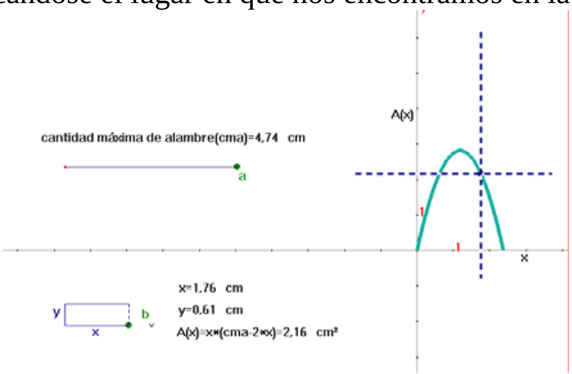


Figura 4

Conjuntado los usos a través del Power-Point

Una parte importante de las actividades consiste en tener acceso a todo desde un mismo archivo es decir tener un menú desde el cual podamos accesar la representación que queramos trabajar y es a través del uso del Power-Point que tiene la "Cassiopeia" que podemos realizar lo anterior, como ejemplo veamos la figura 5

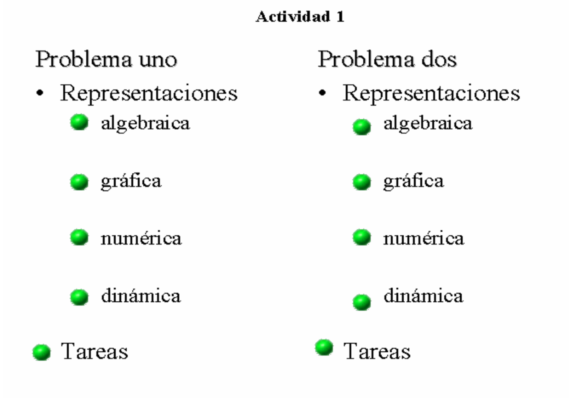


Figura 5

en la cual realizamos, utilizando Power-Point, un menú que nos permita acceder a cada una de las representaciones usando los archivos ya construidos.

Conclusiones

Este tipo de actividades a sido implementado en curso taller de docentes del nivel medio superior, los profesores se muestran muy entusiasmados con la manera de trabajar ya que visualizan más fácilmente algunos conceptos y someten a verificaciones sus conjeturas con una variedad de casos lo que a lápiz y papel mucha veces resultaba imposible sobre todo en los tiempos asignados para una clase. Un gran trabajo queda por desarrollar en varios tópicos de la curricula del bachillerato, pues diseñar actividades como las aquí propuestas es una tarea no terminada para los investigadores y educadores.

Referencia bibliográficas

Black Paul et al (Compiladores). (1996). *Matemáticas, Ciencia y Tecnología-Innovaciones* Ed. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. D.R.Organización para la Cooperación Económica y el desarrollo (OCED).

Demana, Franklin a, Bert K. Waits (1990*). Enhancing Mathematics Teaching and Learning through Technology*. En Teaching and Learning Mathematics in the 1990's, 1990 Year book of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Thomas J. Cooney an Christian R. Hiirsch, pp. 212-220. Reston, Va.: NCTM.

Duval (1993). *Registros de Representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.*

Hitt, F. (1999). *Funciones en Contexto.* por publicarse

National Council of Teachers of Mathematics, (1989).*Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Va.: The Council. U.S.A.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va 20191-9988.: The Council. U.S.A.

La enseñanza de la geometría asistida por computadoras en la Secundaria Básica Cubana

Mario Estrada Doallo; Carlos Negrón Segura; José A. Hernández Benítez; Antonio Campano Peña
ISP “José de la Luz y Caballero”, Holguín. Cuba
cnegron@isp.holguin.inf.cu

Resumen
Históricamente los sistemas de representación de la Matemática tienen carácter estático, hecho que dificulta, en muchas ocasiones, la construcción del significado y del conocimiento. Las nuevas tecnologías ofrecen la posibilidad de que los aspectos estáticos alcancen un carácter dinámico, lo que tiene su influencia positiva en los procesos cognitivos de los alumnos. En el aprendizaje de la Matemática la computadora da la posibilidad de “hacer matemática”, experimentar, visualizar, generalizar y plantear conjeturas, entre otros aspectos de interés. En este trabajo se aborda el posible uso del ordenador para la enseñanza de la Geometría en la Secundaria Básica de la escuela cubana. El mismo es el resultado de un Proyecto de Investigación dirigido a la enseñanza de la Matemática a través de los medios de cómputo, con el empleo de diferentes paquetes de programas y propuesto para desarrollar en los próximos años. En este caso se trabaja con el programa de Geometría Dinámica ***Geometer's Sketchpad,*** que brinda *movilidad, construcción de lugares geométricos, determinación de imágenes por diferentes transformaciones geométricas, variedad de colores, diferentes tamaños y formas de letras, posibilidad de incluir textos, inclusión de sistemas de coordenadas, calculadora, etcétera* y cuya manipulación resulta muy fácil para el alumno.

Introducción

La aparición de herramientas tan poderosas como la calculadora gráfica y la computadora comienzan a influir fuertemente en los intentos por orientar la educación matemática primaria y secundaria adecuadamente, de forma que se aprovechen al máximo tales instrumentos de trabajo. Es claro que, por diversas circunstancias tales como costo, novedad, falta de preparación de los profesores, hostilidad de algunos, etcétera, no se han logrado encontrar modelos plenamente satisfactorios. Este es uno de los retos importantes del momento presente, y, en consecuencia, es lícito vislumbrar que la forma de enseñar y los contenidos a impartir tienen que experimentar drásticas reformas.

La enseñanza de la Geometría se ha enriquecida por el desarrollo de una gran cantidad de softwares para computadoras y su utilización es altamente deseable en la enseñanza y el aprendizaje, pues con su uso se logra (Negrón y Estrada, 2000):

- La estimulación de la creatividad, el interés por el aprendizaje, la apropiación de los conocimientos, y el acicate al desarrollo intelectual.
- Estimular al alumno hacia el descubrimiento y facilitar la construcción de conceptos.
- La construcción de gráficos de manera fácil y rápida, que permiten economizar tiempo y enfatizar sobre aspectos conceptuales de la Geometría.
- Modificar las relaciones sociales en el aula, pues promueve la discusión y el trabajo en grupo.
- Que el profesor se convierta en un facilitador y guía del aprendizaje.

Desarrollo

En la actualidad, se está inmerso en nuevos cambios en la enseñanza de la Matemática dentro de la Secundaria Básica cubana. Con los nuevos programas los contenidos geométricos ocupan el 40 % de todos los contenidos matemáticos que deben recibir los estudiantes en este nivel de enseñanza; de aquí la importancia que merecen.

Se han determinado tres habilidades fundamentales que deben lograr los alumnos al culminar la Secundaria Básica: *procesar datos, estimar y esbozar geométricamente.*
Otro hecho que demuestra la importancia de la Geometría en este subsistema es que uno de los cuatro objetivos generales de la Matemática en la Secundaria Básica cubana es *orientarse adecuadamente en el entorno espacial, sus proporciones y magnitudes con el empleo de la Geometría Plana y el cálculo de cuerpos, como recursos para confeccionar esbozos e interpretar el medio natural y productivo en que se desenvuelven, y como soportes para su apreciación estética.*
Como se puede inferir, la Geometría debe incidir de manera directa en la formación matemática del estudiante y se pretende que los estudiantes sean capaces de: *identificar figuras geométricas elementales, mantener proporciones en el dibujo, conservar las propiedades esenciales en el trazado de figuras, realizar construcciones básicas necesarias y situar puntos de referencia.*
Por otro lado, al hacer un análisis de los nuevos programas para la enseñanza de la Matemática en la Secundaria Básica se hace necesario variar el estilo de aprendizaje de los estudiantes, por lo que hay un énfasis hacia el aprendizaje significativo y por descubrimiento, los cuales tienen puntos de contacto; es decir, tienen como rasgos fundamentales el papel de las situaciones y vivencias, la vida cotidiana y las experiencias previas como punto de partida para el aprendizaje y la necesidad de desarrollar el proceso de enseñanza - aprendizaje a partir de la investigación, el experimento y la exploración. Es por ello que, en un futuro, el uso de la computación puede contribuir en gran medida a lograr estos propósitos, sobre todo en la exploración y elaboración de hipótesis.
En la investigación realizada por Navarro y Cruz (2000) en las 18 Secundarias Básicas de la cuidad de Holguín, que estuvo dirigida a la enseñanza de la Geometría en este nivel de enseñanza, se estudiaron los problemas que afectan el desarrollo del proceso docente - educativo de la Matemática y en particular de la Geometría; y entre ellos uno de los resultados más notorios fue la dificultad en la dirección de este proceso, que trae como consecuencia que el estudiante no logre el protagonismo deseado dentro del aula. En dicha investigación se considera el uso de los medios de cómputo como una alternativa que puede contribuir en este sentido, sobre todo en alcanzar un aprendizaje significativo.
Para este trabajo se aplicó una encuesta (ver Anexo) a 19 profesores de experiencia que trabajan en el séptimo grado y que han impartido la Unidad 3: *El Mundo de las Figuras Planas,* y se corroboró que con el uso de la computadora es posible:

- Elaborar una estrategia dirigida a desarrollar la unidad de enseñanza con el uso del sistema Geometer’s Sketchpad.
- Lograr mejores resultados en el aprendizaje de los contenidos que se desarrollan en esa unidad de enseñanza.
- Lograr la participación activa de los estudiantes en la construcción del conocimiento.
- Contribuir en el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes.
- Lograr una mejor motivación y comprensión de los contenidos a tratar en esta unidad de enseñanza.

Es por ello que en esta investigación se asume una estrategia de *aprendizaje significativo por descubrimiento guiado,* con las siguientes características:
✓ La metodología subyacente es activa y propiciadora de la investigación.

- ✓ El estudiante trata de construir su propio aprendizaje a partir de la experiencia. Esta actividad la guía y orienta el profesor, tanto desde la perspectiva de los conocimientos como desde el punto de vista conceptual.
- ✓ El profesor facilita la labor del estudiante y lo orienta en su proceso de aprendizaje.
- ✓ Necesita un modelo de enseñanza individualizada y tutorial bien diseñado.

Se proponen, entonces, los pasos siguientes para trabajar los contenidos de Geometría, empleando la computadora, en Secundaria Básica:

- ➢ Estudio y selección de los contenidos que emplearán la computadora en su desarrollo.
  Lo primero es hacer un estudio minucioso del programa, donde se analicen los objetivos propuestos para el grado, la unidad y las actividades docentes, pues se debe tener bien claro qué habilidades matemáticas deben desarrollarse con el programa. Luego se hará un análisis de los contenidos de Geometría que se impartirán y cuáles serán abordados en el programa de Geometría Dinámica, ya que de los contenidos que se imparten en la Secundaria Básica hay que escoger los más eficientes para el aprendizaje de la Geometría con la computadora, es decir, no todos los contenidos objetos de estudio deben trabajarse por esta vía.
- ➢ Tener en cuenta las diferencias individuales de los estudiantes.
  Es importante conocer las situación real de cada alumno, pues en función de ello se planificarán las actividades, es decir, se pretende lograr una enseñanza diferenciada, de modo que se actúe no solo sobre los aspectos que no domina el estudiante, sino también sobre los aspectos que conoce y sobre el potencial de cada alumno, es decir, trabajar en la zona de desarrollo próximo.
- ➢ Tener presente las condiciones del laboratorio de computación.
  Hay que considerar el total de máquinas disponibles para el desarrollo de la actividad docente, pues en dependencia de la cantidad de máquinas y de alumnos se diseñarán las tareas para desarrollar la clase, aspecto este que tiene relación con lo referido a las diferencias individuales, ya que así serán distribuidos los alumnos por máquinas.
- ➢ Planificar las diferentes tareas que resolverá el estudiante ante el computador, con el objetivo de que estas sean lo más eficientes y efectivas posible.
  Luego de la selección de los contenidos que se abordarán habrá una planificación minuciosa de las tareas a realizar por el estudiante en el computador; con estas tareas el alumno obtendrá el conocimiento a través de la formulación de conjeturas, que luego se demostrarán matemáticamente con los conocimientos que posee del curso desarrollado. También es en este momento donde se planificarán las actividades que debe realizar el profesor en el aula con los alumnos, con el objetivo de trabajar sobre el potencial que tiene cada estudiante.
  Se propone el siguiente guión para el trabajo en el aula:

ACCIONES DEL ALUMNO	CONCEPTOS UTILIZADOS. POSIBLES PREGUNTAS	SUGERENCIAS Y TAREAS

1. La primera columna contiene la “acción” que hay que efectuar directamente con la barra de botones del sistema de Geometría Dinámica.
2. La segunda columna especifica los conceptos involucrados y las implicaciones de las acciones anteriores. Forman el núcleo de la actividad y deben presentarse y discutirse hasta su completa asimilación. Esto es de gran importancia, por cuanto es precisamente esta presentación y discusión la que proporcionará la actividad directa por parte del

alumno y que, a su vez, posibilitará la asimilación y comprensión de los conceptos y procedimientos que se enumeran en esta columna.

3. La tercera columna contiene sugerencias didácticas, posibles exploraciones y actividades complementarias que se pueden realizar.

➢ Llevar un registro individual, donde se recojan los avances y dificultades de cada estudiante.
  Este punto resulta interesante ya que el registro individual le facilitará al profesor un control más exacto de cada uno de los alumnos del grupo, lo que propiciará planificar de una manera más eficiente las próximas actividades a desarrollar con el estudiante. Para este aspecto el profesor se puede apoyar en la opción “historia”, que tienen los programas de Geometría Dinámica.

Al adentrarse en las actividades docentes se cuenta con diferentes programas de Geometría Dinámica. Estos programas permiten realizar dos categorías de acciones interdependientes (citado por Azinia, 1998):

- Tratamiento y controles perceptivos fundados en el reconocimiento de formas o de fenómenos como la alineación, la perpendicularidad, el paralelismo.
- Tratamiento y controles por los conocimientos teóricos de geometría, que permiten explicar, predecir, producir.
- La interacción precisa entre percepción y geometría se da cuando se utilizan las funciones de los programas para verificar las observaciones.

Características importantes de estos programas son:

- *Holística*: apreciar una situación en forma global, visualizando configuraciones con relaciones entre diversos elementos.
- *Dinamismo*: permite animar las configuraciones y observar los cambios.

Los estudiantes pueden plantear conjeturas y comprobarlas. La prueba, más que por su función tradicional de verificación, es percibida como útil y necesaria por los alumnos como actividad explicativa de la evidencia experimental. La necesidad de la prueba, identificada como el mayor obstáculo para la enseñanza de la Matemática por los docentes, debe ser orientada hacia la función de descubrimiento y hacia sus aspectos comunicativos.

Para este trabajo se escogió el *Geometer’s Sketchpad*, porque es una herramienta que sirve para construcciones en Geometría. Dispone de una regla y un compás electrónicos, siendo la interfase a través de menúes de construcciones en lenguaje clásico de la Geometría. Los diseños de los objetos geométricos son hechos a partir de las propiedades que los definen. Al aplicar las transformaciones a los elementos que componen el diseño, estos se transforman, manteniendo las relaciones geométricas que caracterizan la situación presentada. Se trabaja con Geometría Sintética y algo de Geometría Analítica. También, este programa da la posibilidad de capturar los procedimientos, es decir, son grabados los procedimientos de los alumnos en su trabajo de construcción, y mediante la solicitud de la opción “historia” el estudiante puede repasar el desarrollo de su construcción; esto permite analizar sus acciones e identificar dónde cometió los errores, lo que contribuirá a su desarrollo metacognitivo. Otra de las opciones que tiene es la construcción de macros, de interés en la realización de las tareas; también supone la posibilidad de visualización de un lugar geométrico, concepto dejado de lado tradicionalmente por la dificultad de visualizar trayectorias recorridas por objetos que cumplen ciertas propiedades.

A continuación se presenta un ejemplo elaborado para aplicar este sistema, relativo a las rectas notables en el triángulo, el cual es trabajado en el séptimo grado de la escuela cubana.

Ejemplo: Explorando las propiedades de las mediatrices de un triángulo se orienta al alumno que construya:

a) Un triángulo ABC.
b) Los puntos medios de cada lado: L, M, N.
c) Las mediatrices de dos de los lados de un triángulo. ¿Qué relación existe entre estas dos rectas?

Luego se le pide que conteste:

- ¿La tercera mediatriz pasa siempre por el punto de intersección de las otras dos?
- ¿Este punto de intersección G es siempre interior al triángulo?
- ¿Qué sucede si el triángulo es rectángulo, isósceles o equilátero?
- Elabora una conjetura relativa a las mediatrices de un triángulo.
- La circunferencia de centro G y radio GA, ¿contiene siempre los otros vértices?
- ¿Qué se puede decir de las distancias de G a los vértices del triángulo?
- Describe cómo construir la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo.

Para la solución de este ejercicio el alumno tiene que dominar el concepto de mediatriz de un segmento; en caso de no dominar el concepto se le puede solicitar la construcción de la misma paso a paso; otra posibilidad es hacer una macro donde se construyan las mediatrices de un triángulo cualquiera y usarla en la solución.

Con este ejemplo el estudiante obtiene una conjetura que luego demostrará con la utilización de los conocimientos referidos a la igualdad de triángulos; en esta última fase, la de demostración, el computador continúa desempeñando su papel, a través de la posibilidad de descubrir nuevos elementos en la representación, en este caso los segmentos que determinan los triángulos cuyas congruencias son bases para la argumentación de la propiedad. De manera análoga, se puede realizar el mismo trabajo con las alturas, las bisectrices y las medianas, e incluso los alumnos pueden llegar a la recta de Euler en el triángulo, aspecto que les resultará de interés.

Se ha presentado un ejemplo donde se visualiza la potencia de interacción con la herramienta computacional, para ayudar al docente a superar sus primeras tentativas de proponer la repetición de situaciones tal como aparecen – estáticas - en los libros de texto.

Conclusiones

El impacto tecnológico en los ámbitos educativos es un hecho irreversible y caracterizará el quehacer pedagógico en un futuro cercano. Él sitúa retos a los docentes, a los investigadores en Educación Matemática y a toda la estructura de dirección que toma las decisiones en cuanto a la introducción de equipos y softwares en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Los ritmos de desarrollo y la presencia en toda la vida humana de los recursos informáticos obligan a las instituciones a tenerlos en cuenta y a transformar la propia concepción educacional, pero este fenómeno tiene bondades y peligros, asociados al uso que se les dé y a la forma en que se administre para que sean patrimonio de todos y no sólo de una parte. En la investigación llevada a cabo se pudo constatar que:

- El uso de los medios de cómputo puede contribuir en gran medida al logro de los objetivos propuestos para la Secundaria Básica cubana y, en particular, para los programas de Geometría Dinámica.
- Existen deficiencias en la preparación de los docentes en cuanto a la utilización de los sistemas de aplicación dirigidos a la enseñanza de la Matemática así como en la preparación metodológica para su uso.

- Con la metodología propuesta pueden desarrollarse los contenidos de Geometría abordados en el séptimo grado de la escuela cubana y lograr resultados positivos en el aprendizaje de los estudiantes.

Se recomienda:

- Actualizar a los docentes de la Secundaria Básica cubana sobre la utilización de los sistemas de aplicación dirigidos a la enseñanza de la Matemática, tanto desde el punto de vista tecnológico como metodológico.
- Incluir en el curriculum de la carrera de Licenciatura en Educación en la especialidad de Matemática-Computación el uso de medios de cómputo en la enseñanza de la Matemática, como una signatura más.

Referencias bibliográficas

Antunes, R. (1998): Planificar un aula informatizada. Escola Secundaria Raúl Proença, Caldas da Rainha, Portugal, IV Congreso RIBIE, Brasilia.

Azinian, H. (1998): Capacitación docente para la aplicación de tecnologías de la información en el aula de geometría**,** Universidad de Buenos Aires, IV Congreso RIBIE, Brasilia.

Cheung, K. (1998): Una Exploración en la Introducción de Informática en el Aula de Matemática de Escuelas de Macau. Macau. En: *Actas del Congreso Internacional de Educación Matemática del Continente Asiático.*

Coelho, M. I. (1997): O Cabri- géomètre na resolução de problemas: Processos evidenciados e construão de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade. En: *Aprendizagens em Matemática*. Secção de Educação e Matemática. Sociedad Portuguesa de Ciências da Educação. Portugal.

Gravina, M.A.; Santarosa, L.M. (1998): A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. IV Congreso RIBIE, Brasilia.

Grünberg, J.; Olmedo, A. (1998): Profesores y computadores: Una investigacion sobre los factores que afectan el uso de computadores en colegios secundarios, IV Congreso RIBIE, Brasilia.

Izquierdo, N.; Fernández, C. (1998)*:* El uso de computadoras y supercalculadoras en la enseñanza de la matemática. En: *Tendencias Iberoamericanas en la Educación Metemática.* ISP “Enrique José Varona”, Facultad de Ciencias, Dpto. de Matemática-Computación, Ciudad de la Habana, Cuba.

Navarro, N. Cruz, Y. (2000): *Metodología para el desarrollo del tema de proporcionalidad y semejanza de figuras*. Trabajo de Curso. ISP “José de la Luz y Caballero”, Holguín.

Negrón, C. (1998): *Propuesta de integración de los marcos geométrico, numérico y algebraico en relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Tesis presentada en opción al título de Máster en Didáctica de la Matemática. I. S. P. “José de la Luz y Caballero”, Holguín.

Negrón, C, ; Estrada, M. (2000): Aprendiendo a descubrir con la computadora. Ponencia al evento Pedagogía 2 001, Holguín.

Shang, R.; Chong, T. (1998): La Valoración de la computadora Prueba al Nivel Terciario, Singapore. En: *Actas del Congreso Internacional de Educación Matemática del Continente Asiático.*

Sidericoudes, O (1998): A formalização de conceitos da geometria analítica através do micromundo Logo. Núcleo de Informática Aplicada à Educação – NIED, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, São Paulo, IV Congeso RIBIE, Brasil.

Thanh, N. (1998): Un Ambiente Interactivo para la Resolución de Problemas de Geometría: la Concepción, Realización y Experimentación, Vietnam. En: *Actas del Congreso Internacional de Educación Matemática del Continente Asiático.*

Anexo

Encuesta a Profesores

Con el objetivo de constatar la posible utilidad del uso del Geometer’s Sketchpad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos relativos a la Unidad 3 que se imparte en el séptimo grado, solicitamos su cooperación en el llenado de esta encuesta.

1. ¿Es posible elaborar una estrategia de trabajo para el uso del Geometer’s Sketchpad en el estudio de la Unidad 3 que se imparte en el séptimo grado y que se corresponda con los objetivos planteados en este grado?

___ Totalmente ___ Parcialmente ___ No ___ No sé

2. ¿El uso del Geometer’s Sketchpad puede facilitar la comprensión, por parte del estudiante, de los contenidos a tratar en esta Unidad con la aplicación de este programa de Geometría Dinámica?

___ Sí ___ Un poco ___ No

3. ¿El uso del programa Geometer’s Sketchpad propiciará la participación activa de los estudiantes en la construcción de sus conocimientos?

___ Sí ___ Un poco ___ No

4. El uso del Geometer’s Sketchpad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Unidad 3 del séptimo grado puede:

a) ___ Resultar aburrido.
b) ___ Estimular el cumplimiento de los objetivos.
c) ___ Contribuir a la motivación del estudiante.
d) ___ Ser interesante.
e) ___ Entorpecer el cumplimiento de los objetivos.
f) ___ Contribuir al desarrollo del pensamiento lógico.
g) ___ Ser innecesario
h) Otras.

	Pregunta 1			
	Totalmente	Parcialmente	No	No sé
Cantidad de Profesores	14	2		3

	Pregunta 2		
	Sí	Un poco	No
Cantidad de Profesores	16	3	

	Pregunta 3		
	Sí	Un poco	No
Cantidad de Profesores	17	2	

	Pregunta 4							
	a	b	c	d	e	f	g	h
Cantidad de Profesores		15	16	16		14		

Las nuevas tecnologías: ¿son incorporadas en la enseñanza de la matemática?

M. Astiz; P. Medina; M. Vecino; S. Vilanova; M. Rocerau; M. Oliver; G. Valdez ; E. Alvarez
Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina
mastiz@mdp.edu.ar pmedina@mdp.edu.ar

Resumen
El presente trabajo describe, por un lado la influencia de las Nuevas Tecnologías (NT) en la enseñanza de la matemática atendiendo a las recomendaciones de distintos organismos relacionados con la educación, las posibilidades que ofrecen estas herramientas, las diferentes formas de incluirlas en el proceso de enseñanza-aprendizaje y el cambio de rol del docente ante la incorporación de las mismas en el aula. Por otra parte, en base a un cuestionario realizado sobre una muestra de docentes de matemática en actividad de la provincia de Buenos Aires (Argentina), se presenta un análisis de la situación actual sobre el nivel de utilización de la computadora en la enseñanza de esta disciplina. Este análisis permite observar la distancia que hay entre las recomendaciones y la realidad.

Introducción

"La educación matemática tiene el reto ineludible de sintonizar con el mundo nuevo. Eso quiere decir usar de manera normal los nuevos medios, aceptando calculadoras y computadoras y abandonando quizás unos modelos unidos a la computación manual o la descripción cuantitativa del mundo físico para poder entender unos modelos mas unidos a problemas de información, a análisis mas cualitativos, etc." ..."Nuestra educación debe ir conservando y actualizando lo que siempre será válido, pero debe abrir las puertas a las nuevas tendencias." (Alsina,1996)
Refiriéndose al mismo tema, Gomez (1997) afirma que "Aunque la tecnología no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática. Gracias a las posibilidades que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel), en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración. Estas experiencias matemáticas son fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el papel fundamental que deben jugar los diseñadores de currículo y los profesores en el diseño e implantación de situaciones didácticas que, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y más potente. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico."
Todo lo expresado hasta el momento indica que para observar la influencia de las Nuevas Tecnologías (NT) en la educación en general y en la educación matemática en particular, se

deben tener en cuenta a) las sugerencias que ofrecen distintos organismos relacionados con la educación y b) el cambio del rol docente que su utilización trae aparejado.

Incorporación de las NT en educación matemática

a) Recomendaciones de organismos relacionados con la educación

A principios de la década del 90 organismos de distintos países ya recomendaban la utilización de herramientas informáticas en la educación en general y en la educación matemática en particular. Documentos de la UNESCO, los Estándares Curriculares para 1990 (EC90) del National Council of Teachers of Mathematics, los Contenidos Básicos Comunes (CBC) de la Escuela General Básica (EGB) del Ministerio de Educación de la República Argentina (MCyE), se extendieron en recomendación sobre la incorporación de computadoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Terminando esta década se observa que las recomendaciones continúan tanto en los Estándares Curriculares 2000 (EC00) del National Council of Teachers of Mathematics, como en La Selección y el Uso de Materiales para el Aprendizaje de los CBC de la EGB del MCyE, entre otros. A continuación se mencionan los puntos que se consideraron más relevantes sobre el tema, pudiéndose observar que después de diez años es necesario todavía seguir justificando y recomendando la incorporación de herramientas informáticas en la educación matemática.

UNESCO

La UNESCO encomienda a la IFIP (Federación Internacional para el Procesamiento de la Información), la realización de un currículo de Informática, para escuelas secundarias, que se da a conocer a principios de los 90.

En forma genérica, este currículo justifica la instrumentación de distintas asignaturas de la especialidad diciendo que “Las tecnologías de la información penetran en el tejido comercial propiciando el progreso de las corporaciones modernas, así como también permiten alcanzar a las administraciones un coste mínimo de los servicios públicos. Al mismo tiempo, las herramientas y las técnicas de las tecnologías de la información son de gran valor en los procesos de aprendizaje y en la organización y gestión de las instituciones en la enseñanza.”

En lo que respecta a la asignatura matemática, describe las características de una gama de software que considera adecuado por las posibilidades que ofrece como herramienta para la enseñanza de distintos tópicos de la asignatura. Entre ellos destaca: las hojas de cálculo, los graficadores, los programas de estadística, los programas de diseño asistido por computadora, los programas de modelos y simulaciones, para los cuales describe sus características relacionadas con la educación y la matemática.

CBC para la EGB y La Selección y el Uso de Materiales para el Aprendizaje de los CBC de la EGB (MEyC)

En su introducción los CBC recomiendan que se trabajen los contenidos de matemática destacando, entre otras cosas, “el valor de la nueva tecnología, que se incorpora en el aula, no sólo para simplificar los cálculos, sino por la posibilidad que brinda de “experimentar” matemáticamente, enriqueciendo el campo perceptual y las operaciones mentales involucradas en los procesos de construcción, estructuración y análisis de contenidos.

También en cada uno de los bloques dedica algún párrafo sobre el aporte que las computadoras pueden hacer en la enseñanza de los temas involucrados. Esto es reforzado con una publicación del año 1997, La Selección y el Uso de Materiales para el Aprendizaje

de los CBC de la EGB, a través de la cual orientan al docente en la selección y posibilidades de uso de distintos materiales para el aprendizaje de los CBC, en particular la computadora.
En este sentido, señala primero que “la eficacia de los materiales depende de la propuesta didáctica en su conjunto” y que “su selección y uso están íntimamente ligados a las estrategias de enseñanza, y éstas son particulares de cada nivel educativo y área de conocimiento”. En esta publicación, destacan al software educativo como herramienta desde el punto de vista del docente: para dinamizar la enseñanza, promover alternativas de propuestas didácticas, fomentar diferentes centros de intereses de los alumnos, atender diferentes ritmos de aprendizaje, entre otras, y desde el punto de vista del alumno: para ponerlos en contacto con realidades imposibles de experimentar en forma directa por otros medios, exponer diferentes formas de representar la realidad e interactuar con ella, propiciar diferentes herramientas para la producción, organización y sistematización del conocimiento y la resolución de problemas, entre otras.

Estándares Curriculares del National Council of Teachers of Mathematics

Ya desde 1990, estos estándares indican que en todas las aulas debiera existir una computadora con fines ilustrativos, que todos los estudiantes debieran tener acceso a una computadora para trabajar individualmente y en grupo y que los estudiantes debieran aprender el manejo de la computadora como herramienta para procesar información y realizar cálculos en la investigación y resolución de problemas. Señalan además que la nueva tecnología no sólo ha hecho más fáciles los cálculos y la elaboración de gráficas sino que también ha cambiado la naturaleza misma de los problemas que interesan a la matemática y los métodos que usan los matemáticos para investigarlos.
En la versión 2000, plantean el tema desde tres puntos de vista bien diferenciados: el principio de la tecnología, la posibilidad que ofrece la tecnología de ampliar el aprendizaje de la matemática y cómo la tecnología influye en qué matemática debe ser enseñada.
El principio de la tecnología: Las tecnologías electrónicas son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Proporciona imágenes visuales de ideas matemáticas, facilita la organización y análisis de datos y realiza cálculos eficientemente y con exactitud. Soporta investigaciones de los alumnos en todas las áreas de la matemática. La existencia, versatilidad y poder de la tecnología exige reexaminar tanto qué matemática deben aprender los estudiantes como de qué manera pueden aprenderla mejor.
La tecnología amplía el aprendizaje de la matemática: Con calculadoras y computadoras los alumnos pueden examinar más ejemplos o formas de representación que las posibles de hacer a mano, por lo tanto pueden hacer y explorar conjeturas fácilmente. El poder gráfico de las herramientas tecnológicas dan acceso a modelos gráficos que son más poderosos pero que muchos alumnos son incapaces o están imposibilitados de generar independientemente. La capacidad computacional de las herramientas tecnológicas extiende el rango de problemas accesible a los alumnos y además le permite ejecutar procedimientos rutinarios rápidamente y con exactitud, permitiendo así más tiempo para la modelización y la conceptualización.
La tecnología influye en qué matemática es enseñada: La tecnología no sólo influye en cómo la matemática es enseñada y aprendida. Con la tecnología a mano, los jóvenes pueden explorar y resolver problemas que involucran grandes números o pueden investigar características de figuras usando software dinámico de geometría. Los alumnos de la escuela elemental pueden organizar y analizar grandes conjuntos de datos. Alumnos de los grados medios pueden estudiar relaciones lineales y las ideas de recubrimientos y cambio

uniforme con representaciones por computadoras y realizando experimentos físicos con sistemas de laboratorio. Los alumnos de la universidad pueden usar simulaciones para estudiar distribuciones muestrales y trabajar sistemas de álgebra computarizados. La tecnología puede ayudar a los docentes a conectar el desarrollo de habilidades y procedimientos al desarrollo más general del entendimiento de la matemática.

b) El rol del docente ante la incorporación de NT en la clase de matemática

En el uso de las computadoras para la enseñanza de la matemática, se presentan dos alternativas que tienen implicancias pedagógicas y económicas diferentes. Una es el aula de computadoras, donde los alumnos van a trabajar con programas. Otra es una computadora con proyector en cada aula, donde ésta se convierte en una herramienta integrada en el desarrollo de la clase a la que se puede acceder cuando haga falta, utilizándola como herramienta principal o accesoria.

Independientemente de la forma de uso de la tecnología adoptada por el docente, tanto los EC como los CBC y muchos autores, coinciden en que el uso efectivo de la tecnología en la clase de matemática depende del docente, que la tecnología no es una panacea, que como toda herramienta de enseñanza, puede ser usada bien o pobremente y, por sobre todo, que los docentes deben usar tecnología para mejorar las oportunidades de aprendizaje seleccionando o creando tareas matemáticas que tomen las ventajas que la tecnología ofrece para resolverlas en forma eficiente (graficar, visualizar, calcular).

Por otra parte también coinciden en que la tecnología no reemplaza al profesor de matemática sino que los docentes juegan importantes roles en la clase, tomando decisiones que afectan el aprendizaje de los alumnos de forma que puedan vivir experiencias que aporten a la construcción de su conocimiento matemático. Los docentes deben decidir *cuándo* y *cómo* va a ser utilizada la tecnología. Por otro lado, cuando los alumnos utilizan computadoras, los docentes tienen la oportunidad de observarlos y focalizar su atención en sus razonamientos ya que cuando los alumnos trabajan con tecnología, muestran formas de pensamiento matemático que de otra manera no son observables. Así la tecnología ayuda en la evaluación, permitiendo a los docentes examinar el proceso usado por los alumnos.

"El profesor, como el alumno, al enfrentarse a estas nuevas situaciones puede construir una nueva visión del contenido matemático, del proceso de enseñanza-aprendizaje y del papel que cada uno de ellos puede jugar en la construcción del conocimiento" (Gómez, 1997).

Situación actual. Utilización de software en clases de matemática en la Provincia de Buenos Aires

La actitud frente a las NT, la formación recibida y el nivel de conocimiento sobre el uso potencial de las mismas en la enseñanza de la matemática son en general las razones de la resistencia a la incorporación de estas herramientas en el currículo de matemática. Los docentes han sido enfrentados a una nueva forma de enseñar que no coincide en nada con aquellas en las que han sido formados. La mayoría expresa un gran temor hacia el uso de la tecnología en el aula y en general, por presión, asumen la situación adaptando estas herramientas a su manera tradicional de enseñar, no pudiendo modificar su rol dentro del proceso didáctico y como consecuencia, desaprovechando los aportes de la tecnología al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los resultados que se dan a continuación surgen de un cuestionario realizado a 135 docentes de la Provincia de Buenos Aires de tercer EGB y Polimodal. El mismo indagaba sobre qué software educativo de matemática conocían y si hacían uso del mismo en el aula, dando una justificación.

- ♦ Sólo 39 de los 135 docentes consultados (el 29%), manifestaron conocer algún software posible de ser utilizado en educación matemática, y de ellos, la tercera parte lo utiliza como herramienta en el dictado de sus clases. Es decir, del total de docentes consultados (135), solamente un 9,6% hace que sus alumnos utilicen software de matemática.
- ♦ Con respecto al objetivo del uso que estos docentes dan al software en la clase, las respuestas obtenidas indican que la mayoría lo hacen para reforzar temas ya vistos y porque los alumnos se entusiasman y participan más activamente. Estos resultados, muestran que estos docentes adoptaron de las dos alternativas descriptas en el punto **b)**, la de utilizar la sala de computadoras para que sus alumnos trabajen con los programas, siendo el Cabri Geometre, el Derive, y el Excel los programas más utilizados. Mencionan además que los utilizan en aplicaciones relacionadas con gráficas de funciones o construcciones geométricas.
- ♦ Por último, a quienes contestaron conocer software de matemática pero no utilizarlo en sus clases, lo justificaron en su mayoría admitiendo no saber utilizarlos, que en el laboratorio de su escuela no hay quien lo asista técnicamente o que el laboratorio no está a su disposición.

Análisis de los resultados

Un análisis general de los resultados obtenidos nos permite aseverar que:

- ♦ La mayoría de los docentes no conoce software para la enseñanza de la matemática.
- ♦ De los docentes que conocen software para la enseñanza de la matemática, la mayoría afirma no saber utilizarlos.
- ♦ A pesar de las numerosas recomendaciones, los docentes manifiestan que en las escuelas, los laboratorios de computación no están a disposición para el dictado de asignaturas ajenas a computación.
- ♦ Los docentes que utilizan software de matemática, no realizan un aprovechamiento óptimo de su potencialidad.
- ♦ Los docentes que utilizan software en la enseñanza de la matemática, expresan que son sus alumnos los que lo utilizan en el laboratorio de computación para desarrollar las tareas propuestas.

Consideraciones finales

Son muchos los autores que han expresado que la introducción de las NT genera un gran potencial para transformar aspectos importantes en la educación; pero “hasta ahora, hacer que ese potencial sea una realidad, no parece haberse logrado; no hay evidencia empírica de que las potencialidades anunciadas estén actuando en la realidad “ (Patterson, 1997), sólo existen experiencias aisladas y en pequeños grupos.

No sólo los CBC en nuestro país y los EC en EEUU, sino también muchos investigadores en educación matemática, proponen la incorporación de computadoras en el proceso de enseñanza de esta disciplina. Pero lo cierto es que los docentes no hacen uso de herramientas informáticas, la mayoría expresa no conocerlas.

Hasta hoy, podemos hablar de una innovación tecnológica en nuestras instituciones educativas, ya que son muy pocas las que no cuentan con al menos una sala de computadoras, pero no de una innovación educativa en base a la tecnologías existentes, pues la dinámica de las clases no se ha modificado.

Es necesario, por lo tanto, invertir la tendencia habitual del sistema educativo a permanecer de espadas a las innovaciones tecnológicas. El ejemplo de la calculadora es significativo: se sigue ignorando o incluso prohibiendo su presencia en la enseñanza de la matemática cuando, por su bajo costo y por la utilización que de ella se hace en las actividades de la vida cotidiana, debería ser objeto de especial interés, además de contemplarse como instrumento pedagógico y didáctico de primer orden. Algo similar, sin duda ocurre con las computadoras, pues el ”software” educativo responde cada vez más a las expectativas despertadas por la introducción de las NT en la escuela. En efecto, existen muchos programas, dotados con características de interactividad y versatilidad, que proporcionan una ayuda inestimable para el aprendizaje de la matemática.

La introducción de la computadora en las aulas depende sólo del interés del docente y no de las dificultades del medio mismo. Esto podrá lograrse en la medida que puedan tener en claro las posibilidades que esta herramienta ofrece para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, y vencer la resistencia lógica que genera el cambio del rol de docentes y alumnos en las clases de matemática, a partir de su utilización. Basándonos en esto podemos afirmar, tal como lo hace Coll (1987) que “ninguna innovación educativa tiene lugar si el maestro no quiere o no puede ponerla en práctica”.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., et al.(1996) *Enseñar Matemáticas*. Madrid: Grao.

Marabotto, M.I., Grau, J.E.. (1995) *Multimedios y Educación*. FUNDEC.

Gallego,D, Alonso, C. (1997). *Metodología del Ordenador como Recurso Didáctico* UNED.

Gómez, P. (1997). *Tecnología y Educación Matemática*. En *Informática Educativa. UNIANDES-LIDIE*. V 10, N 1, (93-11).

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*: (515-555) N.Y: Mac Millan.

Coll, C. (1987). *Psicología y Curriculum*. Barcelona: Ed. Laia, S.A.

Martí, E. (1992). *Aprender con Ordenadores en la Escuela*. Barcelona: ICE. Horsori.

Falcon, J., Casado R. J. (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sevilla. España.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics*. EEUU. 2000.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, Consejo Federal de Cultura y Educación. (1995). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Buenos Aires. Argentina.

Ministerio de Educación de la República Argentina. (1997). *La Selección y el Uso de Materiales para el Aprendizaje de los CBC de la EGB*. Buenos Aires.

Gráficas de funciones para la resolución de problemas. El DERIVE puede ayudar

P. Medina, M. Astiz, S. Vilanova, M. Oliver, M. Rocerau, G. Valdez, M. Vecino, E. Alvarez, Y. Montero
Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina
pmedina@mdp.edu.ar mastiz@mdp.edu.ar

Resumen
En el presente trabajo se describen los resultados obtenidos a partir de la utilización del Derive en el estudio de los efectos que causan la variación de los parámetros A, B y C en las funciones del tipo Y=Asen(Bx+C). La experiencia se llevó a cabo con dos grupos de alumnos de 16 años de un colegio de la ciudad de Mar del Plata (Argentina), uno de los cuales utilizó el software. En la clase se promovieron las habilidades de graficar a mano alzada, conjeturar y generalizar. Esta investigación tuvo como propósitos comparar las actitudes y el rendimiento de los alumnos utilizando para ello un diseño cuasi experimental y la técnica de observación participante.

Introducción

Las actuales concepciones de la enseñanza ponen énfasis en que el estudiante debe construir activamente su conocimiento y habilidades a través de la interacción con el medio ambiente y mediante la reorganización de sus estructuras mentales anteriores. El aprendizaje significativo es entendido como la incorporación sustantiva, no arbitraria ni verbalista, de nuevos conocimientos en la estructura cognitiva, mediante un esfuerzo deliberado por relacionar los nuevos conocimientos con conceptos ya existentes en la mente del alumno (Novak, 1984). El aprendizaje significativo es el extremo opuesto al aprendizaje memorístico, en un continuo de tipos de aprendizaje, mientras que las estrategias de instrucción planificada pueden variar desde el aprendizaje por recepción hasta el aprendizaje por descubrimiento autónomo, pasando por distintos grados de aprendizaje por descubrimiento guiado (Ausubel, 1997).
El mejor entendimiento de los procesos efectivos de aprendizaje ha llevado a la idea de que los entornos de enseñanza-aprendizaje sustentados por la computadora no deberían ser directivos, sino más bien deberían crear situaciones y ofrecer herramientas para estimular a los alumnos a hacer el máximo uso de su propio potencial cognitivo (De Corte, 1996). Esta nueva tendencia en el uso de la computadora en educación se caracteriza por una clara inclinación hacia sistemas que involucran herramientas puestas a disposición de los alumnos, con el rol de facilitadoras para la indagación y la adquisición de conocimiento, en ambientes de aprendizaje colaborativos e interactivos (Kaput, 1992). En este contexto, el programa DERIVE puede ser integrado a la enseñanza de temas de matemática de cinco maneras diferentes: como herramienta matemática, como asistente para la resolución de problemas, como un entorno de inverstigación o exploración, como un tutor interactivo y como una ayuda para visualizar e interpretar (Berry et al., 1994).
Los objetivos del tema desarrollado durante la experiencia, apuntan a lograr una de las metas principales de los CBC (Contenidos Básicos Comunes) del Nivel Polimodal en el bloque Funciones del área Matemática: *identificar, definir, graficar, describir e interpretar distintos tipos de funciones asociándolas a situaciones numéricas, experimentales o geométricas, reconociendo que una variedad de problemas pueden ser modelizados por el mismo tipo de función* (MCyE, 1996).

Hipótesis: La utilización del Derive en el estudio de los efectos que causan la variación de los parámetros A, B y C en las funciones del tipo Y=Asen(Bx+C mejorará las actitudes y el rendimiento de los alumnos.

Objetivo: Determinar si el trabajo con Derive produce diferencias de rendimiento en el aprendizaje del tema mencionado, comparando las habilidades de conjeturar y aplicar conceptos y relaciones que logran los alumnos de cada uno de los ambientes de trabajo.

Entorno de trabajo

Para esta investigación se construyeron dos ambientes de enseñanza-aprendizaje con la modalidad de aula-taller, en una institución privada de Mar del Plata, con dos cursos de alumnos de 3er. año del Nivel Polimodal. Uno se desarrolló en aula convencional y con herramientas tradicionales y el otro en la sala de computadoras con recursos informáticos. El software utilizado fue el Derive, seleccionado por su facilidad para graficar y se utilizó como herramienta de ayuda en la visualización e interpretación. Para ambos ambientes se diseñaron módulos guía de trabajo orientados al aprendizaje por descubrimiento guiado, buscando un balance entre la instrucción receptiva y el aprendizaje por descubrimiento. Las técnicas utilizadas fueron de tipo cualitativo (indagar sobre las actitudes en el proceso de aprendizaje) y de tipo cuantitativo (indagar sobre diferencias de rendimiento).
Para el grupo experimental el entorno de trabajo estuvo compuesto por los docentes, los alumnos, el módulo de trabajo y una computadora cada dos alumnos y el Derive. En el grupo control estuvieron los mismos docentes y utilizaron el mismo módulo adaptado al trabajo tradicional, con lápiz y papel.
El módulo: se preparó en base a prácticas de descubrimiento guiado, considerando que las clases se desarrollarían con la dinámica de aula taller. Se adaptó con ligeras modificaciones a cada uno de los ambientes. Contiene una breve introducción, los objetivos perseguidos, los conocimientos previos necesarios y sugerencias tales como: directivas para utilizar el módulo, alternativas para determinar puntos notables sobre la pantalla, revisión de aspectos importantes sobre la función sen(x) como período, dominio, valores máximos y mínimos, imagen, etc.
A partir de aquí aparece el tema específico, tratando la función con cada uno de los parámetros por separado, es decir y=Asen(x), y=sen(Bx) e y=sen(x+C). La dinámica se centra en la variación del valor de los parámetros y la deducción del efecto que causa cada uno de ellos sobre la gráfica de la función, con el objeto de posibilitar a los alumnos que conjeturen, generalicen y formalicen los conceptos desde sus propias conclusiones.
Culmina con ejercitación graduada, donde intervienen la combinación de los parámetros y la interpretación y resolución de problemas concretos, sin la intervención de la computadora y sólo una herramienta: un gráfico a mano alzada.
Antes de poner en marcha la experiencia, se realizó una prueba piloto sobre el módulo, que posibilitó realizar los ajustes necesarios.
El programa: Derive es un programa de los llamados “friendly” (amistoso, simpático). Su propósito es la resolución de cálculos matemáticos de carácter general y la graficación de funciones. Su ventaja es estar basado en menús tipo árbol, por lo que en poco tiempo el usuario es capaz de manejarlo (Paulogorrán, 1994).

El Derive ofrece un entorno en el cual es posible crear imágenes visuales (muchas veces agobiante para los alumnos sin herramientas computacionales) que permite interpretar y conjeturar sobre los resultados obtenidos (Berry et al., 1993). Además satisface algunos requerimientos de tipo general para la experiencia a desarrollar: graficación sencilla, aplicación de zoom, cursor gráfico, visor de coordenadas, superposición de gráficos, resolución de cálculos algebraicos.

Los alumnos: los alumnos pertenecían a 3er. año del Nivel Polimodal (16 años), de una escuela privada de la ciudad de Mar del Plata. El grupo experimental estuvo compuesto por 31 alumnos y el de control por 28. La conformación de los grupos fue dada al azar. Ambos grupos conocían el uso el Derive.

Los docentes: el cuerpo docente a cargo de la experiencia estuvo compuesto por tres docentes. Uno de ellos ofició de referente permanente para los alumnos, los otros dos funcionaron como auxiliares.

Método

Técnicas utilizadas

1. Para indagar sobre el nivel de participación y colaboración en el trabajo en el aula se utilizaron la técnica de observación participante y el análisis de las tareas diarias entregadas por los alumnos a posteriori de cada clase.

   Una parte de las observaciones, que puede considerarse como estructurada, se basó en una tabla de especificaciones con los siguientes ítems: colaboración en el trabajo con sus compañeros, interés demostrado en el tema, tipo de consultas realizadas, participación en el desarrollo de los trabajos prácticos, compromiso de trabajo.

   Por otra parte, se tomaron notas muy breves de carácter general durante las clases, las cuales eran ampliadas no bien finalizaban las mismas, éstas se pueden calificar de naturales y no estructuradas (Cohen & Manion, 1990).
2. Para determinar las posibles diferencias de rendimiento entre los alumnos de cada ambiente de trabajo, se realizó una investigación cuasiexperimental. Para aislar el impacto del uso del software, ambos cursos fueron dictados por los mismos docentes y se diseñó una estrategia didáctica común, de tal forma que pudiera ser explotada en forma natural por ambos grupos.

Nivelación y pretest: se realizó una etapa de nivelación cuyo objetivo apuntó a la homogeneización de los grupos. En ambos cursos se realizaron clases donde:

- se familiarizó a los alumnos con el ambiente de trabajo propuesto para el desarrollo de las tareas y
- se revieron conceptos que se consideraban mínimos para abordar el tema de la experiencia: funciones: dominio, imagen, valor máximo y mínimo, ceros; ángulos orientados; sistemas de medición de ángulos: sistemas sexagesimal y circular; uso de calculadora científica; definición de funciones trigonométricas: relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas, confección de gráficos de las funciones trigonométricas con escuadra y compás.

El pretest se basó en una evaluación de corte tradicional, con papel y lápiz sobre temas básicos de funciones y trigonometría, prerrequisitos para el aprendizaje del tema propuesto. El análisis de las notas del pretest reflejó homogeneidad en los grupos.

Con respecto al grupo experimental, cabe aclarar que no fue necesario realizar un aprestamiento especial sobre el Derive, ya que los alumnos contaban con suficiente experiencia en su uso básico.

El trabajo en el Aula: en el aula se trabajó con un módulo constituido por prácticas de descubrimiento guiado, que permitieron que los alumnos realizaran las tareas con relativa independencia.
El módulo se subdividió en sesiones de trabajo según el estudio de cada parámetro. La estructura típica de cada sesión es la siguiente:

1. Presentación del parámetro.
2. Graficación de funciones variando el valor del parámetro.
3. Elaboración de conjeturas acerca del efecto de la variación del parámetro sobre la imagen, los ceros, etc.
4. Inducción y generalización del efecto que causa la variación del valor del parámetro.
5. Definición formal del efecto que causa la variación del valor del parámetro.
6. Realización de ejercicios y problemas de aplicación, cuya resolución depende de la determinación de los parámetros y de la interpretación de los efectos que causan los valores de los parámetros sobre la función.
   En el módulo guía se buscó explotar de la mejor manera el recurso utilizado (convencional o computadora). En el uso del Derive los recursos más utilizados fueron:

1. la facilidad de graficación, para graficar muchas funciones en muy poco tiempo,
2. la posibilidad de superposición de gráficas para analizar el efecto de la variación del valor del parámetro, y
3. la existencia de un cursor y visor gráfico, para determinar la ubicación de puntos notables.

Postest: después de la finalización del trabajo en aula se tomó un postest de tres problemas, con lápiz y papel, con el objetivo de evaluar cuatro aspectos sobre el estudio de las funciones del tipo Y=Asen(Bx+C):

- determinación de parámetros a partir del gráfico de una función,
- interpretación del papel que juegan los parámetros en una función dada,
- graficación a mano alzada de una función conociendo sus parámetros, y
- modelización de una situación mediante funciones del tipo Y=Asen(Bx+C).

En su conjunto, para resolver los problemas planteados, se requerían habilidades de graficación a mano alzada, interpretación y aplicación.

Análisis de los resultados

Actitudes durante el proceso de aprendizaje: El seguimiento de los alumnos a través de la observación del trabajo en el aula y de las tareas realizadas, permite afirmar que el uso del Derive en el proceso de aprendizaje genera mayor participación y tendencia hacia el aprendizaje colaborativo, como así también mayor interés por el estudio del tema. Estos indicadores fueron comparados entre los dos grupos, dando resultados favorables para el grupo experimental en un nivel de significación de 0.05. Los indicadores que revelaron diferencias son: como se muestra a continuación: Tendencia hacia el aprendizaje

colaborativo, Participación durante el proceso de aprendizaje y Interés por el estudio del tema, con valores de p=0.030. p=0.012 y p=0.017 respectivamente.
Por otra parte, la posibilidad del Derive para graficar varias funciones sobre un mismo eje de coordenadas, facilitó la habilidad de conjeturar, verificar y generalizar por vía inductiva. Es de destacar que se observó una interesante diferencia cualitativa a favor del grupo experimental, ya que este grupo analizaba un número importante de casos antes de arribar a sus conclusiones, mientras que el grupo control, se conformaba con un par de gráficas para conjeturar y se mostraban inseguros para afirmar y generalizar sus conclusiones, dependiendo muchos más de la confirmación del profesor.
A través del análisis estadístico y con un nivel de riesgo aceptable del 5%, se confirma que: "La introducción del Derive en el trabajo de aula producirá mayor participación y colaboración en el trabajo en el aula." (2da. parte de la hipótesis)

Resultados del aprendizaje: luego de la etapa de nivelación llevada a cabo en ambos cursos, se tomó el pretest, con lápiz y papel, compuesto por tres ejercicios sobre temas básicos de funciones y trigonometría.
Del análisis estadístico de los datos (tabla 1), surgió que no existen diferencias significativas en el rendimiento de los dos grupos, experimental y de control, sobre los temas abordados en la nivelación. Se compararon ambos grupos usando test de homogeneidad de varianzas. Para ello primero se estudió el supuesto de normalidad de la variables registrada en cada grupo. Verificado este supuesto a través de NPP(Normal Probability Plots), se obtuvo un valor de p=0.10 en la comparación de varianza de los grupos. Esto llevó a aceptar con un nivel de significación del 0.05 que las varianzas poblacionales son iguales.
El análisis continuó con el estudio del comportamiento de los grupos a través de un test de Student de diferencia de medias, obteniendo un valor de t=-0.19 con su correspondiente valor p=0.8464, lo que llevó a aceptar la hipótesis nula de igualdad de medias.

	Media	**Desvío Standard**
Grupo experimental	7.47	0.98
Grupo control	7.41	1.26

tabla 1

Una vez finalizada la experiencia en clase se tomó el postest, también con lápiz y papel, que consistió en una evaluación de corte tradicional compuesta por tres problemas que requerían habilidades de graficación a mano alzada, interpretación y aplicación. Los resultados del mismo se muestran en la tabla 2.

	Media	**Desvío Standard**
Grupo experimental	8.20	0.90
Grupo control	7.42	1.68

tabla 2

Con un análisis del mismo tipo que el realizado para el pretest, se obtuvo un valor de p=0.00078 en la comparación de varianza de los grupos. Esto llevó a rechazar con un nivel de significación del 0.05 que las varianzas poblacionales son iguales. El test de Student correspondiente a la diferencia de medias, arrojó un valor t=-2.18 con su correspondiente valor p=0.0352, lo que llevó a rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias, concluyendo en una diferencia de rendimiento entre ambos grupos.

Un análisis más se realizó para determinar si realmente el uso del Derive influyó en el rendimiento de cada alumno. Para esto se tuvieron en cuenta las diferencias de puntaje de cada individuo entre el postest y el pretest. Los resultados se muestran en la tabla 3:

	Media	Desvío Standard	
Diferencias Grupo experimental	0,73	1.22	tabla 3
Diferencias Grupo control	0.01	1.30	

Con estos datos se observaron las diferencias en los logros alcanzados por el grupo experimental. Se tomó la hipótesis nula H_0: M_{Post}-M_{pre}<=0 versus la hipótesis alternativa H_1: M_{Post}-M_{pre} >0. La hipótesis nula entonces permitiría afirmar que *el uso del Derive en el proceso de aprendizaje del tema propuesto no tendría un efecto beneficioso*. Para testearlo se realizó un t-Student de datos apareados obteniéndose un valor de p=0.0024 y t=3.32, el cual resultó menor que el nivel de significación 0.05, por lo que la hipótesis nula fue rechazada y por lo tanto podemos concluir que el uso del Derive realmente influyó en el rendimiento de cada alumno una vez finalizada la experiencia considerando el riesgo propuesto.
Con respecto al grupo control, el análisis realizado no arrojó ninguna diferencia, por lo que se puede afirmar que la experiencia no modificó el rendimiento de cada alumno. (t=0.04, p=0.96).
A través del análisis estadístico y con un nivel de riesgo aceptable del 5%, se confirma la primera parte de la hipótesis: "La introducción del Derive en el trabajo de aula producirá mejores resultados en el aprendizaje del tema abordado."

Conclusiones

Si bien la mayoría de las actividades que se hacen con un graficador como Derive, se podrían hacer con papel y lápiz, no puede compararse con la rapidez y la precisión que ofrece el software. Esta diferencia en dinámica, velocidad y precisión posibilita un enriquecimiento en la metodología de enseñanza que si nos limitamos al lápiz y papel es sólo posible desde el punto de vista teórico y con muchas limitaciones.
Del análisis de los resultados de las actitudes durante el proceso de aprendizaje del tema propuesto se deducen las siguientes consecuencias del uso del Derive, que los alumnos:

- participan más activamente, movilizados por una mayor motivación;
- muestran una mayor tendencia hacia el aprendizaje colaborativo;
- pueden conjeturar, verificar y generalizar por vía inductiva en situaciones en que con medios convencionales no podrían hacerlo, salvo excepciones;
- pueden hacer conjeturas y/o inducciones desde bases más sólidas;
- logran mayor independencia a la hora de hacer inferencias desde su propio trabajo, en situaciones en que, con medios convencionales, deben buscar confirmación de evidencia del docente.

Un punto interesante a destacar y registrado en las observaciones es que se ha podido constatar que los alumnos tienden a participar en forma más desordenada en la sala de las computadoras que en el aula tradicional (lo cual, en principio, no es bueno ni malo); esto parecería estar originado en que el estudiante no tiene aún incorporada a dicha sala como un ambiente de estudio similar al del aula convencional.

Con respecto a los resultados del aprendizaje, pudieron observarse diferencias significativas a favor del grupo experimental. Los resultados del postest fueron mejores que los obtenidos en el pretest en el grupo experimental, no registrándose esta diferencia para el grupo control; en base a esto puede afirmarse que los alumnos que trabajaron con el Derive lograron mejor calificación en la evaluación final. A la misma conclusión se arribó en lo que respecta al rendimiento individual de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Ministerio de Cultura y Educación. (1996). “Contenidos básicos para la educación polimodal” Argentina.

Ausubel, D.P. (1997). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo* México: Trillas.

Berry, J.; Graham, E.; Watkins, A. (1993). *Learning mathematics through DERIVE*. Chichester: Ellis Horwood.

Berry, J.; Graham, T.; Watkins, T (1994).Integrating the DERIVE program into the teaching of mathematics.*The International DERIVE Journal V. 1, N 1* pp.83-96

Cohen, L.; Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa.* Madrid, España: La Muralla

De Corte, E. (1996). Aprendizaje Apoyado en el Computador: una Perspectiva a Partir de la Investigación acerca del Aprendizaje y la Instrucción. En *Memorias del IIICongreso Iberoamericano de Informática Educativa*. Barranquilla, Colombia.

Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (515-556). N.Y. EEUU: Macmillan.

Novak, J.D.; Gowin, D.B. (1984). *Learning how to Learn.* N.Y., EEUU: University Press.

Paulogorrán, C.; Pérez C. (1994) *Cálculo Matemático con Derive para PC.* Madrid, España: Ra-Ma.

Novedades del DERIVE 5.02. Empleo en la enseñanza de la matemática

Iván Valido González, Raúl Delgado Rubí, Pedro Castañeda Porras
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría". Ciudad de la Habana, Cuba
ivalido@yahoo.com ivanv@ind.ispjae.edu.cu rdelgado@ind.ispjae.edu.cu pcasta@geo.upr.edu.cu

Resumen
En la actividad de enseñanza de las matemáticas en los niveles medio y universitario, los asistentes matemáticos están adquiriendo cada día una función más sobresaliente. Corresponde al personal docente su utilización más adecuada en todo el proceso de enseñanza aprendizaje. Uno de los asistentes de mayor y más fácil empleo es DERIVE, se destaca por su versatilidad y su manera sencilla de comunicación con el usuario. La reciente aparición de la versión 5.02 (agosto de 2000) de DERIVE revoluciona la forma de "hacer" y enseñar matemática. Este trabajo presenta un taller está dirigido a profesores de la enseñanza media y universitaria, que teniendo conocimientos previos sobre las versiones anteriores de DERIVE o al menos de las versiones sobre el ambiente windows, desean actualizar sus conocimientos. En él nos proponemos estudiar las novedades que en esta nueva versión encontramos así como las diferencias existentes con la versión 4.11. Además se proponen algunas experiencias sobre la confección de Clases Prácticas en el Laboratorio, Conferencias con el uso de la computadora y elaboración de Planes de Clase aprovechando la potencialidad que como editor de texto ofrece el ambiente de DERIVE 5.02. Para mostrar los aspectos novedosos de esta versión los contenidos matemáticos que se abordarán estarán relacionados con:
- Resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones (lineales y no lineales)
- Gráficas de funciones reales. Distintas formas.
- Gráficas de superficies. Diferentes sistemas coordenados.
- Trabajo con matrices, determinantes, derivadas e integrales.

Introducción

Cada día con mayor fuerza aparecen en eventos y publicaciones, experiencias didácticas con el uso de los softwares asistentes matemáticos en los niveles medio y superior.
Uno de los asistentes que tiene mayor difusión es el DERIVE y tiene su justificación principal en lo fácil de su manejo, en lo didáctico de su desempeño, en su versatilidad y quizás lo más importante, en que tanto la entrada como la salida de datos y cálculos aparecen en pantalla de una forma bastante similar a como comúnmente se utilizan cuando se trabaja con lápiz y papel. La reciente aparición de la versión 5.02 (agosto del 2000) revoluciona la forma de "hacer" y enseñar matemáticas.
Este Taller estuvo dirigido a profesores de la enseñanza media y universitaria, que teniendo conocimientos previos sobre las versiones anteriores de DERIVE o al menos sobre las versiones sobre Windows, desean actualizar sus conocimientos. En él se mostraron y estudiaron las novedades de la nueva versión y las diferencias más significativas con la versión 4.11.
Además se mostraron algunas experiencias sobre la confección de clases en el Laboratorio de Computación, conferencias en un aula especializada con el uso de la PC y la elaboración de planes de clases aprovechando las posibilidades que como editor de texto ofrece la versión 5.02.
En el Taller se utilizaron tanto la versión original en inglés como su traducción al castellano de reciente aparición en el mercado.
Las novedades de la versión 5.02 se presentan a través de la resolución de tareas asociadas a la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones (lineales y no lineales), al trabajo con matrices, vectores, determinantes, derivadas e integrales, a la representación de gráficas de funciones reales y a la representación de superficies y el uso de distintos sistemas coordenados.

Entre los objetivos del Taller estuvieron:

1. Propiciar la reflexión sobre las nuevas concepciones y tendencias en el uso de los asistentes matemáticos en la enseñanza de las matemáticas en los niveles medio y universitario.
2. Entrenar a los participantes en el uso de la versión 5.02 del DERIVE como usuario y para su utilización en la enseñanza de la Matemática.

los cuales fueron alcanzados gracias a la entusiasta participación de los inscritos en el mismo.

Desarrollo

Entre las principales ideas que se discutieron en el Taller estuvieron las diferencias más notables entre la versión anterior 4.11 (ya sobre Windows) y la versión 5. Se destacaron las siguientes ventajas de esta última:

- Mejoría notable para acceder a la línea de edición:
  - Siempre está activa.
  - También está disponible en las ventanas 2D y 3D.
- Mejoría notable en el trabajo en la pantalla de Álgebra, pues:
  - Es posible insertar gráficos, imágenes, textos y objetos OLE.
  - La escritura de textos es posible con distintos tipos de fuentes y estilos.
- Mejoría en el trabajo en la ventana 2D, pues:
  - es posible también escribir anotaciones.
  - es posible representar combinaciones booleanas.
  - es posible representar inecuaciones con dos variables.
  - es posible salvar imágenes de graficas en diversos formatos: BMP, JPEG y TIFF
- Mejoría ostensible en el trabajo en la pantalla 3D, pues ahora es posible:
  - la rotación de superficies.
  - representar simultáneamente dos o más superificies, mostrándose la intersección entre ellas, la que se visualiza mejor haciendo más finas las rejillas.
  - representar superficies dadas paramétricamente.
  - representar tablas de puntos (matrices) en la pantalla 3D.
  - representar superficies en coordenadas cilíndricas y esféricas.
- Otras posibilidades son:
  - es capaz de resolver sistemas no lineales de ecuaciones polinómicas empleando el algoritmo de groebner.
  - obtiene todas las raíces, reales y complejas de ecuaciones polinómicas con el grado de precisión deseado.
  - es capaz de factorizar polinomios de grado elevado utilizando nuevos y sofisticados métodos.
  - puede sustituir variables en subexpresiones.
  - carga funciones en la carpeta de utilidades (file Utility) cuando estas son llamadas.

Cada una de estas bondades fueron analizadas en el Taller en correspondencia con su importancia para la enseñanza y las distintas situaciones didácticas en que pudieran emplearse.

Se ilustraron algunas de las posibilidades del DERIVE 5.02 a través de dos ejemplos: un problema de optimización y un problema de cálculo de áreas usando la integral definida, en los cuales se mostró la combinación de distintos tipos de fuentes en la escritura de textos, la inserción de gráficos 2D y el desarrollo de las explicaciones que pueden ser mostradas a los estudinantes en el aula a través del uso de los comandos del DERIVE y algunas funciones nuevas como AreaUndercurve y AreaBetweenCurves.

A continuación se muestra el desarrollo in extenso de dichos ejemplos desarrollados de manera activa conjuntamente con los participantes y seguidamente la orientación de la actividad práctica desarrollada durante el Taller.

Un problema de optimización.

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,2) y forma un triángulo con los semiejes positivos de menor area

Respuesta:

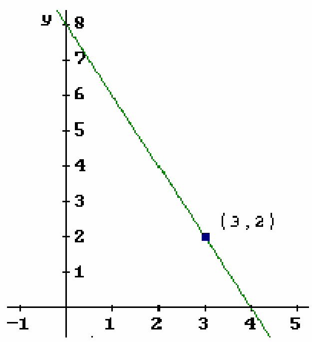
Comenzamos haciendo un gráfico que ilustre una de las posibles situaciones. Por ejemplo tracemos la recta que pasa por (3,2) y por (4,0). Recordemos que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos puede encontrarse a traves de:

#1: $\mathrm{DET}\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$

#2: $2\cdot x + y - 8 = 0$

Luego la ecuación esta dada por #2: 2x+y-8=0. Su gráfico es

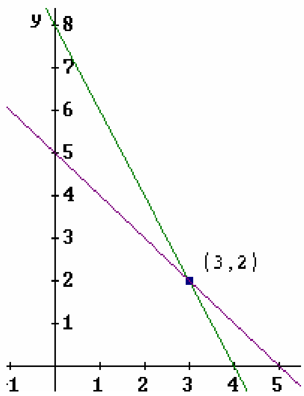
#3: [3, 2]



En este caso el area del triangulo formado por la recta y los semiejes positivos es (4.8)/2=16.
Tracemos otra recta que pase por (3,2)

$$\#4: \quad \mathrm{DET}\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\#5: \quad 2\cdot x + 2\cdot y - 10 = 0$$



Ahora el area del triangulo es (5.5)/2=12.5
Para analizar el caso general consideremos la llamada "ecuacion segmentaria" de la recta:

$$\#6: \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ahora el problema recide en encontrar los valores de a y de b que hacen que el área del triángulo sea máximo. Para ello ajustemos #6 a la condicion : pasa por (3,2)

$$\#7: \quad \frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1$$

En #7 pongamos, por ejemplo, b en función de a

$$\#8: \quad \mathrm{SOLVE}\left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1,\ b\right)$$

$$\#14: \quad \frac{18}{(a - 3)^3}$$

Y como la segunda derivada es no negativa para todo a≠3 se tiene que en x=6 el area es minima

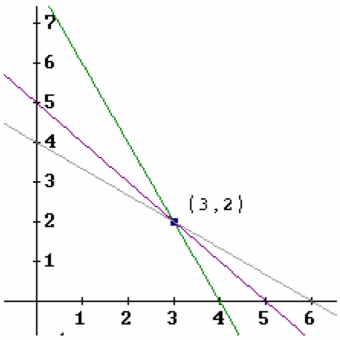
Luego la ecuacion buscada es

$$\#15: \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$$

y el area minima es

#16: area(6)

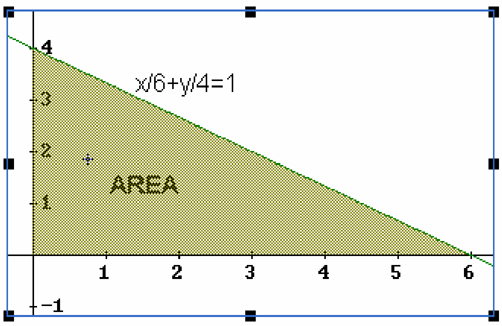
#17: 12



$$\#18: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1,\ y\right)$$

$$\#19: \quad y = \frac{2\cdot(6 - x)}{3}$$

$$\#20: \quad \text{AreaUnderCurve}\left(\frac{2\cdot(6 - x)}{3},\ x,\ 0,\ 6\right)$$



Unas de las actividades prácticas con la que contó el Taller fue la relativa a la elaboración de una clase donde se explotaran las posibilidades del DERIVE 5.02, pues se concibió que este tipo de actividad es una las tareas docentes que más tiempo le ocupa al profesor y que sería atractivo y de utilidad conocer cómo realizarla con óptima calidad y consumiendo para ello un mínimo de tiempo.

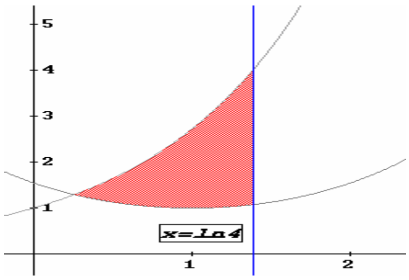
Actividad práctica desarrollada:

Suponga que se desea elaborar una clase para la cual se han seleccionado los siguientes ejercicios:

<u>Un problema de cálculo de áreas</u>.

1..Calcular el área de la región sombreada. Las curvas que intervienen son

$y = e^{x} \quad , \quad y = \cosh(x-1)$



<u>Dos problemas relacionados con aplicaciones de la derivada</u>

2.. El ángulo φ formado por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en los puntos que se cortan está dado por $\tan\varphi = \left|\dfrac{f'(x) - g'(x)}{1 + f'(x)g'(x)}\right|$.

Determinar el ángulo formado por las curvas $\begin{cases} xy + x^2 - y^2 = 1 \\ y = 2x - x^2 \end{cases}$

3. Discutir y trazar la curva dada por $y = \sqrt{\dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 3}}$

Elabore un documento de extensión ‘dfw’ en el cual debe aparecer la mayor información posible, gráfica y analítica, sobre la resolución de cada uno de los ejercicios de la clase.

Referencias bibliográficas

Kutzler B. (2000). Introduccion a DERIVE 5, Valencia.

http://www.ti.com/calc/docs/faq/derivefaq002.htm

http://www.derive.com

Diseño de actividades interactivas para la enseñanza de la matemática

LilianaHomilka, Patricia Vera
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires. Argentina
lhomilka@fibertel.com.ar

Resumen
El objetivo de este taller, dirigido a docentes de nivel medio, fue presentar un applet muy sencillo de configurar y utilizarlo en el diseño de situaciones problemáticas conjugando así las nuevas tecnologías con el aprendizaje de la matemática tanto en el aula como en una educación a distancia. La utilización del Applet Descartes en el armado de actividades didácticas permite que el alumno descubra en las distintas propuestas: el concepto matemático que se está trabajando, inferir sus propiedades, establecer relaciones y obtener conclusiones. A partir de los diseños, reflexionar junto a los participantes sobre las situaciones didácticas más apropiadas para aprovechar las potencialidades de la tecnología de acuerdo a las dificultades y necesidades de los alumnos y adquirir una nueva visión de cómo utilizar la computadora en la clase de matemática y las estrategias necesarias para confeccionar aplicaciones en las que se utilicen las diferentes herramientas con que cuenta este applet. En suma, la integración de esta herramienta informática a la educación matemática constituye la base de este taller.

Diseño de actividades interactivas para la enseñanza de la matemática

"Construir entornos educacionales basados en los ordenadores, y enseñar y aprender con ellos, son tres actividades que pueden darse conjuntamente, bajo diversas formas, y contribuir a que aparezcan diferentes culturas ligadas al ordenador. Es decir, la manera en que la gente y el ordenador se vayan conformando mutuamente irá influyendo en la manera como esa misma gente piense y hable acerca del ordenador y lo utilice. Que diferentes entornos instrumentales delimitados por los ordenadores den lugar a diversas culturas es algo por sí mismo importante. Pero los alumnos y los profesores que están aprendiendo a utilizar los ordenadores necesitan tomar conciencia de esas diversas culturas y han de mezclarlas para crear su propia cultura."

SOLOMON (1987, p.25)

La educación matemática hoy

La enseñanza matemática evoluciona acorde con los nuevos objetivos, los nuevos medios. Y esa evolución necesita que nos liberemos de ciertas tradiciones, principios y costumbres para que podamos encontrar nuevos caminos que nos permitan asumir el riesgo de lo desconocido, fomentar el interés y el planteo de interrogantes y el desarrollo de las ideas, con más dinamismo, problemas y conocimientos.
Estamos en una época de cambios, los docentes debemos aprovechar el momento para intentar ser parte activa de la transformación que necesita la educación matemática, siendo los objetivos esenciales:

a) Ofrecer una educación matemática interesante para todos, considerando el entorno en que vivimos, incorporando nuevas tecnologías e intentando una actitud social nueva sobre la importancia de educarse matemáticamente bien.
b) Crear una verdadera estimulación del aprendizaje en la que primen los métodos, los modelos y las estrategias sobre los contenidos concretos, donde las operaciones de pensamiento marquen la nueva dinámica.

c) Considerar que el aprendizaje es una tarea continua que forma parte de la persona a la que hay que ayudar siempre en cualquier situación, consiguiendo poner en cada caso los medios adecuados de todo tipo.

La educación matemática tiene el reto ineludible de sintonizar con el mundo del bit. Lo que significa utilizar los nuevos medios en el aula; por que la matemática se relaciona con el presente poniendo el acento en sus aplicaciones, en problemas nuevos y sus soluciones; pero también apunta al futuro, el ámbito de la informática y de las tecnologías de la comunicación.

El uso adecuado de estas herramientas estimula el desarrollo de habilidades cognitivas superiores, necesarias en el mundo moderno.

La computadora en la clase de matemática

La computadora nos ofrece la posibilidad de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en diversos sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, su uso le permite a los docentes y a los alumnos vivir nuevas y ricas experiencias matemáticas en las que podemos manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones dentro de un ambiente de exploración. Esta es una de sus características relevantes desde el punto de vista del aprendizaje de la matemática

La interacción entre la computadora, el docente y el alumno está cambiando la visión que se tiene del contenido matemático y del proceso didáctico.

La computadora debe ser un catalizador de un proceso en el cual, los diversos agentes didácticos creen espacios para que el alumno se enfrente a un medio que crea desafíos y logre avanzar en la construcción de su conocimiento matemático. En este sentido, la tecnología computacional puede convertirse en un elemento central del sistema didáctico como agente con funciones explícitas e importantes en el funcionamiento del sistema

Como sabemos, cuando la computadora está presente en el aula, el docente juega un rol central en el proceso didáctico, pues de él depende que la tecnología aporte a un encuentro fructífero desde el punto de vista del aprendizaje entre el alumno y el medio

El comportamiento del docente en el aula depende de su conocimiento y de sus visiones acerca de la matemática, su aprendizaje y su enseñanza. El mismo, puede cambiar en la medida que el profesor pueda vivir experiencias didácticas que pongan en juego y lo induzcan a cuestionar sus conocimientos y visiones. Es él quien tiene la responsabilidad de diseñar las situaciones didácticas más apropiadas para aprovechar las potencialidades de la tecnología de acuerdo a las dificultades y las necesidades de los estudiantes. Esta actividad de diseño e implementación de situaciones didácticas es una parte trascendental de la integración de la computadora a la currícula escolar.

Este taller, dirigido a docentes de nivel medio tiene por objetivo presentar NIPPES Núcleos Interactivos Para Programas Educativos que son applets escritos en el lenguaje java, muy sencillos de configurar que permiten desarrollar interacciones con los datos más diversos, cada uno de los cuales cumple una función específica en la enseñanza de la matemática.

Consideramos que es una herramienta más de trabajo para los profesores de matemáticas que deseen crear lecciones interactivas conjugando así las nuevas tecnologías con el aprendizaje de la matemática tanto en el aula como en una educación a distancia.

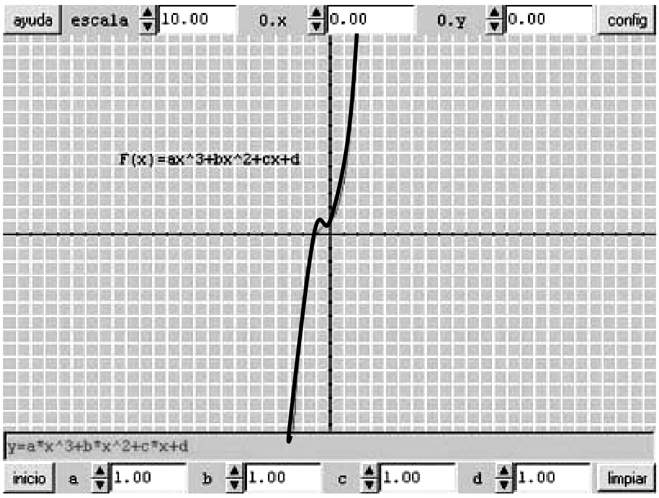
Se requiere que los participantes conozcan el funcionamiento básico del entorno Windows 95 ó 98, el uso del ratón y la gestión de ventanas, ya que los programas que se utilizaran funcionan en estos entornos. También es necesario haber utilizado algún programa de usuario del entorno Windows, como un procesador o editor de textos, un navegador de páginas Web o cualquier otra aplicación que requiera el uso de barra de menús, barras de herramientas, barras de desplazamiento, etc.

Nuestra propuesta del taller

A partir de la presentación de ejemplos el docente valora las posibilidades de los nippes como herramientas de producción de programas educativos interactivos sobre páginas web, ya sea para ser colocadas en un servidor de Internet o en el disco de una máquina propia.
La utilización del Applets Descartes en el armado de actividades didácticas permite que el alumno descubra en las distintas propuestas: el concepto matemático que se está trabajando, con las variaciones en los distintos parámetros puede inferir sus propiedades, establecer las relaciones con otros contenidos y obtener conclusiones.
Las actividades que se realizan permiten al participante adquirir las habilidades que le posibilitan:

- Abrir aplicaciones desarrolladas.
- Utilizar las Escenas realizadas.
- Interpretar y adaptar las actividades generadas por otros profesores a las necesidades particulares de cada grupo o cada alumno, según la propia metodología.
- Editar Escenas
- Realizar una actividad de aula.

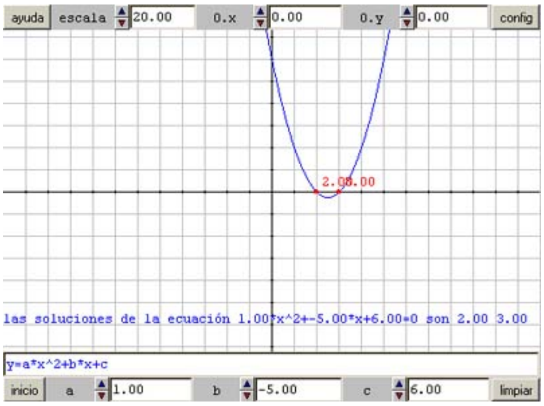
Veamos algunos ejemplos:

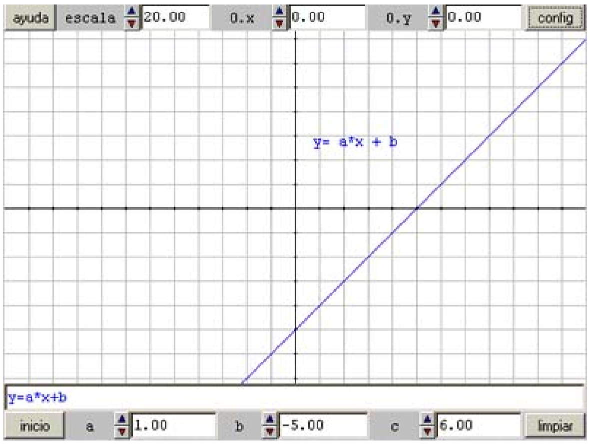


- Mostramos que a partir de una función polinómica de tercer grado:

$F(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, el alumno al trabajar con este applet modificando los distintos parámetros llega a inferir las características de este modelo. Por ejemplo, al proponer dar diferentes valores a los coeficientes a, b, c, y d, el educando llegará a la conclusión que puede obtener las gráficas de una función cuadrática, lineal o constante.

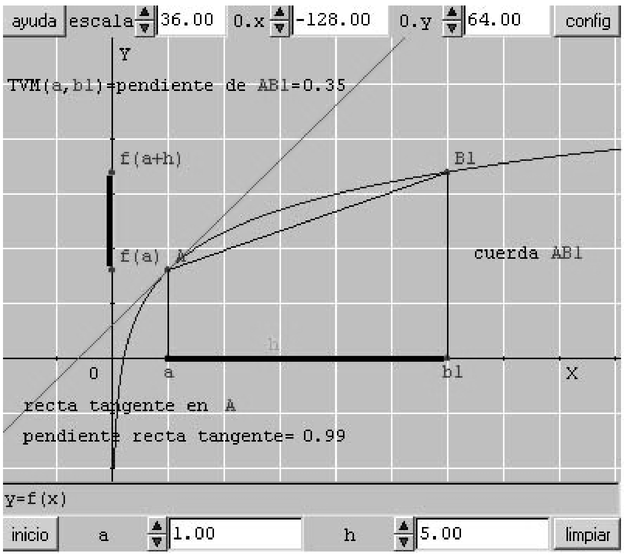
Este primer ejemplo es una aplicación típica, en la que aparece una gráfica cuya definición matemática depende de un parámetro y al cambiar el parámetro la gráfica se actualiza.





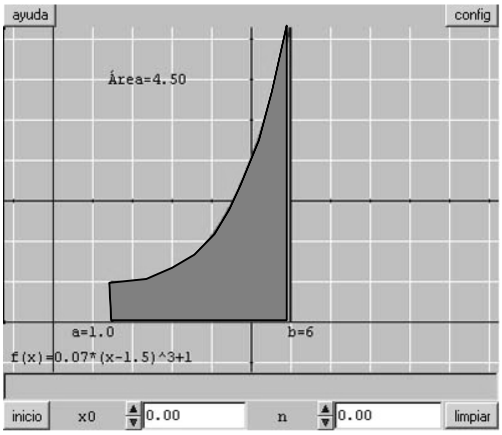
Esta herramienta permite visualizar prácticamente todas las *gráficas* de las *funciones de una variable* y de las *ecuaciones en dos variables* que aparecen en la educación secundaria. Pero no solo sirve para visualizar las gráficas sino que ayuda a comprender las relaciones entre las ecuaciones, sus gráficas y los diversos elementos que las componen.

- En este ejemplo vemos como podemos introducir a los alumnos al análisis matemático



Para deducir el concepto de derivada, podrán cambiar los parámetros dados y observar el crecimiento y decrecimiento de una función; la recta tangente a una función en un punto; la función derivada de otra, etc.; obteniendo de esta interacción con la máquina las propiedades y los conceptos necesarios para el aprendizaje integral del tema propuesto.

Asimismo, se puede observar de una forma muy atractiva y práctica, el cálculo de áreas comprendidas entre curvas para inferir el concepto de integrales



Comentarios finales

La computadora en la clase de matemática abre las puertas a la innovación por parte de docentes y alumnos; lo importante es detectar esta posibilidad e impulsarla, animándose a incorporarla como una herramienta que se utilice en la educación matemática.
Elaboramos en este taller actividades tendientes a participar activamente entre y con los docentes intervinientes, que podrán ser luego implementadas en el aula para lograr la construcción del conocimiento matemático y su aplicación en la resolución de problemas.
Al finalizar el mismo, los docentes han adquirido una nueva visión de cómo utilizar la computadora en la clase de matemática y las estrategias necesarias para confeccionar aplicaciones didácticas en las que se utilicen las diferentes herramientas con que cuenta el nippe Descartes.
Nuestro propósito fue ofrecer una *guía* a los colegas para que puedan aprender a utilizar este applet como herramienta de trabajo y que cada uno de ellos lo adapte a sus conocimientos, su metodología y a los diferentes estilos de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. y otros. (1996). *Enseñar Matemáticas.* Barcelona: GRAÖ.
Cafferata Ferri, S.; Homilka, L.; Mamani, G.(1998).*Una experiencia en la elaboración de software educativo y su aplicación en el aula.* XII Reunión Latinoamericana de Matemática educativa, Santafé de Bogotá.
Cafferata Ferri, S.; Mamani, G. (Por publicar) *El ordenador como herramienta didáctica.*
Crespo Crespo, C. (2001). *La computadora y la escuela.* Buenos Aires: Instituto Glaux.
Gallego, D.; Alonso, C. (1997). *Multimedia*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
Marabotto, M.; Grau, J. (1991). *Hacia la informatización del aprendizaje. Fundamentos y conducción.* Buenos Aires: Fundec.
Marabotto, M.; Grau, J. (1995). *Multimedios y educación.* Buenos Aires: Fundec.
Villella, J.; Crespo Crespo, C.; Ponteville, Ch. (1998). *Cuando la geometría es el tema de la reflexión matemática.* Buenos Aires: UNSAM.
Villella, J.; Crespo Crespo, C.; Ponteville, Ch. (1997). *Acerca del concepto de función.* Buenos Aires: UNSAM.
Villella, J.; Crespo Crespo, C; Ponteville, Ch. (2000): *No somos anunéricos . Un acercamiento a la estadística y a la probabilidad desde y en el aula.* Buenos Aires: UNSAM.

Uso de Tecnología

Nivel Superior

El impacto de la tecnología en la educación matemática: La resolución de sistemas de ecuaciones

Antonio R. Quesada
Department of Mathematics & Computer Science. The University of Akron. Akron, Ohio
aquesada@uakron.edu

Resumen
En este artículo se revisan algunos de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones que la integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas facilita. Se verá que, tanto en el ámbito preuniversitario como en cursos básicos de universidad, es posible introducir, además de los métodos tradicionales, el estudio de otros métodos y sistemas que usualmente se abordan en cursos avanzados. La tecnología ayuda a simplificar los cálculos, lo que permite que el énfasis en los procesos mecánicos se reduzca en favor de un enfoque más conceptual y de que pueda estudiarse un mayor número de aplicaciones. Finalmente, se discutirá la teoría del uso de la tecnología como "caja negra o caja blanca;" y se demostrará el uso de plantillas ("scripts") y programas especializados como recursos pedagógicos.

El estudio de funciones algebraicas y trascendentes para modelar problemas del mundo que nos rodea, y como resultado el estudio de la resolución de ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones que envuelven estas funciones, constituye uno de los objetivos principales del currículo de matemáticas en el ámbito de secundaria y cursos básicos de universidad. Tradicionalmente, el estudiante aprendía métodos analíticos que le permitían resolver inicialmente ecuaciones lineales, cuadráticas y racionales, y más adelante ecuaciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. En este artículo se revisarán algunas de las implicaciones de la integración de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.

La integración de las calculadoras gráficas en la enseñanza de las matemáticas permite que, además del enfoque analítico tradicional, se pueda enseñar desde un principio métodos numéricos y gráficos para la resolución de ecuaciones (Quesada, 98). El estudio de estos métodos envuelve conceptos fáciles de visualizar y cálculos que la calculadora realiza automáticamente, por lo que no parecen presentar grandes dificultades conceptuales o de cálculo, y por tanto no requieren una gran inversión de tiempo. Hay varias observaciones de interés sobre el uso de estos métodos. En primer lugar son versátiles ya que no dependen del tipo de funciones continuas que la ecuación envuelva, por tanto, es razonable pensar, que el uso repetido de un mismo proceso debe facilitar que el estudiante lo retenga. En segundo lugar, estos métodos son herramientas universales que permiten resolver ecuaciones que no tienen solución cerrada y que por tanto, no pueden resolverse por los métodos analíticos básicos. Por último, se ha encontrado que los estudiantes favorecen tanto el uso de distintas representaciones para resolver ecuaciones, como la posibilidad de poder confirmar gráfica o numéricamente que la solución obtenida algebraicamente es correcta (Quesada & Maxwell, 1994).

Los ejemplos y figuras que se incluyen a continuación se han obtenido usando calculadoras Texas Instruments TI-83 plus y TI-92, que representan la primera y la segunda generación de calculadoras gráficas, la última con cálculo simbólico. En deferencia a aquellos lectores con poca experiencia en el uso de las calculadoras gráficas, se han incluido numerosas pantallas que permitan duplicar fácilmente las soluciones que se presentan.

<u>Ejemplo 1</u>. Resuelve a) $\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ 12x-3y=6 \end{array}\right\}$, b) $\left.\begin{array}{l} y=-x^3+3x^2-x-3 \\ y=5-2x^2 \end{array}\right\}$, y c) $\left.\begin{array}{l} y=x^3-2x \\ y=2\cos x \end{array}\right\}$.

1. Métodos Gráficos

Las figuras 1.a-1.f muestran como una vez se entran las funciones explícitas (fig. 1.a), se puede estimar la solución superponiendo el cursor al punto de intersección, o se puede usar repetidamente la instrucción *Zoom In* hasta obtener las coordenadas con la precisión deseada (fig. 1.b). En las figuras 1.c y 1.d se ve como pedir a la maquina que calcule directamente las coordenadas del punto de intersección.

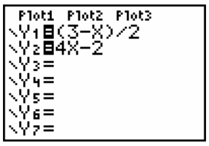


Figura 1.a

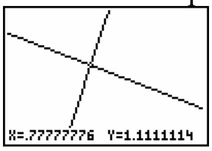


Figura 1.b

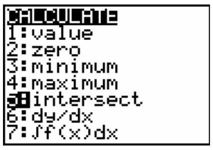


Figura 1.c

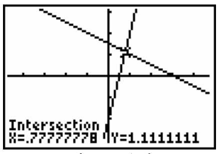


Figura 1.d

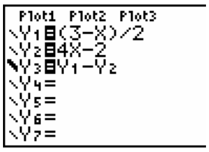


Figura 1.e

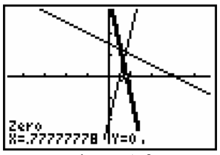


Figura 1.f

Es importante que los alumnos se den cuenta de que la abscisa del punto buscado es el cero de la función diferencia. A este fin se ha construido esta función (fig. 1.e) y se ha obtenido su gráfica en trazo grueso (fig. 1.f). Una vez localizado el cero de esta función, se usan las flechas verticales para desplazar el cursor de este punto al punto de intersección encontrado anteriormente, reforzando visualmente la correspondencia vertical de ambos.

A fin de presentar un cuadro más completo del enfoque gráfico, se considera a continuación la solución del sistema de polinomios dado. Es de notar que una mayoría de estudiantes tiende a buscar las dos soluciones que aparecen en la gráfica de la figura 1.h obtenida con la ventana básica $[-10,10]\times[-10,10]$ ignorando la tercera solución que aparece cuando se usa una ventana apropiada como por ejemplo $[-10,10]\times[-70,10]$.

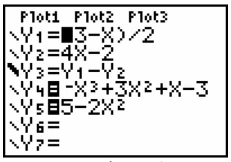


Figura 1.g

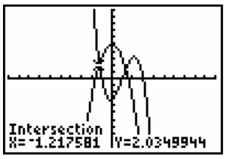


Figura 1. h

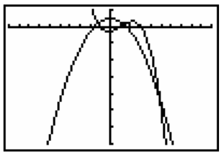


Figura 1.i

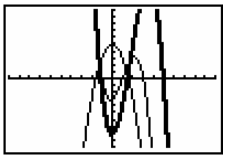


Figura 1.j

Esta situación, que se da frecuentemente al resolver sistemas gráficamente, sugiere la conveniencia de hablar sobre el crecimiento de funciones y su comportamiento global, un tema que no suele incluirse en secundaria. En este caso se puede deducir la existencia de la tercera solución simplemente al notar que la función cuadrática crece más lentamente que la cúbica y por tanto la gráfica de ésta última debe interceptar la parábola una tercera vez. Finalmente, en la figura 1.j se ve como la gráfica de la función diferencia en la ventana básica habría mostrado las tres soluciones. Esto apunta a la conveniencia de trabajar en general con la función diferencia cuando se usa el método gráfico. Las figuras 1.k-1.n contienen la solución al sistema trascendente dado. Este es un ejemplo clásico (TI-81 guidebook, 1990) que conviene proponer a los estudiantes para que se den cuenta de como la vista puede engañar.

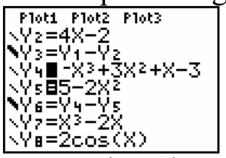


Figura 1.k

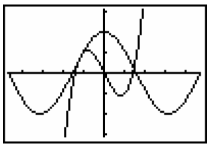


Figura 1. l

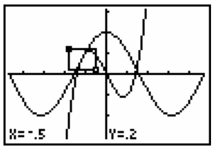


Figura 1.m

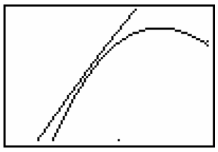


Figura 1.n

2. Métodos Numéricos

Regresando al ejemplo 1(a), se considera a continuación el método numérico por excelencia en cursos de precálculo, que consiste en la aplicación repetida del teorema del valor intermedio a intervalos anidados que contienen un cero de la función diferencia. Una vez se localiza un intervalo que contiene un cero, como (0,1) en este ejemplo, se inicia la tabla con el extremo izquierdo del intervalo y con un incremento que usualmente es igual a una décima de la longitud del intervalo, en este caso 0.1 (figura 2.a). En la tabla obtenida (figura 2.b) se observa que la función cambia de signo en el intervalo $(0.7, 0.8)$. El proceso continúa redefiniendo el valor inicial y el incremento de la tabla, en este caso 0.7 y 0.01, cada vez que se obtiene un nuevo intervalo hasta conseguir la precisión deseada (figura 2.c-2.d).

Figura 2.a

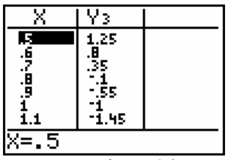


Figura 2.b

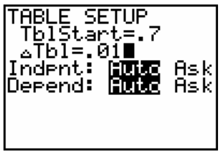


Figura 2.c

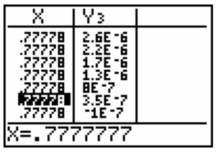


Figura 2.d

El método de bisección que se ilustra en las figuras 2.e-2.f es fácil de implementar con la tabla ya que los cálculos pueden efectuarse en la línea de comandos. Para evitar que surjan confusiones con demasiados valores en la tabla, es preferible que el nuevo valor calculado reemplace al desechado, de forma que la tabla no contenga en ningún momento más de tres valores de la *x*. La búsqueda por éste método de un cero negativo suele evidenciar las dificultades que un porcentaje notable de estudiantes tiene con los negativos.

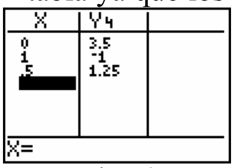


Figura 2.e

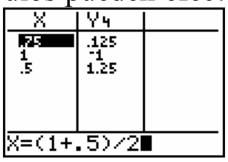


Figura 2.f

3. Métodos Matriciales

Entre los tipos de datos incluidos en las calculadoras gráficas se encuentran las matrices que vienen acompañadas con un extenso menú de operaciones. Las figuras 3.a-3.d incluyen la solución del sistema vía el método de Gauss. La sintaxis de las operaciones elementales por fila no es complicada, y los estudiantes aprenden el proceso a la vez que los errores mecánicos se reducen substancialmente. El proceso se ha continuado en la figura 3.e para obtener la solución de Gauss-Jordan. Estas calculadoras contienen también las instrucciones *r.e.f. y r.r.e.f.* que producen directamente, a partir de la matriz aumentada del sistema, la matriz escalonada por filas y la matriz reducida escalonada por filas (figura 3.f). Si bien podría pensarse que la existencia de estas dos instrucciones evitaría que los estudiantes practicaran a fondo los métodos de Gauss o Gauss-Jordan, en la práctica basta con anunciarles que deberán incluir en los exámenes varios pasos intermedios para "motivarlos" a practicar las operaciones elementales.

Figura 3.a

Figura 3.b

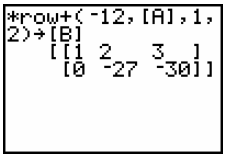


Figura 3.c

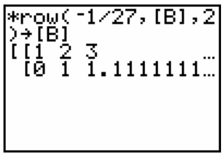


Figura 3.d

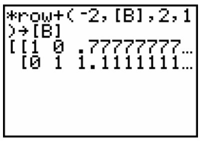


Figura 3.e

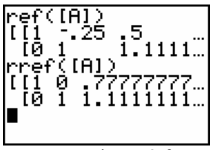


Figura 3.f

Por último, en adición al método de Cramer que se muestra en las figuras 3.g-3.i, se ha incluido en la figura 3.j la solución matricial, $A^{-1} \cdot B$, que ahora es fácilmente accesible, para sistemas cuadrados no singulares.

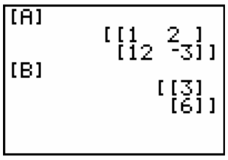


Figura 3.g

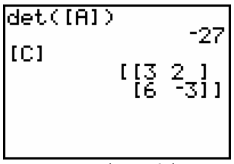


Figura 3.h

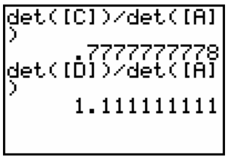


Figura 3.i

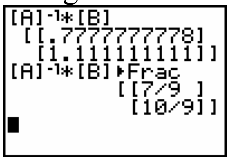


Figura 3.j

Se debe aclarar a los estudiantes que el método de Cramer se usa principalmente para analizar sistemas lineales cuadrados que contienen algún parámetro, y que en sistemas lineales de muchas variables que ocurren en la vida real, usualmente no se usa A^{-1} tanto por la cantidad de tiempo que conlleva su cálculo, como por los errores asociados con el mismo. La regla general básica que los estudiantes de secundaria pueden usar para resolver un sistema lineal $A_{mxn} X_{nx1} = B_{mx1}$ es:

$$\boxed{\text{"si } m = n \text{ y } \det A \neq 0, \text{ use } A^{-1} \text{ en los demas casos use Gauss."}}$$

4. Sistemas Patológicos.

El siguiente ejemplo se refiere a la existencia y solución de sistemas patológicos, un tema generalmente excluido del currículo de secundaria dados los cálculos engorrosos que los mismos conllevan y las limitaciones tradicionales de tiempo. Sin embargo, una vez se introduce la tecnología, el tiempo necesario para resolver estos sistemas es mínimo y expone al estudiante a la inestabilidad de estos sistemas.

Ejemplo 2. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales que siguen. ¿Puedes explicar la diferencia entre las soluciones? a) $\left.\begin{matrix} 5x+6y=11 \\ 4.99x-6y=33 \end{matrix}\right\}$, y b) $\left.\begin{matrix} 5x+6y=11 \\ 4.9975x-6y=33 \end{matrix}\right\}$.

Solución. La diferencia notable (fig. 4.a-4.b) entre las soluciones de estos dos sistemas, que difieren por un solo coeficiente 0.0075 mayor que el otro, y la interpretación gráfica de la misma a la luz de las pendientes de las rectas, es de gran valor pedagógico por las conexiones entre conceptos importantes que se establecen.

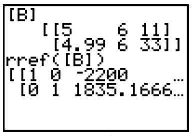


Figura 4.a

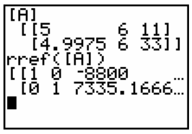


Figura 4.b

5. Cálculo Simbólico

En el resto de este artículo se consideran algunas de las capacidades disponibles en calculadoras con cálculo simbólico o algebraico, como la TI-92, para la resolución de sistemas. Deliberadamente se ha seleccionado el ejemplo 1.a para que la solución completa quepa siempre en una pantalla. La figura 5.a contiene la solución de este ejemplo mediante el método de substitución. Se puede ver que el uso repetido de la instrucción "*solve*" permite despejar por una variable en la primera ecuación y substituir en la segunda. El método de reducción o adición se facilita tratando las ecuaciones como variables, es decir, asignando nombres a cada una de las ecuaciones dadas. Después se procede a formar las combinaciones lineales necesarias con las mismas usando los nombres asignados (figura 5.b). Aunque el proceso necesario para llevar a cabo la solución de este sistema por cualquiera de estos dos métodos usando lápiz y papel no es exactamente igual, la esencia del proceso sí lo es. Así por ejemplo en el método de adición, el estudiante debe decidir los coeficientes de la combinación lineal de ecuaciones que elimina una variable del resultado y como despejar la otra variable. La maquina facilita los cálculos y evita los errores aritméticos, pero el estudiante debe entender el método para proveer las instrucciones que componen el proceso. En este caso se dice que la calculadora se está usando como una caja blanca.

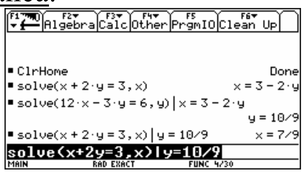


Figura 5.a

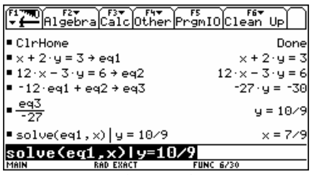


Figura 5.b

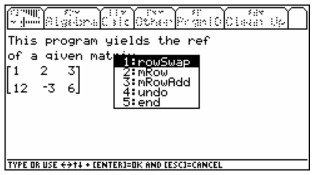


Figura 5.c

La TI-92 también hace posible el desarrollo y uso de programas pedagógicos, que facilitan la práctica de determinadas destrezas reduciendo errores aritméticos. Por ejemplo, las figuras 5.c-5.d muestran dos pasos de la ejecución del programa "Gauss" diseñado para ayudar a que el estudiante aprenda el método de este nombre (Quesada, 1999b). Las figuras muestran el uso de menús que permiten seleccionar la operación fila deseada y entrar los parámetros necesarios.

En las figuras 5.c-5.d se muestran varios comandos que permiten obtener la solución de un sistema lineal automáticamente: la instrucción *rref* para obtener la matriz reducida escalonada por filas a partir de la matriz aumentada del sistema, la instrucción *solve* que provee el resultado a partir de las dos ecuaciones, y la instrucción *simult* que, a partir de la matriz de coeficientes del sistema y la matriz de términos independientes, obtiene la matriz solución. Buchberger se refiere al uso de la calculadora como una caja negra en estos casos en que la solución se obtiene por medio de una instrucción que no requiere que el usuario conozca el proceso interno usado, (Kutzler, 1996).

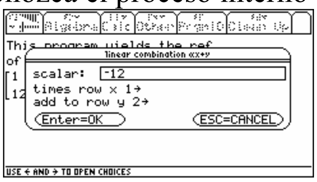


Figura 5.d

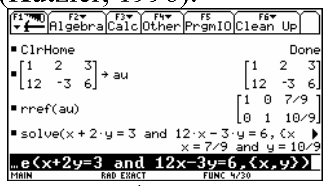


Figura 5.e

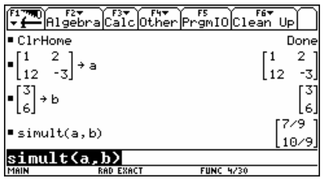


Figura 5.f

Claramente, la calculadora facilita que, una vez se hayan estudiado los procesos mecánicos deseados para resolver sistemas, todos los estudiantes puedan pasar al siguiente nivel de resolver problemas cuya solución dependa del planteamiento de un sistema, que se resuelve automáticamente, usando la calculadora como una caja negra.

No existe aún un acuerdo sobre que destrezas algorítmicas se deben mantener, y con qué profundidad deben practicarse las mismas cuando se integra la tecnología en el currículo. Las recomendaciones de asociaciones (NCTM, 1989; AMATYC, 1995) nos dicen que la tecnología ayuda a simplificar los cálculos, lo que permite que el énfasis en los procesos mecánicos se reduzca en favor de un enfoque más conceptual, facilitándose que más alumnos puedan estudiar un mayor número de aplicaciones. Al mismo tiempo es importante que los alumnos aprendan a usar tanto la estimación como la tecnología de acuerdo al problema que se enfrenta y a la precisión de la solución que se busca (Kutzler 1999).

6. Soluciones Iterativas de Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Anteriormente (Quesada 1999a, 1998a), se ha planteado la conveniencia de incluir la iteración y la recursión entre las herramientas básicas que se estudian en matemáticas de secundaria, una vez se integra el uso de la tecnología. En particular, los métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que usualmente se estudian en un curso de Álgebra Lineal Aplicada, a menudo con un enfoque puramente teórico, se hacen accesibles a estudiantes avanzados de secundaria que dispongan de la tecnología apropiada. Las figuras 6.a-6.b contienen plantillas[1] que proveen la solución de un sistema lineal usando los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel.

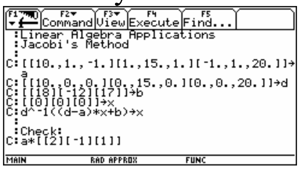


Figura 6.a

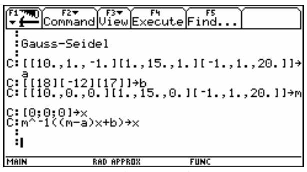


Figura 6.b

Conclusión

Los ejemplos presentados muestran que la integración de la tecnología permite ampliar el estudio de sistemas de ecuaciones proveyendo soluciones más universales y simplificando los cálculos. Esto a su vez permite que se reduzca el énfasis en los procesos mecánicos en favor de un enfoque más conceptual y de que puedan estudiarse un mayor número de aplicaciones.

Referencias bibliográficas

American Mathematical Association of Two-Year Colleges. (1995). *Standards For Introductory College Mathematics Before Calculus*. Memphis, TN: AMATYC.

Kutzler, Bernhard. (1999). *The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics*. http://www.kutzler.com/bk/a-pt/ped-tool.html

Kutzler B. (1996). *Improving Mathematics Teaching with Derive*. Bromley: Chartwell-Bratt, ISBN 0-86238-422-2.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Quesada, A.; Maxwell, M. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college students' performance in precalculus. *Educational studies in mathematics*, 27, 207-215.

Quesada A. (1998). Usando Recursión Para Resolver un Problema de Crecimiento. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 169-173, S.A. de C.V., México: Grupo Edit. Iberoamérica,

Quesada A. (1998). New Models and Approaches to Problem Solving. *Proc. of the Tenth Ann. Int. Conf. on Tech. in Colleg. Math.*, pp. 367-371, Addison-Wesley, Reading, Ma.

Quesada A. (1999). Should Iteration and Recursion be Part of the Secondary Student's Mathematics Toolbox*? The Intern. Journal of Computer Algebra in Mathematics Education,* Vol. 6, No. 2, pp. 103-116, Plymouth, England.

Quesada A. (1999). On Teaching Linear Algebra with a TI-92. *Proc. of the Eleventh Ann. Int. Conf. on Tech. in Colleg. Math*, pp. 375-379, Addison-Wesley, Reading, Ma.

Quesada A. (2000). The Use of Scripts On Teaching Linear Algebra. *Proc. of the Twelfeth Ann. Int. Conf. on Tech. in Colleg. Math.*, pp. 329-334, Addison-Wesley, Reading, Ma.

TI-81 graphics calculator guidebook. (1990). Texas Instruments Incorporated.

[1] La TI-92 permite recopilar el conjunto de instrucciones necesarias para resolver un problema en un archivo denominado plantilla (script). La plantilla es un "pseudo-programa" que puede volver a usarse para resolver un problema análogo con solo cambiar los datos. A diferencia con un programa, una plantilla requiere que el estudiante, cada vez que la use, ejecute una a una cada instrucción [Quesada, 2000].

Alfabetización científica y tecnológica: una introducción

Fernando Cajas
American Association for the Advancement of Science (AAAS)
Universidad de San Carlos de Guatemala
fercajas@hotmail.com

Resumen
Este curso fue preparado para una audiencia de docentes en matemática e investigadores en matemática educativa con interés en alfabetizacion cientifica. Se discuten elementos importantes que se dan en los procesos de selección y traslación de conocimiento científicos y tecnológico en ambientes escolares. Los participantes escogieron discutir aspectos de tecnología para luego regresar a nociones de alfabetización cientifica. En este articulo se presenta el contenido del curso.

Introducción

La ciencia, la matemática y la tecnología juegan un papel fundamental en el funcionamiento de todos los pueblos ya sean los desarrollados o los llamados en vías de desarrollo. En los primeros, los autodenominados desarrollados, existe una mayor inversión en la educación y en general estos países han superado el problema del analfabetismo, esto es, la mayoría de sus miembros saben leer, escribir y manejan las operaciones aritméticas básicas. Los segundos, los llamados en vías de desarrollo, aun se encuentran anclados en el puerto de la desesperación con altas tasas de analfabetismo y una serie de problemas sociales, innegablemente ligados a la falta de inversión en educación y principalmente relacionados a la falta de una visión coherente que genere planes educativos que sean factibles y que produzcan individuos capaces de formar comunidades que puedan sacarnos de este largo y obscuro subdesarrollo.

Durante los últimos quince años la comunidad latinoamericana de matemática educativa ha consolidado una disciplina que estudia los procesos de transposición del conocimiento matemático en comunidades escolares (Cantoral, 2001). La existencia de reuniones anuales, el lanzamiento de una revista latinoamericana de matemática educativa y la existencia de foros regionales sobre la problemática que plantea la matemática educativa son eventos que reflejan el interés de una comunidad en analizar sistemáticamente el problema del aprendizaje de la matemática. Pero la matemática usualmente no es un fin en sí mismo, ni en las comunidades científicas ni en los ambientes escolares, aunque si lo es en algunas comunidades de matemáticos. Esto es, usualmente la matemática es una herramienta para conceptualizar fenómenos, para ordenarlos. De allí que la interacción de la matemática con la ciencia y la tecnología juega un papel esencial en la educación de los ciudadanos. En efecto, no puede conceptualizarse una educación general científica sino toma en cuenta la interacción entre ciencia, matemática y tecnología. Asimismo, la interacción entre didácticas de la ciencia y la tecnología con matemáticos educativos es importante.

Este artículo resume la experiencia de haber dictado un curso corto en el contexto de la XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en Buenos Aires. El curso fue preparado para una audiencia de docentes en matemática o investigadores en matemática educativa con interés en alfabetización científica. Se discuten elementos importantes que se dan en procesos de selección y traslación de conocimiento científicos y tecnológico a ambientes escolares. Los participantes escogieron enfocarse en aspectos de tecnología para luego regresar a nociones de alfabetización científica y matemática.

Raíces históricas

Durante los últimos veinte años se ha dado una revolución cognitiva que ha proveído teorías y datos sobre procesos de enseñanza y aprendizaje de la ciencia y la matemática (NRC, 2000). En efecto, científicos cognitivos y didácticas de la ciencia y la matemática han emprendido la creación de disciplinas científicas dedicadas al estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje de la ciencia y la matemática. Durante la década de 1970-1980, una serie de investigaciones empíricas desarrolladas alrededor del mundo por la emergente didáctica de la ciencia y la matemática (llamada science and mathematics educación en los países sajones y didáctica de la ciencia y matemática educativa en Latinoamérica) revelaron que los estudiantes no aprenden la ciencia ni la matemática que se les enseña. Estas investigaciones cubrieron una gama de conceptos científicos (por ejemplo, fuerzas, energía, fotosíntesis, células, etc.) asociados a fenómenos naturales (esto es, movimiento de objetos, el clima Terrestre, producción de alimento, crecimiento de las plantas, etc.) y conceptos matemáticos (por ejemplo, fracciones, proporciones, funciones, álgebra, cálculo, etc.) [Véase AAAS, 1997 capitulo 15 por un resumen de esta investigación en el mundo sajón y revise las actas de las Reuniones Latinoamericanas para el caso de matemática educativa, tales como Beitia, 2001; Farfán, Matías, Sanchez & Tavares, 2000, así como la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa y la Revista Enseñanza de la Ciencia (Espinoza & Azcárate, 2000). Estos estudios sientan las bases teóricas y empíricas para repensar la manera en que generamos conocimiento científico, matemático y tecnológico para educación así como para planificar como producir recursos que pudieran soportar el aprendizaje de estos contenidos.

Además de la revolución cognitiva (NRC, 2000), durante los últimos quince años se han dado en el mundo una serie de movimientos que tienen por objetivo democratizar la ciencia, la matemática y la tecnología (AAAS, 1989). Este proceso de apertura democrática en la educación científica plantea preguntas importantes para una comunidad latinoamericana de matemática educativa que ha centrado su atención en el aspecto matemático de la educación tanto a nivel avanzado como para educación general. En este ultimo caso es importante analizar cual es el papel de la matemática cuando esta forma parte de una educación general en ciencia y tecnología. De aquí que la noción de alfabetización científica, entendida como el conocimiento mínimo que se requiere en ciencia, matemática y tecnología, sea de importancia para los matemáticos educativos.

Conocimiento escolar

La generación de contenidos es una actividad fundamental de cualquier plan para mejorar el aprendizaje de la ciencia, la matemática y la tecnología. Usualmente esto ha sido mal interpretado como la generación de listas de tópicos y objetivos instruccionales comúnmente incoherentes, esto es, contenidos que no están relacionados los unos con los otros y que son irrelevantes para la educación general. Y aquí no importa si quienes generan esas listas son científicos, matemáticos o científicos individuales o si se copian del índice de los libros de texto o aun si son generadas por docentes en servicio. Casi siempre los contenidos son incoherentes e irrelevantes.

Los contenidos con incoherentes porque no se han pensado globalmente y porque tampoco han sido pensados en términos de como construirlos desde la pre primaria hasta la educación secundaria y menos la universitaria. Aun en matemática, donde se supone que la estructura lógica de dicha disciplina es capaz de proveer coherencia local y global, nos encontramos ante contenidos que difícilmente de conectan unos con otros. Así, el primero año básico se introduce a los estudiantes a las nociones de lógica y teoría de conjuntos. Luego se les mueve al alebra donde se les enseñan los “casos” de factorización. Luego se les enseña un poco de trigonometría y en algunos casos geometría. Pero este fiambre de contenidos no se relaciona el uno con el otro. Aunque es posible generar cierta coherencia que explique el papel de lógica y teoría de conjuntos en la construcción de contenidos matemáticos escolares, la situación actual no incluye dicha visión. Así, se ha introducido la teoría de conjuntos pero no se le ha utilizado para construir el contenido matemático escolar. La visión algebraica nunca se conecta con lógica sino mas bien se basa en la enseñanza memorística de una serie de casos de factorización irrelevantes para los estudiantes y aun para los docentes quienes se ven en el dilema de enseñar una matemática incoherente y descontextualizada.

La matemática escolar no esta sola. La física, la química y la biología escolar son agregados de algunos conocimientos físicos, químicos y biológicos usualmente irrelevantes que fuerzan a los estudiantes a memorizar piezas de contenidos muertos que tienen sus origines en una conceptualización de las ciencias naturales totalmente desvinculada con la realidad. La física impone una estructura más histórica que didáctica donde los estudiantes memorizan definiciones de cinemática y dinámica sin tener acceso ideas claves que puedan explicar una serie de fenómenos. En química los estudiantes memorizan ideas sobre la teoría atómica sin tener evidencia de la existencia de átomos o sin poder siquiera intentar algunos fenómenos con dicha teoría. En biología escolar, la que varios sistemas educativos es precedida por “Ciencias Naturales”, los docentes se esfuerzan en seguir contenidos curriculares que han privilegiado el aprendizaje de los nombres de los componentes de algunos sistemas biológicos. Así por ejemplo, desde primaria hasta la universidad, pasando por la escuela media, los estudiantes memorizan los nombres de las partes de la célula a veces hasta nombres de componentes muy especializados sin tener ideas de las ideas claves que explican el funcionamiento de la célula. Llegan a biología a seguir memorizando nombres y terminan sus cursos de biología sin haber tenido la menor oportunidad de explicar los fenómenos biológicos de sus vidas cotidianas. Aun en las carreras con fundamento de las ciencias biológicas de la universidad, como son medicina y agronomía, la memorización es la norma así como la falta de oportunidades para conceptualizar ideas claves tales como el flujo de materia y energía en sistemas vivos.

En resumidas cuentas, nos encontramos ante el problema de poder re-plantear un contenido científico, matemático y tecnológico escolar que pueda producir a un ser humano competente en su vida social e individual.

Construyendo contenidos relevantes y coherentes

Los objetivos de la educación científica, matemática y tecnológica pueden ser económicos, políticos y culturales, esto es, esta educación debe permitirle a las personas tener una vida más, productiva, participativa e interesante. Estos tres objetivos de la educación científica y matemática están relacionados con objetivos de la educación general, a saber: su naturaleza cultural (una vida más interesante), su función económica (una vida más productiva) y su objetivo político (una vida con más participación ciudadana).

En el curso he propuesto a los participantes que los conocimientos científicos, matemáticos y tecnológicos para la educación general deben ser sometidos a un análisis que incluya tres criterios siguientes. A saber, criterios de: a) intelectualidad, b) utilidad y c) función social. La noción de contenido es amplia e incluye conceptos, procedimientos, aptitudes y valores que se quieren obtener como resultado de la educación general. En el desarrollo de estos criterios me he inspirado en el trabajo de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia [llamada "triple AS, AAAS, por sus siglas en ingles], particularmente su reporte llamado *Ciencia: Conocimientos para Todos* (disponibles gratis en: http://project2061.aaas.org/español).

Intelectualidad: ¿Presenta el contenido propuesto los aspectos científicos, matemáticos o tecnológicos que son importantes en la historia humana, o importantes en nuestra cultura, de tal forma que una educación general quedaría incompleta sin ellos? ¿Contribuye este contenido a la capacidad de las personas de ponderar los asuntos permanentes de significado humano?

Utilidad: ¿Es el contenido propuesto útil para tomar decisiones personales? ¿Amplia de manera importante las posibilidades de empleo del egresado?

Función Social. ¿Ayuda el contenido propuesto al ciudadano a participar de manera inteligente en la toma de decisiones políticas y sociales sobre asuntos relacionados con ciencia y tecnología?

Los participantes al curso han tenido la oportunidad de generar contenidos basados en los criterios anteriores. Lo han hecho para el caso de educación en tecnología. Basados en el trabajo que desarrollaron de un día para otro y en una entrevista que se les hizo llegar, se discutió cómo los contenidos de ciencia y matemática de las escuelas latinoamericanas se pueden ver como la acumulación de una serie de contenidos que usualmente no han sido pensados globalmente y que carecen también de coherencia local. Los contenidos tecnológicos son resabios de viejas técnicas que no han sido conectadas a la modernización y cientificación de la tecnología contemporánea.

Tecnología como conocimiento escolar

El primer problema que emerge cuando se habla de tecnología es el amplio significado que el termino tiene. Rodolfo Herrera, un filósofo centroamericano de la ingeniería, estudió una serie de significados de *tecnología* (Herrera, 1986). De estos significados de tecnología el mas común es el de artefacto (el objeto tecnológico, tal el caso del televisor, el carro, etc.). En efecto la mayoría de participantes al curso identificaron tecnología como artefacto, particularmente computadoras. En este sentido parece ser que tecnología en el circulo de matemática educativa esta mas relacionado con tecnológicas educativas, particularmente nuevos software (referencias). El grupo discutió este significado de tecnología y sus implicaciones para la educación. Así, se discutió como tendencias de educación tecnológica se han enfocado en la operación del artefacto mas que en el conocimiento que esta detrás del diseño y funcionamiento del artefacto.

Un segundo significado de tecnología explorado en el curso fue la idea de conocimiento. Esto, el conocimiento tecnológico que esta detrás del diseño y funcionamiento de artefactos. Este significado fue mencionado por varios participantes pero más en el sentido de tecnología como ciencia aplicada. Esto en parte tiene alguna justificación pues las tecnologías modernas están siendo fuertemente influenciadas por la ciencia. Sin embargo, la tecnología como conocimiento tiene cierta independencia de la ciencia. El grupo propuso ejemplos de conocimiento tecnológico que podría ser relevante para alfabetización científica (ejemplos pueden verse en Cajas, 2001a, b).

Un concepto fundamental que se presentó fue la idea de *control*. Esto es, el diseño y manejo de sistemas tecnológicos que tienen la capacidad de controlar procesos físicos o sociales. En sus recomendaciones sobre conocimiento tecnológico para la educación de todos la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia sugiere que: :
"Una idea que debe incluirse en los grados intermedios es la de que los sistemas complicados [complejos] requieren mecanismos de control. La mayoría de los alumnos conocen el termostato para controlar la temperatura de una habitación; éste puede servir como modelo de todos los mecanismos de control. También pueden investigarse cómo funcionan los controles en los diversos sistemas: máquinas, competencias atléticas, política, el organismo humano, el aprendizaje."(AAAS, 1998, p. 47)

Desde este perspectiva de alfabetización es importante que los estudiantes aprendan acerca de control en sistemas complejos. La sociedad moderna está llena de ellos:
"Otro ejemplo es la manera en que se filtran noticias sobre planes gubernamentales antes de que se anuncien de manera oficial, lo que puede provocar reacciones que obligan a cambiarlos; las personas comparan lo planes filtrados con los que les gustarían y entonces los apoyan u objetan…" (AAAS, 1997, p. 171).

El grupo discutió algunas ideas sobre educación tecnológica, pero no se llegó a discutir cómo esta noción de alfabetización científica puede incorporares en el movimiento de matemática educativa. Se tenia el consenso que la alfabetización científica requiere de cierto conocimiento matemático, pero no dio tiempo a discutir cómo nociones de alfabetización científico y tecnológica pueden iluminar lo que se quiere que aprendan los estudiantes en matemática. Puesto esto en otra forma, la pregunta seria, ¿cual es el conocimiento matemático que se requiere para tener una alfabetización científica y tecnológica?

Referencias

AAAS (1998) *Avances en el Conocimiento Científico*. México Harla.
http://www.project2061.org/

AAAS(1997). *Ciencia Conocimiento para Todos*. México: Harla.
http://www.project2061.org/

Beitia, G. [Editor]. (2001). Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, Vol., 14. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cajas, F. (2001a). Alfabetizacion Cientifica y Tecnológica: La Transposición Didáctica Del Conocimiento Tecnológico. *Enseñanza de la Ciencia*, 19(2), 243-254.:
http://www.project2061.org/foro

Cajas, F. (2001b). The Science/Technology Interaction: Implications for Science Literacy. *Journal of Research in Science Teaching*, 38 (7), 715-729.

Cantoral, R. (2001). Matematica Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Espinoza, L.& Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto del <<limite de una función>>: una propuesta de análisis. *Enseñanza de la Ciencia,* 18(3), 355-368.

Farfán, R.M, Matias, C.E., Sanchez, D. & Tavares, A.[Editoras] (2000). Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, Vol. 13. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Herrera, R. (1986). La practica tecnológica. *Revista Filosofía*, 27(66), 349-359.

NRC {National Research Council] (2000). *How People Learn*. National Academy of Sciences. Washington D.C.

Aplicación de la informática en un curso de matemáticas

Eugenio Carlos Rodríguez, Lourdes Casañas Cruz, Mayra Durán Benejam, Marta Fernández Casuso, Yolanda O'Farrill Dinza, Iván Valido González
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana, Cuba
ecarlos@ind.ispjae.edu.cu

Resumen
En este trabajo se muestran los elementos a considerar para diseñar un curso de Matemática tomando como base el uso de la Informática en todas sus posibilidades.
El diseño de las asignaturas de Matemática empleando la Informática debe propiciar el desarrollo de la capacidad de autoaprendizaje. Las transformaciones de los contenidos y de las habilidades a lograr con el uso de la computadora permiten hacer más énfasis en el desarrollo del pensamiento lógico, la creatividad y la resolución de problemas.

Utilización de los medios informáticos en el proceso de enseñanza- aprendizaje (Durán Benejam, 2001)

La historia del uso de las computadoras en la Educación se inicia al final de los años 50, aunque en esa época algunas universidades las utilizaban con propósitos administrativos. De manera aislada surgieron grupos que realizaban investigaciones relacionadas con el empleo de la computadora en el proceso de enseñanza. Surgió entonces, en la década de los 60, una tendencia pedagógica denominada Tecnología Educativa el centro de su interés consistía en elaborar una "tecnología de la instrucción" similar al concepto de tecnología de la producción material, por ello, la atención se dirigió a los métodos y medios más que a los contenidos.
Las primeras aplicaciones enseñantes desarrolladas en computadoras tuvieron, desde el punto de vista de las teorías del aprendizaje, su base científica en el conductismo.
Las generaciones siguientes de aplicaciones enseñantes desarrolladas en computadoras recibieron la influencia de la Psicología Cognitiva y la Inteligencia Artificial surgiendo una nueva generación de software educativos denominada "Instrucción Inteligente Asistida por Computadora".
En la enseñanza de las Matemáticas puede utilizarse también otro tipo de software de gran utilidad para el trabajo en la disciplina, los llamados Asistentes Matemáticos. Entre ellos se encuentran: Derive, Mathematica y Matlab que no son catalogados como softwares educativos pues se limitan a dar la solución que el alumno le solicite sin dar ninguna explicación ni orientación de como se realizan las operaciones.
Se considera que la utilización de las computadoras en las aulas es un paso necesario que hay que dar y un reto que hay que asumir teniendo en cuenta que ya comenzó el siglo XXI. No se puede dilatar más ese momento, se debe hacer de manera racional, utilizando juiciosamente la tecnología informática, tratando de que se convierta en instrumento en manos de los alumnos para aprender por sí mismos ya sea con un enfoque individual o con enfoque grupal aprovechando el desarrollo de las redes de computadoras, de las telecomunicaciones y del Word Wide Web (WWW).

Estrategia para el uso de la Informática y el perfeccionamiento de los Programas (Carlos Rodríguez y Casaña, 2000; Colectivo de autores)

La estrategia para el uso de la Informática en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje considera la utilización de la computadora en las siguientes tres formas:

- Como medio de enseñanza, en las conferencias para mostrar ejemplos e introducir definiciones y conceptos, utilizando un Asistente Matemático profesional. En este caso se escogió el sistema DERIVE.
- Como medio de aprendizaje, mediante el uso de tutoriales o entrenadores en el trabajo independiente del alumno.
- Como herramienta de cálculo, en la resolución de ejercicios de aplicación donde los cálculos pueden ser engorrosos, mediante el uso de un asistente matemático (DERIVE) en laboratorios y trabajos independientes.

La Investigación, fundamentación y establecimiento de los aspectos del curriculum que es necesario perfeccionar incluyen el diagnóstico de los objetivos y contenidos que deben ser modificados a partir del uso de la Informática en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje, así como la determinación de aquellos en los cuales el uso de softwares educativos contribuyen a alcanzar resultados superiores.

El diseño del Programa de la Disciplina y los programas de las asignaturas que la componen incluye la elaboración de los sistemas de objetivos, conocimientos y habilidades de la Disciplina a partir del perfil del profesional, teniendo en cuenta el papel de la Disciplina en el curriculum de la carrera y su articulación con las demás disciplinas de la misma. Considerando además las posibilidades que brinda el uso de las computadoras como medio de enseñanza y como herramienta de cálculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en la vida profesional del futuro egresado.

Los Asistentes Matemáticos (Fernández Casuso y Valido González, 2000)

Para la introducción de Asistentes Matemáticos en nuestras asignaturas se tuvieron en cuenta los siguientes factores:

- Recursos humanos: la preparación y adiestramiento de los docentes en este software son imprescindibles para lograr resultados positivos en la implementación, dado el papel del docente de dirigente y facilitador del aprendizaje.
- Recursos materiales: es importante disponer de laboratorios de computadoras para la utilización de los softwares. En la medida de nuestras posibilidades se han ido adquiriendo computadoras las cuales se han introducido paulatinamente en el proceso de enseñanza aprendizaje a través de asistentes, tutoriales, etc. que permitan una mejor presentación y asimilación de los contenidos matemáticos.

Para decidir la forma de utilización del Asistente se tenían las siguientes opciones:

1. Introducirlos como herramienta de Laboratorio.
2. Como medio de enseñanza en las Conferencias.
3. Convertir algunas Clases Prácticas en clases de Laboratorio dirigidas por el docente.
4. Introducir algunos laboratorios realizados en forma semipresencial.

Analizando las bondades y desventajas de cada una de las formas anteriores se concluye que la tercera y cuarta opciones son las idóneas, ya que se señalan como ventajas las siguientes:

- El estudiante participa activamente en la clase.
- El estudiante puede descubrir, analizar, conjeturar el conocimiento utilizando apropiadamente las capacidades del asistente.
- El profesor orienta, guía, facilita y supervisa el aprendizaje de los estudiantes.
- Hay disponibilidad de Laboratorios para todos los grupos de estudiantes que reciben la asignatura.

A pesar de que DERIVE cuenta con toda una serie de herramientas para el cálculo de limites, derivadas e integrales, se elaboraron programas en el ambiente DERIVE con el objetivo de visualizar las ideas esenciales de los conceptos matemáticos anteriores que sirvan para las clases de presentación de contenidos como un medio que puede auxiliar al profesor para la comunicación con los estudiantes y para visualizar algunos conceptos de mayor complejidad o de mayor nivel de abstracción.

Las categorías didácticas a la luz de la introducción de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el proceso de enseñanza- aprendizaje (Durán Benejam, 2001**)**

La Didáctica es la rama de la Pedagogía que tiene como objeto de estudio el proceso docente educativo, realizado de forma sistémica y organizada. Un estudio de ese objeto requiere fijar la atención en su estructura (sus componentes), en su comportamiento (su movimiento) y en todos los aspectos que inciden sobre él y que se integran al sistema.
Por tal motivo, a pesar de que a primera vista, se aprecien como componentes del proceso docente educativo: el aprendizaje, la enseñanza y la materia de estudio, el resultado de un análisis más profundo de este proceso permite distinguir como componentes fundamentales del proceso: objetivos, contenidos, métodos, formas de enseñanza, medios, la evaluación del aprendizaje y el proceso de comunicación entre los participantes.

Esencial en este trabajo es el uso de los medios informáticos, asumiéndose como concepto de medios de enseñanza: todos los medios materiales necesitados por el maestro o el alumno para una estructuración y conducción efectiva y racional del proceso de educación e instrucción a todos los niveles, en todas las esferas de nuestro sistema educacional y para todas las asignaturas, para satisfacer las exigencias del plan de enseñanza.
En consecuencia, en este trabajo se consideran como medios de enseñanza-aprendizaje, pues cuando están en manos de los alumnos, sujetos activos dentro del proceso, se pueden clasificar como medios de aprendizaje.
Existen medios de enseñanza-aprendizaje generales como el mobiliario y el equipamiento técnico de la institución donde se destacan en la actualidad las redes de computadoras; y medios específicos de cada asignatura como objetos originales, reproducciones de objetos, láminas, mapas, escrituras, símbolos, libros, revistas, grabaciones, diapositivas, transparencias, videos, softwares, etc.

Actualmente los avances científicos y tecnológicos han provocado un desarrollo de los medios informáticos casi inimaginables hace pocos años atrás y las posibilidades de su aplicación dentro de la educación son inmensas, de tal forma que resulta imposible el desarrollo de la Educación Superior sin la utilización de estos medios en el proceso docente educativo.
Esto en modo alguno significa que los medios se conviertan en la categoría didáctica rectora dentro del proceso, sino que están en función de los objetivos y de los contenidos.
Específicamente en este trabajo se considera cómo los medios informáticos influyen sobre las restantes categorías didácticas particularmente algunas herramientas consideradas dentro de las TIC, tales como el Correo Electrónico, los Foros de Discusión "off line"(pizarrón de mensajes) y "on line" (chat), los Hipertextos, así como también los Asistentes Matemáticos.

Las consideraciones en cuanto a matices y perspectivas didácticas que se producen por la introducción de algunas herramientas de la tecnología informática se reafirman a continuación, dado que ésta ha venido a complementar o sustituir procesos que anteriormente se desarrollaban sin el uso de la tecnología informática. Asimismo, ha venido a introducir innovaciones o transformaciones en el proceso enseñanza-aprendizaje.
La complementación o sustitución de procesos se ponen de manifiesto en:

- Las **consultas** a los estudiantes, identificadas como una forma de enseñanza, como un espacio previsto por el profesor para que el estudiante acuda a evacuar sus dudas o a proponer sus alternativas de solución a los problemas. Estas herramientas brindan una alternativa más para realizar las consultas e inclusive para algunos estudiantes se puede producir prácticamente una sustitución de la consulta presencial por una consulta mediada por la computadora.
- Las **orientaciones para el estudio**, para las clases prácticas, seminarios o laboratorios donde en lugar de imprimir una página o folleto a estos fines, aparecen en un sitio Web a modo de sustitución.
- El proceso de **evaluación del aprendizaje**, el cual se complementa y enriquece con el uso de la tecnología informática, fundamentalmente en su función de retroalimentación.

En esta propuesta, elementos de innovación o transformación se identifican en lo siguiente:

- Se induce a los estudiantes a incursionar de manera independiente en partes de la materia objeto de estudio. Con ello se favorece el desarrollo de la **autopreparación** como forma de enseñanza obligada ante el nuevo valor del conocimiento y la necesidad de formación continua.
- Principalmente a través del pizarrón de mensajes, el correo electrónico o el sitio web en su conjunto, el estudiante puede encontrar o comunicar información, recoger tareas, plantear y enviar preguntas, de manera rápida y ágil, a otros estudiantes o al profesor de una forma diferente.
- La organización tradicional, por llamarle de alguna manera, va desapareciendo y está siendo reemplazada por una forma de proceder de profesores y estudiantes totalmente nueva.
- Esta transformación se concreta en un **canal de comunicación** estudiante/profesor, estudiante/estudiante, con características propias. Como se puede apreciar los

estudiantes utilizan la PC para colaborar, consultar a otros, solicitar ayuda por correo electrónico, etc.

- *El **ambiente de aprendizaje** se va tornando diferente y la didáctica no se queda al margen de estos cambios.*

Desde la perspectiva del profesor la utilización de estas herramientas constituye un gravamen para su trabajo ya que tiene que manejar simultáneamente dos ambientes de enseñanza-aprendizaje. Es necesario destacar que el profesor requiere poseer habilidades elementales en el manejo de estas herramientas de las TIC y buenos conocimientos sobre el asistente matemático que se haya decidido utilizar para dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura con creatividad.

Cambios en el paradigma de la instrucción y la educación con la introducción de las tecnologías informáticas y su repercusión en la sociedad (O'Farrill Dinza, 2000)

El desarrollo de las Nuevas Tecnologías de la Información y su incidencia en el mundo cultural necesita una reacción que desde el campo de la educación proporcione un reajuste de las funciones que hemos de cubrir en la sociedad.

Uno de los fenómenos más espectaculares de esta sociedad es, sin duda alguna, la aplicación generalizada de las tecnologías informáticas en todos los ámbitos de nuestras vidas.

Estos avances tecnológicos tienen lugar dentro de un determinado marco socioeconómico que hacen posible el desarrollo en universidades.

Desde hace aproximadamente veinte años, la sociedad de la información ha sido un tema recurrente en disciplinas diversas que van desde la sociología, la política y la economía. En los últimos tiempos comienza a hablarse del tema en ámbitos educativos.

El creciente desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación, el acelerado cúmulo de información y la omnipresencia de las comunicaciones en el entorno social, contribuyen a que en el ámbito educativo se lleven a cabo las necesarias transformaciones para adecuarse a una sociedad en estado de cambio permanente, con nuevas necesidades y valores.

En el ámbito educativo y particularmente en las aulas donde se desarrollan los procesos educativos, el impacto que producen las nuevas tecnologías viene a determinar los grandes cambios a que está sometida la educación, transformándola no solo en cuanto a su forma, sino también, y en buena medida a su contenido.

Ante estos cambios, surgen numerosas interrogantes: ¿Transformarán radicalmente las Tecnologías Informáticas la manera en que tiene lugar la educación?. ¿Qué papel corresponde cumplir a la escuela?. ¿Está la escuela suficientemente preparada para asumir este reto tecnológico en la formación de las futuras generaciones?. ¿Sustituirán las Nuevas Tecnologías de Enseñanza al maestro en las aulas o se integrarán a la actividad del educador en el marco del proceso de enseñanza aprendizaje?

Hay varias ideas fundamentales sobre el papel de las nuevas tecnologías en la educación de la sociedad de la información que es necesario destacar, ellas son:

- El ritmo de cambio: aprendizaje a lo largo de toda la vida.
- Nuevos entornos de enseñanza.

- Nuevos roles para las instituciones educativas.
- Nuevos roles para profesores y estudiantes.

Conclusiones.

En este trabajo se muestran los elementos a considerar para diseñar un curso de Matemática tomando como base el uso de la Informática en todas sus posibilidades, en el se consideran los siguiente aspectos:

1. Estrategias para el uso de la Informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
2. Investigación, fundamentación y establecimiento de los aspectos del curriculum que es necesario perfeccionar.
3. Diseño del programa del curso.
4. Formas organizativas de la docencia.
5. Los Asistentes Matemáticos en el aula y en el laboratorio de computadoras.
6. Los softwares educativos en el trabajo independientes.
7. Uso de plataformas virtuales.

El diseño de las asignaturas de Matemática empleando la Informática debe propiciar el desarrollo de la capacidad de autoaprendizaje. Las transformaciones de los contenidos y de las habilidades a lograr con el uso de la computadora permiten hacer más énfasis en el desarrollo del pensamiento lógico, la creatividad y la resolución de problemas.

Referencias bibliográficas

Carlos Rodríguez, Eugenio; Casañas Cruz, Lourdes. (2000) Transformación de las asignaturas de matemática para ingeniería mediante el uso de la informática. *IV Taller sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana, Cuba.

Colectivo de Investigadores. Perfeccionamiento de la Disciplina Matemática en una carrera de Ciencias Técnicas para el uso de la Informática en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje. *Proyecto de Investigación en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana, Cuba.*

Durán Benejam, Mayra. (2001) *La introducción de algunas herramientas de la tecnología informática en Algebra Lineal para Ingeniería Informática. Su impacto en la Didáctica.* Tesis de Maestría. Instituto Superior Politécnico José A. Echeverría. La Habana, Cuba.

Fernández Casuso, Marta; Valido González, Iván. (2002)Programas derive para el empleo en la docencia. *IV Taller sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura.* Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana, Cuba.

O'Farrill Dinza, Yolanda de J. (2000) *Cambios en el paradigma de la instrucción y la educación con la introducción de las tecnologías informáticas y su repercusión en la sociedad.* Trabajo presentado y publicado para el examen de Mínimo para el doctorado sobre Problemas Sociales de la Ciencia. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana, Cuba

Reconstrucción de significados en contextos interactivos: las gráficas de las funciones en la organización del cálculo

Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN, México
fcordero@mail.cinvestav.mx

Resumen
Se presenta el diseño de algunas situaciones del Cálculo y los beneficios que obligadamente lleva a la práctica docente. En ese sentido, el diseño de situación será sometido a una reflexión teórica de lo que se puede hacer para la matemática escolar y cómo el diseño de situaciones contribuye ampliar el dominio de conocimiento del Cálculo del docente a través de una base de significados. Se toma como ejemplo a las gráficas de las funciones, que en un contexto interactivo sirve como reorganizador de la linealidad del polinomio, la asíntota de una función y la estabilidad de las ecuaciones diferenciales.

Introducción

Se parte de dos consideraciones fundamentales: una aproximación teórica llamada socioepistemología y una acción didáctica provista de ésta, llamada diseño de situaciones del Cálculo. El objetivo principal de la reflexión consiste en explicar cómo la perspectiva teórica brinda herramientas didácticas a los docentes para que participen activamente en el diseño de situaciones del Cálculo, cómo esas herramientas dependen de los significados y de sus reconstrucciones que surgen de la actividad humana, y cómo los significados y sus reconstrucciones componen contenidos matemáticos específicos que reorganizan la obra matemática.
Para lograr tal propósito es necesario partir con los siguientes elementos:

- La problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática y cómo la aproximación socioepistemológica actúa con ésta.
- El papel de la reconstrucción de significados en un contexto interactivo.
- Una socioepistemología. La gráfica de las funciones como argumento del Cálculo.
- Las situaciones: linealidad del polinomio, asíntota de una función y estabilidad de las ecuaciones diferenciales.

La problemática y la aproximación socioepistemológica

La socioepistemología es una aproximación sistémica compuesta de cuatro dimensiones: la epistemológica, la cognitiva, la didáctica y la social (Cantoral, et al, 2000), y asume como problemática, la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar (Cordero, 2000). Cada una es de naturaleza y función distinta. Estas diferencias hacen compleja a la problemática debido a que a priori, en la matemática escolar, no se reconocen los mecanismos de construcción, ni la organización social que sucede en aula, que posibilita tales construcciones. Al seno de la organización social se reconstruyen significados de la matemática como recursos para aceptar cierto conocimiento matemático (Candela, 1999). Es decir, en la actividad humana el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención, se construyen versiones diversas sobre su contenido. Estas versiones se comparan, negocian y reconstruyen en el proceso mismo de la actividad y se van definiendo los diversos significados para los humanos. En otras palabras, en la actividad humana se forman y distinguen construcciones del conocimiento que se dan en las situaciones de interacción que se viven a diario en el aula por el estudiante y el profesor. En este sentido, no se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, como tradicionalmente se le había confiado a la psicología y pedagogía, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que compone cada obra matemática con base en las cuestiones que ésta representa. El planteamiento anterior formula un conjunto de relaciones que buscan la coordinación con los fenómenos didácticos.

Así, un primer grupo de relaciones (G1) consiste de cuatro elementos que permiten la articulación de las cuatro dimensiones anteriormente mencionadas (epistemológica, cognitiva, didáctica y social) y a su vez componen situaciones específicas del Cálculo. Estos elementos son: 1. significados y sistemas simbólicos, 2. procedimientos, 3. procesos y objetos, y 4. argumentos. Y ayudan a explicar contenidos de referencia donde se dan reconstrucción de significados en contextos interactivos. Hasta ahora se han logrado precisar tres de estos contenidos y se ha convenido en presentarlos en términos de situaciones: variación, transformación y aproximación, cuyos argumentos han sido respectivamente: predicción, comportamiento tendencial y analiticidad. Los cuatro elementos permiten análisis contextual, en el marco de las situaciones, para conocer el desarrollo de pensamiento matemático en la situación de variación, o en la situación de transformación, o en la situación de aproximación, pero también, para conocer el desarrollo del pensamiento matemático en la interacción de las tres situaciones.

Una segundo grupo de relaciones (G2) ha consistido en revisar la epistemología que resulta del primer grupo de relaciones. Se parte de la premisa de que la matemática escolar debe ser una reorganización de la obra matemática. Para hacer tal reorganización se requiere plantear una construcción del conocimiento consistente con las formas de construcción en la escuela. Estas formas corresponden a la actividad humana que consisten en reconstruir significados que a su vez dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas, es decir reconstruyen significados a través de su organización social. La parte esencial de la reconstrucción de significados es la formación de construcciones y hacer distinciones entre ellas, en otras palabras, es una clase de actividades y acciones que es posible por el lenguaje de las herramientas. El humano se somete a usar las herramientas, entenderlas y llevarlas a ciertos actos, y con ello reconstruye significados. En ese sentido, nociones como predicción, acumulación, estado permanente, transformación y aproximación entre otras ha sido conveniente, en la aproximación teórica, llamarles categorías del conocimiento matemático (Cordero, 1998) puesto que son nociones medulares de la reconstrucción de significados del Cálculo en la actividad humana, tienen un carácter funcional del conocimiento matemático y su construcción está con relación al uso de herramientas y a la modelación. Entonces las categorías son el enlace o el medio que articula a la epistemología a través de la actividad humana y lo que sucede en el salón de clases.

Un tercer grupo de relaciones (G3) consiste en formular un mecanismo que permita hacer de la epistemología el marco de referencia a través de la actividad humana para cualquier relación didáctica. Tal formulación buscaría la coherencia del marco de referencia (la reorganización matemática) con el fenómeno educativo. En ese sentido, esa epistemología deberá ser la base del diseño de situaciones y de su implementación. Entonces, tal mecanismo empieza con formular una epistemología del contenido matemático considerado en la problemática (interpretación del fenómeno didáctico en G1), después la epistemología deberá modelar el diseño de situación y su implementación (reorganización matemática a través de la interacción entre G1 y G2) y finalmente, la recolección de datos y su análisis teórico obliga a una revisión de la epistemología inicialmente formulada (la reorganización matemática como marco de referencia a través de la interacción entre G2 y G3). Esta revisión estará retroalimentando la reorganización matemática con relación a los fenómenos didácticos (reinterpretación del fenómeno por lo obtenido en G3) (véase Figuras 1):

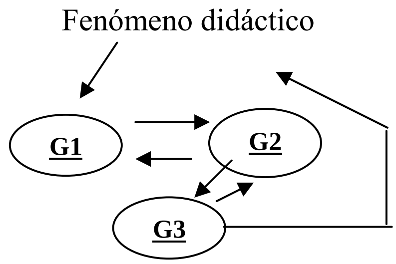


Figura 1

Reconstrucción de significados. Las gráficas de las funciones como argumentos

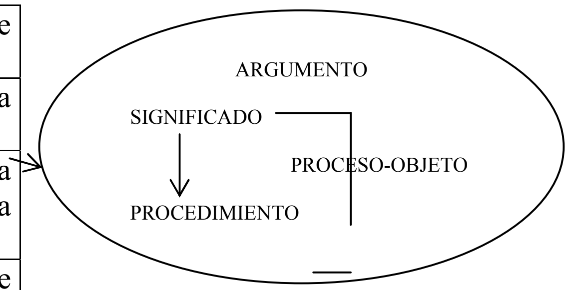
Una socioepistemología de tres situaciones del Cálculo que reorganizan *la linealidad del polinomio, la asíntota de una función y la estabilidad de las ecuaciones diferenciales* consiste en establecer el marco de referencia del contenido matemático (dimensión epistemológica), donde aparecen los diferentes significados (patrones de comportamiento gráfico y analítico) y procedimientos (variación de parámetros) del estudiante a través de la cognición que está construyendo (dimensión cognitiva) y después, utilizando ambos, los significados y los procedimientos, se establecen los argumentos o explicaciones de lo que en el marco de referencia se reorganiza (comportamiento tendencial de las funciones) tomando en cuenta la organización social y la intencionalidad del contexto interactivo (dimensión didáctica y social).

Un ejemplo. La situación de transformación

La situación de transformación tiene que ver con los conceptos matemáticos que requieren de un medio o contexto que aluda al comportamiento de las funciones cuando el comportamiento tiene cierta tendencia. Por ejemplo, la linealidad del polinomio, la asíntota de una función, la estabilidad de las ecuaciones diferenciales. Cada uno de estos conceptos alude a un comportamiento de la función que tiene cierta tendencia.

Una epistemología de estos conceptos a través de los cuatro elementos anteriores, puede ser formulada como sigue (Cordero, 1998; 2000):

significados	Patrones de comportamiento de la función
procedimientos	Variación de parámetros de la función
procesos-objetos	La función como una instrucción que organiza comportamientos
argumentos	Comportamiento tendencial de las funciones



Linealidad del polinomio

La problemática consiste en lo siguiente: un fenómeno didáctico con relación a la derivada consiste en que el estudiante no incorpora significados a ésta a pesar de conocer que la derivada es la pendiente de una recta. Por ejemplo, en situaciones gráficas se reporta que el estudiante ante relaciones funcionales como $f(x)=Ax^2+Bx+C$ logra incorporar significados a los coeficientes A y C con relación a la forma de la gráfica pero no para B (Mirón, 2000). La pendiente es un número que ante la gráfica de la relación funcional no se "dibuja" a diferencia de los coeficientes A y B.
En ese sentido, la situación linealidad del polinomio tiene la intencionalidad de relacionar la recta tangente con el comportamiento de la función, es decir, el estudiante reconstruirá un significado a la parte lineal del polinomio a_1x+a_0 con relación al comportamiento tendencial de la gráfica del polinomio. La reconstrucción del significado consiste de dos aspectos: identificar la propiedad de linealidad y de establecerla como argumento (Cantoral,, et al, 2000).

La linealidad del polinomio, consiste en que la parte lineal de cualquier polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_o$, es la recta tangente al polinomio que pasa por el punto $(0,P(0))$.
El diseño de la situación consiste en formular secuencia de gráficas de sumas de funciones, $f+a_1x+a_o=h$. Se establecen relaciones entre un comportamiento dado y la variación de comportamientos. Se generan patrones gráficos de suma de funciones y un argumento que le permite anticipar comportamientos gráficos de los polinomios. Lo significativo de lo que se construye está en el comportamiento, no en trazo de al recta tangente al polinomio.

La asíntota de una función

La problemática consiste en la privilegiación de ciertas representaciones gráficas de las asíntotas de las funciones que aparecen en el discurso matemático escolar. Esto provoca dificultades que imposibilitan que los estudiantes construyan comportamientos asintóticos senoidales. Tal privilegiación es favorecida por los textos de matemáticas y las concepciones matemáticas de los profesores. Además, cualquier construcción de comportamiento asintótico senoidal contradice las características principales de las asíntotas de funciones que componen a sus representaciones gráficas y que comúnmente son tratados con funciones

exponenciales, hiperbólicas y racionales. Entonces, el estudiante necesariamente es obligado a reorganizar su conocimiento sobre estos comportamientos y construir una nueva versión de la asíntota de una función (Cordero y Domínguez, 2000).
El diseño de la situación consiste en que el comportamiento tendencial de las funciones debe de ser considerado como un argumento del estudiante en el contexto gráfico que posibilitará la nueva construcción y, con ello, construirá una versión de la generalidad del comportamiento asintótico: *"sea la función h=f+g, si cuando x tiende a infinito sucede que g tiende a cero, entonces se dice que f es la asíntota de h (es decir, h tiende a comportarse como f)".*
En ese sentido, la asíntota de una función consiste en formular una función con comportamiento tendencial. La construcción formula la tendencia y el patrón de comportamiento. El argumento no sería otra cosa que establecer relaciones entre dos funciones, h y f, a través de determinar un comportamiento que tiende a otro comportamiento cuando x toma valores grandes, con ello el estudiante reconstruirá significados a la relación $h=f+g$ cuando x tiende a infinito, siempre que g tienda a cero, a través de la siguiente secuencia: S1. Las asíntotas son rectas, S2. No todas las asíntotas son rectas y S3. Formas distintas con tendencia a cero.

Estabilidad de las ecuaciones diferenciales

La problemática consiste en la ausencia de marcos de referencia de significados de las ecuaciones diferenciales. La privilegiación del contexto algebraico enfoca la atención en las soluciones de las distintas clases de ecuaciones diferenciales y estas son expresadas por medio de fórmulas algebraicas exactas, explícitas o implícitas, expansiones en series, expresiones integrales entre otras. Sin embargo, se deja de lado los argumentos que permitan predecir comportamientos de las soluciones, es decir no hay interpretación de la solución a partir de la ecuación.
Entonces, el diseño de la situación deberá habilitar tal interpretación, para ello se parte de secuencia de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para variar los coeficientes. Se establecen relaciones entre el comportamiento de la solución de la ecuación y los coeficientes. El comportamiento tendencial de las funciones es un argumento (Cordero y Solís, 1999)
Por ejemplo, en este nivel hay un reconocimiento sobre la ecuación diferencial. Si $ay'(x) + y(x) = F(x)$ entonces $y(x)$ se comporta como F(x), sin embargo, el coeficiente a modifica el comportamiento.
La ecuación diferencial $y'(x) + y(x) = F(x)$ representa una situación en la que, dada $F(x)$, la solución $y(x)$ tiende a $F(x)$. Así, la ecuación diferencial

$$y'(x) + y(x) = F(x),$$

expresada como

$$y'(x) = F(x) - y(x),$$

significa que $y'(x)$ determina la rapidez con que $y(x)$ tiende a $F(x)$ en la situación analizada.
En este marco, la solución $y(x)$ puede ser determinada, en términos globales y cualitativos, si se conoce la gráfica de $F(x)$, mediante el trazo de trayectorias en el entorno de la gráfica de $F(x)$. Esto podrá hacerse independientemente de los diferentes métodos analíticos disponibles.

En este sentido, el punto significativo no radica en hallar la solución sino más bien en determinar comportamientos tendenciales entre la ecuación diferencial y su solución, y con ello lograr simulaciones. Un ejemplo de este tipo de procesos sería encontrar el coeficiente a de la ecuación: $ay'(x) = F(x) - y(x)$
para que $y(x)$ tienda rápida o lentamente hacia $F(x)$.
La generalización del argumento es trabajada a través de actividades, donde se plantean secuencias de ecuaciones diferenciales de orden distinto: $ay'(x) = F(x) - y(x)$, $ay'(x) + by''(x) = F(x) - y(x)$ y $a_1 y'(x) + a_2 y''(x) + \ldots + a_n y^{(n)} = F(x) - y(x)$. Se trata entonces de encontrar las condiciones, a través de los coeficientes para que la solución $y(x)$ tenga un comportamiento tendencial a $F(x)$. Las condiciones cumplen con las condiciones de estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Una reorganización del Cálculo

Las tres situaciones mencionadas no son hechos aislados. El comportamiento tendencial de las funciones es el argumento común de las situaciones. Es la reconstrucción de significados de la linealidad del polinomio, de la asíntota de una función y de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales. Es el reorganizador de la obra matemática que entra en juego en las situaciones y que pudiera venir a zanjar las problemáticas planteadas. La socioepistemología indica que la reconstrucción de significados corresponde a una epistemología al seno de la actividad humana en su organización social, que explica los recursos, las versiones, los argumentos y consensos de cierto contenido matemático que necesariamente surgen en los contextos interactivos de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso*. Primera edición. Paidós Educador.

Cantoral, R. Cordero, F., Farfán, R.M., et al. (2000). Desarrollo del pensamiento matemático. Trillas.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. International Thomson Editores, Vol. 4, Número 2, 103-128.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número 1, 56-74.

Cordero, F.; Domínguez, I. (2001). Algunas construcciones de comportamientos asintóticos senoidales en estudiantes de precálculo y cálculo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 14, 318-325.

Cordero, F.; Solís, M. (1999). Comportamientos gráficos en la visualización de las ecuaciones diferenciales lineales. En R. Farfán (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 12, Tomo 1.* Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición, pp. 29-33.

Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones f y f´ en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas*, tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN.

Simulación: un recurso didáctico para la construcción de conceptos matemáticos

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Resumen
El artículo contiene algunas de las actividades de simulación que fueron desarrolladas en uno de los cursos especiales del Relme 15 celebrado en Buenos Aires, Argentina.
La simulación de ciertos fenómenos junto con la modelación matemática, representa un elemento muy importante para la construcción de conceptos matemáticos. Además, el uso de algunos programas computacionales y de calculadoras con capacidad simbólica, gráfica y de programación propicia la realización de simulaciones y permite crear un ambiente de experimentación dentro del aula, funcionando como un agente didáctico dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje (De Faria, 1997, 2000; Bauldry y otros, 1997; Gómez, 1998).
Las nuevas tecnologías abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas difíciles de reproducir con los medios tradicionales como el lápiz y el papel. En estas experiencias matemáticas el estudiante puede realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático.

El juego del caos

Este juego fue creado por Michael F. Barnsley (Peitgen, Jürgens, Saupe, 1992).

Tome una hoja de papel, un lápiz, y marque tres puntos no colineales en la hoja. Etiquételos con las letras A, B y C. Estos son denominados puntos base, y son los vértices de un triángulo. Tome un dado corriente, e identifique los lados 1 y 6 con el punto A, 2 y 5 con B, 3 y 4 con C. Las reglas para el juego son las siguientes:

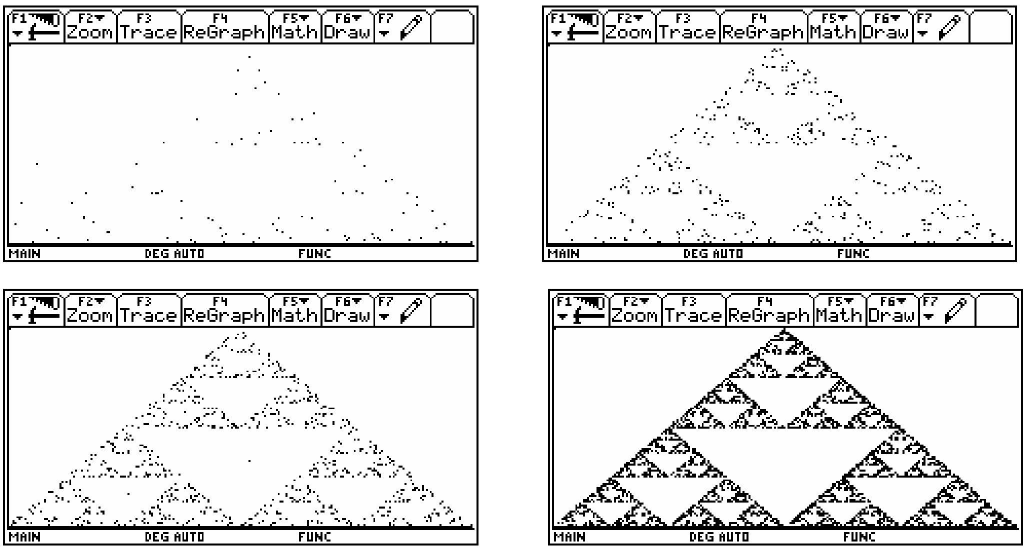
Dibuje un punto x_0 arbitrario en la hoja. El punto x_0 se denomina el punto de juego. Tire el dado. Si sale el número 5 por ejemplo, determine el punto medio x_1 del segmento que une el punto de juego con el punto A. El punto x_1 pasa a ser el nuevo punto de juego. Vuelva a tirar el dado y determine el punto medio x_2 del segmento que une el punto de juego x_1 con el correspondiente punto base. Repita el procedimiento, para obtener una sucesión de puntos de juego $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.

¿ Qué tipo de patrón geométrico forman los puntos de la sucesión anterior, cuando n es grande?. Una de las observaciones es que si un punto de juego cae dentro del triángulo ABC, entonces todos los puntos de juego posteriores a él se encontrarán dentro del triángulo. En este sentido el triángulo funciona como un hoyo negro o bien un atractor de los puntos de juego. Por otro lado, el punto de juego eventualmente será atrapado por el triángulo, no importando si x_0 se encuentra fuera del mismo. Curiosamente la sucesión aleatoria de puntos de juego formará un patrón geométrico bien ordenado, denominado triángulo de Sierpinski en homenaje al matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Para el siguiente programa no utilizamos un dado, sino que generamos un número aleatorio n entre cero y uno. Si $n \leq 1/3$ una el punto de juego al vértice B, si $1/3 < n \leq 2/3$ una el punto de juego al vértice A mientras que si $n > 2/3$ utilice el vértice C como punto base. En este caso, cada punto base tiene la misma probabilidad de ser escogido.

Programa caos. {Para la calculadora TI89/92}

```
caos( )
Prgm
ClrDraw
0 → xmin
1 → xmax
0 → ymin
1 → ymax
Local a,b,c,d
1 → a
2 → b
3 → c
4 → d
rand( ) → x
rand( ) → y
0 → i
Lbl a
i + 1 → i
PtOn x, y
If i > 1000
Goto d
rand( ) → n
If n ≤ 1/3
Goto b
If n > 2/3
Goto c
0.5*x → x
0.5*y → y
Goto a
Lbl b
0.5*(x + 1) → x
0.5*y → y
Goto a
Lbl c
0.5*(x + 0.5) → x
0.5*(y + 1) → y
Goto a
Lbl d
EndPrgm
```

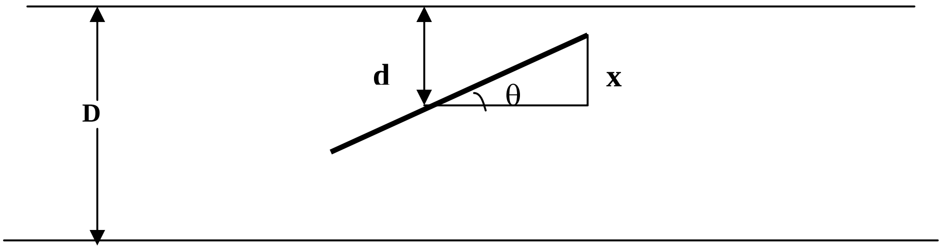


n = 100, 500, 1000, 5000

Agujas de Bufón

Si tenemos una cartulina con líneas paralelas situadas a una distancia D unas de las otras, y si dejamos caer agujas de longitud L ≤ D sobre la cartulina, ¿cuál es la probabilidad de que una aguja caiga sobre una de las líneas?

Este problema fue planteado por el naturalista e físico francés Georges Louis Comte de Bufón (1707-1788), y la razón entre el número total de agujas (N) y el número de agujas que intersecan las líneas paralelas tiende al número π cuando N crece.

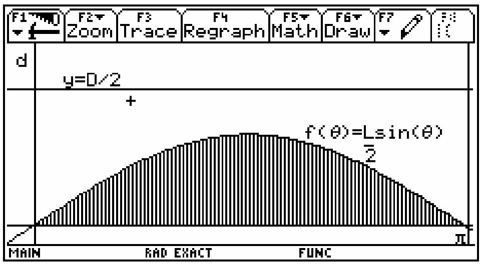


d = distancia del centro de la aguja a la línea más cercana
D = distancia entre dos rectas paralelas consecutivas
L = Longitud de la aguja
x = $\frac{L}{2} sen\theta$

La aguja intersecará la línea si $d \leq \frac{L}{2} sen\theta$. ¿Cuántas veces ocurre esto?

La siguiente gráfica expresa **d** en función de Lsen(θ)/2. Los puntos que se encuentran dentro de la región sombreada corresponden a $d \leq \frac{L}{2} sen\theta$, es decir, la aguja cruza la línea. Por lo tanto, la probabilidad de que la aguja cruce la línea es igual a la razón entre el área sombreada y el área del rectángulo, es decir:

$\frac{N}{m} \approx \frac{\frac{D\pi}{2}}{\int_0^{\pi} \frac{L}{2} sen(\theta) d\theta} = \frac{D\pi}{2L}$, con **m** el número de veces en que las agujas intersecan las líneas. Por lo tanto, si N es grande, el número $\frac{2LN}{Dm}$ es una aproximación para el número π.



Programa bufón {Para la calculadora TI89/92}

```
buffon()
Prgm
Dialog
Title "Digite la longitud L de cada aguja"
Request "Longitud", L
EndDlog
Dialog
Title "Digite la distancia D≥L entre las líneas"
Request "Distancia", D
EndDlog
Dialog
```

```
Title "Digite el número total de agujas"
Request "Total", N
EndDlog
Local  i, j, k, m
0 → m
expr(L) → L
expr(D) → D
expr(N) → N
ClrIO
For  i, 1, N
π*rand( ) → j
0.5*rand( )*D → k
If  k  ≤  0.5*L*sen(j)  Then
m+1 → m
EndIf
EndFor
SetMode("exact/approx", "approximate")
SetMode("display digits", "fix 12")
Disp  2*L*N/(D*m)
EndPrgm
```

Para ejecutar el programa anterior, digite **bufon( )** en la línea de comando de la pantalla principal (Home). Como ejemplo, escoja los siguientes parámetros: L = 1, para la longitud de cada aguja; D = 2, para la distancia entre las líneas y N = 500 para el número total de agujas. El resultado generado por el programa es una aproximación para el número π

Integración numérica: El método de Montecarlo

Suponga que la integral $\int_a^b f(x)dx$ está dada por el área de una región **R**. Si encerramos la región **R** por un rectángulo de área **A** y escogemos al azar **N** puntos de **A** y si de ellos **m** puntos caen en la región **R**, entonces (para **N** grande),

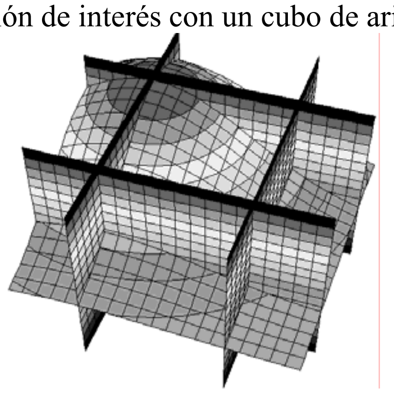
$\frac{m}{N} \approx \frac{Area(R)}{Area(A)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{Area(A)}$, lo que nos permite obtener la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{mArea(A)}{N}.$$

De la misma forma, si $\int_D\int f(x,y)dA$ expresa un volumen de una región **R** sobre un dominio D del plano x-y y por debajo de la gráfica de z = f(x,y), y si podemos encerrar la región **R** con un paralelepípedo **P** con base D obtendremos – siguiendo el mismo razonamiento anterior – una aproximación para la integral doble:

$$\int_D\int f(x,y)dA \approx \frac{mVol(P)}{N}$$

El siguiente programa aproxima el valor de la integral $\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ por el método de Montecarlo, encerrando la región de interés con un cubo de arista igual a 1.



Programa integral. {Para la calculadora TI89/92}

```
integral( )

Prgm
ClrIo
setMode("Exact/Approx",
"approximate")
Dialog
Title "Digite el número de puntos"
Request "Número de puntos", N
EndDlog
Local  I, J, K, L, M
0 → M
expr(N) → N
RandSeed rand(2000)
For  I, 1, N
rand( ) → J
rand( ) → K
rand( ) → L
If  L  ≤   e^(-J²-K²)  Then
M+1 → M
EndIf
EndFor
SetMode("display digits", "fix 4")
Disp  M/N
EndPrgm
```

Ejecutar integral( ) desde la pantalla principal (Home), para – por ejemplo – los siguientes valores de N: 20, 30, 50.

Conclusión

Los ejemplos desarrollados en el curso mostraron la posibilidad de utilizar la tecnología para construir conceptos matemáticos, como por ejemplo el que relaciona una integral definida con el área de una región, mediante un enfoque no tradicional. Este tipo de enfoque lo he utilizado en un curso de cálculo de varias variables para estudiantes de computación de la Universidad de Costa Rica, como un complemento al acercamiento tradicional. Los estudiantes se sienten motivados, y revelan un mejor entendimiento de los conceptos relacionados con la temática tratada.

Referencias bibliográficas

Bauldry W., Ellis W., Fiedler J., Giordano F., Judson P., Lodi E., Vitray R., West R. (1997). *Mathematics and Modeling*. Addison Wesley.

De Faria, E. (1997). Aplicaciones de la calculadora TI92 al cálculo. *Memoria V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas*. Liberia, Costa Rica.

De Faria, E (2000). La tecnología como herramienta de apoyo a la generación de conocimiento. *Revista Innovaciones Educativas*, Año VII, Número 12, Editorial EUNED.

Gómez, P. (1998). Tecnología y educación matemática. *Revista de Informática Educativa*. Vol.10, No. 1, Colombia.

Peitgen, H.; Jürgens H.; Saupe, D. (1992). *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag.

Un diseño cuasiexperimental para la evaluación del efecto de utilización de la herramienta computacional en el rendimiento del aprendizaje

Mercedes Anido, Ana María Craveri, María del CarmenSpengler
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. Universidad Nacional de Rosario. Argentina
craveri@arnet.com.ar manido@agatha.unr.edu.ar

Resumen
En esta comunicación se presenta una experiencia realizada con los alumnos de la asignatura "Matemática I" de la carrera de Contador Público de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
En la misma se muestra el comportamiento de tres grupos, uno que utiliza la metodología tradicional (de control) y dos experimentales que utilizan la herramienta computacional con un software de aplicación (DERIVE) pero diferenciados: uno con enseñanza presencial y el otro con enseñanza semipresencial. Los temas desarrollados pertenecen al Álgebra Lineal (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales).
El interés central de esta experiencia es evaluar el uso del computador como herramienta del aprendizaje del Álgebra Lineal en la enseñanza universitaria y determinar el efecto de la metodología semipresencial acompañada con herramienta computacional respecto a la enseñanza tradicional.

Introducción

En esta comunicación se presenta una de las experiencias realizadas en el marco del Proyecto PID 19/E021 de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina): "La Enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales".
En el aprendizaje de la Matemática se presentan, sobre todo en los primeros años del nivel universitario, dificultades generalizadas que se manifiestan en elevados índices de deserción, bajo rendimiento y en el "olvido" de conceptos fundamentales que se detectan en las asignaturas específicas de los ciclos superiores, que requieren una buena conceptualización y manejo fluido de esos temas.
A comienzos de la última década aparecen distintos programas computacionales que operan numérica, simbólica y gráficamente en la disciplina Matemática. Pero… ¿pueden ser también herramientas para la docencia que ayuden en la solución de los problemas mencionados?
En el Proyecto de referencia se busca aproximar respuestas, con una propuesta adaptable a distintas distribuciones en tiempos o asignaturas. Rescatando de las diferentes especialidades lo trascendente y permanente de la Matemática, se busca seleccionar contenidos y métodos que permitan optimizar recursos y promover actitudes. Se procura, además, evitar la saturación en la etapa introductoria dejando abiertos los carriles lógicos y formales para el postgrado o niveles más altos de las disciplinas específicas.
En este trabajo se presenta el desarrollo de una investigación realizada con diseño cuasiexperimental. En la misma se muestra el comportamiento de tres grupos, uno que utiliza la metodología tradicional (de control) y dos experimentales que utilizan la herramienta computacional con un software de aplicación (DERIVE) pero diferenciados: uno con enseñanza presencial y el otro con enseñanza semipresencial. Los temas desarrollados pertenecen al Álgebra Lineal (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales) y son parte de la asignatura "Matemática I" de la carrera de Contador Público de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina.

Objetivos

Los objetivos de esta experiencia fueron:

- Evaluar el uso del computador como herramienta del aprendizaje del Álgebra Lineal en la enseñanza universitaria.
- Determinar los efectos de la utilización de herramientas computacionales en el rendimiento general y en la habilidad de los estudiantes del Álgebra Lineal del nivel universitario para resolver problemas. También interesa el efecto del entorno computacional en la actitud hacia el aprendizaje de esta ciencia.
- Determinar el efecto de la enseñanza semipresencial acompañada con herramienta computacional respecto a la enseñanza tradicional.

Para obtener la información que permita evaluar estos objetivos se recurre a la comparación de niveles alcanzados en los cursos de control y experimentales.

El diseño cuasi experimental

Es el diseño que se realiza en aquellas situaciones de investigación en las que no es posible un control total, por lo que no se puede realizar propiamente un experimento. En estas situaciones el investigador debe conocer las variables que no ha podido controlar y reconocer siempre la posibilidad de que los resultados puedan deberse a ellas y no sólo a la variable independiente.

Estos diseños se presentan como únicos posibles en aquellas situaciones en las que no se puede manipular la variable independiente sino únicamente seleccionarla y esperar a recoger los cambios en la variable dependiente, una vez que ya ha actuado aquélla.

Así pues, las características principales de estos diseños son:

a) El empleo de contextos naturales, donde la variable independiente no es manipulada y, por lo tanto, la intervención del experimentador es mínima.
b) La carencia de un control experimental completo, que permita atribuir los cambios observados en la variable dependiente, unívocamente, a la variable independiente.
c) La realización de observaciones múltiples, como sustituto del control experimental, para minimizar, e incluso eliminar, los efectos de tantas fuentes de invalidez interna como sea posible.
d) Se utilizan cuando no es posible el diseño experimental, sobre todo en contextos sociales.

El diseño

En cuanto al diseño esta investigación se ubica en las siguientes categorías:

- Por la validez interna: es un Diseño Cuasiexperimental.
- Por el tipo de situación experimental: es un Diseño Intergrupos.
- Según el número de variables independientes y dependientes: es Univariado-Univariado
- Con relación a la asignación de los tratamientos a las unidades experimentales: se puede considerar aleatorio con las consideraciones que se mencionan seguidamente.

Cuando los grupos en estudio se han constituido en forma natural, por ejemplo las comisiones de una cátedra, estos grupos pueden ser similares pero necesitamos asegurar su equivalencia. Esta situación se presenta con bastante frecuencia en la investigación educativa y social cuando hay que trabajar con grupos naturales o artificiales ya constituidos.
Según sea la variable en estudio se puede elegir alguna forma de medición y convenir un criterio para una cierta equivalencia u homogeneidad entre los grupos. El criterio adoptado en este caso se explica en el punto 4.
Los pasos que se siguen en este diseño son:

1. Se eligen los grupos de sujetos constituidos naturalmente.
2. Se registra en estos grupos una medida pretratamiento.
3. Se aplica el tratamiento al grupo experimental.
4. Se registra en los grupos una medida postratamiento.
5. Se llevan a cabo las comparaciones, con dichas mediciones, a fin de conocer los efectos del tratamiento.

Con este diseño se controlan todas las variables que amenazan la validez interna, excepto la selección y la regresión. El único procedimiento para aminorar sus efectos es procurar seleccionar grupos que sean lo más semejantes posible, aprovechando cuanta información puede obtenerse para conseguir el mejor conocimiento de ambos.
Se realizó un estudio considerando tres comisiones de alumnos de primer año de la carrera de Contador de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de Universidad Nacional de Rosario (183 alumnos en total). Estos alumnos cursaron la asignatura Matemática I durante 1998 en un mismo turno y con un mismo profesor.

Una idea en la búsqueda de algún grado de equivalencia entre los grupos experimental y control. El tratamiento

Como no fue posible formar grupos por aleatorización se buscó verificar una posible equivalencia. A tal fin y dada la asignatura sobre la que se trabaja se consideraron los resultados del "Test de Medición de Capacidad Operatoria Formal" que se aplica todos los alumnos al ingresar en la facultad.
Se probó mediante un test χ^2 que la proporción de "aprobados" resultante del Test de Medición de Capacidad Operatoria Formal, no difiere significativamente entre los grupos, lo que hace válido suponer que provienen de una población con la misma proporción de aprobados. Es decir, se puede partir de una cierta "equivalencia" entre los tres grupos respecto a "Capacidad Operatoria". Se trabajó con un grupo control donde el "tratamiento" consistió en la realización de la práctica en forma presencial sin herramienta computacional, que es la metodología tradicional de enseñanza. La variable dependiente es el rendimiento del aprendizaje, medido con la nota obtenida en la evaluación postratamiento.
En uno de los grupos experimentales el "tratamiento" consistió en la realización de la práctica con metodología tutorial y herramientas computacionales (se verificó previamente que el 100% de los alumnos de esa comisión tuvieran acceso a computadora personal). Nos encontramos pues con un nivel de la variable independiente (enseñanza semi-presencial con herramienta computacional) y una variable dependiente: el rendimiento del aprendizaje, medido con la nota obtenida en la evaluación postratamiento.

En el otro grupo experimental se trabajó en el laboratorio de computación con apoyo y supervisión del docente. Nos encontramos pues con un nivel de la variable independiente (enseñanza presencial con herramienta computacional) y una variable dependiente: el rendimiento del aprendizaje, medido con la nota obtenida en la evaluación postratamiento.
Los pasos que se siguieron en el diseño fueron:

1º Selección de la muestra: no al azar.
2º Variables controladas:

- Docente: Un único profesor tuvo a su cargo la enseñanza con las tres metodologías (tratamientos).
- Material didáctico: los tres grupos trabajaron con la misma colección de problemas.(ver anexo)
- Capacidad operatoria formal: Se probó estadísticamente (χ^2) que los grupos sometidos a los distintos tratamientos resultaban equivalentes en cuanto a la capacidad operatoria de sus integrantes ($p<0,05$).

3º Pretratamiento. Evaluación Primera para los tres grupos considerados: se toma el resultado de una evaluación realizada al final del tema anterior como pretratamiento para analizar proporciones de alumnos que aprueban o no.
4º Tratamientos:

- Tradicional Grupo 1 (G1): 2hs. semanales de clases prácticas con el profesor explicando y resolviendo algunos de los problemas de la colección en el pizarrón. (Es la metodología "habitual" para el desarrollo de las clases prácticas y la que se implementa para los restantes temas de la materia).
- Tratamiento Experimental con metodología Tutorial y utilización de Herramienta Computacional Grupo 2 (G2): 2 hs. semanales asignadas a la consulta o discusión de los problemas de la guía o sobre el correcto uso de los comandos del DERIVE .El uso de los comandos del programa está explicado en un material adicional que se le suministra a este grupo exclusivamente.
- Tratamiento Experimental con metodología con utilización de Herramienta Computacional en el Laboratorio de Informática Grupo 3 (G3): 2 hs semanales de trabajo en la sala de informática en grupos de 2 alumnos por computadora con el profesor. El profesor explica el uso de los comandos del programa y los alumnos resuelven los problemas; el docente interviene en caso de ser requerido por el grupo.

5º Postratamiento. Evaluación final para los tres grupos considerados: se realiza una evaluación correspondiente a los temas desarrollados durante el tratamiento (ver anexo).
6º Comparación de los resultados observados con las tres metodologías.

- Comparación simultánea de las tres metodologías. Variable dependiente: puntaje obtenido en la evaluación única. Se probó estadísticamente (χ^2) que no existen diferencias significativas en las proporciones de alumnos que aprueban o no la evaluación común según las tres metodologías ($p<0,05$).
- Comparación mediante pares igualados de los puntajes del test postratamiento (2ª evaluación) y del test pretratamiento (1º parcial de la materia), en cada uno de los tres grupos. En G1 y G2 se probó estadísticamente (test de Wilcoxon) que no hay diferencias significativas en los puntajes obtenidos en el pretest y el postest. En G3 los alumnos aprobados obtienen calificaciones significativamente superiores en la 2ª evaluación que las observadas en la 1ª evaluación ($p<0,05$).

La elección de pruebas no paramétricas para el tratamiento de los datos, obedece a que la variable dependiente "puntaje" se consideró como perteneciente a un nivel de medida ordinal.

Conclusiones

La experiencia muestra que en los alumnos con un cierto nivel de formación (aprobación de la 1ª evaluación) la metodología de trabajo en el Laboratorio de Informática con asistencia del docente es muy positiva (en cambio los alumnos con rendimiento insuficiente en la 1ª evaluación no muestran una calificación superior en la 2ª evaluación).
También muestra que al no existir desgranamiento notable, la enseñanza tutorial con herramienta computacional es una modalidad a ser tenida en cuenta en la situación de superpoblación de la Facultad de Ciencias Económicas (la cátedra tiene 3.000 alumnos), ya que se puede considerar equivalente respecto al rendimiento, a la enseñanza tradicional, con proyección de ahorro de espacio y recursos humanos.
De esta experiencia y otras realizadas, se puede inferir, que el uso de esta nueva metodología es positivo en la enseñanza del Álgebra Lineal, ya que mejora el rendimiento en cuanto a la conceptualización, la representación matemática de la realidad, la representación simbólica y no se pierde la operatoria algebraica manual.

Referencias bibliográficas

Fraenkel, J. y Wallen, N. (1996). *How to Desing and Evaluate Research in Education*. New York: McGraw -Hill.
Anido de López, M. y Rubio Scola, H. (1999). Un Programa sobre el Uso de Herramientas C.A.S. en el Aprendizaje de la Matemática Básica en las Universidades Nacionales de la Provincia de Santa Fe. Argentina. *Lecturas Matemáticas*, 21 (1).
Anido de Lòpez, M. y Rubio Scola, H. (1999) Un Ejemplo de Aprendizaje en el Sentido de Polya. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2 (3), 5-17.
Buendía Eisman L. (1994). *Técnicas e instrumentos de recogida de datos*. Sevilla: Alfar
Buendía Eisman, L., Colás Bravo, M.P. y Hernández Pina, F. (1997). *Métodos de Investigación en Psicología.* New York: McGraw-Hill.
Siegel, S. (1991). *Estadística no Paramétrica. Aplicada a las Ciencias de la Conducta*. México: Trillas.

Anexo

A modo de ejemplo presentamos algunos ejercicios contenidos en la guía de trabajos prácticos común a todos los grupos de alumnos.
1.-Consideremos una firma con dos departamentos de producción P_1 y P_2 yP_3 y tres departamentos de servicios S_1, S_2 y S_3 según la siguiente tabla:

Deptos	Costo total	Costos directos	Costos indirectos por servicios de los departamentos		
			S_1	S_2	S_3
S_1	x_1	600	$0{,}25x_1$	$0{,}15x_2$	$0{,}15x_3$
S_2	x_2	1100	$0{,}35x_1$	$0{,}20x_2$	$0{,}25x_3$
S_3	x_3	600	$0{,}10x_1$	$0{,}10x_2$	$0{,}35x_3$
P_1	x_4	2100	$0{,}15x_1$	$0{,}25x_2$	$0{,}10x_3$
P_2	x_5	1500	$0{,}15x_1$	$0{,}30x_2$	$0{,}10x_3$
Totales			x_1	x_2	x_3

El costo total mensual de estos departamentos no se conoce pero se simboliza con x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5

El costo directo mensual de los cinco departamentos, se menciona en la tercera columna. La cuarta, quinta y sexta columna muestran la distribución del costo por los servicios de S_1, S_2 y S_3 a los diversos departamentos

Encontrar el costo total para cada departamento.

2.-Si A =(a_{ij}) es una matriz cuadrada de orden 4, tal que $a_{ij} = -3$ para todo i=j y $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Determinar si A es inversible y en caso de ser posible calcule $|A^{-1}|$

3.- Sea $A \in M_n(C)$ tal que $A^2 + I = 0$; determinar si A es inversible y, en caso afirmativo, hallar su inversa.

Evaluación

1-Un inversionista le comenta a un corredor de bolsa que todas sus acciones están en 3 compañías, A, B y C, y que dos días antes el valor de sus acciones disminuyó \$350; pero que ayer el valor aumentó en \$600. El agente recuerda que dos días antes el precio de las acciones A, cayó en \$1 por acción, el de B disminuyó en \$1,50, pero que el precio de las acciones C, aumentó en \$0,50 por acción. El agente recuerda además, que ayer el precio de las acciones de A, aumentó en \$1,50, hubo una caída de \$0,50 por acción de las de B y las C, aumentaron en \$1.Responder:

a) ¿Tiene el corredor de bolsa la información suficiente para calcular el número de acciones que el inversionista tiene en cada compañía?. ¿Por qué?.
b) ¿Qué ocurre si el inversionista le comenta al corredor que en la compañía C tiene 200 acciones?. Suponiendo que ocurra esto, calcule el número de acciones que el inversionista tiene en cada compañía.

2- Hallar si existe la matriz *x* que satisface la siguiente ecuación matricial

$$(A + X)^T . C = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3-Establecer, en cada caso, si la proposición es verdadera o falsa; de suceder esto ultimo dar un enunciado verdadero en relación al tema:

a) El sistema $\sum_{j=1} a_{jj}\, x_j = 0$, i = 1,2, ---, n donde n<m admite soluciones no triviales.

b) $A, B \in M_n(K)$ inversibles $\Rightarrow$ A.B es inversible y $(A\,B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$

c) El determinante de una matriz triangular es nulo $\Leftrightarrow$ sus elementos diagonales son todos cero.

d) $A, B \in M_{nxm}(k)$; entonces $(A + B)^T = B^T + A^T$

Educación matemática con software

Zulma H. Millán, Yolanda B. Gil
Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería. U.N.S.J. Argentina
zmillan@unsj.edu.ar

Resumen
El trabajo se encuadra en el campo de la enseñanza de la Matemática básica en carreras de Ingeniería y Ciencias de la Tierra con la asistencia de un software científico.
El objetivo principal es mostrar una manera de transformar la enseñanza teórico práctica del Análisis Matemático, Álgebra y Geometría con la aplicación de nuevas tecnologías. La metodología utilizada en el desarrollo de esta experiencia fue primeramente la selección del software adecuado, la elaboración de material didáctico, que en este caso fueron guías prácticas interactivas y su aplicación a diversos cursos de las asignaturas ya mencionadas. Posteriormente se realizó un estudio de los resultados obtenidos y se comparándose éstos con los obtenidos en los cursos de enseñanza tradicional, observándose la ventaja de introducir nuevos recursos tecnológicos en educación.
Una de las metas es la transferencia a la comunidad universitaria y al medio en general de material didáctico y cursos de perfeccionamiento para docentes y alumnos de años superiores.

Introducción

Este trabajo está desarrollado para mostrar las actividades del proyecto de investigación educativa "Educación de Matemática Aplicada con Software Específico", el cual se implementa en cursos del ciclo básico de las carreras de Ingeniería y Ciencias de la Tierra de la Universidad Nacional de San Juan.
El mismo surgió para mejorar el aprendizaje de matemática en estos ciclos, se observó que los alumnos de carreras de ingeniería o de ciencias de la tierra se enfrentan a la matemática de los primeros años de cursado como usuarios sin profundizar en general resultados obtenidos o procedimientos empleados.
El eje conceptual del marco teórico se basa en diagnósticos realizados en otros proyectos de investigación que muestran importantes falencias en el proceso de aprendizaje de la matemática en los ciclos básicos. Además, se tuvo en consideración, que desde 1986 en los diferentes Congresos de Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI) y en las Reuniones de Educación Matemática de la UMA (REM), Conferencias de UNESCO se expresa en las conclusiones, la importancia de incorporar software como un apoyo didáctico en la enseñanza de la matemática.
Los software matemáticos que se encuentran hoy disponibles proveen un aprendizaje dinámico y activo, que permite la rápida visualización de situaciones problemáticas.
En este marco se encuadró la incorporación de la informática en el desarrollo de clases teórico prácticas.
El objetivo principal de este proyecto es la transformación de la enseñanza teórico práctica del Análisis Matemático, Álgebra y Geometría con la aplicación de un software científico.
Se utilizó el software Maple V pues resulta de gran utilidad para la enseñanza de esta ciencia por sus virtudes simbólicas, numéricas, gráficas y facilidad para el desarrollo de procedimientos en este lenguaje. Es por ello importante el uso de esta herramienta de gran potencia que puede ser utilizada por el estudiante en el resto de su carrera y luego en su actividad profesional.

El proyecto se inició con la búsqueda y análisis bibliográfico con el fin de confeccionar guías interactivas que fueron incorporadas en las clases prácticas y permitieron comparar los resultados obtenidos utilizando este nuevo material didáctico.
Estas clases prácticas se desarrollaron en gabinete de computación, con grupos de alumnos voluntarios, después del dictado de los temas en forma tradicional.
Entre los principales resultados obtenidos, a partir de la implementación de estas guías, fue que el alumno participó en forma activa en la formación de los conceptos básicos, aprovechando las ventajas del software. Como consecuencia, se ha logrado una mayor motivación hacia las asignaturas y considerable dominio conceptual, especialmente en temas que resultaban de difícil comprensión, lo que se comprobó en las actividades integradoras.

El trabajo en el gabinete

La experiencia didáctica se realizó por medio de trabajos prácticos de gabinete donde se introdujo al grupo de alumnos participantes voluntariamente, en el uso del software para abordar temas del cálculo diferencial en una y varias variables.
Se desarrollaron clases interactivas, contando con el apoyo de docentes de las cátedras como facilitadores del aprendizaje. Los estudiantes afianzaron los conceptos estudiados en clases teórico-prácticas mediante la resolución de una secuencia de ejercicios propuestos.

Objetivos

Los objetivos de estas prácticas de gabinete fueron:

◊ Optimizar el uso de un software científico para afirmar los conceptos teórico-prácticos estudiados del cálculo diferencial.
◊ Estimular la investigación de temas relacionados con el cálculo diferencial a través de la implementación de este software.
◊ Incentivar la participación en clase y el trabajo grupal de los alumnos.

Contenidos

Se abordaron temáticas referentes a cálculo diferencial en una y dos variables, álgebra y geometría.

Metodología

Los alumnos, en cada clase, dispusieron de un diskette con un instructivo del programa, la guía propuesta a resolver y copia impresa de la misma. En este material, de tipo interactivo, se encuentran desarrollados ejemplos motivadores y ejercicios propuestos con igual secuencia que la guía teórico-práctica utilizada en la clase tradicional. Esto le permitió al alumno comparar los resultados obtenidos de este modo con los alcanzados en las clases de la asignatura. El uso de este software permitió analizar en forma ágil algunos conceptos de difícil comprensión mediante las potencialidades gráficas que brinda Maple V. Con esta modalidad se incentivó la creatividad en la resolución de diferentes problemas y se introdujo al alumno en incipientes actividades de investigación. También se originó un

ambiente agradable de trabajo, al conformase grupos de dos integrantes por computadora, lo que generó intercambio de opiniones.
Al finalizar cada clase de gabinete se realizó una puesta en común con el fin de compartir los logros alcanzados y las dificultades más frecuentes de los temas estudiados.
Mostramos a continuación a modo de ejemplificación del material utilizado en clase, dos ejercicios propuestos en diferentes temáticas. El primero corresponde al grupo de ejercicios propuestos con mayor grado de dificultad. Resulta representativo para mostrar la metodología utilizada en la enseñanza de aproximación de funciones de una variable, usando un software.
Ejemplo I) Calcular la fórmula de McLaurin de orden 1,3, 5 y 7 de la función f(x)=sen(x). Graficar simultáneamente la función y los polinomios de aproximación.
Normalmente el alumno se encuentra con dos dificultades. La primera es la de aproximar funciones con polinomios usando el método tradicional de "lápiz y papel", por tener que realizar largos cálculos reiterativos.
Mediante el uso del software, utilizando una sola sentencia puede obtener los polinomios pedidos. Además el software le ayuda a descubrir la diferencia entre la serie y el polinomio aproximante, ya que sólo pude graficar esta última expresión. Mostramos las últimas expresiones obtenidas:

```
> p:=taylor(sin(x),x,8); # Calcula la fórmula de McLaurin de grado siete
```

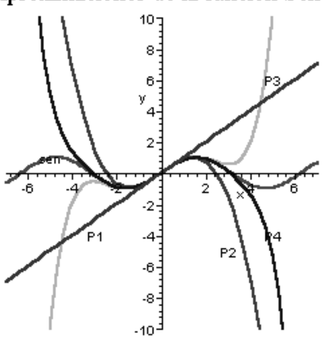
$$p := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + O(x^8)$$

```
> p4:=convert(p,polynom); # Expresa el polinomio de grado siete
```

$$p4 := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

La segunda es representar en una misma gráfica la función dada y sus polinomios de aproximación. Se aprovecha el potencial del software para la visualización de las mismas.

Aproximaciones de la función Seno



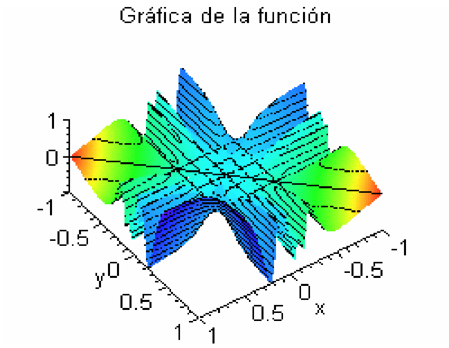
Es interesante destacar que los alumnos se sintieron incentivados a encontrar analítica y gráficamente aproximaciones de orden superior. En este momento el docente puntualiza la importancia de realizar las aproximaciones en el entorno del punto solicitado. Se hizo notar gráficamente que los errores de aproximación por los polinomios son mayores en puntos lejanos del origen.
En las actividades integradoras el 85% de los alumnos que participaron de las prácticas de gabinete superaron satisfactoriamente las evaluaciones relativas a esta temática.
Los alumnos que no asistieron superaron las evaluaciones en un 53% aproximadamente.
Otro ejemplo de interés es el análisis de la continuidad de funciones de dos variables. Se muestra uno de los ejercicios de mayor dificultad, debido a que el software no proporciona

información detallada, y el análisis de la continuidad por definición resulta una tarea dificultosa.

Ejemplo II) Analizar la continuidad de la función $f(x,y)=(x+y)\,\sin(\frac{1}{x})\,\sin(\frac{1}{y})$, *f(x,y)=0* si *x=0* ó *y=0*, en el origen de coordenadas.

Para un buen análisis de la continuidad, es conveniente que el alumno grafique la superficie dada, indicación que el docente imparte en forma escrita y verbal.

> plot3d($(x+y)\,\sin(\frac{1}{x})\,\sin(\frac{1}{y})$, x=-1.5..1.5, y=-1.5..1.5, title = \`Gráfica de la función\`);



Teniendo en cuenta lo estudiado en las clases previas teóricas-prácticas tradicionales, el estudiante calcula el límite doble, los límites iterados y por distintas direcciones.

> L:=limit((f(x,y)), {x=0,y=0});

Error, (in limit) invalid arguments

Dado que omite el valor del límite doble se calculan los límites iterados con los que ocurre lo mismo que en el caso anterior.

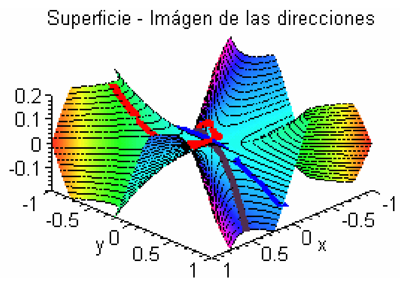
Se recurre entonces a los límites para distintas direcciones. Por ejemplo, el límite direccional en la dirección de la familia de rectas $y = mx$, y en la dirección de la familia de parábolas $y = m\,x^2$

> Lr:= limit(limit(f(x,y),y=m*x),x=0); > Lp:= limit(limit(f(x,y),y=m*x^2),x=0);

$$Lr := 0 \qquad Lp := 0$$

Con este ejemplo se observa que los límites por distintas direcciones coinciden.

El alumno comprueba que si la función tiene límite en el origen, debe ser cero. Se aprovechan las potencialidades gráficas del software, para realizar un análisis gráfico detallado de los resultados analíticos obtenidos anteriormente.



En la gráfica se observa que por cualquier dirección, curvas remarcadas en la superficie, la función tiende al origen.

Esto permite comprobar el resultado probado en clase teórica donde se verificó por definición que el límite doble de esta función es cero. Luego la función tiene límite doble cero y como está definida en cero, es continua en el origen de coordenadas.
En la encuesta realizada a los alumnos participantes de esta experiencia, el 90% valora la utilidad de manejar claramente los conceptos teóricos, ya que si bien el software puede ayudarlo en gráficas y en cálculos, la interpretación de los resultados debe hacerla personalmente sobre todo en aquellos casos en los que los resultados del software no son inmediatos.
El 87% de los alumnos asistentes aprobaron las evaluaciones correspondientes a esta temática, contra un 55% de aprobados en los alumnos no asistentes. Es de tener en cuenta que este es uno de los conceptos que resultan de mayor dificultad para el estudiante, sin embargo con la implementación de estos talleres ya no es motivo de consulta.

Evaluación

√ En cuanto a la metodología:

Finalizada las experiencias de gabinete, se realizó una encuesta donde se analizaron los siguientes ítems relacionados con esta metodología de trabajo:

- Aprendizaje del software Maple V
- Análisis de la guía interactiva
- Conexión con las clases teóricas prácticas desarrolladas anteriormente
- Asistencia del equipo de cátedra
- Relación entre pares.

Del intercambio de opiniones obtuvimos las siguientes conclusiones:
El aprendizaje del software seleccionado no les presentó mayores dificultades debido a que posee una sintaxis muy próxima a la notación matemática.
En cuanto a la forma interactiva de presentación de la guía, les resultó de gran utilidad el contar con ejercicios tipo que podían ser consultados a medida que desarrollaban los ejercicios de aplicación. Para algunos alumnos el uso de esta técnica interactiva les demandó una mayor concentración.
Se destacó que para poder realizar con mayor agilidad los ejercicios propuestos debieron revisar los conceptos teóricos que ellos involucraban. Alumnos poco participativos en las clases prácticas tradicionales demostraron mayor interés por cumplir con las consignas.
Al trabajar con grupos reducidos la atención del equipo docente fue satisfactoria. Como la formación de equipos fue espontánea no existieron problemas de convivencia. La mayoría de los alumnos participantes comentó que esta experiencia fue su primera aproximación a un software científico, es por ello, que consideramos a esta propuesta metodológica como fundamental para que el alumno conozca este tipo de posibilidades y las aplique en su futura vida profesional.

√ En cuanto a los resultados:

Todos los grupos entregaron su diskette al finalizar el semestre, a pesar de no ser requisito para la obtención de la certificación definitiva. Los resultados obtenidos en las evaluaciones parciales de las asignaturas, sin el uso de la computadora, fueron de 93% de aprobados en el grupo participante de esta experiencia, contra 64% de aprobados en el grupo de

enseñanza tradicional, lo cual evidencia que esta metodología permite obtener mejores resultados a la hora de las evaluaciones formales del cursado.
Sobresalió la actitud de los estudiantes en el planteo e investigación de otras situaciones y ejemplos aplicados a su especialidad de estudio.

Conclusiones

Al observarse buenos resultados en los desarrollos de las guías propuestas en los años 2000-2001, quizás nos tentemos en sobrevalorar el uso del software en educación, pero debemos entender esta actividad como complementaria de otras.
Destaquemos algunos aspectos positivos:

◊ Es una herramienta que ayuda a la comprensión de temas abstractos.
◊ Se puede trabajar con funciones complejas que resultan de difícil manejo con lápiz y papel, permitiendo realizar cálculos y encontrar soluciones exactas rápidamente.
◊ El uso combinado de guías teórico prácticas tradicionales y software parece lo más adecuado.
◊ Favorece la relación docente alumno y alumnos entre sí.

Destaquemos algunos aspectos negativos:

◊ Se corre el riesgo que el alumno le otorgue una veracidad incuestionable a los resultados obtenidos con el software.
◊ No se debe sobredimensionar el uso del software en detrimento del razonamiento lógico matemático de la enseñanza clásica.
◊ Se dispone de pocos gabinetes de computación.

Desafíos:

Teniendo en cuenta la evaluación llevada a cabo por docentes y alumnos, el equipo propone:

◊ Incorporar temas aún no vistos.
◊ Ampliar la cantidad de alumnos participantes en las prácticas de laboratorio.

Referencias bibliográficas

Beltran, A; Igea, D. Y Agustín, J. (1996). *Bases Metodológicas de la Investigación Educativa.* GR92. Barcelona.
Didier, O. (1998). Conferencia Mundial sobre la Educación Superior: De lo Tradicional a lo Virtual: las Nuevas Tecnologías de la Información. UNESCO. Paris.
Conclusiones de los Encuentros Nacionales sobre Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. San Juan 1987; Santa Fé 1990; Oberá 1992; Rosario 1993; Mendoza 1994; Santiago del Estero 1996.
Memorias del Primer y Segundo Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla 1990, Brasil 1994.
Tecnología Educativa, Fundamentos teóricos-Metodológicos. UNSJ 1989.
La computadora como auxiliar del docente en un curso de matemática para estudiantes de ingeniería. REM (Reunión de Educación Matemática). Río Cuarto 1995.
El uso de la computadora en una experiencia áulica .Trabajando con Funciones, Combinando lo Gráfico, lo Numérico y lo Algebraico. Resolviendo problemas. REM. Salta 1996.
Nuevos ejemplos para temas tradicionales en matemática usando MATLAB. REM. Salta 1996.

Recursos informáticos como facilitadores del aprendizaje del álgebra lineal

Nora Mabel Lac Prugent; Elda Gallese
Escuela de Economía. Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. Universidad Nacional de Rosario. Argentina
nlacprug@agatha.unr.edu.ar egallese@agatha.unr.edu.ar

Resumen
Los ejes temáticos de esta propuesta abarcan la utilización de las funciones especiales del Álgebra Lineal, mediante el sistema DERIVE for Windows, versión 4.02 y su aplicación económica. Los destinatarios son los alumnos de la cátedra Matemática para Economistas II de la carrera de Licenciado en Economía de la Universidad Nacional de Rosario.
Los ejercicios de aplicación se desarrollan utilizando guías de trabajo. La primera consiste en la ejemplificación de las habilidades del sistema a través de la revisión del Álgebra Vectorial. La segunda, consta de ejercicios de revisión del Álgebra Matricial y la resolución de sistema de ecuaciones, para así abordar en la tercera guía la resolución de modelos económicos. La cuarta guía es la "específica" del Álgebra Lineal dejando para la última el modelo de insumo-producto de Leontieff.
Así, la sinergia entre los contenidos (qué tienen que aprender los estudiantes) y la tecnología (equipamiento informático utilizado) contribuye a mejorar la pedagogía (cómo ayudar a aprender), permitiendo a los alumnos una capacitación acorde a los requerimientos de la sociedad actual.

Introducción

Este trabajo trata sobre la puesta en marcha de una innovación pedagógica: la incorporación de la herramienta computacional como recurso didáctico en la enseñanza del Álgebra Lineal y su aplicación a la Economía.
El desarrollo matricial del Álgebra Lineal, posibilita a los economistas -en este caso se trata de los alumnos de la carrera de Licenciado en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (FCEyE) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR)- el abordaje al aprendizaje de un conjunto de conocimientos teóricos y sus aplicaciones. La práctica mediante el asistente matemático DERIVE for Windows versión 4.02, se realiza en el Laboratorio de Matemática. Este laboratorio ha sido asignado al proyecto de investigación "La enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales" dirigido por Mercedes Anido en el marco del Fondo para Mejoramiento de la Calidad Universitaria (FOMEC) Nº 615 del Departamento de Matemática de la FCEyE de la UNR.
El asistente matemático DERIVE, constituye una herramienta informática que permite resolver variados problemas y complementar el aprendizaje de la matemática aplicada a cuestiones económicas.
La siguiente sección trata algunas cuestiones que, fundamentan y estimulan la incorporación de recursos didácticos modernos, desafiando a la adversa realidad por la que está atravesando la enseñanza en la actualidad.
En la sección 3 se muestra el contexto curricular donde se desarrolla esta actividad educativa desde el año 1997, mientras que en la cuarta sección se presentan las guías de trabajo propuestas a los alumnos y la dinámica con que se abordan. En la quinta sección se hace una evaluación preliminar de la experiencia y en las conclusiones se esbozan algunas recomendaciones.

Fundamentos

Sin duda alguna, frente a la llegada del tercer milenio, uno de los temas preocupantes es el referido a la formación de capital humano. Las altas tasas de desocupación, especialmente entre los jóvenes, es un claro alerta sobre el peligro que encierra para la sociedad en su conjunto el no haber invertido en educación acorde a las necesidades.

En este sentido, la preocupación de la comunidad de los docentes de matemática se ve reflejada en algunos hechos significativos. Es así como, en los primeros meses de 1998 comienza a circular un Documento de Discusión con el siguiente título: "Sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario"**,** elaborado por The International Commision on Mathematical Instruction (ICMI).

Se transcriben a continuación algunas reflexiones allí plasmadas intentando dar respuesta a preguntas como la siguiente: ¿por qué un estudio sobre la enseñanza y aprendizaje de Matemática en el nivel universitario?.

."(...)*Numerosos cambios han tenido lugar en años recientes que han afectado profundamente la enseñanza de la matemática en el nivel universitario. Cinco cambios que aún tienen considerable influencia son : i) el incremento del número de estudiantes que actualmente cursan estudios terciarios; ii) importantes cambios pedagógicos y curriculares en el nivel pre-universitario; iii) las crecientes diferencias entre la educación matemática de nivel secundario y la de nivel terciario, con respecto a sus propósitos, objetivos, métodos y enfoques de enseñanza; iv) el rápido desarrollo de la tecnología; y v) presiones sobre las universidades para que den cuenta públicamente de sus acciones. Por supuesto, todos estos cambios son generales y han tenido influencia en otras disciplinas. Sin embargo, dada su posición central en la educación general, y su naturaleza obligatoria para muchos estudiantes, puede argüirse que estos cambios quizás han tenido una mayor influencia en matemática que en cualquier otra disciplina.(...)".* (ICMI, 1998)

"(...) Nuevos desarrollos en la enseñanza y aprendizaje de matemática tratan de resolver estos problemas. Por ejemplo nuevos enfoques para Cálculo y Álgebra Lineal en Estados Unidos reflejan, en parte intentos de hacer estos temas más atrayentes y significativos para la mayoría de los estudiantes. También se han producido cambios de contenido, con énfasis creciente en algunas universidades en aplicaciones y modelos, historia y filosofía de las matemáticas etc. (...)".(ICMI, 1998)

"(...) Mundialmente se está haciendo mayor uso de computadoras y calculadoras en la instrucción matemática. Hay muchos softwares y paquetes de enseñanza disponibles para un gran rango de tópicos curriculares. Esto, por supuesto, plantea la cuestión de qué es lo que estos softwares y paquetes ofrecen para la enseñanza y aprendizaje del tema, y que problemas potenciales pueden generar para la comprensión y el razonamiento. Sería beneficioso juntar aquellos ejemplos donde el uso de la tecnología informática y software resultan enriquecedores para la experiencia de los estudiantes y devienen en una mejor comprensión y aprendizaje (...)".(ICMI, 1998)

En agosto de 2000 se llevó a cabo la "Presentación de las principales consideraciones y hallazgos" en el Noveno Congreso sobre Educación Matemática (ICME-9) realizado en Japón. Se prevee que en el transcurso de este año los editores producirán un volumen con las contribuciones, y los resultados de las deliberaciones de los grupos de trabajo y paneles de la conferencia que se espera sea una referencia básica para el tema por algún tiempo.

La Universidad Nacional de Rosario, obviamente, no está al margen de lo acontecido mundialmente. El incremento del número de estudiantes y la búsqueda de nuevos desarrollos para tornar más atractivos los enfoques del Álgebra Lineal, desembocan obligatoriamente, en el uso de la computadora para facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje.

El contexto actual: la asignatura Matemática para Economistas II

La materia Matemática para Economistas II es cursada en el segundo cuatrimestre por los alumnos del tercer año de la carrera de Licenciado en Economía dictada en la FCEyE de la UNR. Es de duración cuatrimestral con una carga horaria de seis horas teórico-prácticas semanales. De modo que los alumnos ya han cursado dos matemáticas anuales y una cuatrimestral con aplicaciones a la Economía, esta última dictada en el primer cuatrimestre del año en curso. La práctica en Laboratorio es, en promedio, de dos horas semanales dependiendo de la coordinación necesaria con el desarrollo de los temas teóricos.
El programa de la asignatura Matemática para Economistas II abarca los siguientes temas fuertes:

- Repaso del Álgebra Matricial y Álgebra Vectorial.
- Formas lineales y cuadráticas.
- Autovalores y Autovectores. Diagonalización de matrices simétricas y reales.
- Matrices semejantes.
- Programación matemática: programación lineal y no lineal.
- Teoría de los juegos.
- Nociones de programación dinámica.

Es evidente que el programa es demasiado extenso para ser dictado en un sólo cuatrimestre. El desarrollo de la parte específica del Álgebra Lineal en las asignaturas de otras carreras insume un cuatrimestre, el mismo tiempo del que se dispone para el desarrollo completo del programa en cuestión. En otros casos, para lograr una profundización teórica y práctica, los cursos de Álgebra Lineal tienen una duración anual.
En este contexto y gracias a la posibilidad de utilizar el Laboratorio de Matemática, se decidió la incorporación de la práctica en computadoras para, por un lado, paliar el factor "olvido" de los alumnos y poder así avanzar en las aplicaciones económicas. Por otro lado, la incorporación de la práctica computacional agiliza el desarrollo más completo relacionado con la programación matemática.
De esta manera, en el Laboratorio de Matemática se trabaja en forma interactiva con la computadora, centrando el aprendizaje en la actividad del alumno. El docente es un facilitador del aprendizaje, a cargo de consultas actuando sólo cuando los comandos de ayuda del sistema sean insuficientes. La excelente disposición del docente responsable del Laboratorio, permite el trabajo constructivo de los alumnos, paliando situaciones de ansiedad que pudieran haberse presentado cono lógica consecuencia del uso de una nueva herramienta, como es la computadora.

Las guías de trabajo propuestas

Esta experiencia pedagógica se está realizando en la Facultad desde el año académico 1997 y continúa. Los ejercicios se desarrollan utilizando cinco guías de trabajo. La primera guía

consiste en ejercicios de simple ejemplificación de las habilidades del sistema a través de la revisión del Álgebra Vectorial, los temas abordados son: introducción de vectores en máquina por sus componentes, transposición de vectores y operaciones con vectores.
La finalidad de esta guía es que los alumnos se familiaricen, por ejemplo, con los menúes desplegables o íconos, con las operaciones de copiado, pegado e inserción de expresiones y con el uso de ventanas.
La segunda guía se efectiviza mediante ejercicios de revisión del Álgebra Matricial en los que por reiterativos se adquiere el manejo de las cualidades del sistema logrando mayor velocidad y fluidez. Con el espíritu de aprender las notaciones y operaciones con matrices, los tópicos aquí abordados son: introducción de matrices en máquina., transposición de matrices, operaciones con matrices, inversión de matrices y submatrices. Se completa el análisis con la resolución de sistema de ecuaciones.
Es sabido, que los modelos económicos, últimamente tan utilizados, han estimulado enormemente el interés por el Álgebra Lineal. Por ello, se considera oportuno que la tercera guía de trabajo contemple los siguientes casos:

- Modelo de mercado con dos bienes.
  - obtención de cantidades y precios de equilibrio
  - obtención de cantidades y precio de equilibrio de un mercado
  - análisis de un mercado compuesto por dos bienes.
- Modelo de la renta nacional
  - otención de cantidades óptimas de ingreso y consumo
  - verificación si la solución matemática es significativa desde el punto de vista económico.

El objetivo perseguido en la cuarta guía de trabajo es el de trabajar con polinomios matriciales, calcular los autovalores y autovectores asociados a una matriz cuadrada. En este caso se contemplan los siguientes temas:

- Cálculo de autovalores y autovectores.
- Cálculo de matrices diagonales.
- Verificación del teorema de Hamilton-Caley.
- Cálculo de matrices semejantes.

A manera de ejemplo se presentan a continuación algunos ejercicios incorporados en esta guía:

✓ Dada la matriz *A* =[[10,-18],[6,-11]]. Calcule por su definición:
a) El polinomio característico.
b) Los autovalores (mediante la resolución del polinomio característico).
c) Los autovectores. (Ayuda: Plante el sistema $(A - \lambda_i I)\ v = 0$, donde *v* es el vector (x, y, z) y *0* es un vector nulo; reemplace por el valor característico correspondiente y resuelva el sistema). ¿Es única la solución?
d) La matriz modal ortogonal y la matriz diagonal.

✓ Halle el polinomio característico (utilice el comando **charpoly (A, λ))**
✓ Calcule los autovalores y los autovectores (utilice los comandos **eigenvalues(A, λ)** y **exact_eigenvector(A, λi)**)

✓ Sea la función cuadrática $Q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 2xy - 4yz$.
a) Exprese dicha función en forma matricial.
b) Halle los autovalores.
c) Determine si la forma cuadrática dada es definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa o indefinida. Relacione con el signo de los autovalores.

d) Verifique el resultado anterior mediante el cálculo de los menores principales. e) Halle la matriz modal ortogonal. f) Verifique que la matriz hallada en el punto e) cumple con la condición $P' = P^{-1}$. ¿Qué tipo de matrices cumplen obligatoriamente con la condición anterior?

De esta manera, los estudiantes poseen un conjunto de conocimientos computacionales del Álgebra Lineal aplicados a la Economía. Con este aprendizaje, se considera que el alumno de la carrera de Licenciado en Economía puede abordar un tema tan importante como es el modelo de insumo-producto de Leontieff desde su perspectiva algebraica. Entonces, los items que abarca la quinta guía de trabajo son:

- Modelo de insumo-producto de Leontieff.
  - cálculo de la matriz de coeficientes de requerimientos directos e indirectos
  - cálculo del vector de producción
  - cálculo de la matriz de transacciones intersectoriales.

Además de estas cinco guías, la enseñanza de los temas restantes -Programación Matemática (lineal y no lineal) y Teoría de los Juegos- se complementan con el uso de Microsoft EXCEL, continuando con la utilización del DERIVE para la obtención y visualización de las gráficas de funciones, especialmente las no lineales.

El alumno participa en clase con actividades relacionadas con la computadora, con una diskette personal, graba cada una de estas guías propuestas y la producción se plasma en una carpeta que entrega al finalizar el cuatrimestre.

El trabajo en laboratorio se realiza asignando una computadora cada dos alumnos, mientras que la toma de exámenes se realiza en varios turnos para que cada alumno pueda trabajar con una computadora.

La metodología de enseñanza es teórico práctica a través de una dinámica interactiva. Las guías deberían ser de utilidad para lograr una mejor comprensión de los temas que abarca la materia. La evaluación final está determinada por el desempeño de los alumnos en los trabajos prácticos y en los exámenes.

Es menester puntualizar que la práctica en el laboratorio es el complemento de los desarrollos teóricos realizados en el aula. Hay que recordar que esta ejercitación está dirigida a usar la computadora como una "calculadora inteligente" y esto por sí sólo no es suficiente para realizar el aprendizaje de un curso de Álgebra Lineal, debiéndose integrar los conocimientos brindados con una adecuada bibliografía y buen desarrollo teórico.

Evaluación preliminar de la experiencia

Desde el lugar del aprendizaje, en estos tres años se ha detectado en una etapa exploratoria, a través de una encuesta realizada a 153 alumnos, que:

- los alumnos llegan al cursado de Matemática para Economistas II con conocimientos previos de computación, pero sin el manejo de un software matemático específico (75%).
- las dificultades del trabajo en laboratorio son: leves (64%), razonables (31.6%) e importantes (4.4%).
- el interés, la dinámica o el estímulo que produce el trabajo en laboratorio es altamente satisfactorio. Los entrevistados manifiestan que la tarea resultó interesante (77%), poco interesante (16%) e indiferente (7%).

- los alumnos priorizan la importancia de la rapidez en el cálculo de inversas de matrices, autovalores, autovectores y diagonalización de matrices, por ejemplo. Manifiestan que una vez incorporada la teoría se pueden reafirmar y profundizar los conceptos.
- por último, el alumno hace una muy buena valoración en cuanto a la utilidad de la herramienta computacional en el proceso del aprendizaje no sólo para esta asignatura sino en vista a futuras materias de la curricula.

Desde el lugar de la enseñanza, se puede argumentar que la herramienta computacional constituye un verdadero aliado del profesor como facilitador del proceso pedagógico.

Conclusiones

En esta experiencia didáctica los ejercicios se desarrollan utilizando cinco guías de trabajo. La primera guía consiste en ejercicios de simple ejemplificación de las habilidades del sistema a través de la revisión del Álgebra Vectorial. La segunda, consta de ejercicios de revisión del Álgebra Matricial y la resolución de sistemas de ecuaciones, para así abordar en la tercera guía la resolución de modelos económicos. La cuarta es la "específica" del Álgebra Lineal dejando para la última el modelo de insumo-producto de Leontieff.
Se insiste en puntualizar que la práctica en el laboratorio es el complemento de los desarrollos teóricos realizados en el aula. Hay que recordar que esta ejercitación está dirigida a usar la computadora como una "calculadora inteligente" y esto por sí sólo no es suficiente para realizar el aprendizaje de un curso de Álgebra Lineal, debiéndose integrar los conocimientos brindados con una adecuada bibliografía y buen desarrollo teórico.
Esta integración de conocimientos ha permitido satisfacer los objetivos iniciales. Esto es, por medio de la herramienta computacional, incrementar la utilización del Álgebra Lineal motivando a los estudiantes de economía a través de un enfoque actualizado, a la resolución sus problemas específicos.
Es así como la sinergia entre los contenidos (qué queremos que aprendan los estudiantes) y la tecnología (equipamiento informático utilizado) contribuye a mejorar la pedagogía (cómo ayudar a aprender), permitiendo a los alumnos una capacitación acorde a los requerimientos de la sociedad actual.

Referencias bibliográficas

Anido, M.; Medina, M.; Rubio Scola, H. (1993). *Laboratorio de Análisis Numérico Matricial*. Rosario, Argentina: Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Bellman, R. (1960). *Introduction to Matrix Analysis*. New York, EEUU: McGraw-Hill.
Chiang, A. C. (1996). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática* (3ª ed.). New York, EEUU: McGraw-Hill.
García, S. (1997). *Estática Comparada. Aplicación a modelos de insumo-producto*. Trelew, Argentina: Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Facultad de Ciencias Económicas.
Hadley, G. (1961) *Linear Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company.
ICMI Study Series (1998). *Sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario,* The International Commission on Mathematical Instruction
Leontieff, W. (1993). *Análisis Económico input-output*. Barcelona, Argentina: Planeta-Agostini.

Sustitución, innovación y transformación en el proceso de enseñanza aprendizaje, ante la incorporación de la tecnología informática

Herminia Hernández Fernández *, Mayra Durán Benejam **, Juan Raúl Delgado Rubí **
*CEPES. Universidad de La Habana, Cuba
**Departamento de Matemática, Facultad de Ing. Industrial. ISPJAE. Cuba
mayra@ind.ispjae.edu.cu mdbenejam@yahoo.com

Resumen
¿Cuál es el potencial real de la introducción de la tecnología informática (TI) en el aula, en cuanto a su instrumentación didáctica y su resultado en el aprendizaje de los estudiantes?. ¿Qué condiciones favorecen la concreción de esa potencialidad?. ¿ Cuáles son los obstáculos que se oponen desde los puntos de vista material, cognitivo, afectivo, institucional o propiamente didáctico?
La temática a la cual apuntan estas interrogantes es de mucho debate y actualidad El conocimiento que sobre estas interrogantes tenemos los autores de este trabajo es aún demasiado limitado, pero un estudio y ensayo realizado a estos efectos en el Álgebra Lineal (AL) para estudiantes de Ingeniería Informática, nos ofrece una visión didáctica al respecto.
El estudio realizado tiene como objetivo analizar el impacto de la utilización de la TI sobre las representaciones, las prácticas y el aprendizaje de los estudiantes. Este estudio abarca dos tipos de metodologías:
- Una metodología denominada externa en la que por medio de unos cuestionarios y entrevistas a docentes de matemática, a expertos de la comisión de carrera, a estudiantes, se ha intentado delimitar el verdadero vínculo de la Matemática en general y del AL en particular con la formación del ingeniero informático.
- Una metodología denominada interna basada en la observación y el análisis de secuencias de interacción de los estudiantes mediante el Chat, el Foro de Discusión y el Correo Electrónico, en torno a la temática del AL y en el impacto de la introducción de la TI en los componentes de la didáctica y sus principios.
El trabajo que se presenta se centra en esta metodología y las interrogantes iniciales guían la estructura de su presentación.

Introducción

La instrumentación didáctica de cualquier proyecto curricular bajo los presupuestos del enfoque histórico cultural y de la actividad presuponen en primera instancia :

- Tomar en consideración a los niveles macro, meso y microcurriculares las exigencias de la época, del sistema social y de la profesión. Es así que la incorporación de la tecnología informática (TI) al proceso enseñanza/aprendizaje, constituye un imperativo de la época en estos inicios del Siglo XXI imposible de soslayar.
- Partir de una concepción de la personalidad humana en tanto se propone siempre el desarrollo pleno del hombre. La incorporación de la TI al proceso enseñanza/aprendizaje refuerza el papel que tiene en el aprendizaje el que cada individuo o grupo reconozca de sus recursos y posibilidades para transformarse a sí mismo y de transformar el objeto con el cual trabaja en un momento determinado.

Realizar un análisis de los componentes o categorías didácticas que se potencian con la introducción de algunos elementos de la TI en el aula, el beneficio que ello aporta a los estudiantes y los obstáculos que se oponen a ello, constituyen el contenido esencial de este trabajo.

Desarrollo

Herramientas de apoyo y algunas consecuencias didácticas

La dinámica del proceso enseñanza/aprendizaje en el Álgebra Lineal objeto de la experiencia que nos ocupa ha variado a partir de la influencia de las tres herramientas que se explican a continuación:

FORO DE DISCUSIÓN
CHAT
CORREO ELECTRÓNICO

Se ha denominado Foro de Discusión a un sitio colocado en una red de computadoras en el cual el usuario una vez que acceda a él puede publicar el texto que desee con relación a la problemática del Álgebra Lineal a fin de que otros puedan leerlo y emitir su opinión al respecto. Simula una "pizarra" que nunca se borra y que está a la vista de todo el que entra en esa aula. Cada vez que un estudiante entra en ese sitio puede leer las opiniones presentadas anteriormente por todos los usuarios incluyendo las propias, así como comentarios o réplicas emitidas. El estudiante tiene la posibilitar de reflexionar durante el tiempo que quiera antes de expresar por escrito mediante la computadora, sus opiniones.
Esta herramienta potencia las posibilidades que ofrece la CONSULTA, como forma de enseñanza, en tanto adopta la siguiente dinámica :

- Un estudiante accede al FORO DE DISCUSIÓN, publica su inquietud y se retira. En otro momento entra otro estudiante o profesor y lee el mensaje que ha dejado el anterior y decide contestarle. Luego entra otro estudiante y puede leer el tema original con las opiniones de los demás. Quizás tenga la misma duda y ya por esa vía la canaliza o a lo mejor le surge otra y la plantea. Sucede así que en el momento en que cada cual se dispone a profundizar en la asignatura puede contar con las opiniones, reflexiones, preguntas , de los otros compañeros o del profesor.
- Para publicar en el Foro el estudiante puede o no poner su nombre y sus dudas e inquietudes quedar en el anonimato para los otros estudiantes y hasta para el profesor; aunque si este se lo propone puede conocer el nombre del estudiante, toda vez que para entrar en ese sitio tuvo que hacerlo utilizando un identificador con su clave y el profesor puede acceder a esa información.

En conclusión, esta herramienta :

- ✓ Amplía las posibilidades de la CONSULTA como FORMA DE ENSEÑANZA, ya que no se ciñe al encuentro individual o colectivo con él o los estudiantes en un lapso determinado, sino que los estudiantes acceden a plantear sus dudas y esperar respuestas, cada vez que quieran y puedan.
- ✓ La comunicación ESTUDIANTE/PROFESOR y ESTUDIANTE/ESTUDIANTE se favorece por cuanto el estudiante no se intimida ante el temor de ser criticado por los otros estudiantes o por el profesor. O sea, el clima psicológico que se crea propicia el aprendizaje.
- ✓ El profesor puede tener mayor conocimiento sobre las características de personalidad de los estudiantes lo cual le facilita el trabajo a desarrollar con ellos.
- ✓ El profesor puede apreciar el desarrollo de algunos valores en los estudiantes, como por ejemplo la honestidad, pues el profesor puede verificar si el estudiante formuló sus preguntas usurpando el nombre de otro estudiante.
- ✓ En el Foro, los roles de profesor y estudiante pueden intercambiarse, ya que estos últimos tienen la posibilidad de asumir posiciones más activas en su aprendizaje, al poder responder libremente a las dudas o problemas planteadas por sus compañeros de clase. Por supuesto, que el profesor siempre tiene que monitorear esta actividad, que también apunta a la EVALUACIÓN como categoría didáctica y muy particular a su función de retroalimentación.
- ✓ El estudiante tiene la posibilidad de meditar el tiempo que quiera antes describir, plantear y publicar sus opiniones sobre un tema.

El lector puede preguntarse, ¿ qué ocurre con los que no visitan ese sitio? El profesor mediante el uso de la TI puede determinar quienes no lo han hecho y convocarlos a la consulta cara a cara para tratar de identificar qué ha motivado el no aprovechamiento del Foro.
Se denomina CHAT a la posibilidad de conversar "en línea". Una vez conectados, cada estudiante se presenta con el nombre que quiera y podrá enviar mensajes escritos que serán leídos por todos los participantes, los cuales a su vez enviarán sus comentarios y respuestas, También ofrece la posibilidad de enviar mensajes a algún participante de forma privada sin que pueda ser visto por los otros.
Esta herramienta permite una comunicación sincrónica y tiene una dinámica más exigente, más espontánea que el Foro de Discusión.
Con el CHAT:

- ✓ El estudiante - a diferencia del Foro, donde opera a tenor de sus "tiempos de aprendizaje"-, en el Chat puede sentirse presionado por responder dado que todo ocurre en tiempo real y los mensajes van apareciendo en cualquier orden . Si un sujeto no responde rápidamente es muy probable que sus criterios no se tomen en cuenta y se pase a otro tema de discusión.
- ✓ El estudiante desarrolla habilidades comunicativas en el sentido de, claridad en el lenguaje, argumentación, elaboración de preguntas, poder de síntesis, elaboración de preguntas, etc.
- ✓ La retroalimentación es inmediata, de ahí que el chat constituye un medio que redunda a favor de la categoría Evaluación.

Mediante el Correo Electrónico, como se sabe es de uso mucho más conocido, pueden ser enviados mensajes individuales escritos o gráficos a cualquier sujeto que posea un buzón de este tipo. Esta herramienta:

- ✓ Permite establecer relaciones con otros individuos y contribuir al conocimiento que cada uno pueda tener del otro y sobre la temática del Álgebra Lineal que nos ocupa.

Las consideraciones que se acaban de realizar en cuanto a implicaciones didácticas que se producen por la introducción de algunas herramientas de la TI se reafirman a continuación, dado que ésta ha venido a **complementar o sustituir** procesos que anteriormente se desarrollaban sin el uso de la TI. Asimismo, ha venido a introducir **innovaciones o transformaciones** en el proceso enseñanza/aprendizaje.
La TI matiza la didáctica desde una perspectiva de sustitución, de innovación o de transformación, como se explica a continuación.
En este trabajo, ejemplo de COMPLEMENTACIÓN O SUSTITUCIÓN de procesos se tienen en:

- ❑ El proceso de evaluación del aprendizaje, el cual se complementa y enriquece con el uso de la TI, fundamentalmente en su función de retroalimentación.
- ❑ Las "consultas" a los estudiantes, identificadas como una forma de enseñanza , como un espacio previsto por el profesor para que el estudiante acuda a evacuar sus dudas o a proponer sus alternativas de solución a los problemas. Con el uso de la TI se produce prácticamente una sustitución de la consulta presencial por una consulta mediada por el computador.
- ❑ Las orientaciones para el estudio, para las clases prácticas o seminarios, donde en lugar de imprimir una página o folleto a estos fines, se instala una página WWW a modo de sustitución.

Se reemplaza así en estos dos últimos ejemplos la interacción cara a cara por el uso de la TI o se complementa en el caso de la evaluación del aprendizaje.

Obstáculo

Desde la perspectiva del profesor esto último es un gravamen para su trabajo ya que tiene que manejar simultáneamente dos ambientes de enseñanza y aprendizaje.

En esta experiencia, elementos de INNOVACIÓN se identifican en lo siguiente:

- Se induce a los estudiantes a incursionar de manera independiente en partes de la materia objeto de estudio. Con ello se favorece el desarrollo de la autopreparación como forma de enseñanza obligada ante el nuevo valor del conocimiento y la necesidad de formación continua.
- Se establece, principalmente a través del Foro de Discusión, "grupos de noticias " mediante las cuales el estudiante puede encontrar o comunicar información, recoger tareas, plantear y enviar preguntas, de manera rápida y ágil, a otros estudiantes o al profesor.

La TRANSFORMACIÓN presupone que el proceso enseñanza/aprendizaje a niveles micro, meso y macro se torna diferente. Sucede que la organización tradicional – por llamarle de alguna manera – va desapareciendo y está siendo reemplazada por una forma de proceder profesores y estudiantes totalmente nuevo.

Esta transformación se concreta en un canal de comunicación estudiante/profesor, estudiante/estudiante, con características propias. Como se puede apreciar los estudiantes utilizan la PC para colaborar, consultar a otros, solicitar ayuda por correo electrónico, para ser evaluados "on line", etc.

El ambiente de aprendizaje se va tornando diferente y la didáctica no se queda al margen de estos cambios.

Otras potencialidades de la TI ,a modo de resumen

✓ Permite desarrollar más eficazmente un enfoque experimental de las matemáticas.

Una de los beneficios que ofrece el uso de la computación en el proceso enseñanza/aprendizaje es que estimula la actividad investigativa, ya que el estudiante se siente en libertad de buscar, de indagar, de experimentar, sin las restricciones de tiempo y espacio que impone el aula bajo la presencia del profesor y del grupo de estudiantes.

Acciones de carácter investigativo tales como :

- La identificación y planteamiento de problemas
- La búsqueda y proposición de alternativas de solución
- El control y verificación de la validez de los resultados obtenidos,

se favorecen con el uso de la TI.

Esta afirmación se apoya principalmente en :

-lo expedito de la utilización del entorno, principalmente en lo que se refiere al Chat, el Foro y el e-mail, desde la perspectiva de cada una de estas modalidades.

-la reducción de tiempos de aprendizaje, si se tiene en cuenta los gastos que provoca la vía del ensayo-error o las preguntas y respuestas sin retroalimentación, o las horas de consulta.

Beneficios todos que superan, tanto a la enseñanza tradicional como a la enseñanza activa, participativa sin el apoyo de la computación.

✓ Permite una mejor dinámica de la enseñanza y una mejor adaptación de ésta a las particularidades y ritmo de aprendizaje de cada estudiante.

El elemento comunicación se enriquece, siempre que a la comunicación estudiante/profesor se integre la comunicación estudiante/PC . Ello imprime una dinámica y calidad diferente al proceso enseñanza/aprendizaje.
La evaluación del aprendizaje adquiere otro matiz, en tanto la evaluación adquiere mayor relieve como medio de aprendizaje. El error adquiere un carácter menos penalizador, por cuanto el estudiante ve más al profesor como la persona a la cual acudir no solo directamente sino en una relación asincrónica mediada por el computador. Por otra parte, se aumenta la motivación, así como la propia actividad de los estudiantes.

- ✓ Permite compensar hasta cierto punto las dificultades matemáticas experimentadas por algunos estudiantes y permite avanzar a otros que no se ven obligados a parar. Asimismo, permite compensar dificultades en otras áreas matemáticas.
- ✓ Permite liberar al estudiante de la influencia del grupo, de las limitaciones de tiempo, del trabajo repetitivo de lápiz y papel, le favorece la comprensión, el autocontrol.
- ✓ Favorece- gracias a las posibilidades de “visualización” que ofrece la PC-, el desarrollo de representaciones e imágenes mentales, que no serían posible sin el apoyo de este medio.

Conclusiones

Las potencialidades anunciadas a lo largo de este trabajo, tienen un carácter teórico, porque si bien las herramientas (Foro de Discusión, Chat y Correo Electrónico) han sido diseñadas y montadas con fines específicos por los propios estudiantes de Ingeniería Informática, para el Álgebra Lineal, obstáculos de orden material han limitado su aplicación.
Las potencialidades hacia el aprendizaje y consolidación de una personalidad son ilimitadas, por el grado de independencia que configura.
La CONSULTA y la AUTOPREPARACION ,como formas de enseñanza, la INVESTIGACIÓN , la EVALLUACION , la COMUNICACIÓN y los METODOS de enseñanza/aprendizaje, todos como componentes de la Didáctica se potencian a partir del uso de la TI.
El uso de la TI exige mayor tiempo de dedicación por parte del profesor, toda vez que frecuentemente tiene que manejar simultáneamente dos ambientes de trabajo y ello sin dudas puede devenir en obstáculo.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1996). *Enseñanza de la Matemática. Relación entre saberes, programas y prácticas*. Publicación IREM. Francia
CEPES (1999). *Premisas para una alternativa de transformación de la enseñanza,* en Selección de Lecturas de Didáctica Universitaria, Matanzas. Cuba.
Valcke ,M. (1999) Los materiales educativos: Cursos según la auto-demanda y hechos a medida. Reingeniería del proceso de diseño. Producción e implementación en un marco de educación a distancia. en *Formación del Profesorado para el Nuevo Siglo*. Editorial Lumen Humanitas. ISBN-950-00-0003.

Calculadoras graficadoras: herramientas útiles en la corrección de errores algebraicos

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica. Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Resumen
El proyecto de investigación: Innovaciones tecnológicas en la Educación Matemática. "Implementación de Laboratorios con calculadoras TI92 y CBL, iniciado en 1998 y que involucra a las cuatro universidades estatales de Costa Rica, tiene como uno de sus objetivos específicos analizar el impacto del uso de las calculadoras graficadoras y software compatible en las construcciones conceptuales más relevantes de la matemática.
La experiencia nos ha llevado a utilizar las capacidades simbólicas y gráficas de las calculadoras, para corregir errores conceptuales que los estudiantes presentan cuando resuelven ejercicios en el aula. Cuando los estudiantes intentan resolver alguna situación problemática más compleja, cometen algunos errores de álgebra elemental y otros ocasionados por la aplicación de propiedades inexistentes o falsas. En este sentido la calculadora ha sido utilizada como andamiaje para que el estudiante supere los obstáculos, eleve su nivel de pensamiento y logre realizar tareas que serían difíciles sin su apoyo.
Los errores analizados aquí corresponden a errores reales cometidos por mis estudiantes de un segundo curso de Cálculo para estudiantes de computación de la Universidad de Costa Rica.

Introducción

En nuestra experiencia diaria como educadores en matemática, es altamente probable encontrar situaciones en las que los estudiantes hayan manipulado y aplicado incorrectamente propiedades o definiciones, resultando en errores que necesitan ser corregidos mediante varias estrategias. Algunos ejemplos de los errores comunes en álgebra y cálculo son:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2$; $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$; $\sqrt{x^2} = x$; $x^a x^b = x^{ab}$; $f(x+h) = f(x) + h$;

$$\int \frac{f(x)dx}{g(x)} = \left(\int f(x)dx\right)\left(\int \frac{dx}{g(x(\ ))}\right); \iint \frac{f(x,y)}{g(x,y)}dxdy = \frac{\iint f(x,y)dxdy}{\iint g(x,y)dxdy}.$$

Existen otros errores que se deben a una falta de cuidado en la especificación del dominio de funciones, como por ejemplo:

$\ln x^2 = 2\ln x$, $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \quad \forall x \in \Re$.

El uso de calculadoras graficadoras a nivel medio superior y superior permite que los estudiantes utilicen otros sistemas de representaciones para explorar la validez o la falsedad de argumentaciones, funcionando como andamiaje en algunos de los pasos utilizados en la resolución de una situación problemática: De Faria, 1999; De Faria, 2000, Kutzler 1999; Moreno, 1999; Hirschhorn, D. y Thompson, D. 1996.

El concepto de andamiaje educativo se puede ver como una aplicación relacionada con la zona de desarrollo próximo de Vigotsky, y consiste en ayudas reguladas en la realización de tareas complejas (Valsiner, 1999). En este sentido la tecnología – como andamiaje – sirve: como ayuda regulada; herramienta que amplía el alcance del sujeto permitiendo la realización de tareas que serían difíciles sin su apoyo y que puede ser utilizada selectivamente cuando sea necesario.

Los errores analizados en el trabajo son abstracciones de situaciones típicas encontradas en trabajos desarrollados en el aula, pruebas y tareas realizadas por mis estudiantes de un segundo curso de cálculo para computación, de la Universidad de Costa Rica, cuyos contenidos son: Sucesiones y series, polinomios y series de Taylor, desarrollos limitados, integrales impropias, derivadas parciales e integración múltiple.

La herramienta de apoyo didáctico utilizada para la exploración de los supuestos errores fue la calculadora graficadora TI92. En el aula dispongo de una calculadora que se conecta a un proyector (View Screen), y cada estudiante tiene acceso a una calculadora TI92. El equipo pertenece al proyecto de investigación: Innovaciones tecnológicas en la Educación Matemática. "Implementación de Laboratorios con calculadoras TI92 y CBL". Este proyecto - iniciado en 1998 - involucra a las cuatro universidades estatales de Costa Rica, y sus objetivos son:

- Analizar el impacto del uso de las calculadoras graficadoras y software compatible en las construcciones conceptuales más relevantes de la matemática.
- Aprovechar las capacidades simbólicas, gráficas, numéricas y geométricas de la calculadora TI-92 y el potencial de los C.B.L. en la enseñanza de la matemática, la física y la química.
- Dar énfasis a la resolución de problemas y análisis de casos.
- Propiciar las conexiones internas de la matemática, como por ejemplo, con teoría de números, con geometría, con álgebra, con trigonometría, etc., y las conexiones externas con la física, la química, la biología, estudios sociales, español, y las conexiones en comunicación.
- Reforzar las conexiones entre las múltiples representaciones tales como: La gráfica la numérica y la simbólica.
- Dar las recomendaciones metodológicas y de contenidos adecuadas para el uso de la calculadora como herramienta.
- Sugerir e implementar los cambios curriculares necesarios.

Algunos errores conceptuales

En un examen de diagnóstico encontramos errores relacionados con la aplicación equivocada de alguna supuesta propiedad de las integrales:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \qquad (1)$$

Para corregir el error, decidimos utilizar la representación gráfica de la calculadora TI92, planteando el siguiente ejercicio para que los estudiantes lo trabajaran en el aula:

1. Definir las siguientes funciones:

$$y1(x) = \int_0^x \frac{u\,du}{u^2+1} \; ; \; y2(x) = \frac{\int_0^x u du}{\int_0^x (u^2+1) du}$$

Graficar las funciones y1(x) y y2(x) en un mismo sistema de coordenadas, utilizando un dominio apropiado. Utilice estilos distintos para graficar las dos funciones.

2. Comparar las gráficas obtenidas y concluir si y1(x)=y2(x).
3. Utilice los resultados obtenidos para verificar si es verdadera o falsa la conjetura:

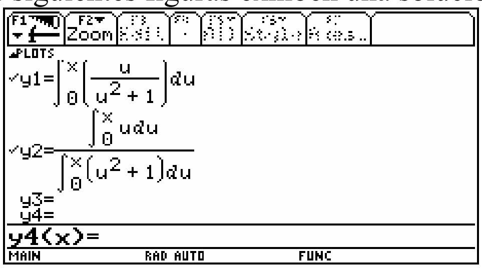
$$\int_0^x \frac{u\,du}{u^2+1} = \frac{\int_0^x u du}{\int_0^x (u^2+1) du}$$

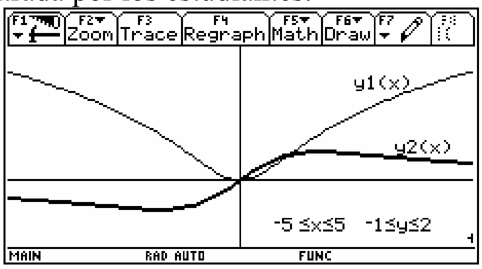
4. ¿Qué podemos decir en general con relación a la siguiente "propiedad"?

$$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \qquad (1)$$

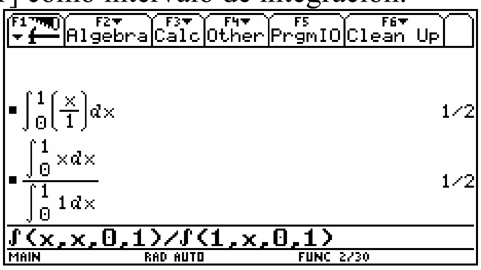
5. Si la propiedad (1) es falsa, construya un ejemplo para el cual la propiedad (1) es verdadera.

Las siguientes figuras exhiben una solución encontrada por los estudiantes:





Una de las respuestas posibles para la pregunta 6, construida por un estudiante, consiste en tomar f(x)=x, g(x)=1 y [0,1] como intervalo de integración.



Es importante resaltar a los estudiantes que algunos ejemplos concordantes con una conjetura no garantizan que tal conjetura sea verdadera, pero que es suficiente un contraejemplo para garantizar que la conjetura es falsa.

Otro error típico encontrado en la prueba de diagnóstico, y parecido al anterior, consiste en la utilización de la siguiente supuesta propiedad:

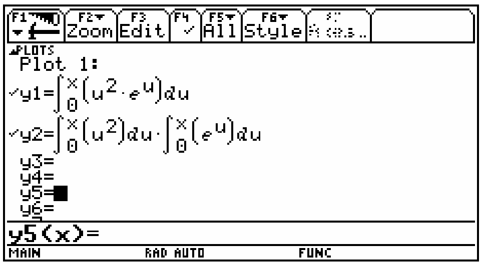
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right) \qquad (2)$$

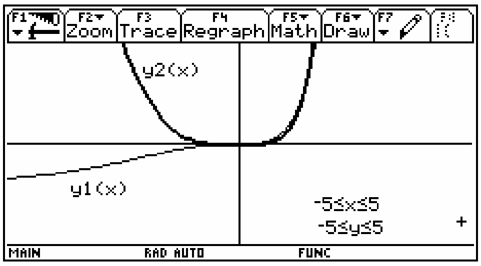
Algunos de los estudiantes escribieron, por ejemplo, que:

$$\int x^2 e^x dx = \frac{x^3}{3} e^x + C \;\; ; \;\; \int \frac{\cos x}{e^x} dx = \int e^{-x} \cos x \, dx = -e^{-x} sen\, x + C$$

Utilizamos la misma estrategia considerada en la "conjetura (1)" para verificar la falsedad de dicha conjetura.

Las siguientes figuras corresponden a las gráficas de $\int_0^x u^2 e^u du$ y $\left(\int_0^x u^2 du\right)\left(\int_0^x e^u du\right)$





El procedimiento anterior se extendió posteriormente, para corregir errores parecidos, que fueron cometidos por algunos estudiantes durante el desarrollo del tema de integrales múltiples. Pero es importante resaltar que tales errores ocurrieron en una proporción mucho menor que aquellos cometidos con integrales simples en la prueba de diagnóstico, un posible indicador de la importancia que tuvieron tanto la calculadora graficadora como las guías didácticas elaboradas, en la corrección de conceptos y creencias equivocadas.

Una de las preguntas de la guía didáctica relacionada con integrales múltiples es la siguiente:

1. Definir las siguientes funciones:

$$z1(x) = \int_0^x \int_0^y \frac{v\, dvdu}{u+5}; \;\; z2(x) = \frac{\int_0^x \int_0^y vdvdu}{\int_0^x \int_0^y (u+5)dvdu}$$

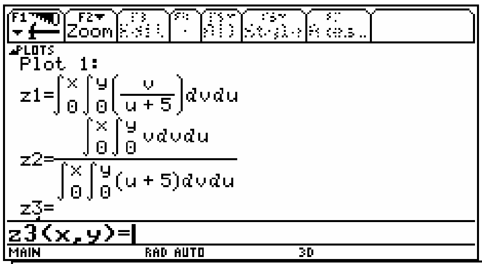
   Graficar las funciones z1(x) y z2(x), utilizando un dominio apropiado.
2. Comparar las gráficas obtenidas y concluir si z1(x)=z2(x).
3. Utilice los resultados obtenidos para verificar si es verdadera o falsa la conjetura:

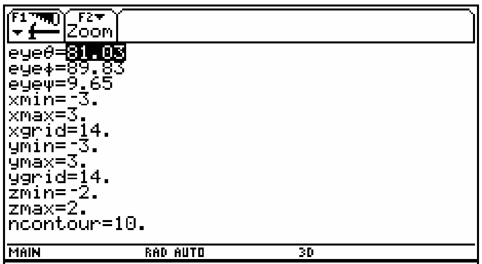
$$\int_0^x \int_0^y \frac{vdvdu}{u+5} = \frac{\int_0^x \int_0^y vdvdu}{\int_0^x \int_0^y (u+5)dvdu}$$

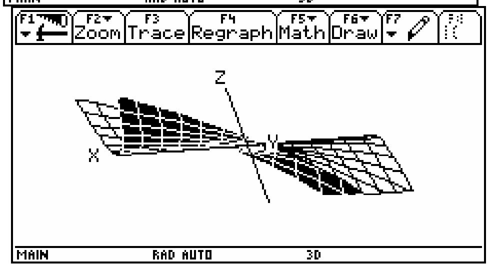
4. ¿Qué podemos decir en general con relación a la siguiente "propiedad"?

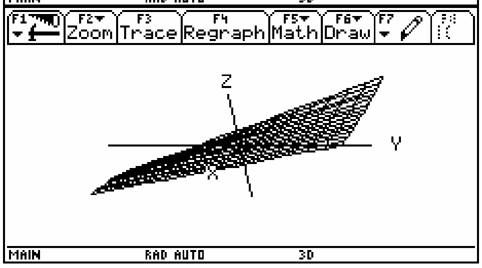
$$\iint_D \frac{f(x,y)\, dxdy}{g(x,y)} = \frac{\iint_D f(x,y)dxdy}{\iint_D g(x,y)dxdy}$$

Las figuras que siguen fueron obtenidas por uno de los estudiantes:





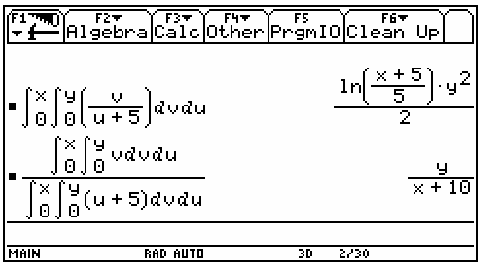


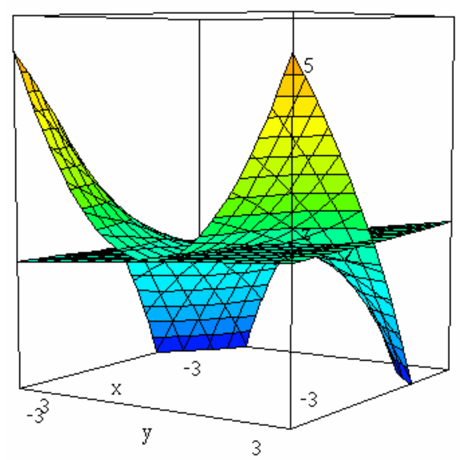


Gráfica de z1(x,y) Gráfica de z2(x,y)

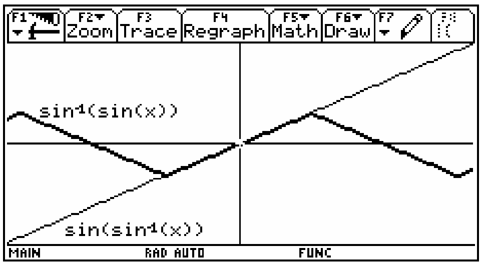
La dificultad en este tipo de verificación, es que la calculadora TI92 no permite graficar dos funciones de dos variables en un mismo sistema de coordenadas.

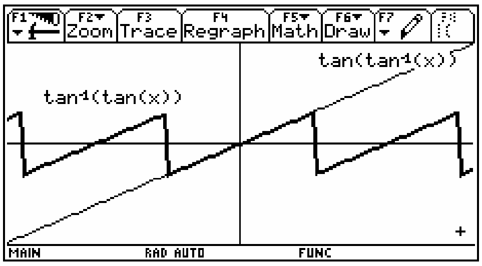
Utilizando el software DPGraph podemos apreciar mejor las graficas de las dos funciones en un mismo sistema de coordenadas. Pero para graficar las dos funciones tuvimos que calcular las integrales correspondientes para z1(x,y) y z2(x,y) con el sistema de cálculo simbólico de la calculadora TI92, debido a que el DPGraph no ha sido diseñado para hacer cálculos simbólicos.

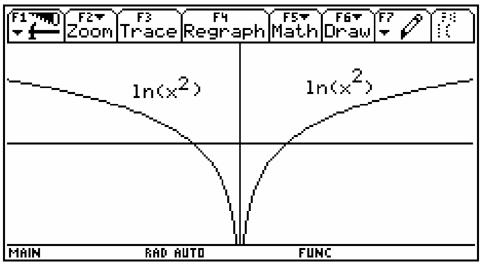


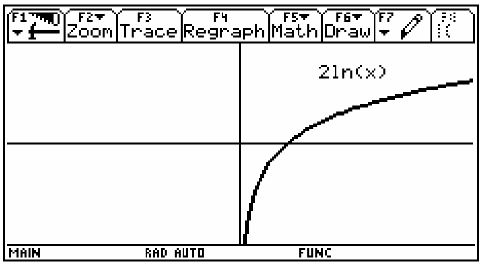


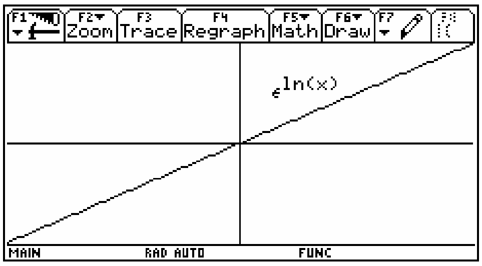
La misma estrategia ha sido aplicada para alertar a los estudiantes, cuando ellos utilizan supuestas “identidades algebraicas”, sin considerar los dominios de cada relación que aparece en tales identidades y para reflexionar sobre algunos errores en los algoritmos implementados en la calculadora. Por falta de espacio, presento algunos ejemplos únicamente en su forma gráfica.

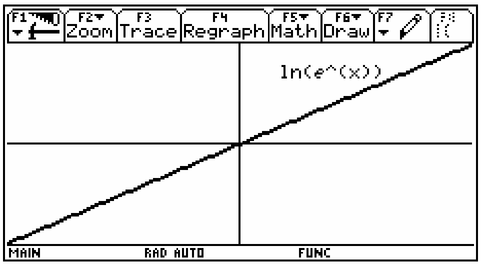












Las dos últimas figuras nos indican que los dominios de $e^{\ln(x)}$ y $\ln(e^{x})$, $x \in \Re$ son iguales, lo que es falso.

Referencias bibliográficas

De Faria, E. (2000). *La tecnología como herramienta de apoyo a la generación de conocimiento.* Revista Innovaciones Educativas, año VII, número 12, Editorial EUNED, San José, Costa Rica.

De Faria, E. (1999). *Aproximaciones mediante polinomios de Taylor*. Cuadernos Didácticos, Vol. 7, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Hirschhorn, D. y Thompson, D. (1996). *Technology and Reasoning in Algebra and Geometry*. The Mathematics Teacher, Vol. 89, No. 2.

Kutzler, B. (1999). *The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics*. http://www.kutzler.com

Moreno, L. (1999). *Mediación instrumental y tecnología informática en la educación matemática*. Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger. Grupo Editorial Iberoamérica.

Valsiner, J. (1999). *The encoding of distance: The concept of the zone of proximal development and its ingredients.* In Lloyd, P., Fernyhough, C. (eds.) Lev Vygotski: Critical Assesments. NY Routledge.

Una estrategia didáctica para el aprendizaje de funciones trigonométricas con el soporte de un software

Marta Bonacina; Gustavo Bortolato; Alejandra Haidar; Marisa Quiroga; Claudia Teti; Estela Sorribas
Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario (U.N.R.). Argentina
esorriba@fbioyf.unr.edu.ar

Resumen
Producir cambios en nuestras habituales formas de enseñar implica hoy un desafío y un compromiso diferente. Actualmente, la tríada *docente-alumno-saber* se encuentra *sacudida* por una tecnología que produce a ritmo acelerado productos de una incidencia muy importante en la enseñanza de la matemática. Con la intención de contribuir a la investigación de por qué, para qué y *cómo* producir tales cambios nos hemos propuesto y concretado como experiencia piloto, el desarrollo de un *´asistente didáctico-matemático´*, cuya presentación es objeto de este trabajo. Este asistente es esencialmente una propuesta interdisciplinaria que apunta a dos cuestiones:
- a que el estudiante, a más de conocer un tema, desarrolle criterios y actitudes que le permitan investigar y evaluar enunciados o procesos de carácter científico, *resolver problemas;*
- a que los docentes logren una mejor *comprensión* por parte de los alumnos del tema desarrollado en él (en este caso: *funciones trigonométricas*).

Pretende también aportar al uso de las nuevas tecnologías de información, comunicación y cálculo como herramienta de apoyo para la gestión pedagógica.

Objetivos

Se presenta aquí un *´asistente didáctico-matemático´* diseñado a los efectos de contribuir a la investigación del proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática, su optimización.
Los ejes directrices adoptados para la confección del mismo son :

- Adecuar el ritmo de enseñanza-aprendizaje al real proceso evolutivo del alumno.
- Atender al aprendizaje por descubrimiento (*programado*), por experimentación, simulación.
- Fomentar la autogestión del alumno, alentar el trabajo en equipo.
- Estimular al alumno para que use herramientas multimediales no sólo como auxiliar de cálculo, sino también como auxiliar didáctico.

Consideraciones generales

El análisis de las actuales prácticas educativas en las aulas universitarias muestra que la problemática de promover un *aprendizaje significativo*, es importante. Las dificultades observadas en la resolución de problemas sencillos muestra la existencia, para algunos alumnos, de un *conocimiento inerte* (Perkins, 1997).
Estimamos que la problemática del alumno en la Universidad demanda de acciones concretas que posibiliten un entorno formativo *efectivo***.** En la prosecución de este objetivo, en un primera etapa y a modo de experiencia piloto, nos propusimos el desarrollo de un tema puntual del programa (funciones trigonométricas).

Marco teórico y descripción de la propuesta

- En esta experiencia invertimos el proceso de estudio convencional; o sea buscamos pasar de la práctica a la teoría; que el alumno *intuya*, *descubra*, *construya* el concepto idea o propiedad que se le quiere enseñar. Pretendemos que el alumno, interactuando con su docente, sus compañeros y el ordenador, vaya alcanzando mayores niveles de aprendizaje autónomo .

Cabe aclarar que si bien perseguimos que el alumno adquiera el conocimiento por si mismo, no desconocemos el importante rol que en ello juega el docente; es más, sostenemos que las actividades deben desarrollarse *bajo la supervisión y guía del docente*, que el mismo tiene una competencia innegable en distintas instancias del proceso, tales como: confección y/o adecuación de la guía, detección de errores (conceptuales y/o del instrumento de trabajo), etc.

Las actividades a desarrollar las proponemos a través de una metodología que llamamos de *AULA TALLER* por entender la misma equiparable a la que los alumnos llevan a cabo en los laboratorios de las materias que cursan en paralelo (Química y Física) a la vez que para introducir ya, a través del nombre, la idea de una actividad *experimental*.

A este respecto, una cuestión esencial a decidir fue el software a utilizar como soporte. Optamos por el *DERIVE* por considerarlo *amigable* dada la facilidad de manejo de sus comandos, porque en poco tiempo el alumno se puede familiarizar con él, con las operaciones básicas que permite ejecutar (gráficas, operaciones algebraicas, funciones, resolución de ecuaciones, etc.), porque puede explorar y reconocer *solo* muchas de las opciones y posibilidades que el programa ofrece. Además, la forma de escritura y los símbolos que usa el programa son similares a los usados con lápiz y papel, lo cual facilita la comunicación con el ordenador.

Los objetivos propuestos se contemplan a través del planteo de distintas situaciones problemáticas de carácter interdisciplinario y principios básicos familiares al alumno para que, a partir de allí, este proceda a la discusión y análisis de las mismas, al planteo de conjeturas e hipótesis, a la elaboración de estrategias de verificación, etc; actividades todas estas que puedan ser desarrolladas tanto con *lápiz y papel* como con el auxilio de un software matemático.

Particularmente se propende a la *integración* de ambas formas de trabajo y el énfasis se pone en el desarrollo de instrumentos, criterios, modelos y reglas que los estudiantes puedan usar para ´investigar´, ´indagar´ ´evaluar´ ´convalidar´

Finalmente, las actividades planteadas consisten esencialmente en relacionar la *representación gráfica* de una función (la que irá apareciendo en la pantalla del monitor) con la *representación simbólica* de la misma. Esta relación se establecerá explorando la gráfica a través de una serie de preguntas *dirigidas*, las que permitirán inducir la *ley de la función*.

Al respecto, un trabajo fundamental acerca de las complejidades del concepto de función (Janvier, 1978), establece que el mismo se caracteriza por tener cuatro representaciones o codificaciones - *gráfica, numérica, analítica y verbal*- que condensan aspectos y propiedades no equiparables *didácticamente* entre sí, y que este hecho posibilita el establecer una equiparación entre la comprensión del concepto de función y el desarrollo de la capacidad de recodificar la información desde un representación funcional a otra.

- Hoy día existe ya un amplio acuerdo sobre la conveniencia de incorporar las nuevas tecnologías de la información y comunicación como medios didácticos sin caer en el error de usarlos permanentemente, sino estudiando en cada caso su utilidad. El uso de estos medios supone, por ejemplo, la posibilidad de superar la concepción estática de *gráfica de una función* y dotar a las mismas de *movimiento interactivo* facilitando así la creación de *conceptos imagen* (en el sentido de Tall, 1985) y situando las familias funcionales - *en lugar de la función aislada*- en el centro de gravedad del proceso de aprendizaje.

Un problema típico cuando se trata con una función (*f*) es, dado un elemento del dominio, *a*, hallar su imagen, *f(a)* . En el caso de contar con un ordenador, el recurso *operatorio* se puede sustituir por colocar el *trace* sobre la curva y, en el pie de la pantalla, leer *a* y *f(a).* Este tipo de cuestiones (imágenes de puntos del dominio) son de carácter *local*, se obtiene información sobre *un punto de la gráfica*. Estimamos que usar el ordenador únicamente para esto es desaprovechar la potencialidad del instrumento ya que el mismo permite obtener más y mejor información de la función que sólo el valor de la misma en un punto. El ordenador con su capacidad de construir gráfico de funciones permite realizar estudios de carácter *global* (comportamiento *tendencial* de una función, comportamiento *tendencial* en las operaciones gráficas). Así, aceptando parámetros en la ley de una función *´básica´ f* , obtenemos lo que llamamos *función prototipo* (y=A.*f*(Bx+C)) y podemos hacer el estudio global de la *familia de funciones* que esta última determina.
En este trabajo proponemos el estudio de la función prototipo **y = A *f* (Bx + C)** para la función básica, ***f*(x) = sen x** . Las actividades diseñadas al efecto se basan esencialmente en la *exploración* de los parámetros A , B y C. O sea, no es la variación de *x* la que interesa particularmente, sino la de los *parámetros o coeficientes* que definen la función en cada caso, el efecto de los mismos sobre la gráfica, la búsqueda de comportamientos tendenciales para la familia de funciones definida por esta función prototipo. También se explora el efecto de realizar distintas *operaciones gráficas* (suma o producto) entre ellas.
Este conjunto de acciones deberá favorecer la asimilación del concepto de *función* al de *curva completa asociada a una función prototipo.*
Los elementos que entran en juego en las actividades propuestas son:

- **Procedimientos de control**: son los *procedimientos* aplicados a la gráfica (o a la función) a los efectos de estudiarla. Estos consisten en mover la gráfica (variar el período y/o la amplitud, trasladarla) y encontrar el patrón de comportamiento para la expresión **y=A.sen(Bx+C)** o, viceversa, modificar los parámetros **A, B** y **C** de la función y encontrar los patrones de comportamiento de la gráfica.
- ***Variables*** : en esta instancia las *variables* son los *coeficientes* de la función prototipo,
  no las *x´s* ; es decir la expresión **y = A *f* (Bx+C)** no es pensada como ***y =Y(x)***,
  sino como $\boldsymbol{y \approx Y(A,B,C)}$.
- **Situación global**: la concepción de función adoptada es la de *estado*; es decir, la función no se percibe explícitamente como un *proceso*, sino como un *estado*, el cual viene dado por la *curva*. O sea, las representaciones funcionales a operar son la *analítica* y la *gráfica*.

Desarrollo del práctico

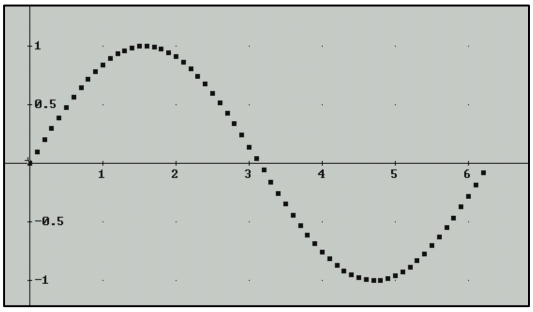
- El trabajo en el *AULA TALLER* está previsto en varias sesiones con un total de ocho horas. Los alumnos trabajarán, con la guía del docente, en grupos de dos o tres en cada computadora. Cada grupo será provisto del correspondiente *Protocolo de Trabajo* (la guía de actividades), un *diskette* (el asistente) y un ´minimanual´ de instrucciones para Derive .
- Una parte de la primera sesión se dedicará al manejo del software Derive a través de la lectura del minimanual y la ejecución de los ejercicios allí propuestos. Pretendemos que el alumno adquiera *soltura* en el manejo de los comandos y sentencias más elementales del software Cuando sea necesario una programación más compleja o el uso de funciones específicas, el alumno deberá acudir al archivo guardado en el diskette-asistente en el cual

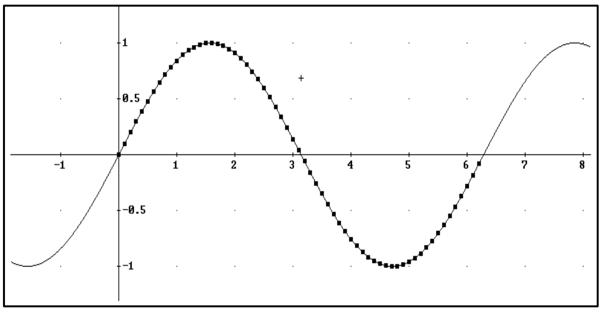
están grabadas estas sentencias específicas (la ocasión para ello está indicada, cada vez, en el Protocolo de Trabajo).
El objetivo es lograr que esta herramienta se transforme en un verdadero *auxiliar didáctico*.
La segunda parte se dedicará a analizar la influencia de los coeficientes **A, B** y **C** en la función **y = A *f* (Bx+C)** con "*f* " seno. Para realizar este práctico los alumnos deberán conocer la definición y gráfica de la función *f(x) = sen x*.

- La actividad se motivará en lo que convinimos en llamar "*La matemática del sonido*"; por ello en el protocolo de trabajo proponemos la siguiente introducción:

> *" La acción sobre una fuente sonora provoca ´variaciones de presión en el aire´. Estas variaciones determinan en el espacio circundante un movimiento en forma de onda.*
> *Cuando estas ondas llegan a nuestros oídos, las percibimos como sonido.*
> *Estas variaciones de presión pueden ser capturadas con un micrófono y visualizadas a través de un osciloscopio, lo que permite conocer la "forma" de las ondas sonoras; estudiar su comportamiento y particularidades."*

(*) La primera actividad planteada en el protocolo es la de reconocer la ley de una función cuya gráfica se conoce como resultado de registrar las *variaciones de presión en el tiempo debidas a un sonido puro*. Esta gráfica aparecerá en la pantalla mediante la ejecución de instrucciones y de sentencias proporcionadas en el diskette de trabajo. (# 25 - VECTOR ([x, f(x)], x, 0, 2π, 0.2)).
Destacamos aquí que la sentencia está planteada de forma tal que los alumnos no pueden reconocer en ella la ley de la función que queremos trabajar en esta instancia (***f* (x) = senx**)
El objetivo es que la reconozcan a partir de los datos e informaciones que le proporciona el *gráfico* (intersecciones con los ejes, forma de la onda, periodicidad, máximos y mínimos, imagen) y que, a partir de allí propongan una ley para la misma.
Una vez elaborada una hipótesis el alumno deberá corroborar o desechar la misma a través de graficar la función conjeturada y comparar con la función dato.
Finalmente se les pide identificar y marcar los elementos que caracterizan la onda obtenida: amplitud, período y frecuencia (conceptos estos previamente explicitados en la guía de trabajo)
 # 25 .- VECTOR ([x,f(x)], x, 0, 2π, 0.2) # 25 .- VECTOR ([x,f(x)], x, 0, 2π, 0.2) ; y = sen x





(**) Con el propósito de estudiar la influencia de los distintos coeficientes, proponemos luego y de manera similar a la anterior, el estudio de otras gráficas (*ondas*) correspondientes al registro de variaciones de presión de otros sonido puros. A continuación, una de tales actividades.

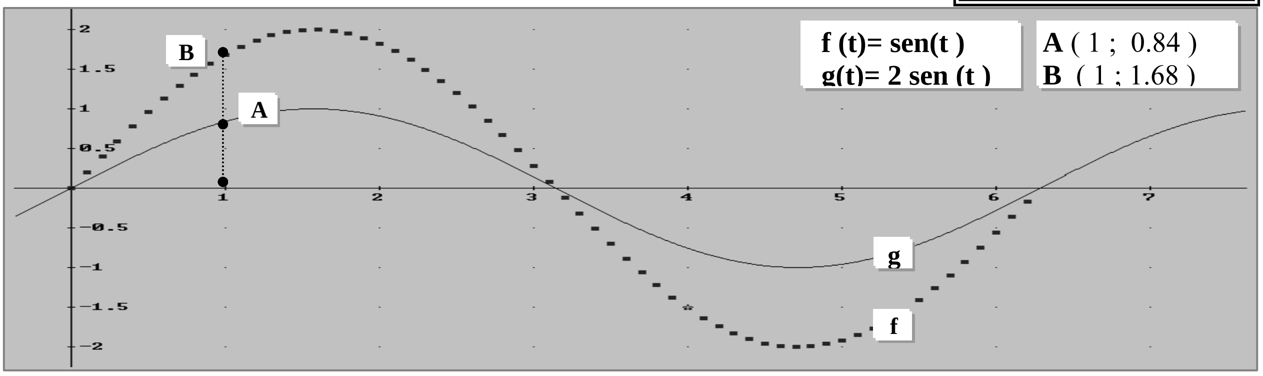
- Una vez obtenida **C** = graf ***g*** en la pantalla del monitor, para que el alumno induzca la ley de ***g*** planteamos el análisis de la curva a través de un estudio comparativo entre la *nueva onda* y *la onda senoidal básica* (*osb*), nombre que damos a la onda correspondiente a la función *seno* (*f*), *función básica* en este caso. Para esta actividad el alumno deberá completar una *tabla de valores* (que se proporciona en la guía), tarea que hará *leyendo del gráfico*. A partir de la *comparación* de valores deberá proponer una ley para ***g*** y verificar la misma graficándola en la misma pantalla que C.
- Finalmente deberá discutir y concluir acerca del efecto del coeficiente **A** en **y =A sen x** .

GUÍA - ACTIVIDAD Nº 2: Búsqueda de la ley de ***g*** tal que graf *g* = C.

- *Leyendo del gráfico*: colocando el *trace* en los puntos de las curvas C_1 y C_2 cuyas abscisas se indican a continuación, obtener sus ordenadas trabajando con dos decimales. Luego, inducir una ley para *" g"*.
- *Observación:* tener en cuenta que este es un trabajo *experimental* donde las mediciones realizadas pueden presentar errores de distinta naturaleza. Luego, lo que buscamos es la función que *mejor ajuste* los valores hallados, aceptamos un margen de error.

t	1	2	3	4	5	6
g (t)	1.68					
f (t)	0.84					
2 *f* (t)	1.68					

Hipótesis:
***g*(*t*) =** *(2 sen t)*



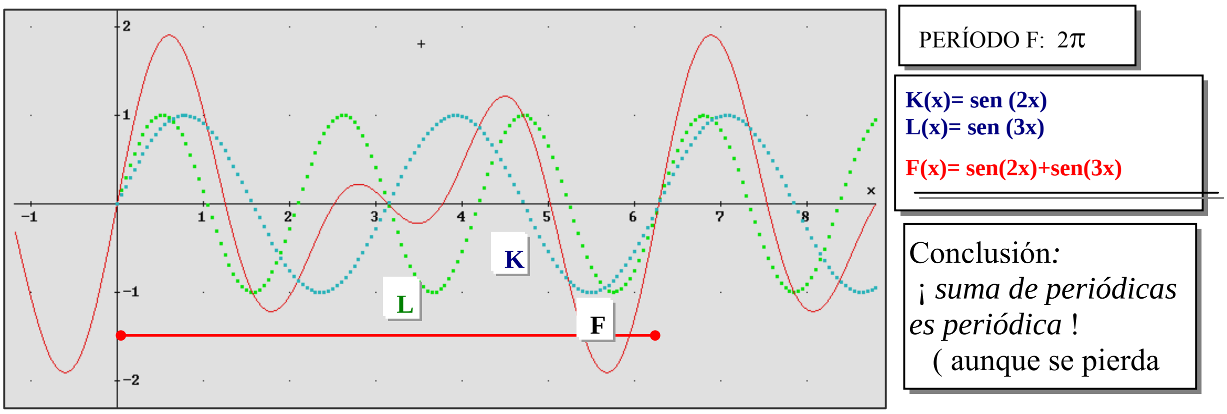
(*) La actividad incluye un trabajo *interdisciplinario*: relación de los elementos que caracterizan el sonido con los que caracterizan la onda senoidal.
Los elementos que caracterizan a la onda senoidal (amplitud, período, frecuencia) tienen una correspondencia directa con ciertas características perceptibles del sonido, como **altura** e **intensidad;** definiciones, que nuevamente, se explicitan en la práctica:
Les informamos que *experimentalmente* se observa que :

mayor **frecuencia** de onda se corresponde con mayor **altura** del sonido**.**

mayor **amplitud** de onda se corresponde con mayor **intensidad** del sonido**.**

y proponemos ejercicios para que relacionen estos distintos conceptos físicos con los matemáticos correspondientes. Se busca que los alumnos investiguen acerca de la diferencia entre los sonidos según las ondas, que relacionen los cambios de frecuencia y amplitud con los de altura e intensidad de los distintos sonidos.

(*) La última actividad tiene como finalidad analizar, acudiendo a la gráfica, el resultado de la suma de funciones senoidales correspondientes a sonidos de igual o distinta altura e intensidad. El objetivo es que descubra en qué casos no se modifican las características esenciales de la curva y en qué casos sí; de qué forma. Se termina con la siguiente actividad.



Resultados esperados

Si bien esta propuesta no ha sido todavía desarrollado en el aula, la atracción y curiosidad que los alumnos evidencian acerca de la potencialidad de los programas matemáticos es algo que, convenientemente explotado, se estima favorecerá cuestiones tales como:

» el aprendizaje significativo;
» el trabajo autónomo;
» la familiarización con la resolución de problemas, sus dificultades;
» la discusión, elaboración y evaluación de estrategias de trabajo;
» la reflexión sobre el proceso, su resultado;
» la formalización y/o generalización de resultados;
» la transferencia de resultados, métodos e ideas a otros campos;
» el conocer las posibilidades y limitaciones de un software matemático.

Referencias bibliográficas

Perkns, D. (1997). *La escuela inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente.* Barcelona, España: Gedisa

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations, studies an teaching teaching experiments.* Ph. D: Thesis . Iniversitat de Québec.

Tall, D. (1985) - Understanding The Calculus . *Mathematics Teaching* nº 112, 44-53

Guzmán, Miguel de. (1997). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático*. Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Cordero F.; Solís M. (1995). *La gráfica de las funciones como una argumentación de cálculo.* México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Kilpatrick, J.; Gomez, P.; Rico, L. (1995). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Schoenfeld, A. (1994). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. Buenos Aires, Argentina: Edipubli S.A.

Elosúa, M.R.; García E. (1993). *Estrategias para enseñar y aprender a pensar* . Madrid, España: Narcea Ediciones.

Azinián, H. (1997). *Resolución de problemas MATEMÁTICOS*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Explorando con computadora algunos temas de álgebra lineal

María Inés Ciancio, Elisa Silvia Oliva
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Univ. Nacional de San Juan, Argentina
mciancio@iinfo.unsj.edu.ar lsoliva@sinectis.com.ar

Resumen
Se describe una experiencia didáctica para la asignatura Algebra Lineal, en las carreras Licenciatura en Astronomía y en Geofísica, que fue abordada desde dos ópticas diferentes:

- En la primera etapa se trabajó en los temas: matrices, sistemas de ecuaciones lineales y obtención de bases ortonormalizadas para espacios vectoriales, con guías de ejercicios en la cual el alumno trabaja interactuando con el software elegido.
- En la segunda etapa se abordó en pequeños grupos de trabajo el tema: autovalores, autovectores y sus aplicaciones, con el apoyo del software seleccionado, el cual permitió una interpretación gráfica de los resultados algebraicos obtenidos.

La experiencia didáctica generó situaciones de confrontación de conceptos entre los alumnos, permitió una reconstrucción de conocimientos a partir de los contenidos previos por Ellos ya internalizados. Los objetivos propuestos se lograron siguiendo una adecuada selección de contenidos, un accesible tratamiento informático y metodología participativa.

Introducción

Cualquiera sea la actividad que el ser humano realice, necesita hoy en día conocer como operar una de las herramientas más poderosas con que el hombre actualmente cuenta para el desarrollo de sus tareas: la computadora. La "presencia informática", se manifiesta constantemente en la gestión y administración de empresas, para el tratamiento de la información y control de procesos en general. Por todo esto, el sistema educativo no puede mantenerse al margen si pretende una enseñanza de calidad, precisa incorporar el conocimiento y manejo de la informática como uno de sus objetivos.
La aparición de sistemas informáticos de calculo simbólico cuyo manejo no requiere costosos aprendizajes, está estimulando el uso didáctico de la computadora en el tratamiento de muchos de los temas habituales en los cursos de Algebra Lineal.
Implicados en este proceso, se ha elaborado un programa de prácticas con el uso de la computadora, basado en los siguientes objetivos:

-Familiarizar al alumno con una nueva herramienta de trabajo que se considera útil y motivadora en el estudio del Algebra Lineal.
-Adaptar el material informático a fin de que su uso sea accesible a los alumnos.
-Generar , a partir de la propuesta anterior, un espacio de superación de la tradicional dicotomía entre la teoría y la práctica, logrando así una visión integrada de los contenidos.
-Mostrar que, los resultados dados por la computadora, requieren por parte del alumno de una adecuada interpretación, fundada en el dominio de los contenidos teóricos de la asignatura.

Teniendo en cuenta la población de alumnos : estudiantes de primer año de Lic. en Astronomía y de la Lic. en Geofísica, que aun no han cursado ninguna asignatura del área computacional y que no todos conocen el manejo de una PC, se eligió un software de bajo costo de aprendizaje, muy potente en su capacidad algebraica y que se adecua perfectamente a nuestro entorno de trabajo

Nuestra experiencia

La actividad se desarrolló en 2 etapas:

- En la primer etapa, el trabajo se llevó a cabo por medio de una guía de ejercicios en las que se relacionaron: Matrices y Determinantes, Sistemas de Ecuaciones Lineales, Determinación de bases para espacios vectoriales y de Bases Ortonormalizadas, Transformaciones Lineales. Los alumnos, están organizados para resolver la guía propuesta de manera tal que cada dos de ellos, trabajan con una PC. La guía, está preparada de manera tal que incluyen ejercicios a resolver. El alumno debe presentar un informe de la solución de los ejercicios.

-En la segunda etapa, la tarea consistió en una guía de investigación sobre aplicaciones de Autovalores y Autovectores. Se trabajó en forma grupal (equipos integrados por no más de 5 alumnos), con una guía de investigación teórico-práctica. En esta guía se incorporó el uso del paquete de gráficos de este software.

-Previo a las dos etapas anteriores se presentó a los alumnos la gramática del software seleccionado y las posibilidades que el mismo les brinda (resolver operaciones complejas, incluir comentarios, combinar operaciones con gráficos, etc.).El software utilizado es MAPLE V, el cual tiene características que le permiten adaptarse a una gran cantidad de computadoras estando disponible para la mayoría de los sistemas operativos existentes.

Para los temas abordados de Algebra Lineal, con este software encontramos dos útiles librerías: ***Linalg*** y ***Plots***, las que :

- Permitieron a los alumnos agilizar su trabajo, planteando lo que ya saben resolver en forma manual; familiarizándose con una nueva herramienta de trabajo, útil y motivadora , en el estudio del álgebra.
- Estas sesiones de informática consolidaron los conceptos ya aprehendidos por ellos anteriormente.
- Esta metodología de trabajo fue muy bien aceptada por los alumnos , a pesar de las diferencias de ritmo manifestadas .En las sesiones, la producción de los alumnos fue desigual, los que disponen en casa de computadora, mostraron ventajas en un primer contacto con la PC , y además por haber podido dedicar más tiempo a las prácticas propuestas.
- En general, el grupo culminó su tarea, manejando adecuadamente el programa en su aspecto algebraico.

Objetivos Generales propuestos para cada una de las guías

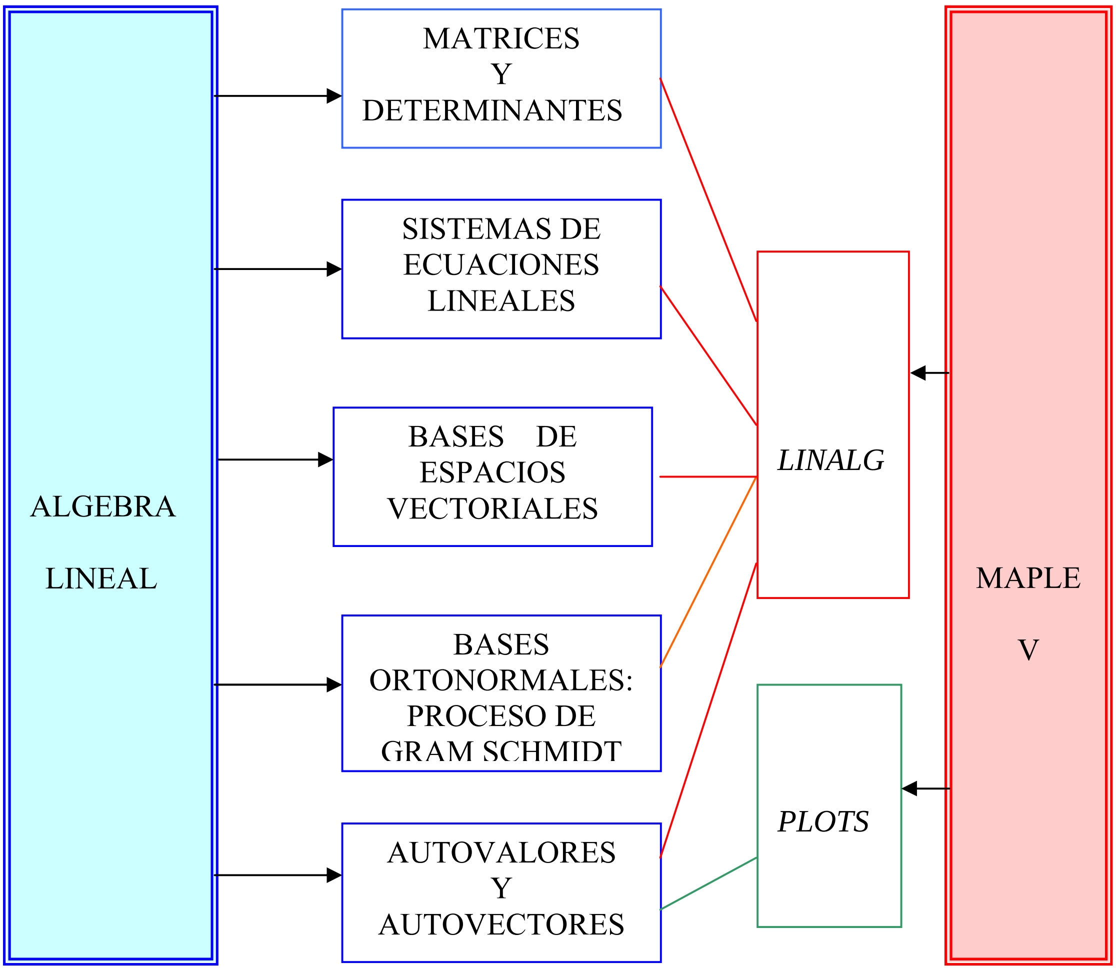
Al finalizar la primer etapa , se espera que el alumno sea capaz de:

- Manejar con destreza las operaciones y propiedades de matrices y determinantes, combinando con el programa seleccionado.
- Transferir correctamente los contenidos teóricos de matrices y determinantes a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Manejar con destreza los conceptos de base de un espacio vectorial, combinación lineal, ortonormalidad y sus aplicaciones en transformaciones lineales.
- Relacionar hábilmente el lenguaje algebraico con el lenguaje computacional.

- Discutir los resultados obtenidos con el uso de MAPLE V, justificando sus respuestas de acuerdo a su formación teórica.
- Reconocer las ventajas de tipo operacional que tiene el uso del programa.
- Aceptar situaciones de desafío personal.
- Adaptarse a una nueva metodología de trabajo.

Al finalizar la segunda etapa, se espera que el alumno sea capaz de:
- Establecer relaciones entre los contenidos teóricos de autovalores y autovectores, con la aplicación a resolución de cónicas y cuádricas con rotación.
- Utilizar adecuadamente material bibliográfico y software.
- Seleccionar contenidos, de acuerdo al tema.
- Establecer relaciones con otras asignaturas.
- Trabajar holgadamente en un ambiente de investigación.

Esquema gráfico de la secuencia seguida en las actividades desarrolladas :



Modelo de las guías propuestas a los alumnos

Práctica Nº 1 de Laboratorio.

1) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule : Traz(A+B), Traz(A . B), Traz(B . A)

2) Sean A y B dos matrices de elementos genéricos de orden 2x2. Verifique si:
$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2.A.B$

3) Dada la siguiente matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular el determinante, aplicando la regla de Laplace.
¿Es la matriz inversible? En caso de serlo determine su inversa.

4) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Verifique si : $A^T = A^{-1}$, $A^2 = A$, $A^2 = 0$.

5) Dar, en caso de ser posible, 3 soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ 5x + 4y + 2z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y + 2z = 18 \\ 5x - 15y + 8z = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a - 6b + 15c = 2 \\ a - 2b + 5c = 2 \end{cases}$$

6) Analice si $\vec{u}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$

$$\vec{u} = (-1,2,0), \ \vec{r} = (-2,1,6), \ \vec{s} = (-3,4,0)$$

$$\vec{u} = 2x^2 - 3, \ \vec{r} = 3 - 2x + x^2, \ \vec{s} = 4x^2 - 6$$

7) Dados los vectores $\vec{r} = (2,-1,9,87)$ y $\vec{s} = (0,3,54,-21)$. Trabajando con el producto interior euclídeo, determine sus normas e indique si son ortogonales.

8) Ortonormalice las bases de R^3, trabajando con el producto interior euclideo:
{ (4,-3,0),(1,2,0),(0,0,4) }   y   {(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)}

9) Determine una base para el subespacio vectorial generado por los vectores (1,-1,0,1), (5,-2,3,-1) y (6,-3,3,0). Exprese el vector (1,2,3,-5) con respecto a dicha base.

10) Dada la transformación lineal $T : R^3 \rightarrow R^2$/ T((x,y,z))=(x+2y+3z , 6x-z)
Dé una base del Núcleo de la transformación lineal
Dé una base de la Imagen de la transformación lineal

Práctica Nº 2 de Laboratorio.

TEMAS: # Aplicaciones de AUTOVALORES y AUTOVECTORES a:
* Secciones Cónicas y Superficies Cuádricas.

- MATERIAL BIBLIOGRÁFICO(consultar la citada en las guías teórico-prácticas)

- METODOLOGIA

Este proyecto consta de: una parte teórica y otra práctica. El trabajo consiste en el estudio del tema planteado al grupo y una vez completado debe ser presentado mediante un informe.

- ACTIVIDADES: Responda el siguiente cuestionario:

1- ¿Qué expresión tiene una " Ecuación Cuadrática "? (Para secciones cónicas y superficies cuádricas).
2- ¿Qué características tiene la " Forma Cuadrática " asociada a una ecuación cuadrática ?
3- Interprete Geométricamente dicha característica.
4- ¿Cómo transforma la información de la gráfica de una sección cónica no degenerada , que no se encuentra en la posición standard , a un sistema X'Y' con relación al cual la cónica está en la posición standard ?
5- Para el caso de la superficie cuádrica , escriba sólo las fórmulas empleadas para tal situación.
6- Elabore un resumen de los pasos seguidos para diagonalizar la Forma Cuadrática dada.
7- Enuncie el Teorema de los Ejes Principales (ó Teorema Espectral). Indique su aplicabilidad.
8- En la ecuación de la cuádrica, que corresponde a su grupo:
I- Encuentre una base ortonormal **B**, tal que la matriz de la Forma Cuadrática referida a B sea una matriz diagonal.
II- Compare la ecuación obtenida con la ecuación general de 2º grado en 3 variables
III- Trace el gráfico de la cuádrica referida a los nuevos ejes determinados por la base **B**

Exposición y discusión de resultados.

Finalizada la tarea en el gabinete, y una vez entregadas a la cátedra las guías impresas con la resolución de los ejercicios, se realizó una **"encuesta**" a los alumnos. En la misma se analizaron aspectos generales de la experiencia didáctica donde ellos fueron los principales protagonistas. Los ítems analizados fueron:

- Dificultades en el aprendizaje del software MAPLE V.
- Análisis de la guía práctica propuesta, en cuanto a su relación con los contenidos teóricos previos, y la presentación de los ejercicios.
- Evaluación de las actividades cumplidas por la cátedra en las sesiones de gabinete.
- Reflexión sobre la elección de su equipo de trabajo.

Analizadas estadísticamente las encuestas, se obtuvo que:

- ➢ El 86% de los alumnos opina que el aprendizaje de los comandos le resultó accesible .
- ➢ El total de los alumnos juzga que la guía de comandos es útil y sirve de apoyo para no tener que estar consultando la ayuda de Maple V.
- ➢ El 100% de los alumnos estuvo de acuerdo en que la experiencia está estrechamente relacionada con los contenidos teórico - prácticos , vistos previamente.
- ➢ Sólo dos grupos, manifiestan que en la primer guía, su grupo de trabajo no fue adecuado, pues ambos integrantes querían trabajar simultáneamente en la PC.

Conclusiones generales.

Nuestra experiencia docente indica que la introducción de este tipo de prácticas en el aula da resultados positivos. Los motivos principales de esta opinión, están basados en :

- ➢ La PC ofrece resultados e imágenes instantáneas que facilitan la comprensión y por otra parte mantiene la atención de los estudiantes en la actividad que están desarrollando. Además resulta gratificante cuando la adecuada manipulación de los conceptos y procedimientos les conduce a la solución correcta.
- ➢ Estas actividades incrementan el aspecto lúdico en el aprendizaje del Algebra Lineal , lo cual conduce a un aumento en la motivación y a fin de cuentas, a una mejora en la calidad del proceso educativo.

Referencias bibliográficas

Anton, H. (1995). *Introducción al Álgebra Lineal*. México : Editorial Limusa.

Noble, B., Daniel, J.(1989). *Álgebra Lineal Aplicada*- México: Editorial Prentice Hall.

Kolman, B.(1988). *Álgebra Lineal*. EE.UU: Editorial Addison Wesley Iberoamericana.

Fraleigh, J.; Beauregard, R. (1987). *Álgebra Lineal*. EE.UU: Editorial Addison Wesley Iberoamericana.

Grossman, S (1999). *Álgebra Lineal*. México: Editorial Mc.Graw Hill

Rincón, F, Garcia, A y Martinez, A (1995). *Cálculo Científico con Maple*.-España: Editorial Rama

Carrillo,A., Llamas, I. (1995). *Maple V. Aplicaciones Matemáticas para PC*. España: Editorial Rama

Las implicancias del método “SPI” y la tecnología informática en la enseñanza universitaria

Jorge J. L. Ferrante, Alejandro E. Lois, Liliana M. Milevicich
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco. Argentina
calculo@frgp.utn.edu.ar

Resumen
Inspirados en la teoría constructivista, desarrollamos una aplicación del método SPI (Sistema Personalizado de Instrucción) en el que el estudiante es protagonista del proceso de su propio aprendizaje y con el propósito, además, de lograr generar nuevas concepciones en el profesor que sean más aptas para un nuevo tipo de proceso didáctico que se espera que él diseñe y controle. Se eliminaron los exámenes parciales y finales tal como tradicionalmente se los conoce, siendo reemplazados por evaluaciones tomadas a requerimiento del alumno cuando él considera que aprendió una de las unidades temáticas en que se divide el programa de cada asignatura. Una vez completadas con éxito las evaluaciones de todas las unidades, en forma secuencial, se acredita la aprobación final, con calificación emergente del esfuerzo complementario que realice el alumno sobre temas propuestos por la cátedra.
Los análisis estadísticos realizados con el propósito de comparar los resultados obtenidos, luego de varios años de aplicación de la misma, nos permiten afirmar que el número de alumnos regularizados con metodología SPI es superior al número de alumnos regularizados con metodología tradicional.

Introducción

Durante muchos años los métodos de enseñanza de la matemática y los diseños curriculares se han basado en las experiencias de la clase y en las concepciones o creencias de los educadores sobre la misma.
Actualmente, la Educación Matemática está surgiendo como una nueva disciplina científica derivada de la confluencia de la Psicología, la Pedagogía, la Antropología, la Filosofía, la propia Matemática, la Etnomatemática y la Semiótica entre otras, pues muchos de los problemas que adopta como su objeto de estudio tienen vínculos con los objetos de estudio de estas ciencias. No están claros aún los problemas que la Educación Matemática debe enfrentar y en general no existen Programas de Investigación Científica que permitan organizar las investigaciones. Más aún, coexisten actualmente varias escuelas que fundamentan sus investigaciones, resultados experimentales y disquisiciones teóricas en sus propios presupuestos teóricos.
La Psicología es la ciencia que realiza los mayores aportes en materia investigativa y en cuanto a marcos referenciales teóricos. Esto se debe a que, por una parte, la matemática es una ciencia altamente estructurada lo cual permite develar su organización interna y los modos de actuación de los que la desarrollan más que en ninguna otra, además que es una ciencia básica y que juega un rol cada vez más importante en la vida humana por lo que no se puede prescindir de ella.
Por otra parte, siendo la matemática una ciencia lógica y estructurada parece contradictorio que muchas, y cada vez más, personas presenten dificultades en su aprendizaje. La explicación del problema está en la deficiencia de la transmisión. Esto justifica que muchos psicólogos fundamentales (es el caso de Paiget, Bruner, Glaser) hayan incursionado en la Matemática para aplicar sus teorías y han tenido sus propios desarrollos teóricos.

Justificación

Brousseau (1986) busca crear, consolidar y relacionar un conjunto de conceptos tales que su utilización permita el estudio de los fenómenos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática: "una teoría de la educación matemática". Para lograrlo utiliza una aproximación sistémica: considera la comunicación del conocimiento matemático como un proceso dentro de un sistema, el cual está compuesto por una variedad de sub-sistemas que interactúan entre ellos. Dada la complejidad de las interacciones que se dan dentro de ese sistema, Brousseau propone la construcción de un modelo de ese sistema. Este modelo o conjunto de conceptos organizados debe permitir la descripción de aquellos tipos de relaciones humanas pertinentes en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática y también de be permitir considerar todos los fenómenos pertinentes y debe ser consistente.

Si analizamos diversos fenómenos de la educación matemática podemos observar que el propio saber matemático y su comunicación constituyen dos problemas fundamentales. Siguiendo los principios de la teoría de Brousseau, él plantea los siguientes interrogantes: ¿Cómo se comunica el saber matemático?, ¿Cuáles son las características de esta comunicación?, ¿Cómo influyen estas características en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?.

Su respuesta a estos interrogantes es que la creación del conocimiento se da, en general, dentro de condiciones y contextos particulares y por medio de un proceso "científico" en el que se dan conjeturas, se hacen hipótesis, se prueban ideas, se cometen errores y se falsifican teorías. Sin embargo, una vez que el matemático ha descubierto una teoría o resultado y ha comprobado, para sí mismo, la validez de los mismos, él debe comunicar sus descubrimientos a la comunidad científica. No obstante, la comunidad científica no requiere que él describa el proceso por medio del cual él hizo el descubrimiento. Lo que la comunidad científica le exige es una forma de presentación en la cual sea clara la validez y la importancia del resultado.

Esta forma de presentación (en general, axiomática) des-contextualiza el conocimiento matemático: deja de tener importancia la información acerca de las circunstancias, los problemas y los procesos que dieron lugar al conocimiento. La comunidad científica transforma y amplia este conocimiento, el cual es recibido por el educador. Éste debe entonces construir un nuevo contexto para el conocimiento recibido: crear situaciones didácticas que simulen una micro sociedad científica (los alumnos y el aula). El estudiante vuelve entonces a crear el conocimiento dentro de un proceso de "construcción social" tal como lo propone Brousseau.

Una vez que el alumno ha construido por sí mismo su propio conocimiento, él debe eliminar, de nuevo, el contexto dentro del cual lo construyó, de tal forma que este conocimiento pueda ser utilizado y se aproxime al conocimiento cultural de la comunidad matemática.

Este proceso puede ser llevado a cabo a partir de un modelo basado en cuatro conceptos básicos: ***La situación didáctica- la situación adidáctica- el contrato didáctico- la transposición didáctica***

Y además teniendo en cuenta, fundamentalmente, que:

- El conocimiento se produce dentro de un espacio de asociaciones entre "buenas" preguntas y "buenas" respuestas.
- El alumno construye su conocimiento a partir de sus propias experiencias y de sus interacciones con el entorno (en estas interacciones se generan contradicciones, dificultades, respuestas válidas e inválidas).

- Sólo se reconoce que ha adquirido un conocimiento cuando el alumno es capaz de resolver problemas nuevos.

El profesor debe proponer al alumno una situación problemática que incite al alumno a interactuar con el entorno. Mientras el profesor no interviene, esta es una situación adidáctica. Sin embargo, su participación será necesaria para que el alumno construya su conocimiento, sugiriendo formas o métodos para producir la respuesta: respondiendo a partir de conocimientos previos, recordando las relaciones con conocimientos previos, etc. Esta interacción entre el profesor y el alumno, acerca de lo que el profesor espera y lo que el alumno debe lograr y logra, construye el contrato didáctico, el cual se construye a partir de un conjunto de reglas y estrategias de la situación didáctica. Este contrato didáctico implica responsabilidades mutuas entre el profesor y el alumno. La responsabilidad del profesor es la de resolver los conflictos que se generan en el contrato didáctico, con motivo de las dificultades en la búsqueda de la respuesta por parte del estudiante. Para resolver estos conflictos, el profesor debe transformar el conocimiento cultural a un conocimiento a apropiado al contexto de la interacción. Este proceso de adaptación del conocimiento es el que se denomina transposición didáctica.

Sin embargo debemos tener en cuenta que la transposición didáctica tiene varias restricciones. Por un lado se debe buscar una compatibilidad entre los sistemas educativos y la sociedad, existen restricciones ideológicas y socioculturales que influyen sobre los educadores, alumnos y investigadores. Por otra parte, la transposición didáctica debe tener en cuenta los conocimientos previos "prerrequeridos", con el riesgo de que estos conocimientos se vuelvan obstáculos epistemológicos (en contra del aprendizaje). Por último, se deberá tomar en consideración los avances tecnológicos y las nuevas herramientas, cada vez más sofisticadas que surgen día tras día.

Muchos investigadores han estudiado las implicancias del auge tecnológico (calculadoras, microcomputadoras y software: planillas de cálculo, programas de aplicación con algoritmos y librerías de funciones matemáticas). Es oportuno analizar si el software actual, desde la perspectiva de la educación matemática, es una herramienta adecuada para los procesos de enseñanza aprendizaje o bien si satisface las necesidades de un profesor de matemática.

Mejía Velasco, H (1996) intenta mostrar cuales son las posibilidades de diseño y elaboración de paquetes educativos para computadoras en México y plantea la necesidad de juntar grupos de investigación y desarrollo que permitan disponer de software donde se reflejen sus propias estrategias didácticas.

El proceso de transposición didáctica utilizando un software como herramienta requiere de la elaboración de experiencias didácticas que propicien la solución de problemas de matemática por medio del paradigma computacional, lo cual implica la incorporación de actividades que puedan favorecer (en vez de obstaculizar) el desempeño del profesor y del alumno.

Tal como lo plantea Mejía Velasco, el software es un medio que utilizado con fines didácticos, puede ayudar a un acercamiento con el cual el estudiante puede construir conceptos matemáticos pero requiere un mayor esfuerzo por parte del profesor para orientar el trabajo con dicho recurso pues debe poner atención en que la forma de comunicación con el usuario no cree perturbaciones, en que la amplitud de posibilidades que por lo general ofrece el software no disperse los objetivos que se propone el profesor y que no se generen errores de tipo conceptual debido al carácter discreto del sistema computacional.

El Método SPI

Se propone aplicar el método SPI (Sistema Personalizado de Instrucción) en el que el estudiante sea protagonista, donde él mismo tenga un rol más activo en el proceso de su propio aprendizaje. Por otra parte se deberá lograr generar nuevas concepciones en el profesor que sean más aptas para un nuevo tipo de proceso didáctico que se espera que él diseñe y controle.

La aplicación del método SPI se adapta a la enseñanza de las más diversas disciplinas, fundamentalmente las denominadas Ciencias Básicas. En esta etapa es donde detectamos, en experiencias anteriores, que el alumno posee mayores dificultades en concentrarse y seguir el proceso de logro del conocimiento. El método SPI fue aplicado por un grupo de investigadores, en una primera durante el período 1995 – 1998 (Proyecto de Investigación: Cálculo de la Universidad Tecnológica Nacional).

En el ciclo lectivo 1996 comenzó a utilizarse la metodología SPI en la UTN, en las Regionales Pacheco y Rosario en la asignatura Análisis Matemático I.

En 1998 se dictaron 11 cursos de Análisis Matemático I, 2 cursos de Análisis Matemático II y 1 curso de Análisis Matemático III con esta metodología en la Regional G. Pacheco.

En el mismo año se realizó la transferencia de la metodología a las Regionales Mendoza, Chubut y Bahía Blanca. En la Regional Chubut se dictó un Seminario de capacitación a los docentes del área de Ciencias Básicas en noviembre de 1998.

A partir del ciclo lectivo 2000, comenzó la transferencia del método SPI a las asignaturas Álgebra y Probabilidad y Estadística.

Cabe preguntarse entonces:

¿En que consiste el método SPI?

¿Cómo se implementa?

¿Cuáles son sus implicancias?

Se ha dividido cada una de estas asignaturas mencionadas en unidades integrando en las mismas las necesidades endógenas y las provenientes de otras ramas de la matemática.

Se utiliza para cada una de ellas una bibliografía básica previamente seleccionada, la cual consiste en uno o más textos de uso obligatorio, y una bibliografía opcional, la cual es necesaria para el estudio de temas adicionales.

Cada alumno dispone de una Guía de Estudio y Guía de Trabajos Prácticos, incluyendo en esta última un gran número de problemas para desarrollar convenientemente en el laboratorio de computación. Cada alumno dispone de un cronograma de clases de consulta adicionales pautadas con los docentes al inicio del ciclo lectivo. Cada una de estas clases abarca una unidad temática y la misma se repite varias veces a lo largo del año, pudiéndose incorporar nuevas clases en caso de que los alumnos así lo requieran.

El alumno decide cuando considera que ha completado una unidad y desea ser evaluado.

Los fracasos no son penalizados, el alumno puede ser evaluado en la misma unidad tantas veces como sea necesario.

Cada instancia de evaluación debe servir de retroalimentación.

El alumno que habiendo alcanzado los objetivos básicos del curso, desee preparar un tema adicional (los denominados "COMPLEMENTOS") deberá solicitarlo. Cada "*complemento*" requiere del uso, por parte del alumno, de bibliografía adicional a efectos de poder resolver problemas específicos correspondientes a su especialidad donde deba relacionar los conocimientos y habilidades adquiridos en Álgebra y Análisis Matemático; o bien Probabilidad y Estadística, Álgebra y Análisis Matemático.

El alumno obtiene su calificación final una vez alcanzados todos los objetivos básicos de la asignatura y ninguno, algunos o muchos de los objetivos complementarios.

Resultados

Los análisis estadísticos realizados con el propósito de comparar los resultados obtenidos, luego de varios años de aplicación de la misma, nos permiten afirmar que el número de alumnos regularizados con metodología SPI es superior al número de alumnos regularizados con metodología tradicional. En el ciclo lectivo 2001 la diferencia entre estos porcentajes es muy significativa, no sólo por los valores absolutos de los mismos, sino también porque la variable significativa ha sido la metodología utilizada. Además, el hecho de que los alumnos que cursan con metodología SPI trabajen con mayor libertad facilita la formación de grupos espontáneos, requiriendo de esta manera menor asistencia de los docentes. Este es el motivo fundamental por el cual cuando la proporción docente-alumno disminuye, los alumnos no resultan afectados en cuanto a la asistencia por parte de sus docentes.

Las cantidades de alumnos regularizados (con trabajos prácticos aprobados) por cada división se pueden observar en la Tabla 1, recordando que en el caso de los alumnos de la metodología tradicional deben rendir aun un examen final para aprobar la materia y que, en cambio, los alumnos de la metodología SPI, no sólo están regularizados, sino que ya tienen la materia aprobada con nota mínima, al menos.

DIVISIÓN	METODOLOGÍA	ALUMNOS INSCRIPTOS	ALUMNOS REGULARIZADOS
1º1º Civil	SPI	56	16
1º2º Civil	Tradicional	33	7
1º1º Eléctrica	SPI	72	10
1º2º Eléctrica	SPI	68	5
1º1º Mecánica	SPI	51	3
1º2º Mecánica	Tradicional	48	0
1º3º Mecánica	SPI	56	11
1º4º Mecánica	SPI	55	5
1º5º Mecánica	Tradicional	50	1

Tabla 1

Si se agrupan los resultados de la Tabla 1 por metodología se puede obtener la Tabla 2, en donde además se han agregado tres filas que facilitan la comparación de ambas metodologías.

METODOLOGÍA	SPI	Tradicional
ALUMNOS INSCRIPTOS	358	131
ALUMNOS DESERTORES (*)	179	66
CANTIDAD DE DIVISIONES	6	3
ALUMNOS POR DIVISIÓN	60	44
ALUMNOS REGULARIZADOS	50	8
ÍNDICE DE ALUMNOS REGULARIZADOS (base: alumnos no desertores)	28%	12%

(*) históricamente y sobre la base de los estudios realizados por la Secretaría de Planeamiento de esta Facultad entre los años 1993 y 1997, el porcentaje estimativo de deserción en primer año es del 50%

Tabla 2

Conclusiones

El método SPI plantea un juego, en el sentido de Brousseau. El alumno tiene un juego con el entorno a-didáctico. El propósito de este juego es el conocimiento del alumno. La función del profesor es crear un entorno didáctico guiando al alumno en la adquisición del conocimiento y validar sus respuestas. Por otra parte, en el entorno informático donde el alumno resuelve problemas frente a una computadora, ésta también se convierte en un agente de validación.

Por otra parte, el método SPI no establece tiempos fijos para el aprendizaje, el alumno puede avanzar más rápidamente en el aprendizaje de una unidad y detenerse más tiempo en otra, no deben existen reglas preestablecidas al respecto.

La creación de grupos espontáneos y el trabajo conjunto enriquece enormemente el logro de los aprendizajes.

Podemos observar que el número de alumnos regularizados con metodología SPI es superior al número de alumnos regularizados con metodología tradicional. En el ciclo lectivo 2001 la diferencia entre estos porcentajes es muy significativa, no sólo por los valores absolutos de los mismos, sino también porque la variable significativa ha sido la metodología utilizada.

El hecho de que los alumnos que cursan con metodología SPI trabajen con mayor libertad facilita la formación de grupos espontáneos, requiriendo de esta manera menor asistencia de los docentes. Este es el motivo fundamental por el cual cuando la proporción docente-alumno disminuye, los alumnos no resultan afectados en cuanto a la asistencia por parte de sus docentes.

Otro aspecto fundamental es que los alumnos regularizados con esta metodología ya tienen la asignatura aprobada con al menos la nota mínima, en cambio los alumnos de metodología tradicional deben afrontar aún la instancia de un examen final.

Finalmente, cabe remarcar que los alumnos con metodología SPI no poseen tiempos fijos ni pre-establecidos para el aprendizaje de cada unidad. Esto parece ser otro aspecto beneficioso, a cuyo estudio nos abocaremos en el futuro.

Referencias bibliográficas

Brousseau, Guy (1996). *Las Condiciones de desequilibrio del Sistema didáctico*. Conferencia Plenaria en ICME-8. Sevilla .España.

Brousseau, Guy (1986). *Fundamentos y Métodos de la Educación Matemática.* Artículo publicado en Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-115.

Balacheff, N (1990). *Towards a problématique for research on mathematics teaching.* Artículo publicado en Journal for Research in Mathematics Education, 21(4), 258-272.

Mejía Velasco, H (1996). *Alternativas de desarrollo de software educativo en México. Didáctica.* Investigaciones en Matemática Educativa. XX Aniversario. CINVESTAV-IPN. México.

Hernández Fernández, H. y Delgado Rubí, J. R. y Fernández de Alaíza, B (1998). *Cuestiones de didáctica de la matemática.* Ediciones HomoSapiens. Rosario. Argentina.

Estrategias de aprendizaje con soporte informático

Ana María García, Graciela Susana Galindo, Norma Inés Macchioni,; Norma Alicia Ramón, Dolores Regina Solbes
Cátedra de Matemática, Facultad de Agronomía y Zootecnia, Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
galindo@arnet.com.ar

Resumen

El propósito de este trabajo es compartir una experiencia realizada por docentes de la cátedra de Matemática de la Facultad de Agronomía y Zootecnia de la Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, sobre técnicas de trabajo en grupos en las que se da importancia a la actividad de los alumnos, a las tareas que llevan a cabo y a las relaciones entre los participantes en los grupos teniendo en cuenta la interacción e influencia mutua para la adquisición de conocimientos y la formación de actividades, actitudes y valores.
El nivel de conocimientos y habilidades que se adquieren son más profundos y complejos en la medida en que se logra un mayor nivel de interacción en clase.
Para lograr un mayor afianzamiento de los contenidos, los alumnos utilizan en la computadora el programa Microcalc, que les permite analizar, entre otros, la influencia de los parámetros de las gráficas de funciones exponenciales.

Introducción

El propósito de Matemática es brindar a los alumnos una herramienta para el desarrollo del pensamiento crítico, flexible y lógico formal; en este caso mediante el estudio de funciones.
El tema de funciones es de gran importancia en la formación de un estudiante de nivel superior, no sólo porque constituye la base de todo análisis matemático, sino porque contribuye al desarrollo de aspectos formativos y de habilidades geométricas; además de servir de modelo matemático a múltiples fenómenos de la realidad.
Para estudiantes de carreras como Ingeniería Agronómica, Ingeniería Zootecnista y afines es importante el estudio de funciones exponenciales, ya que se les presentan a diario problemas reales que se corresponden con modelos matemáticos.
Los docentes de Matemática de las Facultades de Agronomía tenemos como principal objetivo lograr en los alumnos capacidades para:

- Interpretar
- Graficar
- Resolver problemas
  - Identificar
  - Modelizar
  - Calcular

Debido a las exigencias de la actividad profesional de los egresados, se concibieron actividades del tema que vinculan la asignatura con la computación. En las mismas se utilizó el software MC (MicroCalc).
Para lograr un mayor nivel teórico y de sistematización y contribuir a elevar el grado de generalización se aplicaron Técnicas de Aprendizaje Participativo en las clases Teórico - Prácticas. Existe una gran diversidad de Técnicas Participativas que pueden aplicarse tanto en grupos pequeños como numerosos, y las actividades pueden estar centradas en uno sólo de esos métodos o en combinación de varios de ellos que se complementan. Estas apuntan a facilitar el trabajo en grupos y propiciar un adecuado desarrollo del quehacer docente.
Este trabajo está sustentado en el paradigma constructivista y basado en las teorías de:

- Aprendizaje significativo de Ausubel.
- Psicogénesis y sociogénesis de Piaget.
- Enfoque histórico cultural de Vigotsky.
- Actividad de Leontiev.
- Formación de las acciones mentales de Ya Galperin.

Metodología

En correspondencia con el contenido, organizado con un enfoque sistémico, se planificaron las actividades de los alumnos en las clases Teórico - Prácticas.
Al iniciar el tema de FUNCIÓN EXPONENCIAL, se brindó a los estudiantes las orientaciones generales para la presentación de los integrantes de grupos. Los grupos se constituyeron con 6 alumnos, los que se reunieron de acuerdo a un color determinado, a un refrán o bien agrupando figuras predeterminadas.
Para la asimilación de conocimientos se utilizó el método de discusión, con su variante Philips 66, para revisar y aplicar los conceptos previos del tema FUNCIÓN. En 6 minutos cada grupo debía dar las características correspondientes a gráficas de distintas Funciones Exponenciales que se le entregaron. Finalizado el tiempo, un representante por grupo expuso las conclusiones en un cartel y se elaboró un cuadro de coincidencias y disidencias para presentar una visión inicial de la función exponencial.
Una vez definida la función exponencial de expresión general $y = b.\ a^{c\,x} + h$, los alumnos resolvieron distintos problemas asociados a cultivos de microorganismos, que se modelan mediante ella.
A cada grupo se le suministró un problema como el siguiente:

La bacteria Escherichia coli se encuentra en el intestino de muchos mamíferos. El tiempo de duplicación es cada quince minutos.

Supongamos que se hace un cultivo en el que hay inicialmente 5000 de estas bacterias, y se necesita encontrar la fórmula de la función que describa este tipo de crecimiento.

Complete la tabla:

Tiempo (en minutos)	0	15	30	45	60	n.15
Cantidad de bacterias	5000	5000. 2	$5000.\ 2^2$			

Cuando hayan transcurrido n períodos de 15 minutos, habrá $5000.\ 2^n$ bacterias.

Para buscar una expresión que describa el crecimiento en función del tiempo, en este caso expresado en minutos, reemplazamos:

$n = t/15 \Rightarrow \mathbf{f(t) = 5000\ .\ (2^{t/15})}$

o bien $f(t) = 5000.\ (2^{1/15})^t \Rightarrow \mathbf{f(t) = 5000\ .\ (1{,}047)^t}$

Represente gráficamente f en función del tiempo y analice las características de la curva. (Adaptado de Matemática I. Kaczor, P. et al. p 203)

Problemas de ésta índole permiten que los alumnos, motivados por la propuesta de un fenómeno real relacionado con la actividad agropecuaria, lleguen a percibir con mayor profundidad la funcionalidad y potencia de este tema.
En una segunda instancia, ayudados con el soporte de la computadora y el programa Microcalc, analizaron la influencia de los parámetros **a**, **b**, **c** y **h**.
El software seleccionado es apropiado para estudiantes que poseen escasos conocimientos sobre el uso de soporte informático y los guía a través de un menú claro hacia el objetivo buscado. Es de fácil acceso y permite investigar con distintos valores de los parámetros, los gráficos resultantes.
Al finalizar, y a modo de evaluación, los alumnos respondieron un cuestionario y elaboraron un informe escrito de la tarea desarrollada en la computadora.

Resultados y conclusión

El resultado del cuestionario y del informe fue satisfactorio ya que un 90 % de los alumnos respondieron demostrando que los conceptos fueron asimilados.
En la clase práctica los estudiantes reconocieron los parámetros y variables de la función exponencial, y descubrieron la influencia de los mismos en la representación gráfica.
Al aplicar el soporte informático, además de reafirmar la influencia ya mencionada, visualizaron las gráficas correspondientes a cada parámetro en forma individual y superpuestas.
Los estudiantes dieron consistencia al significado apropiado de parámetro de una función, en este caso la función exponencial, interpretando, modelizando y resolviendo problemas de situaciones reales.
Con la aplicación de Técnicas participativas adecuadas y con el soporte informático propuesto, los alumnos lograron desarrollar habilidades y asimilar conocimientos significativos en una tarea orientada hacia el constructivismo.

Referencias bibliográficas

Colectivo de Autores. (1995). Departamento de Pedagogía y Psicología. Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior. Universidad de La Habana. La Habana, Cuba.
Kaczor, P. et al. (1999). *Matemática I*. Editorial Santillana S.A. Argentina.
Pérez Pantaleón, G. (1998). *Los métodos participativos en la enseñanza - Tendencias pedagógicas universitarias*. Notas de clase. Tucumán, Argentina.
Souto de Asch, M. (1987). *El grupo de aprendizaje como unidad de operación educativa.* Revista Argentina de Educación. Año V. N° 8. Buenos Aires, Argentina.
Souto de Asch, M. (1990). *Didáctica de lo grupal*. Instituto Nacional de Perfeccionamiento y Actualización Docente. Ministerio de Educación. Buenos Aires, Argentina.
Souto de Asch, M. (1999). *Grupos y dispositivos de formación*. Edición Novedades Educativas. Buenos Aires, Argentina.

El uso de software matemático como herramienta didáctica y de cálculo

Daniel Leguiza, Germán Camprubí, Juan A. López Molina
Facultad de Agroindustrias(UNNE), Argentina. UPV, España
gcamprubi@fai.unne.edu.ar dany@fai.unne.edu.ar jalopez@mat.upv.es

Resumen

El desarrollo de métodos y materiales nuevos se ha incrementado notablemente en las últimas décadas, siendo la enseñanza asistida por computadora la más sobresaliente de ellas.

Esta propuesta ensaya una alternativa para hacer matemática en el aula en la que se integran el alumno, el profesor y la tecnología educativa. Se plantean las opciones del software, proponiendo en primer lugar en la edición y el cálculo elemental, luego con graficación en dos dimensiones y tres dimensiones hasta llegar a las opciones más complejas.

Este trabajo, dirigido a docentes del Departamento de Matemática, pretende propiciar la incorporación de la informática en la educación dando un paso inicial hacia la tarea de desmontar y sustituir toda una tradición cultural de metodología y planificación de la enseñanza de las matemáticas.

Introducción

En los tiempos que corren, de internets, webs, cd-roms, hipermedios, correos electrónicos, televisiones digitales, groupwares, videoconferencias desde PCs, y otras tecnologías infocomunicativas más o menos interactivas, habituales ya en hogares, oficinas y cafés, la incongruencia epistemológica del profesor ejecutando su papel clásico es muy evidente. Y probablemente cuando más evidente se torna es cuando utiliza alguna de estas tecnologías como un instrumento de boca a oreja, sin más, es decir, con el mismo formato de comunicación del libro impreso o anterior.

Aunque parezca una simplificación, el **Profesor, la Tecnología educativa y el Alumno** forman un triángulo relacional, el triángulo PTA. En general, con esos tres vértices se arma el proceso educativo. Durante 500 años, el libro, la pizarra y el laboratorio o taller han sido la tecnología educativa, los instrumentos de los que el profesor en persona se ayudaba para montar sus procesos de transmisión de ideas y conocimientos o de ejercitación de destrezas en el alumno. Al ir cambiando la tecnología se alteraron inevitablemente las relaciones bidireccionales PT, PA, AT y PTA, de modo que es imprescindible **rediseñar el proceso educativo** y montar unas nuevas relaciones, salvo que se decida mantener el asunto al margen del mundo real.

El desarrollo de métodos y materiales nuevos se ha incrementado notablemente en las últimas décadas, siendo la enseñanza asistida por computadora la más sobresaliente de ellas (Vaquero A. & Chamizo C.F., 1987).

Es un hecho constatado que en el mundo real hay actualmente unos potentes programas de **software de matemáticas**, que corren sobre PCs, se manejan por medio de interfaces cada vez más sencillas y son utilizados para aprender o hacer matemáticas y para resolver profesionalmente problemas de la ciencia y de la ingeniería, como es el caso del *Scientific Workplace*. Este programa tiende a agrupar potentes funcionalidades gráficas, procesamiento de texto y un arsenal de utilidades y aplicaciones diversas.

Pero queda la tarea de **desmontar y sustituir toda una tradición cultural** de metodología y planificación de la enseñanza de las matemáticas y de las disciplinas que hacen uso de ellas.

Objetivos
Presentar un software matemático (SWP 3.0) como herramienta didáctica para la elaboración de trabajos prácticos y otros trabajos científicos.

- Realizar cálculos matemáticos utilizando Maple (software matemático incorporado al SWP 3.0).
- Comparar el SWP 3.0 con otros softwares matemáticos.

Fundamentación

En años recientes se ha incrementado, en forma asistemática, el uso de computadoras y programas en la enseñanza de las matemáticas.
Es necesario encarar de inmediato la integración sistemática al proceso de enseñanza-aprendizaje de las herramientas básicas de hardware y software disponibles en la actualidad, en razón de su creciente accesibilidad (Araujo y Olivera,1976).
El poder de material educativo computarizado radica en su potencial para promover nuevas capacidades, y estas pueden darse en cualquiera de los dominios del aprendizaje (cognoscitivo, afectivo y psicomotor), Abarcando en el dominio cognoscitivo, desde las categorías más básicas(conocimientos),hasta las más altas (solución de problemas).
Entre estos elementos pueden mencionarse (Santaló, 1994).

a) la intervención del aspecto lúdico;
b) lo atractivo de la utilización de nuevas tecnologías;
c) la posibilidad de acceder rápidamente y en forma ágil, a nuevos conocimientos;
d) propiciar el logro de destrezas superiores de pensamiento;
e) es un recurso preponderantemente versátil;
f) puede utilizarse en la evaluación del proceso;
g) propicia el aprendizaje por descubrimiento;
h) reproduce el conocimiento acumulado;
i) facilita la creación de modelos propios;

En el marco de lo anteriormente expuesto, este trabajo apunta a compartir el estudio sobre los alcances de un software matemático realizado por un grupo de docentes con fines exclusivamente académicos y por ende con total prescindencia de aspectos comerciales. Ante la impactante difusión de variedades de software más o menos similares, es necesario un análisis crítico que contribuya a optimizar la elección de los más adecuados para la enseñanza de la matemática.
El Scientific WorkPlace 3.0 (SWP 3.0) es un programa de reciente aparición y que presenta numerosas ventajas sobre otros programas de características semejantes tanto por sus presentaciones como por la sencillez en la realización de cálculos matemáticos de índole variada.
Él SWP 3.0 trae incorporados:

- el LaTeX (Clement et al., 1990) que es un programa consistente en un redactor de texto utilizado por numerosos especialistas para la presentación de trabajos en revistas de investigación

- el Maple que es un programa que se emplea como herramienta de cálculo y para realizar todo tipo de gráficas matemáticas-estadísticas.

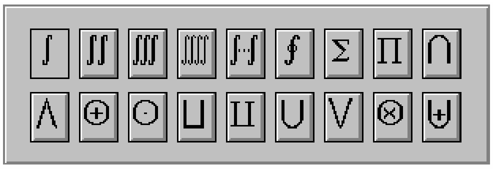
Metodología

Se desarrolló un curso para docentes de la Facultad de Agroindustrias de la UNNE en la segunda mitad del año 2000. Durante ese curso, cada docente trabajó con una PC. Los contenidos del curso incluyeron temas de Álgebra y Análisis Matemático con funciones reales de una y varias variables.
Con el correr de las clases se fueron presentando las características del software procurando mostrar la sencillez del manejo y su potencia de cálculo. Las actividades en cada clase podían seguirse mediante una Guía Impresa, en la que aparecían los resultados. En el final de cada clase se resolvieron ejercicios y problemas presentados en el pizarrón que no estaban incluidos en la Guía.
Se realizaron las comparaciones entre el SWP 3.0 y otros softwares matemáticos mediante la resolución de una misma cuestión con diferentes programas.
Se propició que los docentes se familiarizaran con las opciones del software, trabajando primero en la edición y el cálculo elemental, luego con graficación en dos dimensiones hasta llegar a las opciones más complejas.

Resultados

Asistieron al curso 20 docentes de la Facultad de Agroindustrias y para presentar los resultados obtenidos en el aula se consideraron las funciones del software organizadas y ejemplificadas por separado, es decir: procesador de texto, software de cálculo y graficación de funciones.

1 Procesador de texto**:** el Scientific WorkPlace es un editor de fórmula y de texto que involucra notación matemática científica y proporciona un amplio conjunto de símbolos y plantillas para la composición de expresiones matemáticas . Cualquier elemento puede ser introducido mediante la pulsación de un icono o la elección del comando en un menú. También es posible hacer uso de “atajos” mediante el teclado. También cuenta con un módulo independiente para editar ecuaciones y exportarlas como código LaTeX o TeX muy usados por los científicos en todo el mundo.



Otros de los elementos importantes del procesador de texto, es la numeración de fórmulas, inserción de referencias a fórmulas y actualización automática de la numeración de las fórmulas. La posibilidad de numerar las fórmulas y expresiones, aportan de forma sencilla una presentación muy útil para los usuarios.

A continuación se edita parte del texto realizado:

Ejemplo 1.

1. Escribir la siguiente definición

Toda expresión de la forma $H(x,f(x),f'(x),.................,f^{(n)}(x)) = 0$ ***que relaciona una variable independiente "x" con los valores f(x) de una función y sus "n" primeras derivadas se llama*** **ecuación diferencial ordinaria de orden "n".**

b. $x^n = \overbrace{|x|.|x|..........|x|}^{n} \cdot \left[\cos \overbrace{(\theta+\theta+......+\theta)}^{n} + i.sen \overbrace{(\theta+\theta+......+\theta)}^{n} \right]$ o sea

$$\boxed{x^n = |x|^n(\cos n\theta + isenn\theta)}$$

Ejemplo 3. Para escribir una facción se lo puede hacer de dos manera; una es haciendo un clic en el botón de la barra de herramienta o bien directamente desde al teclado con la combinación de teclas(Ctrl+f).

2 Software de cálculo: este software incluye una versión del MAPLE, con la cual el usuario no necesitará aprender un determinado lenguaje de programación para la realización de determinados cálculos.

Entre otras, se dieron cuestiones como las siguientes:

- Resolución de ecuaciones utilizando el comando Solve + Exact ( )

$$5x^2 + 3x = 1, \text{ Solution is : } \left\{x = -\tfrac{3}{10} + \tfrac{1}{10}\sqrt{29}\right\}, \left\{x = -\tfrac{3}{10} - \tfrac{1}{10}\sqrt{29}\right\}$$

Calculos diversos utilizando el comando Evaluate

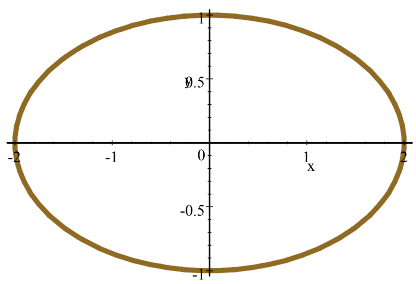
$$\int_0^2\int_{-1}^1\int_0^5 (xy - x^2z)dxdzdy =$$

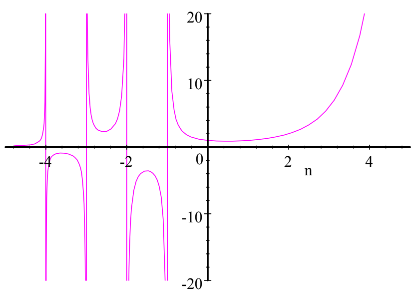
3 Graficación de funciones en 2D y en 3D:

Además de resolver ecuaciones, integrales, hallar las raíces de un polinomio de cualquier grado, etc., el programa permite realizar graficos en 2D y en 3D con una excelente calidad para la impresión.

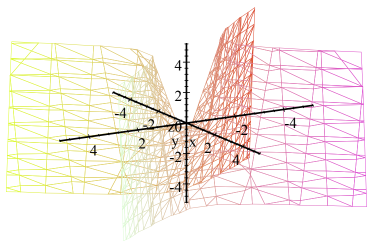
Algunos del gráficos realizados por los docentes fueron:

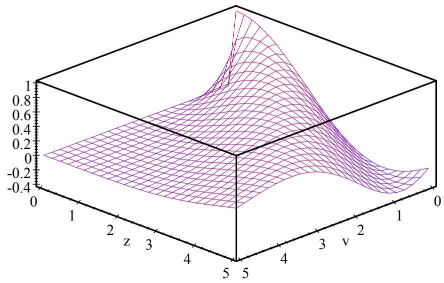
En ***2D:***





En ***3D***





Finalmente se realizaron comparaciones entre el SWP 3.0 y el Mathematica. A continuación, se presentan a un par de ejemplos sobre la comparación realizada entre el SWP3.0 y el Mathematica.

Operación	Mathematica	SWP 3.0
Cálculo de integrales	Integrate[x^2,x]	$\int x^2 dx + = \frac{x^3}{3}$
Grafica en 3D	Plot3D[x+y-5,{x,-5,5},{y,-5,5}]	$x + y - 5 +$

Conclusiones

Los resultados obtenidos, que son parcialmente reportados en este trabajo, muestran al SWP 3.0 como una herramienta que integra las características de otros software de amplia difusión en la enseñanza de la matemática.
La operación del software presenta semejanzas con la manera de trabajar sobre la pizarra en el sentido que no son necesarias complejas órdenes de ejecución
En el marco de los objetivos propuestos y como trabajo final los docentes presentaron Guías de Trabajos Prácticos y desarrollos de temas contenidos en programas analíticos de asignaturas del departamento de Matemática o trabajos científicos son contenido matemático. Esta circunstancia permite alentar la esperanza de que la herramienta didáctica y de cálculo presentada en este trabajo adquiera una cierta sistematicidad al incorporarse a la tarea diaria del docente. Se propició que los docentes se familiarizaran con las opciones del software, trabajando primero en la edición y el cálculo elemental, luego con graficación en dos dimensiones hasta llegar a las opciones más complejas.

Referencias bibliográficas

Vaquero A. y Chamizo C.F. (1987). *La Informática aplicada a la Enseñanza*. Madrid, España: Eudema.
Santaló, L. (1994). *Enfoques hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires, Argentina: Troquel.
Araujo y Olivera, J.B. (1976). *Tecnología Educacional y Teorías de Instrucción*. Buenos Aires, Argentina: Paidos.
Clement J., Corral C. y Fuster R. (1990). *Introducción a la preparación de textos LaTeX*. Valencia: Editorial Universidad Politécnica de Valencia.

Textos interactivos - Innovación metodológica para la enseñanza de cónicas

Francisca J. Barassi*, Elsa B. Osio**
* Departamento de Química, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina
** Departamento de Matemática, Facultad de Economía y Administración, Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina
francis@uncoma.edu.ar eosio@uncoma.edu.ar

Resumen
La evolución tecnológica ofrece alternativas para cambiar la manera de enseñar y aprender matemática. La informática ocupa un lugar central en nuestra sociedad y resulta una herramienta de gran utilidad en el campo educativo, por lo que es necesario que los docentes conozcamos y utilicemos estas tecnologías, sus posibilidades pedagógicas y las valoremos como un recurso para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Software de última generación con cálculo simbólico, posibilitan la elaboración de **textos interactivos.** Estos son textos que residen en la computadora y permiten al alumno , mediante una participación activa, descubrir, construir y comprender los distintos conceptos que se encuentran en el mismo. En este trabajo se presenta un texto interactivo sobre Cónicas, desarrollado con el software *Mathematica*, así como también las conclusiones que surgieron de experiencias realizadas con alumnos de ingeniería al implementar dicho texto.

Introducción

El desarrollo de las nuevas tecnologías conduce a cambios profundos en la sociedad, que modifican las condiciones de trabajo, valores y su perfil socio-cultural. Este hecho aporta modificaciones sustanciales en los planeamientos de la educación, que van desde la potenciación del desarrollo cognoscitivo de los alumnos, facilitándoles nuevas formas de representar la realidad, hasta el desarrollo de nuevas metodologías, tendientes a preparar profesionales para usar estas herramientas en la solución de problemas científicos, tecnológicos y sociales.
El egresado universitario necesita agudizar su capacidad de análisis crítico, saber plantearse y resolver nuevos problemas, aprender a buscar nuevos conocimientos y aplicarlos con acierto.
Para alcanzar estos objetivos se requiere de técnicas diferentes a las que se utilizan en la educación tradicional, muy común en el nivel universitario, que tiene como centro el contenido de las materias y donde el profesor es quien expone, el alumno es un sujeto pasivo y el tipo de ejercicios propuesto siguen generalmente el modelo de los ejemplos dados por el profesor.
El estudiante debe jugar un papel activo en el proceso de su propio aprendizaje, para que este arroje resultados positivos, así podrá formarse acrecentando todas sus cualidades intelectuales. Para desarrollar estas cualidades se necesitan métodos de enseñanza en los que el estudiante sea protagonista activo.
Todo lo expuesto lleva a revitalizar y agilizar la enseñanza de la Matemática a la luz de las nuevas necesidades tecnológicas y a modificarla para lograr una adecuación a la situación presente. La tecnología impacta de tal modo las formas de vida de la sociedad, que la educación no puede quedar al margen de ella (Litwin et al, 1995).
La informática juega un rol decisivo en la producción y control del conocimiento y en el desarrollo de las sociedades que aprovechan sus posibilidades. Cabe a la educación

capacitar a las personas para diseñar, organizar y operar las nuevas tecnologías con eficacia y responsabilidad social (Marabotto y Grau, 1991).
Paquetes de software de última generación, con cálculo simbólico permiten elaborar textos interactivos; (Porta et al, 1994). Estos son textos que residen en la computadora permitiendo al alumno generar tantos ejemplos como necesite para descubrir y comprender los distintos conceptos que se presentan en el mismo, logrando una participación activa en el aprendizaje.
Esta metodología lleva al docente a un contexto en donde ceda un paso a su protagonismo en la transmisión, a un docente organizador de instancias de aprendizaje y colaborador de un proceso de construcción conjunta con los alumnos.
En este trabajo se presenta un texto interactivo sobre Cónicas (Antón, 1990; Lehmann, 1992) desarrollado con el software *Mathematica* (D´Attellis,1994-1997; D´Attellis, 1997-1998**).** La elección de este tema se debió a la dificultad observada en los alumnos para comprender y visualizar temas de geometría, en el sentido de promover imágenes mentales que enriquezcan el proceso de aprendizaje.

Objetivos

Este trabajo tiene como objetivo:

1. Mostrar la estructura formulada para el desarrollo de la enseñanza de un módulo referente a Cónicas empleando textos interactivos. Dicho módulo integra un curso normal de grado en Álgebra y Geometría para alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería y Profesorado en Matemática
2. Presentar resultados que surgieron de experiencias áulicas, cuya finalidad era comprobar si mediante dicha implementación los estudiantes llevan a cabo un aprendizaje activo, agudizando su capacidad de análisis crítico, expandiendo su creatividad, y si ejercen el control de su propio ritmo de aprendizaje, en el contexto de las pautas establecidas por el profesor.

Metodología

Esta puede considerarse compuesta por las siguientes etapas:

1. Las clases se desarrollan en la sala de informática, con la presencia del profesor.
2. Los alumnos cuentan con el texto interactivo colocado en las computadoras y con un instructivo para su manejo.
3. Se enfatizan los aspectos colaborativos, agrupando a los alumnos a razón de dos por computadora.
4. El alumno interactúa con el texto, generando por sí mismo tantos ejemplos numéricos y simbólicos como necesite.
5. Al finalizar los encuentros, los alumnos responden a una encuesta y entrevistas personales que permiten conocer sus opiniones sobre la implementación de esta nueva metodología.
6. Se lleva a cabo un análisis de los resultados de las encuestas y entrevistas

Presentación del texto Interactivo

Un texto interactivo es un documento que reside en una computadora y en el cual pueden ejecutarse instrucciones numérica, simbólicas y gráficas apareciendo los resultados en el documento. Entre las características generales de los mismos podemos mencionar:

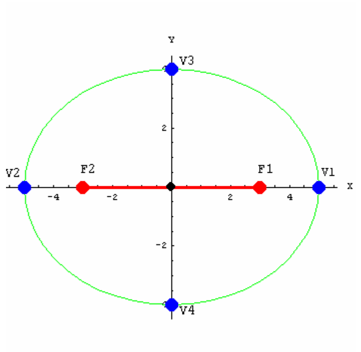
- Flexibilidad: El docente puede alterar aquellas secciones del texto que considere necesarias.
- Cada ejemplo se convierte en infinitos ejemplos: Permite que los alumnos aprendan a su propio ritmo.
- Aprendizaje a través de experimentos: El alumno es llevado a realizar experimentos en la computadora para luego explicar los resultados, llevando así al mismo, a un aprendizaje activo ya que él tiene que deducir las respuestas.
- Utilizar la tecnología para incrementar la cantidad y la calidad de la comunicación entre estudiante y docentes: Los libros de textos interactivos, desarrollados en plataformas de comunicación simbólica y numérica se adecuan perfectamente a la enseñanza a distancia, ya que los mismo pueden enviarse a través de Internet.

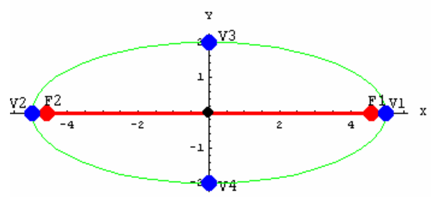
Además un texto interactivo no se imprime, no tiene sentido, pues el mismo se irá modificando en función de los ejemplos que el alumno vaya generando. Sólo presentaremos a modo de ejemplo, un item desarrollado en el mismo. En la exposición se mostrará como se trabaja con dicho texto.

Ejemplo 1: Excentricidad de la Elipse

El alumno introduce como datos los valores de los semiejes y calcula el valor de la excentricidad, cuya **fórmula** se definió previamente. El texto genera los gráficos correspondientes y el valor de la excentricidad, para que el alumno verifique sus cálculos. Se lo induce a que observe como varía la forma de la elipse con relación al valor de la excentricidad. Se le pide que construya una tabla que vincule la relación entre los semiejes y el valor de la misma, la que podrán verificar con el texto. Mediante la observación de esta tabla el alumno podrá responder una serie de preguntas que lo llevará, finalmente, al **concepto** de excentricidad.

Por razones de espacio sólo se muestran dos gráficos de todos los que se generaron y a continuación una tabla que contiene los valores introducidos por el alumno.



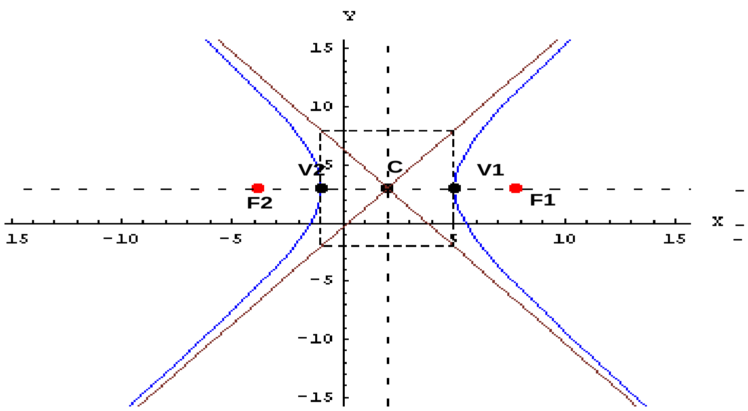


	a	b	SM	Sm	Sm SM	c	Excent
	5.	0.2	5.	0.2	0.04	4.996	0.9992
	5.	1.	5.	1.	0.2	4.89898	0.979796
SMH	3.	1.	3.	1.	0.333333	2.82843	0.942809
	5.	2.	5.	2.	0.4	4.58258	0.916515
	3.	2.	3.	2.	0.666667	2.23607	0.745356
	5.	4.	5.	4.	0.8	3.	0.6

	a	b	SM	Sm	Sm SM	c	Excent
	0.2	5.	5.	0.2	0.04	4.996	0.9992
	1.2	5.	5.	1.2	0.24	4.85386	0.970773
SMV	2.	4.2	4.2	2.	0.47619	3.69324	0.879342
	3.5	5.	5.	3.5	0.7	3.57071	0.714143
	3.	4.2	4.2	3.	0.714286	2.93939	0.699854
	3.5	4.	4.	3.5	0.875	1.93649	0.484123

Ejemplo 2: Ecuación de la Hipérbola y sus elementos.

A través de ejemplos, que el alumno genera, reafirma los conceptos aprendidos acerca de los elementos y ecuación de la hipérbola. Como datos se deberán especificar: longitud de los semiejes, coordenadas del centro e indicar si el eje real es horizontal o vertical. El texto genera el gráfico correspondiente. Luego el alumno deberá responder las preguntas que se plantean. Dichas respuestas podrán ser verificadas permitiéndole al mismo autoevaluarse. Como en el ejemplo anterior, por razones de espacio se muestra un solo caso.



Preguntas:

a) ¿ Cuál es el centro de la hipérbola ?
b) ¿ Cuál es la longitud del semieje real y la del semieje imaginario ?
c) ¿ Cuánto vale la semidistancia focal c ?
d) ¿ Cuáles son las coordenadas de sus vértices y focos ?
e) Exprese la ecuación de dicha hipérbola.
f) Exprese la ecuación de las asíntotas de la hipérbola graficada.

Respuestas:

a)C = (2,3)

b) La longitud del semieje real es 3 y la del semieje imaginario es 5

c) semidistancia focal c = 5.83095

d) V1 = {5., 3.} V2 = {−1., 3.} F1 = {7.83095, 3.} F2 = {−3.83095, 3.}

e) ecuación : $\frac{1}{9}(x-2)^2 - \frac{1}{25}(y-3)^2 = 1$

f) $y1 = \frac{5x}{3} - \frac{1}{3}$ $\quad y2 = \frac{19}{3} - \frac{5x}{3}$

El manejo del texto interactivo es sencillo, son pocas las instrucciones que deben conocerse para poder operar con él. No es necesario dominar el software *Mathematica*. Se accede al mismo mediante un sencillo instructivo. Para su implementación se requiere por lo menos de una PC - 486 con 16 M de RAM.
El contenido del texto se basa, en gran parte, en preguntas que el alumno deberá responder luego de generar él mismo, tantos ejemplos gráficos, numéricos y simbólicos como necesite.
Es importante destacar que los alumnos no sólo trabajan en la computadora, sino que, también lo hacen con lápiz y papel. Esta instancia es fundamental para la comprensión y asimilación de los contenidos.

Desarrollo de la experiencia

La experiencia se desarrolla en seis clases de 4 hs. cada una. En ella participan 14 alumnos voluntarios. Los encuentros se realizan en una sala de informática, con dos alumnos por computadora.
Inicialmente se les entrega un instructivo para el manejo del texto interactivo.
En cada encuentro el docente observa si se presenta alguna dificultad con el uso de esta herramienta, el comportamiento de los alumnos frente a las pautas planteadas y como interactúan los mismos. También se filman parcialmente las clases.
Al finalizar la actividad áulica se entrega una encuesta a cada alumno que responde en forma personalizada.
Por último se realizan entrevistas individuales. Estas se graban y luego se transcriben. Los alumnos las avalan con su firma.

Conclusiones

Se observa una elevada motivación por parte de los estudiantes generada por el uso de la herramienta descripta, la que les permite experimentar a través de distintos ejemplos que ellos generan produciéndose situaciones que los llevan a plantearse interrogantes, a reflexionar y sacar conclusiones, las que surgen después de un intercambio de opiniones entre ellos, estableciéndose una marcada interacción.
El docente encuentra un medio por el que puede conducirse a los alumnos al aprendizaje de las distintas cónicas con una activa y comprometida participación por parte de los mismos.
En las entrevistas personales los estudiantes expresan su satisfacción con respecto a la experiencia destacando la posibilidad de manejar sus propios tiempos de aprendizaje, de descubrir los conceptos a través de tantos ejemplos como necesitan y cómo la representación gráfica, en especial la animación, les facilita la comprensión de los distintos conceptos.
A modo de ejemplo se destacan algunos comentarios textuales de los alumnos:

- *"La mayoría de los conceptos surgían por deducciones nuestras, en cambio en una clase tradicional a uno le dicen las cosas y después hay que pensar de donde vinieron"*
- *"No me sentí cansado, a medida que iba avanzando y descubriendo conceptos me sentía más incentivado".*
- *"Cuando buscamos por nuestros propios medios llegar a las conclusiones lo que uno capta y procesa en su cabeza se convierte en algo que vamos guardando de manera clara y precisa"*
- *"Yo había visto el tema el cuatrimestre pasado y nada que ver, ahora entendí y aprendí".*
- *"Nosotros teníamos que poner nuestro esfuerzo para avanzar y surgían intrigas y teníamos que seguir y seguir para descubrirlas y llegar a las conclusiones".*

Este es el modo en que las nuevas tecnologías informáticas deben aplicarse a la educación, para crear experiencias relevantes y no como simple vehículo para la transmisión de información puramente textual.

Referencias bibliográficas

D'Attellis, Carlos E. (1994-1996). Serie MATEMATICA en *Mathematica.* Universidad Tecnológica Nacional. Buenos Aires. Fascículos Nº 1 al 20.
D'Attellis, Carlos E. (1997 - 1998). Serie MATEMATICA con *Mathematica.* Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Fascículos Nº 1 al 12.
David, B., Porta, H. and Uhl, J. (1994). *Calculus & Mathematica*. Addison Wesley. Illinois.
Howard, A. (1990). *Cálculo y Geometría Analítica*. México. Limusa.
Lehmann, C. (1992). *Geometría Analítica*. México. Limusa.
Litwin, E., Libedinsky, M., Liguori, L., Lion, C., Lipsman, M., Maggio, M., Mansur, A., Scheimberg, M., and Poig, H. (1995). *Tecnología Educativa. Política, Historias, propuestas.* Buenos Aires. Paidos.
Marabotto, M. And Grau, J. (1991). *Hacia la informatización del aprendizaje, fundamentos y conducción.* Buenos Aires. Fundec.

Serie de Textos Interactivos: Cálculo I – Cálculo II - Álgebra Lineal

S. Albergante, M. González, C. Guzner y otras
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ciencias Económicas. Argentina
compumat@fcemail.uncu.edu.ar

Resumen
Con la necesidad de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de los primeros cursos de la universidad y adecuarlo a los vertiginosos cambios de la sociedad actual, se incorporó una plataforma informática con la selección de un programa de alta resolución simbólica y gráfica. En esta experiencia pudimos apreciar que los estudiantes disfrutaban más de la clase realizada en el gabinete de informática, que en el aula tradicional. La clase magistral expositiva fue sustituida por talleres activos, en los que los alumnos retoman el perdido hábito de la lectura, experimentan y participan en la resolución de variadas situaciones del contexto. Para implementar esta nueva modalidad y poder mantener este proceso de cambio permanente, un equipo de docentes de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNCuyo – Mendoza - Argentina, confeccionó una "**Serie de Textos Interactivos: Cálculo I, Cálculo II y Álgebra Lineal**", usando el software *Matemática 3.0*, editado en tres discos compactos.

Marco teórico

El primer libro interactivo creado, que marcó un rumbo no sólo en lo referente al empleo interactivo de las computadoras para el aprendizaje del Cálculo, sino también en la reformulación de los contenidos de esta materia, fue de Bill Davis, Horacio Porta y Jerry Uhl: Calculus & Matemática, Ed. Addison Wesley, 1993.
En la Universidad de Pittsburgh se realizó el Proyecto CalcTech (1993) cuyo objetivo principal fue implementar la enseñanza del Cálculo mediante el empleo intensivo de computadoras y para difundir estas metodologías a todo los EE.UU. Uno de sus co-directores, el Dr. Juan Manfredi, contratado por nuestra Universidad, fue quien nos comunicó los excelentes resultados su experiencia y nos alentó a emprender la confección del presente material.
Sin embargo, como opina Cantoral (1998), la sola incorporación del recurso tecnológico no alcanza si no se transforman los medios en verdaderos dispositivos didácticos.
En un marco constructivista, en términos piagetianos, se puede decir que se construyen significados integrando o asimilando el nuevo material de aprendizaje a los conocimientos previos. La potencial significatividad lógica y psicológica del contenido de aprendizaje no basta para que el alumno construya significados, es necesario, además, que éste tenga una actitud favorable para aprender significativamente. Por otro lado, cabe señalar que el profesor es el que determina con su actuación, la posibilidad de profundización y ampliación de los significados construidos.
Siguiendo a Ausubel y sus colaboradores, podemos decir que construimos significados cada vez que somos capaces de establecer relaciones "sustantivas y no arbitrarias" entre lo que aprendemos y lo que ya conocemos. Así, la mayor o menor riqueza de significados que atribuiremos al material de aprendizaje dependerá de la mayor o menor riqueza y complejidad de las relaciones que seamos capaces de establecer.
Raymond Duval (1999) dice al respecto: *"Un aprendizaje específicamente centrado en el cambio y coordinación de los diferentes registros de representación semiótica, produce efectos espectaculares sobre las macro-tareas de producción y de comprensión".*

Experiencia

La educación, como modalidad cultural sistemática y ética normativa, ha utilizado, a lo largo de su historia, las tecnologías culturales de base[2] como medio de comunicación en el proceso informativo. Por otro lado, no se puede desconocer el impacto de las llamadas *nuevas tecnologías,* en especial, el explosivo avance de la herramienta informática y su presencia permanente en el contexto circundante.

En particular, a partir del año 1995, comenzamos a observar, por un lado, que nuestros alumnos[3] tenían contacto cotidiano con las tecnologías. Por otra parte, el cuerpo docente de las cátedras de Cálculo I, Cálculo II y Álgebra Lineal poseía computadoras personales y en general estaba bien predispuesto, más que en otras disciplinas, a emplear esta tecnología en la enseñanza.

Sin embargo, estos docentes se encontraban poco provistos de material adecuado para implementar sus ideas al respecto. La mayoría de las universidades argentinas contaban con laboratorios que sólo habían sido usados para capacitar a los alumnos en el manejo de diferentes softwares, desperdiciando la potencialidad de las computadoras para el aprendizaje interactivo: haciendo un uso racional de las nuevas tecnologías desde la perspectiva de su mediación pedagógica, sobre la base de aprovechamiento de sus recursos de comunicación en una situación educativa.

De esta forma, se logra salvar uno de los mayores obstáculos que, a nuestro criterio, provoca la enseñanza tradicional de la Matemática, que suele promover un manejo mecánico de las nociones matemáticas y por ende, la no construcción de significados por parte de los alumnos.

Diseño y métodos

En la actualidad se percibe un cambio profundo en la cultura que apunta a una sociedad de la “inmediatez”. Vivimos bajo el imperio de la urgencia y el accionar automático frente al estímulo externo. La comunicación y las tecnologías comandan el manejo de la información. Para ofrecer una respuesta a este requerimiento y poder mantener este proceso de cambio permanente, un equipo de docentes de las cátedras Cálculo I, Cálculo II y Álgebra Lineal de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Cuyo – Mendoza - Argentina, confeccionó una “**Serie de Textos Interactivos”** para las mencionadas asignaturas, usando el software *Matemática 3.0*. Este trabajo ha sido editado recientemente en tres discos compactos, con el desarrollo de cada una de ellas.

[2] El habla y la escritura

[3] Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.

CÁLCULO I

Contenido: Funciones - Límite, continuidad y asíntotas – Derivadas – Aplicaciones de la derivada - Extremos relativos y puntos de inflexión – Integrales indefinidas, definidas e impropias - Sucesiones y series numéricas – Series de potencia.
Autores: S. Albergante; A. Narváez; M. Rey Tudela; R. Montalto; L. Casetti; M. Welti; E. Rey Tudela; I. Gómez; A. Cívico; A. D'Amelio

CÁLCULO II

Contenido: Topología del Espacio Euclídeo - Funciones de dos variables independientes - Límite doble de una función - Funciones explícitas: derivadas parciales y direccionales – Diferenciabilidad - Funciones definidas en forma especial: Compuestas, Implícitas, Sistemas de funciones implícitas - Funciones homogéneas - Aproximación de funciones mediante polinomios: Fórmula de Taylor - Concavidad y convexidad - Extremos relativos libres - Extremos relativos vinculados - Ecuaciones diferenciales – Ecuaciones en diferencia.
Autores: M. González; R. Longás; A. Angelelli.

ÁLGEBRA LINEAL

Contenido: Vectores - Planos - Sistemas de ecuaciones lineales y matrices - Espacios Vectoriales – Base y dimensión - Autovalores y autovectores – Diagonalización – Aplicaciones a la geometría - Transformaciones lineales.
Autores: C. Guzner; A. Hurman; L. Casetti; M. Rey Tudela; R. Longás; A. Angelelli; Y. Farés; L. Zaragoza; M. Welti; L. Repetto; S. Segura; M. Zabal

Esta serie integra de un modo interactivo la teoría y la práctica de los primeros cursos de Matemática en la Universidad.

Estos textos están desarrollados en celdas y sub-celdas, individualizadas por dos corchetes a su derecha, las cuales aparecen cerradas mostrando una organización jerárquica de los temas. Fácilmente el alumno puede acceder rápidamente a la sección o sub-sección deseada. Están preparados para guiarlos a descubrir gradualmente los nuevos conceptos y propiedades a través de la experimentación. Constan de ejemplos y problemas de exploración, algunos con soluciones ocultas para apoyar el aprendizaje del estudiante y permitir su autocorrección y otros sin soluciones para obligarlos a pensar, investigar, experimentar y crear.

A modo de ejemplo, a continuación, se transcribe una hoja de cuaderno:

Aproximación cúbica

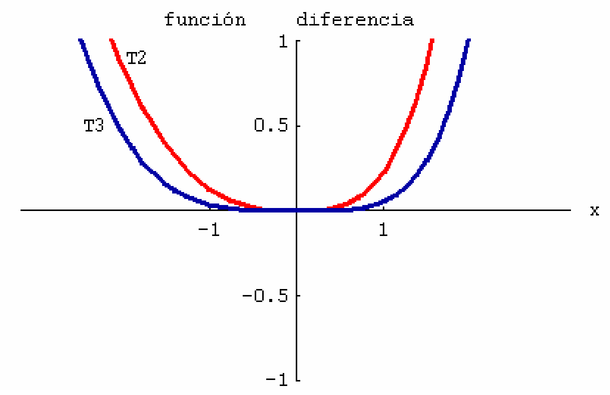
11- Trate de encontrar ahora un polinomio de grado 3 que se aproxime a la función dada en el ejercicio 5.

12- Grafique de la misma manera que lo hicimos en los casos anteriores (ver ejercicio 7).

13- ¿Qué observa en el gráfico que realizó?

14- Grafique usted la diferencia entre f (x) y pol3 (x) en un entorno $E_{(0)}$

15- Muestre en un mismo gráfico las dos funciones diferencia T_2 y T_3 , correspondientes a las dif_2 y dif_3 respectivamente.



16- Compare los gráficos de ambas funciones diferencias y saque su conclusión

17- Haga una tabla para comparar en este último caso cuáles son las derivadas que coinciden de la función y del polinomio aproximante.

Lamentablemente en esta transcripción no se aprecia la metodología interactiva del cuaderno original.

Los cuadernos tienen la versatilidad de permitir la inserción de aclaraciones, comentarios y gráficos. Esto permite al alumno elaborar su propio texto y gozar de la posibilidad de actualizarlo permanentemente.

Si bien el material estuvo destinado inicialmente a estudiantes de Licenciatura en Economía, la flexibilidad y la calidad de esta Serie, permiten su adaptación a otras orientaciones y otros niveles de población estudiantil.

La elección de la herramienta tecnológica se efectuó sobre la base del conocimiento de las posibilidades que ofrece el software en la enseñanza.

El entorno gráfico facilitó significativamente la visualización, interpretación e ilustración de las distintas situaciones. Los alumnos pueden explorar y convertir, realizando modificaciones mínimas, cada ejemplo en infinitos ejemplos; como así también agilizar los tediosos cálculos que no desarrollan habilidades matemáticas sino, por el contrario, distraen al estudiante del problema principal.

El temario no está estructurado de un modo clásico. Las nuevas estrategias planeadas facilitan la apropiación de los saberes a los estudiantes. Los temas son presentados a partir de situaciones problémicas que motivan la necesidad de construir el conocimiento involucrado. Se trata de un cambio de capacidades cognitivas, esgrimido por la aparición de las expresiones e imágenes digitalizadas de esta nueva etapa electrónica.

La implementación de los mencionados textos se llevó adelante con los alumnos de una carrera de esta Facultad cuya currícula incluye las tres asignaturas mencionadas. La secuencia de estas últimas favorece sus respectivos desarrollos: El curso de Cálculo II realiza la extensión de los conceptos de Cálculo I, a funciones de varias variables independientes. Por este motivo es recomendable cursar previamente, Cálculo I. Además dada la complejidad de los espacios y la cantidad de componentes utilizadas hace necesario la simplicidad que proporciona el tratamiento matricial, esto manifiesta la conveniencia del cursado previo de Álgebra Lineal. De este modo se logró un emprendimiento que permitió efectuar el seguimiento de los alumnos en cada una de las tres asignaturas.

A través de esta experiencia, pudimos apreciar que los estudiantes disfrutaban más de la clase realizada en el gabinete de informática, que en el aula tradicional. Nos alejamos de esta última y de la costumbre arraigada de tiza y pizarrón, para "compartir" con los alumnos el gabinete de computación. La clase magistral expositiva fue sustituida por talleres activos, en los que los alumnos retoman el perdido hábito de la lectura, experimentan y participan en la resolución de variadas situaciones del contexto.

Conclusiones

A modo de conclusión, creemos que los resultados obtenidos constituyen un avance en la Didáctica de la Matemática.

La experiencia nos señala que la tecnología favoreció la rapidez y claridad de conversión entre las representaciones y entusiasmó a los alumnos. Si bien el aprendizaje contaba con gran ayuda gráfica, no estaba centrado exclusivamente en ella; el énfasis fue puesto en el cambio de registros semióticos y la articulación entre ellos. Creemos que la dinámica de esta articulación entre las variadas representaciones y la metodología utilizada, permitió que un gran número de alumnos otorgara significado a las nuevas nociones.

Las características del *"libro interactivo computarizado"* lo convierten en un elemento educativo importante adecuado para las necesidades presentes y futuras. En particular, estos libros interactivos son apropiados para la enseñanza a distancia aprovechando las ventajas que ofrece la comunicación a través de Internet o de otros sistemas similares, permitiendo de esa manera promover, difundir y facilitar el aprendizaje.

Por último, es dable destacar el valor cultural de esta Serie, ya que las traducciones de otros textos de esta índole (por ejemplo, de la maravillosa obra de Uhl, Porta y Davis), son en general inadecuadas debido principalmente a importantes diferencias entre la cultura sajona y la latina.

Referencias bibliográficas

Haeussler, Ernest. F.; Paul, Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración y Economía*, Editorial "Iberoamérica".

Hoffmann, Laurence D.; Bradley, Gerald L. (1997). *Cálculo aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales.* Editorial McGraw-Hill.

Stewart, James (1998). *Cálculo.* International Thomson Editores.

Sydsaeter, Knut; Hammond, Peter J., (1996*), Matemáticas para el Análisis Económico,* Editorial Prentice - Hall, INC .

Tan, S. T., (1998), *Matemáticas para Administración y Economía,* International Thomson Editores, S. A. de C.V..

Hughes, Deborath, Hallett, Andrew M, y otros, *Calculus,* New York, Editorial John Wiley & Sons (1994*).*

Davis, Bill; Porta, Horacio; Uhl, Jerry. *Calculus & Mathematica Derivatives: Measuring Accumulated Growth,* New York, Editorial Addison – Wesley.

Davis, Bill; Porta, Horacio; Uhl, Jerry (1994). *Calculus & Mathematica Integrals: Measuring Accumulated Growth*, New York, Editorial Addison – Wesley.

Wolfram, Sthephen, *Mathematica*_, (1997), Second Edition. Addison-W..

Duval, Raymond (1999). *Semiosis y pensamiento humano,* Universidad del Valle

Cantoral Uriza, Ricardo (1998). *Enseñanza y aprendizaje en ambientes tecnológicos: el caso de la matemática escolar,* Serie Antologías N° 3.Cinvestav.

Ecuaciones diferenciales bajo resolución de problemas con apoyo de Learning-Space y Mathematica

Rubén Darío Santiago A.
ITESM-CEM. México
rsantiag@campus.cem.itesm.mx

Resumen
En este trabajo se presentan las líneas generales de un curso de Ecuaciones Diferenciales para ingeniería rediseñado bajo la perspectiva de la misión 2005 del ITESM. El curso se diseñó considerando la metodología de resolución de problemas, el uso de tecnología de comunicación electrónica (Lotus Notes-Learning Space) y la potenciación que se puede obtener con el uso del paquete Mathematica.

Introducción

En el Campus Estado de México del Sistema ITESM, hemos reorientado tanto los objetivos como la metodología de enseñanza de las matemáticas y la estadística durante los últimos cuatro años. Actualmente el trabajo de los estudiantes y profesores considera el desarrollo y fomento programados de habilidades, actitudes y valores aparte de los conocimientos mismos acordes con la Misión del Instituto (ITESM, 1996). En particular, hemos incorporado en los objetivos de nuestros cursos que los estudiantes aprendan a discutir y argumentar matemáticamente, a reflexionar y pensar críticamente y a comunicar sus ideas, también se pretende que los alumnos tengan un manejo integral de la matemática, que se apoyen en la tecnología y que desarrollen la capacidad de transferir conocimientos matemáticos en diferentes registros (gráfico, algebraico, numérico, etc). Tan ambiciosos propósitos no pueden ser el objetivo de una sola materia, ni de un solo curso, sino el resultado de la interacción de todas las materias que un estudiante lleva a lo largo de toda su carrera. En matemáticas, en particular, nos debemos ocupar de establecer líneas que nos permitan delimitar y establecer la forma en que se puede incidir de manera natural sobre los propósitos institucionales, lo que nos llevará, finalmente, a acciones concretas dentro del salón de clases.
De esta forma, y dentro del proyecto de rediseño del departamento de matemáticas del ITESM-CEM, se ha estructurado un curso de Ecuaciones Diferenciales que integra objetivos, aprendizajes, metodología y evaluación matemática (Ortega et al, 1988). En este trabajo se presentan los ejes fundamentales de nuestro curso.

Descripción del curso rediseñado

La estrategia general de curso se fundamenta en la metodología de resolución de problemas que tiene referentes epistemológicos constructivistas y que permiten vincular la matemática con contextos reales, observar y evaluar habilidades matemáticas de alto nivel, así como fomentar la independencia y responsabilidad por el aprendizaje en nuestros estudiantes (Singhanayok, 1998).

En el curso se utilizan los paquetes computacionales Mathematica y Learning-Space, que permiten apoyar aprendizajes gráficos, numéricos, algebraicos, etc y potenciar la capacidad de resolver problemas (Alavi,1994; Redmod, 1999). El curso ha sido montado en la plataforma tecnológica Lotus-Notes Learning-Space, dicha plataforma permite organizar el curso, dosificar actividades, evaluar aprendizajes, participar en discusiones virtuales, etc, por medio de sus bases de datos (Schedule, Media Center, Course Room, Profile y Assessment).

Aún cuando la tecnología no sea la solución para provocar aprendizajes, junto con la metodología de resolución de problemas se complementa para generar, desarrollar y fortalecerlos. Es necesario, sin embargo, que en el desarrollo de la habilidad de uso de la tecnología se incorpore la reflexión sobre cuándo y cómo los métodos de solución por computadora son adecuados (McCoy, 1998).

El curso de Ecuaciones Diferenciales se elaboró considerando los cuatro elementos generales: objetivos, aprendizajes, metodología y evaluación (Rico,1998), que surgen de manera natural al considerar al aula como espacio principal de trabajo y al profesor como el agente fundamental del proceso educativo. En los párrafos siguientes describiremos brevemente estas cuatro componentes.

Objetivos

- ✓ Facultar para un uso activo de las ecuaciones diferenciales enfatizando la modelación de situaciones complejas
- ✓ Articular los conocimientos del ecuaciones diferenciales para enfrentar situaciones con un alto grado de incertidumbre.
- ✓ Fomentar una actitud de independencia, a partir de la valoración del trabajo propio, que permita el reconocimiento o la imposición de patrones matemáticos en situaciones familiares o novedosas.

Nuestros objetivos buscan el garantizar un nivel de comprensión tal de los conceptos del cálculo y las ecuaciones diferenciales que permitan su uso para resolver problemas y crear estrategias propias para enfrentar situaciones conocidas o desconocidas en ambientes matemáticos y extramatemáticos.

Aprendizajes

El rediseño del curso de Ecuaciones Diferenciales tiene la intención de desarrollar aprendizajes significativos y las habilidades de vincular las ecuaciones diferenciales con problemas cotidianos, de proponer estrategias de solución y de utilizar la tecnología adecuada para analizar y resolver problemas. Estas habilidades se vinculan directamente con el trabajo en equipo, aprender por cuenta propia, uso de la tecnología, capacidad de análisis, síntesis y evaluación, capacidad de identificar, resolver y generar problemas y la buena comunicación oral y escrita, que forman parte de la Misión 2005.

Los contenidos de un curso elemental de Ecuaciones Diferenciales deben partir desde los conceptos básicos y los algoritmos de solución elementales hasta temas como series de Fourier y teoría de transformadas de Laplace. La modelación de fenómenos en física, ingeniería y medio ambiente es un requisito necesario para vincular el curso con contextos reales.

Metodología

Para desarrollar los aprendizajes y concretar los objetivos, el curso rediseñado sigue los principios de la tabla (1). De acuerdo con los principios los tipos de actividades que se proponen en el rediseño son:

- ✓ Resolución de problemas: que permite y fomenta estrategias numéricas, gráficas, analíticas y las vincula entre sí. Muestra el poder de las ecuaciones diferenciales en la solución de problemas.
- ✓ Prácticas guiadas con exploración computacional: en donde se utiliza la tecnología para descubrir y afianzar aprendizajes.
- ✓ Proyectos: se trabajan casos prácticos y se busca integrar conocimientos con otras áreas.
- ✓ Resolución de ejercicios: se trabaja y consolida la parte operativa de la ecuaciones diferenciales.
- ✓ Lecturas de temas relacionados con ecuaciones diferenciales: que vinculan el curso con problemas reales.
- ✓ Discusión grupal: desarrolla habilidades inherentes a la discusión matemática.

Ambiente de resolución de problemas.	Cultiva habilidades de: comunicación efectiva oral y escrita, escucha, defensa de nuestras ideas, aceptación de ideas de otros, discusión y argumentación matemática, transmisión de conocimientos, aprendizaje cooperativo, análisis y resolución de problemas. modelación de fenómenos, pensamiento crítico, creatividad.
Uso del paquete computacional Mathematica.	Se analizan con mayor profundidad tanto los conceptos matemáticos del curso como las aplicaciones. Simulación computacional de diversos problemas para su posterior análisis usando herramientas y conceptos de ecuaciones diferenciales.
Uso de la plataforma tecnológica Lotus-Notes Learning Space.	Se transmite información y se coordinan acciones utilizando medios electrónicos. Permite el desarrollo de habilidades de autoaprendizaje. [4]

Tabla (1): Principios del curso.

Los contenidos del curso se estructuraron en módulos. Cada módulo contempla por lo menos una actividad de cada uno de los tipos indicados en el párrafo anterior. Las actividades pretenden fortalecer aprendizajes previos, iniciar el aprendizaje de nuevos conocimientos y preparar el camino para futuros aprendizajes. De esta manera se establece una vinculación entre los módulos.

El curso se apoya en diversas tecnologías de diferentes formas. En la tabla (2) se muestran los elementos tecnológicos junto con los objetivos y usos propuestos.

[4] La plataforma Lotus Notes- Learning Space es una herramienta que cuenta con cinco bases de datos: **Organizador de Actividades, Centro de Medios, Grupo de Discusión, Perfil de Alumnos y Profesor y Sistema de Evaluación**.

Evaluación

En el curso se propone y utiliza un sistema de evaluación matemática que considera conocimientos, habilidades, transferencia, autoevaluación del alumno, coevaluación del grupo y evaluación del profesor. Con este esquema de evaluación se evalúan hechos, procedimientos y sistemas conceptuales matemáticos. En la evaluación se toma en cuenta el trabajo realizado en clase y en actividades utilizando la plataforma tecnológica Lotus-Notes, se reduce el impacto de exámenes, sin descuidar resultados se enfatiza en los procesos Cada uno de los tipos de actividades propuestos tiene objetivos, guía y formatos de evaluación.

Tecnología	**Objetivos**	**Usos**
Computadora portátil	Utilizar los elementos tecnológicos de vanguardia.	Actividades de resolución de problemas. Prácticas guiadas con exploración computacional, tareas y proyectos.
Paquetes Mathematica y Excel	Explorar, visualizar y aplicar lo visto en el curso para analizar y resolver problemas complejos.	
Plataforma Lotus Notes-Learning-Space	Facilitar el proceso de información y colaboración entre estudiantes y profesor. Aplicar la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje.	Información del curso, coordinación de acciones entre alumnos y profesor, encuestas, lecturas y actividades.

Tabla (2): Tecnologías de apoyo.

Ejemplos

Las prácticas de exploración computacional se presentan en hojas de trabajo del paquete Mathematica (ver figura 1) y las indicaciones en Learnig-Space. El contenido incluye los objetivos a alcanzar, uso de los comandos, explicación de los temas a la luz de los comandos y la programación del paquete, ejemplos y ejercicios. Entre los beneficios se tiene que los alumnos adquieren habilidades en el uso del paquete y reconocen la potencialidad de su uso. Sin embargo, en la práctica docente encontramos que el uso excesivo reduce las habilidades algebraicas para resolver ecuaciones diferenciales.

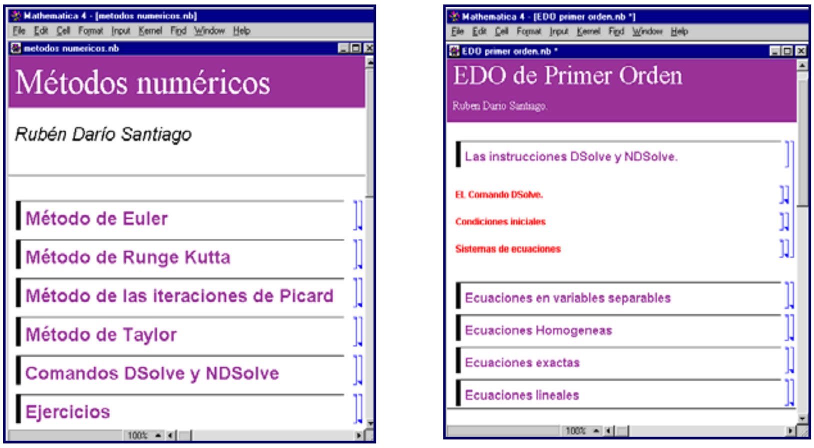


Figura 1: Prácticas de exploración

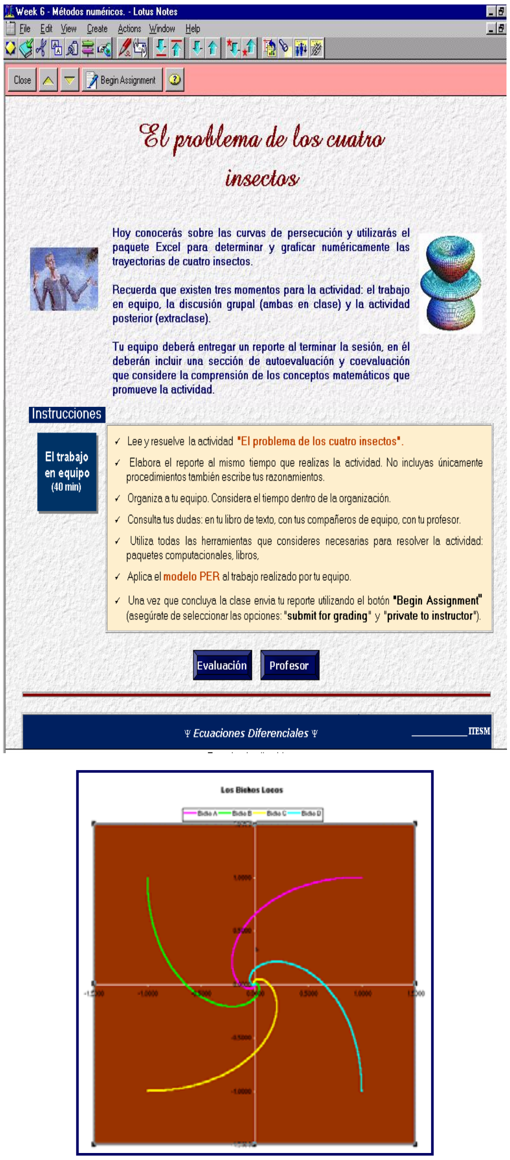


Figura 2: Problema de los cuatro

En resolución de problemas se tiene la actividad de los cuatro insectos. En ella se pide analizar el movimiento que realizan cuatro insectos colocados inicialmente en las esquinas de una mesa cuadrada. Los insectos se mueven con velocidad constante y cada uno de ellos observa directamente al insecto que lo precede en la mesa. La actividad se presentó a ocho equipos de entre tres y cuatro estudiantes en la plataforma Learning-Space (ver figura 2). El problema tiene el objetivo de preparar a los alumnos en las técnicas numéricas (Euler, Euler modificado y Runge Kutta) que se verán en el curso en sesiones posteriores. La matemática que usan los alumnos varía desde la geometría elemental hasta el uso de relaciones trigonométricas complicadas. La idea básica que siguen en su análisis es suponer que el movimiento es rectilíneo para pequeños intervalos de tiempo. Después usan los paquetes Excel y Mathematica para describir el movimiento. Todos los equipos analizaron y plantearon buenas estrategias de solución para el problema. Ningún equipo pudo analizar el movimiento cuando se les pidió restringieran el número de insectos a tres y sólo cuatro equipos pudieron avanzar analizando el caso de cinco insectos. Las dificultades que se observaron estuvieron ligadas con el uso de la trigonometría y la la forma de establecer una relación de recurrencia para resolver el problema, sólo un equipo pudo establecer claramente las condiciones de esta relación y las gráficas del movimiento que obtiene se muestran en la figura dos de este trabajo.

En el problema-proyecto final del curso se pide modelar algún fenómeno físico ó biológico clásico como: el problema restringido de los tres cuerpos, el péndulo doble, la competencia entre tres o mas especies, etc. Cada equipo recibe un proyecto diferente. La actividad tiene la finalidad de conjuntar todos los aprendizajes del curso y observar la capacidad de análisis y de resolución de problemas desarrolladas. La actividad se desarrolla en tres sesiones presenciales. En la primera los alumnos generan un plan de acción para determinar los temas que pueden ser útiles y los que requieren estudiar para determinar una respuesta al problema. En la segunda los alumnos reúnen el material investigado, lo discuten al interior de sus equipos, elaboran una propuesta de solución y la reportan junto con sus estrategias. En la última sesión presentan y dirigen la discusión de sus resultados en el pleno del grupo.

Entre los resultados podemos señalar que: los alumnos tienen dificultades en plantear las ecuaciones diferenciales que modelan los fenómenos y tienden a modificar sus hipótesis a casos muy simples. Las dificultades algebraicas persisten pero se apoyan en la paquetería computacional para reducirlas. En esta actividad dos equipo presentaron novedosas soluciones incorporando elementos de teoría del caos y el paquete Pspice junto con un análisis detallado usando Mathematica.

Comentarios finales

El curso propuesto se implementó por primera vez en Agosto-Diciembre de 2000. En el año lectivo 2001 La Dirección de Efectividad Institucional de la Rectoría Sur del ITESM realizó diversos estudios de evaluación Los estudios realizados abarcan tanto lo cualitativo (usando encuestas de opinión aplicadas a alumnos y a profesores del curso), como lo cuantitativo a través de la aplicación de exámenes que determinan conocimientos y la habilidad para transferirlos a las áreas de física, biología e ingeniería. Las pruebas consideraron: el índice de consistencia de actividades colaborativas y una evaluación comparativa en diferentes esquemas de trabajo. Los resultados indican que: la comprensión de los algoritmos para resolver ecuaciones diferenciales no tiene variación perceptible con respecto a grupos convencionales; cambia la percepción que los alumnos tienen de las ciencias exactas, apareciendo en mayor medida el papel de las matemáticas y valorando de manera significativa sus aplicaciones; los alumnos adquieren más confianza en sus capacidades para resolver problemas y en general enfrentan con éxito situaciones de alta complejidad y presión emotiva.

Referencias bibliográficas

ITESM. (1996), *La misión 2005*. Sistema ITESM, México.

Ortega, P. Lezama, J. Ruiz, B. Suárez, L. Cuenca, P. (1988), *La resolución de problemas en las clases de matemáticas ilustrada: Una red que prepara algunas situaciones típicas del cálculo.* México, IPN.

Singhanayok, Ch. (1998), *The effects of cooperative learning an learner control on students' achievement, option selections, and attitudes.* Educational Technology, Research and Development, pp. 46-64, EUA.

Alavi, M. (1994). *Computer mediated collaborative learning: an empirical evaluation.* MIS Quaterly, num 18(2), pp. 159-174, EUA.

Redmod, Wa. (1999), Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computes as a tool. Journal for research in Mathematics Education, num 19(1), pp 3-25, EUA.

McCoy, L.P. (1998), *Computer-Based mathematics Learning*. Journal of research on computing in education, num 28(4), pp 438-460, EUA.

Rico, L.(1998), Complejidad del curriculo de matemáticas como herramienta profesional. Relime 1, México.

Métodos informáticos en la resolución de problemas matemáticos

Douglas Navarro
Universidad Nacional. Universidad de Costa Rica. Costa Rica
dnavarro@una.ac.cr douglas.navarro@wanadoo.fr.

Resumen
La posibilidad de automatizar los procesos es un elemento de cambio muy importante en nuestra sociedad y la disciplina matemática es particularmente susceptible a este hecho.
Este material se interesa en trabajar sobre "el pensamiento" utilizado en la frontera de estas dos disciplinas. En particular en los métodos de solución de problemas.
El desarrollo que se presenta permite resolver la búsqueda de la suma algebraica de una serie entera dada (lo mismo que mostrar su gráfico, sus derivadas y sus primitivas). Pero sobre todo permite dar al estudiante una visión de conjunto más precisa y justamente más gráfica del tema.

Introducción[5]

La posibilidad de automatizar los procesos constituye un elemento de cambio en nuestra sociedad al cual la disciplina matemática es también susceptible. Un elemento cuya "naturaleza" (digital, algorítmica, etc.) necesariamente modifica los procesos en cuestión.
Este material se interesa en subrayar algunas manifestaciones del "pensamiento" utilizado en la frontera entre la disciplina matemática y la informática. Los objetivos de fondo de tal remarca son dos, a saber: proponer una alternativa a la utilización de programas tipo *caja negra*[6] y subrayar el potencial de retroalimentación de la ingeniería informática utilizada para automatizar el problema.
En el taller el tema se presentó a través de un ejemplo: se trata de un trabajo orientado a "manipular" series enteras, sumarlas (en el sentido de encontrar su suma analítica), graficarlas, "referenciarlas", etc.
Este trabajo, se realizó bajo la consigna de producir un desarrollo "abierto" (en contraste con los programas tipo *caja negra*). Esta "apertura" se concreta mediante la puesta en evidencia del modelo de representación y de los mecanismos de solución (operadores y estrategias) desarrollados como soporte al desarrollo informático.
El programa de ordenador obtenido permite producir una *situación didáctica* diferente en la que la solución obtenida puede ser detallada en todos sus pasos según demanda del usuario, al mismo tiempo que se propone la posibilidad para el usuario de realizar una solución paso a paso. Además, a partir de este ejemplo se remarca como la ingeniería informática en función de su propia naturaleza brinda un aporte significativo al tema.

Primera sesión

El primer día del taller se presentó el tema y la metodología de resolución de ejercicios incluyendo el uso del programa de computadora que ilustra el ejemplo[7]. La exposición se basó en ejemplos y ejercicios.

Se enfatizaron los siguientes aspectos:

- la producción de una respuesta directa (tipo *caja negra*).

---

[5] Originalmente se habían planeado además otros ejemplos pero finalmente resulto mejor desarrollar solamente el ejemplo sobre el tratamiento de series enteras.
[6] Programas caracterizados por su producción de una respuesta desprovista de explicaciones.
[7] Se trata de una versión limitada del programa, esto a fin de acotar el tema en función del tiempo disponible.

- la ventana en que presenta el desarrollo de la solución.
- la ventana en que se permite una solución paso a paso.

I punto: recordatorio.

Se presento una transparencia recordando las series de algunas funciones usuales. Entre ellas las siguientes:

$$\frac{1}{1-x}, \frac{1}{(1-x)^2}, -\ln(1-x), arctan(x), \arg th(x), \exp(x), \cos(x), ...$$

II punto: metodología de trabajo.

Se presentó la metodología, a saber: dada la serie en cuestión, se intenta ver si corresponde a uno de los formatos que propone a continuación la ventana del programa mencionado.

Entrada de datos:

Escoja el formato que conviene:

- (●) $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{x^i}{i!} = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + b_3 \frac{x^3}{3!} + b_4 \frac{x^4}{4!} + b_5 \frac{x^5}{5!} + \dots$
- ( ) $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{(i+1)!}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (i+1) x^i = b_0 + b_1 2x + b_2 3x^2 + b_3 4x^3 + b_4 5x^4 + \dots$
- ( ) $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{i!}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + \dots$
- ( ) $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{(i-1)!}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{x^i}{i!} = b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2} + b_3 \frac{x^3}{3} + b_4 \frac{x^4}{4} + b_5 \frac{x^5}{5} + \dots$

Ingrese la secuencia {*b*}

b_0	b_1	b_2	b_3	...											

Aplicar

Salida del resultado:

El Radio: ___

La Suma:

Remarca: nótese que en el último formato el término *(i-1)!* requiere una definición para el caso $i=0$. Se define entonces $m!=0$ cuando $m<0$.

Si la serie corresponde a uno de tales formatos bastará hacer un "clic" en el formato deseado e ingresar una secuencia generatriz de la sucesión **{b_i}**. Entonces, el programa dará el radio y la suma analítica de la serie (cuando la serie corresponde a una expresión compuesta de funciones usuales).

III punto: ejemplos.
Se presentaron inicialmente varios ejemplos[8] sencillos.

Los ejemplos fueron los siguientes:

1) $5 + 12\,x - 7\,\dfrac{x^2}{2!} + 13\,\dfrac{x^3}{3!} + 5\,\dfrac{x^4}{4!} + 12\,\dfrac{x^5}{5!} - 7\,\dfrac{x^6}{6!} + 13\,\dfrac{x^7}{7!} + \ldots$

En este ejemplo se nota a simple vista como la serie corresponde al primer formato el cual nombraremos ***a*** (los otros serán respectivamente: ***b, c, d***). En cuanto a una secuencia generatriz es suficiente tomar: 5, 12, -7, 13.
Así, la utilización del programa básicamente se reduce a lo siguiente:

Datos:
Formato: ***a***
Secuencia: 5, 12, -7, 13
Resultados:
El radio: $+\infty$
La Suma: $-\,ch(x) + 12.5\,sh(x) + 6\cos(x) - 0.5\sin(x)$

2) $-5+-5\cdot 2x-5\cdot 3x^2+5\cdot 4x^3-5\cdot 5x^4-5\cdot 6x^5-5\cdot 7x^6+5\cdot 8x^7-5\cdot 9x^8+\ldots$

Este ejemplo corresponde al tipo ***b*** y la secuencia es identificada fácilmente. Entonces la utilización del programa da:

Datos:
Formato: ***b***
Secuencia: -5,-5,-5,5
Resultados:
El radio: 1
La Suma: $-\dfrac{5}{(1-x)^2} + 10\left(\dfrac{1}{1-x^4}\right)'$

Remarca: nótese que la derivada que queda propuesta no es desarrollada pues no interesa.

3) $-5 + 3\,x - x^2 + 3\,x^3 + 7\,x^4 - 5\,x^5 + 3\,x^6 - x^7 + 3\,x^8 + 7\,x^9 - \ldots$

En esta ocasión el formato es el ***c*** y la secuencia es inmediata. La aplicación del programa produce la siguiente:

[8] En los ejemplos se debe asumir que el número de términos presentados es suficiente para adivinar correctamente la secuencia $\{b_i\}$.

Datos:

Formato: ***c***

Secuencia: -5, 3, -1, 3, 7

Resultados:

El radio: 1

La Suma: $\dfrac{-5 + 3x - x^2 + 3x^3 + 7x^4}{1 - x^5}$

4) $-x - \dfrac{x^2}{2} + 3\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + 3\dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^8}{8} - \dots$

Este ejemplo tiene la particularidad de no mostrar un término de índice cero, no obstante, él corresponde al formato ***d***, en el cual justamente este término no aparece aún en el caso de que el valor $\boldsymbol{b_0}$ no sea 0.

Datos:

Formato: ***d***

Secuencia: -1,-1,-1, 3

Resultados:

El **radio:** 1

La Suma: *argth(x)* – 1/2 *ln(1+x²)* -2 *arctan(x)*

Los ejemplos fueron revisados enfatizando la utilidad de la puesta en formato.

<u>**III punto:** ejercicios.</u>

Se propusieron entonces algunos ejercicios en los cuales la puesta en formato requería algunas manipulaciones sencillas. Son los siguientes:

1) $9 - 2x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{3x^4}{8} - \dfrac{x^5}{60} + \dfrac{x^6}{240} - \dfrac{x^7}{630} + \dfrac{x^8}{4480} - \dots$

que se puede escribir como:

$$9 - 2x + 3\frac{x^2}{2} - 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2} - \frac{x^7}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 7} + \frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2\cdot 7\cdot 8} - \dots$$

2) $5 + 4x + 3\dfrac{x^2}{2!} - 3\dfrac{x^3}{3!} + 9\dfrac{x^4}{4!} + 3\dfrac{x^5}{5!} + 3\dfrac{x^6}{6!} - 3\dfrac{x^7}{7!} + 9\dfrac{x^8}{8!} + 3\dfrac{x^9}{9!} + 3\dfrac{x^{10}}{10!} - 3\dfrac{x^{11}}{11!}\dots$

(*Sugerencia*: modificar los dos primeros términos pues no corresponden)

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x^{6n} + x^{6n+1} - x^{6n+3} - x^{6n+4})$

(*Sugerencia*: escribir algunos términos)

4) $3x + \dfrac{5x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + x^4 + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{5x^7}{7} + \dfrac{x^9}{3} + \dfrac{x^{10}}{2} - \dfrac{2x^{11}}{11} + \dfrac{x^{12}}{3} + \dfrac{x^{13}}{13} + \dfrac{x^{15}}{3} + \dots$

(*Sugerencia*: completar el factorial del denominador)

Los ejercicios fueron puestos en formato y luego el programa se encargó de terminar el trabajo. Se resalta el hecho de que el reconocimiento del formato en manos del usuario es un primer indicio de la nueva metodología desarrollada bajo requerimientos informáticos. En el material impreso entregado se incluyeron ejemplos más elaborados.

IV punto: el programa.
Se mostró someramente el programa evaluando un par de ejercicios y mostrando rápidamente la ventana que presenta en detalle el cálculo de la solución. Dicho detalle es mostrado en un formato particular pero que en el fondo corresponde a los pasos de lo que sería una demostración matemática usual en este tipo de ejercicio. Además, se mostró la ventana que permite la solución paso a paso siguiendo las ordenes del usuario. De este modo se incluyeron de manera explícita los elementos que plantean realmente el interés didáctico que se persigue.

Con esto terminó la primera sesión.

Segunda sesión:
Esta sesión estuvo dedicada primero a asegurar el material expuesto haciéndolo más familiar a los presentes (por ejemplo, mediante la utilización directa del programa).
El resto del taller fue dedicado a una discusión respecto a las implicaciones didácticas de la utilización de programas tipo *caja negra* versus la modalidad propuesta en el programa ejemplo.

I punto: un ejercicio ilustrativo.
Se propuso el siguiente ejercicio, el cual fue rápidamente puesto en formato y terminado de resolver con la ayuda del programa.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{x^{4i+1}}{(4i+1)}-\frac{x^{4i+2}}{(4i+2)}+\frac{x^{4i+3}}{(4i+3)}+\frac{x^{4i+4}}{(4i+4)}\right)$$

(*Sugerencia*: calcular los primeros términos)
Para la puesta en formato, se tomo en cuenta que correspondiendo al tipo ***d*** el parámetro b_0 debe en este caso ser buscado en la posición b_3. Así, la utilización del programa se sintetiza como:

Datos:
Formato: ***d***
Secuencia: 1, -1, -1,1
Resultados:
El radio: 1
La Suma: $arctan\ (x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

En este momento la utilización del programa se orientó a la observación de ventana del programa que muestra el detalle de la solución. La información en la ventana es aproximadamente la siguiente:

Secuencia	k	Coef	Var	Operador/Resultado

1, -1, -1, 1	**-1**	**1**	***X***	***Cambio de Base***

Secuencia	**k**	**Coef**	**Var**	**Ope/Res**
0, -1, 0, 1	**-1**	**-1**	***x***	***Arctan(x)***

+

Secuencia	**k**	**Coef**	**Var**	**Ope/Res**
1, 0, -1, 0	**-1**	**1**	***x***	***Ctr***

Secuencia	**k**	**Coef**	**Var**	**Ope/Res**
1,-1	**-1**	***-1/2***	x^2	***InvS***

Secuencia	**k**	**Coef**	**Var**	**Ope/Res**
1,1	**-1**	***-1/2***	$-x^2$	***Spl***

Secuencia	**k**	**Coef**	**Var**	**Ope/Res**
1	**-1**	***-1/2***	$-x^2$	$-1/2Ln(1+x^2)$

En dicha solución la atención se centra en la manipulación de la secuencia, en tanto, se remarca la evolución inercial de los parámetros que caracterizan la serie.
Así, aún cuando el tiempo no permitía un análisis detenido de las operaciones realizadas es visible como en lo referente a la manipulación de la secuencia, las operaciones son muy sencillas y se realizan con un objetivo preciso, la reducción de la secuencia a su expresión más simple posible.
Luego, se trabajo más detenidamente la ventana en la cual es el usuario quién escoge la secuencia de operaciones a ser aplicadas. En este caso el control de las modificaciones de la secuencia queda en sus manos, en tanto que las modificaciones inerciales sobre los otros parámetros son manejadas por el programa. El programa también controla la activación o desactivación de los iconos de los operadores disponibles según estos son aplicables o no.

II punto: discusión.
Se propone entonces a discusión la temática de fondo, es decir, la conveniencia de contar con alternativas "abiertas" para algunos programas tipo *caja negra* que son utilizados en la enseñanza de la matemática. También, se consideró el punto de en que medida los procedimientos de solución se modifican cuando el útil informático es desarrollado y la necesidad de que el profesor de matemática tenga conocimiento de los aspectos matemáticos de este procedimiento.
Se remarcó la importante influencia que la situación didáctica definida por la "modalidad" del programa utilizado pueden tener sobre la motivación tanto del estudiante como la del profesor.
La discusión se desarrollo con una participación interesada por parte de los presentes, los cuales representaban una población muy variada no sólo en cuanto a nacionalidades si no también en cuanto a áreas de trabajo.
Es difícil por supuesto hacer conclusiones al respecto, no obstante, es al menos posible decir que el interés de la discusión es un buen parámetro respecto a la validez de la problemática planteada.

Con esto terminó la última parte del taller.

<u>III punto:</u> <u>precisiones.</u>
Luego de concluido el taller y con un interés personal se solicitó a los presentes que lo tuviesen a bien, llenar una pequeña encuesta sobre su apreciación sobre el uso didáctico de programa de tipo *caja negra*. De dicha, encuesta aprovechamos de presentar algunos resultados (la numeración de las preguntas es la original):

1) Considera usted desde un punto de vista **didáctico** que el uso de estos servicios es:
   Totalmente positivo: (8)   A veces negativo: (4)   Siempre negativo: (0).
2) Creé usted que estos programas fueron inicialmente pensados para:
   El uso del profesional (ingeniero, matemático aplicado, etc.): (9).
   El uso didáctico: (4).
5) Cree usted que en la máquina (ordenador o calculadora) los problemas se resuelven tal como se resuelven tradicionalmente a mano.
   SI: (4)   NO: (9)
8) Cree usted que el uso de estos recursos es necesario.
   SI: (13)   NO: (0)
9) Cree usted que deben evolucionar, en el sentido de:
   Enseñar el procedimiento de solución
   SI: (12)   NO: (0)

Referencia

El trabajo sobre series enteras que se utilizó como ejemplo es parte de un trabajo más extenso sobre este tema que estoy llevando a cabo dentro del marco de mi proyecto de tesis de doctorado en Didáctica de la Matemática y de la Informática en el IREM de Toulouse bajo la dirección del prof. Andre Antibi.

Referencias bibliográficas

Antibi, Andre (1999). *La motivación en matemática: La del profesor? La del alumno?* Galicia, España: IX JAEM.
Apostol, Tom. (1976). *Matematical Analysis.* Massachusetts: Addison Wesley.
Reinhardt Fritz, Heinrich Soeder. (1997*). Atlas des Mathématiques*. Lib.Générale Française.

Resolución de Problemas

Nivel Básico

Los problemas en el ciclo de EGB o en el Nivel Primario

Aldo Bruno Pizzo
Instituto de Enseñanza Superior N° 2 Mariano Acosta. Buenos Aires. Argentina
Abpizzo@ciudad.com.ar

Resumen
La enseñanza de la matemática a través de los problemas constituye, si bien de manera no excluyente ni única, uno de los mejores procedimientos que responde a ese fin.
Las preguntas que nos hacemos los docentes son:

-¿Qué es un problema o un juego matemático?
-¿Qué significa resolver un problema o un juego?
-¿Cuáles son los pasos que puede seguir un alumno para resolver un problema?
-¿Cómo procedemos para que nuestros alumnos se interesen por las cuestiones que plantean los problemas en el aula y en la vida cotidiana?
-Nuestro alumnos, ¿manejan correctamente el lenguaje como para interpretar las consignas?
-Luego de enunciar un problema, ¿estamos seguros de que se trata de un problema significativo?.
-Hemos secuenciado correctamente las propuestas que damos a nuestros alumnos?. -¿Con qué criterios las hemos implementado?.
-¿Qué ejemplos podemos analizar para llevar al aula?. ¿Cuáles nos conviene recrear y por qué?

Estos y muchos otros interrogantes se presentan a diario en nuestra labor cotidiana dentro y fuera del aula. No existe una receta ni ningún algoritmo que nos respondan a estas preguntas. No por ello abandonamos nuestra profesión sino que todo lo contrario: constantemente modificamos, creamos y recreamos situaciones pensando en nuestros alumnos.
Creemos que del intercambio y del análisis de cada una de las realidades que vivimos los maestros, surgirá siempre una propuesta mejor.

¿Qué es un problema o un juego matemático?

Un problema es una situación que implica un propósito o un objetivo que hay que conseguir y que es aceptada por alguien. Sin esa aceptación no hay problema. Para alcanzar ese propósito hay que superar obstáculos que requieren deliberación porque quien o quienes afrontan el problema no conocen ningún algoritmo o ningún procedimiento previo para resolverlo.
Un problema debe representar un reto adecuado a las capacidades de quien intenta resolverlo. Debe tener interés en sí mismo, estimular el deseo de proponerlo a otras personas, no debe ser un problema con trampa o un acertijo ni dejar bloqueado inicialmente a quien lo ha de resolver.
Tampoco debe confundirse un problema con un ejercicio. Los ejercicios son cuestiones que de un golpe de vista se ve en qué consisten y cuál es el medio para resolverlas. Se suele tener a mano una receta que facilita la solución la cual exige poco tiempo, situación que no suele darse ante un problema o un juego.

¿Qué significa resolver un problema o un juego?

Se trata de un proceso de acontecimientos que llevan a recorrer diferentes etapas de un viaje: aceptar el desafío, formular preguntas adecuadas a cada caso; clarificar el objetivo; definir y ejecutar un plan de acción y evaluar la solución (o soluciones). Lleva consigo el arte del descubrimiento (heurística) aunque no de una manera previsible porque si el

método pudiera ser predicho, se convertiría en un algoritmo pasando de ser un problema a un simple ejercicio.
Todo esto representa sumergirse en el mundo particular del problema y se ponen de manifiesto las técnicas, las habilidades, las estrategias y las actitudes personales del individuo que aborda el problema.
La resolución de problemas es un proceso; es fundamentalmente un viaje el cual queda plasmado cuando se van cubriendo las siguientes etapas: deseo de acercarse al problema; aceptar el desafío; correr el riesgo de equivocarse; hallar la respuesta (o respuestas); comprender la pregunta; descubrir nuevos conocimientos; crear una nueva solución; re-crear el problema.
"Quiero; puedo; estoy dispuesto a aprender".Estas premisas hacen a un buen resolutor de problemas. Con la primera, aparece el deseo de afrontar el problema; con la segunda, se acepta el desafío con entusiamo y con la tercera, se está en posesión de técnicas y estrategias matemáticas oportunas. Todas ellas confluyen en la paciencia y en la perseverancia.
Gracias a todo ello, se aprende fundamentalmente, a entender el funcionamiento de nuestro propio razonamiento; a dominar nuestros estados de ánimo y a aumentar la confianza en nosotros mismos, es decir, nuestra autoestima.
La mejor forma de resolver problemas es resolviendo problemas. Cada problema afrontado con o sin éxito, nos enseña a resolver el siguiente. De alguna manera se aprende a aprender. Esta es una actividad que requiere fe (puedo); coraje (quiero); humildad (no lo sé todo); disciplina (estoy dispuesto a esforzarme para preguir aprendiendo). Me importa el camino y el proceso pero no el éxito. El proceso es quien enseña.
En la resolución de un problema o de un juego, se pueden seguir los siguientes pasos:

1.-Familiarización con el problema:

Antes de hacer, trato de entender
Me tomo el tiempo necesario
Actúo sin prisa y con tranquilidad
Juego con los elementos del problema
Trato de tener en claro de dónde parto y a dónde debo llegar
Busco información que me pueda ayudar
Encaro la situación con interés y con gusto

2.-Búsqueda de estrategias:

Busco y anoto ideas que se me ocurran
Empiezo por lo más fácil
Busco regularidades
Hago esquemas, dibujos; diagramas
Modifico el problema
Elijo un lenguaje apropiado
Busco semejanzas con otros problemas
Supongo el problema resuelto

3.-Llevar adelante la estrategia:

Llevo adelante las ideas de la etapa anterior
Trabajo con tenacidad y decisión
Trabajo flexiblemente en las situaciones que se complican demasiado
Cuando llegué el final, analizo la solución obtenida.

4.-Revisar el proceso y sacar consecuencias:

Miro el camino seguido con detenimiento
¿Cómo he llegado a la solución?. Si no lo hice, ¿por qué?.
Busco otro modo más sencillo u otra forma de resolverlo
Intento trasladar el método seguido a otras situaciones.
Reflexiono acerca de mis estados de ánimo
Pienso en mi proceso de pensamiento y saco conclusiones para el futuro.

¿Qué se hace en el aula con los problemas?

Teniendo en cuenta esta breve introducción acerca de qué es un problema, se podría ahora intentar ver cómo emplear nuestro tiempo en aprender y enseñar a resolver problemas. Sabemos que ésta no es la única manera de enseñar matemática. Pero sí entendemos que es básica.

Pensemos que los ejercicios de cálculo son un medio mientras que los problemas son un fin. Que un alumno no comprende un enunciado porque no entiende el lenguaje. Jean Christophe Yacooz sostiene que:

> *"Las matemáticas elementales son como la lengua: hay que balbucear y repetir la tabla de mutliplicar para retenerla; no basta ver una sola vez la ortografía de una palabra para escribirla correctamente. Repetición, sin duda, pero no repeticiones idénticas. Una computadora que dijera siempre lo mismo no sería una buena pedagoga. En esto consiste el arte del docente, tanto en la escuela elemental como en la universidad: saber presentar muchas veces nociones desde distintos ángulos.*
> *Al igual que no podemos vivir sin aprender a hablar nuestro idioma, forzoso es aprender algo de matemática. Galileo decía que la filosofía está escrita en este inmenso libro perpetuamente abierto ante nuestros ojos (me refiero al universo), pero no podemos comprenderlo si no aprendemos primero a conocer la lengua y los caracteres con los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y con sus caracteres propios ya sean símbolos o figuras planas o espaciales. Sin estos soportes propios de la matemática sería humanamente imposible comprender una sola palabra."*

Anthony Orton coincide con Yacooz cuando se pregunta:

> *"¿Qué aspectos particulares ofrecen los problemas en matemática que hacen que ésta sea tan compleja?.*
> *¿Nos permite el lenguaje comunicar el aprendizaje que ya se ha producido?.*
> *¿Es el lenguaje el vehículo que hace posible formular nuestras ideas y manipularlas para crear nuevos significados?.*
> *El desarrollo del lenguaje, ¿está ligado inexorablemente a un progreso cognitivo y no puede ser concebido como una entidad separada?".*

Orton finaliza planteando que: *"una muy seria complejidad en el aprendizaje de cualquier materia es la relación con el aprendizaje de la lengua. En un nivel superficial se pueden apreciar sus efectos cuando un alumno tiene problemas para desenvolverse en matemática porque no entiende el vocabulario específico empleado. En un nivel más profundo, comprender el lenguaje es entender el concepto que simboliza una determinada palabra."*

Si se tiene en cuenta que un problema es una cuestión de lenguaje, es coherente que se analicen diversos tipos de problemas teniendo en cuenta el enunciado (con y sin datos numéricos); la significación; la posibilidad de generalización; la demostración de una propiedad descubierta; el contexto real (aplicado a la vida cotidiana, por ejemplo) y el contexto puramente matemático; la discusión sobre la relevancia de los datos; etc.
Charnay sostiene que la resolución de problemas se constituye en una fuente de reflexiones acerca de la enseñanza de la matemática en todos los niveles de educación y posibilita un análisis interdisciplinario del enseñar y aprender.
Hacia la didáctica de la matemática confluyen la matemática; la psicología; la pedagogía; la epistemología; la filosofía; la historia; la sociología; la antropología.
La resolución de problemas es uno de los temas en los que se interesa la didáctica de la matemática: ni el único ni el excluyente.

A modo de ejemplo,

Se presentan a continuación algunos enunciados:
1.-Sobre números naturales:

> "Escriba un número de tres cifras significativas. A su derecha escriba el mismo número. Divida el número de seis cifras obtenido por 13; al cociente divídalo por 11 y al nuevo cociente por 7.¿Cuál es su conclusión?.¿Por qué?."

2.-Sobre geometría:

> A.-"¿Cuál es el mayor número de puntos que puede dibujarse en una pelota de fútbol de manera que cada uno de ellos quede a la misma distancia de los demás?"
> B.-
> 1.-"Adrián encontró un trozo de papel de afiche de 20cm por 15cm. Se le ocurrió construir con él una caja cuya base sea de 9cm por 16cm y tal que tenga la mayor altura posible.
> a.-Construila
> b.-Escribí los pasos que seguiste para hacerla
> c.-¿Cuál es, en cm, la mayor altura que puede tener la caja?
> d.-¿Tiene tapa?.
> 2.-En la caja, Adrián quiere colocar 112 dados que tiene desparramados por su habitación. Cada dado tiene una arista de 1cm.
> a.-¿Qué parte de la caja ocupará con sus dados?
> b.-¿Qué porcentaje del volumen de la caja queda sin ocupar?"

Para el docente

Frente a los problemas planteados, cabe reflexionar:

1.-¿En qué nivel se podrían dar ?.¿Por qué?.
2.-Analice y critique los enunciados y proponga, si lo cree conveniente, alguna modificación o algún reemplazo por otro. Fundamente su elección.
3.-¿Cuál o cuáles serían las dificultades con las que se podrían enfrentar los alumnos?.¿Cómo haría Ud. para encarar alguna solución con el objeto de subsanar las mismas?.

4.-Proponga alguna secuencia para tratar alguno de los contenidos conceptuales involucrados en estos problemas. Fundamente su elección.

A modo de cierre

Para finalizar, es necesario crear una cultura: la del cultivo de la lectura como algo cotidiano. La lectura de cualquier libro de texto. Lograr esto implicará que los alumnos recorran un largo camino en el campo de la adquisición de los conocimientos. Para ello creemos valioso algo que es esencial para cualquier docente que enseña: motivar. Es el desafío más grande. Es uno de los ideales de la tarea docente.

Por eso Adrián Paenza, un matemático argentino sostiene que la tarea docente tiene que ser la de generar preguntas en el alumno, no dar respuestas sino ¡motivar!. La importancia de la matemática reside esencialmente en que brinda una lógica que sirve para fundamentar cualquier argumentación. Esto es una gran tranquilidad como una seguridad parecida a la de la persona que cree en los diez mandamientos.

Por lo tanto, los docentes necesitamos imperiosamente reflexionar sobre nuestra tarea comprometida. De esta manera, tendremos gratificaciones impensadas.

Referencias bibliográficas

Yaccoz, Jean Christophe (1996). *La enseñanza de la matemática*. Madrid, España: Revista Investigación y Ciencia.

Santaló, Luis (1993). *La geometría en la formación de profesores*. Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Dalvarade, Rodolfo (1999). *Medimos, aproximamos y graficamos.*. Buenos Aires, Argentina: La llave

Crespo Crespo, Cecilia; Pizzo, Aldo; Ponteville, Christiane; Villella, José (2000). *Números, operaciones, funciones*. Buenos Aires, Argentina: Prociencia.

Crespo Crespo, Cecilia; Pizzo, Aldo; Ponteville, Christiane; Villella, José (2000). *¿La matemática en problemas?* Buenos Aires: Prociencia.

Orton, Anthony (1990). *Didáctica de la matemática*. Madrid, España: Morata.

Gardner, Martin (1992). *¡Ajá*!. Barcelona, España: Labor.

La calculadora y el desarrollo del pensamiento

Luis Campistrous Pérez, Celia Rizo Cabrera
Investigadores del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación de la República de Cuba
campi@infomed.sld.cu

Resumen
El presente trabajo se inserta en un grupo de trabajos que responden a la idea que subyace al trabajo de investigación de los autores: La calculadora y, en particular, la supercalculadora significa para la escuela algo mas que un auxiliar de calculo, es un instrumento que coadyuva al desarrollo del pensamiento de los alumnos, se convierte en una parte de las estrategias de resolución de problemas.
La aportación fundamental del trabajo apunta hacia la integración de las "supercalculadoras" y las calculadoras en el proceso de enseñanza como una herramienta heurística más, que junto a otras estrategias, técnicas y procesos metacognitivos, son utilizadas por los alumnos de manera natural en los procesos de resolución de problemas y adquisición de nuevas estrategias cognitivas
Este trabajo se desarrolla por un grupo de investigadores bajo la dirección de los autores del presente trabajo, hasta el momento se ha trabajado en las concepciones teóricas y en el diseño de la interacción con profesores, en este momento se trabaja en el montaje de varias acciones de intervención asociadas a dos tesis doctorales en el nivel primario y secundario respectivamente.

Introducción
El marco teórico de este trabajo descansa por una parte en la investigación didáctica sobre el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas y por otra en la concepción de los autores sobre el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática, más allá de un simple medio de cálculo. En el caso de este trabajo específico sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela de educación básica, se incluyen los aportes de los autores en cuanto al trabajo con conceptos (Campistrous,1993), juicios y razonamientos en la escuela y la concepción de un curso de geometría para la escuela de educación básica[1] en Cuba.
Estas líneas se desarrollan con un enfoque histórico-cultural de los procesos de enseñanza-aprendizaje, en el que se reconoce el papel de lo social y la interiorización en estos procesos sin desconocer su carácter personal, subjetivo e intransferible.
La aportación fundamental del trabajo apunta hacia la integración de las "supercalculadoras" y las calculadoras en el proceso de enseñanza como una herramienta heurística más, que junto a otras estrategias, técnicas y procesos metacognitivos, son utilizadas por los alumnos de manera natural en los procesos de resolución de problemas y adquisición de nuevas estrategias cognitivas. Por supuesto, sobre la base de la necesidad de conducción de estos procesos y, por tanto, de su inclusión explícita en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
Este trabajo se desarrolla por un grupo de investigadores bajo la dirección de los autores del presente trabajo, hasta el momento se ha trabajado en las concepciones teóricas y en el diseño de la interacción con profesores, así como el análisis de sus creencias respecto a la calculadora y su uso. En este momento se trabaja en el montaje de varias acciones de intervención asociadas a dos tesis doctorales y en el marco de un proyecto conjunto con la Universidad de Puerto Rico.

[1] Se está denominado educación básica a la primaria y la secundaria (nueve grados).

Algunas posiciones teóricas

Desde la aparición de las modernas minicalculadoras electrónicas, se planteó el problema de su introducción o no en la enseñanza de la Matemática. En un principio la discusión giró en torno a su efecto negativo para la adquisición y desarrollo de destrezas de cálculo consideradas imprescindibles por muchos y de ahí la prohibición de su uso en las aulas de numerosos países, prohibición que se mantiene hasta nuestros días en muchos lugares y en casi todos en situaciones de examen y concursos (García, R. 1988)

Para nosotros la calculadora y la supercalculadora tienen una aplicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática que va más allá de su utilización como herramienta de cálculo. En estos momentos trabajamos en tres líneas fundamentales en las cuales la calculadora puede contribuir al desarrollo del pensamiento de los alumnos:

- La resolución de problemas y la utilización de la calculadora como una herramienta heurística.
- La posibilidad de plantear procesos de búsqueda y formulación de conjeturas.
- La transformación de la Geometría escolar en Geometría dinámica.

En el primer caso hacemos referencia a la resolución de problemas como objeto de enseñanza, como una capacidad que se debe desarrollar en la escuela; al referirnos a esto no nos referimos al hecho de que la calculadora puede hacer cálculos complejos y simplifica el trabajo de los alumnos en la resolución de problemas complicados en el sentido tradicional o problemas de aplicación sino a la posibilidad de utilizar la calculadora como una herramienta que hace más poderosas y eficientes las estrategias heurísticas que se remontan a los trabajos de Polya, es decir, no para resolver problemas engorrosos y rutinarios sino como un instrumento que ayuda a buscar la solución de problemas en el sentido que aquí damos a ese termino:

Sin rehacer la discusión teórica al respecto (Campistrous y Rizo 1996, Labarrere 1987, Callejas 1994, D'Amore 1997) diremos que consideramos que se está frente a un problema cuando hay una situación que se ***quiere*** transformar y ***no se conoce*** la vía para hacerlo. El texto resaltado destaca elementos fundamentales del concepto, se <u>necesita</u> realizar una transformación, el sujeto <u>quiere</u> hacerla y <u>no sabe</u> cómo hacerla.

Es importante tener en cuenta esta concepción puesto que en la escuela bajo el nombre genérico de problemas se trabaja un tipo particular de problemas, los problemas rutinarios; por supuesto que tales problemas deben ser incluidos en el proceso didáctico para ejercitar, desarrollar rutinas necesarias, aplicar conocimientos, etc., pero el trabajo realizado por un numeroso grupo de investigadores, en particular nuestros propios trabajos, muestran que esto no es suficiente y que se requiere discutir la resolución de verdaderos problemas en el salón de clases.

Para la resolución de los problemas rutinarios se pueden desarrollar algoritmos que conducen a su resolución o en su lugar desarrollar rutinas que de una manera directa conducen a la solución sin un proceso de búsqueda que vaya más allá de la simple identificación de un algoritmo o rutina que conduce a la solución. Por el contrario, la resolución de un verdadero problema (en el sentido discutido antes) para ser eficiente requiere de algo más que una rutina o identificación, las investigaciones realizadas demuestran que cada sujeto desarrolla "estrategias", que para nosotros constituyen procedimientos generalizados en los que las acciones que los integran no tienen contenido concreto, sino que pueden ser realizadas con cualquier contenido, son de carácter general y cada sujeto las realiza de diferente forma según lo exijan las circunstancias.

Las investigaciones de realizadas por el grupo de trabajo dirigido por los autores, demuestran que estas "estrategias" pueden ser muy poco eficientes, pero los estudios realizados también ilustran que pueden llegar a serlo si están adecuadamente concebidas. La teoría psicológica que subyace a los trabajos de los autores fundamenta el hecho de que estos procedimientos generalizados son enseñables, lo que ha sido corroborado (al menos parcialmente) en algunos de los trabajos de intervención realizados por nuestro grupo de investigación (Cabañas, Guadalupe 1995)
Retomemos el concepto de estrategia (Campistrous y Rizo 1999) y precisemos en que sentido lo estamos utilizando para lo cual se hace necesario profundizar en el sentido que da Polya al mismo ya que a partir de su trabajo es que se comienza a utilizar el término en este contexto. La primera observación necesaria es que Polya no habla de estrategia, él hace referencia a métodos o procedimientos a los que da el significado de esquemas de actuación: "...la resolución de numerosos problemas depende esencialmente del procedimiento, línea de acción, del esquema de enlace entre sus operaciones, del modus operandi." (Polya, George 1976) Puede verse en esta cita (y en otros muchos textos) que aún sin hablar de estrategia Polya considera la necesidad de buscar "esquemas de acción" para resolver problemas y para hacerlo recurre a lo que él mismo llama Heurística, en el mismo sentido que ese término tenía para los griegos "las reglas del descubrimiento".
No obstante, cuando Polya habla de Heurística o de métodos de resolución está pensando básicamente en el profesor y su esquema de actuación se representa en forma de preguntas pensadas para que el profesor dirija el proceso de búsqueda y no para que el alumno encuentre ese esquema independientemente. El concepto de estrategia aparece en los continuadores del trabajo de Polya y también en relación con la heurística, en palabras de Schoënfeld: "Heurística significa una sugerencia general o estrategia independiente de cualquier tópico particular o materia que ayuda a los que resuelven problemas a aproximarse y comprender un problema y manejar eficientemente sus recursos para resolverlos. Existen muchas de tales estrategias... " (Schoënfeld, A. 1980)
Como vemos, el término estrategia adquiere un sentido diferente al que le ha asignado la psicología cognitiva y se asocia a la forma de actuación para enfrentar un problema y no a la adquisición de conocimientos. El punto de contacto entre ambas concepciones lo ofrece la consideración del aprendizaje como la resolución de problemas en las formas de enseñanza a través de problemas. Al mismo tiempo podemos apreciar que se trata de estrategias en su mayoría asociadas a un tipo de situación especial, que se exige del que resuelve la identificación de la posibilidad de utilizarla y no hay referencia a una estrategia que guíe la acción en la búsqueda de las posibles vías de solución y el control de su eficacia.
En este trabajo utilizamos el término estrategia en un sentido un poco diferente, que se acerca a la concebida por algunos psicólogos actuales, como refiere Betancourt (1997). Nuestra concepción de estrategia se apoya también en las ideas de la escuela histórico-cultural en la que las acciones humanas se conciben basadas en procedimientos de diferentes tipos, uno de estos tipos son los procedimientos específicos encaminados a realizar tareas muy concretas cuyas acciones y operaciones están muy determinadas y se realizan siempre de la misma forma (por ejemplo el procedimiento algorítmico de resolución de una ecuación de segundo grado); en el otro extremo aparecen los procedimientos generalizados (Talizina, 1992) cuyas acciones no tienen un contenido concreto, sino que constituyen esquemas de acciones aplicables en muchas situaciones de diferente contenido (un ejemplo puede ser un procedimiento generalizado de resolución de

ecuaciones en el que se incluyen procedimientos específicos de resolución de ecuaciones especiales, pero también los principios básicos que permiten reaccionar frente a ecuaciones que no son conocidas). Se sostiene por los representantes de esta escuela que tales procedimientos generalizados deben ser objeto de enseñanza pues reducen el volumen de contenido a aprender y preparan al hombre para enfrentarse a verdaderas situaciones problema.

Para nosotros entonces una estrategia (de resolución de problemas) es un procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es especifico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento “ad hoc” y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de la acción de búsqueda de la solución.

De la teoría de la escuela histórico-cultural se concluye que el hombre para actuar organiza sus procedimientos para la acción desde los específicos hasta los generalizados; esto significa que si no dispone de procedimientos aprendidos para una situación dada, el sujeto formará sus propios procedimientos, que pueden resultar eficientes en algún caso pero que en la mayoría serán ineficientes. Esto quiere decir que si nos conformamos con el solo hecho de que los alumnos más aptos desarrollen formas de actuación eficaces, entonces es suficiente el trabajo que se realiza en la actualidad en este sentido; pero si queremos que la escuela desarrolle por igual a todos los alumnos, entonces es necesario dedicar atención a la formación de dichos procedimientos.

Estas consideraciones traen al centro de la discusión el objetivo de la enseñanza de la matemática, Que pretendemos al incluir la Matemática entre las materias escolares fundamentales desde que se inicio la escuela hasta ahora? La respuesta casi unánime puede ser que para lograr dotar a los alumnos de un “saber matemático”, aunque casi nadie sepa precisar que uso hará el ciudadano corriente de ese saber matemático que incluye entre sus elementos fundamentales el teorema de Pitágoras que quizás mas del 90% de la población no ha comprendido ni utilizado en toda su vida.

Si queremos precisar que es el saber matemático, podemos obtener respuestas muy diferentes:

- Es un conjunto de hechos (como el teorema de Pitágoras)
- Es un sistema de herramientas, que sirven para realizar cálculos cuya utilidad escapa a una gran parte de la población como la resolución de triángulos.
- Es un formalismo, como el que aparece en los elementos de Euclides o en la teoría conjuntista al estilo Bourbakista.
- Es una forma de pensamiento.

Muy pocos optan por la última opción, casi nadie considera que la Matemática es una forma de pensar, de enfrentar problemas, de resolver problemas (si aceptamos que pensar es en esencia resolver problemas), sin embargo, la aparición de la tecnología contemporánea ratifica cada vez mas que la actividad distintiva del hombre es la resolución de problemas y que la matemática como actividad típicamente humana es esencialmente una actividad de pensamiento y no, una rutina o mecanismo que las maquinas pueden realizar. Una vez que admitimos que la tarea de la enseñanza de la Matemática es la de formar el pensamiento matemático, surge la necesidad de precisar en que consiste. Aunque esta pregunta no esta contestada a satisfacción para todos los autores, para nuestro grupo de investigación el pensamiento matemático consiste fundamentalmente en:

- Interpretar datos de la vida diaria y tomar decisiones en función de esa interpretación.
- Usar la Matemática en forma práctica desde simples sumas algorítmicas hasta análisis complejos (incluyendo estadísticos) y usar la modelación.
- Poseer un pensamiento flexible y un repertorio de técnicas para enfrentarse a situaciones y problemas nuevos.
- Poseer un pensamiento crítico y analítico tanto al razonar como al considerar razonamientos de otros.

Lograr esto requiere:

- ❖ Buscar soluciones, no memorizar procedimientos.
- ❖ Explorar patrones, no memorizar fórmulas.
- ❖ Formular conjeturas, no sólo hacer ejercicios.

Uso en la actividad escolar

Es aquí adonde nosotros consideramos que puede insertarse la calculadora como una herramienta heurística que contribuye a la formación de un pensamiento matemático, esto puede hacerse desde los primeros grados y utilizando tanto la calculadora como la supercalculadora. Una de las primeras líneas de trabajo de nuestro grupo en la fase formativa de la investigación ha sido el análisis de los problemas que pueden ser utilizados en el proceso de formación de las estrategias y la discusión de esas estrategias. En esta etapa el trabajo se ha realizado en talleres con maestros lo que ha permitido (en un proceso de investigación cualitativa) precisar algunas características de los problemas para conformar los sistemas a utilizar y la discusión de los procedimientos a utilizar para la elaboración de las estrategias.

Algunas de las características a que hemos hecho referencia son:

- Los problemas no deben ser muy complicados desde el punto de vista técnico, más bien deben ser problemas de enunciados simples, cuyo enunciado estimula el proceso de búsqueda.
- El enunciado del problema debe tratar de ser un reto para los alumnos en el sentido de que la orden no debe contener una referencia al camino de solución.
- La búsqueda de la solución debe poderse simplificar con la aplicación de alguna (preferiblemente algunas) estrategias de forma tal que los alumnos aprecien como la estrategia les facilita el proceso de búsqueda.
- Los sistemas de problemas no deben ser de tal naturaleza que una misma estrategia o técnica pueda ser utilizada en todos, es aconsejable incluir problemas en los que no se simplifica el proceso con las técnicas que se están discutiendo.
- Se deben incluir problemas de búsqueda abierta que sitúen al alumno en una situación de investigación y no contengan ninguna orientación acerca de la vía de solución.

En particular, en los últimos tiempos hemos realizado el trabajo con problemas que estimulen el uso de técnicas que se favorecen con la calculadora o sólo son posibles con ella. De esta forma nos acercamos a la investigación de las formas en que la calculadora puede ser convertida en una herramienta heurística.

Algunos ejemplos de estos problemas son:

- ➢ Dado un numero de cinco cifras que es el cubo de un numero de dos cifras y tal que al considerar los dos números no se repite ninguna cifra, encontrarlo.

- En la batalla de Hastings[2] las tropas de Haroldo marchaban en 13 cuadrados perfectos con él al frente. Al tropezar con las huestes de Guillermo, Haroldo se unió a sus tropas y formaron un único cuadrado. ¿Cuántos hombres comandaba Haroldo en la batalla?
- En una circunferencia se trazan una tangente en un punto F y un diámetro IK. Encontrar la posición de IK para que la suma de las perpendiculares trazadas desde I y K a la tangente sea un máximo.

Estos problemas han resultado verdaderos problemas para los profesores y los alumnos con los que se ha trabajado y para resolverlos se recurre al uso de estrategias heurísticas que resultan reforzadas por la supercalculadora y sin las cuáles no se dispone de recursos para la resolución del problema. Entre las estrategias heurísticas que se refuerzan con la calculadora merecen citarse:

- Probar casos particulares.
- Tanteo, en particular tanteo inteligente.
- Analizar casos limites.
- Movilidad

Estas estrategias, en particular se utilizan en la resolución de los problemas propuestos como ejemplos.

En lo que respecta a la enseñanza de la Geometría con una concepción dinámica, se precisaron una serie de interrogantes que es necesario dilucidar. Entre ellos:

- ¿Cuáles son los cambios en el sistema de trabajo que habría que producir y en qué edades?
- ¿Cuál sería el objetivo de su introducción en cada caso?
- ¿Sería necesario hacer modificaciones curriculares?
- ¿Qué instrumentación didáctica realizar para que sea exitosa su introducción?
- ¿Qué recursos tecnológicos emplear y cómo hacerlo?

En relación con las anteriores interrogantes se planteó que es necesario discutir cómo se ha estado enseñando la geometría durante miles de años y cómo se puede iniciar un proceso de cambio en ello. En particular se presentó a discusión el antagonismo entre la forma clásica de enseñar la geometría de una manera estática y la necesidad de cambiar esta concepción hacia una forma de enseñar la geometría de una manera dinámica.

Con respecto a los cambios curriculares que habría que hacer Al igual que se planteó con la calculadora en la escuela primaria (Campistrous y Rizo, 2001) se consideró que es posible introducir la calculadora y otros avances tecnológicos desde la escuela primaria, y no debe haber limitantes en cuanto a la edad si se precisan bien los propósitos de su uso y esto se hace atendiendo a las características de los escolares según su edad, siempre que su uso esté orientado a:

- Concentrarse en el proceso de resolución de problemas y no solo en el cálculo formal clásico de la geometría, como es el caso de calcular perímetros, áreas, volúmenes, entre otros.
- Explorar, desarrollar y reforzar conceptos y relaciones geométricas.
- Utilizarla como medio heurístico, para la búsqueda de relaciones, planteo de conjeturas de modo de dar acceso a otras formas de pensamiento que van más allá de los algorítmicos propiamente dichos.
- Para objetivar vías de demostración de propiedades de las figuras geométricas.

[2] Batalla celebrada en 1066 y en la que Guillermo el Conquistador derrotó al Rey Sajón Haroldo y dio inicio a la dinastía normanda en Inglaterra.

Para implementar el uso de esta tecnología habría que estructurar un curso de geometría que le dé cabida a lo que hemos denominado geometría dinámica, es decir que dé posibilidades de **“darle movilidad a las figuras”** además de realizar cálculos si son necesarios. Para ello se consideraron los siguientes cambios curriculares fundamentales en los contenidos, las habilidades que habría que introducir sin obviar las clásicas del trabajo en la geometría, y algunos recursos didácticos pertinentes.

En esta introducción habría que considerar una diferenciación en etapas atendiendo al punto de vista gnoseológico y psicopedagógico y teniendo en cuenta, en ambos casos, las edades e intereses de los alumnos. A continuación se resumen estas etapas y primeras ideas sobre cómo estructurar el contenido en cada una de ellas.

PRIMER MOMENTO DEL DESARROLLO (6 a 7 años)

Etapa preparatoria

Inicio de las primeras ideas sobre la movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente relaciones de congruencia. Uso de clavijeros y ligas para ir desarrollando la habilidad de “mover” en una figura (GEOPLANO como entrenador). Reproducción en papel cuadriculado. Superponer, medir, comparar.

SEGUNDO MOMENTO DEL DESARROLLO (8 a 9 años)

Etapa preparatoria y de exploración

Continuación del trabajo intuitivo operativo con figuras geométricas elementales. Igualdad por superposición. Relaciones paralelismo y perpendicularidad. Mover figuras sobre otras. Mover en una figura. Conservación de propiedades cuando se producen movimientos en una figura. Primeras ideas sobre la simetría de figuras y sobre el perímetro y áreas de figuras y simétricas

Ampliación de las ideas sobre la movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente relaciones de congruencia, y conservación de otras propiedades como el paralelismo y la perpendicularidad. Continuación del uso del geoplano para ir desarrollando la habilidad de “mover” en una figura. Reproducción en papel cuadriculado. Superponer, medir, comparar.

TERCER MOMENTO DEL DESARROLLO (10 a 12 años)

Etapa de exploración, hacer conjeturas y pruebas.

Inicio de la etapa deductiva. Igualdad por movimientos geométricos del plano (simetrías y traslaciones). Mover en una figura. Exploración de propiedades que se conservan cuando se producen movimientos en una figura. Propiedades básicas de las figuras elementales. Búsqueda de teoremas relacionados con la congruencia. Cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Búsqueda de propiedades asociadas a estos conceptos

Continuación de la ampliación de las ideas sobre la movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente, y formalmente, relaciones de congruencia, y conservación de otras propiedades como la igualdad, el paralelismo y la perpendicularidad. Búsqueda de elementos simétricos en una figura y en par de figuras. Continuación del uso del geoplano para ir desarrollando la habilidad de “mover” en una figura. Uso de super calculadoras (principalmente por el docente) como medio heurístico de apoyo a la exploración, comprensión y búsqueda de casos particulares y límites en la demostración de propiedades. Reproducción (simulación) del alumno usando el geoplano. Uso de la calculadora en la solución de problemas geométricos de cálculo y demostración.

SECUNDARIA (12 a 14 años)

Continuación de la etapa deductiva. Hacer conjeturas. Búsqueda y demostración de propiedades. Sistematización de las figuras geométricas elementales y de sus propiedades.

Igualdad por movimientos geométricos del plano (simetrías y traslaciones). Mover en una figura. Exploración de propiedades que se conservan cuando se producen movimientos en una figura. Propiedades básicas de las figuras elementales. Búsqueda de teoremas relacionados con la congruencia. Cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Búsqueda de propiedades asociadas a estos conceptos. Primeras ideas sobre la semejanza de figuras.

Continuación de la ampliación de las ideas sobre la movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente, y formalmente, relaciones de congruencia, y conservación de otras propiedades como la igualdad, el paralelismo y la perpendicularidad. Búsqueda de elementos simétricos en una figura y en par de figuras. Uso de las súper calculadoras por el docente como medio heurístico de apoyo a la exploración, comprensión y búsqueda de casos particulares y límites en la demostración de propiedades y por el alumno para continuar desarrollando la habilidad de "mover" en una figura y también como recurso para la búsqueda de propiedades y de ideas para su demostración, y en la solución de problemas geométricos de demostración, de construcción y de cálculo. Búsqueda de figuras semejantes y de propiedades asociadas a esta relación.

En relación con la organización del contenido en esta última etapa, sería deseable que el contenido geométrico clásico que se ha estado trabajando desde los primeros grados, se sistematizara de una manera diferente para propiciar el proceso de búsqueda y evitar que se vuelvan a trabajar de una manera clásica los contenidos.

Los problemas que se escojan deben ser **problemas abiertos** que permitan las búsquedas de los alumnos y la obtención de múltiples propiedades de estas figuras que se irán sistematizando en la medida en que se van obteniendo.

Como se puede apreciar es otra manera de concebir la enseñanza aprendizaje de la geometría y de presentar la ejercitación: antes de una manera acabada que no daba posibilidades de exploración, búsqueda, y con este enfoque se tienen todas las potencialidades para ello, de ahí la importancia de poder preparar al alumno desde los grados anteriores para esa flexibilidad en su pensamiento que le permita la exploración, la búsqueda de alternativas y motive en ellos el deseo de investigar y obtener cada vez cosas nuevas para él y sus compañeros.

Conclusión

Como conclusión podemos decir que el trabajo teórico realizado y los talleres desarrollados con maestros muestran que es posible introducir las calculadoras y supercalculadoras de forma que no limitan sino desarrollan el pensamiento de los alumnos. En particular se llegan a convertir en un poderoso auxiliar que permite la utilización de estrategias heurísticas cuya aplicación se ve limitada con los recursos tradicionales. Esto permite enfrentar a los alumnos a verdaderos problemas y contribuir a cumplir la misión de la escuela de hacer que los alumnos aprendan a resolver problemas.

Respecto a la Geometría, los principales cambios están en la utilización de los medios de enseñanza, especialmente el geoplano, calculadoras y supercalculadoras y en la concepción de la ejercitación para darle cabida a este enfoque dinámico y propiciar las acciones de búsqueda, lo que implica también un cambio importante en cómo aprender y enseñar la geometría y no tanto en qué contenidos dar.

Los recursos tecnológicos se introducen como un medio que complementa lo previsto en el programa y contribuyen a una mejor comprensión de los contenidos establecidos.

Referencias bibliográficas

Barret, G. y Goebel, J. (1990). *The impact of graphing calculators in the teaching and learning of Mathematics* en teaching and learning Mathematics in the 1990's NCTM Reston.

Bazán Z. A., Chalini H.A. (Invierno 1995). *Estrategias utilizadas por estudiantes egresados de secundaria en la resolución de problemas matemáticos*. Revista Especializada de Educación Pedagogía. Tercera Época. Vol. 10. Núm. 6. México.

Cabañas, Ma. Guadalupe. *(*Julio de 1995). *La técnica de la modelación como un recurso para aprender a resolver problemas.* Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Campistrous, L. y Celia Rizo. (1997). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Campistrous, L. y Rizo, Celia (1999). *Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos*. Publicaciones del Congreso Pedagogía 99 Habana.

Campistrous, L. y Rizo, Celia (1999). *Didáctica y resolución de problemas*. Habana: Editorial Academia,

Cervera, Pablo (1999). *Algunas estrategias para la resolución de problemas geométricos en 12º grado*. Tesis de Maestría en Educación Superior Santiago de Cuba.

D'Amore, Bruno (1997). *Problemas* Madrid: Editorial Síntesis

García, R. (1988). *Metodología para la utilización de la calculadora en las clases de Matemática del 10º grado den Cuba*. Tesis de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ICCP La Habana.

Herr, Ted y Johnson, Ken *Problem solving strategies Key Curriculum press* California 1994

Labarrere, A.F. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* Ciudad de la Habana. Cuba: Pueblo y Educación.

--------------------(1996). *Pensamiento, análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos.* Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Monereo, C. y otros (1997). *Estrategias de enseñanza-aprendizaje* Barcelona: Editorial Graó.

Polya, G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

------------ (1976). *Descubrimientos Matemáticos*. Moscú: Editorial MIR

-----------. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible* Madrid: Editorial Tecnos.

Rizo Cabrera, Celia. (1987). *Investigación sobre la estructuración del curso de geometría de 4to. a 6to. grados, basada en las transformaciones y la congruencia.* Tesis doctoral. ICCP. MINED. Cuba.

Rizo, Celia y Campistrous Luis (Noviembre 1999). *El tanteo ¿técnica de solución o adivinación?* En Memorias del 4º Congreso de Matemática Educativa de Guatemala pp 93-117

-------------------- (Noviembre 1999). *Estrategias de resolución de problemas en la escuela* en Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Vol. 2 Núm. 3 pp31-45.

------------------- *Aprende a resolver problemas aritméticos* en Memorias de la 8ª Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa pp.547-552 Costa Rica 1995.

Schöenfeld, A. H. (1985). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. La enseñanza de las matemáticas a debate. Madrid. España.

---------------(1992). *Aprendiendo a pensar matemáticamente*. Libro para investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. New York: Mac. Millan.

Talizina, Nina (1992). *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares* México: Angeles Editores

Tall, David (1998). *Information, Technology and Mathematics education: enthusiasms, posibilities and realities* en Actas del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática 65-82 SAEM THALES, Sevilla.

Resolución de Problemas

Nivel Medio

Contenidos matemáticos en ejercicios y problemas de aritmética[1] en el aula de EGB -3

Virginia Montoro, Martha Ferrero, Cristina Ferraris
Centro Regional Bariloche. Universidad Nacional del Comahue. Argentina
vmontoro@crub.uncoma.edu.ar vida@bariloche.com.ar

La Aritmética representa una opción excelente para mejorar la enseñanza de la Matemática. Su fuerza radica en la facilidad de plantear problemas de todo tipo de complejidad. El resolverlos es el ejercicio específico del aprendizaje. (Gentile. 1985)

Resumen
Presentamos una exploración, en base a las observaciones de 20 clases de Aritmética, en Bariloche, provincia de Río Negro (Argentina). Se observó a tres docentes que fueron elegidos entre aquellos que trataban en sus cursos estos temas. El objetivo del trabajo es aproximarse a una descripción del fenómeno "Enseñar Aritmética en la escuela media" para lo cual se analizó, en el contexto de una clase ordinaria, los contenidos conceptuales y procedimentales de Aritmética que se pusieron en juego y los procedimientos generales de la Matemática que surgieron durante el episodio "resolver una tarea determinada", entendiendo por tarea un ejercicio o problema propuesto por el docente para ser resuelto.
Los resultados nos muestran que el tratamiento de Aritmética en este nivel llevó, necesariamente, a un trabajo (con distintos niveles de profundidad) con procedimientos propios de la matemática. Esto nos habla, en la práctica, de la riqueza formativa de estos temas.

Introducción

En la actualidad se considera indiscutible que la resolución de ejercicios y problemas se encuentra instalada en las clases de matemática, aunque con distintas modalidades de implementación. Esta se presenta como un recurso eficaz, no sólo para dar sentido a los conceptos y sus propiedades, sino para comprender y aprehender los procedimientos propios de la matemática.
En los enunciados de los Contenidos Básicos Comunes de EGB-3 se trasluce la expectativa de la comunidad educativa en cuanto a que los estudiantes al finalizar este nivel puedan *percibir que la matemática forma parte del entorno cotidiano,* ***comprendiendo la naturaleza del pensamiento matemático, manejando y pudiendo comunicar las ideas y los procedimientos básicos de esta ciencia,*** (Ministerio de Cult. y Educ., 1997 *)* a través de la introducción de un bloque temático donde se exponen los procedimientos propios del quehacer matemático como contenidos específicos.
Consideramos que la Aritmética constituye una materia de base muy rica en oportunidades en cuanto a: **el trabajo con el método matemático**, la manifestación de estrategias heurísticas, la generación de una actitud positiva respecto de la construcción del saber matemático, dando a éste un sentido dinámico en el uso de procedimientos (Ferraris, 1999); además de brindar un campo propicio para la formación matemática básica, *no sólo en cuanto al campo de experimentación de la imaginación, sino también en cuanto a que desde el comienzo es aparente su esquema coherente, riguroso y de extrema profundidad y puede presentarse al alumno como una verdadera Teoría, clara y coherente*. (Gentile, 1991). Por otra parte, esta disciplina no termina allí, sino que se relaciona con múltiples ramas de la misma Matemática y de otras ciencias, en especial con las de la Computación, que en la enseñanza se nos

1 Entenderemos por Aritmética el estudio de los números enteros respecto a los siguientes temas: Divisibilidad, Números primos, Algoritmo de la división; Máximo común divisor; Números coprimos; Mínimo común múltiplo; Teorema fundamental de la aritmética.

presentan como aliadas a la hora de planear conjeturas o de resolver problemas (Gentile,985-1991)
El objetivo del presente trabajo consiste en aproximarse a una descripción del fenómeno “Enseñar Aritmética en la escuela media”, en el contexto de una clase ordinaria, centrando la atención en los contenidos conceptuales y procedimentales de Aritmética que se pusieron en juego y los procedimientos generales de la matemática que surgieron durante el episodio “resolver una tarea determinada”, entendiendo por tarea un ejercicio o problema propuesto por el docente para ser resuelto.
Dado que el problema esta íntimamente relacionado con la práctica docente en el aula difícilmente podíamos encararlo desde un punto de vista netamente experimental mas bien preferimos ser observadores que intervinieran lo menos posible en lo que es la tarea habitual del profesor. En cuanto a esto podemos citar las reflexiones del Dr. J. Kilpatrick (1995). *Dado que los estudios de correlación entre las características del profesor y su relación con el aprendizaje de los estudiantes han sido en su mayor parte improductivos, los investigadores han comenzado a entrar en el salón de clases para examinar el desempeño docente que allí encuentran.*
Este trabajo se enmarca en el proyecto “El tratamiento de problemas como estrategia de enseñanza de la Aritmética y la Geometría en el EGB-3” dirigido por la Lic. Cristina Ferraris y subsidiado por la Universidad del Comahue. En particular forma parte de un estudio que pretende describir y analizar la acción docente, durante la resolución de ejercicios y problemas en las clases de Aritmética. De los múltiples aspectos que esta situación presenta en el presente trabajo nos limitaremos a adelantar algunos resultados cualitativos respecto a los contenido aritméticos y procedimientos propios del método matemático que se evidencian durante cada episodio mencionado.

Metodología

Se observaron las clases de tres docentes que fueron elegidos entre aquellos a cargo de los cursos en los cuales se tratan los temas de Aritmética y que, contactados en los respectivos colegios, mostraron disponibilidad e interés en colaborar con esta investigación, en un total de 20 clases.
· <u>Las observaciones de las clases</u> fueron realizadas durante el período en que los docentes desarrollaron el tema de nuestro interés, en los cursos que ellos eligieron y basándose en sus propias planificaciones.
· <u>Los registros</u> se llevaron a cabo por dos de las autoras simultáneamente, con toma de notas, copia de lo realizado en el pizarrón y grabación, focalizando en la acción del docente y su interacción con la clase en su conjunto o con algún alumno en particular. Las clases fueron transcriptas en su totalidad, siguiendo las notas y recurriendo a las grabaciones sólo en caso de dudas.
· Para <u>el análisis</u> de las observaciones se realizó una primera lectura de todas las clases tomando nota de los aspectos más relevantes. En una segunda lectura se tomó como unidad de análisis un "episodio" dado por el recorte de los registros de las observaciones determinado por la resolución de un ejercicio o problema propuesto por el docente y trabajado durante la clase; de modo que pueden aglutinarse en un único episodio distintos momentos de una misma clase o de clases distintas. Para cada episodio se consignaron las apreciaciones individuales de las investigadoras respecto de los contenidos conceptuales y procedimentales y procedimientos generales de la Matemática puestos en juego, implícita o explícitamente, en el enunciado de la tarea o durante la resolución de la misma, tanto en los

aportes del docente, como en las intervenciones de los alumnos y en el contexto de la clase tomada como un todo. Para esto se adoptaron las siguientes categorías de análisis, que se ilustran con ejemplos surgidos del análisis de los registros de clases.

1) *Contenidos Conceptuales:* Conceptos Aritméticos y sus propiedades que aparecen implicados en cada episodio, en cada uno de ellos puede aparecer más de un contenido conceptual. En esta categoría diferenciamos dos clases:
   - *Conceptos:* se conforman a través de definiciones explicitadas en mayor o menor grado, en este caso propios de la Aritmética. Ejemplos: *Número primo, Divisor de*.
   - *Propiedades de los conceptos:* proposiciones que predican atributos de un concepto o relaciones con otros; son demostrables. Ejemplo: *Los enteros a y -a tienen los mismos divisores.*
2) *Contenidos Procedimentales:* designan acciones o modos de proceder sobre los conceptos aritméticos, formas de organización, algoritmos, procesos que llevan a resolver tareas, en definitiva, el alcance (en cuanto al hacer) de los conceptos implicados. Ejemplo: *Reconocer números primos por su número de divisores.*
3) *Procedimientos relacionados con el método matemático:* Se consideran aquí los *procedimientos* generales relacionados con la actividad matemática en general. Se trata de contenidos transversales a los bloques temáticos de la formación matemática. Ejemplo: *Uso de condición necesaria para descartar posibilidades.*

Luego se procedió a la discusión conjunta de estos resultados, en busca de un consenso en las categorizaciones, que sólo llevo a ajustes menores dado que se dieron en general pocas diferencias.

Resultados

Cabe aclarar que en esta presentación se hace una descripción cualitativa de los resultados del análisis, en la que no se ha tenido en cuenta la cantidad de episodios en que aparecen estos contenidos, ni se los ha diferenciado por docente. Sin embargo, en las conclusiones haremos breves comentarios al respecto.

Los Contenidos Aritméticos, correspondientes a las categorías 1 y 2, que se pusieron en juego durante la resolución de las tareas, en las clases de los tres docentes observados, pueden ser agrupados según tres núcleos temáticos: División, Divisores-Múltiplos y Números Primos. A continuación los presentamos diferenciados en contenidos conceptuales y procedimentales.

Núcleo 1: DIVISION

Contenidos Conceptuales

Conceptos:
- División entera
- División en racionales (concepto relacionado)

Propiedades de los conceptos:
- P1: *"a y b enteros: a divide a b ssi la división(en Q) de a por b da entero"*
- P2*: "a div a b si el resto de la división de b por a es 0*"

Contenidos Procedimentales
- Aplicar división entera para resolver un ejercicio de aplicación.
- Reconocer si un número es divisor de otro mediante "si la división es exacta".
- Dar ejemplos de fracciones que representan enteros

Núcleo 2: DIVISORES - MÚLTIPLOS

Contenidos Conceptuales

Conceptos:

- Divisor de.
- Conj. de divisores.
- Múltiplo de.
- Divisores comunes
- Multiplos comunes

Propiedades de los conceptos:

- P3: Los enteros a y –a tienen los mismos divisores
- P4: Los múltiplos de un número son infinitos
- P5: Los enteros a y –a tienen los mismos múltiplos
- P6: Con a y b positivos, si a divide a b entonces a es menor o igual que b.
- . P7: Todo número a es divisible por 1, -1, a, -a. (Todo número *es divisible por 1. 1 y -1 dividen a todos los enteros)*
- P8: *MCD es el producto de los factores primos comunes con su menor exponente*
- P9*: M. C. M es el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente*
- P10: *todo múltiplo multiplicado por otro número sigue siendo múltiplo.*

- Divisores impropios
- Criterios de divisibilidad
- Número par / impar
- m.c.m.,
- MCD,
- Números coprimos.

Contenidos Procedimentales

- Justificar mediante el producto que un entero dado es divisor de otro dado
- Contar los divisores de un número dado.
- Graficar la relación “divisor de” mediante diagrama de flechas
- Uso de la definición de divisor para justificar la P3
- Reconocer los divisores impropios de los números
- Listar exhaustivamente los divisores de un número dado
- Hallar todos los múltiplos positivos de un números, menores que un número dado.
- Proponer múltiplos de un número dado
- Aplicación de la Prop 3 para encontrar múltiplos de un número dado
- Aplicación de la Prop. 6 para restringir la búsqueda de divisores
- Aplicación de la Prop. 5 para facilitar la búsqueda de divisores
- Encontrar un número dado bajo ciertas condiciones de divisibilidad
- Escribir e la expresión general los múltiplos de un número
- Escribir e la expresión general de número par e impar
- Encontrar múltiplos comunes de hasta tres números
- Aplicar el concepto de MCD a la resolución de un ejercicio de aplicación
- Hallar el mcm de hasta tres números, buscando los múltiplos comunes y eligiendo el menor
- Encontrar el MCD de hasta tres números buscando los divisores de los números dados, marcando los comunes y eligiendo el mayor..
- Aplicar m.c.m. a la resolución de un ejercicio de aplicación.
- Aplicar MCD a la resolución de un ejercicio de aplicación.
- Dado hasta tres números positivos calcular el mcm aplicando el algoritmo basado en TFA: descomponer en factores primos, expresar cada número por su descomposición en factores primos y calcular el mcm según la propiedad respectiva
- Dado tres números positivos calcular el MCD aplicando el algoritmo basado en TFA: descomponer en factores primos, expresar cada número por su descomposición en factores primos y calcular el MCD según la propiedad respectiva
- Dar ejemplos de números coprimos
- Crear una situación que se resuelva con mcm o MCD

Núcleo 3: NÚMEROS PRIMOS:

Contenidos Conceptuales

Conceptos:

- Número primo
- Número compuesto
- Factores primos de un número.

Propiedades de los conceptos:

- P10*:Si n es primo su opuesto también.*
- P11: *Si un número tiene divisores primos menores, tiene alguno menor que su raíz cuadrada entera*

- P12: *Factores primos de factores de un número, son factores primos de dicho número.*

Contenidos Procedimentales

- Reconocer números primos por su número de divisores
- Hallar los primos positivos menores que un número positivo dado (menor que 100) mediante la Criba de Eratóstenes.
- Comprobar si un número es primo observando que no tiene divisores primos menores que su raíz cuadrada positiva
- Expresar un número como producto de sus factores primos. Dar la representación en factores primos de un número, (escribirlo como producto de dos divisores del mismo y seguir este procedimiento hasta llegar a los factores primos.)
- Encontrar los factores primos de un número dado mediante el procedimiento usado en primaria.
- Aplicar la descomposición en factores primos a la resolución de una situación problemática
- Dar ejemplos de números primos
- Aplicación del concepto de número primo a la resolución de un problema de demostrar.

En cuanto a los **Procedimientos relacionados con el método matemático,** hemos encontrado los siguientes.

- Adecuación de concepto para resolver problemas
- Análisis de ejemplos (en busca de regularidades)
- Aplicación de un algoritmo
- Cálculo con calculadora (división)
- Cálculo por definición
- Caracterización (Verificación según la definición)
- Caracterizar mediante ejemplo
- Clasificación
- Conjeturar
- Definir
- Ejemplificar
- Enumeración exhaustiva
- Estudio de casos
- Generalización
- Inferencia de corolarios
- Justificación de un algoritmo
- Justificación por definición
- Justificación por contraejemplo
- Justificar por argumentación
- Modelizar
- Uso de notación adecuada
- Estableces notación (convención)
- Notación conjuntista
- Organización de datos
- Representación gráfica
- Uso de condición necesaria para descartar posibilidades

Respecto del Núcleo 1: llama la atención las referencias a los números racionales y la división en Q lo que nos lleva a pensar en una confusión de campos numéricos. Sólo en una tarea aparece el uso del resto de la división entera, sin hacer mención al concepto de resto. En otros tres casos queda la duda si se está realizando en Z o en Q, ya que se da como resultado sólo el cociente y los ejemplos están dados de manera que el resto sea 0. Las dos propiedades correspondientes a este núcleo refieren a la relación "divisor de".

Se observa que de los tres núcleos temáticos diferenciados, el énfasis fue puesto en el Núcleo 2 referido principalmente a Múltiplos y Divisores. En particular, en los conceptos de "divisor de" (13 casos), "mínimo común múltiplo" (10 casos) y "máximo común divisor" (11 casos). La mayor cantidad de propiedades se registra también en este núcleo (7 en total) de las cuales la P5 tiene 4 menciones y la P7 3 menciones. Los contenidos procedimentales se centraron en la enumeración de divisores (o múltiplos) de un número y en el cálculo del m.c.m y M. C. D. mediante un algoritmo determinado. Las propiedades vistas son referidas a estos dos aspectos.

En el Núcleo 3, si bien las propiedades profundizan en algo el trabajo matemático, en lo referido los contenidos procedimentales nos encontramos que, nuevamente, se trata generalmente de la enumeración y búsqueda de divisores (en este caso primos) de un número.

A pesar de lo limitado de los contenidos propios de la Aritmética podemos observar que se trabajaron variados procedimientos propios del método matemático.

Conclusión

En esta comunicación se muestran los resultados en cuanto a qué contenidos de Aritmética se trataron en la resolución de ejercicios y problemas en estas clases de EGB-3 y a qué procedimientos propios de la Matemática dieron lugar. El trabajo se encuentra en una fase descriptiva, tendiente a un acercamiento a la descripción de este fenómeno. No es por tanto, nuestra pretensión presentar aquí una discusión a fondo de estos resultados, ni conclusiones acabadas.

Se puede observar que en cuanto a conceptos, se tratan fundamentalmente Divisores y Múltiplos de un número y Número primo. En cuanto a lo procedimental vemos que se centró fundamentalmente en la búsqueda de divisores (en algunos casos primos y en otro todos) o múltiplos de un número y en el establecimiento de algunos algoritmos para encontrar divisores comunes o múltiplos comunes. Los resultados de las observaciones nos muestran que el tratamiento de Aritmética en este nivel llevó, necesariamente, a un trabajo (con distintos niveles de profundidad) con procedimientos propios de la matemática. Esto nos habla, en la práctica, de la riqueza formativa de estos temas.

A modo de reflexión final, consideramos que la Aritmética en EGB-3, puede ser muy útil en cuanto a que los alumnos trabajen en: organización de un conteo; comprensión de una definición; utilización del resultado anterior para obtener el actual; utilización de letras como símbolos algebraicos; realización de algunas demostraciones; valoración del ejemplo para demostrar que una propiedad no se cumple; enunciado de conjeturas en base al estudio de varios resultados particulares; distinción entre $A \Rightarrow B$ y $A \Leftrightarrow B$; utilización de un algoritmo (con o sin calculadora); optimización del uso de la calculadora; adecuación de conceptos a la resolución de problemas. Estas oportunidades serán mejor aprovechadas si el docente pone particular atención en mostrar la diferencia entre: una demostración y la validez de un resultado a través de la observación de varios ejemplos; una verdad "a priori" y una propiedad demostrable; así como guiar hacia una notación adecuada. (Ferraris-Montoro. 1999).

Pensamos que si estos hechos son considerados en forma explícita por los docentes, los pueden llevar a tomar a la Aritmética como una herramienta muy eficaz para la formación matemática de los adolescentes, en particular en lo referente a lo procedimental.

Referencias bibliográficas

Ferraris, C y V. Montoro. (1999). Procedimientos utilizados en la Resolución de Problemas de teoría de Números. Una experiencia con alumnos de escuela media. *Revista SUMA. N^0 32. (España). Pp 61-68.*

Gentile, E. (1985). *Aritmética Elemental*, Monografía Nº 25, Ed. OEA. Washington, D.C. USA.

Gentile, E. (1991). *Aritmética Elemental en la Formación Matemática*. Ed. por Olimpiada Matemática Argentina.

Ministerio de Cultura y Educación. (1997) . Contenidos Básicos para la EGB. Consejo Federal de Cultura y Educación. Rep. Argentina

Montoro, V. C. Ferraris y M. Ferrero. (1999). Rol que le asignan los docentes a los ejercicios y problemas en las clases de aritmética. Un trabajo exploratorio. Ponencia en la X Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Maldonado. Uruguay.

Montoro V., M. Ferrero y C. Ferraris. (2000). Tratamiento de ejercicios y problemas en las clases de aritmética. Un trabajo exploratorio de la acción docente. *Revista EPSILON. N^0 46-47. Vol 16(1-2) (España) . pp 55-60*

Kilpatrick, J. y otros. 1995. *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Los problemas de regla y compás: una mirada heurística

Liliana E. Siñeriz
Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue. Argentina
lsineriz@bariloche.com.ar   lsineriz@crub.uncoma.edu.ar

Resumen
Este trabajo aborda los problemas de regla y compás desde el mundo de la pura resolución de problemas. En esta clase de problemas están implicados ciertos métodos de resolución que llamamos heurísticos porque pueden describirse en forma independiente del contenido. Se hace una breve referencia a cada uno de ellos y se muestra un modo de analizar los efectos de su uso en el proceso de resolución. Este reporte intenta presentar algunas elaboraciones teóricas realizadas por la autora que pueden servir como herramienta metodológica para el análisis de estos problemas y de su proceso de resolución.

Este trabajo reporta uno de los resultados teóricos arribados en mi tesis doctoral (Siñeriz, 2000), en la cual se indagan ciertos aspectos del mundo de pura resolución de problemas en situaciones de enseñanza, en las que se abordan problemas de regla y compás. Los resultados teóricos en su conjunto tienden a brindar una mayor comprensión de los diferentes elementos que intervienen en el proceso de resolución de estos problemas y que se ponen en juego al enseñar a resolverlos; en este caso nos limitaremos a tratar sólo una parte de los mismos.

En el terreno de las investigaciones en pura resolución de problemas, el punto de partida es que hay rasgos de la resolución de problemas matemáticos que pueden tratarse e investigarse independientemente del contenido concreto. Desde esta óptica hay algo común a la resolución de cualquier problema de matemáticas, que puede ser estudiado, enseñado y aprendido.

Desde esta perspectiva heurística, los problemas de regla y compás pertenecen a una clase de problemas en la que están implicados ciertos métodos de resolución, de aquí que uno de los propósitos de la investigación fue analizar los efectos de su uso. Para ello hemos hecho un examen minucioso de tres métodos que pueden utilizarse para resolver estos problemas, los cuales se presentan de una forma general en Polya (1962), lo que nos ha llevado a precisar los pasos de cada método y la forma en que modelan el proceso de resolución.

Dichos métodos plantean una serie de pasos a seguir, que se traducen en la construcción de ciertos objetos geométricos, para lo cual no se establecen pautas para su solución; es decir que estos métodos no garantizan la solución del problema inicial, sino que lo transforman en construcciones o problemas más abordables, de ahí es que los consideramos heurísticos.

En este trabajo vamos a hacer una breve referencia a cada uno y a analizar su impacto en el proceso.

Polya inicia el tratamiento de las construcciones geométricas abordando la construcción de un triángulo dados los tres lados. Para ello describe los pasos para realizar dicha construcción y orienta a descubrir el modelo que subyace, el cual podemos enunciar de la siguiente manera:

> ***“Método de los Dos Lugares”:***
> ***1) Reducir el problema a la construcción de un punto.***
> ***2) Dividir la condición en dos partes de modo que cada parte suministre un lugar geométrico para el punto incógnita; cada lugar debe ser circular o rectilíneo.***

En ciertos problemas no se puede, o es muy dificultoso, construir directamente la figura requerida, pero es posible construir otra figura y utilizarla en la solución del problema original. La resolución de estos problemas consiste básicamente en hacer un bosquejo de la incógnita que se requiere, lo cual permite visualizar la información y descubrir alguna figura que puede construirse en forma inmediata y que además resulta útil en la solución del problema original, y luego a partir de ella se procede a resolver el problema. Polya se refiere al método de la siguiente manera "Trata de descubrir alguna parte de la figura o alguna figura relacionada, la cual puedas construir, y la puedas usar como un paso para la construcción de la figura original". A fin de pautar en forma precisa los pasos que lo componen lo vamos a enunciar de esta manera:

"Método de la Figura Auxiliar":

1) Construir una figura auxiliar, que está relacionada con los datos del problema.

2) A partir de esta figura auxiliar construir la figura requerida.

Cabe destacar que la construcción de la figura auxiliar no resuelve el problema sino que es el primer paso para la solución, a partir del cual se apoyará la construcción de la incógnita. La construcción de dicha figura auxiliar es entonces un nuevo problema, el cual debe resolverse con regla y compás, y para ello recurrimos al Método de los Dos Lugares.

Hay otros problemas que se caracterizan porque en su procedimiento de solución debe realizarse alguna semejanza u homotecia. En ellos no se puede construir directamente la figura incógnita, pero es posible construir una figura semejante a la misma. La solución siempre implica construcciones acordes a las invariantes geométricas de la homotecia, como es el trazado de líneas paralelas o la copia de ángulos. Polya (1962) presenta este método con un ejemplo que culmina con un breve comentario: "Esto sugiere un modelo general: Si no puedes construir la figura requerida, piensa en la posibilidad de construir una figura semejante a la misma".

Por otra parte, Scandura (1977) hace un análisis del método, para lo cual trata problemas en los que los objetos geométricos que se requiere construir son diferentes, aunque el espíritu del método queda en evidencia. Dichos ejemplos nos llevan a enunciar los pasos del método subyacente de una manera detallada:

"Método de la Figura Semejante"

1) Construir una figura semejante a la figura incógnita.

2) Determinar un centro de homotecia.

3) Usar el centro de homotecia y un punto p' de la figura homotética que se corresponda con un punto p que pueda determinarse y sea necesario para construir la figura incógnita.

En vez de construir la figura requerida considerando el centro de homotecia y el punto *p'*, que en definitiva determinan un segmento muy particular, podemos considerar cualquier segmento de la figura semejante que se corresponda por una homotecia con un segmento de la figura requerida. Éste será un segmento auxiliar que permitirá la construcción de la figura incógnita. Dichos segmentos homotéticos estarán contenidos en rectas paralelas (coincidentes o no); por tanto podríamos enunciar el método de una manera más general, que incluye a la anterior:

1) Construir una figura semejante a la figura incógnita.

2) Tener en cuenta otra parte de la condición y construir un segmento X que se

corresponda por una homotecia a un segmento auxiliar X' de la figura semejante construida, el cual permita la construcción de la figura buscada mediante el trazado de paralelas.
3)Construir la figura pedida teniendo construida la figura semejante y el segmento X.

La aplicación de cualquiera de estos métodos modela el proceso de resolución en una forma determinada, la cual ya hemos mencionado que ha sido objeto de estudio. A continuación mostraremos la forma en que analizamos esta cuestión.
Sobre la base de la noción de "espacio de problemas" utilizada en Puig (1996) -conjunto de problemas generados por herramientas heurísticas, métodos, sugerencias heurísticas y las relaciones entre ellos-, se ha considerado a cada método como generador de una serie de problemas que le es propia. En consecuencia, hemos elaborado los respectivos esquemas de generación de problemas de cada uno de los métodos involucrados, lo cual permite apreciar la forma en que los mismos delinean el proceso de resolución.
Se ha querido poner el acento en que uno de los aspectos cruciales del proceso es la transformación de un problema en otros, por tanto hemos representado el trabajo en el problema mediante un esquema que muestra las transformaciones del problema. El esquema está compuesto por letras y flechas, las letras van a corresponder a los problemas generados por los métodos, y las flechas están puestas en la medida en que se generan problemas y van del problema que se tiene al problema que se genera, y así sucesivamente hasta que el esquema acaba en problemas que hay que resolver.
El espacio de problemas generado por el primero de los métodos mencionados tiene el siguiente esquema, en el cual el problema P se transforma en otro problema Q, que a su vez se desdobla en Q_1 y Q_2.

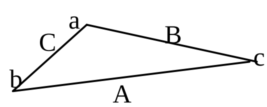
Espacio de problemas generado por el Método de los Dos Lugares

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "M.2L."] & Q \arrow[r] \arrow[dr] & Q_1 \\ & & Q_2 \end{tikzcd}$$

Q: determinar un punto
Q_1 y Q_2 son las construcciones de cada lugar

Por ejemplo, en la construcción de un triángulo dados los tres lados fijamos uno de los lados, digamos el lado A, entonces los problemas del espacio serían

Q: determinar el vértice a
Q_1: construir la circunferencia C(b,C)
Q_2: construir la circunferencia C(c,B)



Al Método de la Figura Auxiliar también podemos asociarle un espacio de problemas, que muestre que tras construir la figura auxiliar, el problema original no queda resuelto, pero basándonos en ella podemos hacer una reformulación del mismo, lo cual implicará la realización de una nueva construcción. El operador T_Q, que indica "transformar con el resultado de Q", conduce al problema R, cuya solución permitirá resolver el problema original. Como puede verse, el esquema "acaba" en problemas que hay que resolver.

Espacio de problemas generado por el Método de la Figura Auxiliar

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\text{M.F.A.}"] \arrow[dr, "T_Q"'] & Q \arrow[d] \\ & R \end{tikzcd}$$

Q: construir la figura auxiliar

R: construir la figura requerida teniendo construida la figura auxiliar

El Método de la Figura Semejante es más complejo. Contiene dos pasos fundamentales: el primero de ellos es construir una figura semejante a la figura incógnita, y el segundo es hallar un segmento de la figura requerida que se corresponda por una homotecia a un segmento de la figura semejante, previamente construida. En el esquema, los indicadores M.F.S. (1) y M.F.S. (2) dan cuenta de estos pasos del método y los operadores T_D y T_G señalan las transformaciones según el resultado de D y G respectivamente.

Espacio de problemas generado por el Método de la Figura Semejante

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\text{M.F.S.(1)}"] \arrow[dr, "T_D"'] & D \arrow[d] & \\ & F \arrow[r, "\text{M.F.S.(2)}"] \arrow[dr, "T_G"'] & G \arrow[d] \\ & & K \end{tikzcd}$$

D: construir una figura semejante a la pedida

F: construir la figura pedida teniendo construida la figura semejante a la misma

G: teniendo en cuenta la otra parte de la condición, construir un segmento X que se corresponda por una homotecia a un segmento auxiliar X’ de la figura semejante construida, que permita la construcción de la figura buscada mediante el trazado de paralelas

K: construir la figura pedida teniendo construida la figura semejante y el segmento X

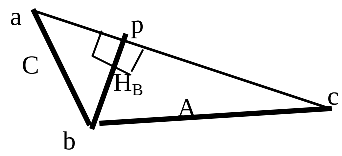
El objetivo de hacer el estudio teórico de las construcciones con regla y compás es diseñar el espacio teórico de problemas correspondiente a cada una. Construimos dicho espacio examinando los procesos de resolución generados por los métodos mencionados, y determinando la serie de problemas por los que se atraviesa hasta llegar a la construcción de ciertos lugares geométricos sobre los que se apoyan nuestras construcciones.

En la investigación marco de este reporte hemos delineado los elementos mínimos de trabajo para las construcciones posteriores, para lo cual se ha hecho la distinción entre operaciones básicas y construcciones elementales. Las primeras corresponden al transporte de segmentos y de ángulos, lo cual permite el trazado de determinadas circunferencias y de rectas en una cierta dirección respecto de otra. Las segundas nos dan los elementos para construir los lugares geométricos que estarán implicados en los problemas; el conjunto de construcciones elementales que hemos considerado se conforma de: mediatriz, perpendicular, bisectriz, paralela, y arco capaz. Asimismo, hemos reinterpretado los algoritmos de construcción sobre la base de los métodos, lo que ha desembocado en la elaboración de los respectivos espacios de problemas.

El examen de los procesos de resolución generados por la aplicación de uno o varios métodos nos permite hacer corresponder a cada problema un espacio teórico de problemas.

La serie de problemas que se desprenden de la aplicación de los métodos es algo característico de los mismos, en este sentido es que el espacio de problemas también resulta ser un instrumento de análisis de los distintos métodos.
Queremos reflejar claramente en el espacio de problemas lo característico de cada método, por lo cual vamos a identificar la serie de problemas por los que se atraviesa, deteniendo el análisis cuando el problema al que se ha arribado es una de las construcciones elementales u operaciones básicas.
Vamos a ilustrar el accionar de los métodos en los problemas, el cual queda plasmado en la cadena de problemas que se genera, y a mostrar la complejidad del entretejido de construcciones que resultan de la conjunción de los métodos. Para ello nos centraremos en un ejemplo, y a partir de examinar el proceso de resolución vamos a elaborar el espacio teórico de problemas correspondiente.

“Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto al lado restante”



Podemos dar el problema por resuelto y realizar un bosquejo de la figura incógnita. En la búsqueda de una solución, se podría pensar en aplicar el Método de los Dos Lugares, el problema podría reducirse por ejemplo a determinar el vértice a, el cual puede hallarse como intersección de la circunferencia C(b,C) y de la recta tangente a la circunferencia C(b, H_B) que pase por el vértice c. Sin embargo la construcción de esta recta tangente no conforma nuestra lista de construcciones elementales, por lo cual recurriremos a otro método, y para resolver este problema pensaremos en construir una figura auxiliar. De la amplia gama de posibilidades de resolución, en el análisis teórico consideraremos sólo aquellas que se reducen a las construcciones elementales, y al trazado de circunferencias y rectas que implican operaciones básicas.
El bosquejo de la incógnita entonces nos puede conducir a descubrir los triángulos rectángulos que llevan a la solución. La construcción de uno de dichos triángulos implica el Método de los Dos Lugares, a partir de esta construcción el problema de construir la figura requerida habiendo construido la figura auxiliar, se traduce en determinar un vértice de la figura incógnita, que se obtiene mediante la intersección de dos lugares que resultan inmediatos.
El siguiente esquema representa el espacio teórico de problemas correspondiente a este proceso, donde:

S: construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpc}$ dados un cateto y la hipotenusa

Q: determinar el vértice c

R: construir el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ **habiendo construido el triángulo** $\overset{\Delta}{bpc}$

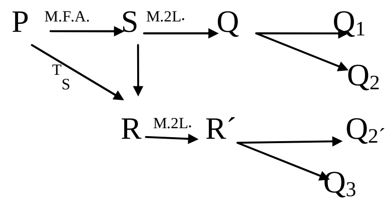
R´: determinar el vértice a

Q_1: construir la circunferencia C(b,A)

Q_2: trazar la recta perpendicular al segmento $\overline{bp}$ (segmento correspondiente a la altura H_B) por su extremo p

$Q_{2´}$: construir la recta que contiene al segmento $\overline{pc}$ (prolongar un segmento)

Q_3: construir la circunferencia C(b,C).

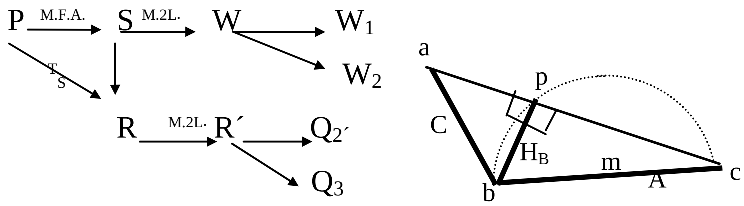


La construcción del triángulo rectángulo podría haberse reducido a determinar el vértice p de dicha figura auxiliar, lo cual llevaría al siguiente espacio de problemas donde:

W: determinar p

W_1: construir la circunferencia C(b, H_B)

W_2: construir el arco capaz AC(A,90º) (o circunferencia de diámetro A)



En vez de construir el triángulo auxiliar $\overset{\Delta}{bpc}$, podría haberse elegido construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpa}$, sin cambiar con ello el lineamiento general que caracteriza a este proceso.

En algunos problemas la construcción de la figura auxiliar no se reduce al Método de los Dos Lugares, en tal caso habría que hallar una nueva figura auxiliar relacionada con la anterior, es decir se haría uso doblemente del Método de la Figura Auxiliar. Ejemplos de esta naturaleza pueden encontrarse en la memoria del proyecto marco de este trabajo, por razones de espacio nos limitaremos a mencionar esta cuestión, ya que la intención de este reporte es presentar los espacios de problemas generados por los métodos y usarlos como herramienta metodológica para el análisis, y para ello nos hemos valido de un ejemplo.

Finalmente resta destacar que los espacios de problemas que hemos elaborado permiten hacer un análisis teórico del proceso de resolución modelado por los métodos, y en ese sentido son teóricos, pero también pueden usarse para representar los procesos de resolución de los resolutores reales. Si bien en esta ponencia no vamos a tratar este asunto, es pertinente resaltar que la combinación de estos dos aspectos, junto con la identificación del contenido matemático, heurísticas y tareas de gestión implicadas en la resolución de esta clase de problemas, nos han llevado a precisar las competencias que se ponen en juego al abordarlos, permitiendo así hacernos una idea cabal al respecto.

Referencias bibliográficas

Polya, G. (1962-1965). *Mathematical Discovery,* 2 vols. , USA: John Wiley and Sons.

Puig, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Editorial Comares.

Scandura, J. M. (1977). *Problem Solving. A structural/process approach with instructional implications*. USA: Academic Press

Siñeriz L. (2000). *La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media Argentina.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

Análisis para tres miradas de dos temas de matemática

María Gabina Romero
Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. Argentina
pdpichl@infovia.com.ar

Resumen
Este escrito se basa en el informe final del Proyecto de Investigación "Una propuesta para recuperar la calidad de la enseñanza de la matemática
El mismo surge a partir de la inquietud de docentes del departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco en el contexto de la implementación de un Curso de Apoyo para los interesados en ingresar a dicha Facultad y buscando dar una respuesta a las dificultades de los estudiantes en sus estudios durante el primer año y el consecuente desgranamiento de la matrícula.
Entendemos que analizar los modos de apropiación de los contenidos de la matemática que se enseñan en la escuela secundaria implica partir de una concepción cognitiva del aprendizaje en la que se prioricen aspectos tales como: el rol activo que desempeña el sujeto en la construcción de sus aprendizajes; la posibilidad de aprender de los propios errores, y la importancia de la toma de conciencia acerca de los conflictos cognitivos; la importancia que tienen los procesos de pensamiento a largo plazo; el papel que tienen las hipótesis como forma de construcción de los conocimientos; la necesidad de partir de los conocimientos que el alumno ya posee en su estructura cognitiva; el valor de las estrategias de resolución de problemas para la comprensión de los contenidos de la ciencia; y la importancia que tienen las relaciones humanas como mediadoras entre la persona que aprende y el mundo de la cultura.
Presentamos solamente las consignas de cuatro problemas agrupados en dos casos diferentes y sus respectivos comentarios.

Presentación del proyecto

El proyecto de investigación "***Una propuesta para mejorar la calidad de la enseñanza de la matemática***" se inició en noviembre de 1995, y las inquietudes que motivaron este trabajo surgieron a partir de observaciones realizadas en las clases del Curso de Apoyo de matemática en la Facultad de Ingeniería - sede Comodoro Rivadavia - de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco.
Durante una primera etapa de trabajo el equipo se dedicó a la elaboración de un marco teórico, para lo cual resultó imprescindible reconocer las disciplinas de los otros miembros de la unidad y trabajar sobre los prejuicios de cada integrante respecto de la temática a abordar. Se realizaron entonces seminarios internos empleando bibliografía que acercó posturas teóricas y prácticas sobre el proceso de aprendizaje y sobre la evaluación de dichos procesos y que permitieron arribar a acuerdos básicos que comprenden desde un lenguaje común hasta las hipótesis mismas del proyecto.
El objetivo del proyecto apuntó a ***una evaluación de procesos de pensamiento y no a una mera evaluación de contenidos***. Esto motivó que se hiciera imprescindible trabajar con los curriculum reales de las escuelas, ya que se detecto que los programas oficiales no se dictaban completos. Por esta razón se reconocieron y establecieron los contenidos comunes que se desarrollaban sin excepción en todas las escuelas de la zona, para en función de ello elaborar el material de trabajo.
Como instrumento para recabar los datos se acordó utilizar test conformados por ejercicios y problemas de matemática y además encuestas destinadas a recoger información sobre los procesos metacognitivos.

Los ejercicios y problemas se clasificaron según categorías de nivel de anclaje, teniendo en cuenta que las operaciones lógicas y numéricas se construyen, según Piaget, por etapas, y que las estructuras lógico-matemáticas se abordan en coordinación con otras más elementales.

En este sentido se elaboraron y clasificaron alrededor de 150 problemas, y para ello durante cuatro meses se contó con la colaboración de los docentes de una escuela provincial de nivel medio de Comodoro Rivadavia, quienes por su contacto cotidiano con los alumnos aportaron una valiosa información que permitió que el equipo se acercara más a la realidad de la escuela.

Como corolario surgieron distintas alternativas para los test, los que fueron probados en la misma escuela.

A partir de los resultados obtenidos en esta etapa se pudo resolver acerca de diferentes aspectos relacionados con los test que finalmente se aplicaron, a saber:

a) <u>Tiempo de duración</u>: esta cuestión está ligada a la cantidad de problemas a incluir. Se probaron dos test que contenían 20 y 30 problemas respectivamente, se midió el tiempo promedio en que los estudiantes trabajaban con atención y entusiasmo y finalmente se decidió que la duración total del trabajo de los alumnos no debía superar los cuarenta y cinco minutos para evitar, en lo posible, las respuestas al azar y entonces se optó por incluir 20 problemas.

b) <u>Problemas que no podían ser incluidos</u>: en los test de prueba para los estudiantes de primer año, se incluían problemas que no pudieron ser resueltos por los alumnos porque desconocían el significado de palabras como “costo” y “ganancia”. Se resolvió emplear terminología muy sencilla de interpretar.

c) <u>Redacción de las consignas</u>: se pudo observar que los alumnos se resisten a leer consignas de más de dos renglones y que muy frecuentemente se manifiesta ansiedad por “resolver”, antes de conocer claramente qué se solicita en el enunciado. Por está razón se redactaron, en lo posible, consignas precisas y muy breves para los test definitivos.

d) <u>Lugar de realización</u>: se evaluó la posibilidad de realizar la toma del test en el ámbito de la universidad, citando a los que fueran seleccionados para integrar la muestra. Esta posibilidad, que se consideró en principio atractiva para los alumnos del secundario, fue descartada porque se consideró que el encontrarse en un lugar totalmente nuevo podría ocasionar una disminución de la atención y de la concentración que se esperaba de ellos. Se decidió que el equipo se trasladara a las escuelas.

Para la selección de la muestra se analizó el número de alumnos en cursos de primero, tercero y quinto año de la ciudad, el número de escuelas, sus orientaciones, su conformación general y su ubicación en el mapa de la ciudad.

Se decidió trabajar solamente con escuelas provinciales de dependencia oficial y se conformó la muestra con cuatro escuelas: dos que funcionan en la zona Centro con orientaciones diferentes (Bachiller y Técnico), reciben estudiantes de toda la ciudad, con diversidad de condiciones sociales y económicas. Las otras dos escuelas están ubicadas en barrios alejados del centro y tienen orientación técnica y humanística.

El muestreo se realizó por divisiones hasta completar el número y se tomaron mil test en total.

Tres miradas para el sistema decimal

Presentamos aquí tres ejercicios que se incluyeron en el test dirigido a alumnos de primer año que consideramos interesantes porque apuntan al mismo contenido desde tres ópticas diferentes. Los mismos se eligieron con el fin de evaluar:

#1: capacidad para reconocer el enunciado de la regla de la división por la unidad seguida de ceros.

2: capacidad para utilizar dicha regla en la resolución de un ejemplo.

3: capacidad para analizar información dada en gráficos y reconocer regla de la multiplicación por la unidad seguida de ceros.

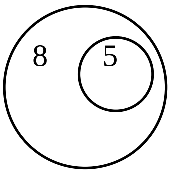
Ítem 1: Si la coma decimal de un número se corre dos lugares hacia la izquierda, el número que se obtiene, es el número dado...

a) multiplicado por mil. b) dividido por mil.
c) multiplicado por cien. d) dividido por cien.
e) multiplicado por dos.

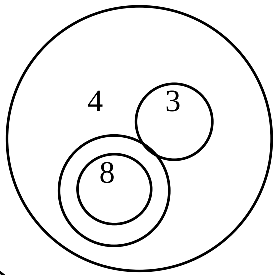
Ítem 2: Si se resuelve: 13 x 10 + 50 : 1000 + 18 : 10 + 5 x 100 , se obtiene:

a) 632,2 b) 53683,55 c) 6300,22 d) 3,55 e) 54310

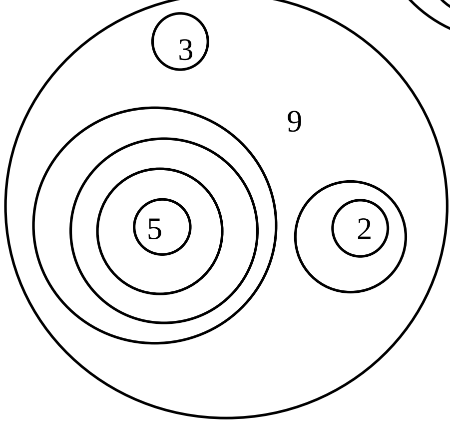
Ítem 3: En el país del circulo, la gente escribe 58 de la siguiente forma:



Cuando quieren expresar 834 escriben:



Si escriben:



¿Qué número quieren expresar?
a) 2359 b)5239 c) 9325 d) 55239 e) 50239

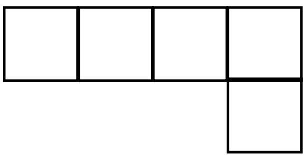
Los porcentajes de respuestas correctas para el primer ítem van desde el 12,85% al 23,9%. En promedio de todos los alumnos de todas las escuelas un 15,5% responde correctamente.
Resultó sumamente llamativo que los alumnos confunden multiplicar por dos con dividir por cien, llegando a ser la respuesta más frecuente en unas de las escuelas donde el 41,3% optan por ella; en las otras escuelas los promedios de elección para esta respuesta van desde el 17,5% al 32,9 %, lo que hace un promedio del 26,4 %.
Sin embargo, en dos escuelas, es mayor el número de alumnos que responde correctamente item 2, y duplicándose los porcentajes de aciertos del ítem anterior, en una de las escuelas. Se pudo verificar que muchos de los alumnos que optaron por la respuesta “ multiplicar por cien” resuelven correctamente la suma algebraica. Entendemos que el error cometido en estos casos esta asociado a un problema de lateralidad no siempre resuelto en la preadolescencia.
Para el tercer item los porcentajes de respuestas correctas no superan en ninguna de las escuelas el 22%, sin embargo alrededor del 45% de los estudiantes, en todas las escuelas elige como respuesta mas frecuente 5239. Esto indica que han logrado reconocer el modelo de la multiplicación por la unidad seguida de ceros dada en los gráficos y han caído en la trampa de no contar con cuidado la cantidad de círculos que rodean al cinco.
Algunas de las cuestiones a dirimir en este contexto fueron:

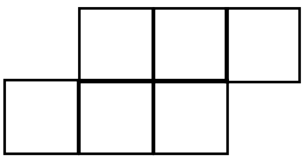
> ¿ Por qué razón los alumnos pueden aplicar correctamente una regla que no pueden reconocer como enunciado ?
> ¿ Cómo es posible que descubran un modelo gráfico y lo traduzcan al sistema de numeración y no recuerden una regla que han debido aprender y usar desde el sexto grado?

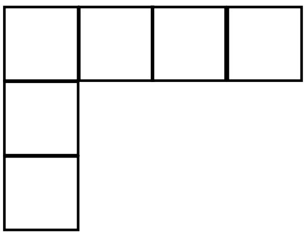
El mismo problema para tres test:

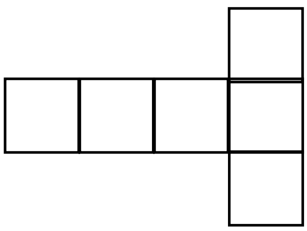
El siguiente problema se incluyó en los instrumentos de los tres grupos.
La consigna es:

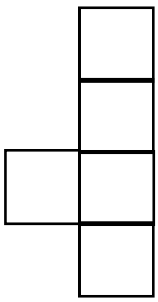
Indica con cual de las siguientes figuras es posible armar un cubo:

a)


b)


c)


d)


e)


Cuando se decidió incorporar este ítem a las pruebas sabíamos que ni en la escuela primaria ni más tarde se trabajaba con este contenido de geometría, pero consideramos interesante evaluar las posibilidades de manejo espacial de objetos y reconocimiento del modelo adecuado a través de las diferentes edades, entendiendo que la dificultad de resolución es considerablemente menor cuando se incrementa la edad de los encuestados.
En primer año entre un 34% y 43% de los alumnos contesta correctamente, siendo esta la respuesta mas frecuentemente elegida. Resulta llamativo que en todas las escuelas la segunda opción mas elegida sea la (b) pues esta es, de todas las figuras presentadas, la única que no brinda la posibilidad de armar ni siquiera parcialmente un cubo; y que, alderredor de un 12% de los alumnos en todos las escuelas hayan elegido mas de una opción.
En tercer año entre un 53% y 57,7% de los alumnos contesta correctamente
y aunque disminuye la cantidad de alumnos que eligen la opción (b) sigue siendo ésta la mas elegida después de (d). Nos resulta muy llamativo en este caso que no se presentan una mayor cantidad de aciertos entre los alumnos de escuelas técnicas, pues su formación en taller y dibujo les debería permitir un mejor manejo del espacio tridimensional.
En quinto año solamente contestan correctamente entre un 51,3% y un 61%, no aparece en estas encuestas como opción mas frecuente, después de la correcta, la (b).
La expectativa que teníamos respecto de este caso es que en quinto año el porcentaje de alumnos que contestara correctamente rondara el 90 %, pues la construcción de un cubo requiere de procesos simples teniendo en cuenta que los encuestados tienen más de 17 años y el ejercicio de representación espacial de un cuerpo a partir de una figura plana puede lograrse a partir de los diez años.

Referencias bibliográficas

Parra, Saiz. (1994). *Didáctica de la Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
Rodrigo, Arnay. (1997). *La construcción del conocimiento escolar*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
Iaeis. (1992). *Didácticas especiales.* , Buenos Aires, Argentina: Aique.
Cohen, Manion: *Métodos de investigación educativa*. Morata.
Pozo, (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata.

Una experiencia para la diversidad

Angela Pierina Lanza
Ministerio de Educación. Provincia. del Chubut. Argentina
pierinalanza@arnet.com.ar

Resumen
En el presente trabajo se presenta una experiencia de enseñanza y aprendizaje, acerca del concepto de fracción, enmarcada en una propuesta curricular basada en la resolución de problemas, que colabora en diversificar y enriquecer las posibilidades de aprendizaje y autoaprendizaje.
Desde la Matemática, se puede pensar en secuencias de enseñanza y aprendizaje enmarcadas en una propuesta curricular que contemple ciertos lineamientos, y que colaboren en diversificar y enriquecer las posibilidades de aprendizaje y autoaprendizaje.

Marco general

La diversidad en la educación, es una realidad, hoy en día, admitida en nuestro país, pero aún así en los proyectos institucionales se favorecen la uniformidad de los contenidos y de los ritmos de progresión escolar. Hace tiempo que en nuestras escuelas se perciben las diversas necesidades, capacidades e intereses de los niños. Se han buscado emplear distintas estrategias (tutorías, métodos, materiales) para satisfacer las necesidades particulares de los individuos diferentes; pero a pesar de los esfuerzos, nuestras escuelas no pueden satisfacer la amplia variedad de capacidades que hallamos en el aula.
La escuela tiene una responsabilidad, al igual que todos los agentes involucrados en el sistema: **no puede igualar a sus alumnos en sus propuestas de aprendizaje, ni tampoco en las formas de evaluación; no puede homogeneizar todas las acciones de los alumnos**. Se hace necesario interpretar la singularidad de cada proceso de enseñanza y aprendizaje donde están en interrelación un docente, un alumno y un saber dentro de un contexto sociocultural determinado.
“La escuela de la diversidad es la escuela de la negociación de las diferencias, por lo que se deben desterrar los mecanismos de clausura de la diversidad. A través de la educación se procura distribuir competencias que favorezcan el intercambio de las diferencias entre los niños, entre los adultos y entre las instituciones, construyendo una red de articulaciones en forma horizontal.
Lo fundante entonces, en el proceso educativo, es este juego de las diferencias y construcción de articulaciones.” (Diseño Curricular Pcia. del Chubut: Encuadre teórico, pág. 21)
Pero, ¿cuál es la forma de responder a la heterogeneidad? ¿Nuevos exámenes, repeticiones de cursos, clases de recuperación? ¿Agrupamiento por niveles, actividades de refuerzo, tutoría personalizada, cursos complementarios? Creo que existe la posibilidad de una respuesta, que significa la aceptación de la diversidad de ideas, experiencias y actitudes; la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje, la diversidad de capacidades y habilidades, la diversidad de intereses y expectativas ante el aprendizaje escolar:
Llevar a cabo una propuesta curricular que responda a los siguientes lineamientos:

- Considerar a <u>todos</u> los alumnos en la planificación del proyecto educativo institucional.
- Realizar un proyecto curricular institucional articulado, flexible y adecuado a las necesidades de la realidad actual.
- Composición heterogénea de los grupos.

- Un modelo de intervención que se base en la programación de los contenidos y actividades adaptados a la capacidad, ritmo, motivación, intereses, posibilidades, etc., de cada alumno del aula considerado individualmente; y en la autorregulación del aprendizaje, permitiendo una reflexión sobre lo aprendido (¿Qué aprender? ¿Cómo aprender? ¿Cuánto he aprendido?). La intención es formar alumnos autónomos.
- Contemplar los criterios de evaluación, como un elemento esencial en el proceso de autorregulación del aprendizaje.
- El trabajo en equipo como superador del trabajo individual en cuanto al favorecimiento del aprendizaje cooperativo.

  Los resultados alcanzados por los miembros del grupo abarcan logros académicos y personales como consecuencia de la confianza del grupo y de la atención que todos sus componentes se prestan; y son superiores a los que se obtendrían trabajando individualmente. Se produce el conflicto intelectual. Al conflicto se llega cuando los integrantes del grupo se involucran en una discusión en la que vierten sus puntos de vista, sus diferentes posturas, sus opiniones, procesos de pensamiento, etc. Cuando el conflicto se resuelve constructivamente, desemboca en un cuestionamiento de las posturas de cada individuo, en una búsqueda activa de información, en una reconceptualización del conocimiento; y, consecuentemente, aumenta el dominio y la retención de los conceptos discutidos y se observa un nivel mayor de estrategias de razonamiento.

Propuesta metodológica

El objetivo de la enseñanza de la Matemática es la comprensión de los conceptos matemáticos, no su fundamentación científica.
La Escuela debe enseñar una Matemática relacionada con la faz instrumental de su concepción. Lo más conveniente para el trabajo en la EGB es una Matemática aplicada, contextualizada, relacionada con la interpretación del mundo que rodea a los alumnos, con sus necesidades o intereses cotidianos, que paulatinamente les ofrecerá los elementos formales propios de la ciencia objeto de estudio.
Para lograr un aprendizaje significativo en Matemática se deben proponer situaciones ante las cuales, las nociones matemáticas se constituyan en instrumentos necesarios para su solución. Un conocimiento matemático sólo puede considerarse aprendido cuando se ha funcionalizado; es decir cuando es posible emplearlo como medio para resolver una situación o problema.
El alumno debe construir por sí mismo dicho conocimiento, para llegar a un aprendizaje significativo, y los problemas lo deben motivar a indagar entre sus saberes previos para decidir qué le conviene hacer, y lo deben conducir a la investigación de nuevos saberes. Estos le permitirán revisar y reorganizar sus estructuras cognitivas.
“La búsqueda de procedimientos para resolver las diferentes situaciones va dando significación a los conceptos matemáticos. Por ello el docente debe contextualizar los conocimientos que desea que los alumnos aprendan, vincularlos con una gran variedad de situaciones en las que puedan emplearse, sólo así permitirá que logren construir su significado” (Fones (1997): ¿Qué hago con los problemas?, pág. 16. Edit. Geema. Bs. As.)
Una vez que el conocimiento ha adquirido sentido para el alumno, éste tiene que validar sus producciones. El alumno se aproxima a la conceptualización de determinado contenido, en

la medida en que es capaz de distinguir qué procedimientos asociados al mismo son válidos y eficaces y cuáles no lo son, permitiéndole paulatinamente la adquisición de competencias. Por ello, son aspectos fundamentales del quehacer áulico:

- La construcción del concepto.
- La resignificación del mismo ante situaciones nuevas.
- La transferencia a problemáticas diferentes.
- La validación de las producciones.

¿Cuál es entonces el rol del problema en el aula?

"Todo problema es un desafío que pone a prueba nuestros saberes, nuestra capacidad de interpretar, de detectar la información relevante, de relacionar, de operar, de anticipar, de organizar y de validar procedimientos.

Todo problema pone a prueba no sólo nuestras aptitudes sino fundamentalmente nuestras actitudes, tanto en lo personal como en lo social. La capacidad de resolver un problema está íntimamente ligada con el logro de la autonomía, con la valoración de sí mismo y la confianza en las posibilidades personales" (Fones (1997): *¿Qué hago con los problemas*?, pág. 23. Edit. Geema. Bs. As.)

Recuperando a María Amalia Fones, la resolución de las situaciones problemáticas permitirá al alumno:

- Intercambiar opiniones.
- Aprender a escuchar.
- Valorar la crítica constructiva.
- Aceptar los errores y ser flexible para modificarlos.
- Aprender a expresarse correctamente.
- Confrontar, seleccionar y optimizar estrategias.
- Argumentar en defensa de sus procedimientos.
- Poner en juego los saberes previos.
- Estimar resultados.
- Evaluar la razonabilidad de sus procedimientos, etc.

Me parece, por lo pronto, que en las propuestas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática aparecen los contenidos desde una visión de la Matemática sólo como objeto de conocimiento, estando ausente la visión como "instrumento de conocimiento", descuidándose de este modo su vinculación con la vida cotidiana, con otras disciplinas y con los propios procesos de construcción histórica de sus contenidos y sus métodos.

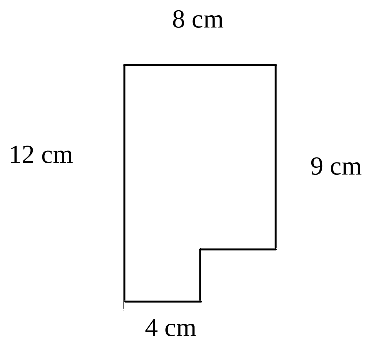
A modo de ejemplo. Una experiencia acerca del concepto de fracción

El concepto de fracción es una noción especialmente difícil, las dificultades surgen prontamente y perduran. En consecuencia, se debe diseñar una secuencia de aprendizaje basada en la experimentación con materiales concretos y visuales, dando suficiente tiempo para comprender los conceptos de fracción y equivalencia que son fundamentales.

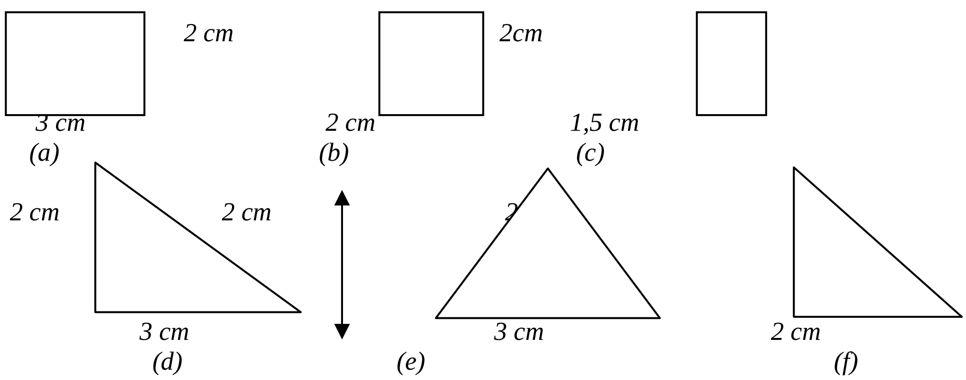
Asimismo, es necesario presentar gradualmente los distintos significados, empezando por los de relación parte-todo. Creo que el éxito en Matemática depende de la riqueza de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos; y una representación mental es rica si refleja muchos aspectos relacionados con el concepto, y si permite pasar de uno a otro con facilidad.

"*La idea de fracción aparece a partir de situaciones en que está implícita la relación* parte-todo. *Esta relación es una de las posibles interpretaciones de la fracción.*

Pero, por otro lado, también podemos representar mediante una fracción situaciones en la que está implícita una relación *parte-parte* (*o todo-todo*), que nos llevan a una interpretación de la fracción como razón.
Aún existen otras interpretaciones de las fracciones: *operador, cociente de dos números, etc.* El constructo teórico que sintetiza todas ellas constituye el número racional.
Hay, por tanto, un largo camino que recorrer entre las primeras ideas intuitivas de “mitades” y “tercios” hasta la consideración de las fracciones como elementos integrantes de una estructura algebraica” (Linares Ciscar Salvador. Sánchez Ma. Victoria (1988): Fracciones, pág. 13. Ed. Síntesis. España)
La situación problemática que se presenta a continuación recupera, fundamentalmente, uno de los significados del concepto de fracción: la fracción como parte de un todo continuo.
Asimismo se vincula el proceso de medir superficies y el uso de las fracciones.
Dicha situación es una adaptación de la presentada en la Revista Lápiz y Papel, *Nº 5, p. 24-26.*
Dada la siguiente figura:



¿Qué parte de la misma ocupa la figura a? ¿Qué parte representa la b? ¿Qué parte representa la c?, etc.
¿Cuántas figuras de tipo a equivalen a cuántas de tipo c? ¿Cuántas figuras de tipo e equivalen a cuántas de tipo f?



Para generar contextos en los que los conceptos matemáticos cobren sentido por su valor para dar respuesta a un cierto desafío, el problema matemático debe ser un “buen problema”.
Se considera que el problema presentado, vinculado al concepto de fracción, es un “buen

problema” pues, recuperando a Régine Douady y lo expresado en la Revista del Plan Social Educativo Nº 6, reúne las siguientes características:

- El problema tiene valor en sí mismo, independientemente de que esté relacionado con la vida cotidiana, o de que tenga utilidad práctica. La necesidad de generar contextos significativos no debe llevar a que se pierda de vista el objetivo de propiciar un trabajo específicamente matemático.
- El problema propone un grado de desafío adecuado. Posibilita el despliegue de estrategias conocidas. Tiene sentido en el campo de conocimientos de los alumnos y las alumnas.
- El problema requiere deliberación, los alumnos y las alumnas no conocen previamente el procedimiento para resolverlo.
- El problema está abierto por la variedad de estrategias que puede adoptar (en diferentes marcos).
- El problema es rico. Hay una red importante de conceptos involucrados.

Organización de la situación de aprendizaje

Retomando la clasificación que propone Brosseau acerca de las situaciones didácticas, en Grecia Gálvez: La Didáctica de las matemáticas”: aportes y reflexiones. Paidós Educador. 1994. Bs. As. y la propuesta de Regine Douady:

Presentación del problema

El docente expone la consigna y se asegura, a través de una discusión con los alumnos, que la consigna tenga sentido para cada uno de ellos.

Fase de investigación

<u>Situación de acción:</u>

Los alumnos y las alumnas se reúnen en pequeños grupos (no más de 5 personas), para resolver la situación problemática. Intentan poner en juego sus conocimientos anteriores, exploran, hacen observaciones, elaboran estrategias de resolución, llegan a conclusiones y obtienen resultados.

Para poder enfrentar el problema los alumnos y las alumnas deben poseer los siguientes conocimientos previos:

- Concepto de área. Comparación: equivalencia de superficies.
- Medición de superficies utilizando distintas técnicas.
- Concepto de fracción.

<u>Situación de formulación:</u>

Los alumnos y las alumnas comunican informaciones a sus compañeros utilizando su lenguaje habitual y luego lo van perfeccionando y adecuando a la situación, teniendo en cuenta los objetos y relaciones pertinentes de la situación de manera adecuada.

Paralelamente, el docente circula por el aula, observa y registra los procedimientos que utilizan los alumnos, detecta las dificultades, **pero se abstiene de intervenir dando soluciones**; en todo caso formula nuevas preguntas.

Balance. Presentación de resultados

- Luego de cierto tiempo de trabajo, cada grupo presenta la solución en un afiche.

(Anexo)

- Situación de validación:

Es el momento del balance de lo realizado. Los equipos pasan a mostrar sus formas de solución. Se comparten y discuten las soluciones presentadas en los afiches. Los alumnos argumentan para defender sus afirmaciones. Toda la clase discute los distintos procedimientos, mientras la docente coordina el debate. Se analizan los procedimientos más económicos, los más fáciles aunque sean más largos, los que puedan resultar erróneos y las causas de error, las principales dificultades encontradas, etc.
Luego de haber trabajado en las distintas situaciones, los alumnos deben asumir la significación socialmente establecida de los conocimientos que han adquirido y adoptar las convenciones sociales pertinentes. Este trabajo específico del docente es el que se denomina:

Fase de síntesis. Institucionalización

En esta fase se destacan las características importantes del problema, es decir el objetivo de aprendizaje propuesto por el docente. A partir de las producciones de los alumnos, el docente desprende lo que ellos deben retener y se los dice (en particular, para esta situación específica: la fracción como parte de un todo continuo. Iniciación en: equivalencia de fracciones y la fracción como operador).
Esta fase es indispensable para que no se pierdan los beneficios de la fase de acción.

Consideraciones finales

Para esta propuesta se tuvieron en cuenta los antecedentes problemáticos relacionados con el concepto de fracción, concepto vertebrador de otros conceptos matemáticos. Es un supuesto bastante común y está demostrado en el aspecto experimental la considerable dificultad con que el niño aprende lo que es una fracción y como se utiliza.
En este trabajo se intentó mostrar como aprenden los alumnos el concepto de fracción a partir de la resolución de problemas, considerándose una situación-problema en la cual las fracciones, son de forma evidente una mejor solución que las otras estructuras, en particular aquéllas ya conocidas por el niño.

Referencias bibliográficas

Alsina, Claudi y otros (1996). Enseñar matemáticas. Barcelona: Editorial Graó.
Barberá Gregori, Elena (1997). “Carpetas para evaluar las matemáticas”. *Revista UNO.* Vol. 11, págs. 25-32. Barcelona: Editorial Graó.
Cerquetti-Aberkane, Françoise (1998). *Enseñar matemáticas en los primeros ciclos*. Buenos Aires: Editorial Edicial.
Diseño curricular de la Educación General Básica. Marco teórico. 1997. Ministerio de Cultura y Educación de la Provincia del Chubut.
Documento de Apoyo: Reflexiones sobre la resolución de problemas para todos los ciclos: ejemplos de casos para analizar en 1º, 4º y 7º año. Ministerio de Cultura y Educación de la Provincia del Chubut. Diciembre-1997
Douady, Regine: *Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de encuadres. En “Cuaderno de Didáctica de las Matemáticas” Nº3.*

González, Salvador; Martín-Yágüez, M. Carmen y Ortega, Tomás (1997): "Propuesta y análisis de una prueba de evaluación". *Revista UNO.* Vol. 11, págs. 55-78. Barcelona: Editorial Graó.
Grecia Gálvez (1994). *"La Didáctica de las matemáticas" en Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones de Parra, C. y Saiz, I. (comps*). Buenos Aires: Paidós Educador. .
Lanza. Gelroth (1999). *Marco teórico de la Investigación "Concepciones de los que enseñan y aprenden acerca del concepto de fracción. Estudio de casos: Dificultades relevantes en los procesos de conceptualización puestas en evidencia en la resolución de problemas en escuelas estatales y privadas de Comodoro Rivadavia y Sarmiento"*
Linares Ciscar Salvador. Sánchez Ma. Victoria (1988): *Fracciones. Barcelona: Editorial Síntesis.*
Lovell, K. (1986). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños.* Madrid: Editorial Morata.
Masingila, Joanna O.; Nigam, Preety y Domínguez, Ángeles (1997): "Evaluación: una herramienta para enseñar y para aprender". *Revista UNO.* Vol. 11, págs. 33-41. Barcelona: Editorial Graó.
Pérez Pérez, Cruz: *"El autocontrol del trabajo escolar como metodología de atención a la diversidad en el aula" en Revista Aula. De innovación educativa. Nº66.* Enero 1998. Ed. Graó. España
Revista "Lápiz y Papel" Nº5 (1996). Tiempos Editoriales. Bs. As.
Revista del Plan Social Educativo Nº 6: Resolución de problemas de matemática. Marzo de 1998.
Rico, Luis; Castro, Encarnación; Castro, Enrique; Fernández, Francisco y Segovia, Isidoro (1997): "Cuestiones abiertas sobre evaluación en Matemática". *Revista UNO.* Vol. 11, págs. 7-23. Edit. Graó. Barcelona.
Villella, José (1998). *¡Piedra libre para la Matemática! Aportes y reflexiones para una renovación metodológica en la E.G.B.* Buenos Aires: Editorial Aique.

Algunos factores que influyen en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de la matemática

María Rey Genicio, Graciela Lazarte, Clarisa Hernández
Universidad Nacional de Jujuy (Institución: Facultad de Ingeniería). Argentina
tresm@imagine.com.ar grlazarte@arnet.com.ar

Resumen
A partir de la apreciación de que los alumnos ingresantes a la Facultad de Ingeniería de la U.N.Ju evidenciaban dificultades en el manejo comprensivo de conceptos matemáticos y en la aplicación del razonamiento a la resolución de problemas, se conformó un equipo de investigación interdisciplinario a fin de diagnosticar cuales eran las principales problemáticas al respecto, precisar la incidencia de los modos de enseñanza de la matemática en el aprendizaje de los alumnos y contribuir al mejoramiento de su enseñanza en el nivel medio. Además de relevar el estado del arte en relación al tema, se seleccionaron distintas estrategias para el diagnostico de la situación, por ejemplo: entrevistas y observaciones de clase a docentes, encuestas de opinión y test de aptitudes analíticas realizados a los alumnos, cursos y talleres de capacitación destinados a profesores, con instancias de reflexión y discusión con respecto a las producciones de los docentes, análisis de los resultados de los exámenes de ingreso a la Facultad Ingeniería, todo esto en el marco de acuerdos con distintas instituciones de la ciudad de San Salvador de Jujuy. Las conclusiones obtenidas se transfirieron al medio como un aporte para coadyuvar a la superación de las situaciones de fracaso escolar en el aprendizaje de la Matemática. En este reporte de investigación compartiremos con los docentes interesantes aspectos encontrados en el análisis de esta problemática.

Este trabajo de investigación se inició con el objetivo de detectar las dificultades que evidencian los alumnos en el aprendizaje de la Matemática en el Nivel Medio, descubrir las estrategias que se ponen en juego en su enseñanza y además, a partir de las dificultades detectadas en los procesos de aprendizaje de los alumnos ingresantes y cursantes de la Carrera de Ingeniería en la UNJu., evaluar si esa realidad contrastada respondía en algún sentido a los modos con que se enseña esa disciplina en la escuela secundaria. Luego, a partir del diagnóstico realizado y de aportes teóricos específicos, se estableció el propósito de ofrecer algunas sugerencias que permitan una posibilidad de mejora en la enseñanza de la matemática.

La problemática observada nos permitió plantearnos algunas hipótesis sobre las posibles falencias, en especial las atribuibles a los docentes, en la enseñanza de la matemática en el Nivel Medio**:**

1.–Los docentes no siempre son claros en los enunciados de las situaciones problemáticas que presentan a los alumnos. Esto provoca, por una parte, que el estudiante no resuelva correctamente el problema por falta de comprensión de la consigna y por otra, crea el hábito de obviar la lectura para preguntar directamente al docente qué es lo que debe hacer.

2.– Los profesores presentan a los alumnos situaciones problemáticas y/o de cálculo de manera repetitiva, sin buscar la variedad de aplicaciones que cada tema ofrece. Así se induce a los alumnos a realizar un trabajo mecánico sin ejercitar el pensamiento analítico y lógico.

3.– La formación recibida por los profesores tanto en el aspecto disciplinario como en el pedagógico no les brinda las suficientes herramientas para desenvolverse con eficiencia en sus primeros pasos por el aula. Esta eficiencia recién la logra a través de la experiencia y por sus propios medios.

Además de relevar el estado del arte con relación al tema, se seleccionaron distintas estrategias para el diagnóstico de la situación, por ejemplo entrevistas y observaciones de clase a docentes, cursos y talleres de capacitación con instancias de reflexión y discusión con respecto a las producciones de los docentes que sirvieron a la vez de transferencia al medio, análisis de los resultados de los exámenes de ingreso a la Facultad de Ingeniería, etc., todo esto en el marco de acuerdos con distintas instituciones de la ciudad de San Salvador de Jujuy. A continuación presentamos los resultados de las distintas actividades encaradas en la investigación.

Trabajos de campo con docentes:

I. <u>Observaciones de clase</u>

Se realizaron 10 observaciones de clase a docentes de Matemática del Nivel Medio, seleccionados de establecimientos de S.S. de Jujuy, públicos y privados de diferente ubicación barrial, distinto plan de estudios y jurisdicción. De este modo, aunque pequeña, la muestra recoge una variedad de situaciones escolares. La consigna dada a los observadores fue la de registrar completamente los hechos dados en la clase, pero apuntaba especialmente a los siguientes indicadores: Concepciones de aprendizaje y de sujeto que aprende. Vínculos entre los actores. Concepción o tipo de conocimiento. Modalidad de trabajo, estrategias, metodología. Consignas, ejercicios, indicaciones del docente.

Analizadas las observaciones , podemos indicar las siguientes reflexiones**:**

En la mayoría de las clases observadas se evidencia una mixtura de tendencias en lo que hace a la concepción de aprendizaje, salvo una situación sumamente rígida y autoritaria.

La propuesta metodológica por lo común oscila entre la actividad individual y la grupal, siendo la primera la más utilizada por los docentes.

El tipo de aprendizaje más observado es por recepción y no significativo; no se observan casos de significatividad social del contenido, donde la temática de la situación a resolver se vincule a los intereses o el contexto propio del alumno.

El modo de aprendizaje es comúnmente el condicionado, si bien aparecen ciertas consignas que guían la aproximación y transformación del objeto de conocimiento por parte del alumno.

En cuanto a la modalidad de trabajo, en la mayoría de las observaciones se reitera la forma expositiva, la que se alterna con el diálogo. Se advierten en muchos casos preguntas mal formuladas, poco precisas en cuanto a la terminología, y también poco pertinentes o conducentes al concepto al que se pretende arribar.

En relación con las intervenciones, también es común observar indicaciones del tipo de las "recetas" que favorecen más bien la fijación de mecanismos de resolución por encima de la comprensión.

II. <u>Propuestas de talleres</u>

Se implementaron diferentes talleres destinados a docentes del Nivel Medio. El tema seleccionado para desarrollar en uno de ellos fue **geometría** a través del programa Cabri – Géomètre. Los participantes debieron realizar un trabajo final, de cuyo análisis obtuvimos información relevante acerca de los aspectos metodológicos de la enseñanza y que nos permitieron la corroboración de la validez de las hipótesis planteadas en relación a las dificultades y/o falencias metodológicas o didácticas en la enseñanza.

En el análisis de las 37 evaluaciones realizadas por los profesores, se han tenido en cuenta entre otros, los aspectos indicados a continuación**:** rigurosidad en el lenguaje matemático,

claridad y completitud de la consigna o enunciado de la actividad propuesta, la habilidad con que el docente organiza las ideas para expresarlas por escrito, pasos enunciados por el docente para la resolución de la actividad, grado de articulación entre las actividades realizadas y los objetivos propuestos.
De todos los elementos tenidos en cuenta para el análisis aparece claramente una cuestión de suma importancia: cómo puede aprender y qué puede aprender el alumno si el docente organiza una propuesta de trabajo que es confusa, que desatiende la "rigurosidad" propia de un lenguaje científico, que incluye pasos innecesarios o suprime los imprescindibles, que no expresa claramente en la consigna datos o procedimientos a seguir, y que persigue objetivos "reñidos" con la actividad.

III. Entrevistas a docentes
Se realizaron 25 entrevistas a profesores de Matemática, recabándose información acerca de su formación y antigüedad docente, razones por las que eligió la carrera, su modo de encarar la enseñanza, dificultades encontradas, preferencias hacia algún tema, etc.
Los aspectos sobresalientes fueron**:** muy pocos profesores reconocieron tener vocación docente, mostraron disconformidad con su formación en el área pedagógica. En general coinciden en que una de las mayores dificultades en los estudiantes es leer e interpretar las consignas, observan desinterés en los alumnos como así también una aparente falta de confianza en sí mismos que los lleva a preguntar permanentemente al profesor, es decir, falta de autonomía de trabajo

Trabajo de campo con los alumnos:

I. Análisis del rendimiento en dos instancias evaluativas
Se analizó por un lado un examen de ingreso a las carreras de Ingeniería y por otro los resultados de un parcial correspondiente a la Unidad Introductoria de Análisis Matemático I.
Este análisis nos permite de algún modo reafirmar la línea de hipótesis planteada respecto a que la enseñanza de la matemática en el Nivel medio ha caído con frecuencia en un vacío entrenamiento de resolución de ejercicios, que si bien logra cierta fluidez taquigráfica, no conduce a la comprensión ni a la creatividad. Por lo tanto, no contribuye a desarrollar la capacidad de razonamiento ni la posibilidad de integrar conocimientos.

II. Encuesta de opinión
Se realizó una encuesta de opinión a 931 alumnos ingresantes a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy. En la misma se solicitaba información acerca de la formación recibida, su rendimiento, y otras cuestiones relacionadas con los aspectos metodológicos y didácticos de las clases de Matemática en la escuela secundaria.
Interpretando la información obtenida en esta encuesta desde una perspectiva totalizadora y a la luz de datos aportados por otras indagaciones, nos ha servido para reafirmar preconceptos e hipótesis, y agudizó el sentido crítico en muchos aspectos. Se observaron las dificultades, carencias y aciertos relativos a la enseñanza recibida en el nivel medio, todo esto expresado por los destinatarios del sistema educativo: los propios alumnos.

III. Análisis de las aptitudes analíticas

Otra estrategia de trabajo utilizada fue la toma de una prueba de evaluación de aptitudes analíticas a 1178 alumnos de 1er año de la carrera de Ingeniería, con el fin de comparar los resultados con el rendimiento académico en la asignatura Análisis Matemático I, y dilucidar si las dificultades evidenciadas por los alumnos pudiesen obedecer a su nivel de aptitud analítica más que ser una consecuencia de la enseñanza de la matemática.

La prueba elegida fue el Test WASI (Whimbey Analytical Skils Inventory). Los items de esta prueba, están agrupados en 5 categorías según el aspecto que analiza cada uno**:** Vocabulario, Analogías, Tendencias y pautas, Razonamiento verbal, Problemas matemáticos de enunciado verbal. En general, en todas las categorías los resultados obtenidos evidencian un rendimiento de mediano a bajo en los alumnos. Esto indudablemente, por las características de las capacidades puestas en juego en la prueba, influye notoriamente en el aprendizaje de la Matemática. La información obtenida en este test se ha sometido a distintos análisis estadísticos, pudiendo inferir que las aptitudes analíticas reflejadas en la prueba WASI están vinculadas a los mejores rendimientos académicos.

Conclusiones generales

La observación de falencias detectadas en nuestro trabajo como docentes de asignaturas del área Matemática de la Fac. de Ingeniería, ha impulsado la realización de este Proyecto como una necesidad de investigar y analizar aspectos relacionados con la enseñanza de la matemática que pudieran explicar las dificultades detectadas y así poder proponer acciones que contribuyan al mejoramiento de la misma.

Las distintas actividades encaradas para la indagación permitieron corroborar algunas hipótesis iniciales y despertaron otras inquietudes que significaron un avance en el diagnóstico de la situación a la vez que un motor para la elaboración de propuestas para el mejoramiento de la enseñanza.

Finalmente, a partir del análisis de todos los elementos reunidos hemos alcanzado algunas conclusiones, provisoriamente y para la población incluida en la investigación.

De algún modo, las entrevistas a los profesores en ejercicio mostraron una cruda realidad. Deseamos resaltar al menos dos cuestiones:

- muchos docentes de Matemática deseaban en realidad estudiar otra carrera y optaron por ella por necesidad, con lo que uno puede esperar que la motivación para el desempeño de su trabajo sea menor.
- la formación pedagógica de la carrera no ha sido buena o al menos ha sido insuficiente, y si consideramos que egresan como Profesores y no como Matemáticos, ello merece un profundo análisis.

En lo que hace a la forma de trabajo del docente, metodología utilizada, actividades y estrategias didácticas:

- la propuesta metodológica por lo común es la actividad de ejercitación individual, por lo que se deduce que el aprendizaje se estructura fuertemente a través de la fijación, la repetición y la memorización, y considerando más importante el aprendizaje individual que la construcción colectiva de saberes. *Creemos importante matizar las actividades propuestas alternando las tareas individuales con las de construcción grupal, como así* *también centrar las estrategias en procesos constructivos más que en la adquisición de hábitos mecánicos de resolución.*

- el tipo de aprendizaje es más frecuentemente por recepción y no significativo. En los casos en que se podría hablar de significatividad del contenido se limita al aspecto psicológico ligado a la adecuación del mismo a la estructura cognoscitiva de los alumnos. No se observan por ejemplo casos de significatividad social del contenido, en los que la temática de la situación a resolver se vincule a los intereses o el contexto propio del alumno. *Si bien el aprendizaje por recepción es altamente importante en el aprendizaje escolarizado, no puede el docente limitarse a éste, fundamentalmente en el conocimiento matemático donde los mecanismos de razonamiento lógico se ponen en juego de una forma primordial. Por otra parte la significatividad de los contenidos es sumamente trascendente si se tienen en cuenta las características del adolescente tales como falta de interés o el desgano, por un lado, y por otro el retraso que la escuela tiene respecto de lo que la sociedad considera significativo aprender.*
- el modo de aprendizaje es comúnmente el condicionado, es decir, se busca la incorporación de saberes a través de la insistencia, y la fijación de las respuestas correctas por el reforzamiento de la aprobación. *Consideramos fundamental animar a los procesos de construcción del conocimiento, donde la apropiación del saber no es arbitraria ni heterónoma, sino personal y autónoma e insistimos en que se debe promover un aprendizaje cuyo mayor valor sea el logro de la comprensión por encima de la aprobación.*
- la actividad grupal es la que suele vincularse más a un aprendizaje por descubrimiento a través de tareas más creativas y en las que el sujeto cumple un papel activo. *Si bien el joven parece tener escasa motivación intrínseca para el aprendizaje, el docente debe procurar que las actividades generen participación, actividad intelectual real (y no mera acumulación de datos) y el mayor placer posible para que resulte más motivador.*
- el trabajo en grupos es el único caso de vínculo mediado por el conocimiento entre alumnos en lugar de limitarse a un contacto; si este aparece en una clase sin agrupamiento, es con un sentido de “colaboración cerrada”, es decir, como respuestas o recetas que un compañero brinda al otro para evitar su fracaso y desaprobación, y no como trabajo de co-pensar los caminos de solución a los ejercicios. *Se debiera apuntar a favorecer los intercambios cognitivos entre pares, ya que en muchos casos la intervención de otro alumno puede clarificar más que la explicación del docente, y porque se permite la construcción colectiva.*
- en cuanto a la modalidad de trabajo propuestas por los profesores se reitera la forma expositiva, la que se alterna con el diálogo en la mayoría de las observaciones pero fuertemente asociado más al control o a la fijación que al razonamiento. *Insistimos en el hecho de que el alumno debe cumplir un papel activo en el proceso de conocimiento y para ello el diálogo entre éste y el docente debe servir para acompañar el camino del razonamiento y la comprensión.*
- Las intervenciones del docente no siempre mediatizan el paso del alumno del desconocimiento al conocimiento:

- las preguntas son dirigidas a “la clase” y respondidas por “la clase” sin que se logre la certeza de su corrección, ni por el docente ni por el alumno. Y en los casos en los que el grupo clase responde “a coro” lo que el docente ha interrogado, tampoco hay certeza de que todos hayan aprendido, más bien se sabe que son capaces de “repetir”. *Las preguntas acerca de si se ha entendido o no deben ser reales, el alumno debe sentir que* *verdaderamente se busca conocer su grado de comprensión. Y la atención puesta en las respuestas debe reflejar que ellas en verdad conducen al aprendizaje.*

- si bien aparecen ciertas consignas que parecen guiar la aproximación y transformación del objeto de conocimiento por parte del alumno, estas en realidad se convierten en indicaciones directas que buscan respuestas específicas vinculadas a la forma en que el propio docente ha establecido como camino de aprendizaje. Así, el estudiante es ayudado a alcanzar, por ejemplo, la solución de un ejercicio, *pero lo correcto es conducirlo a un planteo razonado y verdaderamente comprendido de la actividad de aprendizaje, sus conceptos y su sentido último.*

- Se utilizan preguntas retóricas en el sentido de que el docente parece preguntar a modo de “muletilla” o bien mecánicamente sin esperar o atender a la respuesta. Es como si se preguntara a sí mismo para conducir su propia explicación. De ese modo, el docente parece querer sólo ratificar la exposición finalizada. *Si el docente decide hacer partícipe al alumno de la explicación debe involucrarlo en forma directa, personalmente, no al grupo total, y debe escuchar su respuesta y aprovecharla para encaminar la enseñanza, transitando al ritmo del aprendizaje.*

- Algunas veces el docente advierte al alumno que debe guardar silencio y atender para evitar que pregunte después: lógicamente sabemos de la falta de atención del adolescente, de su permanente inquietud, *pero el profesor que insiste en ello todo el tiempo corre el riesgo de imprimir en el alumno una matriz de aprendizaje rígida y pasiva, impidiendo que surjan las preguntas necesarias para que él entienda el concepto o la explicación dada. Por el contrario, debe animar al estudiante a intentar comprender por medio de preguntas, aún las que parezcan descabelladas, siempre y cuando pueda sacar de ellas algo positivo.*

- los errores del sujeto en proceso de aprendizaje son señalados directamente casi en todos los casos por lo que no se busca que éste reconozca dónde el razonamiento ha sido equivocado y mucho menos el por qué. *En el proceso de aprendizaje el sujeto pasa por estados provisorios del saber y debe advertir la falta, el error o la carencia y lograr el camino adecuado que le permita construir la red de conocimientos necesaria; en este camino la intervención del docente no debe ser la indicación directa sino la apertura a nuevos interrogantes que por sí solos lo acerquen al saber.*

- la falta de precisión en el lenguaje por parte del docente, genera aprendizajes confusos donde el uso no riguroso del lenguaje matemático en el profesor provoca el uso "Libre" del mismo por parte del alumno. A esto suma el hecho de que el alumno, una vez que se acostumbra a esta imprecisión no puede superarla fácilmente cuando se enfrenta a un docente preciso y riguroso científicamente; en ese caso, el que fracasa es el alumno y no el docente que le enseñó así. *El docente debe necesariamente usar y exigir un vocabulario específico y lenguaje riguroso en todo momento promoviendo en el alumno la necesidad de la claridad.*

- las consignas no son siempre precisas, pero más fundamental es el hecho de que el docente no promueve un análisis detallado de la misma, aún cuando se observa que el estudiante fracasa muchas veces por no hacer una lectura profunda, concienzuda y reflexiva. *Se aconseja que el docente realice él mismo pensamiento en voz alta al analizar una consigna o realizar un ejercicio; de ese modo acostumbra al alumno a hacer conscientes los mecanismos del pensamiento y los pasos del razonamiento.*

Sabemos que parte de la responsabilidad en el fracaso del alumno es el propio alumno. Los estudiantes, en general no se muestran atentos a las preguntas o intervenciones, y en los casos particulares no siempre razonan a partir de las mismas. Esto podría obedecer al hecho

de que su desconocimiento o su falta de estudio es tal que por ello la guía no resulta provechosa, y en esto no siempre el docente tiene posibilidad de trabajar.
También estamos atentos al perfil del adolescente posmoderno, centrado en el hoy y despreocupado por el futuro, buscando el facilismo por encima de los logros cimentados en la responsabilidad, desinteresado en la escuela e interesado en un mundo de códigos y valores propios. Pero también debemos reconocer que la escuela marca de forma indiscutible las matrices de aprendizaje con que los jóvenes se apropian el conocimiento.
Por eso creemos que el docente tiene a su alcance algunas posibilidades para fortalecer el surgimiento de matrices de aprendizaje más libres, creativas, y autónomas. Y con ello, coadyuvar a la superación de las situaciones de fracaso escolar.

Referencias bibliográficas

Ausubel. David y otros. (1988). *Psicología Educativa*. México: Trillas.
Best, J. W. *Como investigar en Educación*. Madrid, España: Ed. Morata.
Brousseau y Otros (1992). *Didáctica de la Matemática*. Buenos Aires Argentina: Ed. Aique
Coll, César *Aprendizaje Escolar y Construcción del Conocimiento*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
Del Val, Juan; (1983*). Crecer y pensar: la construcción del conocimiento en la escuela*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
Entel, Alicia (1988). *Escuela y conocimiento*. Buenos Aires, Argentina: Miño y Dávila.
Swenson, Leland (1990). *Teorías del Aprendizaje*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
WHIMBEY Arthur, LOCHHEAD Jack (1993). *Comprender y resolver problemas*. Aprendizaje Visor .

Educación y pensamiento lateral

Marta G. Gómez Guchea; Mirta Graciela Jacobo; Sara Inés Ottonello; Marta Susana Golbach; Analía Patricia Mena; María de los Angeles Juárez.
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
mcostilla@herrera.unt.edu.ar fliaestofan@arnet.com.ar.

Resumen
El objetivo del presente trabajo fue realizar una investigación teórica acerca de la concepción del pensamiento lateral, siempre en la búsqueda de incorporar formas alternativas de estudio y aprendizaje que pueda ser transmitido a los alumnos, particularmente a quienes cursan la asignatura Algebra en la Fac. de Cs. Ecs. de la U.N.T., a fin de que los mismos no se esquematicen, no pierdan su capacidad creativa y apliquen en su vida diaria las diversas cualidades que posee el proceso del pensamiento. La expresión "pensamiento lateral" se refiere a un proceso diferente al pensamiento lógico, pero no antagónico sino complementario; es esto lo que comienza captando la atención del lector, situación que se acrecienta a través del conocimiento de su esencia, sus limitaciones, sus características, sus métodos y técnicas... Este trabajo contempla una serie de sugerencias para que el docente trabaje en la creación de determinadas condiciones que propicien el desarrollo de la creatividad y estimulen el pensamiento divergente en los alumnos.

Introducción

He aquí un problema que por su brevedad, simplicidad y dificultad es considerado el mejor acertijo de pensamiento lateral de todos los tiempos: "Un hombre entró en un bar y solicitó al cantinero un vaso de agua. Nunca antes se habían encontrado. El cantinero sacó un arma de debajo del mostrador y apuntó al hombre. El hombre dijo: "Gracias" y se fue. ¿Por qué?" (Sloane, 1992, p. 101).

> *Si desea resolver este problema, la lógica pura y el razonamiento deductivo no serán suficientes: ¡necesitará pensar lateralmente!*

Fue el psicólogo Edward de Bono (1989) quien hace algunos años acuñó la expresión "*pensamiento lateral*" para referirse a un proceso diferente al pensamiento lógico, lineal o directo al que estamos acostumbrados. En él se debe abandonar el proceso mental deductivo y entrar en otro donde los problemas no se atacan frontalmente, sino que se los mira desde diferentes ángulos hasta que las conexiones ocultas surgen, iluminando lo que parecía inexplicable y la solución, sorprendente e inesperada, se vuelve evidente. Haciendo una serie de consideraciones, podemos definir al "pensamiento" como: "*El reflejo generalizado de la realidad en el cerebro humano basado en la actividad práctica y en el conocimiento sensorial del mundo, a través del lenguaje y de los conocimientos que ya se tienen"*. Muchos autores han estudiado las cualidades del pensamiento y todos mencionan entre ella a la *"flexibilidad"*; una razón más para detenernos en el llamado *pensamiento lateral, flexible o divergente* relacionado fundamentalmente con la educación, por el papel clave que juega en el desarrollo de la creatividad al apartarse de concepciones inmutables y permitir la versatibilidad en la generación de nuevos enfoques e ideas.
Esta investigación, de tipo teórico, es un primer paso en el camino que comenzamos a transitar con la finalidad de coadyuvar a la formación integral del estudiante en su preparación para la vida adulta, diaria y profesional.

Algunas definiciones, limitaciones y funciones

Si bien es cierto que se cuenta con varias definiciones de pensamiento lateral, nos basaremos en la siguiente:*"es un conjunto de procesos destinados al uso de información de modo que genere ideas creativas mediante una reestructuración perspicaz de los conceptos ya existentes en la mente"* (de Bono, 1989, p.9).

Mientras que en el pensamiento lateral se emplean a menudo, como puntos de partida, planteamientos erróneos para llegar a una solución, el *pensamiento lógico o vertical*, en cambio, está basado en el avance de las ideas a través de fases justificadas en sí mismas. Como consecuencia de la solidez de cada fase, se posee la certeza absoluta de la corrección de la conclusión a la que se ha arribado. El pensamiento lógico tiene una gran cantidad de limitaciones y algunas de las mismas son: ✔ Los modelos tienden a adquirir cada vez mayor rigidez; ✔ la información incorporada a un modelo no se puede usar fácilmente asociada a otro; ✔ hay una tendencia hacia una concentración; ✔ existe una gran continuidad en el sistema; ✔ el orden de la información de entrada desempeña un papel muy importante en el desarrollo de los modelos dificultando la ordenación óptima de datos posteriores; ✔ a veces es difícil optar entre un modelo y otro pero cuando uno se acepta como válido se desecha el otro; ✔ los modelos individuales establecidos tienden a ser reabsorbidos por otros más complejos; ✔ la mente es un sistema elaborador de modelos arquetípicos; etc.

El pensamiento lateral tiene funciones, entre las cuales se destacan: a) *la creación de nuevas ideas*, ya que las mismas son factores de cambio y de progreso en todos los campos; b) la *liberación del efecto restrictivo de las ideas anticuadas*, que conduce a un cambio de actitudes y enfoques, a una visión diferente de los conceptos; c) *la superación de todas las limitaciones inherentes al pensamiento lógico* mediante la reestructuración de los modelos, evitando la influencia de los arquetipos y ordenando la información en nuevas ideas.

Para de Bono (1989), el pensamiento lateral está estrechamente vinculado con los procesos mentales de la *perspicacia*, la *creatividad* y el *ingenio*: todos tienen la misma base, pero estos últimos tienen un carácter espontáneo, independiente de la voluntad, mientras que el primero es más susceptible de ser determinado por la voluntad consciente.

Esencia y principios básicos del pensamiento lateral

Los aspectos que constituyen la esencia básica del pensamiento lateral son:

Tiene como objetivo el cambio de modelos: Es decir, que las diferentes partes de éstos se ordenen de forma distinta con la finalidad de conseguir un modelo óptimo. · *Es a la vez una actitud mental y un método para usar información:* considera cualquier enfoque a un problema como útil, pero no como el único posible ni el mejor. No acepta la rigidez de los dogmas ni niega la eficacia o utilidad de un modelo. · *Prescinde de toda forma de enjuiciamiento o de valoración:* la información no se usa por su valor intrínseco sino por los efectos de su aplicación; se prescinde de las razones que la justifican y los razonamientos de los que surgió. · *Se basa en las características del mecanismo de manipulación de la información de la mente:* descompone los modelos establecidos para liberar la información que contienen y estimula la formación de nuevos modelos por yuxtaposición de datos provenientes de otras fuentes.

De la esencia del pensamiento lateral, se derivan sus principios básicos:

1.- ***El uso de la información como estímulo para el surgimiento de nuevas ideas:*** Cualquier modo de valorar una situación es sólo uno de los muchos modos posibles de hacerlo. El pensamiento lateral explora estas *alternativas* mediante la reordenación del material disponible aspirando conseguir el mayor número posible de enfoques.

2.-Revisión de supuestos comúnmente aceptados como absolutos: *Cualquier supuesto puede ser reestructurado para usar más eficazmente su información: "*Es la continuidad histórica lo que mantiene la mayor parte de los supuestos, no una periódica revisión de su validez" *(de Bono, 1989, p. 103). No se pone en duda la veracidad de los conceptos* *establecidos, sino que se libera al pensamiento del efecto restrictivo de supuestos que limitan su campo de acción.*

3.- Aplazamiento de juicios y opiniones: Este principio exige como prerrequisito la suspensión o aplazamiento de los juicios y criterios, y la valoración de ideas y juicios. "la necesidad de que todas las fases del pensamiento sean correctas es la principal barrera a la concepción de ideas nuevas" (de Bono, 1989, p.119). La naturaleza del pensamiento lateral hace que una idea errónea pueda conducir a una idea correcta.

Diferencias entre el pensamiento lógico y el lateral

Los funcionamientos respectivos son completamente distintos y de ahí sus diferencias básicas:

♦ ***El pensamiento lógico es selectivo; el pensamiento lateral es creador:*** En el pensamiento vertical importa sobre todo la corrección lógica del encadenamiento de las ideas; en el pensamiento lateral lo esencial es la efectividad en sí de las conclusiones.

♦ ***El pensamiento vertical se mueve sólo si hay una dirección en la cual moverse; el pensamiento vertical se mueve para crear una dirección:*** El pensamiento lógico se mueve en una dirección claramente definida en la cual entrevé una solución; el pensamiento lateral aspira al cambio y al movimiento como un medio para la reestructuración de los conceptos.

♦ ***El pensamiento vertical se basa en la secuencia de las ideas; el pensamiento lateral puede efectuar saltos****:* Con el pensamiento vertical sólo se puede avanzar de modo gradual ya que cada paso depende del anterior, al cual está firmemente asociado; con el pensamiento lateral los pasos no tienen que seguir un orden determinado, puede saltarse a una nueva idea y rellenar el lapso después.

♦ ***En el pensamiento vertical cada paso ha de ser correcto; en el pensamiento lateral no es preciso que lo sea***: La esencia del pensamiento vertical es la obligada corrección de cada paso; en cambio, en el pensamiento lateral no es necesario este requisito**.**

♦ ***En el pensamiento vertical se usa la negación para bloquear bifurcaciones y desviaciones laterales; en el pensamiento lateral no se rechaza ningún camino:*** Hay ocasiones en que es necesario pasar por una idea errónea para llegar a una idea correcta. Esto ocurre cuando la idea es errónea sólo en el contexto tradicional de una situación; cuando dicho contexto se reestructura la idea aparece como correcta.

♦ ***En el pensamiento vertical se excluye lo que no parece relacionado con el tema; en el pensamiento lateral se explora incluso lo que parece completamente ajeno al tema:*** El pensamiento lógico prescinde de lo que parece ajeno al contexto de la situación en cuestión; en cambio, al mismo problema desde el pensamiento lateral se le asocian factores externos a fin de provocar una digresión de los modelos en sus componentes.

♦ ***En el pensamiento vertical las categorías, clasificadas y etiquetadas son fijas; en el pensamiento lateral, no:*** En el pensamiento vertical las categorías, clasificaciones y etiquetas tienen carácter permanente; en el pensamiento lateral se cambian las etiquetas a medida que el contexto cambia como resultado de enfoques diferentes.

♦ ***El pensamiento vertical sigue los caminos más evidentes; el pensamiento lateral los menos evidentes:*** En el pensamiento vertical se tiende a seguir el camino más espacioso y señalizado como la dirección correcta; en cambio, el pensamiento lateral busca deliberadamente los enfoques menos obvios**.**

♦ ***El pensamiento vertical es un proceso finito; el pensamiento lateral, un proceso probabilístico:*** Con el pensamiento vertical se confía en llegar a una solución; con el pensamiento lateral simplemente se aumentan las probabilidades de una solución óptima.

de Bono (1989) contrasta estos dos tipos de pensamiento subrayando que el pensamiento lateral es parte esencial del acto general de pensar; no sustituye al pensamiento lógico o vertical, sino que lo complementa. La utilidad y efectividad del pensamiento lógico se incrementa con el empleo del pensamiento lateral: de esta forma se reduce la rigidez de un encadenamiento exclusivamente lógico de las ideas y se supera la selectividad que lo caracteriza y obstaculiza el proceso de búsqueda de alternativas y puntos de vista novedosos. Cada uno de estos tipos de pensamiento tiene su papel culminante en un momento dado: *mientras que el pensamiento divergente propicia el surgimiento de ideas nuevas, el pensamiento lógico permite su selección y elaboración final*.

Características propias del pensamiento lateral

Teniendo en cuenta lo expresado hasta el momento acerca del pensamiento lateral, podemos destacar las siguientes *Notas Características* del mismo: ‣ Es capaz de encontrar varias vías de solución a un mismo problema; ‣ Es capaz de dar marcha atrás en su pensamiento; ‣ Posee la habilidad de variar el modo de dirección en la solución; ‣ Puede cultivarse con el estudio y desarrollarse mediante ejercicios prácticos; ‣ Sirve como instrumento para el uso consciente y deliberado de la perspicacia; ‣ Su objetivo no es elaborar ideas correctas, sino gran número de ideas; ‣ No provoca dudas ni caos en las ideas establecidas; ‣ Proporciona diferentes enfoques a los problemas, reestructura los modelos de las ideas establecidas y crea alternativas.

Relaciones entre creatividad y pensamiento lateral

El pensamiento lateral desempeña un importante rol en el desarrollo de la creatividad; de allí se deriva la relación entre ellos:

El pensamiento lateral está íntimamente relacionado con los procesos mentales de la creatividad ya que la misma compromete a toda la personalidad del individuo. Tanto la creatividad como el pensamiento lateral se basan en una reestructuración de los modelos. Sin embargo, el pensamiento lateral añade la formación de nuevos modelos. Mientras la creatividad constituye con excesiva frecuencia sólo una descripción de resultados, *el pensamiento lateral incluye la descripción de un* proceso. *Ante un* resultado creativo *sólo puede sentirse admiración, mientras que un* proceso creativo *puede ser aprendido y usado conscientemente. En el proceso de creación no se da importancia a la validez de una idea o encadenamiento de ideas. Por eso, la única valoración que corresponde al período de creación es su consistencia de acuerdo con los principios del pensamiento lateral*

Métodos y técnicas para desarrollar el pensamiento Lateral

Los mismos tienen entre sus objetivos romper esquemas y generar formas nuevas de enfocar los problemas, así como estimular el pensamiento divergente, de forma deliberada y efectiva.

Para concebir ideas creativas, se requiere un punto de partida. En este sentido, los dos ***problemas*** *del pensamiento lateral son:* ***a)*** *Concebir alguna idea que sirva de base a una o varias secuencias de ideas;* ***b)*** *Escapar al encadenamiento habitual de las ideas dictado por los enfoques invariables de los modelos arquetípicos.*

Entre los ***métodos y técnicas*** *más utilizadas, tenemos:*

1.- Ejercicios de Dibujo: *Algunas de sus* ventajas*, son: Las ideas y soluciones dadas son concretas y bien definidas. Los dibujos son fácilmente visibles, lo que facilita su comentario. El dibujo de complejas estructuras es más fácil que su exposición verbal.*

2.- Fraccionamiento o División: *Consiste en descomponer una situación en sus partes*

constituyentes (no teniendo en cuenta las líneas divisorias naturales), de modo que puede luego reestructurarse disponiendo las fracciones de forma distinta.
***3.- Inversión:** En él, se consideran los problemas y las situaciones en su estructura real y se invierte ésta en un sentido u otro: de arriba hacia abajo, de afuera hacia adentro, etc. Luego se analizan los resultados. Se ha provocado una reordenación forzada de la información.*
***4.- Analogías:** Una analogía es la relación de semejanza entre dos o más cosas. Para que las analogías sean útiles es preciso elegir como término analógico una situación que sea bien conocida para su uso como punto de referencia.*
***5.- Brainstorming** (o "lluvia de ideas")**:** Se puede decir que más bien se trata de un medio, de un marco especial, de un ambiente concreto, en el que pueden aplicarse diversas técnicas y principios del pensamiento lateral sobre una base colectiva y prescindiendo en lo posible de toda inhibición por parte del pensamiento vertical.*
***6.- Brainwriting o Lluvia de ideas por tarjetas:** Es una variante de la anterior que puede utilizarse para diversos fines: realizar un diagnóstico, elaborar conclusiones, planificar acciones concretas, evaluar trabajos realizados.*
***7.- Grupos Nominales:** Este método se recomienda para identificar las variables críticas de un problema o situación específica y para establecer prioridades, es decir, para destacar los aspectos más importantes del tema tratado.*
***8.- Antiéxito:** El problema se formula en términos de fracaso, lo que promueve la búsqueda de elementos que contradicen el sentido común y que conllevan al éxito en la solución.*
***9.- Campo de Fuerzas:** Esta técnica consiste en un balance de las fuerzas facilitadoras para vencer estos problemas y las fuerzas resistentes que los condicionan.*
***10.- Sinéctica o Sinestesia:** Estimula el pensamiento lateral a partir de dos procedimientos complementarios: "volver familiar lo que es extraño" y "volver extraño lo que es familiar".*
11.- "Técnicas de de Bono":** Pueden utilizarse en forma independiente, combinadas entre sí o como parte de otros métodos. Se denominan por **siglas:
***a) P. N. I.:** Hace referencia a los aspectos **P**ositivos, **N**egativos e **I**nteresantes de una idea.*
***b) C.T.F.:** **C**onsiderar **T**odos los **F**actores. Persigue la valoración de cada factor para comprender el fenómeno en su complejidad.*
***c) C. y S.:** **C**onsecuencias y **S**ecuelas. Implica "mirar" hacia el futuro para prever los resultados de una acción o plan.*
***d) P. b.:** **P**rioridades **b**ásicas. Es aplicable a la toma de decisiones en cualquier situación.*
***e) O. P. V.:** **O**tros **P**untos de **V**ista. Permite tomar conciencia de que el enfoque de un asunto por otra persona puede ser totalmente diferente al nuestro y ser igualmente válido.*

¡Algunas sugerencias!
El desarrollo de la creatividad y el estímulo para el pensamiento divergente en los alumnos no depende sólo del uso de técnicas específicas; es preciso que el **docente** *trabaje en la creación de determinadas* condiciones *que propicien ese desarrollo. Para lograrlo, es preciso que tenga en cuenta las siguientes* ***sugerencias**:*

- ***Relativos a su actuación como docente:** Usar técnicas de trabajo grupal aptas para lograr una comunicación más fluida y amplia entre los participantes; saber manejar situaciones o problemas inesperados; ser abierto y receptivo a los criterios del grupo; autoevaluar su propio estilo de trabajo, sus puntos fuertes y débiles para escoger las estrategias necesarias y para cambiarlas cuando sea pertinente; experimentar en sí mismo* *el proceso de creatividad.*

- ***Relativos a la composición del grupo:*** *Para el logro de una atmósfera creativa es necesario tener presente determinadas características de los miembros que componen el grupo, como son las relaciones interpersonales entre ellos, su aprovechamiento docente y status en el grupo.*
- ***Relativos a las condiciones en las que trabaja y se desarrolla el grupo:*** *Las* ***condiciones*** *esenciales que estimulan el trabajo creativo del grupo son dos:* ***a)*** *la seguridad psicológica para crear y* ***b)*** *la receptividad a todas las ideas que se manifiesten.*

Aplicando todo

Si tenemos en cuenta toda lo aportado sobre el pensamiento lateral, sus métodos y técnicas y las sugerencias anteriores, **problemas** como el siguiente (¡y muchísimos más!), podrían generar preciosos espacios de discusión y motivarían a los alumnos para continuar con este tipo de trabajo: ***"¿Cuál es la probabilidad de que dos números elegidos al azar bajo una cota determinada sean primos entre sí?"***.

Conclusión

Uno de los motivos que nos llevaron a esta investigación es que la sociedad de hoy precisa un hombre desestructurado, con la flexibilidad de pensamiento necesaria para enfrentar situaciones que requieren de una gran dosis de reflexión y de la formación de un pensamiento productivo y creador, preparado para aportar sus puntos de vista y trabajar en equipo. La importancia y el valor de este tema derivan de todo lo antedicho, lo cual nos lleva a concluir que: • es altamente posible aplicarlo en todos los niveles educativos; • reservar un período de tiempo para la enseñanza del pensamiento lateral es mucho más eficaz que introducir sus principios en el transcurso de clases que versan acerca de otros temas; es decir, esta facultad se desarrolla de manera más eficaz en el contexto de clases específicas dedicadas exclusivamente al tema del pensamiento lateral, sobre la base de ejercicios diseñados especialmente con ese fin; • puede asegurarse que la enseñanza del pensamiento lateral durante una hora a la semana a lo largo de todo el período lectivo, sería suficiente para desarrollar una actividad creativa en los alumnos; • el segundo paso pensado en este camino emprendido, es decir, la puesta en práctica de esta investigación en el próximo período lectivo, en el nivel superior en el cual nos desempeñamos como docentes será una experiencia valiosísima. Este trabajo es, entonces, una pequeña muestra y un aporte de lo que puede hacerse en la educación para favorecer al hombre de hoy y de mañana.

En la Introducción de este trabajo, se había planteado un problema de pensamiento lateral. ¡He aquí su solución!: *El hombre tenía hipo. El cantinero se dio cuenta por la forma de hablar y sacó su arma para darle un susto. Lo logró y le curó el hipo, por lo que el hombre se lo agradeció (¡y no necesitó el agua!).*

Referencias bibliográficas

Antunes, C. (2000). *Estimular las inteligencias múltiples*. Madrid, España: Edic. Madrid.

Davis, G; Scott, J. (compiladores; 1980). *Estrategias para la creatividad*. Bs As, Argentina: Edit. Paidós.

de Bono, E. (1973). *La práctica de pensar*. Barcelona, España: Editorial Kairós.

de Bono, E. (1989). *El pensamiento lateral.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Sloane, P. (1992). *Ejercicios de Pensamiento Lateral*. Madrid, España: Zugarto Ediciones.

La creatividad: un buen camino para aprender

Sandra Alonzúa de Ruiz, Susana Mercau de Sancho, Alberto Nuova
U. N. T., U.N.S.T.A. Argentina
salonzua@yahoo.com.ar

Resumen
La educación y la formación de seres creativos deben posibilitar el surgimiento de lo nuevo, dejando de lado la enseñanza tradicional, cuyo sentido ha sido exclusivamente la transmisión de conocimientos. La educación actual, por lo general, no incentiva el desarrollo creativo, es más, sofoca la imaginación de nuestros alumnos.
La necesidad de preparar mejor al hombre para afrontar los crecientes cambios de la sociedad moderna y los resultados del desarrollo de la ciencia, ha replanteado la enseñanza dándose más atención a las habilidades del pensamiento y a las que intervienen en actividades tales como el pensamiento creativo y la solución de problemas.

¿Qué es la creatividad?

La creatividad es un concepto difícil de definir. Muchos investigadores, en lugar de definirla, la caracterizaron desde ópticas diferentes: persona, proceso, contexto social, producto o en forma conjunta integrando todos estos elementos.
A nuestro entender, si la creatividad apunta a un producto novedoso o a ideas nuevas, ese producto o esas ideas, requieren de un proceso que es llevado a cabo por el hombre en un determinado ámbito social. En tal sentido nos inclinamos por la siguiente definición: la creatividad es un proceso mental de descubrimiento o producción de algo nuevo, valioso, original y adecuado, que cumpla con las exigencias de una determinada situación social.
Dewey fue el primero en distinguir que la creatividad comienza con una situación problémica. Por eso se puede afirmar que la necesidad de resolver un problema es la madre de la creatividad.
En este trabajo no se tuvo en cuenta el “enfoque personológico”, sin embargo no se debe desconocer que en la regulación del comportamiento, lo cognitivo y lo afectivo funcionan en estrecha unidad y reconocemos su importancia para el desarrollo y elaboración de la creatividad.
Para Vigotsky, el hombre realiza dos actividades básicas: la reproductora (memoria) y la creadora. La creatividad es fruto de la disociación y asociación de los elementos que se presenten; existe potencialmente y es necesario desarrollarla.

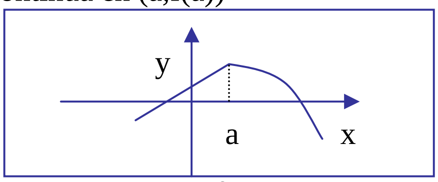
Estrategias para desarrollar la creatividad

En virtud de que para ser creativos se necesita ser estratega, se desarrolla en este trabajo algunas de las estrategias aplicables a la matemática y que estimulan el pensamiento y la creatividad.
El aprendizaje creativo hace referencia al conocimiento construido con la implicación activa del sujeto.
Las estrategias han sido consideradas como una actividad netamente intelectual, que buscan el camino para unir el qué y cómo pensar con el fin de alcanzar una meta. Permiten estudiar las secuencias de operaciones que realiza el sujeto para dar solución a un problema planteado.
Muchos investigadores han centrado su estudio en las estrategias para pensar y crear, con la intención de potenciar, incentivar y educar la creatividad.

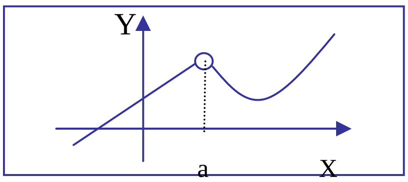
Chi y Glaser analizan las estrategias en función de los métodos de solución adoptados por los sujetos: estrategias de búsqueda al azar, de búsqueda de profundidad, de análisis de medios y fines, de subobjetivos, y de generación y comprobación.
Para estos autores las estrategias buenas son aquellas que solucionen los movimientos prometedores y eliminen los inútiles. Esta reflexión parece valiosa, ya que las estrategias eficaces para el hombre son aquellas que le permiten economizar el tiempo con un razonamiento eficaz.
Bruner estudió las estrategias originadas a partir de la formación de conceptos, su obtención supone la búsqueda de los atributos distintivos de los seres que son ejemplares de la clase que se quiere diferenciar.
Distingue cuatro estrategias:

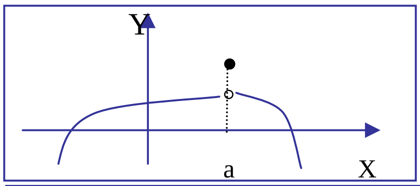
- ♦ Examen simultáneo que consiste en que el alumno utilice o use cada ejemplo que se le da para deducir cuáles hipótesis se mantienen y cuáles han sido eliminadas.
- ♦ Exploración sucesiva que consiste en probar una sola hipótesis por vez.
- ♦ Foco conservador o fijo que consiste en tomar un ejemplo positivo como foco y hacer después una serie de elecciones, cada una de las cuales altera un importante atributo del ejemplo focal.
- ♦ Foco al azar, en donde el alumno utiliza un ejemplo positivo como foco, y después cambia más de un atributo a la vez.

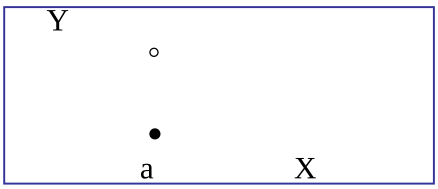
Se ejemplificará la estrategia Foco conservador o fijo.
<u>Ejemplo</u>: Obtención del concepto de continuidad de una función real de una variable real en un punto.
La figura siguiente corresponde al ejemplo positivo, considerado como foco conservador donde la función es continua en (a,f(a))

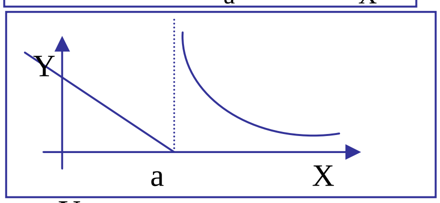


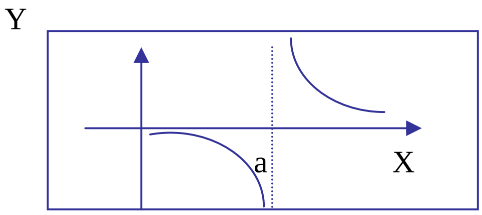
Luego se le presentan, de a una, las figuras siguientes, en las cuales se altera <u>un atributo</u> del concepto que se quiere obtener, para que el alumno compare con el foco conservador y saque información de cada una de las observaciones realizadas.

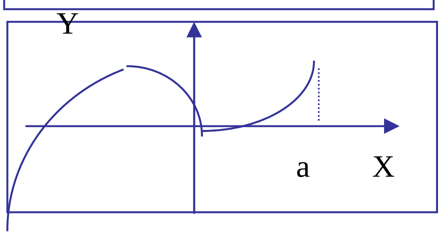












Después del trabajo con estas figuras se pretende que el alumno obtenga la definición de continuidad sobre la base de las condiciones observadas a través de la estrategia utilizada.
Para Chadwick las estrategias pueden dividirse en dos grupos: de procesamiento y de ejecución.
Las estrategias de procesamiento son aquellas que las personas utilizan para mejorar sus posibilidades de ingresar y almacenar información. Plantea siete estrategias cognitivas: atención, físicas, elaboración verbal, elaboración por vía de imágenes, comparación, inferencia y ensayo futuro.
Las estrategias de ejecución se caracterizan por recuperar la información guardada en la memoria y su aplicación para algún fin. En esta estrategia se destacan cuatro aspectos: recuperación y uso de la información específica; generalización y transferencia de la información o habilidades a nuevas situaciones; identificación, representación y resolución de problemas y desarrollo y aplicación de la creatividad en las respuestas.
El siguiente ejercicio se utiliza una estrategia de ejecución.

Ejemplo: Agregue una ecuación para que el siguiente sistema sea crameriano y resuélvalo utilizando la Regla de Cramer.

$$\begin{cases} a - 2b + c = -6 \\ 2a + 3b - c = 3 \\ \end{cases}$$

Para su solución el alumno podrá adoptar el siguiente camino:
1er paso: recordar las condiciones para que un sistema sea crameriano y cómo se resuelve un determinante de tercer orden. (recuperación de la información específica almacenada).
2do paso: agregar una ecuación conveniente para que el sistema sea crameriano.(transferencia de la información especifica almacenada; creatividad en la respuesta).
3er paso: recordar la Regla de Cramer y resolver el sistema obtenido en el paso anterior.(recuperación de la información específica almacenada; identificación, representación y resolución del problema).

Por otro lado, De la Torre propone seis tipos de estrategias:

- Las analíticas que suponen un análisis de elementos con el fin de diferenciarlos en una etapa y superponerlos o integrarlos en etapas posteriores.
- Las estructurantes que requieren organizar las ideas interrelacionadas o que se incluyen mutuamente en entidades más complejas. Ante una variedad de ideas, se clasifican y se integran a un sistema. Estas estrategias dan una visión amplia y sistemática del problema.
- Las asociativas, se valen de procedimientos como relacionar o establecer nexos entre las ideas, por medio de vías analógicas y antitéticas.
- Las metamórficas que son procedimientos transportivos; ejercitan las habilidades para la definición de problemas.
- Las inferentes que permiten generalizaciones o descubren implicaciones en figuras, ideas, símbolos o conductas.
- Las complejas o mixtas que ponen en juego tres o más operaciones cuando se ejecutan las estrategias.

Se presentan dos ejemplos, donde el alumno puede utilizar una estrategia analítica.

Ejemplo1: Esboce la gráfica de una función f que cumpla con las siguientes condiciones:

$$\text{dom } f = (-4,0) \cup (0,\infty) \qquad f \text{ continua en todo su dominio}$$

$$f(-1) = 1 \qquad f(2) = -2 \qquad f'(1) = 0 \qquad \nexists\ f'(3)$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \in (-4,-1) \cup (3,\infty)$$

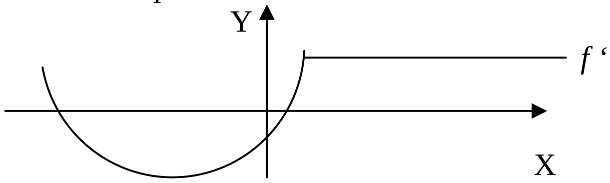
$$f'(x) < 0 \quad \text{si} \quad x \in (-1,0) \cup (0,3)$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{si} \quad 0 < x < 1 \quad \text{y} \quad 2 < x < 3$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 2} \left| \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right| = +\infty$$

Ejemplo 2: Bosqueje la gráfica de la función f, sabiendo que la gráfica de f ‘ es la siguiente. Realice previamente el estudio analítico correspondiente.



En estos ejemplos, el alumno debe analizar los elementos con el fin de diferenciarlos (primera fase de la estrategia):

- existencia o no de la derivada en un punto(rectas tangente horizontales, verticales, otros casos)
- signo de la derivada primera en un intervalo(crecimiento o decrecimiento de una función)
- signo de la derivada segunda en un intervalo(concavidad de la gráfica de una función)
- etc.

Luego integrarlos en el bosquejo de la gráfica de la función (última fase de la estrategia analítica).

Kirst presenta las estrategias como gama de ejercicios agrupados en torno a capacidades y factores creativos tales como: Movilidad, Fluidez,Originalidad, Análisis, Producción, Construcción, Cambio de forma.

Fustier se refiere a las estrategias analógicas, antitéticas y aleatorias, a través de ejercicios propuestos para el desarrollo de la creatividad.

Marchena y Ávila, hacen referencia a programas para pensar y crear. Entre ellos se mencionan los programas basados en elementos heurísticos (los Principios, las Reglas, las Estrategias y los Medios auxiliares heurísticos), cada vez más utilizados y que responden a estrategias de búsqueda de solución a situaciones problémicas concretas que se presenten.

En la actualidaad se tiende a la combinación de distintos tipos de estrategias creativas.

Barreras para la creatividad

Así como la capacidad creativa puede y debe fomentarse, también puede ser inhibida con facilidad y existen barreras a la imaginación creativa:

♦ Las presiones conformistas que pueden tomar la forma de objetivos o actividades elegidos por el docente, rutinas o planes de estudio inflexibles.

♦ Las actitudes autoritarias y medios autoritarios inhiben (o reprimen) el potencial creativo de los jóvenes. Impiden el aprendizaje para autodirigirse y ser autorresponsables. Los alumnos cumplen órdenes, hacen lo que se les indica y resuelven problemas con respuestas fijas y predeterminadas.

♦ La sobrevaloración de las recompensas; por ejemplo las buenas notas, que generan actitudes defensivas en los alumnos; las evaluaciones externas diluyen la tendencia productiva.

♦ Una excesiva exigencia de verdad. Por ejemplo: cuando los docentes exigen o piden respuestas correctas que exigen soluciones predeterminadas.

♦ La hostilidad contra la personalidad distinta, del docente como de sus compañeros. Las personas creativas tienden a ser individualistas e inconformistas.

♦ Una intolerancia a la actitud de "juego" en relación a la tarea en la institución. Para crear se necesita libertad para jugar con las ideas y los materiales, estímulo para ocuparse de cosas irrelevantes y permiso para sumergirse en la fantasía y la simulación.

Para ser creativo no se necesita tener grados académicos ni ser un excéntrico. Como docentes se debe fomentar en los alumnos una actitud creativa; para ello se sugiere tener en cuenta:

♦ Permitir el aprendizaje autoiniciado por parte de los alumnos.

♦ Crear un medio de aprendizaje no autoritario, es decir permitir la libertad psicológica, simbólica, experimentada en una expresión espontánea y no una libertad transgresora y agresiva.

♦ Alentar a los alumnos a aprender de más.

♦ Estimular los procesos intelectuales creativos. Inducir a los alumnos a buscar nuevas conexiones entre los datos, a asociar, a imaginar, a producir soluciones tentativas frente a los problemas, a hacer suposiciones aún cuando resulten insólitas, a buscar ideas, a construir sobre las ideas ajenas y orientar esas ideas a nuevas direcciones. Permitir a los alumnos correr riesgos intelectuales.

♦ Posponer el juicio o las soluciones definitivas. Dejar espacio a los errores, destacando que las equivocaciones son previsibles y necesarias.

♦ Promover la flexibilidad intelectual entre los alunnos, evitando ajustarse a un solo método, alejarse de sus propios preconceptos, a variar sus enfoques de los problemas, alentar a buscar nuevos significados a lo familiar y viejos significados en nuevos contextos.

♦ Fomentar la autoevaluación del progreso y el rendimiento personal como práctica para convertirse en autoactivo y autorresponsable.

♦ Saber utilizar las preguntas que deben ser abiertas, operacionales, con sentido para los alumnos, que no tengan respuestas predeterminadas y que no apunten a lo memorístico

♦ Conducir la exploración y fomentar la curiosidad.

♦ Proporcionar oportunidades a sus alumnos para manejar materiales, ideas, conceptos, herramientas y estructuras. La destreza, cualquiera sea, es un elemento importante de la personalidad creativa.

♦ Ayudar a superar la frustación y el fracaso. El vivir con incertidumbres y ambigüedades afecta la actividad creativa.

Con estas recomendaciones tal vez se posibilite a los alumnos de cuando en cuando sentir la dicha del "Eureka" que vivió Arquímides para beneficio y felicidad propia y tal vez de la humanidad.

Conclusión

La sociedad cambiante en la que estamos inmersos requiere talentos creadores, por lo cual, como docentes es importante preocuparse por entender y desarrollar una imaginación creadora en los destinatarios de la educación, reforzar sus actitudes innatas y utilizar estrategias sistemáticas dirigidas a entrenar o aumentar la productividad creativa.

El desarrollo de la creatividad y las estrategias del pensamiento ayudan a solucionar mejor los problemas de hoy y lo pondrán en forma para enfrentarse con los de mañana.

El entrenamiento de la creatividad, especialmente en el campo de la matemática, permitirá la fluidez, la producción y la utilización de ideas novedosas, la facilidad de asociación, la capacidad de hallar nuevas relaciones entre lo conocido y lo desconocido, la flexibilidad de pensamiento, la originalidad en la resolución de problemas y la productividad dinámica.

La actividad exige apertura para aceptar un nuevo modelo en vez del conocido, del acostumbrado o pasado de moda. Todos necesitamos creatividad, pues una conducta creativa es camino al éxito.

Referencias bibliográficas

De La Torre, S.(1987). Citado por Betancourt Morejón, J.(1995)”Estrategias para pensar y crear”.en Colectivo de autores. “*Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas”*. (pp.38-39). La Habana. Cuba: Editorial Académica.

Kirst, W.(1974). Citado por Betancourt Morejón, J.(1995)”Estrategias para pensar y crear”. en Colectivo de autores. “*Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas”*.(p.38). La Habana. Cuba: Editorial Académica.

Fustier.(1975). Citado por Betancourt Morejón, J.(1995)”Estrategias para pensar y crear” En Colectivo de autores. “*Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas”*.(p.38). La Habana. Cuba: Editorial Académica.

Chadwick.(1988). Citado por Betancourt Morejón, J.(1995)”Estrategias para pensar y crear”.en Colectivo de autores. “*Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas”*.(p.31). La Habana. Cuba: Editorial Académica.

Marchena y Avila.(1993). Citado por Betancourt Morejón, J.(1995)”Estrategias para pensar y crear”. En Colectivo de autores. “*Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas”*.(pp.62-63). La Habana. Cuba: Editorial Académica.

Bruner, J. S. Citado por Betancourt Morejón, J.(1995)”Estrategias para pensar y crear”.en Colectivo de autores. “*Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas”*.(pp.27-28). La Habana. Cuba: Editorial Académica.

Chi,M. T. H y Glaser, R.(1986). Citado por Betancourt Morejón, J.(1995)”Estrategias para pensar y crear”.en Colectivo de autores. “*Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas”*.(pp.20-21). La Habana. Cuba: Editorial Académica.

Colectivo de autores. (1995). “*Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas”*. La Habana. Cuba: Editorial Académica.

Scott, J.A.(Compiladores).(1975) “*Estrategias para la creatividad”*. Buenos Aires. Argentina. Editorial Paidós.

Mitjáns Martinez, A.(1995). “*Creatividad, Personalidad y Educación”*. La Habana. Cuba. Editorial Pueblo y educación.

Rouquette, M. L. (1977). *”La creatividad”*. Buenos Aires. Argentina: Editorial Huemul.

Kirst, W.; Diekmeyer, U.(1971) “*Desarrolle su creatividad”*. Bilbao. España: Ediciones Mensajero.

Resolución de Problemas

Nivel Superior

La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos

Juan Raúl Delgado Rubí
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría". Ciudad de la Habana, Cuba
rdelgado@ind.ispjae.edu.cu rauld_cu@yahoo.com

Introducción

El curso tuvo como objetivos actualizar a los participantes en la temática y mostrar los resultados de diferentes investigaciones y experiencias tanto cubanas como de otros países en torno a la enseñanza de la resolución de problemas.
Se defiende el criterio de que estos esfuerzos coadyuvan a un aprendizaje cualitativamente superior de los conceptos, los teoremas y los procedimientos matemáticos, que provocan un cambio de actitud hacia las matemáticas y que la clase se puede convertir en un foro de discusión y de análisis o como diría Schoenfeld (1985) en un “microcosmo matemático”.
El maestro o profesor, asumiendo su doble rol de experto: como conocedor de la matemática que enseña y como director del proceso de asimilación de los conocimientos, guía al estudiante (novato) a llegar a los niveles, tanto teóricos como prácticos ya alcanzados por él, en la resolución de problemas.
Se debatió en el curso sobre la importancia de la instrucción heurística y metacognitiva y del desarrollo de las llamadas habilidades generales matemáticas para y a través de la resolución de problemas.
Se mostró una panorámica sobre los aportes que a lo largo de la historia han hecho pensadores, psicólogos y matemáticos a la resolución de problemas: de Sócrates a Schoenfeld.

Desarrollo

La concepción del curso perseguía como objetivos:
Que los cursantes:

1. Pudieran valorar el papel de una enseñanza basada en la resolución de problemas como vía para un aprendizaje cualitativamente superior.
2. Apreciaran la importancia y se motivaran a incorporar la instrucción heurística, la formación y/o desarrollo de algunas habilidades generales matemáticas y recursos metacognitivos en su práctica docente en aras de alcanzar niveles superiores en la calidad del aprendizaje de sus alumnos.

En el curso se desarrollaron las siguientes temáticas:

1. Algo de historia acerca de la resolución de problemas
Se hizo un recorrido desde la Antigüedad hasta nuestros días de los momentos más importantes, en que a consideración del autor, la resolución de problemas pasó a ocupar un lugar cimero en la enseñanza e incluso que ella misma fuera objeto de enseñanza.

Así, se comenzó con Sócrates y su forma particular y polémica de enseñar a sus discípulos y la huella que ha dejado hasta nuestros días. Se coincidió que uno de sus principales discípulos, Platón, de alguna forma dio continuidad al método del Maestro.

También en la Antigüedad sobresalieron por el empleo de heurísticas en la resolución de problemas, matemáticos tan destacados como Euclides, Arquímedes, Pappus por sólo citar tres, pero fundamentalmente porque lo dejaron plasmado en sus obras para utilidad de sus contemporáneos y de las futuras generaciones.

Después del período obscurantistas de la Edad Media donde la enseñanza se caracterizó por el verbalismo, el aprendizaje memorístico y reproductivo, aflora el Renacimiento y con él la figura de René Descartes como una de las figuras cimeras cuando se hable de enseñar a pensar. La creación de la Geometría Analítica fue una obra genial de su pensamiento, pero la misma surgió como resultado de su convencimiento de que todo problema matemático podía reducirse a un problema algebraico y en consecuencia la aplicación de lo que hoy se conoce como *bypass principle* (Melzak, 1983) o la habilidad matemática de *recodificar* (Hernández. 1990). La escritura de sus Regulae ad Directionem Ingenii muestra su interés por enseñar a pensar, por enseñar a los demás a resolver problemas.

En orden se siguió con los aportes de Leibniz y Euler.

Lugar importante en esta historia lo ocupa el matemático y lógico checo Bernard Bolzano quien fue un gran desconocido en su época por las prohibiciones a que estuvo condenado, pero que no puede pasar por alto la importante parte que dedicó a la heurística en su libro *Wissenschaftslehre* dirigido a la Lógica.

Ya con el advenimiento del siglo XX, por uno y por otro lado, aparecen trabajos de psicólogos (Wallas, Katona, Duncker, Wertheimer y otros) y matemáticos (Poincaré, Hadamard, Polya) que centran su atención en el proceso de resolución de problemas, en cómo las personas resuelven problemas y cómo pueden mejorarse, con una adecuada enseñanza, sus rendimientos en dicha actividad.

En particular Polya en los tres libros que escribió al respecto jugó un papel importante en la toma de conciencia en torno a la importancia de la instrucción heurística, aunque cierto es que sólo se les tomó en cuenta muchos años después de escritos.

Se destacó como a partir de 1980, con la declaración del NCTM sobre la importancia de la enseñanza de la resolución de problemas y los trabajos de Alan Schoenfeld y otros muchos educadores matemáticos, psicólogos y pedagogos ha tenido un auge significativo esta tendencia, aunque todavía falta mucho por explorar e investigar y sobre todo por poner en práctica en las aulas.

Sobre esta temática se propuso profundizar lo tratado mediante la lectura de las referencias bibliográficas [Schoenfeld, 1987], [Delgado, 1998], [Polya, 1965]

2. La Heurística y la resolución de problemas.

Ya después de la exposición histórica de la incorporación de la resolución de problemas como método y como objeto ella misma del proceso de enseñanza aprendizaje, se pasó a abordar la Heurística como una disciplina científica, con su sistema de principios, reglas y estrategias, con la variedad de recursos o medios con que se puede contar para ‘dirigir el ingenio’

Se expusieron los principios generales de Analogía, Generalización y Reducción y se mostraron ejemplos recogidos en los trabajos del matemático G. Polya y del profesor alemán Horst Müller. También se ejemplificaron algunos principios particulares.

Se expuso el concepto de regla heurística y su utilidad en el proceso de resolución de problemas. Asimismo, se discutió en torno a las llamadas estrategias heurísticas y se ejemplificaron distintos procederes que pueden ser considerados como estrategias heurísticas.
La importancia de los métodos generales y particulares en la resolución de problemas, las habilidades generales matemáticas y los contenidos procedimentales específicos fueron contrastados y se debatió en torno a las distintas posiciones que existen en torno a la hiperbolización de unos u otros.

3. La metacognición y el sistema de creencias en la resolución de problemas.
Los aportes que la psicología cognitiva ha hecho en torno a papel de la metacognición en los procesos de aprendizajes y de formación de actitudes y valores fueron destacados, así mismo la importancia que Schoenfeld (1985) le concede en el proceso de resolución de problemas.
Se mostró las distintas operaciones que intervienen en el proceso de control como habilidad metacognitiva principal y cómo en el proceso de resolución de problemas todas juegan su papel.
Por otra parte, el sistema de creencias (*belief system*) del sujeto que resuelve un problema influye en dicho proceso. Se discutieron al respecto las consideraciones que Schoenfeld y otros autores hacen al respecto.

4. La Evaluación y la resolución de problemas.
Finalmente se discutió sobre la necesidad de introducir en el proceso de evaluación la resolución de problemas, pues ello constituye una vía de inapreciable valor para medir y valorar la calidad de los aprendizajes producidos.
Por otra parte, no se justifica que si desarrolláramos una enseñanza basada en la resolución de problemas, posteriormente la evaluación no se correspondiera con ella y se aplicaran exámenes de corte reproductivo.
Se concluyó que la introducción de la resolución de problemas en los distintos momentos o partes del proceso de enseñanza es un reto para docentes y educadores matemáticos, pero estamos en la obligación de aceptarlo si queremos alcanzar niveles de calidad en nuestra labor educacional. También se convino que con una docencia caracterizada por elevadas cantidades de alumnos por grupo de clase es casi imposible poder dar seguimiento individualizado a los razonamientos, a la resolución de problemas y en fin, a la producción de aprendizajes significativos.

Referencias bibliográficas
Delgado, J.R. (1998). Algo de historia sobre la resolución de problemas En Hernández, H.; J.R. Delgado; B. Fernández de Alaíza. *Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la Educación Polimodal y Superior.* ISBN 950-808-173-2. Rosario, Argentina: Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones.99-106.
Delgado, J.R. (1999). *La enseñanza de la Resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica de los contenidos de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas.* Tesis Doctoral. La Habana, Cuba.
Descartes, R. (1984). *Reglas para la dirección del espíritu*. Madrid, España: Alianza Editorial.
Hernández, H. (1990). Saltar a la vista lo evidente. *Revista Cubana de Educación Superior*. Vol. X. Nº 1. La Habana, Cuba.

Melzak, Z.A. (1983). *Bypass: A simple approach to complexity,* New York, USA: John Wiley & Sons.
Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery (2 vol.).* New York, USA: John Wiley & Sons.
Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.
Polya, G. (1966). *Matemática y Razonamiento Plausible.* Madrid, España: Editorial Tecnos.
Pozo, J.I. et al. (1998). *La solución de problemas*. Madrid, España: Aula XXI/Santillana.
Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós y Ministerio de Educación y Ciencia de España.
Santos Trigo, L. M. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos de Investigación Nº28. CINVESTAV-IPN. México.
Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York, USA: Academic Press.
Schoenfeld, A. (1987). 'A Brief and Biased History of Problem Solving', En Curcio, F. (Ed). *Teaching and Learning: A problem solving focus*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics, USA.
Wallas, G. (1926). 'The Art of Thought', En Vernon, P.E. (Ed. 1970), *Creativity, Middlesex*, England: Penguin, 91-97.

Estrategias para aprender a aprender en matemática

María Eugenia Ángel, Laura Polola, Graciela Fernández, Mónica Bortolotto, Miriam Ecalle
Universidad Nacional de La Matanza. Argentina
mangel@unlm.edu.ar, polola@unlm.edu.ar

Resumen
El presente trabajo ha sido motivado por el bajo rendimiento y dificultad que presentan los jóvenes en matemática, al querer ingresar a la Universidad. Como docentes cotidianamente nos preguntamos ¿qué podemos hacer? ¿dónde está la falla?...
Por medio de la investigación hemos querido encontrar e implementar posibles mecanismos que faciliten en los alumnos el aprendizaje de esta ciencia, dentro de un proceso en el que se vivencie el carácter intensamente dinámico y cambiante de la misma.
El accionar elegido fue modelar una propuesta concreta de trabajo en el aula, utilizando estrategias que tiendan a lograr en los alumnos la autonomía en el aprendizaje, hecho posible sólo si éstos pueden tomar conciencia del funcionamiento de su propia manera de aprender y comprender, de los propios recursos cognitivos y su utilización
La propuesta de trabajo áulico que implementamos, desde setiembre de 1999, en los cursos de admisión a las carreras contables de la UNLM, se basó fundamentalmente en la resolución reflexiva de diversas situaciones problemáticas utilizando estrategias adecuadas.
La elección de esta modalidad de trabajo en el aula surgió de pensar que el gran desafío en la enseñanza de la matemática es poder lograr el aprendizaje efectivo de la misma, es decir no sólo la adquisición de conocimientos sino la posibilidad de su transferencia.

Desarrollo de la investigación

La ***unidad de análisis*** más importante de esta investigación fue el alumno ingresante a las carreras de Ciencias. Económicas de la UNLM.
El trabajo se realizó utilizando una ***metodología*** empírico-experimental a través de un estudio cuali-cuantitativo de experiencias de aprendizaje y de enseñanza.
El desarrollo de la investigación se efectivizó en las siguientes etapas, algunas de las cuales se llevaron a cabo en forma simultánea:

1- Selección de los contenidos matemáticos básicos requeridos a los alumnos ingresantes.
2- Conformación del perfil de los alumnos ingresantes. A través de entrevistas a docentes de los dos niveles educativos de interés (medio y universitario).
3- Elaboración y análisis de las estrategias utilizadas tanto para el abordaje como para el desarrollo de los distintos conceptos seleccionados.
4- Selección y orientación (por medio de talleres y encuentros), de los docentes que formaron parte del proceso de enseñanza.
5- Elaboración del material que se utilizó en el dictado de los cursos.
6- Elaboración de los distintos instrumentos de evaluación.
7- Desarrollo del proceso: a) implementación de la evaluación diagnóstica, b) dictado de clases y c) evaluaciones durante y al final del curso.
8- Evaluación de las etapas anteriores, análisis de los resultados y conclusiones.

Aspectos de referencia en el abordaje y desarrollo del trabajo áulico. Marco teórico

Para el planteo de los cursos se tuvieron en cuenta distintos aspectos.
Con respecto a los contenidos seleccionados se estudió detenidamente su adecuación al estado de capacitación previa que poseían los alumnos, es decir, se analizó cómo establecer

la inserción cognitiva de los procedimientos y los conceptos a abordar [Carretero], aún sabiendo que prácticamente en su totalidad, se habían tratado en la escuela.
Para lograr tal inserción se trabajó sobre los posibles conceptos ***inclusores*** [Novak-Ausubel] para poder capitalizarlos o en caso de dudar de su estado, crearlos para permitir un aprendizaje consciente y significativo.
Una vez revisado el conjunto de contenidos, se ***diseñaron las estrategias*** a implementar en el curso, sobre la base del ***análisis del entorno de la situación de aprendizaje***.
La metodología de trabajo en el aula se basó y sustentó en la ***resolución de problemas***. La razón primaria que condujo a esta modalidad, fue la necesidad de lograr un *más completo entrenamiento en la interpretación de situaciones problemáticas* para poder poner en juego los conceptos intervinientes.
Para el desarrollo de esta metodología se delinearon una serie de pautas orientadoras[1] para los docentes, que fueron planteadas y debatidas en las reuniones previas a la realización del curso, y un cronograma guía de actividades, para que pudiera establecerse un criterio unificado de trabajo. De esta manera, se produjo un tratamiento de los temas desarrollados atendiendo a las necesidades relacionadas con la ***aplicabilidad*** de las nociones presentadas, teniendo en cuenta el rol que éstas tienen en la red conceptual a la que pertenecen, para así conseguir una conciente ***integración de conceptos***, y permitir su mejor aprendizaje.
Con el objetivo de establecer desde el inicio de la vida universitaria una actitud responsable y autónoma por parte del estudiante es que se trabajó apuntando firmemente al ejercicio de la ***autoconducción*** y de la ***metacognición*** refiriéndonos con esto a la noción emergente desde la Psicología Cognitiva [Carretero, Pozo] en relación con el conocimiento y control de los procesos cognitivos, aludiendo a una serie de operaciones cognoscitivas ejercidas por un interiorizado conjunto de mecanismos que permiten recopilar, producir y evaluar información, así como también controlar y autorregular el funcionamiento intelectual propio [Galagovsky Kurman].
Una vez caracterizado el proceso de trabajo con estas premisas, a medida que se avanzó en su aplicación, se fue produciendo de manera natural la ***evaluación*** del mismo, ya que surgieron alternativas interesantes que fueron analizadas para su ejecución. No obstante, dentro de la planificación de tareas, la evaluación ha adquirido un rol fundamental para lograr el ***replanteo o el afianzamiento de la metodología empleada.***
Este conjunto de acciones se deriva del marco teórico adoptado que resume e integra trabajos sobre tendencias innovadoras en la enseñanza de la matemática [Guzmán] donde el trabajo sobre situaciones problemáticas [Polya, Pozo] se hace indispensable, tratándose mediante técnicas estratégicas que favorecen la práctica de aprender a aprender [Novak, Pozo, Galagovsky Kurman].

---

[1] **Pautas orientadoras para los docentes: La propuesta de trabajo parte de una metodología que se basa en la fundamentación y análisis de los procesos en juego.**
Algunas pautas a tener en cuenta en el desarrollo de los temas:
- Proponer un problema para trabajar y formular preguntas para lograr la buena comprensión del enunciado.
-.Tener en cuenta las alternativas de resolución propuestas por los alumnos y analizar su coherencia y viabilidad.
-.Utilizar los errores de los alumnos como fuentes de aprendizaje.
-.Ejercitar el orden y la organización de los procedimientos en función del objetivo del problema.
-.Proponer a los alumnos revisar que las consignas se hayan cumplido.
-.Estudiar, con los alumnos, la forma de validar los resultados obtenidos.

Herramientas de trabajo: un camino hacia los resultados
Como complemento y sustento de todo el trabajo, ocupó un lugar destacado en esta parte de la investigación, el diseño y la elaboración de los instrumentos necesarios para el desarrollo del curso, entre ellos: ***la guía de trabajo y ejercitación, las evaluaciones y las encuestas de opinión acerca del desarrollo del curso para alumnos y docentes.***
Sobre la base de los resultados obtenidos se comenzaron a delinear las primeras conclusiones, que ante la posibilidad de comparar con la segunda edición del curso, podría confirmarse cierta tendencia en algunos aspectos.[2]

Instrumentos. Descripción y avance a partir de su utilización.
Guía de ejercicios
La guía de trabajo inicial (Ingreso 2000) fue realizada en función de los objetivos propuestos y los temas requeridos, la implementación de la misma produjo su revisión y cambio que se hizo efectivo para el ingreso 2001. Las modificaciones de los ejercicios se llevó a cabo a través del análisis del tipo de dificultades que los alumnos presentaron en todas las instancias de evaluación y de aquellas que observaron los docentes que trabajaron con el material. Como consecuencia del trabajo realizado utilizando las guías pudieron visualizarse diversas dificultades en el proceso de aprendizaje.
Los ajustes de la guía consistieron en una dosificación progresiva de las dificultades contenidas en los ejercicios de planteo directo y en la intensificación de los temas abordados.

Evaluaciones
a) Evaluación diagnóstica.
Se elaboró utilizando los conceptos a trabajar en el curso y teniendo en cuenta los siguientes parámetros: pasaje del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa, proporción de conocimientos previos adquiridos y accesibles, manejo del lenguaje matemático y efectividad en la operatoria algebraica básica.
Esta evaluación fue implementada a 175 alumnos del curso setiembre-noviembre y a 440 alumnos de febrero-marzo (aproximadamente el 24% del total). La segunda muestra contempló y representó los distintos días y horarios en los que cursaron la totalidad de los 1845 alumnos inscriptos al curso.
La evaluación de febrero-marzo confirmó los resultados observados en la de setiembre-noviembre entre ellos **que los alumnos provenientes de la escuela pública tienen un rendimiento notablemente inferior al de los alumnos provenientes de la escuela privada**. Este resulta un dato importante pero cabe observar que la muestra no fue seleccionada con fines de evaluar el tipo de escuela de procedencia de los alumnos, es decir que con respecto a esta variable no se puede garantizar la representatividad de la muestra.
Un dato de interés: de los 440 alumnos evaluados, 41 ya habían realizado y desaprobado el curso en setiembre-noviembre. En este grupo se observó que el 83% obtuvo un puntaje superior o igual a 4.

[2] Cada curso de admisión, en la UNLM, se implementa dos veces por año, la primera instancia en el período setiembre-noviembre del año anterior y está destinada a personas que residen en el Partido de La Matanza; y la segunda en el período febrero-marzo en forma abierta a la comunidad educativa. Las personas que no lo aprueban en la primera instancia pueden rehacerlo en la segunda.

b) Evaluación de promoción

Primera edición del curso (Setiembre-Noviembre 1999): En este curso se inscribieron para realizar la materia 763 alumnos de los cuales 598 rindieron el primer parcial y menos aún el segundo, fueron evaluados en ambas instancias 452 alumnos. Es decir que el **40,76% resultó ausente**. El gran porcentaje de ausentes puede deberse al hecho de que los alumnos tienen la posibilidad de rehacer el curso en la segunda instancia

Sobre el total de los presentes el 50% obtuvo de 4 a 6 puntos, el 31% 7 puntos o más y el 19% resultó aplazado. Se observa una mejora con respecto a los resultados de la evaluación diagnóstica de este período (46,4%, 25% y 28,6% respectivamente)

Segunda edición del curso (Febrero-Marzo 2000): Para este curso resultaron inscriptos 1845 alumnos. En este caso se tomó un único examen al finalizar. El 17,30% de los alumnos no se presentó al examen final y de los presentes el **34,45% desaprobó, el 34,8% obtuvo de 4 a 6 puntos y el 29,75% superó los 6 puntos**. Comparando con la evaluación diagnóstica de este período, si bien mejoró la franja del 7 o más puntos, aumentó la cantidad de alumnos aplazados.

En febrero-marzo, los alumnos tuvieron una sola instancia de evaluación, al final. Sin embargo, en el primer curso los alumnos tuvieron dos instancias de evaluación. Podemos pensar que las evaluaciones intermedias llevan a un mayor seguimiento del aprendizaje mejorando el rendimiento final. Por tal motivo, en el curso febrero-marzo del 2001 se implementó una instancia de evaluación intermedia, que no incide en la nota final, a los efectos de que los alumnos y docentes puedan evaluar el proceso.

Resultados interesantes: observación de los errores presentes en las evaluaciones

Ante la recurrencia de ciertas características en la resolución de los exámenes hay resultados que pudieron verse prácticamente de manera inmediata. Por ejemplo:

- El 43,5% de los alumnos no relaciona proporción con porcentaje.
- Más del 80% de los alumnos no entiende qué significa resolver una ecuación.
- Al decidir sobre la verdad o falsedad de una ecuación algebraica, sólo el 0,5% de los alumnos pudo justificarlo correctamente.
- No se presentan dificultades en la interpretación de un problema de resolución inmediata, pero más de la mitad de los alumnos no puede comparar situaciones alternativas presentadas mediante algún planteo.
- La mayor dificultad aparece en resolución de inecuaciones: el 68% de los alumnos no lo hizo o lo hizo mal.
- Entre el 39% y el 47% de los alumnos no puede reconocer el dominio o los ceros de una función y sólo el 17,7% de los mismos realiza un gráfico correcto.
- Se encontró que cuanto mayor es la cantidad de consignas dadas en un enunciado, menor es la posibilidad de que el alumno pueda expresarlo simbólicamente.
- Sólo el 19% de los alumnos grafica correctamente un sistema de inecuaciones obtenido.

Se observa que las mayores dificultades se presentaron al querer representar gráficamente funciones.

Observaciones de los docentes

En la corrección de las evaluaciones, los docentes observaron:

- Desconocimiento de las operaciones intervinientes en una ecuación.

- El error común de distribuir el cuadrado con respecto a la suma aparece frecuentemente.
- Al probar la veracidad de una expresión el alumno no reconoce la igualdad como tal. Llega a la igualdad pero indica que la expresión es falsa.
- Los símbolos “<” y “>” se confunden
- Es común la utilización de las siguientes expresiones $2 < x > 0$.
- En general las justificaciones presentadas en los ejercicios se remiten a la simple verificación de los valores propuestos sin efectuar la resolución de los mismos.
- Tienen dificultad en encuadrar la respuesta algebraica obtenida dentro del contexto de un determinado problema concreto.
- Para graficar funciones, el alumno no utiliza puntos significativos, hace tabla de valores y en general independientemente de la expresión de la función siempre grafica rectas.

Esto refleja cómo las expresiones matemáticas se convierten para los alumnos sólo en expresiones que carecen de sentido, es decir, sin significado.

c) Encuesta: consulta de opinión realizada a los alumnos

Al finalizar el curso de setiembre de 1999 se tomó una encuesta a los alumnos (rindieron el parcial 462 alumnos y respondieron la encuesta 445 alumnos: más del 96 %), en ella se observó que:

- El 36,8% de los alumnos consideró a la materia difícil, sin embargo, el 47,6 % la consideró ni fácil ni difícil.
- Al 81,25 % de los alumnos le gustó el material trabajado.
- Los temas que más costaron fueron funciones (al 41,6% de los alumnos) y sistemas de inecuaciones (al 44,3% de los alumnos).
- El 94% de los alumnos considera que haber realizado el curso resultó útil o muy útil.
- Predominan los alumnos que consideran que los parciales fueron normales: el 57,4%.
- Con respecto a porqué le gustó el material trabajado, las respuestas más frecuentes, fueron: *Me pareció completo. (21); Me pareció interesante. (16); Era entendible. (15); Me gusta matemática. (10); Es entretenido. (9); Ayuda a razonar. (7)*
- Con respecto a porqué *no* le gustó el material trabajado, las respuestas fueron: *Faltaba ejercitación. (9); Incluía muchos problemas. (7); Me resultaron difíciles los problemas. (6); No entendí. (6)*

Resultados en proyección

El departamento de Ciencias Económicas, a partir del año 2000, realizó un cambio en el plan de estudios de las carreras, debido a ello todos los alumnos ingresantes debieron cursar en el primer cuatrimestre la materia Álgebra (anteriormente era Matemática 1).

Fueron consultados algunos profesores que tuvieron a cargo la materia Álgebra, y ellos opinaron que notaban en sus nuevos alumnos un mejor rendimiento. Este hecho nos llevó a comparar el resultado de los alumnos que cursaron Matemática 1 en el primer cuatrimestre de 1999 con el de los alumnos que cursaron Álgebra en el 2000.

Durante el primer cuatrimestre del 2000 se observó una notable disminución en el porcentaje de alumnos que abandona la cursada con respecto al año anterior (pasa de 54,66 a 28,4%). Disminuyó la deserción.

Publicaciones
Como apoyatura para los alumnos que realizan el curso:
ÁNGEL, M.E. *Matemática. ¿Leo, traduzco, resuelvo?***.** Ed. C&C. Material teórico sobre casos concretos relacionados con temas ya conocidos o estudiados por los alumnos.
FERNÁNDEZ, G.; POLOLA, L.; BORTOLOTTO, M. *Matemática. Análisis y resolución de situaciones problemáticas.* Ed. C&C. Material práctico sobre situaciones que se analizan desde múltiples ópticas que permiten una visión más integral de los conceptos a trabajar.

Palabras finales
Identificar las dificultades y errores que tienen los aspirantes a ingresar ha sido sumamente importante porque siempre permite descubrir el camino a seguir ya sea por medio de la intensificación y/o cambio de las acciones planificadas y la forma de su instrumentación.
Se espera obtener como corolario de todo el trabajo los criterios necesarios que ayuden a mejorar la educación matemática.
Los objetivos básicos en los que nos apoyamos para el desarrollo del curso de admisión fueron los de orientar y guiar al alumno: en la lectura, comprensión e interpretación de las diversas consignas presentadas en las situaciones planteadas; la relación entre el lenguaje simbólico y el coloquial para poder realizar la transferencia de uno a otro según corresponda y la selección y aplicación de las herramientas para la resolución de las distintas situaciones problemáticas pues *"no sirve de nada saber operar si no se puede decidir las operaciones que se necesitan para resolver una situación dada"*
El objetivo final de este trabajo es el de mejorar la calidad de los resultados del aprendizaje y de los procesos del quehacer académico.

Referencias bibliográficas
Ángel, Mª Eugenia. (2000) *Matemática. ¿Leo, traduzco, resuelvo?*. Bs. As: Ed. C&C
Carretero, Mario (1997) *Introducción a la psicología cognitiva*. Bs. As : Ed. Aique
Coll, César. (1987) *Psicología y curriculum.* Bs. As.- Barcelona - México : Ed. Paidós..
Fernández, G.; Polola, L.; Bortolotto, M. (2000) *Matemática. Análisis y resolución de situaciones problemáticas.* Bs. As: Ed. C&C.
Galagovsky Kurman, Lydia (1994) *Abismo y rol docente*. En Santaló Luis A. y col. *Enfoques. Hacia una didáctica humanística de la matemática*. Bs. As. Ed. Troquel Educación.
Gil, Daniel; Pessoa Anna y ot. (1994) *Formación del profesorado de las ciencias y la Matemática: tendencias y experiencias innovadoras*. Madrid: Ed. Popular-MCyE-OEI
Guzmán, Miguel de.(1993) *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática.* Madrid: Ed. Popular- OEI.
Hernández Fernández, Herminda, Delgado Rubí, Juan Raúl y ot. (1988) *Cuestiones de didáctica de la Matemática*. Rosario, Santa Fe: Ediciones Homo Sapiens. Serie Educación
Novak, J. y Gowin, D. (1988*) Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Ed. Martínez Roca.
Polya, G. (1995) *Como plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trilla. (19 impresión)
Pozo, Juan Ignacio. (1993) *Teorías Cognitivas del Aprendizaje*. Madrid: Ed. Morata.

Organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos heurísticos: una aplicación en el Cálculo Diferencial

Carmen Luisa Méndez Fabret, Caridad González Sánchez, Juan Raúl Delgado Rubí
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (ISPJAE).Cuba
Menlui@ind.ispjae.edu.cu

Resumen
En este trabajo se explica cómo se ha organizado el proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos heurísticos y su implementación en una asignatura; organización que puede guiar al estudiante en la asimilación consciente de estos recursos y aplicarlos con éxito en la resolución de problemas.
La propuesta ***"organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos heurísticos"*** ha sido implementada en la asignatura Cálculo Diferencial que se imparte en primer año de Ingeniería Industrial y que incluye los contenidos: Funciones, Límite, Continuidad, Derivada y Diferencial de funciones de una y varias variables. Aprovechando las potencialidades que brindan estos temas para el aprendizaje de la resolución de problemas, se explican las proyecciones de la nueva organización en la cual se incorporan los heurísticos como *objeto de enseñanza* al sistema de *contenidos* de la asignatura.
La propuesta toma como marco teórico la Enseñanza Problémica y la Resolución de Problemas como enfoques o formas de concebir las actividades educativas que se basan en el planteamiento de tareas abiertas y sugerentes que exijan del estudiante una actitud activa y un esfuerzo por buscar sus propias respuestas, su propio conocimiento. Se exponen algunas estrategias de trabajo donde se destaca el papel de los métodos de enseñanza en particular los métodos problémicos y técnicas participativas como la vía principal para ejercer la acción transformadora que se pretende lograr.

Introducción

El creciente interés por investigar aspectos relacionados con el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, está dado no solo por la permanente necesidad de elevar la calidad de la enseñanza de la Matemática sino también por las exigencias que las tendencias del desarrollo social, económico y científico-técnico demanda para la formación de la joven generación.
Desde hace varios años en nuestro centro se llevan a cabo investigaciones con el propósito fundamental de mejorar el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.
Como resultado de una de estas investigaciones ha surgido la propuesta **"organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos heurísticos"** implementada en la asignatura Cálculo Diferencial que se imparte en el primer año de la carrera de ingeniería industrial del ISPJAE.

Caracterización de la organización tradicional de la asignatura

El Cálculo Diferencial es una de las cinco asignaturas que conforman la disciplina Matemática General de la carrera Ingeniería Industrial. A pesar del perfeccionamiento continuo a que están sometidos los planes y programas docente de la disciplina en el análisis que precedió la elaboración de la propuesta se observó que aún subsisten deficiencias.
Los **objetivos**, no están expresados en términos de tareas concretas, o sea, de acciones productivas, intelectuales a realizar por el estudiante. En su formulación no aparecen los componentes que garantizan la precisión de los mismos, la facilidad de su instrumentación en el proceso y la posibilidad del control sobre el desarrollo alcanzado en el momento

oportuno. Los objetivos que involucran la resolución de problemas, están dirigidos a lograr que el contenido matemático se utilice en la realización de "problemas" de aplicación, pero esta actividad no está concebida como un enfoque para el tratamiento de los contenidos objeto de estudio.
El **contenido** a desarrollar se agrupa en tres temas: "Las funciones de una y varias variables"; "El cálculo diferencial de funciones de una y varias variables" y "Las aplicaciones".
El trabajo con problemas comienza tardíamente o sea después de introducir las derivadas, reduciendo las potencialidades que tienen las funciones, el límite y la continuidad para desarrollar habilidades que intervienen en el proceso de resolución de problemas.
En la **organización** de las actividades cognoscitivas ha predominado el empleo de métodos tradicionales donde el papel principal lo desempeña el profesor mientras que el estudiante desempeña un papel mas bien de receptor de la información que no favorecen la creatividad, la iniciativa y que por el contrario conducen a la rutina, al esquematismo y a la pasividad del estudiante.
Los **medios** de enseñanza se utilizan muy poco, particularmente no se aprovechan las potencialidades que ofrece la computación para la enseñanza de la asignatura.

Principales proyecciones para la nueva organización

En la nueva organización los **objetivos** se formulan de modo que su proyección y alcance permita extender el uso la resolución de problemas en: El *tratamiento de los conceptos fundamentales* de la asignatura. La *introducción de definiciones y teoremas*. *Investigar nuevos contenidos de estudio*. *Reconocer y formular problemas de aproximación, optimización y razón de cambio en situaciones diversas asociadas al contenido* de la asignatura.
Los heurísticos se incorporan al sistema de **contenidos** como *objeto de enseñanza y comprende* los conocimientos correspondientes a:
Procedimientos heurísticos: Principios heurísticos generales y especiales (Analogía, Reducción, Generalización, Inducción) (movilidad y extremos). Reglas heurísticas generales y especiales. Estrategias heurísticas: Trabajo hacia delante ó método sintético; Trabajo hacia atrás ó análisis creciente
Medios heurísticos: Figuras de análisis, tablas, libros de texto, tarjetas de estudio, softwares matemáticos.
Método de resolución de problemas: Interpretación del programa heurístico general: fases fundamentales y tareas principales para la resolución de un problema.
Se presta especial atención al desarrollo de las habilidades matemáticas interpretar, modelar, comparar, resolver y controlar por su gran incidencia en la resolución de problemas.
Los heurísticos como parte del contenido de la asignatura, tienen la particularidad de que no se constituyen en un tema ni se imparten como actividad docente independiente, sino que se aprovechan las potencialidades que posee el conocimiento base para introducirlos. De esa manera la enseñanza de los heurísticos.
Las diferentes actividades docentes se organizan con suficientes situaciones problémicas o problemas que son introducidas con el uso de *métodos problémicos y técnicas*

participativas desde las primeras actividades educativas propiciando el debate, la reflexión, la toma de postura crítica tanto individual como colectiva en cada actividad.
La resolución de problemas se proyecta como un modo de concebir las actividades educativas mediante el cual se construye y refuerza el contenido matemático a estudiar en la asignatura, aprovechando todas sus potencialidades para entrenar al estudiante de manera consciente en el uso de los recursos aplicables a la resolución de problemas matemáticos y tendrá como premisas.

- Propiciar que sea el estudiante el que elabore las estrategias de solución, construya la metodología o algoritmos de solución para los diferentes tipos de problemas, permitiéndole vivenciar el empleo de las técnicas que si bien no dan por sí solas la solución del problema pueden ayudar a obtenerlas.
- Las tareas no podrán ser simples ejercicios o problemas rutinarios evitando la reiteración de su contenido, la falta de creatividad y motivación, el empleo de palabras claves, etc. que puedan falsear el cumplimiento de los objetivos.
- Considerar como problemas la formación de conceptos fundamentales y la introducción de determinadas definiciones y teoremas con el fin de aprovechar sus potencialidades en el desarrollo de habilidades heurísticas y metacognitivas.

"Organización del proceso de enseñanza-aprendizaje los recursos Heurísticos"

En la organización del proceso de asimilación se distinguen de manera especial el momento de: la introducción de los nuevos conocimientos; la consolidación de los conocimientos introducidos; la aplicación y la evaluación del aprendizaje que se produce.
En cada uno de estos momentos los problemas o situaciones problémicas que se plantean difieren respecto a los objetivos que persiguen, pero en general las técnicas con que son "atacados" son esencialmente iguales; aquí lo fundamental radica en organizar el proceso, de forma tal que los estudiantes sean situados sistemáticamente ante problemas cuya solución se busca a través de su participación activa y haciendo uso consciente de los recursos heurísticos.

La **introducción** de los "nuevos" conocimientos forma parte del tema I "Funciones". Este es el momento de *familiarizar* de forma consciente a los estudiantes en el uso y aplicación de los heurísticos. Algunas acciones asociadas a este momento pueden ser: presentación de ejemplos apropiados que permiten formular concisa y cabalmente el recurso que se debe asimilar, declarar explícitamente el recurso heurístico a emplear, realizar el tratamiento metodológico a problemas para transparentar el proceso de búsqueda de la vía de solución y cambio de estrategias.
Los recursos heurísticos se introducen fundamentalmente con un tipo de clase donde la parte teórica y la práctica se combinan (conferencia compartida). Se caracteriza porque tanto la parte orientadora como la parte práctica tienen un peso importante en la ejecución de la actividad por cuanto el estudiante trabaja con el contenido para lograr apropiarse del mismo.
Mediante un trabajo metodológico donde se analiza el contenido, se determinan las potencialidades de cada tema para el desarrollo de habilidades heurísticas y metacognitivas y con estos resultados se organiza en forma apropiada cada actividad docente.
La primera actividad se realiza en dos partes: Una evaluación preliminar que consiste en un *diagnóstico inicial* cuyo propósito es determinar el nivel de partida de los estudiantes respecto a su preparación para resolver problemas. Los resultados se toman como punto de partida para todo el trabajo posterior del curso. La otra parte es una conferencia orientadora

donde se introducen los medios heurísticos destacando de forma clara precisa y explícita su importancia a partir de la necesidad de usar un diagrama de relaciones en la solución de un problema de teoría de conjuntos.
Otras actividades educativas de gran importancia son las dos conferencias compartidas que siguen, donde usando el conocimiento que los estudiantes tienen sobre las funciones, se realiza el tratamiento metodológico de un problema a partir del cual se introducen las reglas heurísticas. Se confecciona una **tarjeta de estudio** donde se resumen los procedimientos, operaciones y recursos que lleva cada acción vinculada con la resolución de problemas.
La conferencia orientadora donde se introduce la definición de función se desarrolla a partir del planteamiento cinco problemas: de extremo, de comportamiento asintótico, de variación de una magnitud con respecto a otra, de aproximación local de funciones y de acotamiento, los cuales el estudiante tendrá que resolver en diferentes momentos del curso. En esta clase se resuelve solamente el de extremo, a partir del cual se introduce el "uso del elemento neutro" y se revela su esencia con el tratamiento de la estrategia "sumar cero"
Se realiza un laboratorio de computación donde se orientan tareas entre las que aparece problemas que requieren de máxima precisión en cálculos, gráficos y mediciones que solo se pueden encontrar con la ayuda de la computadora, pero se requiere de una preparación previa donde el estudiante debe elaborar el modelo a utilizar y hallar la vía o vías de solución empleando los recursos heurísticos introducidos.
El seminario integrador permite que los estudiantes puedan **analizar y discutir las vías de solución** de tareas previamente orientadas, **realizar** conjeturas y comentarios acerca de los asuntos tratados, realizar **oponencia**s a informes que recogen resúmenes teóricos, respuestas a preguntas y soluciones a problemas.

Se realizan actividades de **consulta,** donde los estudiantes presentan aquellos problemas que le ofrecen dificultades para establecer un plan de solución. Es momento propicio para atender las diferencias individuales, el papel del profesor es de esclarecimiento y ayuda para encontrar el algoritmo o vía de solución, pero de ningún modo se le suministra la solución al estudiante.
La **consolidación** de los conocimientos introducidos, forma parte del tema 2 "Límite y Continuidad" su finalidad es la *formación de hábitos en la utilización consciente* de los recursos heurísticos adquiridos en el tema anterior, aquí se plantean tareas que requieren la identificación y aplicación con un nivel de complejidad mayor. El estudiante trabaja en pequeños grupos o en pareja resolviendo problemas en los que necesita aplicar estos recursos pero debe hacerlo ya con una mayor independencia.
Las **aplicación,** se considera parte del tercer y último tema porque es aquí donde con mayor frecuencia se orientan problemas que el estudiante realiza de forma independiente con un potencial que exige del estudiante el empleo de los recursos heurísticos y metacognitivos a un nivel estratégico más elevado, en situaciones diversas asociadas al contenido de la asignatura.
Asegurarse de que al finalizar cada tema los objetivos queden vencidos en general y en el orden individual conocer las dificultades de cada estudiante son acciones asociadas al momento de la evaluación.
Las actividades evaluativas y el control del aprendizaje son utilizadas como un medio para incidir en la disposición del estudiante para aprender, para lograrlo, se dan a conocer los indicadores o normas de valoración al estudiante, que le permite encontrar dónde cometió algún error y rectificarlo según ese modelo.

Los errores que se detectan no se toman como un fracaso sino como fuente de información para el docente en su labor como entrenador y para la autoevaluación del estudiante.
En general las actividades evaluativas tienen en cuenta evaluar más los procesos seguidos por el alumno que la corrección final de la respuesta obtenida, valorando especialmente el grado en que ese proceso de solución implica una planificación previa, una reflexión durante la realización de la tarea y una autoevaluación por parte del alumno del proceso seguido.

Conclusiones

Con la propuesta se logra una organización del proceso de la enseñanza que convierte el aprendizaje de los recursos heurísticos en parte consustancial del Cálculo Diferencial, en ella el término problema se vincula no sólo con las aplicaciones específicas, sino que también se incluye, el aprender conceptos y deducir teoremas, propiciando que el aprendizaje de los entes matemáticos y en particular los conceptos y definiciones se haga con un enfoque problémico lográndose la aplicación práctica y el uso consciente de los recursos heurísticos.
Se propicia la discusión con los compañeros estimulando al estudiante a hacer explícitos y a justificar la forma en que comprende una tarea, las herramientas y técnicas con que trata de abordarla, el objetivo que se plantea con cada una de estas técnicas y el orden en que las va utilizando, contribuyendo a ilustrar la utilización de las distintas estrategias y subestrategias y al entrenamiento del estudiante para su uso eficiente en la resolución de problemas.
La propuesta constituye una guía para orientar el trabajo del profesor en el desarrollo de habilidades heurísticas y metacognitivas a partir de una organización que estimula la instrumentación del contenido de la asignatura utilizando técnicas grupales y métodos activos de enseñanza que favorece la motivación de los estudiantes, le permite conocer sus potencialidades y desarrollar sus capacidades para la resolución de problemas lo cual asegura mayor calidad al proceso de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Colectivo de Autores. (1995). *Los métodos participativos. Una nueva concepción de la enseñanza*. CEPES. Universidad de la Habana. La Habana.
Müller, H. (l987). Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática. ISP “Frank País García”. Santiago de Cuba.
Santos T, LM. (1994*). La resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Cuadernos de investigación # 28 CINVESTAV- IPN. México.
Pozo, JI (1994). *La solución de problemas*. Santillana S.A. Madrid.
Rodríguez, R.(1988). *Cálculo Diferencial e Integral.* Pueblo y Educación. La Habana.
Saenz , J. (1995). Cálculo Diferencial para Ciencias e Ingeniería. Barquisimeto.

La creatividad en una clase de matemática

Mirta Graciela Jacobo, Marta Graciela Gómez Guchea, María de los A. Juárez, Marta Susana Golbach, Analía Patricia Mena, Sara Inés Ottonello
Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
mpappalardo@cgcet.org.ar mgolbach@tucbbs.com.ar

Resumen
El presente trabajo tiene como objeto presentar una propuesta para incorporar la Creatividad como dimensión pedagógica y didáctica en los escenarios de formación de los estudiantes, en la asignatura Algebra de la Facultad de Ciencias Económicas de la U.N.T., sustentada en los planteamientos y fundamentos teóricos de J. Betancourt, Vigotsky, Saturnino de la Torre, Chadwick y A. Minujin, entre otros. En su desarrollo se describen algunas de las principales Estrategias, Métodos y Técnicas (la Sinéctica, las técnicas de De Bono etc.) que contribuyen al desarrollo de la creatividad, ya que ellas nos brindan alternativas para romper esquemas tradicionales del proceso de enseñanza-aprendizaje. Finalmente se diseña una clase creativa con actividades participativas tendientes a desarrollar los conceptos de: Oferta, Demanda y Equilibrio de Mercado, seleccionando las estrategias y técnicas apropiadas, para las diferentes etapas del proceso creador.

Introducción

La nueva configuración social, económica, política y tecnológica de este nuevo siglo le exige al estudiante, futuro profesional, día a día modalidades autónomas de actuación, además de la formación de un pensamiento productivo y creador que favorezca el incremento de la producción creativa de sus actividades. Sin embargo las actuales formas y técnicas de enseñanza de nuestras Instituciones Educativas tanto escolares como universitarias no incentivan en general el desarrollo creativo en los estudiantes.
Es por ello que este trabajo tiene el propósito de mostrar y reflexionar en torno a las principales Estrategias, Métodos y Técnicas que estimulan el desarrollo de la creatividad con la finalidad de incorporar a la misma en un tema de aplicación económica, de la asignatura Algebra de esta Facultad, desde una perspectiva cada vez más activa del alumno y del docente dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Fundamentación teórica

Comenzando los años noventa, la Creatividad, se perfila como una de las principales ciencias del futuro. Su investigación es reciente en comparación con otros campos de estudio, y se ha desarrollado fundamentalmente en la segunda mitad del siglo XX.
Evitando las definiciones tajantes, pero evitando también la postura de denominar creatividad a cualquier cosa que se nos ocurra, podríamos caracterizarla como: *un proceso de descubrimiento o producción de algo nuevo, valioso, original y adecuado, que cumpla con las exigencias de una determinada situación social, en la cual se expresa el vínculo de los aspectos cognoscitivos y afectivos de la personalidad. (Betancourt J.,De la Torre, S. Mitjáns M, 1995, p.4)*
La mayoría de las investigaciones actuales consideran cinco enfoques globales fundamentales en el estudio de la creatividad que hacen énfasis en: el proceso, el producto, el contexto social, la persona y la conjunción e integración de los elementos anteriores.
Existen también estudios muy serios realizados en torno al Enfoque Histórico Cultural desarrollado por Vigostki, Leontiev y Luria. Para Vigostki, el hombre realiza dos

actividades básicas: la reproductora, que guarda estrecha relación con la memoria y la creadora. Considera que la creatividad es fruto de la disociación (romper la relación natural de los elementos) y la asociación (combinación de los diferentes elementos en una estructura), en cuya base están los procesos de imaginación y fantasía. Afirma, que la creatividad existe potencialmente en los seres humanos y es susceptible de desarrollarla, además de tener un carácter eminentemente social y sociohistórico.
Un factor importante para el desarrollo de ideas creativas es el estado anímico del creador y su medio ambiente. Teniendo en cuenta que a la creatividad puede inhibírsela con mucha facilidad, es necesario conocer y luego aprender a quitar las *Barreras* que influyen negativamente en ella. Algunas de estas son las siguientes: las ideas preestablecidas, el temor al ridículo, la seguridad que nos ofrece lo viejo, la excesiva e indebida utilización del pensamiento vertical (lógico o lineal), las actitudes autoritarias, etc.

La Enseñanza y el Aprendizaje Creativo

Un profesor en su actividad docente y en constante preocupación por el alumno se pregunta cómo motivarlos, cómo conseguir una atención continuada, y en general cómo utilizar metodologías y estrategias didácticas que hagan la clase más atractiva. Todos estos interrogantes nos llevan al análisis de “la enseñanza creativa” y del “aprendizaje creativo”.
La enseñanza creativa se caracteriza por ser activa, motivadora, dinámica, e implicativa. Por ello, el profesor innovador y creativo tendrá que organizar las tareas docentes con más variedad de recursos didácticos, superando la enseñanza tradicional (clases magistrales, transmisor y evaluador) adoptando una disposición flexible, tratando de incorporar nuevas ideas en su forma de enseñar y actuar.
Como e*l aprendizaje creativo hace referencia al conocimiento construido con la implicación activa del sujeto, desde su planificación, hasta su internalización, caracterizado por la motivación intrínseca, estar centrado en el alumno, tener un carácter abierto al proceso y la autoevaluación. (De la Torre, S.,1993, p.272*) es que el docente deberá también conocer y aplicar diversas técnicas orientadas a desarrollar la creatividad de sus alumnos, realizar actividades como las de inducir a los mismos a elaborar soluciones tentativas a los problemas, promover el aprendizaje por descubrimiento, diferir el juicio crítico cuando se estén exponiendo ideas. Además de proponer actividades participativas como, tareas grupales; aplicación de técnicas participativas a una situación problemática planteada; tareas con cierta dificultad en la que se analicen errores de diversos tipos, etc.
Ya no podemos pensar en el docente como mero transmisor, sino como inductor de aprendizajes. Ello requiere la elaboración de nuevos métodos, técnicas y estrategias para enseñar a pensar y crear. Los métodos y técnicas específicas para el desarrollo del pensamiento creador, tienen entre sus objetivos romper esquemas y generar formas nuevas de enfocar los problemas. Entre los más utilizados están: la Tormenta de Cerebros o Brainstorming (reunión creativa, en forma grupal, en la que se origina una lista de ideas variadas sobre un tema), las técnicas de De Bono: P.N.I (aspectos Positivos, Negativos e Interesantes de una idea), C.T.F.(considera todos los factores), P.b (Prioridades básicas) etc.
En sentido general, se estudian las estrategias como una acción humana, orientada a una meta intencional, como una actividad netamente intelectual encaminadas a trazar el puente

de unión entre el "qué" y el "cómo" pensar. Existe además una diversidad de enfoques de las estrategias basados en diferentes teorías.

Chadwick (1988) considera que las estrategias pueden dividirse en dos grupos:

Las Estrategias de Procesamiento, aquellas que las personas utilizan para mejorar sus posibilidades de “ingresar y almacenar” información.

Y, las Estrategias de Ejecución que se caracterizan por “recuperar” la información guardada en la memoria y su aplicación para algún fin.

Se destacan también otras estrategias que Fustier (1975) las clasifica en:

Estrategias Antitéticas, Estrategias Aleatorias y en Estrategias Analógicas. Estas últimas parten de considerar a la analogía como proceso fundamental del conocimiento y buscar nuevas ideas promoviendo el acercamiento, continuidad o contigüidad de las mismas. Entre las que se destaca la Sinéctica, (funciona a través de dos procedimientos básicos: "hacer familiar lo que es extraño" y "hacer extraño lo que es familiar" en el que intervienen el análisis, la generalización y la búsqueda de modelos o analogías).

La creatividad no empieza con hechos, teorías o hipótesis, sino con una situación problemática. De allí que la persona creativa logra dar soluciones a problemas a través de pasos o etapas que dan lugar a la germinación de las ideas que podemos llamar originales, inventivas. Estas etapas o estados mentales no se cumplen esquemáticamente, ni ocurren por igual en todas las personas, lo importante son los procesos y mecanismos subyacentes.

A. Minujín (1992) las clasifica en siete:
   1) Planteamiento del problema: El alumno debe comprender el problema, separar las partes principales (incógnitas, datos, condiciones), elegir algún modo de representación y darle la notación adecuada.
   2) Preparación: En esta fase se acumula información respecto al problema, es decir se reúnen, definen, organizan los conocimientos que se refieren al mismo.
   3) Incubación o procesamiento de la información: En esta etapa la información es analizada, organizada y se realiza una depuración de los datos.
   4) Visión o iluminación: Puede ocurrir o no y se caracteriza porque el alumno toma conciencia de la idea que soluciona el problema.
   5) Producción: Aquí predominan la ejecución y la realización de operaciones concretas orientadas a solucionar el problema.
   6) Verificación: Se realiza en esta etapa la comprobación y la configuración de la nueva solución. Se sitúa la solución en el contexto y la idea se elabora y enuncia.
   7) Distanciamiento: En este momento el pensamiento lógico se activa porque el individuo se distancia de la solución hallada para evaluar de manera objetiva su dimensión y alcance.

El docente debe alentar a sus alumnos a imaginar casos en los que puedan utilizar de nuevo el mismo razonamiento o aplicar el resultado obtenido.

Clase creativa

Para elaborar esta clase consideramos que los estudiantes en el tema Línea Recta de la asignatura Álgebra alcanzaron los niveles de asimilación, de familiarización, reproducción y producción.

Para hacer que el estudiante alcance un nivel de creatividad es imprescindible entrenarlo para desarrollar habilidades de manera independiente, lo que implica enfrentarlo a ejercicios y problemas subjetivamente nuevos para él. Su actividad tiene carácter de búsqueda y de investigación con estrategias para contribuir al pensamiento creador.

Aplicaciones de las gráficas rectilíneas en Administración y Economía

Objetivo*:*

Analizar las gráficas de oferta y demanda en forma conjunta para llegar al concepto de Equilibrio de Mercado, empleando estrategias que estimulen la creatividad.

Con la finalidad de favorecer este proceso creador en los alumnos y de lograr que estos pasen por las diferentes etapas del mismo se emplearan en el desarrollo de la clase las siguientes estrategias, métodos y técnicas:

a) La técnica de Brainstormin. Para ello, se reunirán a los alumnos en grupos de 8 personas bajo la dirección de un moderador, encargado de presentar el problema, las reglas de la técnica y de orientar la sesión hacia un rendimiento máximo.

b) Las Estrategias de Ejecución, las de Procesamiento y la Sinéctica. La analogía cuya utilización en la semejanza de contenidos o forma permite sugerir la vía para la solución de un problema o ejercicio.

c) Las Técnicas de De Bono: P.N.I., C.T.F.y P.b.

Motivación y planteamiento de la situación problémica

Para despertar el interés en los alumnos y que a su vez se sientan implicados en el tema a desarrollar en la clase, se les plantea una situación problémica que conduzca al análisis de las ecuaciones lineales de Oferta y de Demanda.

" En los últimos años y frente a la acuciante situación económica se ha notado en nuestra Facultad una notable disminución, por parte de los alumnos en la compra de libros de textos, como así también el incremento del uso de fotocopias de los textos mencionados.

¿Qué elementos deberán tener en cuenta en esta situación? ¿Existe alguna relación entre los mismos?. Surge de este modo la necesidad de hacer un análisis tanto de la oferta como la demanda, de este mercado específico, para tratar de explicar cuales son sus comportamientos respecto de las variables precio y cantidad, y determinar cuál es el punto de equilibrio".

Metodología a desarrollar en la clase

Con el objetivo de que los alumnos descubran las variables que influyen en la cantidad demandada y en la cantidad ofrecida (libro) y señalen la más importante de las mismas, se emplea la técnica del Brainstorming de modo que los alumnos, en forma grupal, generen ideas sobre estas. Luego se seleccionan las correctas y eliminan las inservibles.

Por ejemplo en la Demanda: los ingresos disponibles, puesto que en el caso de la mayoría de los bienes (libros) la cantidad demandada a un precio cualquiera aumenta con el ingreso, los gustos, los precios de los sustitutos (fotocopias), las expectativas sobre los niveles futuros de ingresos, la población, etc.

En la Oferta: la tecnología, los precios de los factores de producción, las expectativas, el número de oferentes, etc.

Finalmente los alumnos discuten y eligen la variable más importante "El precio del producto en consideración".

A los efectos de realizar un análisis económico elemental (Modelo Lineal) se les plantea a los alumnos que investiguen qué relación matemática existe entre: la cantidad de compradores y los distintos precios de este bien y entre la cantidad ofrecida y el precio del mismo. Para llevar acabo esta tarea se les explica a los alumnos que la misma se implementará usando la estrategia creativa la Sinéctica.

Para ello el "moderador" (el profesor) les propone al grupo el tipo de analogía en la que se deben basar. Se propone en este caso la simbólica (comparar el problema con el comportamiento de curvas elementales conocidas por los alumnos). Cada grupo propone sus ideas las que se registran en el pizarrón para luego ser debatidas en la clase y arribar a las relaciones lineales pedidas.

En este momento el profesor les señala que en la práctica en general las curvas de oferta y demanda no son lineales, pero que las ecuaciones lineales proporcionan representaciones razonablemente exactas de la oferta y demanda para un intervalo limitado correspondiente al 1^{er} cuadrante y que permiten ilustra ciertos tipos de análisis.

Según el autor Chadwick (1988), esta actividad en la cual el alumno logra recuperar la información guardada en la memoria (concepto de recta) y su aplicación para una situación nueva (gráficas de oferta y demanda) se denomina Estrategia de Ejecución.

Del mismo modo en el momento de la “atención” cuando el alumno se orienta hacia los estímulos y situaciones nuevas (interpretación de casos especiales de pendiente nula y no definida) y comienza una identificación selectiva de la información, además de realizar esfuerzos por reconocer, reconstruir y almacenar dicha información se está ante la Estrategia de Procesamiento.

Finalizadas estas actividades correspondientes a las etapas de *preparación, incubación e iluminación* se les propone realizar a continuación, en los mismos grupos de trabajo, otra tres correspondientes a las de: *Producción, verificación y distanciamiento.*

Actividad 1: Gráficas lineales de la Demanda

1) Discutir el significado de la pendiente de la gráfica de la demanda en el caso general.

2) a) Interpretar la gráfica de la recta de Demanda en situaciones particulares.

b) Discutir el significado en el mercado en los puntos de intersección de la recta de demanda con los ejes coordenados. *(producción)*

c) Dada una serie de gráficas discutir si las mismas pueden interpretarse como gráficas de Demanda en alguna situación particular. *(producción)*

d) En una Conversación Heurística, Método Problémico muy útil ya que permite establecer un diálogo fluido entre profesor – alumno, se les plantea la interpretación en casos espaciales de: i) Oferta negativa, ii) Demanda negativa, iii) Precio negativo

Los mismos, conducirán a los alumnos a la conclusión de que el análisis se restringirá al primer cuadrante. *(iluminación, producción)*

A continuación, se les propone a los alumnos realizar un análisis similar a la Actividad 1 para las “Gráficas Lineales de la Oferta”, correspondiente la Actividad 2, empleando la Analogía.

Actividad 3: Equilibrio de Mercado

Empleando el método la Conversación Heurística y a los fines de que los alumnos puedan determinar el punto de equilibrio de mercado, se les presenta en un mismo sistema coordenado las gráficas de oferta y demanda, en diferentes casos y se les pide:

1) a) Analizar el significado del punto de intersección de estas rectas y discutir si enn algún caso, el mismo tiene significado en el análisis de mercado.

b) Se les presenta un sistema de ecuaciones y se les pide identificar las curvas de oferta y demanda, determinar el punto de equilibrio y las gráficas correspondientes. *(Verificación).*

c) Finalmente, en sistema del apartado anterior se les cambia la ecuación de la oferta por la de una recta paralela a la misma, para que los alumnos puedan analizar el desplazamiento de esta curva y sus consecuencias, tanto en el punto de equilibrio como en la cantidad de equilibrio. Los alumnos podrán trabajar con las ténicas C.T.F. y P.b. por los aportes productivos que las mismas originan.
Con la finalidad de evaluar las actividades realizadas se empleará la técnica P.N.I., la que permitirá a los alumnos emitir juicios Positivos, Negativos e Interesante de las mismas.
Esta propuesta se espera implementar a modo de pilotaje en el período lectivo 2002, donde el objetivo es que los alumnos desarrollen su capacidad creadora mediante la implementación adecuada de estrategias, métodos y técnicas que la estimulan, a fin de mejorar la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje.
Se trabajará con una muestra extraída en forma aleatoria del total de la población inscripta en la asignatura, considerando un grupo testigo para medir las diferencias que resulten.

Conclusiones

El desarrollo del pensamiento creador de los futuros profesionales universitarios debe ser uno de los principales objetivos de la Educación Superior. Para que este propósito se cumpla, los profesores deben encaminar el proceso Enseñanza-Aprendizaje con este fin, seleccionando de manera adecuada no sólo los contenidos sino también los métodos y estrategias para lograrlo. Ya que el éxito de cualquier programa para pensar y crear depende de la actuación experta del docente, fruto de su capacitación y de su habilidad para concientizar al alumno acerca del significado y la trascendencia para el desarrollo de su potencial intelectual.

Referencias bibliográficas

Castellanos, V.(1996). *El trabajo en grupos en la educación: Rol del docente coordinador de grupo*. La Habana, Cuba: Universidad de la Habana.
Chibás Ortiz, F.(1992). *Creatividad+Dinámica de Grupo = ¿eureka?.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
Davis G. & Scott J.(1975). *Estrategias para la Creatividad*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
De Bono, E. (1989). *El Pensamiento Lateral. Manual de Creatividad*. Buenos Aires, Argentina: Piados.
De la Torre, S.(1982). *Educar en Creatividad*. Madrid, España: Narcea.
Marín, R. & De la Torre, S.(1989). *Manual de la Creatividad*. Bs.As, Argentina: Paidós.
Betancourt J., De la Torre, S. Mitjáns M. (1995). *Pensar y Crear Estrategias, Métodos y Programas*. La Habana, Cuba: La Academia.
Mitjáns Martínez, A.(1995). *Creatividad, Personalidad y Educación*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
Rouquette, M.(1977). *La Creatividad*. Buenos Aires, Argentina: Huemul
Weber, J.(1996). *Matemáticas para Administración y Economía*. D.F. México: Harla.

Las representaciones del estudiante sobre la noción serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa

Claudia Rosario Muro Urista
Instituto Tecnológico de Toluca, México. México
claudiamuro@hotmail.com

Resumen
En las escuelas de nivel superior, encontramos una problemática característica en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en los diferentes tipos de ingenierías, esto es, aunado a los obstáculos y dificultades que el estudiante presenta en el aprendizaje de los conceptos matemáticos también existe una marcada desvinculación de la matemática con la ingeniería, generando que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, carezca de significado para el estudiante debido a que no se encuentra relación alguna con la matemática que se enseña en la institución y sus conocimientos propios de la ingeniería.
La importancia de la matemática en el ingeniero ha llevado a diferentes investigaciones en la enseñanza, al uso de la matemática en contexto en el propósito de vincular dos áreas del conocimiento. G. P. Camarena, (1987). Y como un antecedente, se cuenta con investigaciones referentes a la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa, cuya hipótesis radica en la necesidad de vinculación de varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones que se estructuran en la propuesta de estrategia de enseñanza de la serie de Fourier a través de su contextualización y significación en la ingeniería. U. C. Muro, (2000). Particularmente esta problemática se ha retomado insistiendo en la formación del ingeniero, cuyas actividades, ya sean como profesionista o estudiante, son cuantitativas; prediciendo comportamientos, entonces, la matemática además de ser una herramienta clave para éste a lo largo de toda su vida debe ser significativa.
Bajo la propuesta de estrategia de enseñanza y aprendizaje de la serie de Fourier a través de su contextualización en el proceso de transferencia de masa y la hipótesis de la integración de este conocimiento en el estudiante.

Introducción

Interesados en la adquisición del conocimiento matemático del estudiante en fenómenos de la ingeniería, esta investigación toma como referencia la contextualización de la serie de Fourier en la transferencia de masa (Muro, 2000), (Muro 2001) para continuar con un proyecto que basado en esta línea, tenga como objetivo ir en busca de un campo conceptual del estudiante en la construcción de su conocimiento sobre la noción de la serie de Fourier en el contexto de fenómenos de transferencia en el establecimiento de representaciones con invariantes operatorias presentadas en el proceso de sus construcciones mentales. Desde esta perspectiva, este proyecto como parte de esta investigación persigue la búsqueda de alternativas en la didáctica una mejor enseñanza de la matemática en la concepción de la construcción del conocimiento en contexto, sustentado en el marco teórico de los campos conceptuales de Vergnaud, (Vergnaud, 1994).
Para nuestro propósito, el diseño de diferentes situaciones de enseñanza, apoyará en el análisis de las concepciones del estudiante sobre esta noción matemática en los fenómenos de transferencia de masa, a través de sus representaciones en las construcciones mentales que se presenten en la adquisición y el desarrollo de su conocimiento. Estas representaciones se analizarán por medio de las invariantes operatorias en el conocimiento de esta noción matemática en el contexto referido.

Objetivo

El estudio y análisis de las representaciones mentales del estudiante, con el propósito de identificar claramente y como sea posible las tareas cognoscitivas que el estudiante emprende cuando construye el conocimiento y también las tareas que el estudiante enfrenta en los diferentes niveles del desarrollo del conocimiento, vistas a través de sus acciones en

las relaciones que establece por medio de su lenguaje y esquematizaciones en la construcción o adquisición de nuevos invariantes operatorios sobre la noción serie de Fourier, al incidir este concepto matemático en el contexto de la transferencia de masa.
El comportamiento se organiza en esquemas como una totalidad dinámica y funcional, primeramente como algo que funciona como una unidad y en segundo lugar como una organización invariable de la conducta por situaciones dadas, que se pueden usar repetidamente en situaciones similares.

Marco teórico

La investigación es sustentada en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, (Vergnaud, 1994). La característica importante de esta teoría es la consideración de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje bajo el enfoque del campo conceptual visto a través de la formulación de esquemas de las representaciones en la construcción del conocimiento.
La teoría de los campos conceptuales es una teoría basada en el constructivismo que es cognoscitivista. Busca proporcionar un marco teórico coherente y algunos principios básicos para el estudio del desarrollo y aprendizaje de la matemática, modelizando de una manera homomorfa el funcionamiento cognitivo del estudiante en el aprendizaje de una noción matemática.
Vergnaud, (Vergnaud, 1990) define al campo conceptual como grandes conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere de varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unas con otras. Los conceptos se dotan de significado a partir de una variedad de situaciones. Cada situación no puede ser analizada usualmente con la ayuda de un sólo concepto sino que precisa de varios de ellos. (Verganud, 1990)
Al conjunto de representaciones en el desarrollo del conocimiento se le puede llamar funcionamiento cognitivo, en tanto que se reconocen los efectos mutuos entre lo interno y externo de la mente
Para el análisis de la adquisición de conocimiento en el estudiante acerca de la serie de Fourier en el contexto de los fenómenos de transferencia, el concepto en el desarrollo del conocimiento es dado a través de la interacción de varios
aspectos dados por las diferentes
representaciones. De esta manera, en el propósito del entendimiento de la construcción del conocimiento, el campo conceptual sobre la serie de Fourier en el contexto de los fenómenos de transferencia nos permite estudiar de manera integrada el desarrollo simultáneo y coordinado de los diferentes conceptos necesarios para la comprensión de un concepto organizado de problemas de transferencia, los procedimientos que permiten tratar a estos problemas y los sistemas simbólicos mediante los cuales pueden ser representados dichos problemas.
Es así como las representaciones del estudiante sobre la noción de la serie de Fourier en contexto ayudará a ilustrar el proceso de adquisición del conocimiento, cuyo propósito es identificar claramente y como sea posible las tareas cognoscitivas que el estudiante emprende cuando construye el conocimiento y también las tareas que el estudiante enfrenta en los diferentes niveles del desarrollo del conocimiento, vistas a través de sus acciones en las relaciones que establece por medio de su lenguaje y esquematizaciones en la construcción o adquisición de nuevos invariantes operatorios sobre la noción serie de Fourier en el contexto del fenómeno de transferencia de masa.

Las construcciones para el conocimiento matemático de acuerdo a Vergnaud son las siguientes:

Las Acciones

El estudiante acciona mediante una reacción a estímulos sobre el objeto matemático (la transformación se
considera como una acción sobre el objeto matemático, estableciendo relaciones entre otros objetos.

Las Representaciones

El estudiante transforma una acción sobre el objeto matemático, estableciendo control sobre el mismo por medio de las relaciones y clasificaciones en su realidad

Los Esquemas

Es el conjunto de representaciones sobre le objeto matemático en estrecha relación como una totalidad dinámica y funcional de realidad del sujeto

Los Conceptos

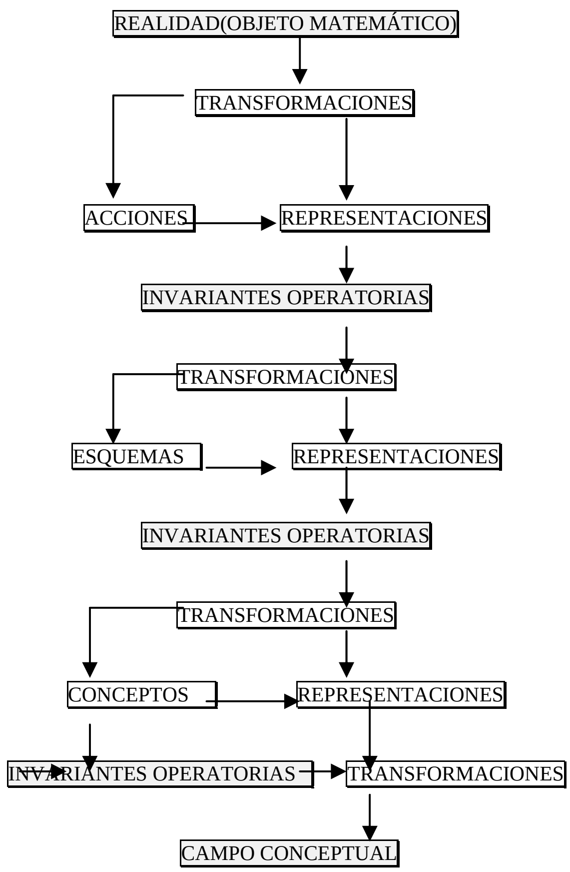
Es la relación entre las representaciones y las representaciones y la realidad

El Campo Conceptual

Interacción de diferentes conceptos y esquemas que se relacionan de forma coherente sobre el objeto matemático

Ahora bien en cada una de las etapas las transformaciones como acciones sobre el objeto matemático, dan a las representaciones el carácter de invariación operatoria en el conocimiento.

CONSTRUCCIONES MENTALES



Metodología

La metodología se divide en cuatro etapas.

Etapa 1. En la primera etapa se diseñan situaciones de enseñanza que conllevan aspectos que dirigen a que el estudiante establezca la contextualización de la serie de Fourier en la transferencia de masa, dividiendo estas situaciones en dos tipos: S_1 Situación referida a la transferencia de masa en estado estacionario y S_2 situación referida a la transferencia de masa en estado de variación.

Etapa 2. En la segunda etapa se realiza un análisis comparativo entre el conocimiento del estudiante antes de la contextualización de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa y después de esta, la cual es establecida por el estudiante con el apoyo de las situaciones de enseñanza.

Etapa 3. En la tercera etapa, la tarea radica en el intento de entender el proceso cognitivo del estudiante en el desarrollo de su conocimiento, se analizan los datos obtenidos a través de las representaciones del estudiante, cuyo análisis se realiza sobre la base del planteamiento de Vergnaud en su teoría de los campos conceptuales al identificar y establecer las invariantes operatorias que pertinentes y que se presentan en la adquisición y desarrollo del conocimiento.

Etapa 4. En la cuarta etapa se establecen los resultados en la investigación de acuerdo las invariantes operatorias en esta noción matemática en contexto.

Desarrollo

El diseño de las secuencias S_1 y S_2 se realiza con el propósito de guiar al estudiante a establecer vinculación entre la serie de Fourier y el fenómeno de la transferencia de masa. La vinculación se pretende sobre la base de un experimento real donde se lleva a acabo la transferencia de masa, esto se realiza en el laboratorio de ingeniería química del Instituto Tecnológico de Toluca. La experimentación es con grupo de 10 estudiantes que cursan matemáticas IV y, cuyo plan de estudios incluye la enseñanza de la serie de Fourier, esto es, en cualquier especialidad de ingeniería.

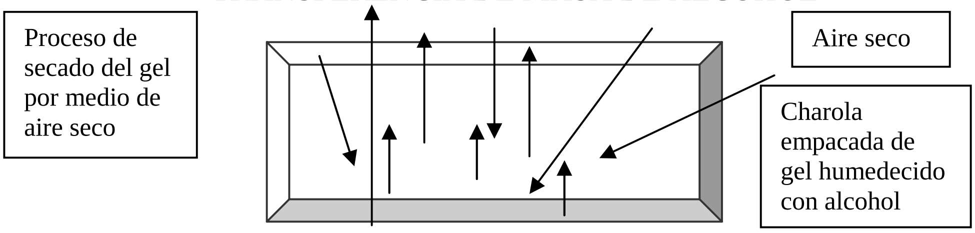
Las preguntas incluidas en las situaciones de enseñanza se diseñan de acuerdo a la vinculación de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa. Se retoman algunas preguntas que ya han sido abordadas antes de la contextualización para establecer los puntos de comparación.

El problema de transferencia de masa para las dos situaciones, se describe en base al siguiente experimento: Se desea secar un gel coloidal humedecido con alcohol, el material se empaca en una charola con espesor y longitud considerable. La cara superior se expone a una corriente de aire y el alcohol se transfiere a través del gel. Las moléculas de alcohol se transfieren a través de las moléculas del gel. Con el aire, el alcohol se transfiere a través del gel por transporte molecular, la transferencia de masa de alcohol es constante a través del gel. La concentración inicial en el gel es uniforme y el fenómeno de transporte de moléculas de alcohol es considerado por conducción.

También es necesario mencionar que durante el secado, se desea tener una cierta concentración del gel para que contenga ciertas propiedades óptimas para su uso comercial, pero industrialmente no se cuenta con un medidor de concentración.

El experimento lo esquematizamos por medio de la siguiente figura.

EXPERIMENTO PROPUESTO
TRANSFERENCIA DE MASA DE ALCOHOL



Resultados generales

SITUACIÓN No. 1	**SITUACIÓN No. 2**
1. El estudiante establece a través del fenómeno de transferencia de masa la concentración del gel y muestra una relación funcional entre la concentración del gel y el tiempo de secado en la charola 2. El estudiante traza una curva que representa la concentración del gel en función del tiempo de secado de acuerdo a la relación que establece en 1) 3. Establece que la naturaleza de la gráfica es de tipo exponencial 4. Establece una relación entre la concentración, el espacio y el tiempo a través de C(x, t). 5. Intenta construir un algoritmo que lo lleva al cálculo de la concentración 6. El estudiante establece que la concentración del gel a través del tiempo es constante cuando se termina el tiempo de secado	1. El estudiante establece relaciones a través de la ecuación dada con el fenómeno de la transferencia de masa 2. Plantea el problema de transferencia de masa a través de la concentración del gel con ciertas condiciones de frontera 3. Establece relaciones de nociones matemáticas y sus clasificaciones en lo que se refiere a la concentración del gel para un tiempo t>0 4. Realiza el cálculo de la concentración del gel estableciendo relaciones de nociones matemáticas entre los puntos anteriores, 5. Específicamente establece la relación entre la serie de Fourier y el fenómeno 6. Establece la gráfica del comportamiento del secado del gel en una sola dimensión a través de la variable tiempo 7. Establece nociones de relación de la serie de Fourier en el contexto del fenómeno proporcionando un significado del fenómeno a través de la misma

De esta manera hemos obtenido que a través de las representaciones del estudiante sobre la noción serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa:

- Las representaciones del estudiante en la vinculación de la serie de Fourier con el fenómeno, son múltiples y variadas de formas y niveles diferentes, a través de diferentes relaciones. El estudiante pasa por algunos niveles de conocimiento llegando al nivel de representación de las acciones sobre el objeto matemático serie de Fourier
- Las representaciones se pueden considerar homomórfico entre la realidad y entre las diferentes formas de representación.
- Se han encontrado algunas invariantes en la construcción del conocimiento, asegurando de alguna forma una representación operatoria y eficaz ya que se establece la realidad y

permite un cálculo relacional. Mencionamos algunas invariantes que operan a nivel mental del estudiante:

1. La vinculación que el estudiante representa entre la serie de Fourier y el proceso de transferencia de masa, al intentar establecer la concentración del gel en la situación SV
2. La percepción del fenómeno como un fenómeno de variación con respecto al tiempo
3. La percepción del fenómeno de transferencia de masa como un fenómeno periódico, representable por medio de la serie de Fourier

- Las relaciones se dan entre objetos, propiedades y representaciones.
- Así el conocimiento del estudiante se da a través de sus representaciones que consisten en el desglose de los diferentes aspectos que muestran aspectos de su realidad invariantes como objetos matemáticos lógicos.

Conclusiones

Por medio de la contextualización de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa, el estudiante presenta a través de sus representaciones nociones sistematizadas objetivas aplicadas a la realidad del problema.

El análisis y vinculación de diferentes conceptos sobre la serie de Fourier y su significación en el contexto del proceso de transferencia de masa, proporciona al estudiante el apoyo para construir nociones a través de sus representaciones en la conceptualización y comprensión de la serie de Fourier en el contexto del fenómeno bajo la perspectiva de una matemática basada en una variedad de conceptos significativos para el estudiante en su formación en el nivel superior.

Las representaciones del estudiante reflejan el conocimiento sobre la noción como objeto matemático, de tal forma que suponemos que en una posterior investigación, estos resultados nos conducirán a la conceptualización del estudiante sobre la noción serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa, calor y movimiento.

La hipótesis formulada en estos resultados fragua en que la contextualización de la serie de Fourier en los fenómenos de transferencia es un apoyo en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, cuyo propósito radica en que el estudiante conceptualice la noción matemática en estudio al formular su campo conceptual de una noción matemática en un cierto contexto de la ingeniería.

Referencias bibliográficas

Muro, C. (2000). La significación de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa. Tesis de Maestría en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de las Matemáticas. México.

Muro, C. (2001). La contextualización de la serie de Fourier en la ingeniería. Ponencia. V Reunión de Calidad en la Educación. La Paz baja California Sur. México

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In P. Nesher and J. Kilpatrick. (Ed.). Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. pp.(14-30). Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1994). El Papel del Enseñante a la Luz de los Conceptos de esquema y del Campo Conceptual”(Le role de I´enseignant á la lumiére des concepts de schéme et de champ conceptuel). París.

Puntos críticos condicionados

Salvador Gigena*, **; Moisés Binia*; Daniel Abud*
* Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina
** Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario. Argentina
sgigena@fceia.unr.edu.ar mbinia@gtwing.efn.uncor.edu dabud@gtwing.efn.uncor.edu

Resumen
¿Cuándo uno puede decir que un tema está totalmente estudiado? Acaso podemos afirmar que, una vez que hemos determinado los puntos críticos, y fácilmente podemos hallar cuáles de ellos serán máximos, mínimos o puntos de ensilladura, para funciones sujetas a restricciones. Esta propuesta metodológica la hemos llevado a cabo con total generalidad matemática porque, como se verá, las demostraciones son válidas para cualquier número de variables independientes y para cualquier número de funciones de restricción (siempre menor al número de variables independientes). Estos problemas son muy comunes en Ingeniería y en diversas ramas de ciencia aplicada donde los vínculos cobran una especial importancia por el grado de incertidumbre que le agregan al problema. Suele ocurrir que a un problema de máximo o mínimo se agregan condiciones de manera que las variables no resultan todas independientes. Son los llamados problemas de extremos condicionados, también denominados *ligados, restringidos* o *vinculados*.

Establecimiento del Marco Teórico

Este artículo presenta una propuesta alternativa metodológico-didáctica para clasificar los puntos críticos condicionados y se basa en el método propuesto en el libro: *"Análisis Matemático II - Teoría, Práctica y Aplicaciones"* (Gigena et al., 1998). Además, exponemos los resultados aún parciales de una comparación efectuada en clase con alumnos del segundo curso de Análisis Matemático de las carreras de Ingeniería tradicionales, para poner de manifiesto la facilidad de cálculo con respecto a los clásicos métodos para el análisis de puntos críticos y la posterior búsqueda de extremos para funciones de varias variables sujetas a restricciones, descriptas previamente en (Carathéodory, 1965); (Fleming, 1976); (Marsden & Tromba, 1976) y (Spring, 1985). En todas las referencias citadas el cálculo y, posteriormente, el uso de los multiplicadores de Lagrange es parte esencial del método para determinar la naturaleza de los puntos críticos, en cuanto a ser, o no, extremales.

Metodología

La práctica docente universitaria desde un enfoque ecológico (desarrollado en ambientes naturales) es un campo atravesado por múltiples dimensiones: ideológicas, sociopolíticos, personales, curriculares, etc.
Hoy por hoy, en Ingeniería, es más común la extensión de funciones aplicadas a muchas variables por vía de la Economía que por vía de la Física. El análisis, en el aula, de nuestra propuesta se comenzó en 1998 con un curso de 90 alumnos, luego se continuó en 1999, con otro curso de 85 alumnos. Ya en ese año contábamos con el material de estudio necesario como texto de estudio para los alumnos, donde por primera vez se planteó el método propuesto. Se siguió investigando y ya los alumnos, sintiéndose incentivados con el uso del método, generaron corridas de programas de computación (se utilizó el Matlab). Los alumnos midieron los tiempos de ingreso (*input*) de los datos y de salida (*output*) de las soluciones, arrojando resultados muy satisfactorios en materia de tiempos de ejecución. Dichos indicadores no han sido sistematizados aún, ya que seguimos ampliando la perspectiva de análisis en diferentes cursos, con nuevos alumnos.

El desempeño interactuado en estas instancias convierte a la socialización del inédito método en uno de los recursos más fuertes de profesionalización docente, con respecto a la transposición didáctica. Este proceso tiene lugar dentro de un ámbito de significaciones peculiares que algunos dieron en llamar *cultura ingenieril*. En carreras de Ingeniería, durante el ciclo básico esto se incrementa, ya que abarcamos varias disciplinas diferentes.

Exposición y Discusión de Resultados

En el caso general, la función a extremar está dada por una expresión de la forma:

$$y = f(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m})$$

con m condiciones:

$$G_i(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = 0 \text{ , (donde } i = 1, 2, ..., m\text{).}$$

Poniendo de manifiesto los dominios, la función a extremar será: : f: $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, con $y = f(x)$; y las ecuaciones de condición serán: G: $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, con $G(x) = 0$. Es decir, se restringe f al conjunto $S = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} / G(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

En los casos en que no es posible, o no es conveniente, despejar a partir de la condición algunas de las variables en términos de las otras, es frecuente utilizar el procedimiento conocido como *Método de los Multiplicadores de Lagrange*. F. Zizza [7] ha propuesto un método alternativo para determinar los puntos críticos obviando el uso de estos multiplicadores, usando, en vez del método anteriormente citado, cálculo exterior de formas diferenciales, y logrando que tengamos menos ecuaciones con menos incógnitas para resolver. Sinteticemos a continuación las principales ideas de su construcción:

"Imaginemos un sistema de coordenadas adaptado a nuestro problema $y_1, y_2, ..., y_{n+m}$ de manera tal que las primeras **m** coordenadas están definidas por las funciones de restricción, mientras que las **n** coordenadas restantes son elegidas entre las funciones $x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ en forma tal que lo que resulte sea un *sistema de coordenadas*. La tradicional hipótesis que los vectores gradientes de las restricciones son linealmente independientes en los puntos críticos, junto con el teorema de la función inversa, garantizan que esta construcción de nuevas coordenadas es (localmente) siempre posible. Llamaremos a las primeras **m** *coordenadas variables restringidas* o *funciones de restricción* y a las restantes **n**, *variables libres*. En la práctica, las variables libres son usualmente elegidas entre las variables originales que son: $x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ ".

Siguiendo esta línea de pensamiento él propone dos métodos alternativos para determinar los puntos críticos condicionados. Sin embargo, en su trabajo no se especifica ningún método en particular para estudiar la naturaleza (máximo, mínimo, punto de ensilladura) de dichos puntos críticos. (Zizza, 1998).

Volviendo a nuestra propuesta, descripta en (Gigena et al., 1998), vamos exponer a continuación un método que permite analizar la naturaleza de los puntos críticos. Este método también representa una alternativa a otros que se encuentran en la literatura matemática conocida.

Sea $X_0 = (a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+m})$ un punto crítico y supongamos, por comodidad y sin pérdida de generalidad, que las **m** columnas linealmente independientes de la matriz Jacobiana de G, $G'(X_0)$, son las **m** últimas (si así no fuera reordenamos las variables):

$$\frac{\partial G}{\partial x_{n+1}}, \frac{\partial G}{\partial x_{n+2}}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_{n+m}}.$$

Llamando $U_0 = (a_1,....,a_n)$ y $V_0 = (a_{n+1},....,a_{n+m})$, el Teorema de la Función Implícita asegura que existe una función diferenciable, h=(h_1,...,h_m): $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida sobre un entorno abierto $N \subset \mathbb{R}^n$, de U_0 tal que

$$h(U_0) = V_0$$

y $H(u) = (u, h(u)) \in S, \quad \forall u \in N.$

De acuerdo a esto, H parametriza a (la variedad diferenciable) S en un entorno de X_0 y, por lo tanto, las columnas del Jacobiano de H en U_0

$$H'(U_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{V_0},$$

resultan vectores generadores del espacio tangente a S en X_0, al cual llamaremos $T(X_0)$. Como estos vectores son linealmente independientes, la dimensión de $T(X_0)$ es **n**. Ahora bien, como f restringida a S tiene un punto extremo en X_0 y H parametriza a S en un entorno de X_0, $f \circ H$ tiene un extremo relativo en U_0, luego

$$\left(f \circ H \right)' (U_0) = f'(X_0) \cdot H'(U_0) = 0 .$$

Además, como $G \circ H$ es constantemente cero en S, $\left(G \circ H \right)' (U_0) = G'(X_0) \cdot H'(U_0) = 0$. Entonces las filas de las matrices

$$f'(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} \right)_{X_0} \quad \text{y} \quad G'(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \frac{\partial G_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+m}} \end{bmatrix}_{X_0}$$

son vectores pertenecientes a $T(X_0)^{\perp}$, *espacio ortogonal* al espacio tangente $T(X_0)$. Como la dimensión de $T(X_0)^{\perp}$ es **(n + m) - n = m**, y tenemos **m + 1** vectores, estos deben ser linealmente dependientes, y por lo tanto, existen escalares β_0, β_1, β_2,..., β_m, no todos nulos, tales que

$$\begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \frac{\partial G_m}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}_{X_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $G'(X_0)$ tiene rango m, $\beta_0 \neq 0$. Luego, multiplicando por β_0^{-1}, y llamando $\lambda_i = {}^{\beta_i}\!/\!{}_{\beta_0}$, $1 \leq i \leq m$, obtenemos $\left(f + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots + \lambda_m G_m\right)'(X_0) = (0,0,\ldots,0)$ y, por lo tanto, $f + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots + \lambda_m G_m$ tiene un punto crítico en X_0.

Para determinar si los puntos encontrados son, efectivamente, máximos o mínimos condicionados, debemos analizar la función $f \circ H\colon N \to \mathbb{R}$ en el punto U_0, y estudiar qué tipo de punto crítico tiene en el conjunto abierto $N \subset \mathbb{R}^n$, siguiendo los pasos requeridos en el estudio de extremos libres mediante el Hessiano de la función $f \circ H$.

Pero aquí surge un problema, muchas veces es muy dificultoso, y a veces imposible, obtener la función $H = (Id, h)$ en forma explícita (Carathéodory, 1965). En estos casos, se debe recurrir a derivar en forma implícita la función h a partir de la expresión $G \circ H = G \circ (Id, h) = 0$.

La matriz Hessiana de $f \circ H$,

$$\mathrm{H}_{f \circ H} = \left\{ \frac{\partial^2 (f \circ H)}{\partial u_i \partial u_j} \right\}, \quad \text{que es una matriz } \mathbf{n} \times \mathbf{n}$$

puede ser calculada de la siguiente forma: llamamos $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a las **n** $1^{\underline{\text{ras}}}$ coordenadas del argumento de G y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ a las **m** últimas.

Entonces la función nos queda definida: $h(u) = (v_1(u), v_2(u), \ldots, v_m(u))$.

Denotamos con G'_v a la matriz cuya fila *i*-ésima está formada por las derivadas parciales de G_i respecto a las variables $v_1, v_2, \ldots, v_m$, esto es:

$$G'_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial v_1} & \frac{\partial G_1}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial v_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial v_1} & \frac{\partial G_m}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial v_m} \end{bmatrix}$$

Como $G(u, h(u)) = 0, \ \forall u \in N \subset \mathbb{R}^n$, resulta que todas las derivadas de esta función se anulan, entonces obtenemos para la primera derivada

$$\frac{\partial h}{\partial u_i}(u) = -\left[G_v'(u, h(u))\right]^{-1} \frac{\partial G}{\partial u_i}(u, h(u)) \qquad \textbf{(1)}.$$

Similarmente, obtenemos para las segundas derivadas la expresión

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}(u) = -[G'_v]^{-1} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} + [G'_v]^{-1} \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial u_i}\right)'_v \cdot [G'_v]^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_i} + [G'_v]^{-1} \cdot \frac{\partial [G'_v]}{\partial u_j} \cdot [G'_v]^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_i} -$$

$$-[G'_v]^{-1} \cdot \left\{ \left[[G'_v]^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_i} \right]^T \cdot \left[\left(G'_v\right)'_v \right] \cdot [G'_v]^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_j} \right\} \qquad (\mathbf{2})$$

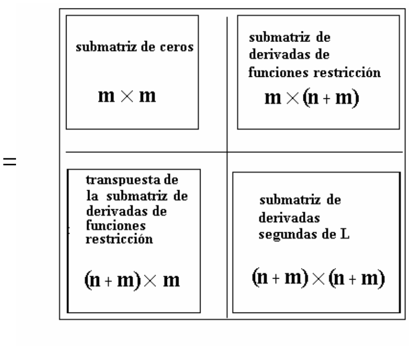
Sea $J = f \circ H$. Queremos calcular entonces $\frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_j}(U_0) = \frac{\partial^2 f\ (u, h(u))}{\partial u_i \partial u_j}(U_0, h(U_0))$

Calculamos primero: $\frac{\partial J}{\partial u_i}(u) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(u, h(u)) + f_v'(u, h(u)) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u)$.

Derivando esta expresión matricialmente respecto a u_j, valuando en U_0 y reemplazando por las expresiones obtenidas en **(1)** y **(2)** para las derivadas parciales de *h*, resulta:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_i \partial u_j}(u) &= \frac{\partial^2 f(u,h(u))}{\partial u_i \partial u_j}(u,h(u)) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} - \left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)_v^{'} \cdot [G_v']^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_j} + \left\{ \frac{\partial f_v'}{\partial u_j} + \left[-[G_v']^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_j} \right]^T \cdot (f_v')_v' \right\} \cdot \left\{ -[G_v']^{-1} \frac{\partial G}{\partial u_i} \right\} + \\
&\quad + f_v' \cdot [G_v']^{-1} \cdot \left(\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} + \left(\dfrac{\partial G}{\partial u_i}\right)_v^{'} \cdot [G_v']^{-1} \cdot \dfrac{\partial G}{\partial u_i} + \dfrac{\partial [G_v']}{\partial u_j} \cdot [G_v']^{-1} \cdot \dfrac{\partial G}{\partial u_i} - \\ \qquad - \left\{ \left[[G_v']^{-1} \cdot \dfrac{\partial G}{\partial u_i} \right]^T \cdot \left[\left(G_v^{'}\right)_v^{'} \right] \cdot [G_v']^{-1} \cdot \dfrac{\partial G}{\partial u_j} \right\} \end{array} \right),
\end{aligned}
$$

Entonces, vemos que la derivada: $\frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_i \partial u_j}(U_0)$, lugar $(i\ ,j)$ del Hessiano de $J = f \circ H$ siempre puede ser calculada en términos de los datos con que se cuenta, que son las derivadas de las funciones f y G valuadas en U_0 y en $(U_0, h(U_0)) = (U_0, V_0)$ (Gigena et al., 1998).

$\mathrm{H}L(u) =$ 

Ahora, recordando los clásicos métodos ya desarrollados en (Carathéodory, 1965); (Fleming, 1976); (Marsden & Tromba, 1976) y (Spring, 1985); Spring, D. (Spring, 1985), según nuestra nomenclatura, analiza los puntos críticos a través de la función:

$$L(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = f(x_1, \ldots, x_{n+m}) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha G_\alpha (x_1, \ldots, x_{n+m})$$

que es una función de **n+2m** variables. En consecuencia, su Hessiano será una matriz (**n+2m**) x (**n+2m**):
donde tenemos **m** condiciones o funciones de restricción; **n** variables libres. (para una mayor información ver (Spring, 1985), también se puede ver un caso particular en el libro de Marsden y Tromba, donde **m** = 1, ver (Marsden & Tromba, 1976)).
Por otra parte, Fleming (Fleming, 1976), en la notación anterior de Spring, realiza su estudio por medio de: $F_{ij} = L_{ij} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}$
que es la submatriz (**n+m**) x (**n+m**) de derivadas segundas de L que podemos ver en el ángulo inferior derecho del Hessiano “grande”. Su resultado es el siguiente:
Sea

$$Q(Y,t) = \sum_{i,j=1}^{n+m} F_{ij}(Y) t^i t^j$$

a) si $f\,|_S$ tiene un máximo relativo en X_0, entonces $Q(Y_o,t) \geq 0 \quad \forall t \in T(X_o)$ espacio tangente a S en X_0
b) si $Q(Y_o,t) > 0 \ \ \forall t \in T(X_o) \ \ t \neq 0$, entonces $f\,|_S$ tiene un máximo relativo estricto en X_0

Finalmente, concluimos que nuestro método para analizar puntos críticos maneja una matriz más reducida y más fácil de operar. En efecto, y según lo expuesto anteriormente, tendremos para la matriz Hessiana a ser considerada, tres alternativas dimensionales:
1) Según nuestro método: **n** x **n**
2) Método de Spring y otros (caso particular Marsden - Tromba): (**n+2m**) x (**n+2m**)

3) Método de Fleming: (**n+m**) x (**n+m**)

Claridad e interés para la Comunidad

Aspiramos a encontrar un método que realmente sea significativo e incentivador para nuestros alumnos; como así también para los docentes y alumnos de otras instituciones académicas. Este tipo de aprendizaje se caracteriza por que la nueva información no se relaciona de manera subordinada, ni supraordinada con la estructura cognoscitiva previa, sino que se relaciona de manera general con aspectos relevantes de la estructura cognoscitiva. Es como si la nueva información fuera, potencialmente significativa, con toda la estructura cognoscitiva.

Considerando la disponibilidad de contenidos relevantes apenas en forma general, en este tipo de aprendizaje, las proposiciones son, probablemente las menos relacionables y menos capaces de "conectarse" en los conocimientos existentes, y por lo tanto más dificultosa para su aprendizaje y retención que las proposiciones subordinadas y supraordinadas; este hecho es una consecuencia directa del papel crucial que juega la disponibilidad de sensores relevantes y específicos para el aprendizaje significativo.

Finalmente, el material nuevo, en relación con los conocimientos previos no es más inclusivo ni más específico, sino que se puede considerar que tiene algunos atributos de criterio en común con ellos, y pese a ser aprendidos con mayor dificultad que en los casos anteriores se puede afirmar que: "*tienen la misma estabilidad en la estructura cognoscitiva*", porque fueron elaboradas y diferenciadas en función de aprendizajes derivativos y correlativos. Son ejemplos de estos aprendizajes las relaciones entre masa y energía, entre calor y trabajo. Estos muestran que implican análisis, diferenciación, y en escasas ocasiones generalización, síntesis. Creemos fervientemente que, dotando al docente de herramientas metodológico-didácticos, es posible garantizar que los alumnos aprendan más y mejor. Con esto, se pretende enfatizar en la necesidad de un seguimiento evaluativo (real) de, entre otras cosas, la capacitación docente, es decir, en su relación directa con el mejoramiento de la propuesta de enseñanza y su impronta en el aprendizaje de la matemática por parte de jóvenes y adolescentes.

Referencias Bibliográficas

Carathéodory, C. (1965) *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Holden-Day, (pp. 175-197).

Fleming, W.H. (1976) *Funciones de varias variables*, CECSA, 3ª i., (pp. 158-163).

Gigena, S., et al (1998) *Análisis Matemático II–Teoría, Práctica y Aplicaciones,* Galeón.

Marsden, J. & Tromba, A. J. (1976) *Vector Calculus*, 2nd edition, Freeman.

Murata, Y. (1977) *Mathematics for Stability and Optimization of Economics Systems,* Acad Press.

Spring, D. (1985) *On the Second Derivative Test for Constrained Local Extrema,* Am. Math Monthly, (pp. 631-643).

Zizza, F. (1998) *Differential Forms for Constrained Max-Min Problems: Eliminating Lagrange Multipliers*, The College Math Journal, Vol. 29 - Nº 5, (pp. 387-396).

Apostol, T. (1960) *Análisis Matemático*. España: Reverté.

Budnick, F. S. (1990). Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales México: Mc Graw Hill.

Relaciones entre F y F’ el papel del registro gráfico...

María Antonieta Aguilar Víquez
Instituto Tecnológico de Pachuca, México
auva5404@prodigy.net.mx

Resumen
A lo largo de nuestra práctica docente nos hemos percatado que los estudiantes de nivel superior no conceptualizan los teoremas, leyes, axiomas o principios de los conocimientos matemáticos, particularmente en situaciones de cálculo, ellos toman una actitud radicalmente pragmática, es decir, aprenden los procedimientos del cálculo en un nivel puramente algorítmico, que es construido sobre imágenes y gráficas escasos (Dreyfus, 1990). Esto les impide realizar abstracciones que posteriormente les permitan resolver problemas cuando se enfrentan a nuevas situaciones. Para tener un acercamiento en la solución a esta problemática, en este trabajo, pretendemos que los estudiantes nos proporcionen información acerca de cómo ellos establecen conexiones entre F y F´, F´ y F, el tipo de construcciones que realizan cuando interactúan en un ambiente gráfico en relación a F´ y F, las nociones que implícita o explícitamente establecen cuando se les coloca ante una situación específica. Las interpretaciones de las respuestas dadas estarán basadas en el marco de las construcciones mentales y en el desarrollo de estas ante las situaciones correspondientes.

Introducción

El interés primordial para la realización de la presente investigación es y ha sido facilitar a los estudiantes la adquisición de los saberes matemáticos y que dichos saberes sean permanentes y aplicables en la solución de problemas y situaciones nuevas a los que ellos se enfrentan.
Es importante señalar que el establecimiento de relaciones entre funciones llevadas a cabo por los estudiantes es posible debido a que la función y su gráfica son los objetos a operar (Cordero, 1998). Cuando en matemáticas los conocimientos son manejados como objetos los que aprenden pueden llevar a cabo una abstracción reflexiva de más alto nivel, de ahí que fundamentalmente nos interese que los estudiantes interactúen en un ambiente gráfico generando procedimientos para observar dichos comportamientos.
En este contexto hemos encontrado en el ámbito escolar un argumento en las gráficas que por su naturaleza le llamamos comportamiento tendencial de las funciones (ctf) el cual tiene un statu quo epistemológico y puede ser tratado como una categoría del conocimiento del cálculo (Cordero, 1998), en él los conceptos matemáticos pueden ser analizados a través de dos aspectos:

a).- El funcional.
b).- El estructural.

El primero abarca ciertas categorías de conceptos tales como simulación, transformación, identificación de patrones y estabilidad.
El aspecto funcional nos obliga a fijar la atención en los progresos y restricciones de las construcciones mentales y por la misma razón es el eje central del comportamiento tendencial de las funciones, que utilizamos como argumento en las construcciones mentales de los entrevistados en grupos denominados de aprendizaje cooperativo (Cordero, F., 1995) y entrevistas clínicas.
El aspecto estructural hace hincapié en como se imparte la enseñanza tradicional enfocándose en la estructura de la matemática. Justamente la diferencia entre ambos

aspectos radica en los procedimientos que se derivan por un lado en las representaciones y por otro en las operaciones formales o algorítmicas.

El constructivismo piagetiano, la Teoría APOE, y el acercamiento socioepistemológico componentes de un marco teórico

Nuestro marco teórico esta constituido por varias aproximaciones teóricas como son; la teoría constructivista de Piaget, la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas) de Dubinsky (Asiala, et al. , 1996), ampliados y profundizados, principalmente con los trabajos de investigación realizados por Cordero y colaboradores cuyo fundamento teórico se basa en una aproximación socioepistemológica que ha sido madurada y profundizada por el grupo de investigación del área de educación superior del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Las ideas más sobresalientes de nuestro marco teórico son:

En cuanto al constructivismo se refiere, nos explica como es la naturaleza de las construcciones mentales (Piaget y García, 1994).

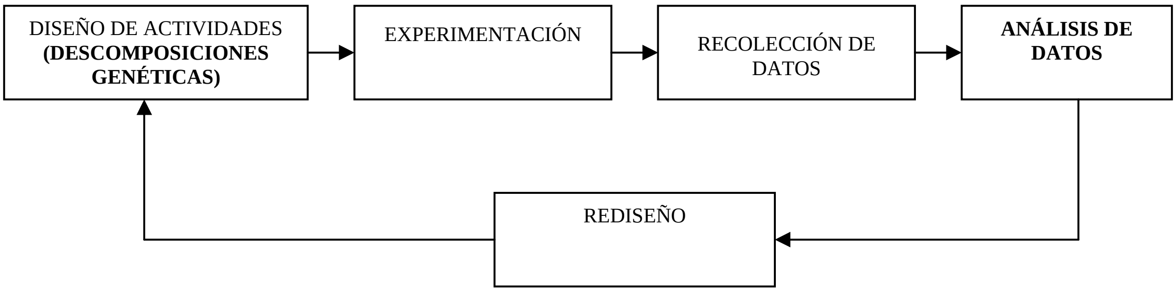
Con respecto a la teoría APOE, incide fundamentalmente, en las descomposiciones genéticas (Dubinsky, 1998), que se realizan implícita o explícitamente en el diseño de situaciones.

En lo que se refiere a la Aproximación socioepistemológica, se inicia a principios de la década de los 90´s. Desarrolla desde el punto de vista de la construcción social del conocimiento, estrategias de investigación de naturaleza epistemológica que no se reduce a la búsqueda de obstáculos epistemológicos ni a su eventual clasificación, sino más bien, se ocupa de la epistemología en otro sentido. La entiende como el estudio de las circunstancias que **permiten construir conocimiento**, por ello incluye entre los aspectos o circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento a los aspectos sociales y culturales, de manera que en esta visión, se pretende develar el origen social del conocimiento, sus diversos usos sociales y su evolución al seno de las instituciones, como la escuela, la academia o los servicios, entre otros (Cantoral, 1998).

Cordero (2001) menciona en el tema de la socioepistemología, que esta aproximación debe significar "el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas" por eso escribe este apartado en donde las categorías basadas en el lenguaje de herramientas contrastan con las basadas en el lenguaje de los objetos matemático. El contraste radica en los diferentes procedimientos que se derivan de estos lenguajes, por un lado plasmados en representaciones y, por el otro, en operaciones formales en las que las representaciones no son el reflejo de una realidad preexistente sino un sistema de recursos para construir significados en el contexto de la interacción, y las operaciones formales se refiere a la constitución de una lógica "formal", es decir, operaciones aplicables a cualquier contenido. En ese sentido, el aspecto importante (en la didáctica de las matemáticas) de las categorías basadas en el lenguaje de las herramientas, no consiste en establecer una definición matemática sino en establecer o identificar todas las relaciones en el marco de referencia del contenido matemático (herramientas y significados) a través de las representaciones y los procedimientos que se derivan de éstas en el contexto de la interacción.

Metodología

La metodología en esta investigación es la establecida por Cordero y colaboradores la cual resumimos en el siguiente diagrama



Se trata propiamente de un método y consiste en el desarrollo de seis etapas:

La primera etapa parte de una experiencia epistemológica, estudiando el contenido matemático correspondiente al tópico del proyecto, ahí se organiza dicho contenido matemático con base a lo que significa entender el concepto y cómo el concepto puede ser construido por el que aprende (Cordero, 1998).

En la segunda etapa, se trabajan ejemplos de diseño e implementación de situaciones, haciendo uso de la tecnología, en la realización de actividades con estudiantes (que en nuestro caso fueron entrevistados en grupos de tres), haciéndose las observaciones a través de dos vías; aprendizaje cooperativo y entrevista clínica.

Etapa tres, en ella se realizan análisis de los datos coleccionados y posteriormente se reconsidera la experiencia que fue punto de partida. Las interpretaciones de las respuestas dadas por los estudiantes ante las situaciones, estarán basadas en el marco de las construcciones mentales; y en el desarrollo de estas ante las situaciones. Aquí se estudian las bases para transformar los datos o hechos en fenómenos didácticos.

Etapa cuatro, consiste en la iteración con el resultado de la etapa tres. Es una revisión de la experiencia epistemológica de la cual se partió en la etapa uno. El resultado provee los fundamentos de la siguiente aplicación de situaciones. Se establece una reformulación de las descomposiciones genéticas y se rediseñan las situaciones o implementaciones en una base *socioepistemológica*.

Etapa cinco, en ella se aplican o implementan los rediseños y se coleccionan los datos. Trabajamos (en la investigación presente) con estudiantes en grupos de tres, ya que en los trabajos de investigación previos a este llegamos a la conclusión de que en forma grupal, los estudiantes, realizan mayor número de construcciones y con mayor rapidez (Aguilar, M y Martínez, M, 1998; Aguilar, 1999).

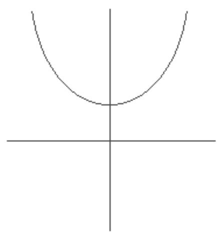
Etapa seis, se podría denominar "etapa del análisis de datos y actualización de las descomposiciones genéticas". En ella se pretende alcanzar un refinamiento del recorte o amplitud del entendimiento del cual se partió. Las interpretaciones continúan dentro del marco de las construcciones mentales.

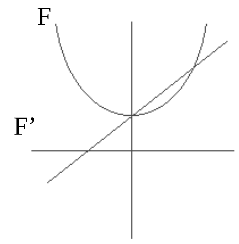
Las seis etapas que constituyen nuestro método las representamos y resumimos en el diagrama arriba descrito de forma por demás simplificada y esquematizada.

Resultados de las construcciones realizadas por los estudiantes

Para ejemplificar analizaremos tres situaciones:

S 1 en ella pedimos a los estudiantes que dada la gráfica de F dibujen la de su derivada





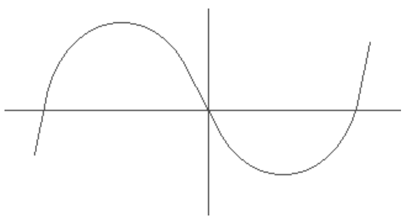
El proceso algorítmico que realizan, para esta situación, puede representarse de la manera siguiente:

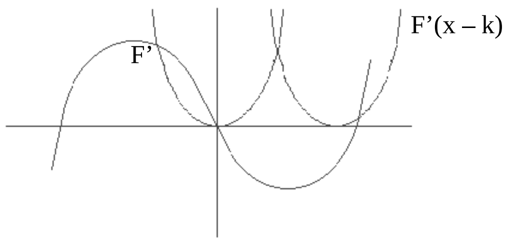
a) F $\longrightarrow$ F’

b) Si F (x) + a ∴ F’ (x) + a

Esto significa; en a), pasar de la primitiva a la derivada y gráficamente los estudiantes verifican que hay un cambio de estructura.
En b) ellos, construyen el principio de linealidad, es decir, cuando a la primitiva le suman una constante a la derivada también se la suman, es la explicación del porque la gráfica de F´ “persigue” a la de F.

S 2 se pide a los estudiantes trazar la gráfica de F´ (x – k) dada la de F





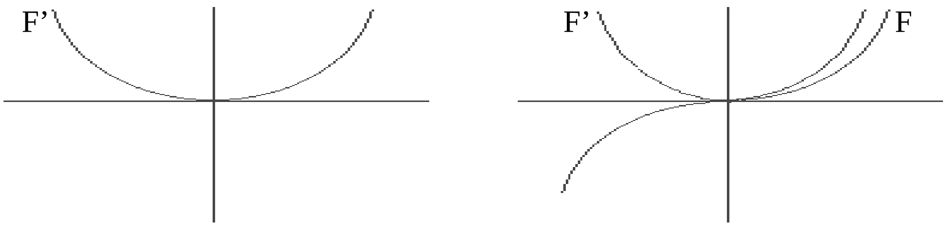
La algoritmia que llevan a efecto los estudiantes la representamos así:

a) F $\longrightarrow$ F´

b) F´ $\longrightarrow$ F´ (x – k)

Para esta situación 2:
En a) existe un cambio de estructura (transformación) que va de F a F’.
En b) el cambio de F’ a F’ (x – k) es un cambio de posición. Los comentarios de los estudiantes, aquí fueron; que cuando k, toma un número infinito de valores, F´(x- k) se proyecta de tal manera, que vista en tercera dimensión, desde el eje “X”, formaría un “túnel de proyección”.

S3 a los estudiantes se les pide que dada la gráfica de F´ tracen la de la función primitiva



Para la situación 3 la representación algorítmica sería:

a) $F \longrightarrow F'$
b) $F' \longrightarrow F$
c) $F'(x) \sim a$

En a) Los estudiantes verifican, gráficamente, un cambio de estructura.
En b) existe una nueva transformación, o cambio de estructura.
El significado de c), se refiere, a la asociación que hacen de la derivada con la constante que multiplica a la función primitiva.
Ellos, establecen un enlace entre los contextos algebraico y grafico de F y F´ ya que realizan el proceso de "calcular la antiderivada" para después trazar la grafica de la función primitiva.

Conclusiones

Los estudiantes pueden llegar a un equilibrio entre lo conceptual y algorítmico haciendo uso de sus construcciones gráficas y del ctf (nuevamente en forma implícita) lo cual les permitió aprender a:

- Identificar el efecto de los coeficientes tanto en F como en F'.
- Reconocer patrones de comportamientos gráficos y analíticos.
- Buscar tendencias en los comportamientos a través del ctf.
- Establecer relaciones entre funciones tanto de F como de F'.

Referencias bibliográficas

Aguilar; M.A. (1999). *Relaciones entre la derivada y su primitiva; el papel del registro gráfico en algunas de las construcciones de los estudiantes.* Tesis de Maestría, Dirección de estudios de posgrado, Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autonóma del Estado de Hidalgo. México.

Aguilar; M.A. y Martínez M.D. (1998) "Relaciones entre la derivada y su primitiva a la luz del comportamiento tendencial de las funciones; un estudio preliminar". Trabajo de investigación presentado en el 2º. Seminario Nacional de Investigación de Didáctica de las Matemáticas. Monterrey, N.L. México.

Arellano; A., Cordero; F. Y Oktac; A. (1997) "Entendimiento de los comportamientos asitóticos de una función". Publicaciones Latinoamericanas Relme, Cinvestav. IPN, México.

Asiala, M.; Brown, A.; Devries, D.; Dubinsky, E.; Matheeews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and currículum development in undergraduate mathematics education. CBMS *Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education* 2(6), 1-32.

Cantoral, R. (1998). Pensamiento Matemático Avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis, CINVESTAV-IPN, México.

Cordero, O. F.; Solís, M. (1997). "Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo". Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Cordero, O.F. (1998), "El comportamiento tendencial de las funciones como una categoría del conocimiento del Cálculo. Rumec, México.

Cordero, O.F., et al; "El comportamiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y análisis: El caso del comportamiento tendencial de las funciones:. Proyecto de investigación financiado por Conacyt.

Cordero; F., Hernández; D. y Oktac; A. (1997) "Acerca del entendimiento de las relaciones entre función y su derivada". Publicaciones Latinoamericanas, Relme, México.

Cordero; F. (1995) "El pensamiento de la matemática avanzada en el aprendizaje cooperativo. Algunas argumentaciones del cálculo". Publicaciones Centroamericanas. México.

Cordero, F . (1998) "Notas sobre algunos conceptos de la Matemática y Cognición a la luz de una experiencia de investigación", Cinvestav – IPN, México.

Cordero, F. (2001), "La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol 4, núm. 2, pp 103-128.

Dreyfus, T. (1990) Advanced Mathematical Thinking In P. Nesher and J. Kilpatrick (Ed.) Mathematics and cognition: A researchs synthesis by the International Group for the Psycology of Matemathics Education (pp. 113-134). Cambridge University Press.

Dubinsky; E. (1998)"Una década de investigación en educación matemática. Sobre algunos temas de matemáticas avanzadas". Resumen del curso impartido en el Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Monterrey, N.L., México.

Guerrero, R . (1998) "Propuesta Didáctica para apoyar la transferencia del registro gráfico al algebraico de funciones elementales", Tesis de Maestría en Ciencias, Cinvestav – IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Muñoz, G . (1996) "Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral", Tesis de Maestría en Ciencias, Cinvestav – IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Piaget y García, (1994) "Psicogenésis e Historia de la Ciencia", ed. Siglo XXI, 6ª ed., México.

Representación y comprensión del concepto de función

Nora Gatica, Liliana Tauber
Universidad Nacional de San Luis. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
ngi1999@yahoo.com liliana@cica.es

Resumen

Este trabajo presenta la fase inicial de una investigación que comenzamos a realizar con alumnos de la asignatura Análisis Matemático I, en las carreras de Ingeniería Industrial e Ingeniería Química de la Universidad Nacional de San Luis durante el transcurso del presente curso lectivo.

En esta fase se realiza un análisis teórico sobre los principales elementos que se consideran en los libros de texto, los cuales nos han servido, en una segunda etapa, como referencia al organizar una secuencia didáctica sobre funciones. Dicho análisis se realiza tomando como referentes dos marcos teóricos: Los registros de representación semiótica (Duval, 1993, 1998) y la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 1999; Godino y Batanero, 1998).

Introducción

El concepto de función, siendo uno de los conceptos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora, y siendo considerado como uno de los puntos centrales en los currículos escolares de la República Argentina, es sin embargo, un concepto complejo debido a que contiene una multiplicidad de registros y genera diferentes niveles de abstracción y de significados. El aprendizaje de este concepto es uno de los objetivos fundamentales en la enseñanza del Cálculo y su importancia se debe a que es imprescindible para la comprensión de conceptos relacionados ya que sirve de soporte para la enseñanza de diversos contenidos, tales como continuidad, límite o derivada.

Son numerosas las investigaciones en el campo de la Didáctica de la Matemática que dan cuenta de esta problemática (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Ruiz, 1998, García y Llinares, 1995), por lo que consideramos que merece una atención especial, ya sea desde la problemática específica del proceso de enseñanza y aprendizaje, como también desde el análisis teórico que servirá como apoyo para detectar elementos que puedan servir al docente para evaluar el conocimiento acerca del tema. En consecuencia, en el presente trabajo realizamos un análisis teórico del concepto de función tomando como referentes dos marcos teóricos: Los registros de representación semiótica (Duval, 1993, 1998) y la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 1999; Godino y Batanero, 1998).

Registros de representación semiótica

Es importante, para la comprensión de los conceptos matemáticos, distinguir entre un objeto matemático y su representación (Carrión y Arrieta, 1998). Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, en consecuencia, es necesario representarlos de alguna manera. Las representaciones y los sistemas de representación se han convertido en elementos importantes en el estudio de la comprensión en Matemáticas y se han consolidado como herramientas útiles a tal efecto. En consecuencia existe un reconocimiento internacional a la aplicación de la semiótica como un medio que provee recursos conceptuales necesarios para la enseñanza y el aprendizaje (Hoyos, 1998).

Duval (1993) analiza y enfatiza la importancia de la *representación* en Matemáticas y establece que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Por ejemplo, una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Asimismo, un *registro* está constituido por signos tales como símbolos, íconos o trazos, es decir, son medios de representación semiótica.

Este autor afirma que sólo por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos y caracteriza a un *sistema semiótico* como un *sistema de representación*, el cual puede ser un *registro de representación* si permite tres actividades cognitivas, a saber:

1) La *presencia de una representación* identificable como una representación de un registro dado. Por ejemplo: el enunciado de una frase o la escritura de una fórmula.
2) El *tratamiento de una representación* que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
3) La *conversión de una representación* que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Esta actividad cognitiva es diferente e independiente a la del tratamiento.

En esta teoría se considera que la *comprensión* integral de un concepto está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. Algunos ejemplos de estos registros pueden ser el lenguaje natural, las escrituras algebraicas o los gráficos cartesianos.

En general, la enseñanza de las Matemáticas se organiza como si la coordinación de los diferentes registros de representación introducidas o utilizadas se efectuara rápida y espontáneamente. Parece que el objetivo principal en la enseñanza no es el cambio de registro a efectuar sino los tratamientos que podrían realizarse sobre la representación obtenida después del cambio. La pregunta a plantearse sería: *¿Cómo aprender a cambiar el registro y a la vez no confundir un objeto con su representación?*

Los alumnos deben aprender a realizar conversiones en distintos registros como una actividad necesaria, por lo que la coordinación entre dichos registros es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento. Dado que, entre las habilidades matemáticas necesarias para resolver un problema, se combinan generalmente, tratamientos y conversiones, la diferenciación de registros de representación y la coordinación entre ellos son los puntos más importantes para el desarrollo del aprendizaje. Sin embargo, el traslado entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada, por lo tanto, este traslado da lugar a fenómenos de congruencia y no congruencia semántica.

De acuerdo a este enfoque cognitivo nos planteamos la siguiente pregunta: *¿Qué importancia tienen las diferentes representaciones en la comprensión del concepto?*

El concepto de función admite una gran variedad de diferentes registros de representación, por lo que en este estudio nos interesamos en analizar los distintos registros que se abordan en la aprehensión del concepto. Los registros que tomaremos como referentes al analizar las diversas formas de representar el concepto de función, son los siguientes:

- *Registro simbólico:* Cuando expresamos la definición de una función mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal.
- *Registro analítico:* Cuando hacemos referencia a la definición de función mediante una expresión algebraica.
- *Registro verbal:* En este caso, el lenguaje común es el utilizado para representar situaciones llamadas del mundo real. Estas pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.

- *Registro tabular:* Corresponde a los valores numéricos de la función organizados en tablas de valores. Dados valores específicos para x determinar los correspondientes valores de y organizados en una tabla.
- *Registro conjuntista:* Corresponde a la representación de función mediante un conjunto de pares ordenados, donde ninguno de estos tienen la primera componente igual.
- *Registro figural:* Cuando expresamos el concepto de función, mediante los llamados diagramas de Venn. En este caso, el alumno reconoce una función como aquella donde a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un solo elemento en el conjunto de llegada.
- *Registro gráfico:* Es la representación en el plano cartesiano, incluyendo los convenios implícitos en la lectura de gráficos. Por ejemplo: interpretación de ejes coordenados, de unidades, etc.

En consecuencia, para la comprensión del concepto de función, el profesor debe ayudar a los estudiantes a reconocer en cada registro cuándo se trata o no de una función. Por otro lado, la conversión entre estos registros conlleva a la superación de distintas dificultades. Justamente, Duval (1998) nos muestra que no se presenta el mismo nivel de dificultad en los alumnos cuando deben realizar la articulación entre el registro algebraico y el registro gráfico que la que se manifiesta en el proceso inverso.

Sin embargo, aunque las representaciones gráficas y algebraicas son dos sistemas simbólicos muy diferentes que se articulan de tal forma, en cuanto a construir y definir conjuntamente el concepto matemático de función, no pueden ser tratados como objetos aislados.

La Teoría de las funciones semióticas

En esta teoría se considera que el conocimiento se pone de manifiesto a través de determinadas entidades que se denominan *funciones semióticas*, las cuales permiten tener en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la actividad matemática y de los procesos de difusión del conocimiento matemático y además, nos permiten formular de una manera general y flexible este conocimiento (Godino, 1999). Estas *funciones semióticas* están compuestas por diversos elementos de significados, los cuales pueden ser de diversa índole y se pueden clasificar de la siguiente forma:

- *Extensivos*: entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (situaciones-problemas, aplicaciones). Como por ejemplo, buscar una función que sea representativa de un determinado conjunto de datos;
- *Ostensivos*: representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos). Estos elementos ostensivos o representacionales se pueden observar y manipular y tienen una doble función. En primer lugar sirven para evocar los objetos abstractos inobservables. Por otra, se usan para operar con ellos (en representación de los correspondientes objetos matemáticos) y producir resultados aplicables a dichos objetos;
- *Actuativos*: modos de actuar ante situaciones o tareas (procedimientos, algoritmos, operaciones). Por ejemplo, el cálculo del valor de la variable independiente para un determinado valor de la variable dependiente;
- *Intensivos:* ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones). Por ejemplo, la simetría en una función, el máximo o el mínimo;
- *Validativos*: tipos de argumentaciones usadas para validar proposiciones: generalización, comprobación de casos, análisis, síntesis, la utilización de la representación

gráfica como un medio de justificación.
Una de las características que distinguen al marco teórico citado, es que problematiza la naturaleza de un objeto matemático, suponiendo que un mismo término o expresión matemática, por ejemplo, "el concepto de función", designa entidades diversas. Por ejemplo, desde la didáctica, se distinguen dos tipos de entidades:

a. *El significado institucional* de un concepto, que es el compartido dentro de una institución. Respecto al mismo, diferenciaremos en nuestro trabajo:

a1. El significado institucional local, aquello que el profesor se propone enseñar en unas circunstancias determinadas;

a2. El significado institucional de referencia, que sirve de pauta de comparación y da cuenta del hecho de que el contenido a enseñar en unas circunstancias determinadas no agota el significado completo del objeto.

b. *El significado personal* adquirido por los estudiantes a lo largo del proceso de enseñanza.

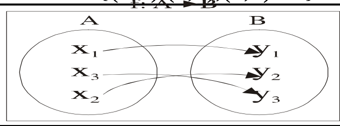
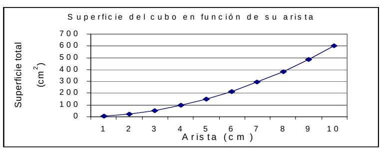
En consecuencia, la noción de representación y registro semiótico usada por Duval correspondería a un tipo particular de función semiótica que pone en relación elementos ostensivos y no ostensivos. Según Godino, la noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos ya sean ostensivos o no, concretos o abstractos.
En la Teoría de las funciones semióticas se plantea que el aprendizaje será el acoplamiento progresivo del significado personal con el institucional. En consecuencia, se podrá evaluar la comprensión por medio del estudio de las funciones semióticas que el sujeto utilice, analizando además, qué tipos de elementos de significado están implícitos en dichas funciones semióticas. Cuanto mayor sea el número de elementos de significado puestos en juego, mayor será el nivel de comprensión que demuestre tener el alumno, o en otras palabras, mayor será el grado de correspondencia entre el significado institucional y el personal.

Planteo del problema

El trabajo que aquí presentamos es la primera fase de un estudio que nos proponemos realizar con alumnos de la asignatura Análisis Matemático I de la carrera de Ingeniería Industrial e Ingeniería Química de la Universidad Nacional de San Luis durante el transcurso del presente curso lectivo.
En esta primera fase pretendemos determinar y analizar previamente los elementos que consideraremos esenciales en la determinación del grado de comprensión o conocimiento que presentan los alumnos ante una determinada tarea relacionada con funciones. En otras palabras y siguiendo a Godino, pretendemos determinar el significado institucional de referencia que presentan los libros de texto sobre el tema de funciones. En una segunda etapa, realizaríamos la determinación del significado institucional local, es decir, del significado que nosotros como docentes pretendemos mostrar a nuestros alumnos. Por último, en una etapa posterior a este trabajo, implementaríamos un instrumento de evaluación con el fin de observar el significado personal que presenten nuestros alumnos en la resolución a determinadas tareas que planeamos construir.
Para determinar el significado institucional de referencia, tomamos una muestra representativa de los libros de texto que se utilizan hoy día y realizamos un análisis similar al que describimos a continuación (Tabla 1), lo cual puede considerarse como un ejemplo de esta parte de la investigación.
Los elementos que mostramos en la Tabla 1 se han tomado de Vizmanos y Anzola (1995). En dicha tabla se ponen de manifiesto las correspondencias y relaciones que existen entre

los diversos elementos de significado y entre éstos y los registros de representación. Creemos que es importante realizar un análisis detallado de los elementos o registros utilizados en los libros de texto, con el fin de identificar los usos más comunes y de observar qué otros elementos pueden incluirse dentro de una secuencia de enseñanza relacionada con el tema de función como consecuencia, por ejemplo, de la utilización de la computadora. Todo este análisis previo nos servirá para tomar decisiones sobre los elementos de significado o registros de representación que luego adoptaremos y adaptaremos en la organización de una secuencia de enseñanza sobre el tema. A partir de dicha organización y de su posterior implementación podremos analizar la evolución en el aprendizaje de los alumnos a través de las tareas planteadas y de los instrumentos de evaluación que prevemos planificar en función del significado institucional previsto. De esta manera pensamos observar el significado personal que hayan adquirido los alumnos respecto al tema.

Tabla 1. Correspondencia entre elementos de significado y registros de representación

<table>
<tr><th>Elementos de significado (Godino)</th><th>Registros de representación (Duval)</th><th>Significado de referencia encontrado en libros de texto</th></tr>
<tr><td>Extensivos</td><td></td><td>Modelización o contextualización de las funciones.
Contextos en que se aplican: demográficos, económicos, biológicos, etc.</td></tr>
<tr><td>Actuativos</td><td></td><td>Determinación de la ecuación representativa de la gráfica o de la tabla.
Cálculo de la variable independiente para un determinado valor de la variable dependiente.
Construcción de la gráfica que representa a los valores de la tabla o a la ecuación.
Determinación del conjunto solución de la función.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ostensivos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Representaciones simbólicas</td><td>Registro simbólico</td><td>Sea f una relación binaria de A en B. f es función si cumple que:
$\forall \quad x\ \varepsilon\ A, \exists\ y\ \varepsilon\ B : (x,y)\ \varepsilon\ f.$
$(x,y)\ \varepsilon\ f \wedge (x,z)\ \varepsilon\ f \Rightarrow y = z$</td></tr>
<tr><td>Registro analítico</td><td>f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
$F(x) = 3x^5 - 2x^2 + 6$</td></tr>
<tr><td>Registro verbal</td><td>Una función es un conjunto de pares ordenados, dos de los cuales no tienen la misma primera componente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Representaciones numéricas</td><td>Registro tabular</td><td><table><tr><td>Edad (meses)</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>Longitud (cm.)</td><td>4</td><td>8</td><td>15</td><td>24</td><td>29</td><td>34</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Registro conjuntista</td><td>A = {(1,2),(2,4),(3,6).....}</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Representaciones gráficas</td><td>Registro figural</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Registro gráfico</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Intensivos</td><td></td><td>Ordenada – Abscisa. Puntos sobre el plano. Ejes coordenados
Relación. Función. Dominio de la función Recorrido. Variable dependiente e independiente</td></tr>
<tr><td>Validativos</td><td></td><td>Análisis y síntesis
Aplicación, comprobación o generalización de propiedades
Demostraciones deductivas por medio de axiomas o teoremas
Demostraciones informales por medio de la representación gráfica o de la simulación por ordenador</td></tr>
</table>

Conclusiones

El análisis efectuado evidencia el alto nivel de complejidad del concepto función como objeto de enseñanza en las matemáticas escolares. Esta complejidad se pone aún más de manifiesto si consideramos al concepto de función como una entidad sistémica en la que se considera importante la conversión entre registros para una enseñanza efectiva del concepto.

La descomposición del concepto por medio de elementos de significado y de registros nos proporciona una herramienta analítica de gran potencia, que nos permite, en primer lugar, caracterizar los conocimientos que sobre el concepto de función se presentan en los textos universitarios y justificar nuestra propuesta de enseñanza, que es construida a partir de los elementos seleccionados en el *significado institucional de referencia*, en función de las condiciones particulares del estudio (tipo de alumnos; presencia del ordenador, etc).

La misma herramienta, nos permite comparar la planificación de la enseñanza con su implementación efectiva, analizar el trabajo de los alumnos en el aula y explicar sus dificultades. Finalmente, se utilizará para construir unos instrumentos de evaluación con una validez de contenido explicitable que permiten describir las tendencias del significado personal construido por los alumnos participantes en el estudio.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1993). Registres de reprësentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives 5* (pp. 37 - 65).

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* (Ed.) (pp.173 – 201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Carrión, V.; Arrieta, J. (1998). La modelación de fenómenos como proceso de matematización para la formación, tratamiento y conversión de representaciones en diferentes sistemas semióticos. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 225-242). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

García, M.; Llinares, S. (1995b). El concepto de función a través de los textos escolares. Reflexión sobre una evolución. *Currículo*. 10, 103-115.

Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 196-212). Valladolid, España.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics Educational as a research domain: A search for identity.* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Hoyos, V. (1998). Revisando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas: Observaciones empíricas con estudiantes de 16 a18 años. En F. Hitt (Ed.),*Investigaciones en Matemática Educativa II* (p. 343-363). México: Dept. de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Leinhardt G., Zaslavsky O.; Stein M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research*. 60(1), 1 - 64.

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Jaén: Universidad de Jaén, Servicio de publicaciones.

Vizmanos, J. y Anzola, M. (1995). *Matemáticas.* Madrid, España: Ediciones SM.

Evaluación docente utilizando Análisis Multivariado

Arturo Gómez, Víctor Martínez Luaces
Cátedra de Matemática de la Facultad de Química Montevideo. Uruguay
garturo@bilbo.edu.uy   victor@bilbo.edu.uy

Resumen
Este trabajo proporciona una metodología para el tratamiento de datos de evaluaciones docentes y evaluaciones de calidad de enseñanza. Por lo general, este tipo de análisis se limita a encuestas muy simples y los resultados se presentan como porcentajes, sin un tratamiento estadístico riguroso.
Para el matemático educativo, es importante conocer y utilizar las técnicas del Análisis Multivariado a fin de obtener resultados de mayor significación e impacto.
Analizando un ejemplo concreto, proveniente de la evaluación docente de la Cátedra de Matemática de la Facultad de Química, se verá no solamente el alcance de estas técnicas, sino también el tipo de conclusiones que resulta posible extraer utilizando la metodología propuesta.

Introducción y marco teórico

La búsqueda de cursos, profesores y programas ejemplares es un tema de investigación en Matemática Educativa que ha sido desarrollado independientemente por distintos autores en diversos países (ver por ejemplo (Tobin, K y Fraser, B, 1990)).
La teoría se basa en que se pueden copiar o adaptar prácticas ejemplares (Lovitt, C. & Clarke, D, 1987) y así invertir el dinero de manera segura en aquello que ha sido realmente comprobado, en lugar de arriesgar en experimentos de resultado incierto (Kennedy, K. .J., 1986)
Como ya ha sido expresado en un trabajo anterior (Martínez Luaces, V., 1998), las evaluaciones docentes realizadas en base a la opinión estudiantil tienen una alta correlación con las opiniones de los expertos y proporcionan un medio alternativo para la búsqueda de situaciones ejemplares (Otros autores en cambio, han dejado la evaluación en manos de otros docentes a los que se pedía identificar colegas “por encima del promedio”, que luego eran estudiados por un grupo de investigadores (Tobin, K y Fraser, B, 1990). Si bien estos procedimientos son correctos, creemos que es mejor dejar la decisión en manos de los propios destinatarios de los esfuerzos educativos, es decir, los estudiantes.
Una vez aceptada esta hipótesis de trabajo, se trata de ver cómo realizar la evaluación docente de manera efectiva y cómo tratar objetivamente los datos obtenidos. Estos tópicos serán tratados in extenso en la próxima sección.

Metodología empleada

Entre los años 1995 y 1997 la Facultad de Química de la Universidad de la República (Montevideo, Uruguay), realizó evaluaciones docentes en todos sus cursos teóricos, prácticos y de laboratorio.
Para ello la Unidad de Apoyo a la Enseñanza de dicha facultad confeccionó un formulario con 25 preguntas, basado en una experiencia de la Universidad de Valencia. De estas preguntas algunas se refirieron al docente, otras al curso y otras a la evaluación del mismo (exámenes parciales, finales, etc.).

Cada pregunta admitía en este formulario 5 respuestas posibles. Por ejemplo, en la pregunta 1 dice: “El Profesor cumple correctamente sus horarios” y las opciones eran: totalmente de acuerdo (TDA), más bien de acuerdo (MBA), indiferente (IND), más bien en desacuerdo (MBD) y totalmente en desacuerdo (TED). Cada opción tenía debajo un círculo que el estudiante debía colorear en caso que esa sea su respuesta, lo que permitía procesar la información con ayuda de un scanner, manejado por funcionarios no docentes para asegurar la objetividad y el anonimato. Si el estudiante no marcaba ninguna opción se computaba bajo el ítem “no sabe/no contesta” (NSNC).

Para el tratamiento de datos, las opciones fueron cuantificadas sobre escala de 10; TED = 0, MBD = 2,5, IND = 5.0, MBA = 7,5 y TDA = 10.0 y se promediaba sobre la totalidad de encuestas obtenidas en cada curso. Las opciones NSNC no contaban en los promedios. Cabe aquí aclarar que las encuestas se distribuían a los alumnos el último día de clases de cada asignatura, por lo cual la muestra quedaba constituida sólo por los asistentes.

De las 25 preguntas, 13 eran específicas sobre el docente, obteniendo en principio un vector de R^{13} para cada uno de los 12 docentes que componían la cátedra en esos años. Cada componente del vector es un número del intervalo cerrado [0,10].

Esta forma de presentar la información se adapta muy bien a las técnicas de Análisis Multivariado, en particular el estudio de clusters o racimos que permite agrupar los datos en base a su proximidad, trabajando en principio con distancias euclídeas (Mendenhall, W; Scheaffer, R.L. y Wackerly, D. D., 1986).

Los clusters pueden hacerse agrupando a los docentes en base a su similitudes o también (invirtiendo casos y variables) se puede formar racimos con las distintas preguntas.

Para el análisis en base a las variables, se observa, entre otras cosas, gran similitud entre las preguntas 11 (referida a establecer conexiones con otras asignaturas) y 12 (relativa a aplicaciones profesionales). Ambas preguntas dan esencialmente los mismos resultados en todos los formularios, formando un cluster que permite agruparlas, generando de este modo una variable condensada o resumida. Surge así una nueva variable denominada “aplicaciones” que, como veremos, tiene mucha relación con la formación de los docentes.

De igual modo, se pueden definir otras variables reducidas según los clusters que se forman y su significado. Así se condensa la información, pasando de vectores R^{13} a vectores R^5 o R^6, considerando sólo una vez una determinada característica del profesor.

También es posible elegir dos o más variables de interés, y hacer un nuevo análisis de clusters considerando únicamente esas variables (con vectores de R^2 o R^3 por ejemplo).

Los clusters nos permiten agrupar a los docentes, y detectar cuáles se separan del grupo, pero para concluir que estamos frente a prácticas ejemplares o incumplimientos, necesitamos ver los valores absolutos y hacer comprobaciones estadísticas.

Por ejemplo, como veremos luego, usamos una tabla de contingencia para ver si las diferencias entre docentes que sugiere el cluster de “aplicaciones”, son estadísticamente significativas.

Sin embargo, a veces nos interesa comparar no para una pregunta sino para varias o para todo el formulario. Podemos, así, comparar dos docentes usando el test “t” para muestras ligadas, o en caso de no normalidad, tests no paramétricos como Wilcoxon (Mendenhall, W; Scheaffer, R.L. y Wackerly, D. D., 1986).

Estas técnicas estadísticas permiten obtener conclusiones significativas para los casos de prácticas ejemplares como para casos de incumplimientos totales o parciales.

Resultados obtenidos en el ejemplo analizado

Del formulario mencionado, las 13 preguntas sobre el docente son:
1.- El profesor marca objetivos y los da conocer a los alumnos.
2- Explica en clase con orden y claridad.
4- Define con precisión el vocabulario especializado o técnico que utiliza.
5- El ritmo de las clases permite seguir el hilo de las explicaciones.
8- Parece dominar la asignaturas que imparte.
9- cuando responde a una pregunta lo hace realmente a lo preguntado con claridad y precisión.
11- Establece conexiones con los contenidos de otra asignaturas.
12- Da a la asignatura un enfoque aplicado, ofreciendo ejemplos y aplicaciones a la vida real y profesional.
13- Anima a los alumnos a plantear problemas y dudas en clases.
14- Dialoga con los alumnos sobre la marcha de las clases tomando en cuenta sus opiniones.
15- Consigue que los alumnos estén motivados por la asignatura.
18- Utiliza y organiza adecuadamente el pizarrón.
21- Teniendo en cuenta las limitaciones pienso que el profesor que imparte esta asignatura debe considerarse un buen profesor.

Los resultados de estas preguntas constituyen los valores de las variables a considerar en primera instancia. Por simplicidad llamaremos a estas variables “objetivos”, “orden”, “vocabulario”, “ritmo”, “dominio”, “preguntas”, “conexiones”, “vida real”, “anima-dudas”, “diálogo”, “motivación”, “pizarrón” y “juicio global” respectivamente.
En un cluster de docentes, con las 13 variables se observa que uno de ellos (el docente c1) está netamente separado del resto. Sin embargo, antes de continuar en esta dirección, conviene hacer un cluster de variables (invirtiendo casos y variables) a ver si no se está evaluando varias veces lo mismo.
En clusters de variables aparece un grupo formado por “conexiones” y “vida real” (pregunta 11 y 12), que serían las más próximas entre si de todo el formulario, esto justificó definir la variable condensada “aplicaciones”, ya mencionada.
Entonces se pueden hacer dos nuevos clusters que complementan la información del cluster global. Uno de ellos con vectores de R^2, considerando sólo las preguntas 11 y 12 (cluster de aplicaciones) y otro con vectores de R^{11}, considerando para ello la restante pregunta (“clusters sin aplicaciones”).
Los tres clusters dan resultados distintos pero tienen cierta regularidad. En efecto, el cluster global muestra a c1 despegado del resto, seguido por un grupo de docentes (c2, c5, c6 y c12), mientras que en el cluster de “aplicaciones” c1 se despega aún más. Además si bien c1 es seguido nuevamente por c2, ahora este último forma grupo con c10. Finalmente, en el “cluster sin aplicaciones”, c1 ya no está totalmente despegado, sino que pasó a formar un cluster con c6 y c12.
El cluster de “aplicaciones” es la clave para explicar lo anterior. En efecto, todos los que lideran dicho cluster estudiaron Ingeniería Química. Concretamente, c1 es Ingeniero Químico y Licenciado en Matemática, c2 es Ingeniero Químico y c10 cursó una Maestría en Química Teórica, pero antes hizo 4 de los seis años de Ingeniería Química.

Esto tiene su lógica ya que las materias que se dictan en la facultad son muy específicas y en su mayoría tienen muchas horas de laboratorio, por lo tanto no es fácil establecer conexiones para quien no haya pasado por ellas. En otras palabras, la calificación en la variable condensada “aplicaciones”, está íntimamente ligada a la formación química del docente.

Entonces, el “cluster sin aplicaciones” quita preponderancia a la formación química del docente y en cambio evalúa otros elementos como la formación matemática, la didáctica pedagógica y las características personales del docente.

Entonces, por ejemplo, los docentes c6 y c12 que ocupaban una posición relevante en el cluster global (formando racimo con c2 y c5), desaparecen de las primeras posiciones en el cluster de “aplicaciones”. Sin embargo reaparecen para ocupar el segundo lugar, en el “cluster sin aplicaciones”.

En resumen, c6 y c12 son docentes fuertes en área didáctico - pedagógica, c2 lo es en “aplicaciones” y c1 logra conjuntar ambos aspectos.

Pero estos casos no nos están indicando a priori prácticas ejemplares. En efecto, podrían ser docentes mediocres dentro de un grupo muy malo de profesores. Es decir, faltaría ver valores absolutos y no solamente las posiciones relativas dentro de un grupo.

En tal sentido, se observa que c1 tiene guarismos que varían entre 8.39 y 9.92 sobre escala de 10. Más aún 9 de los 13 resultados superan la nota 9 sobre 10.

No cabe duda que son buenos guarismos, pero aún queda una objeción: los clusters son solo agrupamientos jerárquicos de datos y no constituyen (al menos en sentido tradicional) una demostración estadística de cierta hipótesis.

Concretamente, para saber si c1 y c2 tienen diferencias significativas, por ejemplo en “conexiones” (una de las dos variables contenidas en el cluster de “aplicaciones”, que c1 y c2 lideraban) se puede hacer una tabla de contingencia. En dicha tabla c1 y c2 serían las filas y las columnas podrían ser los resultados TDA, MBA, etc,

Sin embargo, como c1 y c2 tienen buenos resultados, las casillas TED, MBD e IND no cumplen las condiciones para disminuir el sesgo del estadístico (Cátedra de Matemática, 1984). Por eso se las reunió en una sola, llamada “resultados malos” y se trabajó con 3 columnas. El p-value obtenido muestra claramente que las diferencias en “conexiones” para c1 y c2 son estadísticamente significativas. En caso de incluir a c10 en la tabla, daría un resultado similar, ya que en el cluster aparece c2 como más próximo a c1 que c10. La misma técnica puede ser usada para otras preguntas.

Desde un punto de vista práctico nos interesa un análisis más global. Entonces, para comparar a c1 y c2 (los dos primeros en el cluster general de casos), en la totalidad de las preguntas, el procedimiento es otro, que veremos posteriormente.

Antes de entrar en esto, vale la pena observar que c1 y c2 son docentes de teóricos, por lo que sus formularios son iguales y además de las 13 preguntas consideradas, tienen otras más, dignas de atención, que no aparecen en los formularios de los docentes de práctico:

Por ejemplo:

3.- Da la sensación de tener bien preparadas las clases

6.- Sintetiza y subraya los conceptos que considera importantes

Se trata de comprobar diferencias entre pares, pues las preguntas son las mismas y sólo cambia el docente

Se comienza por analizar la normalidad de ambas muestras, con los tests de Shapiro Wilk, Lilliefors y Kolmogorov-Sminorv y todos ellos rechazan la normalidad, siempre con p–values extremadamente bajos.
Estudiando los histogramas se puede ver la razón de este hecho: hay preguntas con resultados excepcionalmente bajos en ambos docentes. Es el caso de la pregunta 19 que se refiere al uso de material didáctico (transparencias, diapositivas, esquemas, etc.) Esa pregunta daba resultados muy bajos en todos los docentes en aquellos años. Hoy en día se dispone de pizarra electrónica, computadora y cañón de video en el salón de teóricos, pero ya no se hace evaluación de docentes, supuestamente por motivos económicos...
Sin embargo, al considerar las diferencias entre c1 y c2, como los resultados bajos se dan en las mismas preguntas, este efecto se compensa. Tal es así que, aunque los resultados de c1 y c2 no son gaussianos, si lo son sus diferencias, lo que se comprueba con los mismos tests mencionados.
Con diferencias normales, aplicamos el test “t” para muestras ligadas, y resulta una diferencia muy significativa entre ambos docentes, con un “p-value” de 4.8×10^{-5}.
Si las diferencias tampoco hubieran sido normales, entonces habría que recurrir a métodos no paramétricos. Concretamente, el test de Wilcoxon para diferencias entre muestras apareadas. Este test se puede utilizar en todos los casos (normales y no normales aunque en el caso normal tiene menor potencia que el test “t” ya mencionado) y de hecho fue aplicado en este caso, comprobando una vez más la diferencia entre c1 y c2 con “p-value” algo mayor al ya obtenido, concretamente $5{,}4 \times 10^{-4}$.
Si en lugar de c1 y c2, se hiciera la comparación con tres o más docentes (de hecho se hizo con c1, c2 y c7, que fueron los docentes de teórico de la misma asignatura en el año 1996), entonces para distribución normal o no, se utiliza el test de Friedman. Obviamente, en este caso se obtuvieron diferencias significativas entre c1, c2 y c7, con “p-value” aún menor que los anteriores (1×10^{-5}).
Finalmente, se pueden estudiar diferencias entre un mismo docente con el paso de los años, para ver si hubo un proceso evolutivo o no. Para ello se hizo un cluster de docentes teóricos, pero incluyendo a los docentes en varios años. Mas aún, en el caso de c1 se agregó una evaluación “vieja”del año 1993. En ese año no había evaluación docente en facultad de Química, pero sí la había en Facultad de Ingeniería y el formulario era el mismo.
En este cluster de teórico, nuevamente c1 se separa del resto, pero ahora forma un peculiar racimo consigo mismo, en el que aparecen muy próximas sus evaluaciones de 1996 y 1997 y no tanto la de 1993 (Fac. de Ingeniería)
De todos modos, para ver si hubo o no evolución se aplicó el test de Friedman con esas tres columnas correspondientes a c1. Una vez más se rechaza contundentemente la hipótesis nula ($p<0.012$). Siendo más exigentes, podemos hacer el test de Wilcoxon con c1 1996 y c1 1997, es decir con los dos más próximos. Se vuelve a rechazar la hipótesis nula, pero ahora con un p-value más cercano al 5% que es el nivel de significación límite usual ($p= 0.04$). En resumen, c1 estuvo en permanente evolución, pero ésta fue más marcada entre 1993 y 1996 que entre 1996 y 1997.

Conclusiones y recomendaciones

Los procedimientos aplicados anteriormente permiten extensiones en varias direcciones, por ejemplo, del cluster de variables se encontraron otros racimos que permitirían definir

nuevas variables reducidas. Es más, se puede en base al significado de las variables definir otras que las condensen, por ejemplo definir una variable “didáctica” que promedie “orden”, “pizarrón”, “ritmo”, etc.
Ambos criterios de resumir variables (por similitud de definición y por proximidad en el cluster) se han practicado en este caso dando los mismos resultados, pero podría tener utilidad con otro grupo de docentes, además de permitir una retroalimentación en el diseño de las encuestas
La finalidad de este trabajo consistió en buscar prácticas ejemplares, pero también se podría haber usado para detectar irregularidades en forma total o parcial, que afortunadamente no se dieron.
En los cluster de teóricos con datos repetidos (los mismos docentes en varios años) se encontró alguna situación extraña: el docente c10 en dos años consecutivos, en lugar de formar racimos consigo mismo, los formaba con otros profesores. Con el test de Wilcoxon se confirmó una evolución muy importante y esto podría deberse a que una de las evaluaciones fue posterior a profundos cambios en los contenidos de la materia.
Se puede aplicar la misma metodología a las preguntas sobre los cursos y sobre las evaluaciones a fin de ver situaciones ejemplares, casos anómalos, procesos evolutivos, etc.
Esta misma metodología es hoy en día aplicada por el Departamento de Químico – Física y Matemática, para procesar los datos de encuestas de calidad de la enseñanza, y así detectar situaciones que justifiquen la aplicación de medidas correctivas. En tal sentido se ha designado a investigadores en Matemática Educativa vinculados a dicha institución para el tratamiento de la información y la formulación de recomendaciones a ser tomadas en cuenta por la Comisión Directiva del mencionado departamento. Todo lo anterior permitiría tomar decisiones más objetivas que orienten a la institución frente a la renovación de cargos, extensiones y reducciones horarias, etc., así como modificar enfoques, cambiar repartidos prácticos, reasignar coordinadores, etc.
Todo el procedimiento es aplicable a otros asignaturas e incluso a otros niveles educativos proporcionando un metodo objetivo y con el rigor estadistico que la situación requiere.
Estas características contribuyen a que la Matemática Educativa se ponga a tono con las demás disciplinas científicas, y así reciba el respeto y la valoración que toda ciencia merece.

Referencias bibliográficas

Cátedra de Matemática (1984). *Probabilidad y Estadística.* Montevideo: UDELAR
Kennedy, K. .J. (1986). “National initiations in social education inAustralia”. In G. Mc Donald y B. J. Fraser, Eds. *Issues in social education*. Perth: Western Australian Institute of Technology.
Lovitt, C. & Clarke, D. (1987). “The winds of change are sweeping through Mathematics Educations”. *Curriculum Develpment in Australian Schools*, **3**, 37.
Martínez Luaces, V. (1998). “Matemática como Asignatura de Servicio: algunas conclusiones basadas en una evaluación docente” *Números. Revista de Didáctica de la Matemática*. **36**, págs. 65-74.
Mendenhall, W; Scheaffer, R.L. y Wackerly, D. D. (1986). *Estadística Matemática con Aplicaciones.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Tobin, K y Fraser, B. (1990). ”What does it mean to be an exemplary science teacher?”*Journal of research in Science Teaching,* **.27**.**1**.pp. 3 - 25

Una experiencia en cálculo con aprendizaje basado en problemas

Leopoldo Zúñiga Silva
Tecnológico de Monterrey, Campus San Luis Potosí, México
lzuniga@campus.slp.itesm.mx

Resumen
El propósito de esta investigación es explorar sobre la puesta en escena de secuencias didácticas en base a la resolución de problemas, como el elemento didáctico que orienta el diseño de la estructura de contenidos que posibilite un mejor aprendizaje del cálculo integral de una variable real y series, en carreras de ingeniería. Se concibe la resolución de problemas no como la aplicación de los conocimientos estudiados previamente, sino, por el contrario, como el punto de partida o eje rector, que motive el discernimiento intelectual y la toma de decisiones sobre las acciones a realizar, para lograr apropiarse del conocimiento necesario a fin de proponer soluciones. Las preguntas básicas que motivan este trabajo son las siguientes: ¿es posible aprender efectivamente cálculo *a partir* del enfrentamiento de los estudiantes con situaciones problema?, ¿cuál es el tipo de conocimientos y habilidades que necesita un estudiante para tener éxito en un escenario de aprendizaje como éste?

Introducción

Es bastante conocido que diversos estudios muestran cómo la enseñanza habitual del cálculo se basa en la transmisión de conocimientos con un énfasis marcado en el desarrollo de habilidades algebraicas, es decir, se centra el aprendizaje en la práctica de métodos algorítmicos y procedimientos que mecanizan el saber, y se descuida la comprensión de conceptos y el desarrollo, por ejemplo, de habilidades cognitivas como la reflexión, el análisis y la síntesis. Más aún, generalmente, se trata de "reafirmar" el conocimiento proponiendo ejercicios o intentando resolver problemas rutinarios; a lo más que se llega en este sentido en un curso común de cálculo, es a resolver los "problemas de aplicación" que se proponen en los textos, y esto siempre después de haber estudiado las definiciones, métodos y procedimientos, no antes. Al respecto, por ejemplo, en (Campistrous & Rizo, 2000) se señala que uno de los retos es "*lograr que en las aulas se planteen verdaderos problemas y que los profesores conviertan la resolución de problemas en objeto de enseñanza y no que lo utilicen como un medio para "fijar" el contenido de la enseñanza*". Ver también, por ejemplo, (Schoenfeld, 1983).
Las preguntas básicas que motivan este trabajo son las siguientes: ¿es posible aprender efectivamente cálculo *a partir* del enfrentamiento de los estudiantes con situaciones problema?, ¿cuál es el tipo de conocimientos y habilidades que necesita un estudiante para tener éxito en un escenario de aprendizaje como éste?
Es importante considerar un hecho que nos revela la experiencia en las aulas, al menos en los primeros niveles de educación superior: la creencia generalizada (o al menos una duda constante) en los estudiantes, de que las matemáticas poco les serán útiles en su vida o en su futuro ámbito profesional. Sabemos que un antecedente directamente ligado a esta situación, es que el proceso de aprendizaje que han vivido los estudiantes en los niveles básicos, están caracterizados generalmente por las tendencias de la enseñanza "tradicional", en este sentido, su experiencia con las matemáticas en la escuela no ha sido tal vez la más conveniente. Y el factor más importante: creemos que influye decisivamente el hecho de que tanto los programas de estudio como el discurso matemático escolar, que se plasma en los textos de cálculo, en particular, se basan en una estructura que propicia diversas dislexias escolares como se señala en (Cantoral & Mirón, 2000), por ejemplo, ellos dicen

que "…*la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función, no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación*…".

Considerando lo anterior y aceptando que nuestra disciplina estudia los procesos de construcción, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar, como podemos ver en (Cantoral, 1999), que "*La investigación en nuestro campo se propone afectar al sistema educativo en un sentido benéfico, a saber, mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos, asegurando entre los alumnos la construcción de un saber viviente, susceptible de evolución, y funcional, que permita resolver problemas y plantear verdaderas preguntas*", el propósito de esta investigación es explorar sobre la puesta en escena de secuencias didácticas en base a la resolución de problemas como eje rector del proceso de enseñanza-aprendizaje y el impacto que tiene en los estudiantes de nivel universitario sobre su propio proceso.

Referentes teóricos

Se pretende abordar la resolución de problemas como un problema de investigación didáctica, donde se analice el efecto del planteamiento de problemas que motive a los estudiantes y los rete a discernir, reflexionar e interactuar con los recursos a su alcance, en la búsqueda de información que les posibilite establecer los conocimientos necesarios para su solución.

En la enseñanza común del sistema educativo superior, generalmente se abordan los llamados problemas de aplicación, una vez que se han estudiado los contenidos del cálculo (y eso, hasta donde el tiempo disponible para el curso alcance). Por el contrario, en esta propuesta, consideramos que la resolución de problemas puede ser la actividad central del proceso de aprendizaje, es decir, el elemento didáctico que oriente todas las acciones ha realizar por los participantes.

Por otra parte, es importante señalar que la experiencia se basó en actividades de trabajo colaborativo entre los estudiantes. Consideramos importante describir la concepción que tenemos al respecto: trabajo colaborativo es aquél en el que los participantes se comprometen con su aprendizaje con entusiasmo, responsabilidad y en forma solidaria con todos los compañeros, cooperando (dialogando, aportando ideas, etc.) en las tareas asignadas y con un amplio sentido de tolerancia y respeto hacia las aportaciones u opiniones de los demás. Esto tiene una especial relevancia porque deja ver el aspecto social de la didáctica, sobretodo si consideramos que generalmente la enseñanza se da a nivel masivo, no individual, donde las estrategias no deberían limitarse al tratamiento aislado de los actores, es decir, como si los estudiantes fueran completamente independientes en su proceso de aprendizaje.

Para dar una idea más precisa al respecto, hago referencia a una teoría del aprendizaje que resulta fundamental en esta investigación: la teoría constructivista del aprendizaje.

Un primer principio del constructivismo establece que el conocimiento no es recibido pasivamente, sino que es *construido* activamente por el estudiante. El conocimiento es generado *en la acción* realizada por quien aprende, en su accionar sobre los objetos, y no

simplemente en la absorción o memorización mecánica de ideas expuestas por otras personas. Conocer es actuar.
Como consecuencia de esto, se debe entender a la vez que el estudiante tiene un aprendizaje mejor si éste es *significativo*. Es decir, se debe tomar en consideración, entre otras cosas, que: "*1) Los contenidos, conceptos o nuevos conocimientos, se relacionan con los elementos que ya existen en la estructura cognitiva (del que aprende). 2) Los conceptos deben estar articulados en unidades significativas, unidades que tengan sentido para los estudiantes*" (Novak, 1977).
Por su misma naturaleza, se considera que en el enfoque constructivista se dan condiciones idóneas para el aprendizaje cuando una persona se enfrenta a un problema para el cual, su solución, requiere conocimientos por construir o descubrir. Esto demanda el reconocer que la habilidad para resolver problemas que involucran conocimientos matemáticos, no se puede lograr a partir de la simple ejercitación o repetición de acciones ya elaboradas previamente sin atender el cómo se han asimilado y el nivel de significación que éstas tienen para los estudiantes; de aquí "*la necesidad de enfocar como parte de la formación de la habilidad, la etapa en que transcurre la estructuración del sistema de conocimientos, hábitos y habilidades elementales o básicas, sin los cuales no se puede aspirar al logro de una actuación adecuada del alumno para interpretar, comprender y explicar la solución de los problemas*" (Ferrer, M. y Rebollar, A., 1994).
Así, la habilidad para resolver problemas se explica como la preparación del alumno para estructurar modos de actuar y formas o métodos de solución utilizando los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos, en calidad de instrumentos, y las estrategias de trabajo heurístico, para la sistematización de esos instrumentos en una o varias vías de solución.
En este marco, creemos también que la experiencia y el conocimiento de un alumno, pueden ser enriquecidos por la experiencia y el conocimiento de los demás, una característica esencial del trabajo colaborativo. Las palabras y aún los conceptos pueden tener diferente significado para cada una de las personas involucradas en cualquier proceso. Igualmente, las ideas que surgen pueden tener distintos matices, y las soluciones a las situaciones y problemas propuestos pueden diferir radicalmente entre unos y otros. De esto nace un proceso de trabajo fundamental para el constructivismo: la negociación. Se debe dar espacio a los estudiantes para que aprendan negociando significados entre ellos. Además, este tipo de trabajo provee de ventajas adicionales, tales como el desarrollo del respeto por las ideas de los otros, el aprender a debatir las ideas propias, el aprender a argumentar las afirmaciones, a construir explicaciones de sus razonamientos, etc. *"...en este proceso de decirle a otro cómo ellos pensaron sobre un problema, los estudiantes elaboran y refinan su forma de pensar y profundizan en su comprensión*"(Wheatley, 1989).
Las precisiones anteriores tienen su base en la búsqueda de una estructura diferente del proceso de enseñanza-aprendizaje donde, como ya hemos indicado, el planteamiento, comprensión y solución de los problemas, ocupa una posición rectora en la estructuración de un "nuevo contenido" y su puesta en escena.

Metodología y puesta en escena

Se realizaron dos estudios previos a la experiencia: (a) se aplicó un cuestionario y se realizaron entrevistas personales sobre la concepción de *problema* que tienen los estudiantes. Los resultados mostraron que no tienen una idea precisa del término, en sus propias palabras, dicen que un problema "*es un ejercicio para practicar*", "*es donde se aplican los métodos de la clase*", "*es cuando tiene un enunciado y para resolverlo primero hay que plantearlo*", etc., todas éstas, nociones provocadas por las características de la enseñanza tradicional. (b) Se analizaron 7 libros de cálculo de uso común en México respecto a la forma en que se abordan ejercicios y problemas. Todos siguen el discurso (con sus variantes) basado en tratar las ideas, conceptos, definiciones, procedimientos y métodos en primera instancia y después se "practica" y se resuelven problemas a manera de aplicaciones.

La fase de experimentación se realizó con un grupo de 23 estudiantes en el curso de Matemáticas para Ingeniería II (cálculo integral de una variable y series). Se diseñaron (o seleccionaron) cuatro problemas, uno para introducir la idea de integración mediante cálculo de distancias, uno más para abordar el concepto de integral definida mediante un problema de áreas, otro para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución y un último que involucra el cálculo de un área de una figura fractal (para series).

En la primera sesión del espacio dedicado a un tema, se presenta el problema a resolver, es decir, se enfrenta al estudiante con el problema antes de abordar cualquier contenido nuevo (y necesario para la solución).

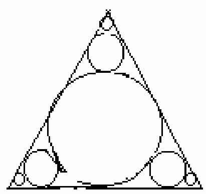
Es importante aclarar que se considera como problema (y así se comunicó y discutió con los estudiantes) aquella situación en la que no se sabe qué hacer, pues si se supiera, ya no habría problema. De la misma forma, se entiende que para resolver un problema es hacer lo que se hace, cuando no es claro cómo afrontar la situación.

Se trabaja en forma colaborativa en seis equipos de trabajo, cinco de cuatro estudiantes y uno de tres. El trabajo al interior de los equipos se desarrolla siguiendo el siguiente esquema sistemático (se presenta en una hoja de trabajo para solución de problemas) que algunos llaman técnica de lectura analítica:

1. ¿Qué es lo que se quiere determinar (o a dónde se quiere llegar)?
2. ¿Qué datos se ofrecen?
3. ¿Qué se conoce del problema?
4. ¿Qué se desconoce?
5. Plantear una estrategia de solución.
6. Describir el proceso de solución.
7. Plantear la respuesta y valorar sus alcances.

De los problemas señalados líneas arriba, aquí, para mostrar algunos aspectos relevantes de la experiencia, presento uno de ellos:

En la figura se bosqueja una infinidad de círculos aproximándose a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo es tangente a otros círculos y a los lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados de longitud *L*, encuentra el área total ocupada por los círculos.



La intención del problema es motivar el estudio de series pero, obviamente, no se agota el procedimiento señalado, en una sola sesión. La idea es trabajar sobre los primeros 5 aspectos, es decir, desde qué se pide en el problema, hasta llegar a establecer una estrategia para resolverlo. Los estudiantes entran entonces en la fase de investigación, en trabajo extraclase, sobre qué es una sucesión, qué es una serie y cómo se determina, en su caso, la suma de una serie, para en la siguiente sesión, discutir sobre lo investigado y establecer los conceptos y procedimientos mediante una interacción, primero en equipos y después plenaria, con guía del profesor.
Para ilustrar sobre los resultados obtenidos veamos el trabajo realizado por uno de los equipos (el formado sólo por 3 estudiantes): en los puntos 3, 4 y 5 del proceso (en los dos primeros todos los equipos coincidieron en sus apreciaciones, sólo se observan diferencias linguísticas) ellos anotan:

> ¿Qué se conoce del problema?
> *Encontrar A de un círculo.*
> *Encerrada en un triángulo eq (L iguales y $\angle$ int iguales).*
> *Sucesión infinita de círculos.*
> *Después del círculo principal, son áreas de círculos iguales.*
> ¿Qué se desconoce?
> *Cómo hacer una suma infinita de números.*
> *Cuál es el límite de la sucesión de círculos.*
> *Los radios de los círculos.*
> Plantear una estrategia de solución.
> *Encontrar la relación entre las características del triángulo y los radios de los círculos.*
> *Ya con r, plantear una ecuación general para poder sumar las áreas.*

Inmediatamente después de esto, el equipo determina la relación entre el radio del círculo mayor y la altura del triángulo, y logran deducir que el radio de los círculos siguientes es la tercera parte del mayor, todo esto sin ayuda del profesor. Enseguida, proponen que la expresión que les puede permitir calcular el área total es

$$A = \pi\left(\frac{\sqrt{3}\,L}{6}\right)^2 + 3\pi\left(\frac{\sqrt{3}\,L}{18}\right)^2 + 3\pi\left(\frac{\sqrt{3}\,L}{54}\right)^2 + \ldots$$

A este momento, el equipo ya ha llegado más allá de lo que se proponía en la sesión, sin embargo, muy motivados por su avance discuten y reconocen que la "diferencia" en los términos de la suma está en los denominadores, e intentan, con éxito, construir una expresión general para "*todos los términos*" según sus propias palabras. Después de reflexionar, proponer y discutir sobre sus ideas, logran determinar que

$$A = \pi\left(\frac{\sqrt{3}\,L}{6}\right)^2 + 3\pi\sum\left(\frac{\sqrt{3}\,L}{2\cdot 3^{n+1}}\right)^2,$$

pero surgen dudas sobre el uso del símbolo $\sum$, de hecho no se atreven a escribir que *n* va de 1 a infinito, aunque desde luego, usaron este hecho para deducir la expresión. Aún más motivados, preguntan "*si la sumatoria se puede resolver*" porque "*según el dibujo, el área está limitada por el triángulo y se debería poder calcular*". Se les felicita por el nivel de sus reflexiones pero no se les da la respuesta, indicándoles que es parte del trabajo de investigación que deben realizar para continuar el proceso de solución y se les invita a simplificar lo más posible su última expresión. Finalmente, concluyen esta parte del trabajo expresando el área como

$$A = \frac{\pi}{12} L^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$$

Conclusiones

- Es muy notable la motivación que se logra en los estudiantes cuando se les hace ver la necesidad de nuevo conocimiento matemático y encontrar sentido al estudio de conceptos y teoremas.
- En el proceso de resolución de un problema resultan de fundamental importancia las formas de comunicación entre los integrantes de equipo, las nociones y palabras que usan para discutir y explicar sus razonamientos.
- El trabajo colaborativo es una forma de trabajo muy útil cuando se logra que los alumnos entiendan y lleven a la práctica las ideas que le dan sustento. Se incrementa el nivel de disposición para realizar las tareas, se discute, propone y critica siempre pensando en colaborar para tener éxito en el trabajo.
- Las representaciones mentales previas que tienen los estudiantes sobre conceptos como sucesión, límite o "suma infinita", se manifiestan de manera natural en su intento de organizar y explicar su estrategia de resolución.
- Es posible rediseñar el contenido de las matemáticas para ingeniería a partir de la resolución de problemas como eje que guía las secuencias de enseñanza y el desarrollo del curso en general.

Referencias bibliográficas

Campistrous, L.; Rizo, C. (2000). Curso especial geometría y resolución de problemas. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-14*. Universidad de Panamá, 17 al 21 de julio. 38.

Cantoral, R. (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 12*, Tomo 1. 41-52.

Cantoral, R.; Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 3*, Núm. 3, 265-292.

Ferrer, M.; Rebollar, A. (1994) La habilidad para resolver problemas matemáticos. *Memoria de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. San José, Costa Rica, 26-29 de julio.

Novak, Joseph. (1977) *Teoría y práctica de la educación*. Madrid, España: Alianza Editorial,

Schoenfeld, A-H. (1983). *Episodes and executive decisions in Mathematical Problem Solving*. Adquisition of mathematics concepts and processes, Academic Press, EUA.

Wheatley, G. (1989) Perspectiva constructivista en el aprendizaje de la Matemática y la Ciencia. *Primera conferencia Internacional en la Historia y la Filosofía de las Ciencias*. Tallahassee, Florida.

Un curso de Cálculo Integral con PBL (Problem-Based-Learning)

Ma. de Lourdes Quezada Batalla
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey. México
lquezada@campus.cem.itesm.mx

Resumen
El curso de Cálculo Integral del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) que mostramos en este trabajo es un modelo de enseñanza-aprendizaje basado fundamentalmente en las nuevas tendencias educativas, principalmente la regla de los cuatro pasos que implica tomar en cuenta la parte numérica, algebraica, analítica y conversacional de los conocimientos impartidos, se retoma la corriente constructivista, al considerar la reconstrucción del conocimiento para que los estudiantes adquieran conocimientos con significado y finalmente otro punto importante es el avance de la tecnología, cuyo crecimiento a pasos agigantados nos hace considerar el proceso de enseñanza-aprendizaje desde un punto de vista diferente al convencional.
El propósito de este trabajo es mostrar las experiencias obtenidas en la implementación de este curso en el que seguimos la estrategia didáctica de PBL (Problem-Based-Learning) junto con otras técnicas didácticas. Con esta forma de trabajo dentro y fuera del salón de clases pretendemos fomentar y desarrollar en los estudiantes una serie de habilidades, actitudes y valores que están plasmadas en la MISION 2005 del ITESM

Antecedentes

El Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) es una institución que se preocupa por estar a la vanguardia en todas las actividades que inciden directamente en el proceso enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, por ejemplo, sus planes de estudios se revisan y modifican cada 5 años, prepara a los profesores en técnicas y estrategias educativas y establece su MISION considerando las opiniones de profesores y empleadores
En 1995 se emitió la Misión 2005 del Sistema ITESM, la cual incorpora que en los modelos de enseñanza-aprendizaje se considere además de la parte académica, el fomentar la formación de habilidades actitudes y valores (HAV's) en los alumnos, es decir, que dentro de los cursos se consideren no sólo los conocimientos sino también la promoción de habilidades, actitudes y valores como son: el aprendizaje colaborativo, el trabajo en equipo, el aprendizaje por cuenta propia, el uso de la tecnología, la capacidad de análisis, síntesis y evaluación, así como la capacidad de identificar y resolver problemas, la buena comunicación escrita, el dominio del idioma inglés y algunas más. El Tecnológico de Monterrey pretende con esto preparar mejor a los futuros profesionistas, que se adapten más rápidamente y mejor en el mundo laboral tendiente a globalizarse y en el cual la tecnología avanza a pasos agigantados.
Es por ello que surge una transformación en el ITESM y por ende en todos los cursos que se imparten en él. Desde 1995 hasta la fecha se ha producido un cambio en los esquemas de enseñanza-aprendizaje que se habían utilizado en el área de matemáticas en el Sistema, especialmente en el Campus Estado de México, los cambios que se han presentado van desde las técnicas y estrategias didácticas utilizadas en las diferentes materias hasta en los métodos de evaluación de los aprendizajes logrados.
En el curso de Matemáticas II para ingeniería que presentamos se pretende ser partícipe de esta transformación, trabajando con la estrategia de aprendizaje basado en problemas (PBL problem-based-learning), programando actividades que incidan directamente en los estudiantes para lograr los objetivos de aprendizaje así como los objetivos propuestos en la MISION del ITESM. Estas actividades van de acuerdo a los propósitos del Tecnológico

pero están sustentadas en las nuevas teorías de la Matemática Educativa especialmente en la enseñanza del cálculo siguiendo la regla de cuatro y la corriente constructivista, enseñando y aprendiendo los conceptos matemáticos con significado, relacionándolos directamente con el mundo en que vivimos, apoyándonos para ello en la tecnología para fortalecer este tipo de aprendizajes.

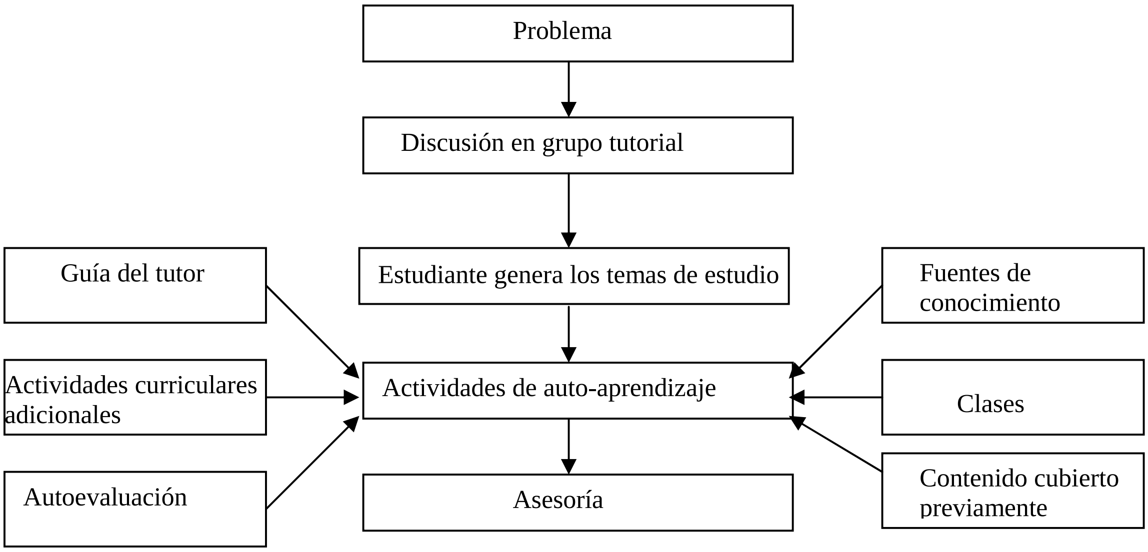
La estrategia didáctica de aprendizaje basado en problemas

El aprendizaje basado en problemas (PBL) es una estrategia de enseñanza-aprendizaje en la que tanto la adquisición de conocimientos como el desarrollo de habilidades y actitudes resulta importante, en el PBL un grupo pequeño de alumnos se reúne, con la facilitación de un tutor, a analizar y resolver un problema seleccionado o diseñado especialmente para el logro de ciertos objetivos de aprendizaje. Durante el proceso de interacción de los alumnos para entender y resolver el problema se logra, además del aprendizaje del conocimiento propio de la materia, que puedan elaborar un diagnóstico de sus propias necesidades de aprendizaje, que comprendan la importancia de trabajar colaborativamente, que desarrollen habilidades de análisis y síntesis de información, además de comprometerse con su proceso de aprendizaje.
El aprendizaje basado en problemas se sustenta en diferentes corrientes teóricas sobre el aprendizaje humano, tiene particular presencia la teoría constructivista, de acuerdo con esta postura en el PBL se siguen los tres principios básicos:

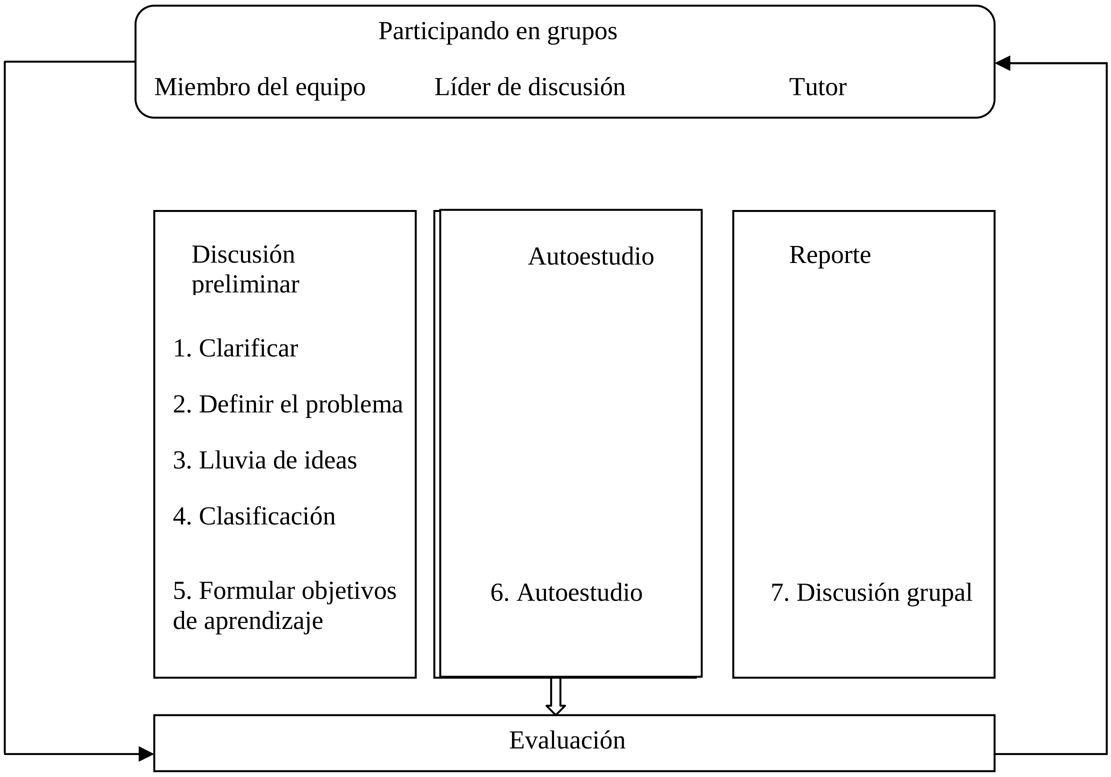
- ✓ El entendimiento con respecto a una situación de la realidad surge de las las interacciones con el medio ambiente
- ✓ El conflicto cognitivo al enfrentar cada nueva situación estimula el aprendizaje
- ✓ El conocimiento se desarrolla mediante el reconocimiento y aceptación de los procesos sociales y de la evaluación de las diferentes interpretaciones individuales del mismo fenómeno.

El PBL incluye el desarrollo del pensamiento crítico en el mismo proceso de enseñanza-aprendizaje, no lo incorpora como algo adicional sino que es parte de del mismo proceso de interacción para aprender. El PBL busca que el alumno comprenda y profundice adecuadamente en la respuesta a los problemas que se usan para aprender abordando aspectos de orden filosófico , sociológico, psicológico histórico, práctico, etc. Todo lo anterior con un enfoque integral.

El ambiente de trabajo del curso de Matemáticas II para ingeniería está basado principalmente en la estrategia de aprendizaje basado en problemas apoyada con otras técnicas didácticas como resolución de problemas, resolución de ejercicios, proyectos, discusión grupal, cátedra, etc., lo cual explicaremos posteriormente de manera más amplia.
PBL es una metodología compuesta por una colección de problemas cuidadosamente construidos, consistentes en descripciones de un conjunto de eventos observables que necesitan explicación, estos problemas le permiten enfrentar situaciones, tanto familiares como inéditas, con las cuales se genera la necesidad de búsqueda de nuevos conocimientos o bien retomar algunos hechos ya conocidos.
En el proceso enseñanza-aprendizaje dentro y fuera del salón de clase trabajamos mediante el siguiente esquema



Desde la presentación del problema al grupo hasta la discusión grupal seguimos la estructura que se muestra en el esquema



Para fortalecer el proceso seguido con PBL utilizamos junto con otras técnicas, la de resolución de problemas que consiste en proponer a los estudiantes problemas en los que se plantean una serie de preguntas o problemas que permiten que los grupos de estudiantes avancen descubriendo y fortaleciendo su aprendizaje de los temas del curso, estos los utilizamos con dos variantes:

- ✓ Resolución de problemas - estudiar tema - discusión grupal
- ✓ Estudiar tema – resolución de problemas - discusión grupal

Otras actividades que utilizamos son la resolución de ejercicios lo cual favorece el conocimiento práctico, pueden trabajarse de forma individual y en equipo, además usamos la discusión grupal, la cátedra, pequeños proyectos, prácticas de computadora, lecturas, tareas etc.Cada una de estas actividades tiene un objetivo en sí misma dentro del currículum, así como un objetivo dentro de la red de actividades contempladas en el curso.

El curso en forma electrónica está montado en la plataforma de Lotus Notes, el cual es un sistema de comunicación electrónica que permite que un grupo de personas compartan información. Permite además diseñar estructuras acordes a las necesidades de ese grupo de personas. Contiene cinco bases de datos en las cuales se encuentran las actividades del curso, estas bases se describen enseguida:

- ✓ Schedule: Organización, planeación de actividades.
- ✓ Media Center: Materiales, lecturas, actividades.
- ✓ Course Room: Discusiones individuales y de grupo, asignación de trabajo individual o de grupo
- ✓ Assesment: Preguntas y exámenes rápidos, encuestas, autoevaluación, coevaluación
- ✓ Profile: Datos de los participantes, formación de equipos

Como complemento de las actividades del curso los estudiantes realizan prácticas en la computadora, utilizando mathematica para aprender y/o resolver problemas complejos, también en algunas sesiones de resolución de problemas los estudiantes pueden trabajar con Excel o bien con mathematica.

Estructura del curso:

El temario del curso lo dividimos en cinco módulos, de acuerdo a los problemas que se trabajan con PBL, la estructura de los problemas y la estrategia que utilizamos nos permite cubrir un mayor número de contenidos que en los cursos tradicionales, en el cuadro siguiente mostramos el total de los temas cubiertos (los contenidos que no se tratan en los cursos convencionales del ITESM se encuentra marcados con negritas):

Nombre del módulo	**Temas que comprende**
1. Diferenciales	Diferenciales
2. La integral	Integral definida, Sumas de Riemann, teorema fundamental del cálculo, antiderivada, cálculo numérico de áreas
3. Calcular y aplicar las integrales	Aplicaciones de la integral, métodos de integración, ecuaciones diferenciales de variables separables, formas

	indeterminadas e integrales impropias
4. Series	Sucesiones, series y sus criterios de convergencia, series alternantes, series de potencias, series de Taylor y de MacLaurin
5. Sistemas de ecuaciones lineales	Matrices y determinantes, sistemas de ecuaciones lineales

Cada módulo se inicia con un problema con el cual aplicamos la técnica y se fortalece con las actividades antes mencionadas, los módulos 2, 3 y 4 se cubren en aproximadamente cuatro semanas de clase cada uno , el módulo 1 en una semana y el módulo 5 en dos. Enseguida mostraremos un ejemplo de la forma de trabajo dentro y fuera del salón de clase.

Ejemplo:
Primera sesión: Trabajo en equipo

1. Se presenta la situación:

    “El gobierno de la Bahía Fundy en Nueva Escocia construirán una planta de producción de energía eléctrica a partir de la energía de marea haciendo una presa que separa la bahía del mar. La energía eléctrica se produce por el flujo y el reflujo del agua entre la bahía y el mar. El gobierno de Fundy necesita estimar si la cantidad producida de energía es suficiente para cubrir las necesidades de todos sus habitantes y en caso de que haya sobrante explorar la posibilidad de venderla a los pueblos vecinos”.

    Tu has sido seleccionado para ayudar al gobierno a tomar una decisión, ¿qué decisión tomarías y justifica porqué lo harías ?
2. Los estudiantes trabajan con la situación presentada los primeros cinco pasos de la técnica, es decir:
    - ✓ Aclaran dudas para poder entender la situación
    - ✓ Definen el problema, ¿qué deben hacer?
    - ✓ Lluvia de ideas, ¿qué conocen de la situación?, ¿qué desconocen?
    - ✓ Clasifican lo obtenido en el punto anterior
    - ✓ Formulan sus propios objetivos de aprendizaje
3. Autoestudio, búsqueda en internet, biblioteca digital, libros, asesorías con profesores, etc. para cubrir sus objetivos de aprendizaje
4. Elaboración de un reporte de toda la información obtenida

Segunda sesión: Trabajo en equipo

5. Presentación de los resultados obtenidos en forma oral y escrita (pasa uno o varios integrantes del equipo elegidos al azar)
6. Discusión grupal de los resultados obtenidos por los equipos, ampliación de los mismos (en caso de ser necesario)
7. Evaluación de la actividad y de los aprendizajes adquiridos
8. Con los resultados obtenidos el profesor decide si es necesario fortalecer con otras actividades (resolución de ejercicios, resolución de problemas, proyectos, etc)

Conclusiones

PBL es un sistema educativo basado en el diseño de "problemas" y en una metodología para resolverlos, consideramos que permite desarrollar en los alumnos la habilidad de comunicación efectiva, trabajo en equipo, búsqueda efectiva de información y aprendizaje autodirigido, además de que se fomenta el desarrollo de la habilidad de plantear soluciones a cualquier tipo de problemas que se les presente.

Este curso se implementó el semestre anterior y se está implementando durante este semestre. Cada semestre se tiene un grupo testigo para contrastar los resultados obtenidos, por el momento no podemos concluir completamente acerca de las bondades y defectos de esta técnica pero considerando las experiencias del semestre pasado y las del actual, así como la de otros profesores del Sistema ITESM que están también implantando un curso con PBL podemos concluir que hasta este momento hemos obtenido los siguientes logros:

- ✓ Los alumnos son los protagonistas principales en el salón de clases.
- ✓ La mayor parte de las responsabilidades del proceso enseñanza-aprendizaje recaen por completo en el estudiante.
- ✓ Se promueve la reflexión entre la relación de conceptos y su aplicación en la realidad.
- ✓ Le encuentran sentido al aprendizaje de conceptos básicos para poder tener bases para concluir.
- ✓ Aprendizaje de mayor número de contenidos que en el sistema tradicional, los alumnos encuentran un mayor número de objetivos no considerados inicialmente por el profesor.
- ✓ Romper con la idea o costumbre de que la información tiene que venir del maestro.
- ✓ Este modelo obliga al alumno a desarrollar las habilidades de comunicación, exposición y búsqueda de información relevante.
- ✓ Los estudiantes aprenden a escuchar las opiniones de sus compañeros con mucha más atención debido a que ahora es parte de su responsabilidad. Desde luego que pueden tener puntos de vista distintos pero estos los exponen con mucho respeto por las ideas de los demás, tratando siempre de basar sus ideas en el conocimiento adquirido.
- ✓ Son más conscientes de su propio aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Päiyi Tynjälä. Towards expert knowledge?. Acomparison between a constructivist and a traditional learning environment in the University. International journal educational research. Pag. 357 – 416.

Assessment of problem based learning; students and classes. http://edweb.sdsu.edu/clrit/learningtree/PBL/webassess/studentNclasses.html

Burch, Kurt . PBL and the Lively Classroom http://www.udel.edu/pbl/cte/jan95-posc.html

Hmelo, Cindy E. Problem based learning: developmentof knowledgeand reasoning strategies. http://www.cc.gatech.edu/cogsci/edutech/people/PostDocs/Pubs/Hmelo.cogsci.html

Kenley,Rusell. Problem based learning: within a traditional teching enviroment. http://www.arbld.unimelb.edu.au/~kenley/conf/papers/rk_a_p1.htm

Staff of the faculty of Engineering. Problem based learning and Engineering Education http://www-civil.eng.monash.edu.au/affil/pbl-list/papers.htm

El aprendizaje basado en problemas como técnica didáctica. Dirección de Investigación y Desarrollo Educativo, Vicerrectoría Académica, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

La Misión 2005 del sistema ITESM

Problemas que conducen a ecuaciones diferenciales de segundo orden

Pedro Castañeda Porras, Iván Valido
Universidad de Pinar del Río. Cuba
pcasta@mat.upr.edu.cu

Resumen
Este trabajo trata sobre la deducción de las Ecuaciones Diferenciales a partir de situaciones físicas que se presentan en determinados problemas de carácter físico y/o técnico. Los ejemplos ilustraran los pasos del modelado, es decir, hacia un planteamiento matemático y su solución, y la interpretación física del resultado. Se dedicará en este espacio a la modelación de problemas que conduce a Ecuaciones Diferenciales de segundo orden, que son particularmente convenientes para el uso de un Asistente Matemático(DERIVE), el cual nos brinda determinados ficheros para obtener soluciones tanto general como particular, y algo importante es el tratamiento gráfico de la familia de curvas (solución general) y la solución particular, para poder hacer un análisis e interpretación geométrica de la situación problemática, pues de otra forma no es posible en un tiempo razonable.

Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales tienen una importancia fundamental en la Matemáticas para la ingeniería debido a que muchos problemas se representan a través de leyes y relaciones físicas matemáticamente por este tipo de ecuaciones.
Es interés de este trabajo la deducción de las Ecuaciones Diferenciales a partir de situaciones físicas que se presentan en determinados problemas de carácter físico y/o técnico. A esta transición del problema, al Modelo Matemático correspondiente se llama ***Modelado***. Este método tiene una gran importancia práctica para el ingeniero y se ilustra por medio de ejemplos típicos.
En estos ejemplos se ilustraran los pasos del modelado, es decir, hacia un planteamiento matemático y su solución, y la interpretación física del resultado. Se dedicará en este espacio la modelación de problemas que conduce a Ecuaciones Diferenciales de segundo orden y esto lo justifica desde el punto de vista teórico y práctico pues se verán más fáciles si uno se concentra primeros en tales ecuaciones, pues de esta manera los estudiantes familiarizado con los conceptos de segundo orden, resultaría más fácil los conceptos, métodos y resultados hacia las de orden superior.
Las Ecuaciones Diferenciales de segundo orden son particularmente convenientes para el uso de un Asistente Matemático(DERIVE), el cual nos brinda determinados ficheros para obtener soluciones tanto general como particular, y algo importante es el tratamiento gráfico de la familia de curvas (solución general) y la solución particular, para poder hacer un análisis e interpretación geométrica de la situación problemática, pues de otra forma no es posible en un tiempo razonable.

Ideas básicas

Se infiere que el estudiante verá que la aplicación de las matemáticas a un problema de ingeniería consiste básicamente de tres fases.

- **Modelo:** translación de la información física dada a una forma matemática(modelo). De esta manera se obtiene un modelo matemático de la situación física. Este modelo puede ser una ecuación diferencial, un sistema de ecuaciones lineales o alguna otra expresión matemática.

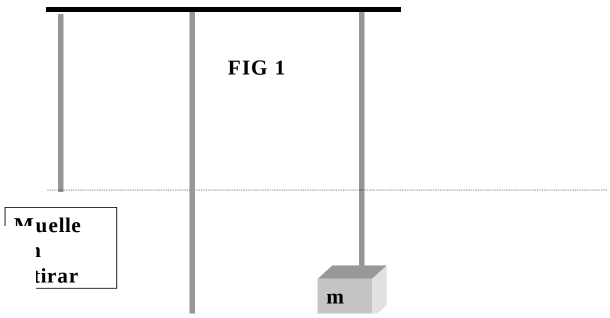
- **Resolución.** Tratamiento del modelo por medio de métodos matemáticos. Esto lleva a la solución del problema dado en forma matemática.
- **Interpretación.** Interpretación del resultado matemático en términos físicos.

Observación: Es posible que una Ecuación Diferencial tenga más de una variable dependiente, x e y, y una variable independiente, las ecuaciones de ese tipo no se estudiaran aquí.

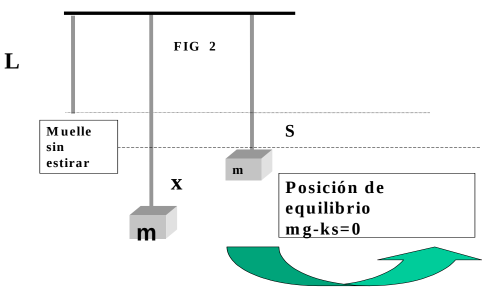
Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Las Ecuaciones Diferenciales Lineales de segundo orden tienen la forma:
$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$ (1). donde los resultados que se obtengan se generalizan con facilidad a ecuaciones lineales de cualquier orden, que nosotros no trataremos en este trabajo.
Es posible obtener en forma sencilla una solución general y(x) de (1), si se conoce una solución general $y_h(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente.
Se tiene entonces que, y(x) se obtiene al sumar cualquier solución $\tilde{y}(x)$ de (1), que no contenga constantes arbitrarias, a $y_h(x)$, es decir,
$Y(x) = y_h(x) + \tilde{y}(x)$.

Problemas que conducen a EDO de orden 2.



MOVIMIENTO
ARMONICO SIMPLE



Ley de Hooke
La fuerza F de restitución, opuesta a la dirección del alargamiento s a la cual se encuentra sometido un resorte está dada por F=ks donde k es una constante de proporcionalidad que depende de cada resorte y s es la elongación.

La fuerza neta F está dada por la segunda ley de Newton F = ma, dode
$a = x''(t)$ *luego* $mx''(t) = -(s+x)k + mg = -kx + mg - ks = -ks$
el signo negativo significa que la fuerza de restitución actúa en dirección opuesta al movimiento o sea.

$$x'' + (k/m)x = 0$$

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

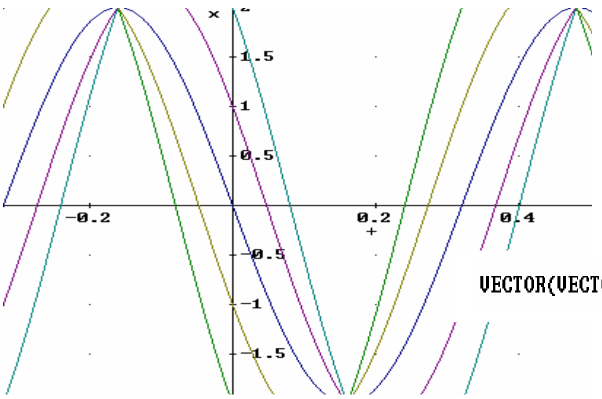
Problema:
Un peso de 24 lb, sujeto al extremo de un resorte, lo estira 4 pulgadas. Escribir la ecuación del movimiento si el peso en reposo, se suelta desde el punto que está 3 pulgadas por encima de la posición de equilibrio.

Respuesta.
Determinación de k
Según la ley de Hooke 24 =k.(1/3) luego
K =72 lb/pie **Planteamiento del modelo matemático(E.D.)**
Como m =24/32 = 3/4 se tiene w^2= 72/(3/4)=96 luego la ecuación es

$$x'' + 96\, x = 0$$

Solución general vía DERIVE.

$$x = A\cos\sqrt{96}\,t + B\sin\sqrt{96}\,t$$



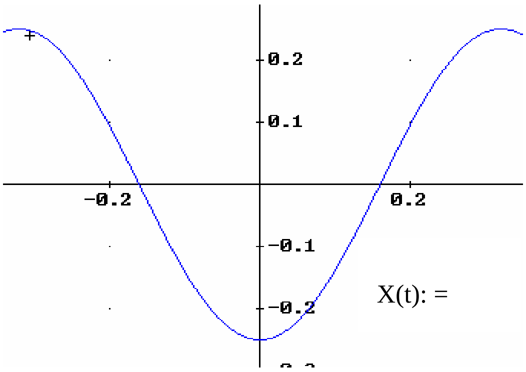
Familia de curvas

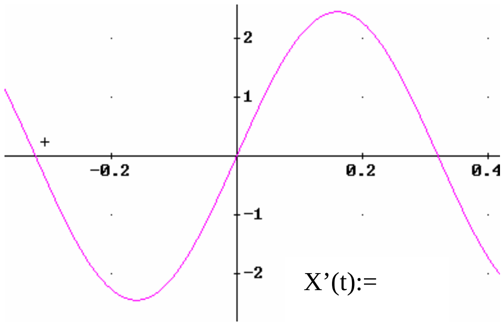
VECTOR(VECTOR(x := b·COS(√96·t) + c·SIN(√96·t), b, -2, 2), c, -2, 2)

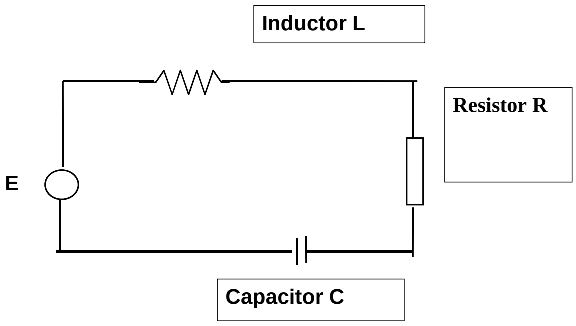
$$\begin{cases} x(0) = -0.25 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Ajustes de condiciones iniciales

$$x = -0.25\cos\sqrt{96}t$$







Si i(t) representa la corriente en el circuito eléctrico RLC en serie

Entonces la caída de voltaje a través de la resistencia, la inductancia y la capacitancia están dada por:

Inductor **Inductancia L: henrys (h)** **Caída de voltaje: L(di/dt)**	**Resistor** **Resistencia R: ohms (W)** Caída de voltaje: iR	**Capacitor** **Capacitancia C: farads (*f*)** Caída de voltaje:(1/C)q

Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff, la suma de las caída de voltaje es igual al voltaje E(t) suministrado al circuito, esto es

L(di/dt)+ iR+(1/C)q=E(t)

RECORDANDO QUE

I = dq/dt

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$$

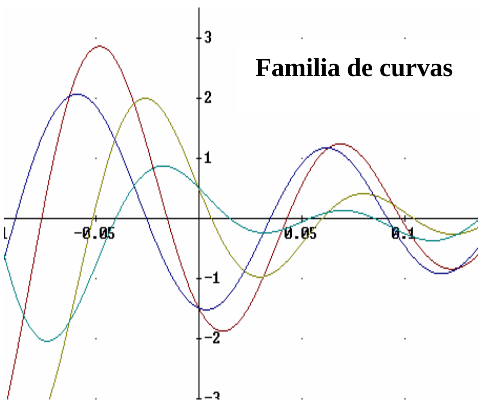
Problema:

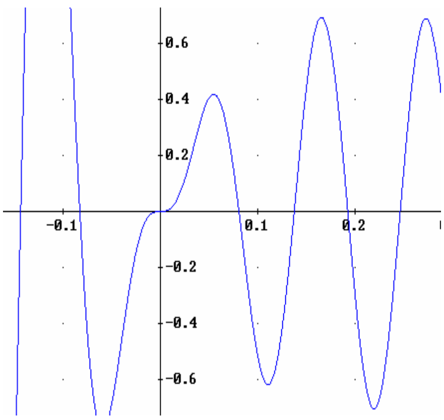
Un circuito tiene en serie una fem E = 100sin(60t) v, un resistor de 2 Ω, un inductor de 0.1 h y un capacitor de 1/260 f. Si la corriente inicial y la carga inicial en el capacitor son ambas cero, calcular la carga en el capacitor en cualquier instante de tiempo t.

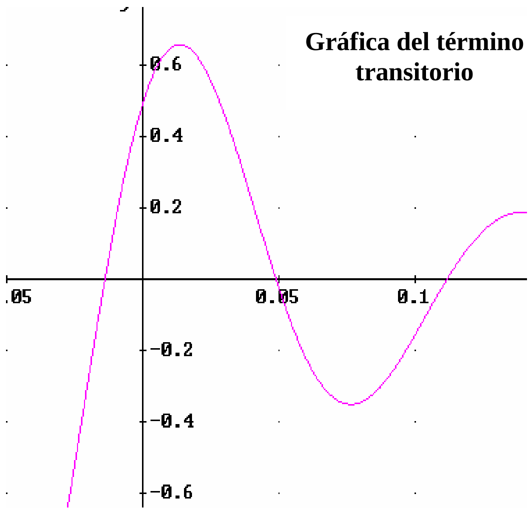
Solución Vía DERIVE:
Solución General.

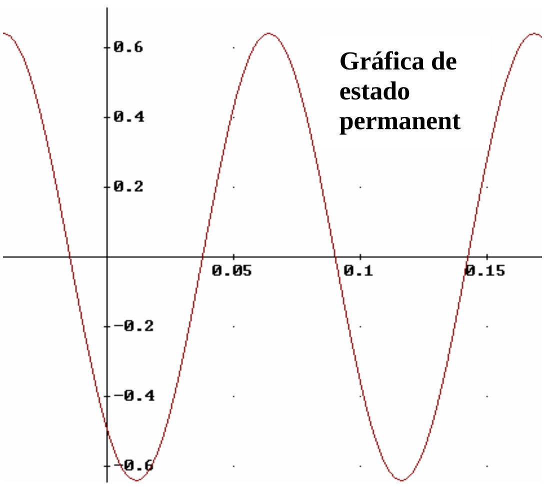
$$q = e^{-10t}(A\sin(50t) + B\cos(50t)) - \frac{25}{61}\sin(60t) - \frac{30}{61}\cos(60t)$$

Solución Particular









Comentarios:

- Se puede observar en la resolución de problemas que los Asistentes Matemáticos le permiten a los estudiantes: interpretar situaciones, a través de la visualización gráfica de las soluciones, desarrollar habilidades en el manejo de la computación, realizar cálculos en las asignaturas afines a la carrera para enfrentar cualquier situación técnica, diseñar, evaluar y modelar, de ahí la gran utilidad que estos presentan en la enseñanza de la

Matemática.

- La solución de problemas esta sustentado en el aprendizaje significativo, es decir, tomando en cuenta el nivel de partida de los estudiantes y una motivación que orienta al alumno hacia el problema, la cual lleva implícito una contradicción dialéctica. El profesor a través de un sistema de pregunta logra que los estudiantes resuelvan los diferentes problemas.
- Los alumnos presentan ciertas dificultades a la hora de formular las relaciones a utilizar en el modelo, a partir de los datos del problema, por no tener claro los conceptos físicos utilizados en el mismo, de ahí la importancia de dichos conocimientos.
- Por último una vez obtenido el modelo, se evalúa el mismo a través de su comprobación, mostrando la compatibilidad del mismo con cada uno de los ejemplos resueltos.

Conclusiones

- La aceptación del ordenador por buena parte del profesorado, tiene su raíz en el convencimiento de su utilidad y en la satisfacción de verse identificados con ciertos valores, como la modernidad, de la cual el ordenador es un símbolo popular.
- La utilidad de los ordenadores en la mejora de la docencia de las matemáticas no es cuestión de todo o nada, sino de un uso juicioso de la herramienta.
- Los beneficios pedagógicos que proporciona la incorporación del Asistente son:
  1. Los estudiantes conocen más profundamente los algoritmos que en cursos anteriores y los programas siendo capaces de hacer modificaciones en los mismos para lograr otros propósitos.
  2. Los estudiantes medios reciben estímulos importantes al percibir que no deben ser capaces de ser brillantes manipuladores algebraicos para llegar a dominar el pensamiento abstracto.
  3. Muchos conceptos nuevos son encontrados por el alumno a través de su experiencia con el software
  4. A lo largo del curso los estudiantes se sienten más motivados hacia la asignatura que en cursos anteriores debido a:
     4.1) Una mayor vinculación a su especialidad, debido a la posibilidad de resolver problemas más reales y de interés.
     4.2) Un peso menor de los cálculos manuales.
     4.3) Visualización gráfica de los resultados.
  5. Los docentes se vinculan más a la especialidad.

Referencias bibliográficas

Kreyszig, E. (1991). *Matemática Avanzadas para Ingeniería.* Volumen I. Editores Noriega.

Leyva, P. (1985). *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones.* Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.

Pontriaguin, L.S. (1978). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* C. de la Habana: Ed Pueblo y Educación.

Pérez, P. (1998). *Cálculo Infinitesimal Asistido por Ordenadores.* Dpto. Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia: Servicios de Publicaciones.

¿Ejercicio o problema?

Walter O. Beyer K.
ASOVEMAT, Venezuela
wbeyerk@yahoo.com wbeyer@una.edu.ve

Resumen
En el presente trabajo se muestra cómo es posible construir una situación-problema, a partir de un enunciado usual de los libros de cálculo, el cual es usado en éstos como un mero ejercicio, la cual a su vez puede conviertese en el núcleo generador de un "campo de problemas" en el sentido que le atribuye Gascón (1994). Además, se quiere resaltar la importancia de los problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática; y señalar la viabilidad de tal enfoque a través de la construcción de un campo de problemas. El trabajo constituye una propuesta teórica, la cual no ha sido experimentada en aula, pero, creemos que con su implementación se lograrían los siguientes objetivos: 1) cambiar la concepción tan arraigada de muchos alumnos y docentes de que los problemas matemáticos tienen solución única; 2) que el resolutor opte, al enfrentarse a un problema, por trabajar con diferentes tipos de representación de la situación-problema; 3) estimular la creación de esquemas al integrar diferentes conceptos y propiedades matemáticas; 4) conducir al resolutor a establecer conjeturas y hacer generalizaciones; 5) el trabajo con los diferentes momentos de la actividad matemática; 6) la construcción de un campo de problemas.

Introducción

Es frecuente encontrar en los cursos y libros de cálculo el siguiente enunciado: *"Torcer un trozo de alambre de longitud dada l, de manera que forme un rectángulo cuya área sea la mayor posible."* (Demidovich y otros, 1973, p. 91) O alguna de sus variantes: *"Hallar dos números cuya suma es 6 y cuyo producto sea tan grande como sea posible."* **¿Es este enunciado un ejercicio o es un problema?**
A primera vista, y como es presentado ordinariamente en los textos, es un mero ejercicio de cálculo de una o varias variables (dependiendo de cómo sea la estrategia de solución).
Sin embargo, el enunciado dado esconde una verdadera **situación problemática** si se lo trabaja adecuadamente, pudiendo proporcionarse **diversos métodos de solución** que van desde los métodos geométricos elementales; pasando por los de corte numérico; llegando hasta los del cálculo diferencial en una y varias variables. Se está en presencia de lo que Dienes llama **variabilidad matemática**.
La riqueza de la situación no culmina aquí. Existen, adicionalmente, varias maneras de **generalizarla**: en el plano podría plantearse, en primer término, la situación análoga, tomando una región cualesquiera cuya frontera sea una poligonal y estudiar el problema obtenido para ver si se logra el "mismo resultado" que para el caso del rectángulo; en segundo término, podemos ahora considerar el caso de una región cuya frontera es una curva arbitraria y ver qué pasa. Hemos arribado al **problema isoperimétrico**. Otra vía de generalización consiste en plantear el problema análogo en el espacio y posteriormente considerar extensiones del mismo de manera semejante a como se hizo en el plano.
En este trabajo se estudiarán algunas de las situaciones entes señaladas, viendo tanto sus aspectos matemáticos como los didácticos, enfatizando en estos últimos en la **resolución de problemas**.

Marco teórico

El presente trabajo se apoya sustancialmente en la **Teoría de los Momentos Didácticos**, teoría que sustenta los diversos modelos docentes (Gascón, 2001) o "paradigmas" que para Gascón (1994) pueden idealmente establecerse, según la preeminencia de algún(os) momento(s) didáctico(s) en la actividad matemática de aula y en el "modelo aproximativo" de enseñanza-aprendizaje de la matemática (Charnay, 1994).
Es el "Paradigma de los Momentos Didácticos" el que, de acuerdo con Gascón, conjuga los momentos exploratorio, teórico y de la técnica. "El paradigma de los momentos didácticos pone de manifiesto una interrelación dialéctica entre el desarrollo de las técnicas matemáticas, la evolución de los campos de problemas y la construcción recursiva de las teorías matemáticas asociadas." (Gascón, 1994, p. 50). Además, en el marco de este paradigma "se considera que todo problema de matemáticas es el punto de partida de un (virtual) campo de problemas." (op. cit., p. 49) Adicionalmente, "se considera que toda actividad matemática puede ser interpretada como un proceso de estudios de campos de problemas". (op. cit., p. 50)
Este paradigma engrana perfectamente en el "Modelo Aproximativo" de enseñanza, el cual es descrito por Charnay (1994). Este modelo cubre todos los momentos: desde el **momento del primer encuentro**, pasando por los momentos **exploratorio**, de la **técnica**, **tecnológico-teórico**; hasta los momentos de **institucionalización** y **evaluación**. En el marco de este modelo existe una interacción fuerte entre el saber y el alumno, y cobra especial relevancia la resolución de problemas. Es aquí en donde ubicamos nuestra propuesta.

Maximizar el área de un triángulo dado el perímetro

Resolvamos el siguiente problema de optimación: Se considera que el perímetro **P** de un triángulo está dado, y se desea construir el triángulo de **mayor área B posible**. ¿Qué condiciones verifica ese triángulo?
Sean **x, y** y **z** las respectivas longitudes de los tres lados.
Se tiene entonces que el problema es: Maximizar B sujeto a: P=x+y+z
A los fines de resolver este problema consideraremos el área expresada mediante la **Fórmula de Herón**: **B (x,y,z)=** $\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ donde **s** es el **semiperímetro**.
Sin embargo, buscar el óptimo de **B** equivale a buscar el de $\mathbf{B^2}$. En consecuencia trabajaremos con la función **A(x,y,z)=s(s-x)(s-y)(s-z)**.
Ante esta situación (presencia de un extremo condicionado) tenemos, a primera vista, dos vías: una, los multiplicadores de Lagrange; la otra, despejar una variable de la restricción (por ejemplo z) y sustituir en la función objetivo.
Se tiene que **z=P-x-y**. Para este último caso hemos entonces de maximizar la función
A(x,y)=s(s-x)(s-y)(s-P+x+y)=s(s-x)(s-y)(-s+x+y)
Procediendo mediante el paquete informático MAPLE obtenemos:
{x = s, y = 0}, {x = s, y = s}, {y = s, x = 0}, {y = 2/3 s, x = 2/3 s}
Como podemos observar, las tres primeras soluciones hemos de descartarlas puesto que si algún lado es cero tendríamos un triángulo degenerado; y si **x=y=s**, entonces **z=0** ya que **s**

es el semiperímetro y tendríamos nuevamente un triángulo degenerado. Por lo tanto, tenemos la solución **x=y=2/3s**; de donde **x=y=z**. Es decir, el **triángulo es equilátero**.
En forma análoga, se puede analizar analítica y gráficamente el problema dual: minimizar el perímetro dada el área.
Es poco usual encontrar este problema propuesto, ni siquiera en los libros de cálculo. El uso de este problema permite de alguna forma materializar el **momento del primer encuentro** con los problemas de optimación. Además, proporciona una buena ocasión para introducir y aplicar la Fórmula de Herón, así como discutir la poca utilidad que en esta situación tiene la fórmula usual del área de un triángulo. También la búsqueda de la solución induce al empleo del pensamiento conjetural característico del **momento exploratorio**. Finalmente, queremos remarcar que se da inicio aquí a la gestación de un campo de problemas.

Diferentes vías de solución a un problema de optimación

Problema: **Máx A=xy   s.a. 2x+2y=P**
Vías de solución:
1) Aplicar la técnica de los Multiplicadores de Lagrange: Máx $xy-\lambda(P-2x-2y)$
2) Usando técnicas del cálculo diferencial de una variable:
- Se despeja una variable (digamos y) de la condición: $y=\frac{P-2x}{2}$
- Se sustituye en la función objetivo: $A(x)=x\left(\frac{P-2x}{2}\right)=-x^2+\frac{P}{2}x$
- Se determina el punto crítico y se usa el criterio de la primera o el de la segunda derivada.

3) Usando técnicas de geometría analítica:
- Se despeja una variable (digamos y) de la condición: $y=\frac{P-2x}{2}$
- Se sustituye en la función objetivo: $A(x)=x\left(\frac{P-2x}{2}\right)=-x^2+\frac{P}{2}x$
- **Se determina el vértice de la parábola ya que allí se localiza el óptimo**

4) Método experimental:
- Se consideran valores de x , y .
- Se calculan los correspondientes valores del área A.
- Se construye una tabla de valores.
- Se analiza la tabla y se trata de establecer alguna “regularidad”.

5) Aplicar la desigualdad que relaciona la media geométrica con la media aritmética:
$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$ con x, y≥0.
6) Solución dada por Euclides en sus “Elementos”.
7) Aplicación de productos notables: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
El trabajo con este problema le permite al alumno situarse en el **momento de la técnica** y profundizar en las técnicas ya exploradas, aumentando con ello su dominio de éstas. Es posible aquí también establecer diferentes vías de solución mediante el uso de una variedad de técnicas, la vinculación de éstas entre sí y la aplicación de diversos modos de representación, todo lo cual va en la dirección de la variabilidad matemática.

El problema isoperimétrico

¿Por qué tienen forma esférica las pompas de jabón? ¿Por qué son esféricas las gotas de lluvia? Las respuestas a estas interrogantes tienen que ver con el sólido con un volumen dado que tiene la menor área. O, en forma dual, el sólido que encierra el mayor volumen dado el área.

El análogo bidimensional es considerar la figura plana que encierra el mayor área dado el perímetro. Esto es el problema isoperimétrico. El problema dual es hallar la figura de menor perímetro con un área dada. **La figura que cumple esta propiedad es el círculo**.

El fundamento de esta propiedad del círculo se encuentra en las siguientes propiedades:

- Si una figura se contrae proporcionalmente alrededor de un punto O en la razón 1:r, entonces el perímetro disminuye en la misma razón 1:r y el área disminuye en la razón $1:r^2$.
- Si la superficie de una figura forma parte de la superficie de otra, entonces esta última tiene un área menor que la primera.
- Si una curva convexa encierra otra curva convexa, entonces la curva envolvente tiene mayor perímetro.
- Toda figura no convexa puede convertirse en una figura convexa con mayor área y menor perímetro.

Esta nueva situación enriquece el naciente campo de problemas y obliga a repensar las técnicas empleadas con anterioridad, lo cual conduce a adentrarse en el **momento tecnológico-teórico**; vale decir, en la justificación y argumentación de la práctica matemática realizada.

Generalización a tres dimensiones (Paralelepípedo)

De manera análoga al problema bidimensional, se quiere maximizar el volumen dada el área total. Esto es: **Máx V=xyz   s.a. 2xy+2xz+2yz=A**.

Diferentes vías de solución a un problema de optimación en R^3

<u>Problema</u>: **Máx V=xyz   s.a. 2xy+2xz+2yz=A**

<u>Vías de solución</u>:

1) Aplicar técnicas del cálculo diferencial de varias variables (la técnica de los Multiplicadores de Lagrange): Máx xyz-λ(A-2xy-2xz-2yz).

2) Usando técnicas del cálculo diferencial de varias variables (extremos no condicionados):

- Se despeja una variable (digamos z) de la condición: $z=\dfrac{\left(\frac{1}{2}A-xy\right)}{x+y}$
- Se sustituye z en la función objetivo: $V(x,y)=xy\dfrac{\left(\frac{1}{2}A-xy\right)}{x+y}$

- Se determina el punto crítico.

3) Método experimental:

- Se consideran valores de x , y, z.
- Se calculan los correspondientes valores del volumen V.
- Se construye una tabla de valores.
- Se analiza la tabla y se trata de establecer alguna “regularidad”.

4) Aplicar la desigualdad que relaciona la media geométrica con la media aritmética:

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}, \text{ con x, y, z} \ge 0.$$

5) Aplicación de productos notables.

El trabajo con este problema conduce a la consolidación de los diversos momentos y a su interrelación, así como a darle cuerpo al campo de problemas.

Optimar el volumen de un paralelepípedo

Nuestro problema consiste en maximizar el volumen del paralelepípedo dado el área total del mismo: Máx V=xyz s.a. 2xy+2xz+2yz=A

- Despejamos **z** de la condición: $z = \frac{\left(\frac{1}{2}A - xy\right)}{x+y}$
- Sustituimos en la función objetivo: $V = xy\,\frac{\left(\frac{1}{2}A - xy\right)}{x+y}$
- Emplearemos el paquete MAPLE para realizar los cálculos:

$$\{y=y, A=0, x=0\}, \{A=6y^2, y=y, x=y\}, \{x=x, y=0, A=0\}$$

Como vemos, ni la primera ni la última de las soluciones son admisibles. Luego, la solución requerida es la segunda. Esto es: $A=6y^2$, x=y. Sustituyendo en **z**, se obtiene que **z=y.** En conclusión, obtenemos: x=y=z. Es decir, el paralelepípedo es un **cubo**.

El Caso del Tetraedro Regular (4 caras)

El volumen del tetraedro regular es: $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$, donde **a** es la arista.

Otra relación volumétrica viene dada por: **V=** $\frac{1}{3}$ **CA**, donde **C** es el **área total** (suma de las áreas de todas las caras) y **A** es el apotema. Esta fórmula es válida para todos los poliedros regulares.

De todas las pirámides triangulares con un volumen dado, el tetraedro regular tiene la mínima superficie. Como podemos observar, el tetraedro obedece al mismo principio que los otros casos estudiados: el cuerpo que encierra el mayor volumen es el regular.

Ventajas y Reflexiones Didácticas

Uno de los hechos resaltantes aquí es la **Variabilidad Matemática**: diversidad de enfoques y multiplicidad de representaciones. Tenemos soluciones de tipo **gráfico**, empleando **álgebra**, usando **cálculo**, aplicando herramientas de **geometría**, haciendo **experimentación numérica**. También es posible emplear material concreto como cuerdas, cartón, etc.

La experimentación numérica y con modelos físicos permite la manipulación de datos y, además, se permanece básicamente en un contexto aritmético.
Si se trabaja con el apoyo de tecnología, es posible tener simultáneamente en pantalla de un computador múltiples representaciones: texto, símbolos (fórmulas), tablas y gráficas.
Otro aspecto destacable es el uso intensivo de la **visualización** aspecto este de gran importancia didáctica.
Hacemos nuestras las palabras de Soon y Soon (luego de un trabajo parcialmente similar al nuestro), cuando afirman que "desde una simple actividad de sostener una cuerda, el alumno de la escuela secundaria fue conducido a través de una serie de lecciones de discusión descubriendo múltiples enfoques al problema – que van desde el simple `cortar y pegar ´, colecciones de datos, gráficos simples a los métodos más sofisticados del álgebra, del cálculo y la prueba geométrica. En el proceso ellos encontraron conceptos e ideas nuevas, revisitaron y renovaron lo que ellos han aprendido y han descubierto nuevas perspectivas de la matemática a través del enlace de varios tópicos matemáticos." (Soon y Soon, 1997, p. 38)
Pareciera una buena consigna para los que creemos en la Resolución de Problemas como una buena herramienta para la enseñanza-aprendizaje de la matemática, el título de un artículo de Martin, Terrence y Redfern: "Un buen problema conduce a otro y a otro y ..."
Se quiere evitar que los alumnos creen automatismos que les inducen, en muchos casos, a efectuar cálculos mecánicos sin preguntarse si tienen o no el menor sentido, v.g. el Problema de la Edad del Capitán ("En un barco hay 20 cabras y 15 vacas. ¿Cuál es la edad del capitán?").
El excesivo automatismo en la utilización de reglas puede producir en los alumnos rigidez mental y ello es lo opuesto a lo que se desea cuando se hace Resolución de Problemas.
El enfoque del profesor, con una sola vía de solución, puede crearle al alumno la falsa impresión de que esa solución es la única posible.
Se quiere que los estudiantes adquieran la capacidad de hallar teoremas y de demostrarlos.
La generalización es una importante característica de la matemática y es importante ejercitarla (¿Se podrá proceder en otros caos de la misma forma? ¿Podría generalizarse el teorema simplificando sus premisas, si el teorema posee casos particulares interesantes o si existen casos límites, si posee un recíproco verdadero, etc.?).
Asimismo, el uso de la analogía juega un importante papel en la matemática (¿Cómo se ha procedido en caos similares? ¿Se conocen ya teoremas que tenían premisas o tesis similares?) .

Conclusiones

La propuesta presentada no ha sido experimentada en aula. Se esperaría que su implantación permitiría: 1) cambiar la concepción tan arraigada de muchos alumnos y docentes de que los problemas matemáticos tienen solución única; 2) que el resolutor opte, al enfrentarse a un problema, por trabajar con diferentes tipos de representación de la situación-problema; 3) estimular la creación de esquemas al integrar diferentes conceptos y propiedades matemáticas; 4) conducir al resolutor a establecer conjeturas y hacer generalizaciones; 5) el trabajo con los diferentes momentos de la actividad matemática; 6) la construcción de un campo de problemas.

Reseñas bibliográficas

Apostol, Tom. (1982). *Calculus, Vol. 1*. Barcelona, España: Editorial Reverté.

Berlanga, R., Bosch, C. y Rivaud, J. J. (1999). *Las matemáticas perejil de todas las salsas.* México: FCE.

Beyer, Walter. (1998). Estudio de extremos: El caso no tratado. ¿Omisión involuntaria o error didáctico?. *Memorias del IV Simposio de Enseñanza de la Matemática en Ingeniería*, Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En: Parra, C. e Saiz, I. (Comps.). *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones* (Cap. III, pp. 51-63). Buenos Aires: Paidós.

Courant, R. y John, F. (1974). *Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol. 1.* México: Editorial Limusa.

Demidovich, B. y otros. (1973). *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Moscú: Editorial MIR.

Frank, Kenneth W. (1986). Bent wire –an application of quadratic equations and inequalities. *Mathematics Teacher, 79*(1), 57-58.

Gannon, G., Bonsangue, M. y Redfern, T. One good problem leads to another and another and ... *The mathematics Teacher, 90*(3), 188-191.

Gascón, J. (1994). El papel de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática. *Educación Matemática*, *6*(3), 37-51.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 129-159.

Jungk, Werner. (1981). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la matemática. Segunda Parte.* Ciudad de la Habana: Editorial de Libros para la Educación.

Natansón, I. P. (1977). *Problemas elementales de máximo y mínimo. Suma de cantidades infinitamente pequeñas. Lecciones Populares de Matemáticas.* Moscú: Editorial MIR.

Oldknow, Adrian. (1995). On peaks and flat functions. *The Mathematical Gazette*, *79*(484), 47-50.

Peralta, Javier. (1994). Problemas de máximos y mínimos y algunas reflexiones sobre el automatismo en su resolución. *Educación Matemática*, *6*(2), 56-71.

Perelman, Y. (1978). *Álgebra recreativa. Ciencia Popular.* Moscú: Editorial MIR.

Pólya, G. (1973). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1. (Induction and analogy in mathematics)*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Rademacher, Hans y Toeplitz Otto. (1970). *Números y figuras.* Madrid: Alianza Editorial.

Santos Trigo, Luz Manuel y Sánchez Sánchez, Ernesto. (1996). *Perspectivas en educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Shyers, Joan. (1986). Reflexive paths to minimum-distance solutions. *Mathematics Teacher, 79*(3), 174-177 y 203.

Soon, Yee-Ping y Soon, Spario Y. T. (1997). When is a rectangle the largest ...? *Mathematics in School, 26*(5), 34-38.

Steinhaus, Hugo. (1987). *Instantáneas matemáticas. Biblioteca Científica Salvat.* Barcelona, España: Salvat Editores.

Permanencia del concepto de derivada parcial, en los estudiantes, para su aplicación a problemas

Rosa M. Longás, María J. Frare, Mirta S. González
Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ciencias Económicas. Argentina
mgonzale@fcemail.uncu.edu.ar

Resumen

A lo largo de varios años de experiencia docente, hemos observado que los estudiantes aprenden la definición de derivada parcial, y realizan la ejecución mecánica de las reglas de derivación, en general, a la perfección. Sin embargo, a la hora de necesitar su aplicación, en un problema de experiencia práctica, no tienen éxito.
Sospechamos que, ante un problema concreto, la primera dificultad que se les presenta a nuestros alumnos, es la identificación del proceso matemático adecuado para resolver la situación, que es lo importante en su desempeño futuro. Ante una evaluación inmediatamente después del desarrollo del tema, su aplicación se hace tan obvia, que no mide la captación del concepto, ya que lo usan por asociación con lo recién estudiado. La falta de internalización del concepto se pone en evidencia en la disminución de respuestas con el transcurso del tiempo. Realizamos una experiencia con alumnos de primer año de la carrera de Licenciatura en Economía, que tienen entre 18 y 20 años de edad.
El esquema del diseño aplicado en la investigación fue: O_1 X_2 O_2 que constituye un diseño de pretest y postest de un sólo grupo. O_1 Pretest : Inmediatamente después de finalizar la enseñanza del tema se eligieron tres alumnos que habían obtenido en materias afines resultados: muy bueno, bueno y regular. Se les tomó una prueba de tres problemas en los que tenían que aplicar distintos conceptos ya aprendidos. Los alumnos no conocían cuál era el tema que se pretendía evaluar, ni existió orientación sobre la aplicabilidad.
X_2 Tratamiento : Continuó la enseñanza de la materia. El tratamiento consistió en dejar pasar el tiempo, para medir con qué consistencia y profundidad se había fijado el tema.
de cómo serían consideradas las respuestas a los problemas planteados en la prueba; el análisis a posteriori; las conclusiones correspondientes y, en anexos, los instrumentos aplicados.

Marco teórico

A lo largo de varios años de experiencia docente, hemos observado que los estudiantes aprenden la definición de derivada, y realizan la ejecución mecánica de las reglas de derivación, en general, a la perfección. Sin embargo, a la hora de necesitar su aplicación, en un problema de experiencia práctica, no tienen éxito.
Al respecto, Santos Trigo (1995) refiere que según Romberg (1992), desarrollar o hacer matemática se puede comparar con hacer música en el sentido que por más que se aprendan varios instrumentos musicales, eso no es hacer música.
La dificultad en el desarrollo del pensamiento conceptual a partir del aprendizaje de la matemática, lo trató Guzmán (1998), utilizando en su estudio preguntas conceptuales sobre función continua, función biyectiva, restricciones.
Nosotros quisimos efectuar este estudio de la comprensión conceptual en el tema Derivadas Parciales, pues consideramos que es fundamental dentro del Cálculo, no sólo por su importancia dentro de la materia, sino por su trascendencia en la vida real, "¿De qué sirve el rigor matemático sin la comprensión del significado de los objetos involucrados?" (Guzmán, 1998, p. 20).
Sospechamos que, ante un problema concreto, la primera dificultad que se les presenta a nuestros alumnos, es la identificación del proceso matemático adecuado para resolver la situación, que es lo importante en su desempeño futuro. Si luego no recordaran las reglas para derivar, podrán salvar el escollo consultando bibliografía, haciendo uso de un software específico, etc.

Ante una evaluación inmediatamente después del desarrollo del tema, su aplicación se hace tan obvia, que no mide la captación del concepto, ya que lo usan por asociación con lo recién estudiado.

Diseño y métodos

Trabajamos con alumnos de primer año de la carrera de Licenciatura en Economía, que tienen entre 18 y 20 años de edad. Todos habían aprobado el examen de Cálculo I, cursaban Cálculo II y ya habían terminado de cursar el tema: "D*erivadas parciales de funciones de n variables"*.
El esquema del diseño aplicado en la investigación fue: $\mathbf{O_1}$ $\mathbf{X_2}$ $\mathbf{O_2}$ que constituye un diseño de pretest y postest de un sólo grupo:

- *Observación 1: Pretest*

Inmediatamente después de finalizar la enseñanza del tema, se eligieron tres alumnos que habían obtenido en materias afines los resultados: muy bueno, bueno y regular.

Se les tomó una prueba de tres problemas en los que tenían que aplicar conceptos ya aprendidos de funciones, límites, álgebra y, fundamentalmente, derivadas.
Los alumnos no conocían cuál era el tema que se pretendía evaluar, ni existió orientación sobre la aplicabilidad.

- *Tratamiento :*

Continuó la enseñanza de la materia. El tratamiento consistió en dejar pasar el tiempo, para medir con qué consistencia y profundidad se había fijado el tema.

- *Observación 2: Postest*

Cuarenta días después, al mismo grupo de alumnos, se aplicó una prueba similar a la anterior. Para asegurar la igualdad del grado de dificultad se confeccionó esta segunda prueba haciendo cambios en el orden de los ejercicios y en el nombre de las variables, pero no en los conceptos utilizados.

Los alumnos no debían saber qué se les tomaría y no fueron avisados hasta el momento del examen, que habían sido seleccionados. Era imprescindible que no estudiaran o repasaran el tema para la prueba.
Previamente, con el objeto de consensuar la interpretación de los problemas, se efectuó una validación con colegas de materias afines.

Análisis

1 *Análisis a priori*
Detallamos cómo serían considerados los resultados de cada uno de los problemas planteados en las pruebas, incluídas en el Anexo:

- En los *ejercicios n° 1 - pretest y n° 2 - postest* el alumno debía derivar, pero para ello debía interpretar el problema y observar que a la función se le imponía un valor constante, por lo tanto la operación resultaría correcta cuando derivara en forma implícita.

Este proceso sería considerado **positivo** cuando indicara simbólicamente qué iba a realizar y cuando interpretara correctamente el resultado, cualquiera sea el obtenido.

- En los *ejercicios n° 2 - pretest y n° 3 - postest* pensamos que el alumno no tendría inconvenientes en responder satisfactoriamente el ítem **a** y el **b**, pero en el **c** tendría problemas de interpretación; la palabra *"cambio"* y *"aumento de producción"* lo podían llevar a pensar en derivar, sin embargo el ejercicio no requería este procedimiento sino que solamente debía resolver una ecuación lineal y además dar la respuesta pedida, que no era numéricamente la solución de la ecuación.

Por lo tanto obviaríamos las respuestas a y b y consideraríamos resultado **positivo** sólo si el alumno resolvía bien el ítem c.

- En los *ejercicios n° 3 - pretest y n° 1 - postest* para el ítem a, el alumno daría una respuesta según la aplicación de límite doble a la función de demanda. Para el ítem b y c debía derivar.

Consideraríamos un resultado **positivo** cuando supiera interpretar correctamente los resultados obtenidos luego de las dos derivadas parciales.

Resultado general de la prueba:

Como son tres los resultados positivos posibles, consideraríamos **satisfactorio** el examen que obtuviera por lo menos dos positivos y **no satisfactorio** el caso en que el alumno contestara afirmativamente uno o ninguno de los ejercicios planteados.

Pensamos que en el Pretest obtendríamos mejores resultados debido a la cercanía de los prácticos realizados en la Cátedra, que permitiría que identificaran mejor la herramienta matemática a aplicar. En el Postest tomado 40 días después pensábamos obtener resultados inferiores, pues creemos que el transcurso del tiempo hace que el rendimiento obtenido en la aplicación mecánica de reglas disminuye, ya que no se adquieren destrezas permanentes y por lo tanto, la respuesta a problemas prácticos, sin la orientación de un título indicativo de tema, es inferior. Así podríamos dar una respuesta a nuestra hipótesis, respecto a la permanencia del concepto de derivación en aplicaciones posteriores.

2. Análisis a posteriori

Transcribimos los resultados obtenidos en el siguiente cuadro:

ALUMNO	*PRETEST*		*POSTEST*	
	Ejercicio N°	Resultado	Ejercicio N°	Resultado
Muy Bueno	1	positivo	2	negativo
	2	negativo	3	negativo
	3	positivo	1	positivo
		SATISFACTORIO		***NO SATISFACTORIO***
Bueno	1	positivo	2	negativo
	2	positivo	3	negativo
	3	negativo	1	positivo
		SATISFACTORIO		***NO SATISFACTORIO***
Regular	1	positivo	2	negativo
	2	positivo	3	negativo
	3	negativo	1	negativo
		SATISFACTORIO		***NO SATISFACTORIO***

Los alumnos fueron identificados como: Muy Bueno, Bueno, Regular según los resultados obtenidos en cursos anteriores de Matemática.
Respecto de los problemas seleccionados, en cuanto a dificultad y contenido:
el ejercicio 1 del Pretest se corresponde con el ejercicio 2 del Postest
el ejercicio 2 del Pretest se corresponde con el ejercicio 3 del Postest
el ejercicio 3 del Pretest se corresponde con el ejercicio 1 del Postest

En el cuadro se observa que en el Pretest los tres alumnos obtuvieron resultado ***SATISFACTORIO*** y en el Postest obtuvieron resultado ***NO SATISFACTORIO.***

Conclusiones

Debido a la limitación de tiempo por el cursado de la materia la Observación 2 se realizó 40 días después, aunque nos parece que sería más aconsejable dejar pasar por lo menos 6 meses desde la primera observación.

Los resultados obtenidos coincidieron con nuestras expectativas que consistían en que al transcurrir el tiempo, y ya lejos del contexto de la clase que orienta sobre un mecanismo de resolución, se comprobaría una disminución de la permanencia del concepto de derivada, para la resolución de problemas.

Esto resultó así en todos los alumnos examinados, independientemente de la clasificación realizada de los mismos según su rendimiento en materias previas.

Los resultados de esta investigación nos llevaron a orientar los proyectos de la tesis de una Maestría en Didáctica de la Matemática que estamos cursando, en otros temas de las disciplinas que enseñamos, con el objeto de llegar a diseñar una mini-ingeniería didáctica que permita, al estudiante y futuro profesional, un real aprovechamiento de lo estudiado.

Referencias bibliográficas

Santos Trigo, M (1995). *¿Qué significa el Aprender Matemática? Una experiencia con Estudiantes de Cálculo.* Revista Educación Matemática. Vol. 7. N° 1.
Romberg, T.A. (1992). *"Perspectiva on scholarship and research methods"* In D. Grouws (de.) Handbook of research on Mathematics teaching and learning (pp 449-64) National Council of Teachers of Mathematics – New York.
Guzmán R, (1998). *"Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes"* . Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa N° 1.

ANEXO

PRETEST

Ejercicio 1:

Usando *x* trabajadores expertos e *y* inexpertos, un fabricante puede producir $f(x,y)=x^2 y$ unidades por día. Actualmente la fuerza de trabajo está formada por 16 trabajadores expertos y 32 inexpertos, y el fabricante está planeando contratar a un trabajador experto adicional.

Estime el correspondiente cambio en el nivel de trabajo no experto que debería hacer el fabricante para que la producción total sea la misma y escriba la interpretación que corresponda al problema planteado.

Ejercicio n° 2

Un fabricante puede producir máquinas de escribir eléctricas a un coste de 80 dólares cada una y máquinas de escribir mecánicas a un coste de 20 dólares cada una.

a) Exprese el coste mensual de producción del fabricante como una función del número de máquinas eléctricas y de máquinas mecánicas producidas.

b) Calcule el coste total mensual si se producen 500 máquinas eléctricas y 800 mecánicas.

c) El fabricante quiere aumentar la producción de máquinas de escribir eléctricas en 50 al mes sobre el nivel de la parte b). ¿Qué cambio debe hacerse en correspondencia en la producción mensual de las máquinas de escribir mecánicas para que el coste mensual total no varíe?.

Ejercicio 3:

Suponga que la función de demanda de un artículo A depende no solo del precio p_1 de A sino también del precio p_2 de otro bien B. La función resulta: $Q_1 = 3.000 + \frac{400}{p_1-3} + 50\, p_2$.

a) ¿Cuál será la demanda si el precio p_1 toma valores cercanos a 3 y p_2 cercanos a 10?

b) ¿Qué está sucediendo con la demanda de p_1 para incrementos en los precios del bien A? .

c) ¿Y para incrementos en los precios del bien B?.

POSTEST

Ejercicio 1:

Una tienda de pintura vende dos marcas de pintura plástica. Los cálculos de venta indican que si la primera marca se vende a x_1 dólares por litro, la demanda de la primera marca será de $D(x_1,x_2) = 200 + \frac{200}{x_1-2} + 20\, x_2$ litros por mes.

a) ¿ Cuál será la demanda si el precio x_1 toma valores cercanos a 2 y los x_2 cercanos a 3?
b) ¿Qué está sucediendo con la demanda del primer producto para incrementos en los precios de la segunda marca?
c) ¿Y para incrementos de la primera marca?

Ejercicio n°2

En una cierta fábrica, la producción Q está relacionada con las cantidades x e y por la función $Q = 2x^3 + 3x^2 y + y^3$. Si los niveles actuales de las cantidades producidas son x = 20 e y = 10, estime el cambio en el dato x que debe hacerse para acompensar un crecimiento en una unidad en el dato y de modo que la producción se mantenga a su nivel actual.

Ejercicio 3:

Un fabricante confitero, puede ofertar dulces a un coste de 10,5 $ el kilo y bombones a un coste de 18$ el kilo.

a) Exprese la función de Ingreso como una función del número de kilos que vende.
b) Calcule el Ingreso mensual si vende 27 kilos por mes de dulces y 35 kilos por mes de bombones.
c) El confitero, quiere aumentar sus ventas de dulces en 3 kilos al mes sobre el nivel de la parte b). ¿Qué cambio debe hacerse en correspondencia al precio de los dulces para que la función de Ingreso total no varíe?

Trabajo heurístico en la resolución de problemas matemáticos

Lucía Martín de Pero, Elsa A. Rodríguez Areal de Torino
Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
lmartin@herrera.unt.edu.ar   eareal@herrera.unt.edu.ar

Resumen
El presente trabajo consiste en una propuesta teórica preparada para ser aplicada en el desarrollo de las clases de la asignatura Introducción al Análisis Matemático durante el período lectivo 2002. Dichas clases deben propiciar en los estudiantes la formación de intereses cognoscitivos por la asignatura, y éstos se alcanzan en gran medida, cuando el alumno aplica sus conocimientos y habilidades y llega por sí mismo a la solución de problemas, pues así sienten mayor satisfacción por la tarea realizada.
Para adquirir práctica y habilidad resolviendo problemas es necesario un aprendizaje previo de hábitos y actitudes intelectuales que ayuden al estudiante a desarrollar el proceso. Un camino para lograr este propósito lo constituye el *trabajo heurístico*, el que requiere de la preparación pedagógica adecuada de los profesores para dirigirlos. Luego de una enseñanza explícita de una heurística particular y después de haberla aplicado de diversas formas, el individuo está preparado para utilizarla.

Introducción

La Educación Superior debe lograr en el estudiante la capacidad de aprender, es decir, la tarea de la Universidad no consiste en dar una gran cantidad de conocimientos sino en enseñar a los alumnos a pensar, a orientarse independientemente brindándoles estrategias de aprendizaje. Para lo cual es necesario organizar la enseñanza de modo que impulse el desarrollo de esta capacidad, que el estudiante, de sujeto pasivo se convierta en el centro del proceso de aprendizaje.
Por esto, las instituciones deben plantear reformas en la metodología docente. Se demanda mayor énfasis en el trabajo personal, fuera del aula y más acorde a las necesidades personales del estudiante; en muchos casos, se necesita aprender sobre lo que ya se está haciendo, lo que lleva a procurar evitar el traspaso rutinario de información y privilegiar la pedagogía activa, incrementar la discusión y el autoaprendizaje.
Para lograr el nivel que se exige en las habilidades y capacidades matemáticas se requiere la selección de métodos y procedimientos que propicien un nivel de asimilación productivo y la adecuada dirección de la actividad de los estudiantes en la adquisición de los conocimientos que deben asimilar y las acciones y operaciones que han de realizar. La enseñanza heurística es una alternativa para esto.

Desarrollo

La capacidad para la resolución de problemas puede ser adquirida y desarrollada mediante la enseñanza. Cuando más se consiga ejercitar en el alumno la actividad creadora, que es la esencia del método heurístico, mayor rendimiento educativo se obtendrá.
Los procedimientos para la solución de problemas matemáticos pueden ser subdivididos en dos grandes clases:

- ♦ Procedimientos que tienen como base un algoritmo (sucesión de indicaciones con carácter algorítmico).
- ♦ Procedimientos que se apoyan en la aplicación de principios, reglas o programas heurísticos (procedimientos heurísticos).

Ambos tienen en común, que son aplicables en la solución de ejercicios y problemas de las formas más diversas, pero no obstante se diferencian esencialmente. Si para una determinada clase de ejercicios se conoce un algoritmo de solución, entonces se puede solucionar cada ejercicio de esta clase mediante la aplicación de este algoritmo siempre del mismo modo. Cuando esto no ocurre, se debe hallar una vía de solución apropiada. Es útil que se utilicen, entonces, en la enseñanza de la matemática, *métodos heurísticos*.

En metodología de la enseñanza de la matemática, la utilización de la heurística se destaca en los trabajos de G. Polya (1976), W. Junk (1971 -1981), y H. Müller (1989). Este último considera que con un mínimo de conocimientos de los métodos heurísticos y el desarrollo de hábitos en su aplicación consecuente se puede capacitar a los alumnos en la realización de las operaciones mentales necesarias para encontrar de forma independiente la idea de solución.

METODO HEURÍSTICO	**ENSEÑANZA HEURÍSTICA**
Método de enseñanza mediante el cual se le plantean a los alumnos preguntas, sugerencias, indicaciones a modo de impulsos que facilitan: ✓ La búsqueda independiente de problemas. ✓ La búsqueda de soluciones a los problemas	Es la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas. Los estudiantes deben aprender estas reglas y utilizarlas independientemente de manera generalizada, por lo que debe ejercitarse su uso en numerosas y variadas tareas.
Actividad del maestro en la utilización del método: ✓ Conduce la búsqueda del conocimiento ✓ Estimula la reflexión ✓ Guía para que indague, investigue ✓ Guía para que llegue a conclusiones	La enseñanza heurística en la clase de Matemática contribuye a lograr: ✓ Independencia cognoscitiva ✓ Integración de los nuevos conocimientos con los ya existentes ✓ Desarrollo de operaciones intelectuales: analizar - sintetizar; comparar - clasificar; etc. ✓ Capacidades mentales: intuición, creatividad, originalidad en las soluciones

Los elementos heurísticos se pueden clasificar en dos categorías: procedimientos heurísticos y medios auxiliares heurísticos.

Los *procedimientos heurísticos* son formas de trabajo y de pensamiento que apoyan la realización consciente de actividades mentales inteligentes, su introducción en la clase y su aplicación por parte de los alumnos propicia la asimilación de los conocimientos, su capacidad para resolver problemas, para los cuales no existen procedimientos algoítmico, y el desarrollo del pensamiento creador.

Los procedimientos heurísticos pueden dividirse en principios, reglas y estrategias, que pueden ser generales o especiales.

Los *principios* son importantes como elementos de trabajo heurístico en la enseñanza de la matemática ya que se pueden utilizar tanto en la elaboración como en la fase de motivación de un nuevo tema.

Dentro de los principios heurísticos generales se destacan la analogía, la reducción y la generalización.

♦ El *principio de analogía* consiste en la utilización de semejanzas de contenido o forma. La analogía, como un factor heurístico positivo, puede ayudar en tres direcciones:

- Puede aplicarse para que los alumnos descubran una proposición nueva para ellos, y la formulen.
- Puede sugerir el método y el procedimiento para la demostración de una proposición nueva.
- Puede sugerir la vía para la resolución de un problema, de un ejercicio.

♦ El *principio de reducción* puede ser utilizado de cuatro formas diferentes:
- La reducción de un problema a problemas ya resueltos.
- La recursión. Consiste en transformar lo desconocido acudiendo a lo conocido.
- En la demostración de teoremas. Se realiza una reducción del problema dado a problemas parciales o a otros problemas, de manera que la resolución de éstos resulte conocida o menos difícil que la del problema de partida.
- La modelación. Consiste en buscar una interpretación, un modelo, del problema dado, en otro dominio, con el fin de poder aplicar las leyes del nuevo dominio a la resolución del problema transformado y, realizando la transformación inversa del modelo, llegar a la resolución del problema de partida.

Además de estos importantes principios heurísticos generales, existen otros que también resultan útiles para la búsqueda de suposiciones y de ideas de demostración o de solución de problemas entre las cuales se encuentran los siguientes.

♦ Principio de inducción incompleta.
♦ Principio de generalización empírica
♦ Principio de medir y probar sistemáticamente.
♦ Principio de consideración de casos especiales y casos límite.

Las *reglas heurísticas* tienen carácter de impulso dentro del proceso de búsqueda de nuevos conocimientos y de la resolución de problema. Se diferencian de los principios en que prácticamente no ofrecen ninguna sugerencia para encontrar la idea principal de la solución, las reglas heurísticas contienen en sí las acciones y operaciones a realizar en la búsqueda de los medios matemáticos y de la vía para resolver un problema.
Pueden darse como indicaciones o como preguntas. Las reglas heurísticas se emplean en las diferentes situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática:

♦ En la resolución de problemas y ejercicios con texto
♦ En la resolución de ejercicios de construcción
♦ En la demostración de teoremas, en la deducción de teoremas
♦ En la elaboración de conceptos y definiciones matemáticas
♦ En la elaboración de sucesión de indicaciones con carácter algorítmico.

Mediante estas reglas heurísticas el alumno puede llegar a encontrar los medios matemáticos necesarios para la demostración de un teorema, y si sistemáticamente trabaja con ellas, podrá adquirir y fijar la forma de trabajo que le permitirá desarrollar otros muchos teoremas de forma independiente.

Las *estrategias heurísticas*, constituyen el método principal para buscar los medios matemáticos concretos que se necesitan para resolver un problema y para buscar la idea fundamental de solución. Se les llaman también estrategias de búsqueda.
Las estrategias heurísticas o de búsqueda pueden ser generales o universales y especiales.

♦ *Las estrategias universales o generales* son:

- Trabajo hacia adelante o método sintético

  Se caracteriza por partir de los datos y deducir de ellos lo que se busca, pasando por una serie de pasos intermedios, apoyándose en los conocimientos que se tienen, de manera que se obtenga la cadena de inferencias que constituye la solución. Consiste en buscar cuales objetivos parciales o resultados intermedios se pueden alcanzar *partiendo de las condiciones previas o elementos dados.*
- Trabajo hacia atrás o análisis creciente
- Se caracteriza por el examen previo de los que se busca, suponiendo que los datos son verdaderos. El análisis empieza por lo que se busca estableciendo relaciones entre los datos y las exigencias del problema. Consiste en *partir del objetivo final o resultado* y analizar los objetivos parciales o resultados intermedios que habría que plantearse.

♦ *Las estrategias especiales* (para tipos de ejercicios específicos) son:

- Ejercicios de búsqueda
- Esquema de Descartes
- Calcular cantidades de magnitudes
- Método de los lugares geométricos
- Ejercicios de construcción

Los *medios auxiliares heurísticos* son: figuras de análisis, tablas, gráficas, libros calculadoras, computadoras, etc.

Programa Heurístico General: es un sistema de procedimientos heurísticos ordenados, que resulta provechoso conocer y utilizar para la solución de diferentes tipos de problemas o ejercicios con texto. Consta de cuatro fases fundamentales para el trabajo: la de orientación, la de elaboración o trabajo con el problema, la realización y la de evaluación.
La segunda fase es la más importante desde el punto de vista metodológico general y heurístico en particular. En la misma se busca la idea de la demostración o solución del problema, se reflexiona sobre los métodos y se elabora el plan de solución.
Finalmente, podemos citar algunas medidas didáctico-metodológicas para la asimilación de las formas de trabajo heurístico:

♦ Que los alumnos se familiaricen previamente con los procedimientos que deben aprender.

♦ Que el docente seleccione ejemplos apropiados para introducir los procedimientos.

♦ Formular, concisa y cabalmente, los procedimientos que los alumnos deben aprender, de manera que sean completamente comprensibles.

♦ Concientizar a los alumnos con las ventajas que ofrece el empleo de los procedimientos heurísticos, para propiciar la generalización de su uso.

♦ Que los alumnos se capaciten mediante su participación activa, en aplicar independientemente reglas, principios, estrategias y programas heurísticos.

♦ Que el docente aproveche los momentos de la clase para que los alumnos practiquen la utilización de las formas de pensamiento y de trabajo de la matemática.

El empleo de la heurística en la resolución de un *Problema de aplicación:*
Un fabricante produce dos insumos para computadoras: A y B, los cuales deben procesarse a través de dos centrales de producción mecánica. La central 1 tiene un máximo de 120 horas disponibles, y la central 2 tiene un máximo de 180 horas disponibles. La manufactura

del insumo A requiere 6 horas en la central 1, y 3 horas en la central 2; la fabricación del insumo B requiere 4 horas en la central 1 y 10 horas en la central 2. Si la utilidad por cada insumo A es $ 45, y por cada insumo B es de $ 55, determinar el número de insumos A y de insumos B que deberían fabricarse para obtener la máxima utilidad.

PRINCIPIO HEURISTICO GENERAL: Reducción (modelación)
ESTRATEGIA HEURISTICA: Trabajo hacia delante

IMPULSOS DEL PROFESOR

- ♦ Lea el problema
- ♦ Considere los datos
- ♦ ¿Qué relación conoce entre los datos?
- ♦ ¿A qué condiciones están sujetas las magnitudes intervinientes?
- ♦ Represente las magnitudes intervinientes por variables.
- ♦ Confeccione una figura de análisis que le ayude a interpretar el problema.

Confeccione una tabla que le permita obtener el número de insumos A y B y la respuesta al problema.

REGLAS HEURISTICAS

- ♦ Separar lo dado de lo buscado.
- ♦ Representar las relaciones contenidas en el texto del problema.
- ♦ Designar las magnitudes con variables.
- ♦ Sustituir conceptos por sus definiciones.
- ♦ Confeccionar una figura de análisis.
- ♦ Confeccionar una tabla.

MEDIO HEURÍSTICO AUXILIAR: Gráfico, Tabla

Datos: Central 1 (C_1): máximo de 120 horas, Central 2 (C_2): máximo de 180 horas
Insumo A: 6 horas en C_1 y 3 horas en C_2 Insumo B: 4 horas en C_1 10 horas en C_2
Utilidad insumo A: $45, Utilidad insumo B: $55

Relación conocida: Utilidad = Precio x Cantidad
Utilidad = 45 x nº de insumos A + 55 x nº de insumos B

Condiciones: nº de insumos A ≥ 0, nº de insumos B ≥ 0
6 x nº de insumos A + 4 x nº de insumos B ≤ 120
3 x nº de insumos A + 10 x nº de insumos B ≤ 180

Variables: X_1 = número de insumos A , X_2 = números de insumos B, U = utilidad

Figura de análisis:

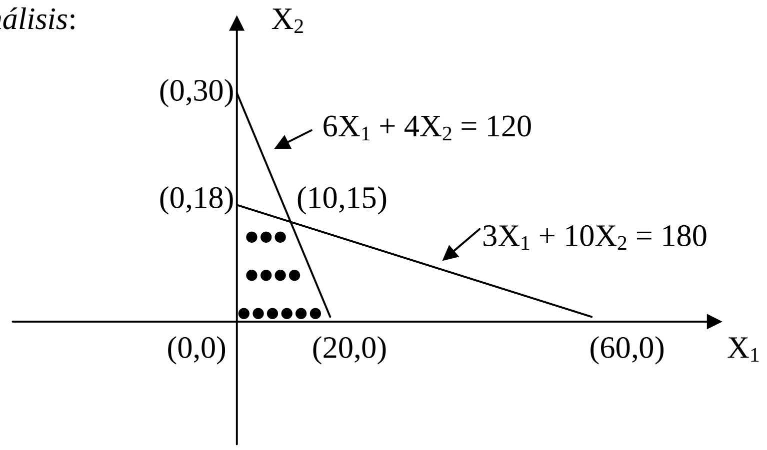


Tabla:

X_1	X_2	$U = 45X_1 + 55X_2$
0	18	$990
10	**15**	**$1275**
20	0	$900

Solución:

$X_1 = 10$ y $X_2 = 15$

Conclusiones

A resolver problemas se aprende lentamente y con esfuerzo, y hace falta que el profesor esté convencido de que su mejor empresa es que sus alumnos aprendan a pensar por sí mismos contando con sus orientaciones.

Uno de los intereses fundamentales de la educación en todos los niveles y para todos los tipos de alumnos debería ser la elaboración de programas sistemáticos para enseñar al alumno cómo pensar. Una educación sin esta instrucción producirá adultos cuyo destino será eventualmente volverse para sus propios esquemas obsoletos de pensamiento y a sus conocimientos que ya no son relevantes, sentirse confusos y luego abrumados por la futura sociedad enormemente cambiada en la que ya no sabrán cómo participar.

El método heurístico es el método ideal par la enseñanza de la matemática, pero no puede constituirse en método único ni siquiera en el método de más frecuente aplicación debido a las dificultades que se plantean al tratar de aplicarlo. Este método es, el límite, no siempre asequible, hacia el cual debe tender la pedagogía de la matemática.

Referencias bibliográficas

Jungk, Werner (1979) Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Majmutov, M.J. (1983) La Enseñanza Problémica. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Müller, Horst (1989) El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática en la EGPL. Santiago de Cuba.

Perez Pantaleón, Guillermo (2000) Procedimientos Heurísticos y Algorítmicos en la Enseñanza de la Matemática. Tucumán. Argentina.

Polya, George (1966) Matemática y razonamiento plausible. Madrid. España: Editorial Tecnos. S.A.

Polya, George (1976) ¿Cómo plantear y resolver problemas? México: Editorial Trillas.

Santos Trigo, Luz Manuel (1994) La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. CINVESTAV. México.

Schoenfeld, Alan H. (1996) Curriculum y Cognición. Resnick y Klopfer (compiladores). Buenos Aires.

Sociedad Canaria Isaac Newton de Prof. de Matemáticas (2000) Las Matemáticas del siglo XX. Resolver problemas: ayudar a los alumnos a pensar por sí mismos. Callejo de la Vega, María Luz. España: Editorial Nivola.

Puzzle ingenieril: Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático I

María Itatí Gandulfo, María Mercedes Gaitán
Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Paraná. Argentina
serving1@infovia.com.ar merorsi@ciudad.com.ar

Resumen
Un rasgo importante para la apropiación de conocimientos en la formación básica de un ingeniero es lograr una transposición didáctica entre elementos de la matemática y la ingeniería.
Se presentan trabajos prácticos que pretenden motivar un aprendizaje reflexivo y dinámico, realizando diferentes actividades tales como investigación, comprensión, adaptación, contextualización, búsqueda de modelos, movilización de conocimientos previos que puede realizar un estudiante de primer año de ingeniería al abordar problemas de la realidad.

Marco teórico

La capacidad de resolver problemas es uno de los objetivos más anhelados en la formación del futuro profesional. Es preocupante que el núcleo de atención se sitúe en aprender algoritmos o teoremas con aplicación a situaciones controladas. Esto oculta los aspectos creativos. Se deben encontrar alternativas para satisfacer las necesidades cambiantes sin comprometer la integridad de cada tema. Así, la formalización, la precisión y la ausencia de ambigüedad del conocimiento matemático no será el punto de partida, sino más bien el punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para conocerla, analizarla y transformarla.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, se intentan hacer los temas más atrayentes y significativos para los estudiantes. Aunque los métodos de enseñanza universitarios tiendan a ser conservadores, el actual diseño curricular de la Universidad Tecnológica Nacional, al poseer materias integradoras desde primer año, pretende el desarrollo temático a partir de dar respuesta a situaciones problemáticas básicas de ingeniería.

Descripción de las actividades

Al intentar concebir programas a partir de la resolución problémica y propiciar en torno a ellos el aprendizaje, se trabajó incorporando en años sucesivos diversos temas bajo esta óptica. Para ello se realizaron trabajos prácticos que pretendían desarrollar habilidades matemáticas e integrar conocimientos ingenieriles, en lo posible regionales, donde se visualiza la necesidad de vincular temas provenientes de distintas áreas que se estima de interés para los alumnos de primer año de ingeniería.
En todas las experiencias realizadas las actividades comprendieron una instancia de ubicación en los temas específicos; en algunas de ellas con el valioso aporte de docentes de materias integradoras.

Se plantearon los siguientes **objetivos:**

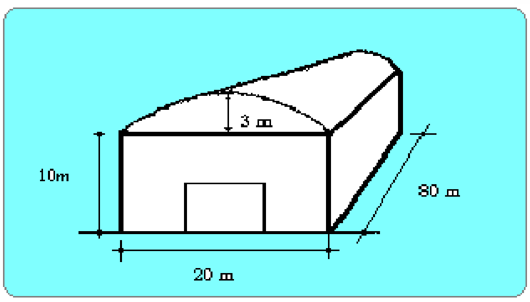
- Vincular un problema ingenieril con distintas áreas de conocimiento involucradas en el plan de estudio de la carrera, percibiendo que el objeto de estudio es complejo y dinámico.
- Lograr un abordaje crítico de un recorte de la realidad y de los resultados obtenidos al estudiarlo.
- Fomentar la investigación bibliográfica y la búsqueda en Internet.
- Formar individuos capaces de realizar tareas de aprendizaje independiente.

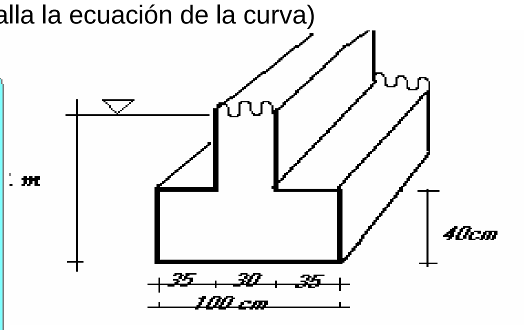
Prácticos Solicitados: (descripción de los prácticos)

De los prácticos presentados en RELME 15 se seleccionó para esta publicación el Trabajo Práctico 1 de Ingeniería Civil que está pensado para que el estudiante aborde en forma independiente el tema Cónicas, que corresponde al programa de Álgebra y Geometría Analítica; además en el trabajo se realizan aplicaciones de la Integral definida. Se presenta la estructura de un galpón de techo parabólico en el cual se necesita conocer su geometría para replantearlo, la superficie del techo para saber el número de chapas a utilizar, el volumen de aire que se debe acondicionar y un análisis de las posibles cargas que soporta la estructura. El problema es planteado en una clase conjunta con los docentes de la materia integradora Ingeniería Civil I. En el taller de Informática los alumnos realizaron el cómputo de materiales manejando una planilla de cálculo.
En Ingeniería Electrónica se lo vincula al desarrollo de antenas parabólicas y se pide investigar sobre ellas. Se completa con un segundo práctico sobre el cálculo de la superficie reflectora de las mismas.

TRABAJO PRACTICO
Tema: Cónicas, Integrales definidas, planillas de cálculo.

1. Investiga las curvas llamadas cónicas y cuál es el origen de su nombre.
2. Reconoce en la ciudad de Paraná formas cónicas indicando el lugar donde se encuentran y la función que cumplen. *Para conocer más sobre las cónicas realiza las actividades del anexo*[3]
3. ¿Qué indicaciones le darías al capataz de una obra para que construya un arco suponiendo que se quiere realizar el galpón de la figura? (Halla la ecuación de la curva)

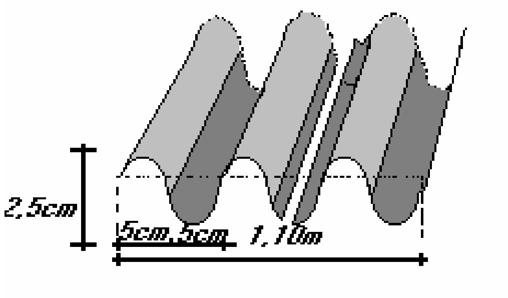




4. Indica las posibles cargas a las que estaría sometida la estructura.
5. ¿Cómo harías para trasladar estos esfuerzos producidos por las cargas exteriores al suelo?

[3]El anexo mencionado consiste en una guía de estudio dirigido sobre las cónicas.

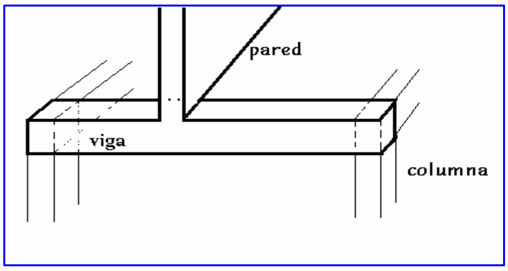
6. Realiza: a) El cómputo de mampostería necesaria para construir el galpón teniendo en cuenta que la base es la zapata corrida esquematizada; b) el cómputo de material necesario para realizar la carpeta de alisado de cemento
7. ¿Cuántas chapas se deberían comprar para cubrir el techo? ¿De qué dimensiones?
8. ¿Cuál es el ancho de chapa lisa necesario para obtener una chapa galvanizada sinusoidal de 1,10 m de ancho? (Ver figura)
9. ¿Cuál es el Volumen de aire que se debe acondicionar?



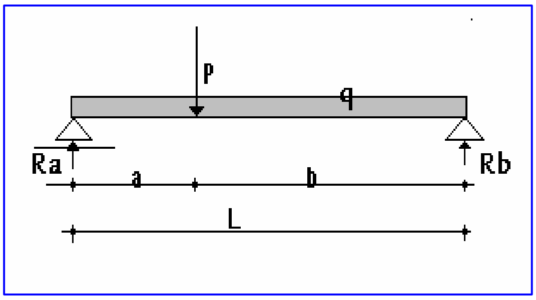
En otro práctico seleccionado correspondiente a Ingeniería Civil, se presenta el tema Análisis de Funciones en forma problémica. Se pide determinar el valor del momento que sirve para dimensionar una viga cargada con una carga puntual **P** y una carga uniformemente distribuida **q**. En forma conjunta con los docentes de la materia integradora, se analizan las carga, verificando la fórmula de la función momento propuesta en una guía de actividades donde se relacionan sistemas de ecuaciones, ecuaciones de equilibrio, continuidad y derivabilidad de las funciones para desarrollar el estudio de la variación de una función. Dicha función resulta ser definida por partes, continua pero no derivable en el punto donde actúa la carga.

TRABAJO PRÁCTICO

Tema: Análisis de Funciones. Vectores. Sistemas de ecuaciones.



PROBLEMA: Dada la siguiente viga cargada con una carga puntual **P** y una carga uniformemente distribuida **q ¿Cuál es el valor del momento que determina las dimensiones de la misma?.**



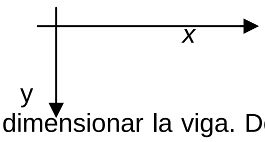
Actividades:

1. Representando las fuerzas como vectores plantea las ecuaciones de equilibrio que permitan calcular el valor de **Ra** y de **Rb** en la viga simplemente apoyada que muestra el esquema.

2. Analizando la función M(x), que da el valor del momento flector en cada punto x de la viga, determina su dominio

$$M(x)=\begin{cases}\dfrac{Pb}{l}x+\dfrac{ql}{2}x-\dfrac{q}{2}x^2 & si \quad 0\le x\le a\\[2ex] \dfrac{Pb}{l}x+\dfrac{ql}{2}x-\dfrac{qx^2}{2}-P(x-a) & si \quad a<x\le l\end{cases}$$

3. Identifica el tipo de función.
4. Estudia la continuidad en el punto x=a
5. Con ayuda de algún ordenador grafica la función momento flector para los siguientes valores de las constantes: (Considera el sentido de los ejes utilizados para cálculos de estructuras
   a) P=3t q=0,5t/m a=1 m b=3 m
   b) P=1t q=0,5 t/m a=1 m b=3 m
   c) P=1t q=0,5 t/m a=3 m b=1 m



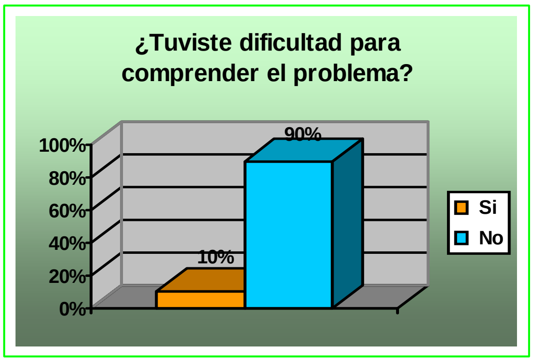
6. Define en la gráfica el valor con el cual se debería dimensionar la viga. Define formalmente el máximo de una función.
7. Dibuja la recta tangente a la curva en el punto del momento máximo en caso de ser posible.
8. Encuentra la derivada de la función M(x).
9. Representa gráficamente la función derivada M´(x) para cada uno de los casos del punto 5.
10. Establece las condiciones necesarias para la existencia del máximo.
11. Define formalmente Punto crítico y las condiciones suficientes para la existencia de un máximo.
12. **Solución del problema planteado**: Determina con qué valor de momento se dimensionaría la viga en cada uno de los casos planteados en el punto 5 y cómo encontraría la posición en que éste ocurre.

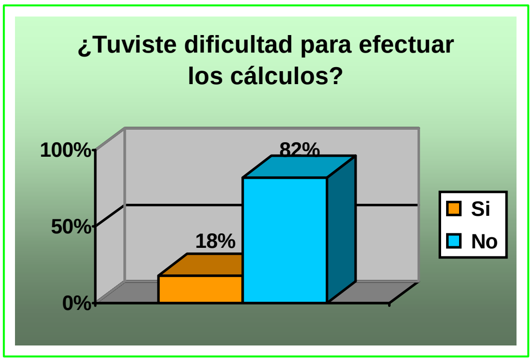
Otros Trabajos Prácticos

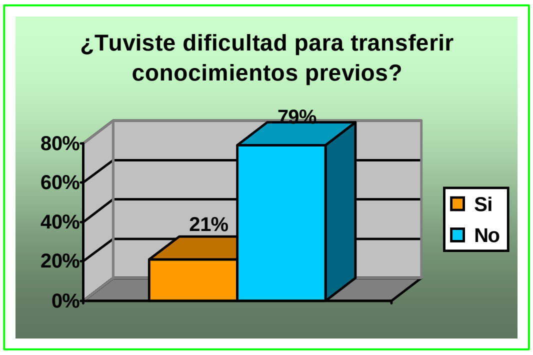
Como en el último bimestre de la materia integradora de Ingeniería Civil se planteó como tema el Análisis de la factibilidad técnica, política y económica de la construcción del puente carretero que une Paraná con Santa Fe, entonces, formando parte de la ficha técnica, se les solicitó a los alumnos el cálculo por el método de Simpson del área aproximada de una de las islas y la determinación de la velocidad media del río en una sección determinada. Un docente del ciclo superior explicó los conceptos teóricos y los métodos más usuales para la determinación de las velocidades medias en una sección. Así se vinculó el tema integración numérica y se vio la utilidad del teorema del Valor Medio del Cálculo Integral en un problema concreto de ingeniería.
Todos los prácticos se realizan en forma grupal (fuera del horario de clases) y no forman parte de la nota final de la materia pero son requisitos de regularidad para las asignaturas vinculadas.

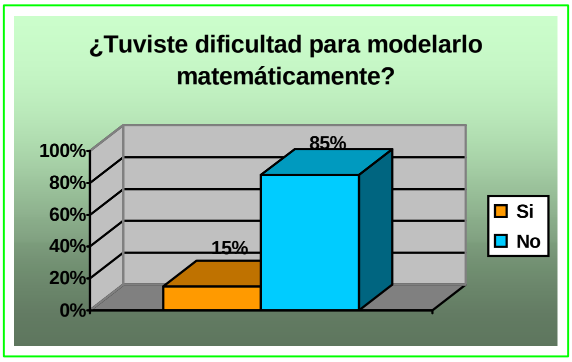
Conclusiones

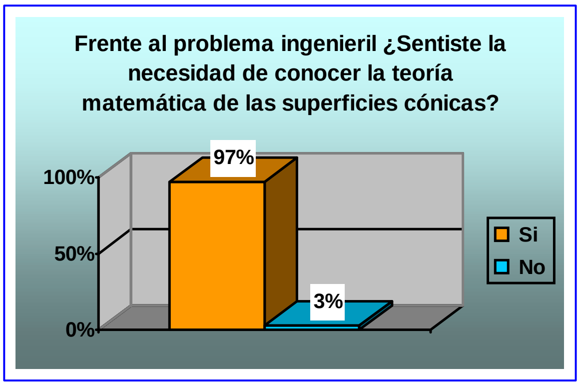
Estos trabajos prácticos permitieron visualizar la necesidad de incrementar las herramientas matemáticas para resolver temas específicos de ingeniería, valorar su aporte a la solución de problemas reales recreando conocimientos matemáticos ya adquiridos y reincorporándolos significativamente.
Por ser los involucrados alumnos de primer año, quienes todavía carecen de conocimientos específicos sobre los temas tratados, se enfatizó inicialmente la intuición. Para ello los métodos gráficos fueron de suma importancia.
Una falencia detectada en algunos alumnos fue la dificultad para trabajar en grupo. Para conocer la opinión de los alumnos referente a esta forma de encarar la enseñanza, al terminar los trabajos, se solicitó que contestaran una encuesta. Algunos resultados se presentan a continuación:

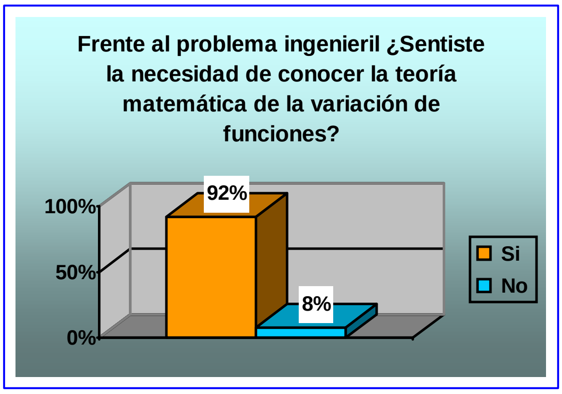

¿Tuviste dificultad para comprender el problema?
100%
80%
60%
40%
20%
0%
90%
10%
Si
No


¿Tuviste dificultad para efectuar los cálculos?
100%
50%
0%
82%
18%
Si
No

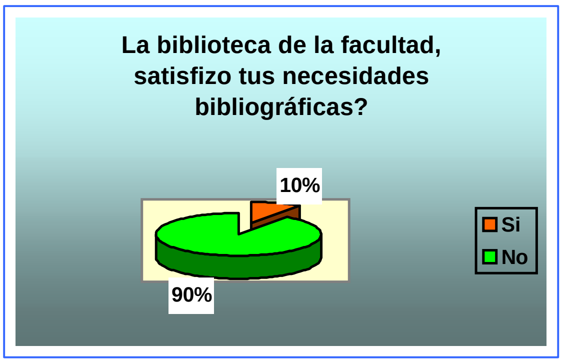

¿Tuviste dificultad para transferir conocimientos previos?
80%
60%
40%
20%
0%
79%
21%
Si
No


¿Tuviste dificultad para modelarlo matemáticamente?
100%
80%
60%
40%
20%
0%
85%
15%
Si
No


Frente al problema ingenieril ¿Sentiste la necesidad de conocer la teoría matemática de las superficies cónicas?
100%
50%
0%
97%
3%
Si
No


Frente al problema ingenieril ¿Sentiste la necesidad de conocer la teoría matemática de la variación de funciones?
100%
50%
0%
92%
8%
Si
No


¿Quedó manifiesta la necesidad de vincular los contenidos de las distintas asignaturas?
10%
90%
Si
No


La biblioteca de la facultad, satisfizo tus necesidades bibliográficas?
10%
90%
Si
No

Se concluye, al analizar las encuestas respondidas, que los alumnos no han tenido dificultad en comprender las consignas del trabajo práctico o en efectuar los cálculos conducentes a la obtención del resultado, pero sí en conseguir la información en la biblioteca de la facultad, por lo cual consultaron revistas técnicas, profesionales vinculados al tema, empresas de telefonía, empresas de video cable, Internet y enciclopedias en C.D. A pesar que en las encuestas manifestaron no haber tenido dificultad para modelar matemáticamente, la mayor parte de las consultas se dirigían en ese sentido (ubicación de ejes, relación de los datos con lo solicitado, etc.)
Ellos manifestaron la ventaja de vincular los temas de la especialidad con la matemática desde el comienzo de la carrera.

Referencias bibliográficas

Alsina, Callis, Figueras (1998). Matemática y realidad .*Uno* . Revista de didáctica de la matemática. España: Grao.

Delgado Rubí, R (1995). Algo de historia sobre la resolución de problemas. *Revista Cubana de Educación Superior.*

Polya, G. (1965) . *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Resnick, L.; Ford, W. (1990) . La Enseñanza de la Matemática y sus fundamentos psicológicos *Temas de Educación* Barcelona, España: Paidos.

Santaló, L. (1992) . Matemática y cultura general. España: Suma

Santaló, L (1994). *La Matemática: una filosofía y una técnica*. Barcelona, España: Ariel

Schoenfeld, A (1987). *A brief and Biased History of Problem Solving.*.USA: National Council of Teacher of Mathematics.

Varela, L; Guasco M.; Gerompini, A.; Martello, S. (1996). *Matemática, metodología de la enseñanza* . Buenos Aires, Argentina: Conicet.

La resolución de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del análisis matemático. Un modelo constructivista y por investigación para la derivada

Jorge A. Azpilicueta*; Alicia Ledesma**
* Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
** Facultad de Ciencias Agropecuarias. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
Jazpilic@arnet.com.ar

Resumen
Como parte del perfeccionamiento del sistema de enseñanza y aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático I se inicia este trabajo dentro del proyecto de investigación : *Ecuaciones Diferenciales en Geometría Afín, Teoría de Cáscaras, y la Enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería y de Ciencias Naturales*. El objetivo de esta investigación es estudiar y aplicar un Modelo Mixto Constructivista y por Investigación para la enseñanza y aprendizaje de la Derivada de una Función a partir de la observación, interpretación e investigación de situaciones problémicas. En respuesta al objetivo planteado se construye un Esquema Conceptual del modelo y una Guía Práctica de la unidad didáctica anteriormente mencionada, para orientar el trabajo del profesor a fin de optimizar la calidad de los aprendizajes de los alumnos que cursan asignaturas relacionadas a la Matemática en general y al Análisis Matemático I en particular, en carreras de Ingeniería.

Introducción

La Resolución de Problemas es una metodología de tendencias pedagógicas de avanzada, que permite enfrentar con éxito las diferentes problemáticas que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.
La definición de "problema" tiene distintas acepciones. La mayoría de los investigadores acuerdan que un problema constituye una situación incierta que provoca en quien la padece una conducta que tiende a resolverlo y hallar la solución esperada. Según (Perales, F.J. et al, 2000) se trabaja con un concepto "globalizador" ya que bajo la denominación de "problema" se considera toda actividad que implique incertidumbre. En esta dimensión se tiene en cuenta todo el entorno de aprendizaje : conocimientos teóricos adquiridos, contenidos procedimentales y actitudinales, especialmente éstos últimos para favorecer la actitud de "aprender a ser" de los alumnos hacia la Matemática.
Estudios realizados en el mundo referentes a este tema han coincidido en apreciar que la mayoría de los estudiantes experimentan serios problemas al iniciar sus cursos universitarios de Matemática (Santos Trigo, L., 1994). Los autores en general también coinciden en reconocer la deficiencia en la preparación de los estudiantes para "resolver problemas". Distintas causas pueden crear esta situación, pero la principal se debe a la enseñanza tradicional de la Matemática. Esto es realizar un proceso de enseñanza utilizando el Modelo por Transmisión-Recepción paradigma dominante en la actualidad en la enseñanza de las materias básicas en ingeniería, entre ellas Análisis Matemático, (Azpilicueta, J., 2000).
Sin embargo la capacidad para la resolución de problemas matemáticos puede ser adquirida y desarrollada mediante la enseñanza (Schoenfeld, A., 1985 y Santos Trigo, L., 1994).
A la luz de esta problemática cabe plantearse lo siguiente : ¿Cómo es que los alumnos de Ingeniería deben construir el conocimiento del Análisis Matemático? ¿Cuáles son los procesos implicados en la Resolución de Problemas? ¿Cómo pueden mejorarse a través de la enseñanza? Muchas de estas respuestas estaría en conocer y aplicar las Teorías del Aprendizaje, con carácter ecléctico. Dentro de las mismas se pueden mencionar como más relevantes : a) la escuela Psicogenética (Piaget,J.,1969), con sus teorías: constructivista del

conocimiento, del desarrollo y de la interacción sujeto-objeto, b) el enfoque Histórico-Cultural (Vigotsky,L.,1979) en el cual el proceso de Enseñanza-Aprendizaje es un sistema docente donde el estudiante es sometido sistemáticamente, previo lo cognoscitivo, a tareas que lo hacen pensar, explorar, contrastar, formular hipótesis y verificar resultados, y c) la Resolución de Problemas, estudiados principalmente por (Polya, G.,1945). Dentro de este marco y desde una concepción del aprendizaje activo por parte de los alumnos se abordará como complemento el Método de Investigación, en tareas grupales.
El objetivo de este trabajo es estudiar y aplicar un Modelo Mixto Constructivista y por Investigación para la Enseñanza y Aprendizaje de la Derivada de una Función, a partir de la observación, interpretación e investigación de situaciones problemáticas a fin de formalizar matemáticamente dicho concepto.

Desarrrollo del Tema

a- Contextualización de la Enseñanza Problémica

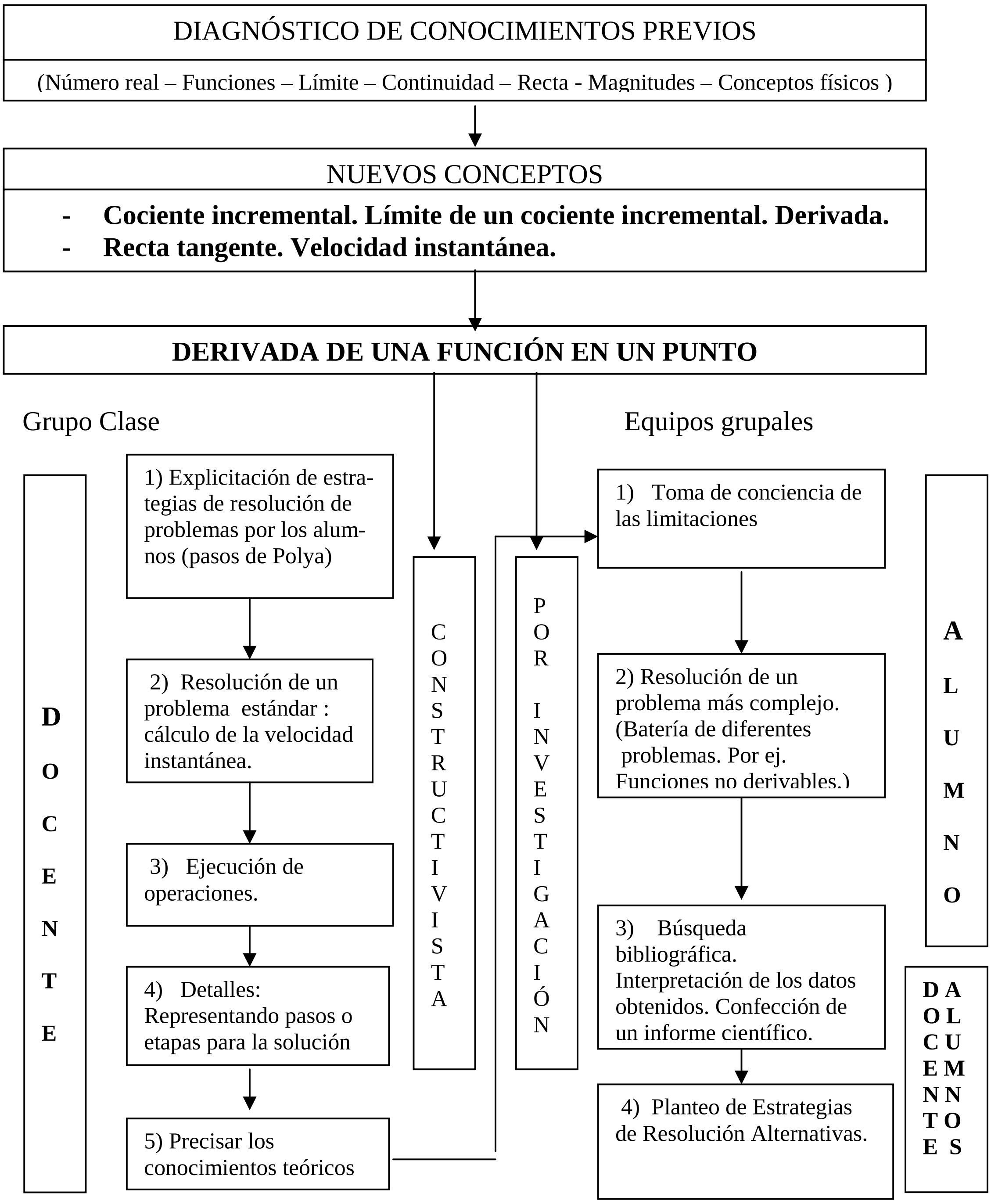
Se habla de Enseñanza Problémica en los casos donde se organiza el proceso de enseñanza de forma tal que los alumnos son situados sistemáticamente ante problemas, cuya resolución se debe realizar con su activa participación y en la que el objetivo no sólo es la obtención del resultado, sino además su capacitación para la resolución independiente de problemas en general (Torres, P.,1996). La resolución de cualquier problema es un proceso complejo que exige que se realice siguiendo una serie de pasos determinados. Según (Polya, G.,1945) se realizan los siguientes : I. Comprender el problema, II. Concebir un plan, III. Ejecución del plan y IV. Visión retrospectiva o examinar la solución obtenida.
Para ayudar al estudiante a comprender mejor los problemas matemáticos se pueden usar distintas técnicas, entre otras las de (Polya,G.,1945, Schoenfeld,A., 1985 y Pozo, J. 1994). En esta propuesta se tendrán en cuenta dentro de la generalidad de técnicas :

- Hacer explícitas las estrategias que se usan y en general las que puede disponer el alumno, así como su utilidad en la resolución del problema, y
- Examinar en clase en forma conjunta (docente-alumnos; alumnos-alumnos) como se ha obtenido la solución de un mismo problema utilizando diferentes métodos, caminos y estrategias.

b- La Resolución de Problemas en el contexto del Análisis Matemático I en general y de la Unidad Derivada de una Función en particular.

La Resolución de Problemas tiene una relación muy estrecha con el Cálculo Diferencial e Integral. Los dos “problemas” centrales del Cálculo son : el problema de las tangentes y el problema de la cuadratura. A Newton y a Leibniz se les llama los fundadores del Cálculo porque vieron claramente la íntima relación entre éstos dos problemas. A sus relaciones se les llama Teoremas Fundamentales del Cálculo. Este fue el comienzo del análisis (Haaser, N. et al, 1978), y dio un ímpetu a la Matemática y a la Ciencia que aún perdura en el presente. Para la enseñanza del Análisis Matemático I se ha establecido como base un sistema de axiomas para los números reales y todos los pasos algebraicos se derivan de estos axiomas (Gigena, S. et al, 2000). Los conceptos que se estudian en esta materia tienen un carácter formativo, no obstante a través de ellos, los estudiantes pueden también internalizar conocimientos procedimentales y actitudinales que ayudan a la resolución de problemas, logrando desarrollar un pensamiento científico, lógico y reflexivo.
La unidad seleccionada, Derivada, es un instrumento poderoso del Análisis Matemático, ya que permite abordar la resolución de problemas sencillos de cálculo aproximado, de razón de cambio, de máximos y mínimos y realizar análisis de curvas.

c– Esquema Conceptual Teórico-Práctico para el Aprendizaje de la Derivada desarrollando un Modelo Constructivista y por Investigación a partir de situaciones problémicas.



Considerando en parte el trabajo de investigación de Rodríguez, T. (1991), se puede ampliar cada etapa del modelo correspondiente :

<u>En el grupo clase</u> :

1. La explicitación de estrategias de resolución de problemas por los alumnos evita el camino del ensayo y error. Permiten identificar el problema e interpretarlo matemáticamente.

2 y 3. La resolución de un problema estándar identificará el Modelo Matemático adecuado.

4. Se deberá identificar el método matemático (analítico o numérico, gráfico o computacional) para dar solución al problema planteado, y representar los pasos o etapas del método.
5. La toma de conciencia de las limitaciones teóricas y prácticas es necesaria para avanzar hacia problemas más complejos. Se recomienda planificar problemas que sean sólo parcialmente desconcertantes para los alumnos. <u>Evaluación individual.</u>

<u>En equipos grupales :</u>

1. Toma de conciencia de las limitaciones de los integrantes del grupo (teórico-prácticos).
2. Realizar la resolución de un problema más complejo, verbalizando al máximo, fundamentando los métodos matemáticos cualitativos de investigación en torno al proceso de solución y a la solución (por ejemplo, Teoremas).
3. Confección de un informe científico. <u>Evaluación grupal</u>.
4. Planteo de estrategias de resolución alternativas usando otros métodos.

Exposición y discusión de resultados

Desde el enfoque de esta investigación teórica, en una primera etapa, se considera imprescindible definir que el aprendizaje basado en problemas es para los alumnos un proceso de indagación que les permitirá resolver preguntas, dudas e incertidumbres sobre los conceptos de Derivada de una función y sus aplicaciones. El modelo teórico expuesto permite una gama de estrategias en donde se involucra en primera instancia la investigación dirigida por el docente al grupo clase. A partir de esta situación surge un proceso de investigación compartido entre el docente y los alumnos, hasta finalizar con un acento mayor en la investigación dirigida por los alumnos en equipos grupales.

Esta secuencia de aprendizaje, donde los alumnos tienen una participación activa, les permitirá superar las dificultades que se les presentan cuando tienen que identificar el proceso matemático de la derivación, en un problema de experiencia práctica.

En los largos años de práctica docente se ha observado que los alumnos si bien aprenden la definición de Derivada de una función y realizan la ejecución mecánica de las reglas de derivación, en general muy bien, cuando se les presenta un problema concreto de aplicación, no tienen éxito en su resolución.

La construcción del conocimiento matemático, siguiendo este modelo, ofrece a los docentes una manera de pensar acerca de cómo aprenden los estudiantes a comprender de manera profunda; fundamentalmente a: retener, comprender y aplicar la información.

Conclusiones

El desarrollo de un Modelo teórico-práctico, Constructivista y por Investigación para el aprendizaje de la Derivada de una función, constituye una guía para orientar el trabajo del Profesor en el desarrollo de habilidades heurísticas y metacognitivas a lograr en los alumnos del curso de Análisis Matemático.

La secuencia de etapas en el modelo desarrollan un esquema de aprendizaje basado en la resolución de problemas con un enfoque investigativo. Esto permite que el alumno asuma un rol activo tanto individual como grupalmente, donde desarrollará tareas que lo hacen pensar, explorar, contrastar, formular hipótesis y verificar resultados.

Este enfoque constructivista del conocimiento matemático da respuesta a como los alumnos de ingeniería pueden abordar el aprendizaje de la Derivada de una función. Para organizar este proceso se presenta una Guía Práctica de la unidad citada, planificada a través de la Resolución de Problemas.

Referencias bibliográficas

Azpilicueta, J. A. (2000). *IV Taller Internacional Sobre Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. IPSJAE. La Habana. Cuba.

Gigena, S. et al. (2000). *Análisis Matemático I. Teoría, práctica y aplicaciones*. Editorial Científica Universitaria.

Haaser N.B. et al. (1978). *Análisis Matemático 1*. México: Editorial Trillas.

Perales, F.J. et al. (2000). *Resolución de Problemas*. Síntesis Educativa.

Piaget, J. (1969). *Psicología y Pedagogía*. Barcelona .Editorial Ariel.

Polya, G. (1945). *How to solved it*. Princeton. University Press.

Pozo, J. I. (1994). *La solución de problemas*. Madrid. España: Editorial Santillana.

Rodríguez, T. (1991). *Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina Matemática Superior*. Tésis Ph D, IPSJAE. Cuba.

Santos Trigo, L. (1994). *La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. Cinvestav. I.P.N. México.

Schoenfeld, A.H. 1985. *Mathematical problem solving*. N.Y.: Academic Press.

Torres, P. 1996. *Enseñanza problémica v/s Resolución de problemas*. Memorias X Reunión Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa. Puerto Rico.

Vygotski, L. 1979. *El desarrollo de los procesos superiores*. Barcelona: Editorial Crítica.

ANEXO :

GUÍA PRÁCTICA PLANIFICADA A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

UNIDAD DIDÁCTICA : DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Propósito General :

- Articular el dominio de la derivada con otras disciplinas (Física, Química, Geometría, Economía, etc.), para lograr contextualizarlo en estos entornos y que tengan una valoración adecuada dentro de la currícula de Ingeniería.

Objetivo General :

- Adquirir el concepto de Derivada de una Función a partir de la observación, interpretación e investigación de problemas prácticos llegando a formalizar matemáticamente el mismo.

Objetivos Específicos :

- Comprender que el conocimiento matemático de la derivada se construye a partir de conceptos previos.
- Lograr asociar la Derivada de una función en un punto con un número y sus distintas significaciones (velocidad, aceleración, pendiente de la recta tangente en el punto, etc.).
- Adquirir la capacidad de vincular los conceptos matemáticos de la derivada con los problemas geométricos y físicos.
- Transferir el concepto matemático de derivada a las aplicaciones de ingeniería.

CONTENIDOS

- **Conceptuales :**
  - Planteo del problema matemático a partir de un problema real.
  - Cálculo de la Derivada de una función en un punto como resultado del pasaje al límite. Vínculo entre derivada, número y recta tangente.
  - Distintas interpretaciones de variaciones de una magnitud respecto de otra.
- **Procedimentales :**
  - Planteo de un problema físico para conceptualizar la derivada de una función en un punto.
  - Sucesión de subdivisiones del intervalo de tiempo. Cocientes incrementales.

- **Actitudinales :**
  - Crear redes conceptuales en base a conceptos previos y nuevos.
  - Valorar el concepto de Derivada de una función en un punto como básico para la resolución de problemas de la ingeniería.

METODOLOGÍA

- Clases teórico-prácticas a todo el grupo de alumnos, explicativas y dialogadas. Técnica de resolución de problemas (Individual-grupal).

EVALUACIÓN

- Individual de problemas estándar.
- Grupal de presentación de un informe sobre la resolución de un problema de aplicación, siguiendo los pasos de la redacción científica escrita : 1-Título del trabajo, 2- Nombre de los integrantes del grupo, 3-Fundamentos teóricos del problema, 4-Definición del problema, 5-Objetivo del estudio, metodología y resultados, 6-Conclusiones, 7-Bibliografía.

PROBLEMAS SUGERIDOS :

a) La velocidad a partir de la distancia y el tiempo

1. El desplazamiento (en metros) de un objeto moviéndose en línea recta está dado por $s = 1 + 2t + t^2/4$, dónde t es medido en segundos.
   a) Encontrar la velocidad promedio en los siguientes periodos de tiempo :
   i) [1, 3] ii) [1, 2] iii) [1, 1,5] iv) [1, 1,1] .
   b) Encontrar la velocidad instantánea cuando t = 1.
2. Determinar la velocidad instantánea de un punto móvil que se desplaza con movimiento rectilíneo.

b) Cálculo de la derivada de una función

1. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$, en el punto x = ½. Determinar la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en dicho punto y la ecuación de la recta tangente.
2. ¿ Dónde la función $f(x) = |x|$ es diferenciable ?

c) Razón de cambio. Variación de magnitudes.

1. Si y = f(x) y x cambian desde x_1 a x_2, escribir expresiones para :
   a) La razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$.
   b) La razón de cambio instantánea de y con respecto a x en $x = x_1$.
2. La tasa de desempleo U(t) varía con el tiempo. La tabla siguiente muestra los porcentajes de trabajadores desempleados en un determinado país, desde 1988 a 1997.

t	U(t)	T	U(t)
1988	5.5	1993	6.9
1989	5.3	1994	6.1
1990	5.6	1995	5.6
1991	6.8	1996	5.4
1992	7.5	1997	4.9

   a) ¿Cuál es el significado de U'(t) ? . ¿ Cuáles son sus unidades ?
   b) Construir una tabla de valores para U'(t).

d) Problemas de aplicación de la derivada.

1. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de $f(x) = \ln(x - 2)$ en el punto x = 3.
2. Una bola de hierro de 20 cm de diámetro está recubierta de una capa de hielo de espesor uniforme. Si el hielo se funde a razón de 65 cm^3 por minuto, encuéntrese con que rapidez decrece el espesor del hielo cuando es de 5 cm y con qué velocidad decrece el área externa en ese mismo instante.

e) Problemas de investigación

1. Estudiar la relación entre continuidad y diferenciabilidad de una función.
2. Estudiar en qué casos una función deja de ser diferenciable.

Investigación del valor de la resolución de problemas para la educación matemática

Elena Carrera, Liliana Contini, Stella Vaira, Gloria Moretto, Lina Oviedo, Nélida Mamut, Liliana Taborda, Zulma Arralde
Dpto. de Matemática de la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas. UNL. Argentina
ecarrera@fbcb.unl.edu.ar - gmoretto@fbcb.unl.edu.ar

Resumen
Este informe es un reporte de una investigación realizada por el Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas de la Universidad Nacional del Litoral. La investigación se desarrolló en el marco del Proyecto: Investigación del valor de la Resolución de Problemas para la Educación Matemática. La influencia del uso de herramientas informáticas en el marco de la teoría del aprendizaje correspondiente al Curso de Acción, Investigación y Desarrollo (CAI+D ’96).
Uno de los objetivos planteados consistió en evaluar si proporciona ventajas estudiar matemática en la Universidad utilizando la metodología de Resolución de Problemas, como un medio que posibilita el desarrollo del pensamiento matemático y la creatividad, ya que resolver problemas constituye el quehacer matemático por excelencia. Otro objetivo del trabajo fue verificar las ventajas que proporciona la utilización de los softwares matemáticos disponibles, ya que el uso de los mismos minimiza el tiempo dedicado a los cálculos algebraicos, dando la importancia que merece al aprendizaje de los nuevos conceptos matemáticos, no sólo aprendiéndolos, sino reflexionando acerca de cómo se los aprende.
Los resultados obtenidos corroboran las ventajas de la nueva tecnología.

Introducción

La estructura de la actividad de resolución de problemas surge como un objeto cognitivo a partir de la reflexión que el sujeto hace sobre sus propias reacciones, esta afirmación es corroborada por diversos estudios con respecto a la forma en que los estudiantes resuelven problemas matemáticos, realizados por importantes investigadores.
Para la epistemología genética el “conocimiento matemático” es resultado de esa reflexión sobre sus acciones interiorizadas, es decir, la abstracción reflexiva. La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos sino esencialmente una actividad y el conocimiento matemático es una reflexión sobre esa actividad.
La cantidad de conocimientos matemáticos que necesita el hombre actual es tan grande, que resulta imprescindible lograr que los alumnos adquieran formas de pensamiento que los induzcan a pensar matemáticamente, Schoenfeld manifiesta: *“La auténtica ayuda que podemos prestar a nuestros alumnos es la de facilitarles las técnicas mentales que podrían usar aún después que hayan realizado sus exámenes finales”*.
En todos los niveles de la enseñanza es importante que los alumnos comprendan, aprendan, recuerden, sepan aplicar y transfieran lo aprendido a diferentes contextos. Dicha comprensión debe ser genuina, es decir, debe lograr trascender el campo del conocimiento con el desarrollo de capacidades que favorezcan la edificación de estructuras cognitivas para resolver problemas y hallar estrategias de solución, enfatizando los procesos reflexivos para la comprensión.
La expansión del conocimiento tecnológico incorpora un nuevo problema en el contexto de la educación superior, ya que resulta imposible la introducción curricular permanente de las innovaciones y su correspondiente sustento teórico. Por ello se torna imprescindible la incorporación de hábitos de aprendizaje para la adquisición de los nuevos saberes.
Como consecuencia de estas reflexiones se plantean así una serie de interrogantes:

- ¿Resulta beneficioso, para el rendimiento futuro de los alumnos, la resolución de problemas en oposición a la metodología tradicional de la enseñanza de la matemática que lo hace desde un punto de vista informativo instruccional?
- ¿Cuál es la importancia que se debe asignar a la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática universitaria?

Para poder dar respuestas a estos interrogantes se realizaron observaciones indirectas de respuestas observables y / o cuantificables y, además, se compararon los logros de los alumnos que trabajaron en forma tradicional con aquellos que lo hicieron con la nueva metodología.

Esta metodología le permite al alumno por un lado interpretar matemáticamente la realidad y por el otro descubrir el concepto matemático subyacente, las soluciones y la adecuación al problema real de las soluciones encontradas.

Todo lo anterior conllevó una profunda preparación en los docentes en la metodología de "resolución de problemas" y en el uso de los softwares para luego poder guiar eficazmente el aprendizaje. El propósito fundamental consistió en la necesidad de desarrollar en los estudiantes formas de pensamiento que les permitieran adquirir herramientas para poder pensar científicamente, lo que implica considerar el aprendizaje de la matemática como una consecuencia del pensamiento humano.

Desarrollo de la experiencia didáctica

La metodología a emplear está basada en la resolución de problemas en el sentido que este grupo lo entiende, mediante la presentación de situaciones problemáticas no necesariamente contextualizadas, orientando a los alumnos, por medio de interrogatorios, a que ellos mismos descubran nuevos conceptos matemáticos.

Con el fin de evaluar si esta metodología conduce a mejores resultados en el aprendizaje de la matemática y prepara mejor a los alumnos para enfrentar los desafíos de otras asignaturas, se realizó la experiencia que detallaremos a continuación.

Esta experiencia se llevó a cabo, por primera vez, en el año 1998. En el primer cuatrimestre se trabajó en Matemática General con un número total de 174 alumnos, divididos en 8 comisiones de aproximadamente 22 alumnos cada una. Para llevar a cabo la experiencia se seleccionaron aleatoriamente dos comisiones. En éstas se desarrollaron los contenidos de Matemática General en clases teórico-prácticas con el mismo docente, y trabajaron los conceptos matemáticos usando la metodología antes explicitada, apoyados en algunos casos con software de uso corriente. Las comisiones restantes trabajaron de la manera tradicional con un docente para las clases teóricas y un docente para las prácticas.

Los contenidos de Análisis Matemático se desarrollaron del mismo modo en el segundo cuatrimestre, manteniendo el mismo grupo experimental.

El desarrollo de la actividad se llevó a cabo con las siguientes características:

1. Presentación de nuevos conocimientos o propiedades a través del planteo de situaciones que, guiados por el docente, llevó a los alumnos a elaborar un enunciado.
2. Presentación de un problema donde se requerían nuevos conocimientos matemáticos para resolverlo o bien optimizar la resolución del mismo.

3. Coloquios en grupos pequeños donde profesor y alumnos discutieron el tema presentado.
4. Exposición de conceptos fundamentales por parte del profesor sólo cuando surgía la necesidad en los alumnos.
5. Clases de trabajos prácticos, donde se resolvieron ejercicios y problemas ya sea en el aula o en el laboratorio de informática.
6. Problemas a resolver en su casa, solos o en grupo.

Nuestro interés principal fue desarrollar la intuición y luego generar la necesidad de "demostrar" lo que se ha intuido. Nuestro esfuerzo se centró en guiar a los alumnos en el descubrimiento de los conceptos fundamentales para luego "introducirse" en el verdadero quehacer matemático, logrando que el alumno desarrolle su espíritu investigador, que piense matemáticamente, así como lo hace el investigador matemático, equivocándose y subsanando el error.

El uso de softwares matemáticos crea un ambiente propicio para que docente y alumnos desarrollen su trabajo de manera diferente; dedicando mayor tiempo al análisis reflexivo y minimizando el tiempo dedicado a los cálculos algebraicos.

Alentados a pensar creativamente los alumnos pueden desarrollar soluciones y situaciones no previstas, y si bien esto puede resultar inquietante para los docentes, éstos deben habituarse a las mismas.

Un aprendizaje eficaz se logra construyendo el conocimiento, éste proceso se basa en la actividad creativa del alumno, en sus motivaciones intrínsecas, asumiendo el docente el rol de orientador y no de informador. Los conocimientos así construidos son realmente operativos, permanentes y generalizables a contextos diferentes y para lograrlos son fundamentales las siguientes premisas:

- La motivación
- La metodología
- Las aplicaciones a situaciones concretas
- La informática como auxiliar del aprendizaje y como herramienta para introducir a la simulación y modelización.

La mayor dificultad que se nos planteó fue la selección y / o elaboración de problemas interesantes de la vida cotidiana o bien en estrecha relación con la carrera que estaban cursando. Con tal reformulación los resultados en el primer año fueron satisfactorios. Mejoró el rendimiento de los alumnos y aumentó el interés de los mismos por las actividades relacionadas con la matemática.

En el segundo año del desarrollo de la experiencia, los resultados no fueron significativos. Las causas que motivaron esta diferencia se fundan en la modificación del Plan de Estudios que introdujo nuevas variables que no habían sido tenidas en cuenta anteriormente.

Por las razones antes expuestas, los datos procesados que se presentan a continuación corresponden sólo al primer año de aplicación de la nueva metodología.

Análisis estadístico

Se realizó un diseño donde en forma aleatoria fueron seleccionadas dos comisiones que trabajaron con la metodología de resolución de problemas y que se llamará grupo

experimental (GE) y las cinco comisiones restantes constituyeron lo que en este trabajo se denominará grupo control (GC).
Se utilizaron gráficas y tablas con medidas descriptivas para explorar el comportamiento de las variables observadas, siempre discriminando los grupos en estudio: control (GC) y experimental (GE). El rendimiento de estos grupos se midió a través de las notas obtenidas en exámenes parciales de las asignaturas Matemática General y Análisis Matemático. La técnica estadística usada para comparar estos rendimientos fue la prueba **t** para muestras independientes. El ajuste se hizo usando la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov. Todos los análisis estadísticos fueron realizados con el software SPSS para Windows 10.0. El nivel de significancia elegido para todos ellos fue $\alpha = 0.05$.

Resultados

Con el fin de evaluar la nueva metodología se realizó el análisis con dos enfoques temporales. Uno durante el cursado, observando las notas obtenidas en los exámenes parciales de Matemática General y otro posterior. Este último se hizo para investigar la posible influencia de la Metodología en la asignatura Análisis Matemático que cursaron en el Segundo Cuatrimestre de ese año, realizándose el relevamiento de las notas de los parciales.
El tamaño inicial del GC fue de 95 alumnos y el del GE de 34. Al comparar las notas promedio de los parciales de Matemática General, la prueba t dio diferencias estadísticamente significativas en los dos primeros parciales, y no significativa en el tercer parcial. El valor p asociado a cada una de estas pruebas es 0,047; 0,042 y 0,811 respectivamente (Tabla 1 y Gráfico 1). Las pruebas de bondad de ajuste a la distribución normal según Kolmogorov-Smirnov fue mayor que 0.380.
El análisis posterior a la aplicación de la nueva metodología se hizo comparando las notas promedio de los dos parciales de Análisis Matemático. La Tabla 2 resume los valores estimados de la diferencia entre la nota promedio del GC menos la nota promedio del GE, y se calculó el intervalo de confianza del 95% para esta variable diferencia. En ambos casos los valores P asociados a la prueba t resultaron inferiores a 10^{-3}, valor que evidencia que el comportamiento medio de estos grupos es significativamente diferente. Como se trabajó con la diferencia entre GC y GE, el signo de los extremos de los Intervalos de Confianza es un indicador de que el GE alcanzó notas en promedio más altas que el GC.

Conclusiones

Del análisis anterior resulta evidente, una mejora en el rendimiento de los alumnos que trabajaron con el análisis, la discusión y resolución de situaciones problemáticas, frente a los que lo hicieron de una manera tradicional.
La Metodología aplicada estableció diferencia en Análisis Matemático, materia que por sus contenidos de Cálculo Diferencial e Integral en una y dos variables, hace que el alumno necesite tener un entrenamiento previo de resolver problemas. Para el proyecto de investigación los resultados obtenidos permitieron corroborar las ventajas de la aplicación de la nueva metodología en cuanto al rendimiento de los alumnos en las dos disciplinas Este logro permitió que este grupo de investigadores continúe trabajando en este tema a

través de un CAI+D 2001, cuyo título es “La resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática. Su influencia en las otras disciplinas” donde se realiza un seguimiento del rendimiento que han tenido estos alumnos en otras disciplinas, además de incorporar variables cualitativas que definan mejor el perfil que tienen.

Referencias bibliográficas

Schoenfeld, Alan. (1985). *Mathematical. Problem solving*. Estados Unidos: Academic Press, Inc. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.

Polya, George. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Madrid: Editorial Trillas.

Perkins, David. (1995). *La escuela Inteligente*. Editorial Geodisa.

Gonzalez, Fredy. (1995). *La investigación en Educación Matemática*. Serie Temas de Educación Matemática. Parte IV. Colombia.

Kilpatric, J.; Rico, L.; Sierra, M. (1992). *Educación Matemática e Investigación.* Colombia: Editorial Síntesis.

Artigue, M. Y otros. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* México: Grupo editorial Iberoamericano.

Chevallard, Y. y otros. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. España: Editorial ICE Horsori.

Tall, David. (2000). "Cognitive Development in Avanced Mathematics. Using Technology". En*: Matehematics Education Research Journal.*

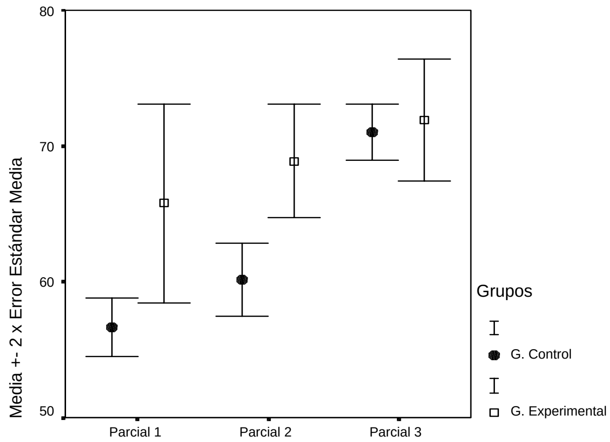
Anexo

Tabla 1: Matemática General, primer cuatrimestre de 1998. Estadísticos Descriptivos (Media±Desviación Estándar) de las notas de parciales discriminadas por grupo.

	Número de Casos	**Media±SD**	**Valor P**
Parcial 1			
GC	95	56,67±17,52	0,047*
GE	34	63,97±19,99	
Parcial 2			
GC	95	60,05±21,69	0,042*
GE	34	68,88±21,05	
Parcial 3			
GC	95	71,03±17,54	0,811
GE	34	71,94±22,78	

* Significativa la diferencia entre las medias de los dos grupos, α=0.05
SD: desvío estándar - GC: Grupo Control - GE: Grupo Experimental

Gráfico 1: Barras de error para los valores medios de cada parcial discriminados por grupo, en la asignatura Matemática General



Las barras están centradas en los valores medios y la extensión de las mismas es 2 (dos) veces el error estándar de la media (error estándar=desviación estándar/√n)

Tabla 2: Análisis Matemático: valores estimados de la diferencia de medias, discriminados por parcial y por grupo.

	MediaDif±Error	**Intervalo de Confianza del 95%**	**Valor P**
Parcial 1 GC (n=144) - GE (n=29)	-19,47±4,34	(-28,03 ; -10,90)	$<10^{-3}$ *
Parcial 2 GC (n=144) - GE (n=29)	-33,35±5,40	(-44,01 ; -22,68)	$<10^{-3}$ *

* Altamente significativa la diferencia entre las medias de los dos grupos, con una confianza del 95%.
GC: grupo control - GE: grupo experimental.

Una propuesta metodológica para ensayar la definición relativa de problema matemático

Pedro Daniel Leguiza , Germán Edgardo Camprubí
Facultad de Agroindustrias. Universidad Nacional del Nordeste. Argentina
gcamprubi@fai.unne.edu.ar

Resumen
En este artículo se reporta una investigación que propone una metodología para estructurar formalmente la clasificación de situaciones problemáticas en ejercicios matemáticos y problemas matemáticos. Contribuir a evitar aplicar el término “problema” a una cuestión que en realidad es un simple ejercicio es evitar una confusión que no hace más que empobrecer las posibilidades didácticas de la aplicación de problemas matemáticos en la educación.
Se fijó una hipótesis de trabajo para delimitar un ejercicio de un problema. Dentro del marco teórico de la resolución de problemas se aplicó el diseño experimental estadístico en la búsqueda de producir conclusiones válidas y objetivas. Trabajando con un grupo de alumnos del Profesorado en Matemática se obtuvieron datos del nivel de eficacia en resolución de situaciones problemáticas.
Finalmente los resultados permitieron clasificar un grupo de situaciones problemáticas en ejercicios y problemas matemáticos.

Introducción

En Matemática, la resolución de problemas y la realización de ejercicios constituyen un continuo educativo cuyos límites son difíciles de precisar.
Este trabajo se inserta en la discusión sobre cómo se define un problema matemático considerando a la resolución de problemas como una actividad importante sin considerar o proponer una enseñanza aprendizaje centrada en ellos. Se hace necesario establecer un criterio de delimitación entre ejercicios y problemas considerando que un ejercicio consiste en una aplicación de lo ya conocido a otro ejemplo más, mientras que la resolución de un problema permite optimizar las estrategias de razonamiento.

Objetivo del Trabajo

Clasificar situaciones problemáticas en ejercicios o problemas matemáticos.

Marco teórico

Resolución de problemas

Desde el punto de vista epistemológico, la ciencia como actividad humana está dirigida fundamentalmente a resolver problemas. En esa línea, los investigadores de este campo han realizado un gran número de trabajos intentando describir cómo los alumnos resuelven problemas (Chi et al., 1998; Glaser, 1992) y por otro lado han desarrollado propuestas metodológicas con la característica común de haber evaluado su nivel de eficacia dentro del aula (Garret et al., 1990)
También debe mencionarse que en sucesivos trabajos se viene cuestionando la resolución de problemas porque una de las limitaciones es que no se ha analizado en profundidad acerca de lo que se entiende por problema (Gil Pérez,1998). Estas investigaciones se encuadran en el continuo intento de provocar una tensión entre lo que sabe el que resuelve

y lo que demanda un problema; dicho de otro modo es una manera de contribuir a llevar a los alumnos al límite de sus potencialidades intelectuales (Pomés, 1986)

Existen definiciones absoluta y relativa de problema matemático. Desde una definición absoluta, un problema matemático, es una situación en la que se conjuga lenguaje coloquial con lenguaje matemático. De esta manera un problema podría distinguirse sólo por su enunciado (Pozo Municio et al., 1997).

Desde una definición relativa, un problema matemático es una situación en la que para ser resuelta, las técnicas sobreaprendidas y previamente ejercitadas constituyen un recurso necesario pero no suficiente para alcanzar la solución correcta. Desde este punto de vista, una situación problemática puede constituir un problema para un grupo de alumnos mientras que para otros esa misma situación puede resultar un ejercicio matemático (Pozo Municio et al., 1997).

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, para aplicar la definición relativa debería incorporarse la dimensión de la persona que resuelve como otro elemento de decisión para hacer una clasificación entre ejercicios y problemas matemáticos. Con esta concepción, aún situaciones problemáticas que aparecen como “problemas” podrían considerarse como meros ejercicios matemáticos.

El diseño experimental

El diseño estadístico de experimentos es el proceso de obtener datos apropiados para ser analizados estadísticamente con el fin de producir conclusiones válidas y objetivas. Si el diseño está bien concebido, los resultados de una investigación, tendrán mayores posibilidades de ser válidos (Hernández Sampieri et al.,1997).

La metodología estadística es el único enfoque objetivo para analizar datos sujetos a errores experimentales . Por lo tanto, existen dos aspectos estrechamente relacionados: el diseño experimental y el análisis estadístico de los datos (Montgomery, 1991).

Metodología

Un diseño experimental unifactorial por bloques completos permite el control sistemático de la variabilidad de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos. A cada alumno (bloque) se asigna una nota en escala 0-100 para cada uno de las situaciones problemáticas (tratamientos del experimento) que se ensayen.

0 = situación problemática no planteada

100 = situación problemática con planteo y respuesta correctos

El modelo lineal estadístico empleado para el diseño de bloques completos es el siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \beta_j + \tau_i + \xi_{ij}$$

Y_{ij} = calificación en escala 0-100 para cada situación problemática y para cada alumno

μ = media general

τ_i = efecto del i-ésimo tratamiento

β_j = efecto de j-ésimo bloque

ξ_{ij} = error aleatorio

Esta es una propuesta metodológica paramétrica, es decir con suposición de normalidad. Por este motivo, es imprescindible hacer la comprobación de idoneidad del modelo normal asumido a través del test de normalidad de datos, homogeneidad de las varianzas y análisis de distribución de los residuos de los datos (Montgomery, 1991).

Contraste de Hipótesis

Para ensayar la definición relativa de problema matemático, la hipótesis nula de interés es la igualdad de medias.

Ho: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_7$ Hipótesis Nula

H1: Al menos una $\mu_i \neq \mu_j$ Hipótesis Alternativa

μ_i = promedio de calificaciones de cada situación problemática ensayada.

Al testear la hipótesis nula con un análisis de variancia se puede determinar si existen diferencias significativas entre las distintas situaciones problemáticas (tratamientos) ensayadas. Con este testeo se ensaya la definición relativa de problema matemático y a partir de aquí se plantea la necesidad de fijar criterios sobre el rango de valores en la escala calificaciones de 0 a 100 para que una situación problemática pudiera ser considerada como un "problema matemático" o bien como un mero "ejercicio matemático". Esta propuesta metodológica propone situar ese valor cuantitativo demarcatorio en 40.

Es decir que se adoptó como hipótesis que para valores menores de 40 (en la escala 0-100) las situaciones problemáticas ensayadas se considerarían como problemas matemáticos en tanto que para los valores mayores de 40 se considerarían ejercicios matemáticos.

Ámbito de aplicación

El mismo procedimiento de análisis puede emplearse en las siguientes situaciones:

1. Problemas matemáticos fijos y alumnos fijos.
2. Problemas matemáticos aleatorios y alumnos fijos.
3. Problemas matemáticos aleatorios y alumnos aleatorios.

Por supuesto, hay cambios en la interpretación de los resultados obtenidos para cada caso. Por ejemplo si los alumnos (bloques) son elegidos aleatoriamente se espera que las comparaciones entre los problemas matemáticos ensayados (tratamientos) sean las mismas en toda la población de alumnos (bloques) de la que se eligieron los que toman parte del experimento.

Materiales y métodos

Banco de Problemas Matemáticos

Se seleccionaron y resolvieron situaciones problemáticas de textos universitarios de Álgebra y Geometría Analítica de manera de ir conformando un conjunto que se designó como Banco de Problemas. Este Banco de Problemas, constituido por un total ciento sesenta y cinco situaciones problemáticas fue dividido en subgrupos temáticos homogéneos tales como ecuaciones e inecuaciones, programación lineal, vectores y combinatoria entre otros.

Esas situaciones problemáticas también se seleccionaron teniendo en cuenta la definición absoluta de problema matemático. Es decir que se extrajeron y se resolvieron situaciones problemáticas clasificadas como "problemas" en la bibliografía consultada. Esa selección se hizo teniendo en cuenta la definición absoluta de problema matemático.

Técnica de Muestreo para el grupo de alumnos

Para el abordaje de la resolución de problemas matemáticos desde un punto de vista relativo, es necesario definir la población total relevante para el objetivo de la investigación y a partir de allí seleccionar una muestra a partir de la cual se extraerán conclusiones.

La población meta estaba constituida por los alumnos del Profesorado en Matemática que hubieran aprobado Álgebra y Geometría Analítica que se dicta en el primer cuatrimestre del primer año. La definición de los miembros de la población estuvo vinculada con los conocimientos previos necesarios para resolver los problemas seleccionados del Banco.

La población así definida era un marco muestral claramente identificable en el listado de alumnos que cumplían con la condición de aprobación de la asignatura mencionada.

Analizadas las técnicas de muestreo aleatorio, la de muestreo por conglomerados es la que más se aproximaba a las características y objetivos del presente trabajo pero dada la existencia de inconvenientes operativos, se decidió finalmente recurrir a una muestra de criterio. Por tal motivo, se trabajó con los nueve alumnos del cuarto año del Profesorado en Matemática en el año 2000.

Las razones del criterio de elección de la muestra de alumnos fueron fundamentalmente las siguientes:

- si bien Álgebra y Geometría Analítica corresponde al primer cuatrimestre de primer año, los alumnos profundizan esos contenidos en otras materias del plan de estudios y al estar próximos a egresar debieran poder realizar una integración de contenidos desarrollados durante la carrera.
- buena predisposición e interés de docentes y alumnos de cuarto año de participar de la experiencia sobre resolución de los problemas seleccionados del Banco.
- coincidencia temporal entre el dictado de una asignatura de primer cuatrimestre de cuarto año con la necesidad de toma de datos para la obtención de resultados del presente trabajo.

Técnicas de muestreo para las situaciones problemáticas

Las situaciones problemáticas fueron extraídas aleatoriamente empleando una técnica de muestreo estratificado, debido a la existencia de subgrupos temáticos homogéneos dentro de la población constituida por el Banco de Problemas.

Discusión de resultados

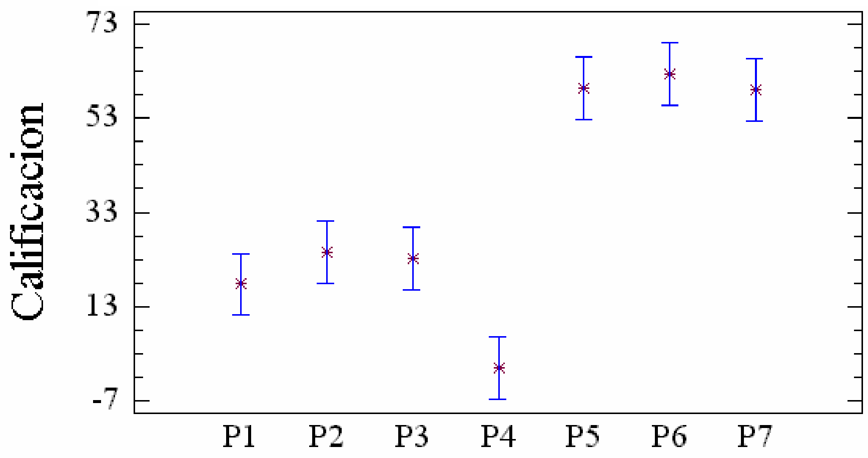
El presente trabajo se realizó con problemas matemáticos aleatorios y alumnos fijos. Las situaciones problemáticas de la muestra fueron resueltas en forma individual por los alumnos en tres sesiones distintas. Esas situaciones problemáticas fueron evaluados por un mismo docente.

Se ensayaron siete situaciones problemáticas seleccionadas del Banco con los nueve alumnos de el cuarto año del Profesorado en Matemática en el año 2000.

Realizado el análisis estadístico de datos con un análisis de variancia, se puede afirmar con un 95% de confianza que los problemas matemáticos de la muestra tuvieron un efecto estadístico significativo en el rendimiento del grupo de alumnos seleccionado. Existieron diferencias de dificultad estadísticamente significativas entre los problemas seleccionados para la muestra de alumnos ensayada.

Se observaron grupos homogéneos de situaciones problemáticas (tratamientos experimentales) constituidos por los problemas p_1,p_2 y p_3; p_5,p_6 y p_7 y finalmente el problema p_4 permitió identificar un tema no dado a los alumnos.

DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS ENTRE TRATAMIENTOS



Conclusiones

Podría concluirse que, aplicada la metodología paramétrica de diseño experimental propuesta y analizados los valores de las calificaciones, las situaciones problemáticas p_1,p_2 y p_3 constituyeron problemas matemáticos para el conjunto de alumnos que formó la muestra de criterio mientras que las p_5, p_6 y p_7 podrían considerase como meros ejercicios matemáticos para ese grupo de alumnos. El problema p_4 operó como un detector de tema no cubierto.

A modo de ejemplo se presentan, en orden sucesivo, tres de las situaciones problemáticas ensayadas: una que se clasificó como ejercicio matemático, otra considerada como problema matemático y finalmente la p_4 que no fue resuelta por ningún alumno.

- Dos barcos zarpan al mismo tiempo. El barco argentino navega hacia el N23°E a una velocidad de 11 km/h y el barco uruguayo navega a 15 km/h en dirección S67°E. Calcule la posición del barco uruguayo respecto del argentino una hora después de la partida.
- Se llena con alcohol una vasija de 20 litros. Parte del alcohol se vierte en otra vasija vacía de igual capacidad que se llena a continuación con agua. La mezcla así obtenida se vierte en la primera vasija hasta llenarla. A continuación se vierten 6 2/3 litros de la primera vasija en la segunda . Finalmente ambas vasijas contienen la misma cantidad de alcohol. ¿Cuántos litros de alcohol se pasaron de la primera a la segunda vasija en el primer traspaso que se hizo de la primera a la segunda vasija?

p_4: En el supermercado SA se necesitan para custodiarlo entre 6 y 15 vigilantes en horas de atención al público y entre 4 y 7 custodios nocturnos. Si el salario nocturno es 60% mayor al diurno. ¿Cómo se debe organizar el servicio para el que resulte lo más económico posible?

Al ser consultado los alumnos sobre la situación problemática p_4, pudo constatarse que el tema de programación lineal no había sido adecuadamente desarrollado en el Profesorado. Esta información permitió que otro grupo de docentes ensayara medidas correctivas para atender la situación planteada.
De todas maneras es imprescindible expresar que para obtener una conclusión más robusta, sería necesario repetir el diseño experimental propuesto en este trabajo de investigación de manera de obtener mayor evidencia para la corroboración de hipótesis. El uso de réplicas permitiría someter el criterio demarcatorio cuantitativo fijado en la hipótesis y de esa manera iniciar el proceso iterativo de realizar nuevos experimentos, generar más datos y establecer nuevas conjeturas que lleven a realizar nuevos experimentos y así sucesivamente. Es decir que se ha iniciado el camino hacia lo que podría constituir un aporte para la educación matemática porque los resultados de esta investigación constituyen un intento para evitar aplicar el término “problema” a una cuestión que en realidad es un simple ejercicio, confusión que no hace más que empobrecer las posibilidades didácticas del uso de problemas matemáticos en el aula.

Proyecciones

En el futuro, esta propuesta metodológica abre la posibilidad de realizar comparaciones:
* en sentido vertical, es decir dentro de una misma casa de estudio a través de los años
* en sentido horizontal, es decir en distintas casas de estudio durante el mismo período de tiempo.

La primera alternativa permitiría elaborar comparaciones sobre un mismo conjunto poblacional de situaciones problemáticas ensayadas con grupos de alumnos a través de los años. La segunda alternativa permitiría hacer comparaciones del grado de dificultad de las mismas situaciones problemáticas con alumnos de distintas carreras o casas de estudio.

Referencias bibliográficas

Chi, M., Glaser; R.; Farr, M. (1998). *The nature of expertise*. Nueva Jersey, USA: Hillsdale.
Garrett, R.M., Satterly, D., Gil Pérez, D. y Martínez Torregosa, J. (1990). Turning exercises into problems. *International Journal of Science Education*, 12(1), pp1-12.
Gil Pérez, D. (1998). La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. *Investigación en la escuela*, 6, pp.3-20.
Glaser,R. (1992). *Expert knowledge and processes of thinking: enhancing thinking skills in the sciences and mathematics*. Nueva Jersey, USA: Hillsdale.
Hernández Samperi, R.; Fernández Collado,C.; Baptista Lucio, P. (1997). *Metodología de la Investigación*. Bogotá, Colombia: Mc Graw Hill.
Montgomery, D.(1991). *Diseño y análisis de experimentos*. México, México: Grupo Editorial Iberoamericana.
Pomes ,J. (1986). *Evaluación de una química preuniversitaria*. Tesis doctoral. Servicio de Publicaciones de la Universidad del País Vasco, España.
Pozo Municio, J.R.; Pérez Echeverría, M.; Domínguez Castillo, J.; Gómez Crespo M.A. (1997). *La solución de problemas*. Buenos Aires, Argentina: Santillana S.A.

Formación de Profesores

Nivel Medio

Generación de problemas a partir de situaciones cotidianas

Nora Andrada, María Casbas, Nydia Dal Bianco, Julio López, Estela Torroba
Universidad Nacional de La Pampa. Argentina
nandrada@cpenet.com.ar juliohlopez@cpenet.com.ar

Resumen
Para permitir a los docentes cumplir eficazmente con su tarea y a la vez ligar lo que deben enseñar con las situaciones cotidianas, se propone que se ejercite la creatividad de situaciones problemáticas para plantear a sus alumnos, a partir de publicaciones de difusión masiva, publicidades en cualquier medio al alcance de sus alumnos, cuestiones observables en el medio y por todos conocidas, lecturas en textos de otras asignaturas, etc., y que a su vez, trasmitan la habilidad de leer en múltiples situaciones corrientes las que pueden ser resueltas con los conocimientos matemáticos vertidos en el aula.

Marco teórico

Los contenidos de Matemática que se han de impartir en la Escuela Media- Polimodal no son sólo necesarios por su valor de preparación para conocimientos posteriores que los jóvenes habrán de adquirir en otra etapa de su formación, sino por el valor propio que esta formación aporta y por su necesidad para la vida en la sociedad actual. Es necesario mostrar a los alumnos que los conocimientos matemáticos nos brindan la posibilidad de proponer modelos que permiten describir y comprender complejos procesos del mundo natural y social y sirven para resolver los más diversos problemas.
Múltiples investigadores de renombre sostienen que, entre los elementos más importantes que existen para desarrollar la capacidad de resolver problemas, está el hecho de brindar la oportunidad de resolver gran variedad de problemas matemáticos. La enseñanza de la Matemática a través de la *resolución de problemas* es una corriente actual, avalada por matemáticos y educadores de prestigio, entre los que puede mencionarse al Dr. Luis Santaló. Son muchos los autores que han encarado sus textos precisamente en ese sentido, planteando problemas tanto como disparadores para la presentación y tratamiento de un tema, como para ejercitar conceptos y métodos, afianzar contenidos o agilizar el uso de las herramientas adquiridas.
El aprendizaje de la *resolución de problemas* con contenido matemático es un proceso a largo plazo y es tarea de los docentes ayudar a los alumnos a adquirir confianza en sus posibilidades, sin evitarles el esfuerzo del aprendizaje. El docente no debe estar para dar soluciones sino para ayudar a los alumnos a utilizar los recursos de que dispone, eventualmente mediante una serie de preguntas que encausen su tarea.

Objetivo del trabajo y la experiencia

Pensando siempre en el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática, particularmente en el Nivel Polimodal, hemos acercado a los docentes que desempeñan su tarea precisamente en ese nivel, una propuesta de trabajo basada en la *resolución de problemas* planteados a partir de situaciones cotidianas del entorno de los alumnos, o extraídas de publicaciones periódicas no matemáticas, o de libros de texto de las propias o de otras asignaturas.

Es cierto que a veces no resulta simple encontrar publicaciones que circunscriban una noticia, una publicidad o un comentario a cuestiones que permitan resolverse mediante el uso de una determinada herramienta matemática que queremos enseñar o aplicar. Sin embargo, sí es posible tomar la idea desde una de esas fuentes para transformarla en una situación problemática. Será necesario realizar una recreación del material, adaptándolo, simplificándolo o completándolo. El docente será capaz de "extraer" o "adecuar" una situación corriente a una situación viable de ser presentada a los alumnos como un planteo que les permita aplicar conocimientos y herramientas conocidas para su resolución o comprensión. Sería oportuno también mostrar a los alumnos el proceso de adaptación que realizó el docente para llegar a ese planteo, para inducir procesos similares en ellos.
La aplicación del método de trabajo que propusimos, implica otras cuestiones indirectas que beneficiarán tanto al propio docente como a sus alumnos. Permite, además de alcanzar el objetivo directo (cual es el de lograr que el alumno conozca, aprenda o domine un tema propio de la asignatura), que se acostumbre al proceso de *transferencia* de esos conocimientos a la solución de cuestiones observables en la realidad.
La fuente natural para realizar esas búsquedas y adaptaciones tiene que ser aquella con la que los alumnos del curso se vinculan habitualmente, con la que tienen contacto en su vida cotidiana. Puede tratarse de una revista, un diario, de la observación de programas o publicidades televisivas, de elementos por todos conocidos como una tarjeta de crédito, un resumen bancario, un formulario de recolección de datos para cualquier institución o actividad cercana. Y si además, se tiene la posibilidad de descubrir en esos alumnos un interés particular en el tema o elemento seleccionado o a seleccionar para la propuesta de problemas, seguro que el interés que se despertará será mucho mayor del previsto y además los resultados logrados con el trabajo realizado con esa base, mucho más provechoso desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje.
Como una experiencia adicional que podría llevarse a la práctica y que aportaría significativamente al objetivo perseguido, puede sugerirse que los mismos alumnos aporten el material a usar, que busquen situaciones de la realidad que puedan relacionarse con lo aprendido o que hacen referencia a los conceptos y contenidos que se están tratando en determinado momento del curso. Esta metodología de búsqueda de fuentes de situaciones para generar problemas seguro que permitirá al docente descubrir esos intereses de los que se habla en el párrafo precedente, al observar los aportes que los propios alumnos realicen.
Estimamos que resultaría extremadamente enriquecedor que algunas experiencias se vinculen con temas y conocimientos de otras asignaturas del curso y, de ser posible, compartir el desarrollo de la clase en que se plantean esas situaciones con el profesor de aquella asignatura. Incluso, invitar a otros profesores a compartir sus clases con el profesor de matemática cuando deban analizar situaciones en que es necesario aplicar contenidos y conceptos matemáticos. Experiencias en ese sentido ayudarán a los alumnos a realizar una real integración de conocimientos.
El material que se puso consideración en la experiencia del Curso-Taller encarado por los integrantes de la Subcomisión de Matemática de la Comisión de Articulación Escuela Media-Universidad, no pretendió, ni mucho menos, agotar las posibilidades, sirvió sólo para ejemplificar posibles formas de trabajo que debieran ser experimentadas y enriquecidas por cada docente en su tarea tanto de preparación como de desarrollo de sus clases. Asimismo, debe tenerse presente que, en algunos ejemplos presentados se ha vinculado la situación problemática planteada con un determinado tema, cuando esa misma

situación, con pequeñas variantes, podría ser aplicada para motivar o ejercitar otro tema previsto en los contenidos curriculares del curso.

Selección de contenidos

A efectos de presentar adecuadamente la tarea realizada, se transcriben a continuación algunas de las situaciones que se incluyeron en el material elaborado y que permitieron la ejemplificación y trabajo de los aspectos metodológicos propuestos.
Algunos de estos ejemplos se acompañan de la fuente considerada y en otros casos, la fuente no fue precisamente una nota o elemento escrito, sino la consideración de alguna cuestión que al realizar la experiencia piloto con un grupo de auxiliares, indicó que sería un buen tema para incluir en alguna situación problemática.

PATENTES.
Hasta hace algunos años atrás, el sistema de patentes de automotores vigente en nuestro país se conformaba con una letra (que identificaba a la provincia y entonces era un total de 21) acompañada por seis dígitos iguales o distintos entre sí.

Actualmente el sistema vigente cuenta con tres letras coincidentes o no entre sí (de un total de 27 de posible uso) y tres dígitos iguales o distintos entre sí. ¿Puede de este último modo patentarse mayor cantidad de vehículos que antes?.

BICICLETEADA

Un grupo de jóvenes ha decidido realizar un paseo en bicicletas desde la ciudad de Santa Rosa hasta la localidad de Catriló (86 kilómetros de distancia), proponiéndose hacer ese recorrido a una velocidad constante de 20 km/h. El padre de uno de ellos se ha ofrecido a traerlos de regreso en su camioneta, que regularmente conduce a una velocidad media de 50 km/h, pero le ha pedido a su hijo que le haga un llamado con su celular, cuando lleguen a la localidad de Anguil, distante 24 km. del punto de partida, para iniciar en ese momento su viaje. Esa comunicación se produce a las 9 horas del día de la bicicleteada, y el padre, tal su compromiso, sale a la búsqueda, justo en el momento de producido el aviso previsto.

Interesa saber:

a) A qué hora comenzaron su paseo estos jóvenes.
b) A qué hora alcanza el padre al grupo de ciclistas.
c) A cuántos kilómetros del punto de partida se produce el encuentro.
d) Si el padre no se detiene en el camino al cruzar a los jóvenes, cuántos minutos debe esperar en Catriló a que lleguen los ciclistas.

e) A qué hora debió haber realizado el llamado el hijo para que la llegada del grupo y de su padre a Catriló se produjera en el mismo momento.
f) Si los ciclistas tardaron quince minutos en Catriló para hacer la carga de sus bicicletas en la camioneta, a qué hora se produjo su llegada de regreso a Santa Rosa, si lo iniciaron inmediatamente de concluida esta carga.

FIN DE SEMANA LARGO EN EL CAMPO.
Mi amigo y yo habíamos decidido pasar este fin de semana en el campo, como consecuencia de contar libres con el sábado, el domingo y el lunes que es feriado, pero mi amigo me avisa que desiste del paseo porque tuvo un desperfecto en la cañería de su casa. Me explicó: "Cada media hora, cae una gota de un caño que pasa por el techo y he calculado en unos 300 mm^3 el volumen de la gota. Coloqué un recipiente de 75 cm de largo por 40 de ancho y 50 mm de alto para recogerlas, pero tengo miedo que se llene si me ausento estos tres días." ¿Es fundado el temor de mi amigo?

Comentarios
Cada una de las situaciones problemáticas que fueron incluidas en el material que se elaboró al efecto, y del que se han transcripto precedentemente algunas selecciones, surgió de contemplar algunas de las consideraciones que se detallaron como objetivos a perseguir con la experiencia. Para mejor ilustrar, insertamos seguidamente las razones que llevaron a la redacción e inclusión de cada una de las cuestiones que se incorporaron en este trabajo y los comentarios acerca de su tratamiento en el curso taller y en las experiencias docentes con los mismos.

PATENTES
Esta situación problemática surge de un artículo publicado en un periódico como consecuencia de una entrevista entre el periodista y el responsable del Registro de la Propiedad Automotor de una determinada jurisdicción, en el que se vierte en forma indirecta que el cambio del sistema de patentamiento del anterior al actual, obedece fundamentalmente a lograr alcanzar una mayor cantidad de posibilidades de confección de patentes, tanto que con este sistema se puede incluir en uno único, a la población automotriz no sólo de la República Argentina sino de todo el Mercosur. Se incluye el análisis entonces, a efectos de desvirtuar en los alumnos la conclusión aparente que surge de la noticia en el sentido comentado y permitirles además tomar conciencia de que la lectura de éstas debe hacerse con espíritu crítico, logrando además que sean efectos multiplicadores de este criterio frente a los individuos de la comunidad.
Se simplificó la situación minimizando las alternativas reales del sistema anterior de patentamiento, reduciendo a su vez las posibilidades de resultados que se alcanzarían con el mismo, situación ésta que inicialmente no se comenta pero que luego de alcanzarse la respuesta, el propio docente destacará para ilustrar mejor a sus educandos. Nos referimos en este sentido, a la suposición de que todas las patentes del país contaban en el sistema anterior con un número de seis cifras, cuando en realidad las patentes de Capital Federal contaban con siete, si bien la primera cifra no llegó a valores superiores al 2 porque antes de aumentar el tamaño de la población automotriz a un nivel que requiriera el uso de una cifra mayor, fue desestimado y reemplazado por el actual de tres letras y tres cifras.
Esta situación problemática además, se estimó interesante como para plantear o ejercitar (introducir o afirmar) el tema relativo a análisis combinatorio en donde la solución final se

logra no por el análisis simple de una situación, sino de la reunión de más de un problema simple, en un problema de complejidad mayor, relativo a sucesos simultáneos.
La experiencia con los docentes que participaron del Curso-Taller derivó en una confirmación respecto de la modificación de criterio que se observa en todos ellos respecto del convencimiento existente hasta el momento en sentido absolutamente contrario al efectivamente probado al realizar las determinaciones correspondientes. Los comentarios sobre la experiencia en aula realizada por algunos docentes que la concretaron con sus alumnos por estar justamente tratando el tema en el momento de concreción del Curso-Taller, permitió confirmar que el criterio reinante en la mayoría de quienes no habían realizado las determinaciones correspondientes difería de la realidad, y que el de quienes no estaban convencidos de lo contrario era, en todos los casos, la falta de criterio por no haber analizado el caso o bien, no teniendo idea alguna sobre el particular. Requerido que los alumnos relevaran el criterio existente al respecto entre los integrantes de su propia familia se confirmaron idénticas conclusiones, lo que permitió a los alumnos sentirse plenamente satisfechos de poder ilustrar a los demás con los conocimientos adquiridos, desalojando en la comunidad vinculada a ellos, un error de criterio largamente mantenido.

BICICLETEADA.
Este planteo problemático surge de la adecuación y recreación de una nota periodística referido a una bicicleteada realizada por una organización defensora de las buenas costumbres en la práctica deportiva del común de los vecinos, que habitualmente no hacen de este tipo de actividades, una habitualidad.
Frente a múltiples comentarios realizados por los alumnos respecto de si serían capaces o no de completar el recorrido, y si serían o no capaces de hacer de igual forma que la ida el regreso, se decidió redactar el problema presentado aprovechando para que con la solución del mismo se ejercitara el manejo en relaciones de velocidad, tiempo y espacio, y la comprensión de las consignas que habitualmente deben interpretarse a partir de este tipo de planteos, ya sea desde un texto, ya desde un caso concreto frente a situaciones similares.
Las cuestiones que se plantearon al efecto, se vincularon con los comentarios que, realizados por los alumnos, exteriorizaban las preocupaciones y permitían al docente que lo redactó, detectar criterios inicialmente erróneos como consecuencia de estimaciones no adecuadas e incluso con conclusiones previas que presentaban incoherencia entre sí y falta de vinculación de unos resultados estimados respecto de otros, ligados naturalmente entre ellos y que sin embargo derivaban en apreciaciones que no se condecían unas con otras.
Se entendió que por tratarse de una actividad de interés propio de los educandos, su solución sería encarada con un entusiasmo distinto que si se les proponía un problema que apuntara a igual finalidad educativa pero extraído de un texto que planteaba una situación totalmente ajena a esos intereses.

FIN DE SEMANA LARGO EN EL CAMPO.
Este problema es en extremo sencillo. Surge de un comentario casual recibido desde la propia clase que es aprovechado para que, dándole forma, resulte una aplicación del tema de reducción de unidades de medida de un sistema a otros y que a la vez permite un repaso de otros conocimientos previos tales como el cálculo de volúmenes por ejemplo.
Se entiende que resulta interesante que en una situación problemática que se plantee al alumnado no se trate de reducir el problema para que la obtención de su solución sea lograda únicamente con la herramienta que se está enseñando o ejercitando. De ese modo,

la necesidad de vincular varios procesos y conocimientos, los acostumbre a que la solución de un problema de la realidad, requiere en general el uso de múltiples herramientas y que debe conocerse también la secuencia de uso de las mismas para el logro del resultado pretendido, no ya para un problema de aula, sino para una situación cotidiana a atender haciendo un servicio para sí mismo o para terceros.

Conclusiones

La experiencia se concretó en cuatro reuniones de 4 horas y media de duración cada una y con una reunión por mes, durante el segundo cuatrimestre del período lectivo 2.000.
En la primera de las reuniones se hicieron los comentarios generales sobre la propuesta y se suministró el material elaborado al efecto, haciendo consideraciones generales sobre los elementos que dieron origen a los problemas y situaciones planteadas.
Para la segunda de las reuniones se intentaron las soluciones de la mayoría de las situaciones problemáticas planteadas. Durante esta segunda reunión, se expusieron y analizaron los procesos de solución alternativos que intentó cada uno de los participantes, destacándose que algunas de esas soluciones fueron alcanzadas en forma individual, otras en forma grupal por varios docentes y otras surgieron de la elaboración de alumnos de los participantes del taller.
Se solicitó a los docentes que para la tercera reunión consideraran situaciones que pudieran darse en su ámbito de trabajo o en su medio y en base a ellas se elaborara una batería de problemas afines con los temas que estaban incluidos en los contenidos de las asignaturas a su cargo. Estas búsquedas y las redacciones y soluciones propuestas a las situaciones planteadas fueron expuestas y discutidas en el tercer encuentro, aportando cada asistente y los conductores de la experiencia, sugerencias de mejoramiento y alternativas de explotación de la situación problemática prevista, quedando en su caso redactadas en forma definitiva y para que en el tiempo que mediaba entre esta tercera y la última reunión se sometieran a experiencia las mismas. Se solicitó que se registraran las observaciones sobre la experiencia aúlica en cada una de ellas, tanto positivas como negativas, con el objeto de considerarlas en la cuarta y última reunión, retroalimentando el proceso y analizando los méritos de éxito que podrían imputarse a la metodología y las cuestiones que merecen tenerse en cuenta para evitar efectos no deseados.
La exposición de estas conclusiones en la cuarta y última reunión del curso taller fue sumamente rica. Hubo experiencias que fueron concretadas en el aula directamente. Algunas de ellas vinculando necesidades matemáticas derivadas desde otras asignaturas del plan de estudios y para alumnos del mismo año y curso del establecimiento en el que se realizó la prueba. Otras se concretaron en eventos organizados específicamente al efecto, como la realización de una jornada denominada de “Matemática en Familia” donde las situaciones fueron expuestas a los alumnos para que fueran resueltas con el apoyo de familiares convocados al efecto. Una experiencia particular fue la de anticipar un análisis de producción frutícola local que luego permitió someter los resultados logrados a los que los organismos específicos publican sobre idéntico tema. Un único docente realizó la experiencia de solicitar a los alumnos que en lugar de solucionar situaciones problemáticas planteadas desde el docente, se realizara un análisis conjunto de una situación particular y luego los alumnos fueran los que redactaran una situación problemática vinculada a un tema en particular de la asignatura en el marco de la situación observada previamente.

En general la conclusión fue que los alumnos se encontraron en general más motivados con estos problemas que con los tradicionales extraídos de textos matemáticos, pero también fue considerable la expresión relativa a las dificultades que implicó la redacción de los problemas a plantear a los alumnos por parte de los propios docentes, y en el caso especial en que se solicitó la redacción de esos problemas a los alumnos, los graves problemas de expresión literal que enfrentaron la mayoría de los educandos frente a la rigurosidad matemática con que deben ser planteados.
El cierre del taller implicó el suministro a los participantes, agrupados en grupos de cuatro personas en cada grupo, de un total de 15 ejemplares de un diario local (a todos los grupos idéntico material) para que redactaran situaciones problemáticas, indicando para qué tema lo elaboraban y qué finalidad perseguían con esa redacción. Los comentarios finales fueron muy ricos, observándose un caso muy llamativo. Hubo una información periodística que todos los grupos explotaron de algún modo, aunque con temas totalmente diferentes de un grupo a los restantes.
La experiencia realizada con los docentes permitió detectar que en general, en la elaboración de sus clases al momento de redactar una ejercitación, intentan dar en forma conjunta, por una parte, los datos directos de utilidad en la solución pretendida, y por otra, tratar que la situación planteada se resuelva sólo aplicando el tema para el cuál la misma se había diseñado, cuestión que en la discusión realizada se determinó como no recomendable porque induce al alumno a concentrar su esfuerzo en trasladar la situación problemática a una solución en el marco del tema en estudio.
Simultáneamente se escucharon múltiples opiniones relativas a la falta de criterio en el alumnado para anticipar una respuesta para el planteo propuesto. Cuando se requería incluso la interpretación del resultado logrado (aún siendo correcto), los alumnos no eran capaces de argumentar o vincular la respuesta alcanzada con otros parámetros, que le permitieran confiar en el mismo como un resultado viable. Se recomendó entonces que se hagan comentarios conjuntos o que se sometan a discusión las posibles soluciones alcanzadas intentado que cada alumno o grupo de alumnos defienda criteriosamente la alcanzada, en el marco de la conducción y encauzamiento de opiniones realizada por los docentes a cargo de la experiencia que debiera ser rutinaria.

Referencias bibliograficas

C.Parra, I. Saiz (compiladoras). 1994. *Didáctica de la matemática. Apuntes y reflexiones* **-** Editorial Paidós Educador.
L.E. Siñeriz (1972). *Métodos heurísticos de Resolución de Problemas.* Cuadernillos Universitarios. U.N. del Comahue.
D. Ausubel, J. Novak, H. Hanesian. *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo* **-** Editorial Trillas.
Didáctica de matemática. Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Editorial Paidós Educador. 1994.
Material bibliográfico de uso corriente en cualquier asignatura y curso regular de la enseñanza polimodal.
Publicaciones diarias y periódicas de difusión masiva y de tipo informativo.

Hacia un modelo de docente investigador

Gloria Nora Suhit
FRBB. UTN
gsuhit@criba.edu.ar

Resumen
Los aportes de la investigación educativa y la experiencia personal me permiten aseverar que la mejora de la calidad educativa se basa fundamentalmente en el docente.
Se plantea entonces la necesidad de contar con centros de formación docente de excelencia que aseguren una formación inicial y continua acorde con las tendencias y experiencias innovadoras en el área, tendencias que conciben dicha preparación como un profundo cambio didáctico asociado a una tarea permanente de reflexión sobre la práctica, que permita formar profesionales autónomos, cooperativos e investigadores.
Se propone diseñar cursos, de formación inicial y permanente, que : pongan el acento en los contenidos que el docente debe enseñar ; proporcionen una sólida comprensión de los conceptos fundamentales y su evolución histórica ; los familiaricen con los procesos de razonamiento que subyacen en la construcción de los conocimientos; los formen en la investigación – acción.

Introducción

La misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo tan rápidamente cambiante que les toca vivir. Es decir, impartir enseñanzas para que adquieran las competencias que todo ser humano necesitará para resolver de manera eficaz y autónoma las diversas situaciones de la vida.

Para integrarse y participar de la vida social es preciso dominar una serie de competencias como: ser creativo, saber usar productos de alta tecnología, procesar información múltiple, trabajar en equipo, etc.

"En estos tiempos en que la educación parece proyectarse hacia el hombre en situación, es decir, al individuo con sus particularidades, sus vínculos humanos y su relación con el contexto físico, la propuesta educativa se orienta hacia una formación para la vida cotidiana… y desplaza su preocupación del producto (el conocimiento) hacia el proceso (la adquisición del conocimiento) con el consiguiente acento en el aprendizaje y el desarrollo de las capacidades, entre ellas y por sobre todas: la capacidad de ***aprender a aprender***, para utilizar los conocimientos de un modo eficaz. (Braghiroli, C., 1994)

La enseñanza de la matemática, en este contexto, debe ser vista como un quehacer de la cultura que ayuda a la comunicación interpersonal y a la solución de problemas.

Con el desarrollo de la ciencia y de la tecnología y dado el papel preponderante de la matemática en ellas, el problema de lograr una buena formación matemática en todos los niveles de la educación se agudiza con renovado interés.

Aunque la matemática es única, su presentación para un buen aprendizaje varía mucho según los alumnos a quienes va dirigida, detalle que es conveniente tener en cuenta tanto para una mayor motivación como una mejor preparación para las actividades futuras de los alumnos- docentes.

La investigación educativa ha puesto en evidencia la existencia de marcadas diferencias entre lo perseguido por los diseñadores de currículos y lo que los docentes llevan a la práctica. No basta con diseñar con fundamento un currículo si los docentes no reciben la preparación adecuada para impartirlo, por lo tanto se necesita una profunda revisión de la formación docente- inicial y permanente- extendiendo a la misma las adquisiciones de la investigación sobre el aprendizaje de las ciencias y, en particular, las propuestas de orientación constructivista.

¿Qué deben saber y saber hacer los docentes de matemática para impartir una docencia de calidad?

Los aportes de la investigación didáctica permiten concebir la formación docente como un *"profundo cambio didáctico"* que plantea la necesidad de un buen conocimiento de la materia a enseñar y de la apropiación de una concepción de la enseñanza- aprendizaje de las ciencias como una construcción del conocimiento, es decir, como una investigación de los alumnos y de los docentes. De este modo la preparación docente debe quedar asociada a una tarea de investigación e innovación permanentes, que permita formar un profesional autónomo, cooperativo e investigador.

La actitud investigadora, que resulta imprescindible en cualquier proceso de innovación, se ve reforzada desde una propuesta de currículo abierto al favorecer ésta la reflexión sobre la práctica como medio para tomar decisiones curriculares.

A través de *la dimensión reflexiva el docente deja de ser un mediador entre la teoría y la práctica, para convertirse en un mediador activo que desde la práctica reconstruye críticamente su propia teoría y participa, así, en el desarrollo significativo del conocimiento y la práctica profesional*. (Porlán, 1992 y Carr, 1993)

¿Qué exige conocer el contenido de la asignatura?

Implica conocimientos profesionales muy diversos (Coll,C., 1987) que son más amplios y completos que los que habitualmente se desarrollan en los cursos de formación inicial e incluyen entre otros, los siguientes:

- ✓ **Conocer la historia de la matemática,** que aporta una visión más humana a esta ciencia y un potente auxiliar para: (Guzmán, 1993)
- Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas matemáticas.
- Enmarcar temporal y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación precedentes
- Señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente
- Subrayar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes

- ✓ **Saber seleccionar contenidos** asequibles a los alumnos y susceptibles de interesarlos

Siguiendo al Dr. Santaló (1994) podemos afirmar que: “es tan extenso el campo de la matemática y se han acumulado tantos conocimientos, que es muy difícil seleccionar la matemática que los alumnos van a necesitar en el futuro. Hoy más que nunca ***“enseñar es elegir”***
Como señala Linn(1987) el conocimiento profundo de la materia es fundamental para una enseñanza eficaz y no puede adquirirse en el período siempre breve de una formación inicial, por lo tanto debemos tener en cuenta la preparación de los alumnos- docentes para profundizar en los conocimientos y adquirir otros nuevos, en función de los cambios curriculares, avances científicos, cuestiones planteadas por los alumnos…, es decir, formarlos para “aprender a aprender”.

¿Cómo enseñar lo que se ha de construir?

La evolución de la matemática no sólo se ha producido por acumulación de conocimientos o para dar respuestas a distintos campos de aplicación. Los propios conceptos matemáticos han ido modificando su significado con el transcurso del tiempo, ampliándolo, precisándolo o revisándolo, adquiriendo relevancia o por el contrario, siendo relegados a segundo plano.

Esta consideración epistemológica tiene importantes repercusiones desde el punto de vista curricular. Presentar la matemática como algo acabado, cerrado y alejado de la realidad no refleja su evolución histórica y su carácter constructivo, provisorio y tentativo.

Desde este punto de vista, la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta, de la intuición y de las aproximaciones inductivas necesarias para la resolución de problemas particulares. La experiencia y comprensión de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas a partir de la actividad real es, un paso previo para la formalización. Los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y analizar qué sucede…son los pasos necesarios para elaborar principios y teorías. Esta fase inductiva informa al matemático sobre la corrección del camino por el que transita el proceso de construcción del conocimiento. La deducción formal suele aparecer en una etapa posterior.

Como plantea G. Brousseau, es preciso diseñar situaciones didácticas que hagan funcionar el saber, a partir de los saberes definidos culturalmente en los programas escolares. Se trata de colocar a los alumnos en una situación que evolucione de tal manera que el conocimiento que se espera que aprendan sea el único medio eficaz para controlar dicha situación. La situación proporciona la significación del conocimiento para el alumno, en la medida en que lo convierte en un instrumento de control de los resultados de su actividad. El alumno construye, así, un conocimiento contextualizado, a diferencia de la secuencia habitual, donde la búsqueda de aplicaciones de los conocimientos sucede a su presentación descontextualizada.

Acentuar la actividad constructiva no supone ignorar que la matemática tiene una estructura interna que relaciona y organiza sus diferentes partes. Hay una componente vertical, que fundamenta unos conceptos con otros, que impone una determinada secuencia temporal en el aprendizaje y que obliga, en ocasiones, a trabajar
algunos aspectos con la única finalidad de integrar otros que son los que se consideran importantes desde el punto de vista educativo.

Por lo tanto, no existe un único camino, ni el mejor y si lo hay tiene un fundamento más pedagógico que epistemológico y como lo sugiere el Dr. Santaló :
"El aprendizaje es siempre un avance en zig- zag, que salta de la motivación a las aplicaciones, para volver en busca de las definiciones necesarias y algunos razonamientos de apoyo y saltar nuevamente en busca de atractivas novedades. Por eso, los contenidos, aunque sea imprescindible elegir una ordenación en los programas, muchas veces deben exponerse mezclados, uniendo conceptos análogos en el fondo, aunque alejados en su ordenación establecida". ("La enseñanza de la Matemática en la Escuela Media", 1986, pág. 16)

Necesidad de innovaciones en la evaluación

La investigación didáctica ha puesto de relieve que "las innovaciones en el currículo no pueden darse por consolidadas si no se reflejan en transformaciones similares en la evaluación" (Linn,1987)
Poco importan las innovaciones introducidas si la evaluación continúa consistiendo en pruebas finales para verificar el grado de asimilación de algunos conocimientos conceptuales.
Una evaluación coherente con la concepción constructivista del aprendizaje es la que permite suministrar retroalimentación adecuada a los alumnos y al propio docente contribuyendo a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
Para que la evaluación se convierta en un instrumento efectivo de aprendizaje es preciso extender el concepto y la práctica de la evaluación al conjunto de saberes, capacidades y actitudes del aprendizaje de la matemática, superando la habitual limitación de la repetición de contenidos conceptuales. Recordemos que sólo aquello que es evaluado es percibido por los alumnos como realmente importante.

Es importante que el alumno adquiera la capacidad de autoevaluación, como reflexión crítica de su propio proceso de aprendizaje, ya que ésta permite que tome conciencia de sus avances o retrocesos, que analice lo apropiado de su método de trabajo.

Si se pretende hacer de la evaluación un instrumento de seguimiento y mejora del proceso de enseñanza – aprendizaje no debemos olvidar que se trata de una actividad compartida donde el papel del docente es un factor determinante. Esto supone que los alumnos deben tener oportunidad de discutir aspectos como el ritmo de trabajo, los materiales utilizados, el clima de la clase… De este modo la evaluación aparecerá efectivamente como un instrumento de mejora de la enseñanza.

¿Cómo iniciar el cambio?

Para iniciar el cambio se necesita una profunda revisión de la formación docente- inicial y continua- que plantee la necesidad de un buen conocimiento de la materia a enseñar y de la apropiación de una concepción de la enseñanza – aprendizaje de la matemática como construcción del conocimiento.
La epistemología genética muestra que hay cambios en el desarrollo de la matemática que no corresponde a una nueva acumulación de nuevos “descubrimientos”. Como resultados de estos cambios, la comunidad matemática crea en su actividad una nueva manera de “ver” a los objetos, a la misma disciplina.
En este contexto el “conocimiento matemático” es el resultado de la reflexión sobre acciones interiorizadas – la abstracción reflexiva. La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos sino esencialmente una actividad, una actividad humana, histórica. La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método predomina sobre el contenido.
El hecho que las ***verdades matemáticas*** lo sean en todas partes y para cualquier persona, no justifica que la ***educación matemática*** debe ser igual en todas partes y para todo el mundo.
Aunque las verdades matemáticas son universales, ello no significa que en la enseñanza no se deba considerar la individualidad de los alumnos y/o el contexto social y cultural donde se enseña.
Una **educación matemática** debe ser algo más que **comunicar** estas verdades a los alumnos.
En el aprendizaje de la matemática hay un aspecto en el que hay acuerdo: los **significados compartidos** que se tienen de las **verdades matemáticas.**
El significado matemático se logra estableciendo conexiones entre la idea matemática concreta que se discute y el conocimiento previo del aprendiz. Por lo tanto el significado se logra de una manera personal.
Luego si acordamos que en la actividad humana el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención y se construyen diferentes versiones sobre su contenido, versiones que se comparan, negocian y reconstruyen en el proceso mismo de la actividad, estos aspectos de construcción personal deben considerarse en la enseñanza.
Esta visión obliga a una reformulación epistemológica, la cual consiste en considerar al humano haciendo matemática y a diseñar situaciones donde el foco de atención esté no sólo en la adquisición del conocimiento, sino también en el desarrollo de actividades. Por lo tanto al “estudiar la construcción del conocimiento se debe tener en cuenta cuatro componentes fundamentales: epistemológica, cognitiva, didáctica y social. Esta aproximación múltiple y sistémica recibe el nombre de **acercamiento socioepistemológico”.** (Cordero Osorio, F., 1999)
La actual filosofía de la matemática dejó de preocuparse tan insistentemente como en la primera mitad del siglo sobre los problemas de la fundamentación matemática, especialmente tras los resultados de Gödel a comienzos de los años 30 y pasó a enfocar su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática (I.Lakatos), así como en los aspectos relativos a la historicidad e inmersión en la cultura en la que se origina, considerando la matemática como un subsistema cultural con características en gran parte comunes a otros sistemas semejantes. Estos cambios sobre el quehacer matemático vienen provocando, de forma más o menos consciente, fluctuaciones importantes sobre cómo debe ser la enseñanza de la matemática.

Luego se propone diseñar cursos que:

- Enfoquen el acento en los contenidos que el docente debe enseñar.
- Proporcionen una sólida comprensión de los conceptos fundamentales
- Familiaricen con el proceso de razonamiento que subyace en la construcción de los conocimientos
- Den a conocer las dificultades que cabe esperar encuentren los alumnos al estudiar la asignatura.
- Muestren la forma peculiar de aparecer las ideas matemáticas y las conexiones con otras ciencias.
- Incentiven la capacidad de reflexionar en y sobre la práctica, para descubrir, criticar y modificar los modelos, esquemas y creencias que subyacen a la misma; promoviendo el cambio didáctico personal desde una perspectiva constructivista.

De este modo la formación docente debe quedar asociada a una tarea de investigación e innovación permanente, con el propósito de hacer posible que el acto educativo matemático resulte una vivencia y la respuesta a la pregunta que siempre nos preocupa: **¿ para qué enseñamos matemática?** coincida con la propuesta del Dr. Claudi Alsina :

> ***"Enseñar matemática es compartir una forma de ver el mundo"***

Referencias bibliográficas

Ausubel; Novak; Hanesian. (1983). *Psicología Educativa*. México: Trillas.

Braghiroli, C. (1994) *Redes conceptuales: una propuesta con futuro.* Jornadas de capacitación docente. Bahía Blanca: UNS.

Castorina,J. y otros (1996). *Piaget- Vigotsky : contribuciones para replantear el debate.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Coll, C. (coordinador). (1999). *Psicología de la instrucción de la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria*. Barcelona, España: Horsori.

Cordero Osorio, F. (2001). *Una epistemología a través de la actividad humana.* RELIME. Vol. 4. N° 2.

Elliot, J. (1991). *El cambio educativo desde la investigación- acción.* Madrid, España: Morata.

Martínez, J.M. (1997). *La mediación en el proceso de aprendizaje*. Madrid, España: Bruño.

Palacios, Coll; Marchesi. (compiladores). (1990). *Desarrollo cognitivo y Educación* . Vol III. Madrid, España: Alianza.

Porlán, R. (1993). *Constructivismo y escuela.* Sevilla, España: Díada.

Resnik,L.; Ford,W. (1990) *La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona, España: Paidós.

Sanjurjo, L.; Vera, M.T. (1998). *Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior.* Rosario, Argentina: Homo Sapiens.

Santaló,L. y colaboradores (1994). *Enfoques, hacia una didáctica humanista de la matemática.* Buenos Aires, Argentina: Troquel.

Desarrollo del pensamiento geométrico en el futuro profesor de matemática

Norma Rosa Cerizola, Ruth L. Martínez, María A. Miní
Universidad Nacional de San Luis. Departamento de Matemática. Argentina
nceri@unsl.edu.ar martinez@unsl.edu.ar mini@unsl.edu.ar

Introducción

La formación de futuros Profesores de Matemática se constituye en la actualidad en un desafío, especialmente si tenemos en cuenta los requerimientos sobre cómo deberá formar matemáticamente a sus alumnos. De acuerdo a recomendaciones de matemáticos como Miguel de Guzmán, "la educación matemática se debe concebir como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático, a la manera como el aprendiz de artista va siendo imbuido, como por ósmosis, en la forma peculiar de ver las cosas características de la escuela en que se entronca" (Guzmán,1992).

Pero, para que pueda lograr en sus alumnos esta "inculturación "matemática, él mismo debe ser formado de este modo, pues, como expresara Luis A. Santaló, los Profesores tienden a reproducir las prácticas docentes que mamaron durante su carrera.

Esas formas de "inmersión" en el pensamiento matemático no se consiguen solamente a través de la comprensión de teorías matemáticas formales, sino tejiendo una trama donde se entrecruza este aspecto con otros relacionados con la creación matemática como: la resolución de problemas, el estado de los conocimientos matemáticos en distintas épocas, la influencia de las corrientes filosóficas de la Matemática en el surgimiento de sus teorías, las razones de su surgimiento, sus posibilidades y sus límites en cuanto a los problemas que resuelven...

Teniendo en cuenta estas premisas, consideramos que una forma de organización del tratamiento de los temas de una determinada asignatura (o de un grupo de ellas) es a través de la utilización de "hilos conductores", temas especialmente elegidos que se constituyan en "contextos adecuados" para un concepto o problema, que permita no sólo resolverlo, sino que, "lleven a buscar un método que haga que esa solución parezca inevitable, que muestre que es lo que realmente está pasando" (Stewart, 1996)

Todas las ramas de la Matemática ofrecen la posibilidad de elección de "hilos conductores", sin embargo una de estas ramas en particular, constituye una fuente inagotable de hermosos problemas, cuya solución ha resultado ser un desafío para la imaginación creadora de los matemáticos de todos los tiempos: la geometría sintética.

A través de este trabajo pretendemos mostrar un modelo de organización de la enseñanza de la geometría, basada en "hilos conductores" eligiendo como tal, el llamado "Problema de Apolonio" y su historia.

El tratamiento del mismo tiene como punto inicial una incursión en el estado del conocimiento de la geometría griega en sus distintas épocas, hasta llegar a la civilización helénica, ubicando temporal y espacialmente las contribuciones de Apolonio. Con el planteo del conocido hoy como el "Problema de Apolonio", se procede a incursionar en los "Elementos" de Euclides, donde aparece su solución para casos particulares por medio de la regla y el compás griegos o sea, al decir de Descartes, con "líneas rectas y circulares".

Se continúa analizando las soluciones del problema dadas por Viète (utilizando el álgebra) y la de Gergonne (a través de centros homotecias, polos y centros radicales), para culminar con la de Steiner (por medio de la transformación de inversión).

A partir de allí se abordan y resuelven problemas donde se pone en evidencia el poderoso instrumento que resulta esta transformación, ya sea para resolver problemas, cuyas soluciones con otras herramientas matemáticas son muy engorrosas o, problemas no resueltos hasta la creación de esta teoría.

Miremos el tema de esta manera... El punto de partida

Todos los pueblos han desarrollado, en el transcurso de su historia, alguna forma de pensamiento matemático. Los fines han sido muy diversos, entre ellos podemos mencionar algunos como: satisfacer necesidades de la vida cotidiana, elaborar de vaticinios, acercarse a la divinidad, guiar el pensamiento filosófico, comprender los fenómenos naturales...

Pero, cualquiera haya sido su punto de partida, la matemática ha llegado hasta nuestros días a través de dos corrientes principales: el número y la forma. Su unión, a partir del siglo XVII permitió nutrir el caudal inagotable de la creación matemática, alcanzando hoy día logros asombrosos en ámbitos hasta hace poco insospechados.

La matemática como ciencia, aparece en Grecia entre los siglos V y IV a.C. a partir de los conocimientos de dos civilizaciones milenarias, la babilónica y la egipcia. El contacto entre el Oriente y los griegos, comienza en los tiempos del imperio persa y termina poco después de las expediciones de Alejandro el Grande. A la matemática de la civilización egipcia, los griegos accedieron a través de sus cada vez más frecuentes viajes por el Mediterráneo, donde extendieron su comercio.

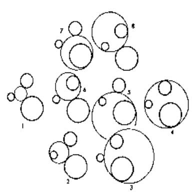
La matemática fue sometida entonces a las discusiones de los filósofos griegos. Estos pensadores, entre los que encontramos a Pitágoras y Platón, pronto se dieron cuenta de las grandes dificultades relativas a los conceptos de continuidad, movimiento e infinitud, así como al problema de medir magnitudes arbitrarias con unidades prefijadas (magnitudes inconmensurables). Fue probablemente este último problema, el que llevó a los griegos a ignorar el “ número” priorizando la “forma”. Es así como se abrieron camino a través de la geometría sintética, con el agravante de la influencia ejercida por las concepciones de Platón sobre la matemática, las que resultaron nefastas para su progreso. La imposición de limitar a “la regla” y “el compás” como únicos medios de construcción geométrica (que no se utilizan como instrumentos de medición: la regla es no graduada y el compás se “cierra” luego de trazar una circunferencia), se erigió en un obstáculo para el desarrollo de la geometría. El motor fue puesto nuevamente en marcha casi cuatro siglos después, en el período alejandrino, gracias a la audacia y la imaginación creadora de mentes brillantes, como veremos luego.

El “Hilo conductor, un “Hilo histórico...” El Problema de Apolonio

El conocido actualmente como “Problema de Apolonio” consiste en lo siguiente: dados tres objetos matemáticos, como tres puntos, tres rectas o tres círculos, trazar una circunferencia que sea simultáneamente tangente a los tres elementos.

Hay un total de diez soluciones. Las dos más sencillas son las que se refieren a tres puntos o tres rectas, éstas se encuentran utilizando conceptos de geometría elemental.

El problema de los tres círculos (exteriores entre sí), tiene en total ocho soluciones, como puede observarse en la figura.



La historia de este problema comienza en el año 332 a.C cuando Alejandro Magno fundó en Egipto una ciudad a la que modestamente llamó Alejandría. Alejandro murió en el año 323 a.C, sin haber podido terminar la construcción de la ciudad.

La inestabilidad política que siguió a su muerte llevó a la división del imperio alejandrino en tres partes. Una de ellas era Egipto, que pasó a estar bajo la dinastía ptolemaica. Pronto, Alejandría se convirtió en el foco intelectual del Mediterráneo y el máximo exponente de la cultura Helénica por aquella época. Su museo y su famosa biblioteca se constituyeron en el lugar de trabajo de más de cien sabios, entre los que se encontraban grandes matemáticos como Euclides, Arquímedes, Apolonio, Eratóstenes, Ptolomeo, Pappus y Diofanto.

Allí escribió Euclides su monumental obra los Elementos en la cual sistematizó la geometría siguiendo la más pura tradición platónica. Debido a ello, en los Elementos, Euclides no trata sobre las mediciones de las longitudes de los segmentos, de las áreas y volúmenes, sino de sus relaciones.

Adoptó también el método de razonamiento sintético, conocido hoy como axiomático-deductivo, para la demostración de cualquier teorema, Euclides parte de una "afirmación válida a ciencia cierta", la cual se apoya en última instancia en un sistema de condiciones iniciales. A partir de esta última, se desarrollan sucesivamente consecuencias que conducen a la afirmación buscada.

Arquímedes (287?, 212 a.C.) y Apolonio (260?, 200 a.C.), desobedecieron las recomendaciones de Platón, pues ellas se erigían como un obstáculo para resolver un gran número de problemas. Arquímedes utilizó recursos experimentales y conocimientos de la Física, creando el "método de las palancas" para obtener resultados matemáticos, los que luego demostró a través del método analítico. Apolonio, "el gran geómetra" desarrolló la teoría de las secciones cónicas, estudiando curvas como la elipse y la hipérbola, que no se pueden dibujar con la regla y el compás. En su tratado sobre las cónicas, hace uso magistral del método sintético, pero no se limita a la regla y el compás, sino que hace uso del álgebra geométrica (equivalente geométrico de las ecuaciones). En su obra Tangencias, cuyo original se perdiera y que conocemos hoy - quizá parcialmente - gracias a la obra de los comentaristas, aparece planteado el problema que hoy lleva su nombre, junto con las soluciones de los casos elementales. Es muy probable que Apolonio resolviera el caso de las tres circunferencias, pero desgraciadamente nunca lo sabremos...

También en los Elementos, se plantea el Problema de Apolonio, se solucionan los casos de tres puntos y tres rectas, pero no el más general.

Conocimientos perdidos y vueltos a recuperar

Con las sucesivas destrucciones de la biblioteca de Alejandría se perdieron casi todos los conocimientos del mundo antiguo, sin embargo los árabes, causantes de una de esas destrucciones a la vez salvaron muchas obras que tradujeron del griego a su lengua.

Pocos siglos antes de estos sucesos, más precisamente en el año 415 de nuestra era, Europa comenzó a sumirse en la oscura noche de la Edad Media, época de un estancamiento casi total del desarrollo de nuevos conocimientos, en particular matemáticos. Sin embargo, en los monasterios la actividad no se apaga. Los copistas se dedican a reproducir varias obras griegas que han llegado a sus manos.

Con el Renacimiento, Europa despierta de un largo sueño y comienza a gestarse un hombre nuevo, ávido de conocimientos y con una cosmovisión distinta, al ensancharse las fronteras del mundo conocido con el descubrimiento de nuevas tierras.

Los hombres se reencuentran con los conocimientos del mundo antiguo gracias al legado de los musulmanes y de los copistas. Obras como los Elementos y Las Cónicas, son traducidas al latín. Mentes brillantes comienzan a entender ese lenguaje matemático griego casi esotérico, recuperando de este modo esos saberes. Sin embargo, los conocimientos que necesitaban los hombres del renacimiento eran distintos de las complejidades sutiles de la geometría griega, incluso la de Apolonio. Es así como se abandona su estudio y por lo tanto su desarrollo, apareciendo teorías matemáticas nuevas como el álgebra, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal.

Nuevas instrumentos matemáticos para resolver viejos problemas

El álgebra sincopada, resultó ser un instrumento eficaz en manos de Viète (1540- 1603) para resolver el Problema de Apolonio. Más aún lo fue la geometría analítica de Descartes (1596-1650). Las ocho soluciones de este problema para el caso de tres circunferencias, se obtiene resolviendo un sistema de tres ecuaciones cuadráticas. Gergonne (1771-1859), en la primera mitad del siglo XIX, obtiene una de las soluciones más elegantes del Problema de Apolonio a través de centros de homotecia, polos y centros radicales.

Es así como tres teorías distintas permitieron resolver totalmente el problema, pero con métodos diferentes de los de la geometría sintética!

La inversión, una transformación del plano con mucha imaginación

La primera mitad del siglo XIX fue una época de controversias sobre los métodos de las distintas geometrías. Aparecieron grandes geómetras que apostaron por el método de la geometría sintética alegando, que el pensamiento de la geometría analítica era básicamente un pensamiento algebraico.

Entre estos defensores de la geometría sintética encontramos a Jakob Steiner (1796-1863), conocido como “el más grande geómetra (puro) desde Apolonio” (Bell, 1995), cuya vida contradice la creencia “de que para ser un buen matemático, hay que ponerse en marcha muy pronto” (Guzmán, 1995), pues fue un analfabeto integral hasta la edad en que muchos de sus contemporáneos se preparaban para ingresar a la universidad.

A él se le atribuye la invención de la transformación del plano llamada “inversión”, que permite solucionar un gran número de problemas de un modo muy elegante, entre ellos el Problema de Apolonio.

Esta “transformación” generaliza la simetría respecto de una recta y a veces se la llama reflexión circular.

Recordemos que una transformación es una ley que asigna a cada punto P del plano otro punto P' llamado imagen del punto P en la transformación.

Fijemos un punto O del plano y un número k mayor que cero. Cada punto P del plano, distinto de O, se transforma en un punto P' situado sobre la semirrecta OPsi cumple: $\overline{OP}\,\overline{OP'} = k^2$.

Al punto O se le llama centro de inversión y a k potencia de la inversión. La inversión tiene la particularidad que debemos restringirla al plano euclídeo exceptuando O, llamado centro de inversión, que en la transformación no tiene imagen. Lo notable es que la inversión intercambia el interior con el exterior del círculo ω con centro O y radio k (y viceversa). A la circunferencia ω la llamaremos circunferencia de inversión. Notemos que los puntos de la circunferencia son los invariantes de transformación. Si agregamos al plano euclídeo P_∞, punto en el infinito, tendremos que el centro O de inversión tiene imagen y la inversión será una transformación definida sobre el plano inversivo. Es fácil ver que toda recta que pase por O se transforma en la misma recta; que una circunferencia concéntrica a ω de radio R, se transforma en una circunferencia concéntrica de radio k^2/R. No es tan sencillo, pero tampoco complicado el hecho de demostrar que toda recta que no pase por O se invierte en una circunferencia que pasa por O, y demostraremos:

Teorema 1: Cualquier circunferencia que no pase por O se invierte en una circunferencia que no pasa por O.

Sea el diámetro $\overline{PQ}$, tal que O, P, Q estén alineados, por lo tanto O, P, P', Q, Q' están alineados. Para cualquier punto S perteneciente a c, tenemos que el triángulo $Q\ S\ P$ es rectángulo y los triángulos $O\ S\ P$ y $O\ S'\ P'$ son semejantes, como también lo son los triángulos $O\ S\ Q$ y $O\ S'Q'$. En consecuencia los pares de ángulos , $O\ S'P'$, $O\ S\ P$ y $S\ S'Q'$, $S\ Q\ P$ son iguales. Como la suma de los ángulos $O\ S'P'$ y $S\ S'Q'$ es un recto, concluimos que el ángulo $S'P'Q'$, es un ángulo recto y S' pertenece a la circunferencia que tiene como diámetro a $P'Q'$. Como S es un punto arbitrario de c, tenemos que la inversa de c es una circunferencia.

Nota 1: Si estamos en el plano inversivo, como una recta puede considerarse como una circunferencia de radio infinito, podemos decir que el inverso de cualquier circunferencia es una circunferencia.

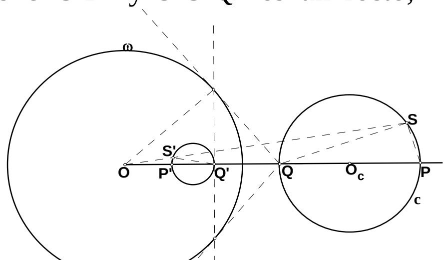


Fig. 1

Un resultado sorprendente fue el obtenido por Mascheroni (1750-1800) en 1797:

Teorema 2: Todas las construcciones geométricas posibles mediante la regla y el compás pueden hacerse sólo con el compás.

A través de la inversión se logra una demostración fácil y elegante del Teorema 2. Toda recta se transforma en una circunferencia (eligiendo el centro de inversión no perteneciente a la recta), lo único que nos hace falta para la demostración del teorema de Mascheroni es poder construir el inverso de un punto P solamente usando el compás, como muestra la Fig.2.

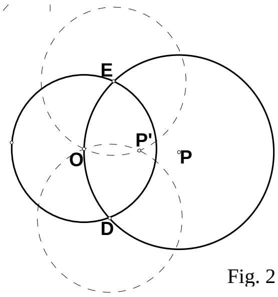


Fig. 2

La demostración la encontramos en el libro *¿Qué es la Matemática?* de Courant y Robbins (págs 156-157)

En otras transformaciones, como en la homotecia, hay propiedades de las figuras primitivas que se conservan, por ejemplo la forma. Nos preguntamos: ¿Qué propiedades conservan las imágenes de las figuras primitivas bajo la transformación de inversión? Evidentemente no es la forma, pues ya vimos que hay rectas que se transforman en circunferencias y, viceversa. Lo que se conserva es el ángulo entre dos rectas o curvas. Con esto decimos:

Teorema 3: Dos curvas secantes se transforman por una inversión en otras dos curvas que se cortan bajo el mismo ángulo.

La demostración se basa en tener en cuenta que la inversa de dos rectas que se cortan en un punto P se invierten en dos circunferencias que se cortan en un punto P’. En P’, las rectas tangentes a dichas circunferencias se cortan formando un ángulo igual que el de las rectas originales.

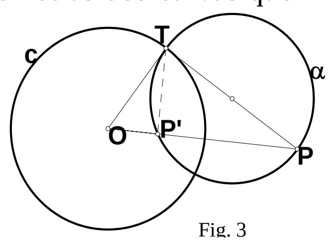


Fig. 3

Nota 2: La inversión conserva la magnitud de los ángulos, pero no el sentido. Esto sucede porque cuanto más lejos está un punto del centro de inversión, más cerca está su correspondiente inverso.

Problema de Apolonio

El problema consiste en encontrar una circunferencia tangente a otras tres dadas c_1, c_2 y c_3. En la figura 3 mostramos un ejemplo.

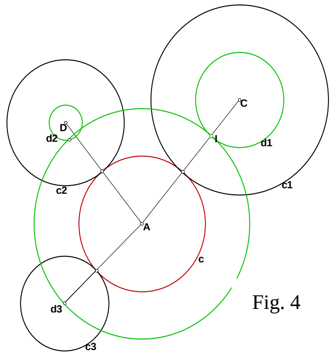


Fig. 4

Si las tres circunferencias dadas son concéntricas, no hay circunferencias reales que sean tangentes a ellas.
Debemos enfatizar, quizás, que siempre son soluciones reales las que estamos buscando. La condición para el contacto de dos circunferencias es que la distancia entre los centros es igual a la suma o diferencia de los radios, según sea la clase de contacto, externo o interno. Si consideramos las tres circunferencias c_1, c_2 y c_3, como las dadas en la Fig. 4, uno de los métodos consta en agregar o sustraer del radio de las tres circunferencias, el radio de la más pequeña, así reduciendo el problema a encontrar una circunferencia que pase por un punto d_3 y sea tangente a dos circunferencias d_1 y d_2. Esto se ve claro, ya que al invertir respecto de una circunferencia con centro en d_3, se tienen dos circunferencias $d´_1$ y $d´_2$. Si trazamos una de las rectas tangentes a ambas, la inversa de ésta es tangente a d_1 y d_2 y pasa por d_3. Luego construimos con centro A, ver Fig. 4, y radios elegidos convenientemente una de las soluciones al problema.

Conclusiones

La transformación de inversión es, al decir de Miguel de Guzmán una “transformación loca y muy divertida” pues, si la comparamos con otras transformaciones del plano ésta no conserva “las formas”. Justamente el no conservar las formas ayuda a la formación de un pensamiento geométrico distinto, que se basa fundamentalmente en un ejercicio de la imaginación. El método básico consiste en elegir adecuadamente el centro de inversión para transformar un problema en otro más simple, resolver éste, y luego volver al problema original por la transformación inversa. Allí vemos con asombro cómo se han acomodado las piezas del “puzzle” mostrándonos el problema resuelto.
Al optar por un ordenamiento distinto de los temas a través de un “hilo conductor” nos ha permitido reordenar y jerarquizar de otro modo nuestros conocimientos. La profundización en la historia del Problema de Apolonio nos hizo que siguiéramos varias bifurcaciones, como el Problema de Arbelos, Inversión, Geometría Analítica, etc. Con todo lo expuesto creemos que esta propuesta nos ha permitido concretar nuestro objetivo: “Desarrollo del Pensamiento Geométrico en el Futuro Profesor de Matemática”

Referencias bibliográficas

Guzmán, M. de (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Argentina: OMA.
Courant, R y Robbins, H (1971). *Qué es la matemática*. España: Aguilar.
Coxeter, F (1988). *Fundamentos de Geometría*. México Limusa,.
Coxeter y Greitzer (1994). *Retorno a la Geometría*. España: Ribadeneyra.
Santaló, L (1993). *La Geometría en la Formación de Profesores*. Argentina: Red Olímpica.
Honsberger,R(1970). *Ingenuity in Mathematics*. EEUU: The Mathematical Association of America.
Pedoe, D (1970). *Geometry*. Gran Bretaña: Cambridge University Press.
Guzmán, M. de (1995). *Aventuras Matemáticas*. España: Pirámide.
Stanley Ogilvi, C (1969). *Excursions in Geometry*. New York: Dover Publications, Inc.
Cadwell, J.H.(1977). *Topics in Recreational Mathematics*, Gran Bretaña: Cambridge University-Press.
Stewart, I (1996). *De aquí al infinito*. España: Drakontos.
Bell, E. T. (1995). *Historia de las Matemáticas*, México: Fondo de Cultura Económica.

Una experiencia de capacitación docente del EGB3 y Polimodal

Lidia Beatriz Esper*, Lucía Rodríguez Montelongo**
*Facultad de Cs. Naturales e I.M.Lillo-UNT. Argentina
**Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia-UNT. Argentina
liesper@yahoo.com.ar lucymon@unt.edu.ar

Resumen
Se relata una experiencia de formación y actualización en el área de Matemática a docentes del Tercer ciclo de la EGB y Polimodal, realizadas en Tartagal – Salta como parte de las actividades de la III Feria del Libro. En el marco de este evento y a través de la Secretaria Regional Adjunta a la Dirección de la Olimpíada Matemática Argentina (OMA), se nos propuso la organización de un curso para docentes del Tercer nivel de la Educación General Básica (EGB3) y Polimodal. La temática a tratar fue "Semejanza e Introducción a los Fractales" que se desarrolló en tres secciones con un total de 18 hs.
En este caso, se propuso un taller para generar un espacio dinámico de interacción entre los participantes, con fuerte énfasis en actividades experimentales, fundamentado en resultados recientes de la investigación educativa.
El desafío consistía que los docentes:
-Fortalecieran su autonomía para el mejoramiento continuo de su gestión profesional, aportando a su formación y actualización.
-Generen un espacio para la discusión y reflexión sobre los contenidos a tratar,
-Transfieran los contenidos vistos a la propia práctica docente, en especial a los alumnos que participan en las olimpíadas, brindándole nuevas estrategias.
En el presente artículo se describe, las características del taller y los objetivos alcanzados.

Introducción

La Secretaria Regional Adjunta a la Dirección de la Olimpíada Matemática Argentina (OMA) nos propuso la organización y el dictado de un curso, para docentes del Tercer nivel de la Educación General Básica (EGB3) y Polimodal, en el marco de la III[a] Feria del Libro. Este evento se llevó a cabo en el Instituto Santa Catalina de Bolognia (Tartagal – Salta), durante el mes de Agosto de 2000. La temática sugerida fue "Semejanza e Introducción a los Fractales. Se desarrolló en un curso taller, para generar un espacio dinámico de interacción entre los participantes, con fuerte énfasis en actividades experimentales, fundamentado en resultados recientes de la Investigación Educativa, realizándose en tres actividades con un total de 18hs
El desafío consistía que los docentes-alumnos:
- Fortalecieran su autonomía para el mejoramiento continuo de su gestión profesional, aportando a su formación y actualización.
- Generaran un espacio para la discusión y reflexión sobre los contenidos a tratar,
- Transfirieran los contenidos vistos a la propia práctica docente, en especial a los alumnos que participan en las olimpíadas, brindándole nuevas estrategias.

Marco Teórico

Este taller de capacitación, se basó en un modelo de aprendizaje constructivista, que concibe el aprendizaje de las ciencias como:
- Un proceso de construcción de significados en el cual el aprendiz aporta sus propias maneras de pensar al enfrentar una situación que intenta comprender.

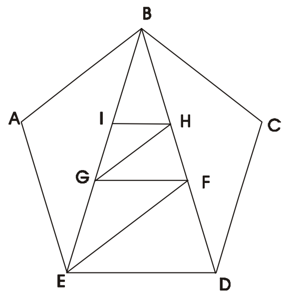
- Un proceso de elaboración intelectual colectiva en el que se confrontan ideas y se intercambian argumentaciones.

Se tuvo presente dos principios pedagógicos orientar la exploración inicial y proporcionar, a lo largo del desarrollo de los distintos problemas, una estructura de apoyo, que consistía en reforzar varios conceptos, propiedades y teoremas de la temática en estudio.
El aprender no significó simplemente reemplazar un punto de vista, ni acumular nuevo conocimiento sobre el viejo, sino transformar el conocimiento. Esta transformación, a su vez, ocurre a través del pensamiento activo y original del aprendiz, quien considera sus saberes previos e implica la experimentación y la resolución con los problemas planteados.
Además, se consideró a los errores como parte del aprendizaje y se trato de hallar el término medio entre dictarles todos los movimientos y no orientarlos en absoluto.

Metodología

Se propone el trabajo grupal para realizar las actividades (comisiones de 5 o 6 integrantes), siendo la función del docente, fundamentalmente la de guía o coordinador.
Los participantes (docentes de los niveles antes mencionados y alumnos del último año del profesorado de matemática) contaron con un documento básico que incluyó la teoría necesaria, problemas para ser desarrollados durante el taller, y la resolución de algunos problemas de geometría fractal, dado que para el resto de los ejercicios propuestos se hizo una puesta en común.
El taller se estructuró en tres actividades que estuvieron orientadas hacia el trabajo interactivo entre los participantes.
En la Actividad Nº 1, se presentaron problemas de congruencia y semejanza. Como problema disparador, tomamos los que propone Iglesias (1995), porque nos pareció muy didáctico para la apertura de este taller:

El tangrama siguiente muestra la figura de un pentágono regular al que se le trazan dos diagonales ($\overline{BE}$ y $\overline{BD}$) y un segmento ($\overline{EF}$) que pertenece a una tercera diagonal . Además: $\overline{GF} \,//\, \overline{ED}$, $\overline{GH} \,//\, \overline{EF}$, $\overline{IH} \,//\, \overline{GF}$.
Con estos segmentos trazados en el pentágono se obtienen varios triángulos:



a) *¿Qué clase de triángulo es cada uno?*
b) *¿Hay triángulos congruentes? ¿Hay triángulos semejantes?*
c) *Entre los ángulos interiores de esos triángulos ¿Cuántas clases de ángulos congruentes hay?*
d) *Entre los segmentos que son lados de esos triángulos ¿Cuántas clases de segmentos congruentes hay?.*

En este problema el docente alumno debió recordar: suma de ángulos interiores de un polígono convexo, tipos de triángulos, ángulos entre paralelas cortadas por una transversal, congruencia y semejanza de triángulos. La mayor dificultad la tuvieron con clases de congruencias, semejanzas y teoremas afines, por ser desconocidos o estar olvidados. Analíticamente, el alumno logró descubrir, entre otras cosas, que todos los triángulos del tangrama son isósceles, que son tres las clases de ángulos congruentes y cuatro las clases de segmentos congruentes.

Calcar y recortar el tangrama pentagonal para componer distintos polígonos.
a) ¿Qué clases de polígonos has formado?
b) ¿Hay polígonos de distintas formas y áreas iguales? ¿Y de distinta forma y perímetros iguales?
c) Organizar la colección de polígonos formados usando distintos criterios por el número de lados, por la convexidad, por áreas crecientes, por perímetros crecientes, etc.

Con este problema el alumno comienza la manipulación propiamente dicha del tangrama y la actividad adquirió un carácter lúdico. Estimula la creación y un mayor nivel de observación.
En esta instancia, se refuerzan los conceptos y relaciones geométricas vistas en el ejercicio anterior, comprobando fácilmente algunos de los resultados.

Con cinco de las figuras del tangrama anterior, construya el pentágono original con un hueco en el centro de forma pentagonal. Indique a que clase S_i pertenecen el lado y la diagonal del nuevo pentágono.

Este problema no tuvo dificultad, dado que solo requirió la manipulación de las piezas.

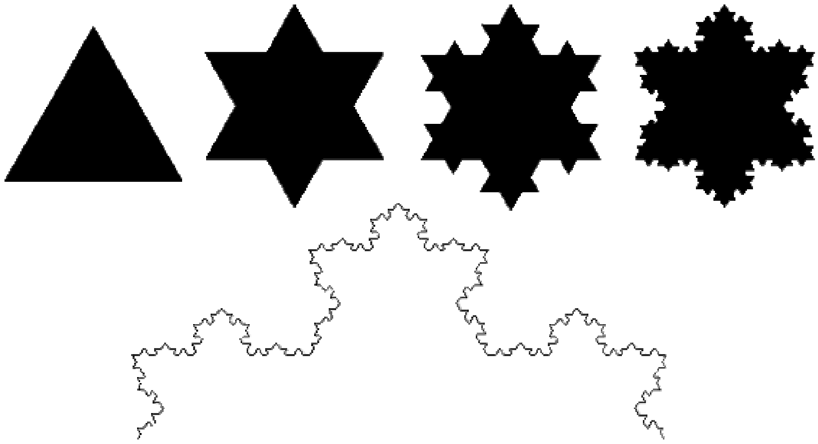
Llamemos l y d a las medidas del lado y de la diagonal del pentágono original, respectivamente.
Llamemos l´ y d´ a las medidas del lado y de la diagonal del pentágono que forma el hueco dentro del tangrama del problema anterior.
a) ¿ Hay alguna relación entre las medidas de uno y otro pentágono?
b) En el pentágono original ¿Qué relación hay entre l y d? Justifique la respuesta.
c) En el pentágono hueco ¿Qué relación hay entre l´ y d´? Justifique la respuesta.
d) Anotar todas las observaciones que sugiera la resolución del problema.

Al final de esta instancia, se hizo necesaria la intervención docente, dado que no pudieron interpretar que la razón de la diagonal y el lado del pentágono ($d/l = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$) es el número de oro, desconocido por la mayoría de los alumnos, el cual tuvo que ser discutido.

Se continuó con otros problemas, de mayor dificultad, que servirán en especial para la práctica del alumno olímpico.

Antes de terminar esta actividad, se propuso resolver el siguiente problema, que sirvió como nexo para introducirlos en la segunda actividad con problemas de la geometría fractal:

A partir de un triángulo equilátero P, de área A y perímetro p, construimos el polígono P_1 borrando el tercio central de cada lado y construyendo el 1º triángulo equilátero como se indica en la figura. Luego construimos el polígono P_2 borrando el tercio central de cada lado de P_1 y construyendo triángulos equiláteros. Continuando de esta manera obtenemos $P_3, P_4, \ldots, P_n$.



¿ Se obtienen triángulos equiláteros semejantes?
Calcule el área A_n y el perímetro p_n del polígono P_n y demuestre que: cualquiera sea n, es $A_n < (8/5)\,A$.

Para su resolución, se calcula el perímetro y el área del polígono que resulta tras cada iteración, por inducción se obtiene:

- $p_n = p\left(\frac{4}{3}\right)^n$, una sucesión geométrica, cuyo primer término es *p* (cualquiera sea el valor de *p* , que para simplificar los cálculos se podría suponer que el perímetro del triángulo *p* = 3), y la razón (4/3). Al ser la razón mayor que 1, a medida que n aumenta, p_n se hace cada vez mayor, es decir $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$, por lo que estamos frente a una sucesión divergente.
- Situación contraria para la sucesión de las áreas, donde por semejanza de figuras planas y por inducción, se llega a que:

$$A_n = A\left[1+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}\right]$$. Reconociendo la serie geométrica,

cuyo primer término es (1/3) y la razón (4/9), menor que 1, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \quad A\left[1+\frac{1/3}{\left(1-4/9\right)}\right]= \frac{8}{5}A$$ (cualquiera se A); cantidad finita de la superficie encerrada por este fractal geométrico[1].

Al comienzo, este problema tuvo dificultad en los docentes-alumnos por lo que el docente guía proporcionó una orientación esencial, explicando en cada iteración como variaba el perímetro y el área del polígono considerado, ayudando a aprender a observar y a realizar conjeturas (Turégano, 1997); aportando conocimientos matemáticos que no recordaban en esos momentos y/ o herramientas de las que no disponían.

En esta fase el docente-alumno está situado ante algo que "conoce" y ante algo que "desconoce" parcial o totalmente; ese "estado" es el que lo motiva a la búsqueda para poder dar respuestas.

Se observa, que allí donde hay un cambio de escala, hay una semejanza. Esta invarianza frente a cambios de escala (autosemejanza) es una propiedad fundamental de los fractales que son estructuras en las cuales los detalles pequeños repiten las características globales más grandes, en un número infinito de veces (de Guzmán, y col., 1993).

En las sucesivas iteraciones de este ejemplo, se obtiene gráficamente el prefactal[2] "copo de nieve", de Von Koch[3].

En la Actividad Nº 2, se dio una pequeña introducción e historia de la Teoría Fractal, y se presento otros fractales clásicos y su construcción, hasta una determinada iteración, pues se llega un momento en el que el modelo de estas repeticiones son solamente realizables a través de computadoras. Por tal motivo, como tercera actividad, se propuso el uso de la tecnología informática, para lograr una mejor aproximación de las representaciones prefactales, donde utilizamos un software confeccionado por el equipo de investigación dirigido por el Dr. Hibbard, T. y col.,(1996).

Al finalizar cada actividad, se facilitó a los participantes una síntesis elaborada por los docentes coordinadores, donde se analizaron los resultados de cada una de ellas y se profundizaron los conceptos analizadas.

Conclusiones

Al finalizar el taller, quisimos evaluar el mismo y dimos una encuesta para que manifestaran sus propias opiniones y/o sugerencias acerca de la metodología empleada, material concreto, y tema propuesto. De acuerdo a los resultados destacamos que la metodología implementada fue muy satisfactoria, pues revirtió la actitud inicial de descreimiento de los participantes sobre la posibilidad de resolver los problemas propuestos.

Relación áurea y Fractales, desconocidos por la mayoría de los alumnos, fueron temas que les resultaron muy interesante.

La inclusión de la geometría fractal en la curricula se justifica por la necesidad de actualizar los conocimientos matemáticos.

---

[1] Santaló (1992), llamó fractales geométricos a las iteraciones de construcciones geométricas

[2] Porque el dibujo no define el fractal, sólo lo insinúa.

[3] La curva de Koch, fue introducida por Mandelbrot (1987), como modelo simplificado de una costa

La utilización de programas informáticos brindó la oportunidad de pasar de unos estilos de investigación a otros: visuales, experimentales y formales (Turégano, 1997).
Es importante señalar también, que se lograron los objetivos propuestos, y además otros no previstos, como los siguientes:
- Un alto grado de compromiso con la tarea y el aprendizaje,
- La conveniencia de enseñar Fractales desde el nivel inicial, con propuestas adecuadas a la edad de los alumnos,
- Un consenso sobre la necesidad de reforzar la formación y capacitación de los docentes en el área de Matemática..
- La reflexión sobre los avances tecnológicos contemporáneos y su vínculo con la temática abordada.

Referencias bibliográficas

Aguilera, N. (1995). *Un paseo por el jardín de los fractales*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Red Olímpica. Olimpíada Matemática Argentina.
Coexeter, H.S.; Greitzer, S.L. (1993): *Retorno a la Geometría.* Colección: La Tortuga de Aquiles Nº 1. Madrid, España: Ed.DLS-Euler.
De Guzmán, M.; Martin, M.A.; Morán M.; Reyes M. (1993). *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Barcelona, España: Ed. Labor, SA.
Fauring P.; Gutierrez F. (1993). *Olimpíada Matemática Argentina, PROBLEMAS I*. Buenos Aires, Argentina: Ed. Red Olímpica.
Hibbard, T. y col. (1996). *Geometría del Siglo XXI*. (Documento de trabajo) III Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur. Universidad Nacional de Salta, Argentina.
Hinrchsen, E.; Busciazzo, N.; Filiputti, S.; S. de Hinrichsen, S. (1993). *Olimpíada Matemática Argentina, PROBLEMAS II.* Buenos Aires, Argentina: Ed. Red Olímpica.
Ibañez, M.; Eguez, R.; Funes, M. (1994). *¿Qué son los Fractales? ¿Para que sirven?* (Documento de trabajo) V Jornadas del NOA de Articulación entre los niveles medio y universitario en la disciplina Matemática, Universidad Nacional de Catamarca. Argentina.
Iglesias, L.D.(1995). Propuesta didáctica. En *Elementos de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Publicación Didáctico Científica Editada por la UNIVERSIDAD CAECE, vol. IX Nº XXXV,. pp 37-41.
Mandelbrot, B.B. (1987). *Los objetos fractales*. España: Ed. Tusquets.
Marín Rodríguez, M. (1994). La Enseñanza de los Fractales. *Revista Números* Nº 25. La Laguna, Tenerife, España: Ed. Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemática. pp17-24.
Paz Sordía, A. (1963). *Geometría I-II-II*. New York, EEUU: Ed. Minerva Books, LTD.
Rojo, A.; Sánchez, S.; Greco, M. (1981). *Ejercicios y Problemas de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ed. Librería “EL ATENEO".
Santaló, L.A. (1992). Conjuntos fractales. *Elementos de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Publicación Científica Editada por la UNIVERSIDAD CAECE, vol. VI Nº XXIII,. pp 5 -26.
Santaló, L.A. (1993). *La geometría en la formación de Profesores*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Red Olímpica.
Turégano, P. (1997). Una experiencia de geometría fractal en la formación inicial de maestros de primaria. *Memorias de las VIIIª JAEM (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de la Matemática)* Salamanca, España, pp 175-177.

Formación de profesores de matemática : Una experiencia en Guatemala

Mayra Castillo
Universidad de San Carlos de Guatemala.
mayracastillo@hotmail.com

Resumen
El presente estudio busca la validación de una propuesta para profesionalizar a los docentes que imparten Matemática en la escuela secundaria sin haber realizado estudios específicos de profesorado. Se inicia detectando líderes entre los docentes y conformando asociaciones que permitan convocar a los maestros de Matemática de distintas regiones. El programa completo está propuesto para cinco años, de los cuales, el más avanzado de los grupos ha cubierto tres. Se abarcan aspectos formativos tanto de la Matemática como de su Didáctica. Desde sus propias aulas, los docentes determinan los conocimientos que requieren y buscan la estrategias innovadoras que les permitan ponerlos a disposición de sus alumnos, en las condiciones específicas en las que laboran. Se ha trabajado durante tres de los cinco años propuestos, al final de los cuales podremos exponer los resultados finales de la implementación de la propuesta.

Introducción

La experiencia como docente en programas regulares de formación de profesores permitieron detectar algunos rasgos del docente de matemática en servicio en la escuela secundaria guatemalteca:

- Muchos de los docentes que imparten matemática no tienen estudios de profesorado.
- Muchos maestros laboran en dos o tres jornadas de trabajo y en varios niveles educativos.
- Comparando el número de egresados de las distintas escuelas de formación de profesores y estimando el número de docentes en servicio, podía concluirse que el país no cuenta con suficientes profesores adecuadamente formados para atender las demandas de un sistema escolar cada día más privatizado y con poco o ningún control estatal.

Sin embargo, había que estimar más de cerca el problema, por lo cual realizamos un estudio piloto con 300 profesores en servicio en todos los sectores del sistema educativo del país, el cual produjo los siguientes resultados (Castillo 1997).

- El 22% de los profesores en servicio en la capital del país tenían estudios concluidos de profesorado. El 78% restante estaba distribuido así: 45% eran profesores de pedagogía, 22% estudiantes de ingeniería, 11% maestros de educación primaria.
- El 85% de los profesores especializados trabajaban en el sector público.
- En el interior del país sólo el 4% de los profesores habían realizado estudios de profesorado. El 96% restante, se distribuía así: 62 % eran maestros de primaria, el 24% eran profesores de pedagogía, y el 10 % restante eran peritos contadores, técnicos pecuarios y otros (Castillo, 1996)

Con estos datos preliminares, establecimos contacto con profesores de varias provincias en la cuales algunos de los profesores eran especializados y gozaban de prestigio y reconocimiento entre sus colegas y ante las autoridades locales. Una vez ubicados los líderes, trabajamos en la formación de una asociaciones de profesores de Matemática, que incluyera entre sus objetivos la elevación de la calidad de la educación matemática en la región. Las primeras reuniones se dedicaron a definir su normativa, intereses, necesidades y expectativas. De este trabajo se derivó a la realización de talleres y cursos trimestrales.
La participación constante de los docentes en la manifestación de sus intereses y la continua reflexión sobre la medida en que se satisfacían sus expectativas, originó que a finales de

l998 solicitaran un programa de formación continua que durara un mínimo de 3 años. Dicho programa concluyó en el 2001, su tercer año de funcionamiento.
Aunque se invirtió casi un año de trabajo organizativo, esta etapa previa permitió a los docentes reflexionar sobre su problemática prioritaria e involucrarse directamente en la búsqueda de estrategias para su profesionalización. Además, permitió conocer número de profesores especializados en varias provincias. A partir de este momento, los docentes tienen a su cargo la gestión financiera y administrativa del programa e interactúan con el equipo de investigadores en el análisis continuo de las actividades realizadas en cada fase.

Antecedentes

La actual propuesta para la actualización de docentes de Matemática de la escuela secundaria se plantea como un trabajo de investigación – acción centrado en la necesidad de formar al maestro como un ser autónomo y crítico, por lo cual la finalidad no sólo es que el maestro aprenda Matemática, sino que también aprenda a enseñarla (Santos Guerra, 1993) . Se tomó como base otro estudio que evidencia que gran parte de los profesores son propicios a enseñar matemática por los mismos caminos que ellos fueron enseñados (Lester y col. citado por Gómez, 1998). Romper este ciclo y modificar su ejercicio profesional hacia formas más consistentes con nuevos planteamientos curriculares, implica conocer y experimentar una forma diferente de saber, de hacer, de aprender y de enseñar matemática.
Otros estudios señalan que los resultados más significativos en la formación de profesores, son aquellas experiencias en las cuales hay consistencia entre la forma de trabajar del formador -modelo didáctico subyacente- y la filosofía que se intenta transmitir con el contenido de estudio -modelo didáctico explícito (Vacc y Bright, 1994). Lo anterior se puntualiza en la expresión “se enseña a enseñar, enseñando”. En este sentido, todos lo elementos utilizados son objetos de aprendizaje para el profesor.
Los principios de la innovación propuesta se describen a continuación:

- **Articulación teoría- práctica** (Azcárate, 2000):
  Se experimentan con los profesores estrategias de enseñanza de la matemática estableciendo un isomorfismo entre el modelo didáctico utilizado y el que se propone que implementen en las aulas.
- **Estimulación de la creatividad y el auto-perfeccionamiento** (Fernández y García, 1999):
  Entendemos el auto-perfeccionamiento docente como una actividad autónoma que presupone cambios en el dominio y comprensión de los fines y naturaleza de la actuación profesional, para lo cual es indispensable que los maestros tengan claridad de sus responsabilidades sociales e históricas. Este proceso es imposible de realizar sin la participación de los propios docentes en la definición y aceptación de dichas responsabilidades.
- **Fomento a la participación activa y democrática** (Porlan, 1993):
  La dirección del proceso de actualización de los docentes se encamina tanto al ejercicio libre de la expresión, como al surgimiento de iniciativas del colectivo tendientes a la búsqueda de soluciones a problemáticas en el ámbito de la educación matemática .
- **Fomento a investigación desde el aula y para el aula** (Porlan, 1993):
  Se potencia la figura del profesor como un investigador de los problemas de aprendizaje que presentan sus alumnos, sus actitudes hacia la matemática, procedimientos novedosos usados por los alumnos, etc.

Por otra parte, se busca el desarrollo de su creatividad cuando debe adaptar las propuestas experimentadas al grado y lugar donde labora .

- **Fomento de la calidad de la educación matemática** (Registrado en la firma de los Acuerdos de Paz, Guatemala, 1996)**:**

Guatemala necesita urgentemente no sólo que la educación científica llegue a sectores mayoritarios olvidados, sino que fundamentalmente se eleve el nivel de la calidad de la educación matemática que reciben los niños y jóvenes guatemaltecos.

- **Equidad:**

Los profesores de matemática en servicio pueden asistir al programa sin distinción de raza, credo, sexo, edad, sector o institución de trabajo.

Descripción de la Propuesta

Duración:

- **Etapa inicial:**

  Se busca dotar a los docentes de los conocimientos y herramientas básicas que le permitan satisfacer sus necesidades inmediatas, reflexionar sobre su participación en el hecho educativo y reconocerse como un ser capaz de propiciar cambios en su conducta y en la de sus alumnos, respecto a la matemática.

Esta etapa dura tres años, cada curso anual consta de 120 horas de trabajo presencial.

- **Etapa intermedia:**

  Los profesores que terminen la etapa de formación inicial, trabajarán un año más centrando su atención en el estudio de la temática que necesitan para orientar la formación de los alumnos egresados del nivel medio, ya sea que estos continúen estudios superiores o se incorporen a los procesos productivos del país. Como fruto de su experiencia, los docentes comparten abiertamente experiencias de aula con sus colegas.

  En esta etapa se trabaja adicionalmente con los profesores con el fin de que se constituyan en monitores para la formación de los maestros de la escuela primaria en cada comunidad. Adicionalmente, se les brinda orientación en el diseño de proyectos que puedan gestionar fondos con agencias internacionales, organizaciones no gubernamentales, etc.

- **Etapa avanzada:**

  Esta etapa dura un año más y se pretende trabajar enfáticamente en aquellos aspectos que le permitan realizar innovaciones y perfilarse desde del aula como un investigador. Los profesores deberán participar en eventos de actualización en su región y otras regiones, escribir sus experiencias de aula para publicarse en un boletín de educación matemática cuya edición impulsamos, presentar proyectos educativos individuales o en grupo que permitan implementar soluciones a los problemas que detectó en su etapa de formación.

Reconocimientos Académicos

Cada uno de los primeros cuatro año se reconoce con un diploma que acredita a los participantes como Profesor Técnico en cada grado del ciclo básico y bachillerato. El quinto año se reconocerá con un diploma de auxiliar de investigación.

Metodología de trabajo

El trabajo de formación de los docentes lo enfocamos desde las perspectivas social, laboral, académica e investigativa; trabajando los siguientes aspectos:

- **Construcción de conocimientos matemáticos:**

Desde el inicio del trabajo organizativo, los docentes manifestaron claramente que necesitaban que cada año se trataran los contenidos que corresponden a cada grado del ciclo básico y en consecuencia, hacia allí dirigimos nuestros esfuerzos.

Los estudios que realizamos en cada región permitieron establecer que la falta de control del Estado sobre la calidad de la educación, permite una gran anarquía en cuanto a los contenidos desarrollados en cada grado. Encontramos que si bien es cierto, existen algunos ejemplares de guías curriculares dadas por el Ministerio de Educación, la mayoría de establecimientos educativos tiene su propio programa, y lo que es peor aún, cada profesor elabora el programa que desarrolla de acuerdo a sus preferencias o conocimientos que domina. La esporádica supervisión que pudiera existir era solventada por la presentación de planes de clase que afirmaban que todos los contenidos habían sido desarrollados.

De manera que al hablar de los contenidos de cada grado del ciclo básico, cada uno tenía su versión. Así que primero procedimos a unificar criterios sobre los contenidos que todo el grupo se comprometía a desarrollar y de ellos seleccionamos aquellos que la mayoría preferían o que mostraban mayor deficiencia en la prueba de diagnóstico realizada.

- **Desarrollo histórico de los conocimientos matemáticos:**

Además de los contenidos matemáticos en sí, se presentan a los docentes referencias históricas que le permiten conocer y comprender la evolución de los conocimientos matemáticos hasta su estado actual. Además, se estudia el aporte de la matemática al desarrollo de la ciencia y de la sociedad y promovemos la valoración del legado científico de los pueblos Mayas, con énfasis en lo concerniente a los conocimientos matemáticos.

- **Problemas de aprendizaje:**

Aprovechando la experiencia docente de la mayoría de los asistentes, en el tratamiento de cada tema promovemos que ellos describan los errores que más frecuentemente han observado que cometen sus alumnos. La mayoría de las veces, es muy jocosamente celebrado que muchos de ellos cometen no sólo los errores que describen, sino también otros que no estaban registrados. Este reconocimiento de las propias deficiencias, tiene dos efectos en los docentes: querer aprender y superarse y otro de entendimiento de las dificultades inherentes de aprendizaje que presentan algunos temas.

- **Didáctica de la matemática:**

Desde el principio de nuestro trabajo con los docentes, ellos manifestaron gran interés en conocer y aplicar estrategias concretas de trabajo en el aula. En cada taller presentamos propuestas didácticas de los miembros del equipo o de colegas de Latinoamérica que colaboran brindando su experiencia al programa.

Como sus expectativas respecto a lo novedoso en estrategias de enseñanza y materiales didácticos eran crecientes, le hicimos dos planteamientos:

1. No existen propuestas didácticas para todos los temas y que funcionen con todos los grupos de alumnos.
2. Ellos podían construir propuestas didácticas muy valiosas y funcionales. Más aún, tenían que hacerlo para buscar por sobre todas las cosas, que sus alumnos aprendieran.

El primer planteamiento los desilusionó y el otro fue recibido con escepticismo. Manifestaron que las propuestas didácticas valiosas las hacían los especialistas y no maestros rurales sin mayor preparación como ellos. Así que gran parte de nuestro trabajo se dirigió a motivarles a que describieran las estrategias que usaban, a rescatar y valorar aquellas que nos parecían interesantes. Después de varios años han ido descubriendo sus capacidades, las cuales han mostrado en eventos regionales y varios de ellos ya presentaron ponencias en los Congresos Nacionales de Matemática Educativa que organizamos anualmente.

- **Roles del profesor de matemática:**

Nuestro trabajo inicial en este sentido se orientó hacia el descubrimiento de las concepciones que los docentes tenían de ellos mismos, de su labor docente, de las razones del fracaso escolar, de sus necesidades, etc. Fomentamos el análisis y la reflexión constante de su propio trabajo, y como fruto de ellos, la búsqueda de la renovación como persona y como docente. El trabajo posterior fue de definición de los cambios que había que hacer, qué tipo de profesor necesita Guatemala para ayudarnos a consolidar la cultura de paz que anhela nuestro pueblo, cómo debe ser el profesor de matemática que ayudará a nuestros niños y jóvenes a enfrentar los retos de la nueva era, cómo puede cada profesor desde su aula contribuir al desarrollo de la nación. Estas y otras interrogantes están siempre en fase se reflexión y discusión con todos los docentes.

- **Investigación desde el aula y para el aula:**

Como parte de su formación, desde el inicio se les orienta hacia la descripción de sus actividades docentes, enfatizando sus principales problemas de aula, actitud de los alumnos, problemas de aprendizaje detectados y posibles explicaciones de los mismos, preguntas de alumnos y procedimientos novedosos usados, etc. Al inicio de la siguiente sesión se discuten en común todos los aspectos anteriores, buscando la sistematización de la información y el respaldo teórico que permita estudiarla más a fondo y explicarla.

Metodología de evaluación

- Prueba de diagnóstico de conocimientos: es una prueba que permite detectar los temas cuyo conocimiento es más deficiente para la mayoría, patrones en las respuestas, estrategias de solución etc.
  Al docente, le permite comparar sus conocimientos iniciales contra los finales en una escala meramente cuantitativa.
- Pruebas escritas: se realizan dos pruebas escritas sobre contenidos desarrollados o comentario de problemas de aula.
- Reporte de práctica docente: los profesores entregan un reporte del trabajo realizado en el aula, con constancia del trabajo de los alumnos, su evaluación e interpretación de resultados,etc.
- Entrega de tareas: Mensualmente son asignados algunos ejercicios o problemas interesantes para su resolución individual o grupal.
- Asistencia a por lo menos 9 de los 10 talleres y a los cursos que se imparten en el congreso nacional.
- Auto-evaluación y co-evaluación de los logros alcanzados y reformulación continua de las metas de aprendizaje, tanto individuales como colectivas.

Resultados obtenidos

- Fundación de siete asociaciones regionales de profesores de Matemática.
- Finalización de etapa inicial con aproximadamente 300 profesores de matemática.

- En ejecución programa de actualización de maestros de primaria, con el apoyo de grupos de profesores tecnificados en las distintas regiones.
- Consolidación de la comunidad de profesores de Matemática de distintos niveles educativos.
- Identificación de necesidades prioritarias en el campo de la enseñanza de la Matemática, en cuatro regiones del país.
- Teorización de conducta de los docentes participantes en el proceso, que servirá de base para la formulación de un modelo que pueda implementarse a nivel nacional, para profesionalizar y actualizar a los docentes en servicio.

Reflexiones finales

La formación de profesores en la modalidad a distancia que hemos ensayado, constituye una experiencia que está en continua reconstrucción a la luz de las necesidades y posibilidades de los profesores en servicio y del equipo de docentes e investigadores que conducen el aspecto académico del programa.

Hemos recuperado la fe de muchos docentes en ellos mismos y renovado su intención de transformar su mundo. Hemos obtenido la solidaridad de colegas de Latinoamérica y tendido lazos entre profesores e investigadores. Hasta el momento no existe en Guatemala un programa similar que permita establecer comparaciones, pero las necesidades de profesionalizar a miles de docentes guatemaltecos, y de otras regiones del continente, amerita que esta experiencia sea documentada y puesta al servicio de los nuevos formadores de educadores matemáticos que deberán realizar esta tarea en condiciones adversas y encontrar en los propios docentes, la fuerza que les permita enfrentar el reto de mejorar la educación de nuestros pueblos.

Al final del estudio, tendremos una propuesta para la formación de los profesores en servicio que pueda implementarse en cualquier región del país.

Referencias bibliográficas

Azcarate, P. (2000). Revista Investigación en la escuela # 42: Estudio de caso en la formación del profesorado. Los futuros maestros ante el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Diada Editora. Sevilla. España.

Blanco, L. (1998). Nuevos retos en la formación de los profesores de matemática. Ponencia presentada en Relme l4. Bogotá Colombia.

Castillo, M. (1997). Estimación del porcentaje de profesores especializados que imparten Matemática en el nivel secundario. Facultad de Ingeniería. USAC. Guatemala.

Cela. D. (1996). Revista investigación en la escuela, # 29. Formación permanente del profesorado y autonomía. Diada Editora. Sevilla.

Fernández y García. (1999). *Autoperfeccionamiento docente*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Revolución.

Gomez, P. (1998) Formación permanente de profesores de matemática. Ponencia presentada en Relme l4. Bogotá, Colombia.

Gomez. P. (1998). Un medio para potenciar profesores investigadores. Ponencia presentada en Relme l4. Bogotá, Colombia.

Porlan, R. (1993). onstructivismo y Escuela. Hacia un modelo de enseñanza basada en la investigación. Diada Editora. Sevilla

Santos Guerra, M. (1993). La formación inicial. Cuadernos de Pedagogía.

Vacc, N y Bright, G. (1994). Changing preservice teacher-education programs. Profesional Develoment for Teachers of Mathematics. (traducción interna).

La creatividad: un desafío docente

Graciela C. Abraham de Juárez, Marta del Valle Zamora
Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Tucumán), Argentina
marzam@infovia.com.ar

Resumen
Teniendo en cuenta que la creatividad es esencial para todas las actividades humanas, la inquietud por esta temática surgió al observar la necesidad de *ser creativos*, actualmente imperiosa para el docente en el mundo postmoderno. De allí que, iniciar al docente en la importancia y conocimiento de la creatividad sistematizada, es el objetivo de este trabajo, a través de una metodología que enfatiza las aplicaciones prácticas, sin descuidar la teoría básica necesaria para que el aprendizaje teórico-práctico resulte sencillo y adecuado a cada nivel educativo. Por todo esto, el marco teórico comprende**:** un concepto de creatividad, temas que lo complementan (aptitudes de la persona creativa, atributos inherentes a la creatividad, etc.) y las estrategias más adecuadas para su implementación en la Matemática Educativa, mediante algunas aplicaciones adecuadas a cada nivel. Este taller resultó una experiencia fructífera, tanto por el interés despertado en los talleristas como por sus logros teórico-prácticos**:** se resolvieron aplicaciones de estrategias básicas, pero significativas.

Introducción: La capacidad creadora del hombre movió al mundo de la cultura y el progreso; por eso *La Creatividad es un factor muy importante para vivir en el mundo posmoderno***,** ya que cubre todas las actividades humanas, desde educación y medicina hasta la producción en general, pero no concentrando la capacidad creativa en grupos de "iluminados", sino procurando su expansión holística a todos los aspectos y niveles. La función del docente no es sólo ser creativo, sino también propiciar un clima de creatividad en sus clases, para que los estudiantes sean capaces de aportar ideas originales y renovadoras, con aprendizajes adecuados. Sistematizar los estudios de las estrategias para la creatividad es un buen *objetivo educacional*. Pero, ¿se puede "enseñar" a alguien a ser creativo*?.* Sí, pero no es sencillo**:** se precisa idoneidad docente, empeño y paciencia.

Definición: Hay inconvenientes para dar una definición clara y precisa de Creatividad. La palabra es poli-semántica y sinonímica, no obstante, las ideas principales que forman una conceptualización básica, serían**:**
*La **Creatividad** no es solamente crear ó inventar algo, sino que, fundamentalmente, **constituye la técnica de resolver problemas,** volcando la mente hacia fuera. No es privilegio de unos pocos "elegidos", sino una propiedad intelectual que los individuos poseen en distinta medida, susceptible de ser desarrollada ó incrementada, y que se revela ante ciertas situaciones de motivación ó estímulo. Ser creativo requiere de un complejo proceso mental, resultado de la conjunción interrelacionada de**:** operaciones, contenidos y productos del pensamiento, que genera novedades ó ideas innovadoras, no vistas ni pensadas antes. En el ámbito educativo, la creatividad es el componente primordial para la formación de hombres y mujeres capaces e independientes**:** para pensar, sentir y actuar. Finalmente, la Creatividad es el **uso productivo de la imaginación,** tendiente a fines personales, económicos, educacionales, sociales, políticos, etc.**,** constituyendo el factor más práctico que el hombre actual debe conocer y aplicar adecuadamente en la posmodernidad.*

Otros aspectos de interés, para completar las ideas conceptuales:
a) En todo el mundo, son importantes los estudios psicológicos que realiza la Escuela Rusa, basados en el **Enfoque Histórico-Cultural** de ***Vigostki*** y sus continuadores. Plantea

Vigostki que el ser humano realiza dos operaciones mentales básicas**: reproductora**, ligada a la memoria para reproducir ideas anteriores, y **creadora,** relacionada con la disociación y la asociación de las ideas presentes. También afirma que la Creatividad no sólo la poseen los genios, sino que potencialmente existe en cualquier ser humano que piensa, razona, imagina y crea algo. Enfatiza en la **unidad mental de lo cognoscitivo con lo afectivo** y señala su carácter socio-histórico, que depende del entorno social y del momento histórico en que cada ser humano vive.
b) El apoyo psicológico de la Creatividad es la *Escuela Psicológica de la Gestalt*, que propicia la **percepción configurativa,** enfoque contrario al asociacionismo.
c) El Pensamiento creativo es, sin duda, un **Proceso Cognoscitivo,** que combina operaciones mentales**:** divergentes y convergentes, laterales y verticales, intuición y análisis, fantasía y lógica. Hyzer clasifica al pensamiento creativo en dos tipos**:** analítico e intuitivo, que están siempre presentes en la psiquis humana.
d) Algunas **características personales,** inherentes al individuo creativo, son:

Imaginación.	Originalidad.	Curiosidad intelectual.
Afición a lo creativo.	Apertura a lo nuevo.	Fluidez de pensamiento.
Flexibilidad mental.	Perspicacia.	Amplia información.
Fuerte poder de intuición.	Constante actitud de empatía.	Inteligencia fuerte.
Capacidad de abstracción.	Capacidad de síntesis.	Capacidad de redefinición.
Percepción configurativa.	Facilidad de expresión de sus procesos mentales.	Coherencia organizativa.
Independencia.	Poder de decisión.	Libre asociación de ideas.
Confianza en sí mismos.	Capacidad de autocrítica.	Facilidad de procesamiento.

e) Fue John Dewey el 1º en afirmar que la Creatividad no es teórica, sino que se inicia con una **situación problemática.** Raudsepp dice que la habilidad para percibir y formular correctamente un problema, son indispensables para la solución eficaz del mismo. En lo Científico, Tecnológico, Educativo y Laboral, **es tan importante descubrir problemas como resolverlos.**
f) La **imaginación,** como transformación sucesiva de ideas, es un factor fundamental en lo creativo, ya que es un proceso intelectual dinámico, que pasa de una imagen mental a otra, permitiendo **la libre asociación de ideas = imaginación + memoria.**
g) En la mayoría de las investigaciones actuales, se considera que la Creatividad puede darse en los siguientes contextos**: persona, sociedad, procesos diversos, productos, ó en la conjunción** de algunos de ellos ó de todos.

Principales estrategias para desarrollar la creatividad:
a) Las estrategias son necesarias a fin de lograr una formación mental creativa. Debido a que la Creatividad se nutre de complejos procesos mentales, se encuentra aún en la etapa experimental. Se estudia sobre la base de investigaciones más ó menos serias y confiables. Para la Psicología Cognitiva, un tema polémico es la distinción entre Estrategias y Habilidades. Las habilidades serían específicas y relacionadas con la ejecución de una tarea particular; en cambio, las estrategias involucran procesos psicológicos más complejos.
b) Una **definición satisfactoria de Estrategia**, sería la siguiente**:**
*"**Las Estrategias son vías que conducen a un buen proceso mental creativo**, el puente de unión entre **el qué y el cómo pensar** para llegar a la solución del conflicto. Se definen como el modo a través del cual las personas descubren equivalencias y asociaciones entre*

las cosas que las rodean; la secuencia de decisiones que una persona realiza ***en su camino hacia la obtención del concepto ó solución del problema".***

c) Abordaremos de manera sucinta y esquemática las principales estrategias. El detalle irá en cada problema, acompañando las que se apliquen**:**

Chi y Glaser Estrategias en función de los Métodos de solución adoptados Por los sujetos que resuelven.	⅄ Búsqueda al azar. ⅄ Búsqueda en profundidad. ⅄ Análisis de medios y fines. ⅄ Subobjetivos. ⅄ Generación y comprobación.

Brunner y colaboradores Estrategias Experimentales	1) Recepción de la información 2) Selección del concepto (solución)	⅄ Examen simultáneo. ⅄ Exploración sucesiva. ⅄ Foco fijo. ⅄ Foco al azar.

Kirst Presenta las estrategias como Ejercicios agrupados en torno a capacidades y factores creativos.	⅄ Movilidad. ⅄ Fluidez. ⅄ Originalidad. ⅄ Análisis. ⅄ Producción. ⅄ Construcción. ⅄ Cambio de forma.

De la Torre Revisión bibliográfica y síntesis de las estrategias.	<u>Las divide en</u> <u>Seis tipos</u>**:** ‣ Analíticas. ‣ Estructurantes. ‣ Asociativas. ‣ Metamórficas. ‣ Inferentes. ‣ Complejas ó mixtas.	ƒ CIRCEP, Checklist, Ideograma, Matrices y todas las Morfológicas. ƒ Todas las Analíticas. ƒ Asociaciones forzadas, ƒ Lista de Atributos, Morfologizador, Circumrelator. ƒ Heuridrama, RED, DSP. ƒ Check List, Lista de Atributos, Superposiciones, Ideograma. ƒ Brainstorming. ƒ Sinéctica, Morfologizador.

Kauffman Clasifica las estrategias Como**:**	⅄ Intuitivas ⅄ Analíticas ⅄ Combinatorias

En este trabajo nos identificamos con la **Clasificación de Foustier**

<u>Analógicas</u> Se considera la analogía como proceso fundamental.	a) Sinéctica Hacer familiar lo extraño. Hacer extraño lo familiar. b) Biónica. c) Circept. d) Heuridrama. e) Brainstorming f) DSP y REC.
<u>Antitéticas</u> Destruir el objeto para su renovación.	a) Liberación semántica. b) Lista de Atributos. c) Análisis funcional d) Check-list ó Quebrantamiento.

<u>Aleatorias</u> Tienen por finalidad provocar combinaciones al azar.	a) Ideogramación. b) Asociaciones forzadas. c) Matrices de descubrimiento. d) Análisis morfológico. e) Delphi. f) Morfologizador. g) Circumrrelator. h) Superposiciones.

d) Todas **las estrategias son valiosas** porque proporcionan técnicas novedosas y una manera distinta de "ver" y aplicar la Matemática.

e) En los problemas matemáticos, siempre se aplican las estrategias **analíticas y analógicas,** como así también es posible realizar un **brainstorming.**

2- Aplicaciones matemáticas de algunas estrategias.

Problema 1: (Nivel Superior)

Un constructor realiza 5 casas del tipo I, 7 del tipo II y 12 del tipo III, que se representan mediante el vector fila E = (5 7 12). Se saben los insumos mínimos de los siguientes materiales: H (hierro), M (madera), V (vidrio), P (pintura) y T (mano de obra), como así también los costos unitarios de cada ítem para las obras y se los representa mediante las matrices A y C (costos), respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 8 & 12 & 9 & 21 \\ 5 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}; \qquad C = (\,15 \;\; 8 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 10\,)$$

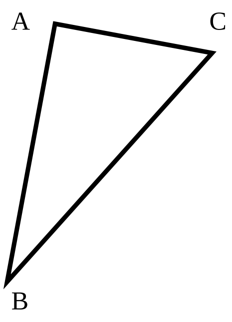
Se pide: a) ¿Qué representa cada fila de la matriz A?
b) ¿Y cada columna?
c)¿Cuál es la cantidad necesaria de H, M, V, P y T para construir todas las casas?
d)¿Cuánto importa el total de los ítemes para el proyecto de las 24 viviendas?

Desarrollo:
Se aplica la estrategia **Matrices de descubrimiento,** cuyos pasos responden a los ítemes a, b, c y d, respectivamente: 1) Se plantea el problema; 2) Se analizan los elementos dados en la matriz A, para responder los incisos a) y b): ¿Qué representan la fila 2 y la columna 3?,¿Qué son los elementos a_{32}, a_{25} y a_{14}?; 3) Se efectúan los productos de las matrices respectivas, para responder a los ítemes c) y d):

$E_{1x3} . A_{3x5} = Q_{1x5}$, que resuelve el ítem c. $Q_{1x5} . (C)^{t}_{1x5} = I_{1x1}$, resultado del ítem d).

(El alumno debe darse cuenta que debe transponer la matriz C)

Problema 2: (Nivel Secundario e Ingreso)



Comprobaremos los efectos que se producen al aplicar, por separado, ambos procedimientos a una misma situación problemática:

De acuerdo al triángulo BAC de la figura, que es rectángulo en el $\hat{A}$, tal que $\overline{BC}$ = x - 1, $\overline{AB}$ = x + 1 y $\overline{AC}$ = x, calcular las medidas de sus tres lados.

Desarrollo:

1º) El alumno posee buena información, pero sólo trabaja con su pensamiento lógico.

Entonces, plantea por Pitágoras:

$$(x-1)^2 = x^2 + (x+1)^2$$

Resuelve y obtiene: $x^2 + 4x = 0$

Por lo tanto: $x1 = 0$ y $x2 = -4$. Entonces, los valores de la hipotenusa son: **a = -1** ó **a = -5.** Vemos en ambos casos que **a < 0**, lo cual indica que el problema es irresoluble, aparentemente. Ante esta situación, el alumno retorna al principio y controla lo que hizo, comprobando que todos sus cálculos son correctos. Entonces,........¿qué pasa? Comienza a fijarse mejor y analiza nuevamente,.......,pide ayuda a sus compañeros y al Profesor ...... y ..... ¡¡Bueno!!, finalmente se da cuenta, explica todo lo que le pasó y la nueva solución, concluyendo así su problema

2º) El alumno posee buena información y además una **aguda percepción configurativa, perspicacia y creatividad**. De inmediato se dará cuenta que el problema no tiene solución, porque si x debe pertenecer a los reales positivos, entonces la hipotenusa sería menor que los catetos, lo cuál es imposible en un triángulo rectángulo. El alumno explicará todo esto, dando por finalizado el problema.

Problema 3: (Nivel Primario)

Un biólogo recogió en una caja 8 insectos entre arañas y escarabajos. El nº total de patas es 54. ¿Cuántos insectos de cada clase hay en la caja?

Desarrollo**:** En este problema se usará una **Estrategia Sinéctica:** *Hacer conocido lo extraño*, motivando a los alumnos para familiarizarse con los conceptos "extras" que son necesarios para comprender el problema**:** saber cuántas patas tiene cada insecto, llegando a que la araña tiene 8 patas y el escarabajo, 6.

Ahora, mediante **Búsqueda al azar**, se resolverá por tanteo, llegando a**:**

arañas	escarabajos	Cálculos
0	8	8.6=48 patas (no es solución)
1	7	1.8 +7.6 = 50 patas (no es solución)
2	6	2.8 + 6.6 =52 patas (no es solución)
3	**5**	3.8 + 5.6 = **54 patas** (solución)

Respuesta**:** En la caja hay 3 arañas y 5 escarabajos.

Problema 4: (Nivel Superior)

Al concluir el tema “Sistemas de ecuaciones lineales”, se propone un ejercicio integrador para afianzar los conocimientos en lo que respecta a los métodos de resolución. Para ello, aplicamos la Estrategia **Examen simultáneo**, con las **tarjetas de Bruner**. Se han confeccionado 9 tarjetas diferentes. ¿Cuáles de estos sistemas se pueden resolver por todos los métodos estudiados, sin efectuar cálculos?.

tarjeta 1 $m \times n$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$	**tarjeta 4** $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$	**tarjeta 7** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ y + 3z = 0 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$
tarjeta 2 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - y - 2z = 7 \\ x + 5y + 4z = -5 \end{cases}$ $\Delta \neq 0$	**tarjeta 5** $n \times n$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$	**tarjeta 8** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$

tarjeta 3 $\Delta = 0$	**tarjeta 6** $\Delta \neq 0$	**tarjeta 9**
$\begin{cases} -2u+v+w-t=0 \\ 3u-v+w-4t=0 \\ -u+2v+w=0 \\ -2v-3w+5t=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-2x_3=0 \\ x_1+7x_2+8x_3=0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=0 \\ -\frac{1}{x}-\frac{5}{z}=0 \end{cases}$

Desarrollo:

Los alumnos ven todas las tarjetas a la vez. La pregunta precisa que recuerden todos los métodos de resolución vistos, y sus condiciones de aplicación. Éstos son**:**

- # Regla de Cramer
- # Mediante inversión de matrices

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistemas n x n} \\ \text{condición } \Delta \neq 0 \end{array} \right.$

- □ Método de eliminación de Gauss
- □ Método de Gauss - Jordan

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistemas m x n} \\ \text{y análisis de rangos} \end{array} \right.$

Los alumnos determinan el orden de los sistemas y deducen que los sistemas donde m≠n, no se pueden resolver por todos los métodos. Es decir **descartan las tarjetas 1, 4, 7 y 8**, esta última porque tiene 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

Con la tarjeta 9, tienen que ordenar el sistema**:**

$\begin{cases} 2y+3x=0 \\ z+5x=0 \end{cases}$ que tiene 2 ecuaciones y 3 incógnitas. **Se descarta la tarjeta 9.**

El sistema de la tarjeta 3 es homogéneo y $\Delta = 0$, por lo que tiene infinitas soluciones. También **se descarta la tarjeta 3**.

La tarjeta 6 es tramposa, porque al ser el sistema homogéneo y $\Delta \neq 0$ sólo tiene solución única**:** la trivial. Pero como $\Delta \neq 0$ admitiría tres tipos de resolución.

El sistema de la tarjeta 2 se puede resolver por todos los métodos. La respuesta es entonces**: tarjeta 2 y 6** se pueden resolver por todos los métodos, sin efectuar cálculos.

La **tarjeta 5** requiere de cálculos y analizar el determinante; si $\Delta = 0$, también es solución.

Conclusiones

Este taller resultó una experiencia enriquecedora**:** para las docentes, por la creatividad y el esfuerzo puestos en su realización, y para los asistentes, tratando de sintetizar y asimilar los contenidos teóricos básicos y de comprender la importancia de la creatividad en los tiempos posmodernos. La práctica fue aceptada con beneplácito, tanto los problemas resueltos, como los propuesto y, no obstante que la teoría resultó algo extensa, se compensó con la labor de síntesis y con las realizaciones concretas de la Matemática Recreativa.

Referencias bibliográficas

Autores varios.(1985). Metodo l. de la Creación Científica. Acad. de Ciencias. URSS y Cuba.
Arce Medina, E.(1985). Ap. La Creatividad, ¿qué es, cómo se promueve?. Méjico. UNAM.
Colectivo de autores. (1995). Pensar y crear. Cuba. Academia.
De Bono, E. (1995). El Pensamiento Lateral. Argentina. Paidós.
Dualibi, R. y Simonsen, H. (1992). Creatividad & Marketing. Argentina. Mc Graw-Hill.
Gámez, G. (1998). Todos somos creativos. España. Urano.
Mitjans Martínez,A. (1995). Creatividad, personalidad y educación. Cuba. Pueblo y Educación.
Moles, A. (1986). La Creación Científica. España. Taurus.
Pérez Pantaleón, G. (1996). Ap. Métodos y Técnicas Participativas. Cuba. Univ. de La Habana.
Rouquette, M. L. (1975). La Creatividad. Argentina. Huemul.
Scott, J. A. y Davis, G. A. (1989). Estrategias para la Creatividad. Argentina. Paidós

Descripción de situaciones didácticas desde los libros de textos (en los últimos veinticinco años)

Malva Alberto; Lilián Cadoche
Universidad Tecnológica Nacional. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
mtoso@satlink.com.ar lcadoche@fcv.unl.edu.ar

Resumen
El trabajo tiene dos componentes importantes: el libro de texto y el tratamiento didáctico dado al número real. Inicialmente subrayaremos las características que posee libro de texto dentro del sistema educativo: lo mostraremos como un producto cultural, como un elemento compartido por profesores y estudiantes y como un mediador entre el currículum y las realizaciones didácticas. Posteriormente, utilizando una adecuada selección de libros de textos identificaremos algunas propuestas didácticas con las que se presentó en el concepto de número real en las dos últimas décadas y finalmente seleccionaremos criterios de análisis que permitirán describir distintas representaciones, propiedades, usos y problemas que se muestran actualmente cuando se pretende convertirlo en un objeto de enseñanza y aprendizaje.

Introducción

En el ejercicio cotidiano de nuestra práctica, los docentes somos conscientes que existen temas y conceptos que presentan ciertas resistencias, algunas dificultades o que provocan obstáculos cognoscitivos por parte de los alumnos cuando quieren llegar a una interpretación y manipulación correctas; también reconocemos que dichos temas y conceptos son importantes en sí mismos, son útiles y tienen numerosas aplicaciones. Uno de ellos es el de número real.
Estas vivencias son compartidas por colegas y han sido puestas de manifiesto en investigaciones que han abordado la problemática del número real desde distintas perspectivas: cognitivas, didácticas, históricas, semánticas, (Scaglia, 2000; Romero, 1997; Sanz, 1994).
Suele ser bastante común encontrar docentes con un dejo de insatisfacción respecto de lo que sus alumnos aprenden. A pesar de ello, las dificultades y errores que comenten los estudiantes como resultado del aprendizaje de los números reales o aquellos específicamente estudiados en algunas de las investigaciones citadas no serán considerados en este trabajo. Reconocemos, sin embargo, que si logramos hacer una primera aproximación a la caracterización de las propuestas didácticas sobre el tema del número real puestas de manifiesto en los libros de textos escolares que fueron o son más ampliamente utilizados por los docentes y los alumnos en el contexto escolar, podremos en el futuro proponer secuencias didácticas que ayuden a superar las dificultades y los errores de los alumnos (Rico, 1997).

Identificación del libro de texto

Consideramos como *libro de texto* a aquel que utilizan docentes y alumnos como guía y auxiliar de los procesos de enseñanza y aprendizaje, como consulta y material didáctico habitual y cuyo contenido es compartido por los actores de la interacción educativa. El libro de texto escolar debe dar cuenta ante quienes lo usan para enseñar y ante quienes lo usan para aprender y por consiguiente, en los últimos años, se puede observar que está dotado de

una serie de recursos tanto lingüísticos como paratextuales que intentan favorecer la lectura y comprensión del contenido: por ejemplo, contiene títulos y subtítulos con diferentes tipos de letras; negritas para resaltar palabras; ilustraciones; recuadros; íconos; fotografías; etc.; además debe atender a los conocimientos previos de los alumnos, a los objetivos de aprendizaje, a los lineamientos curriculares vigentes y, en general, la comunidad educativa no puede prescindir de él (Sanz, 1994; Parcerisa, 1998). El libro de texto está generalmente organizado por capítulos y temas con un contenido y conjunto de actividades que cubren distintos aspectos del conocimiento para ser desarrollado en períodos básicos del calendario escolar. Aceptamos que el libro de texto emerge como un organizador y comunicador de conocimientos medianamente estandarizados cuando responde a un currículum vigente; que es importante en sí mismo y por él mismo; que contiene mensajes acerca del pasado, para el aquí y ahora así como para el futuro.
Lo consideramos como:

- la forma más típica y tradicional de preservar la intención de lo que pretendemos enseñar en el salón de clases en la escuela; es un medio típico de conservar el conocimiento matemático; allí se perpetúan tanto los significados correctos como los incorrectos atribuidos a un objeto de estudio;
- el reflejo de la selección y organización de contenidos disciplinares y actividades que autores y editoriales estiman que pueden ser compartidos por docentes y alumnos;
- revelador de hechos que permiten interpretar algunos fenómenos propios de los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados, por ejemplo, con representaciones, concepciones, usos o aplicaciones;
- la morada favorita de las diversas corrientes didácticas que caracterizan distintos períodos temporales por los que ha atravesado la educación; revela parte de los sistemas educativos imperantes en una época y lugar;

Numerosas investigaciones anticipan, caracterizan y definen los roles del libro de texto escolar. El libro de texto escolar constituye una ejemplificación por excelencia del tipo de material curricular que por su extensión y características "ejerce una enorme influencia sobre los docentes (configurando la estructura de su trabajo) y los estudiantes (delimitando su acceso al conocimiento)" (Blanco, 1994, p. 264).
El libro de texto escolar es una variable fuertemente ligada a los cambios curriculares. Dreyfus (1992) estudia la correspondencia entre el currículum y el libro de texto escolar. El mismo autor da cuenta de sus estudios realizados a partir de 1980 que confirman que los docentes tienen una marcada tendencia a contar con libros de textos oficiales y que demandan su existencia. En su análisis acerca de definiciones clásicas sobre el libro de texto escolar cita a Westbury (1985) quien considera que el libro de texto es el "depositario del conocimiento que las escuelas quieren comunicar", ... "un instrumento básico para la organización de la currícula" y ..... "una herramienta básica para la enseñanza y el aprendizaje". Para Dreyfus, en principio, "el libro de texto escolar presenta y representa la intención de sus autores" (Ibid, p.5) Señala además que llevarlos a la práctica, transformarlos, trasladarlos, ejecutarlos en el salón de clase es tarea del docente. Es más explícito respecto a las funciones que debe cumplir el libro de texto desde la posición del que aprende, diciendo que el rol que asigna al libro de texto escolar es el "de compensador, de mediador para aquel que por diversas razones no aprende durante la clase" (Ibid, p. 4). Otros señalan que los libros de textos "deben colaborar en la formación de alumnos participativos, críticos, responsables" ... "propiciar la capacidad de indagación, búsqueda"

... “permitir al alumno actuar e interactuar con el conocimiento, sus compañeros y el medio” (López y Leotta, 2000, p. 18).
Algunas investigaciones acerca de libros de textos definen criterios para seleccionarlos, analizarlos y evaluarlos para usarlos de la mejor manera posible (Parcerisa, 1998). Por su parte, Marro y Dellamea (1993, p. 60–69) dan las tareas básicas que debe realizar un lector para asignar significado proposicional a sucesiones de párrafos, capítulos y cualquier otra unidad extensa del lenguaje.

Antes de proseguir con nuestro trabajo haremos dos observaciones:

- Queremos destacar la importante labor que realizan los autores de los libros de textos y nuestro profundo respeto. No es nuestra intención emitir alguna valoración tanto sobre ellos como sobre los libros de texto que han elaborado.
- Nuestro profundo agradecimiento a editoriales y autores de libros de textos que hacen posible este estudio.

La lectura exhaustiva de los libros de textos

Los docentes tenemos una amplia trayectoria en el ejercicio de la crítica, de la mediación y transformación de los libros de textos que usamos en nuestras clases, ejerciendo una continua vigilancia epistemológica sobre lo escrito, así como una lectura muy exhaustiva sobre la propuesta didáctica. El docente no recibe el texto pasivamente, sino que selecciona, enfatiza, critica, propone alternativas, modifica y lo reinterpreta de maneras distintas cada vez que lo usa, a partir de la lectura exhaustiva y de sus propias experiencias de clase. Los siguientes párrafos fueron marcados (para un posterior debate) por los docentes durante un ejercicio de lectura de distintos textos escolares:

- “Los números de infinitas cifras no periódicas se llaman números irracionales”.
- “Conjunto de números irracionales...caracterizados por la propiedad: La expresión decimal de todo número irracional consta de infinitos algoritmos que no forman período.
- "Conjunto de números reales....En símbolos: $R = \{ Q \cup I \}$”
- “El conjunto de los números racionales Q se amplía notoriamente con la aparición de los números irracionales”.
- “Definición de irracional: cuando el cociente entre dos números enteros da como resultado otro número con infinitas cifras decimales, estamos en presencia de un irracional. Ejemplo:

a) $\frac{5}{17} = 0{,}29411764705882...$ b) $-\frac{6}{19} = -0{,}315789473684210...$

Ubicar los irracionales vistos en el ejemplo a) y b), se remite a la ubicación en la recta numérica por medio de los números fraccionarios”.

Los libros de textos como la morada favorita de distintas corrientes didácticas
Hacia 1980 numerosos docentes y matemáticos cuestionaban la `forma rigurosa´ de introducir los números. Bosch, J. (1980, p. 41) opinaba que el “pasaje riguroso de Q a R es imposible en el nivel de enseñanza secundaria e invita a abandonar el método genético (construcción sucesiva de los números N, Z, Q, R y C) por completo”. Agrega que “es conveniente, en cambio que el profesor conozca con todo detalle ese método, así como el

método global consistente en definir axiomáticamente el conjunto de los números reales y luego ir distinguiendo dentro de él los números naturales, enteros y racionales. Sólo el conocimiento pormenorizado de ambos métodos lo convencerá de que ninguno de ellos es aplicable a la enseñanza secundaria y lo inducirá a adoptar compromisos pedagógicos más adecuados". "El método genético es una parte importante de la historia de la matemática, pero ya es historia. Es una buena pieza de colección para matemáticos y profesores, pero no para alumnos de la escuela secundaria actual".

Por su parte Banfi, J. (1980, p. 145), hace recomendaciones a los docentes acerca de los libros de textos escolares. Refiriéndose a las actividades del profesorado en ejercicio dice: "En primer término examinará todos los textos nacionales y extranjeros que pueda conseguir. Eliminará drásticamente todos los ejercicios reiterativos, rutinarios o sin interés" ... "No convendrá que se ajuste a ningún manual por bueno que parezca, so pena de perder espontaneidad e iniciativa. Los consultará a todos, los comparará, los juzgará en función de sus ideas pedagógicas y efectuará su crítica para no cometer errores" ... "Los libros de textos deben perder su carácter adusto que a menudo constituye una de las características en nuestro país aun cuando en los últimos tiempos se haya podido comprobar una sensible mejoría. Ninguno de ellos dejará de contener la información que interesa a los alumnos aún cuando no forma parte de los programas vigentes; nos referimos especialmente a temas amenos, las curiosidades matemáticas, las anécdotas, los temas para pensar, las notas históricas, etc".

A pesar de las polémicas, y de la nueva crisis, los libros de texto de la época reflejan tanto la construcción genética de la teoría de números como la posición de que todo el edificio de la Matemática se asienta sobre axiomas y que la existencia de un objeto matemático queda garantizada por la consistencia de los axiomas que lo introducen.

Libros de textos escolares como:

Dalmasso J. C. (1970) en **Matemática para 4º año. Un enfoque moderno** publicado por Ed. Codex S.A. en Buenos Aires como su segunda edición dedica 25 páginas a la conceptualización del número real (método genético) partiendo de la densidad de los números racionales. Lo define como el representante de las clases de equivalencia de sucesiones regulares que tienden a un punto racional o a una laguna en los racionales. Finaliza la presentación de los números reales enunciando la estructura de cuerpo ordenado que tienen los números reales (método axiomático).

López, A. R. (1975) en **Matemática Moderna 4** publicado por Ed. Stella en Buenos Aires, en su tercera edición comienza con la construcción geométrica de un triángulo rectángulo isósceles cuyo lado es unidad de medida mostrando que su hipotenusa es un número comprendido entre 1 y 2 y posteriormente prueba la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Luego aproxima el valor de $\sqrt{2}$ mediante sucesiones racionales pensándolo como un límite común de aproximaciones por defecto o por exceso, sin pertenecer a ninguna de las sucesiones. Menciona la completitud de los números reales y luego menciona las operaciones de adición y multiplicación con sus propiedades pero sin mencionar las estructuras algebraicas que subyacen en ellas.

Rojo A, Sánchez S. y Greco M.(1977), en **"Matemática 4"** publicado por Librería Ed. El Ateneo en Buenos Aires dedican 9 páginas a la conceptualización del número real presentándolo como un cuerpo ordenado y completo.

Cabrera, E. y Médici, H. (1977) en **"Matemática Cuarto Año"** publicado por Editorial Crespillo en Buenos Aires definen en 15 páginas el número real. Muestra la construcción

del número irracional como todo conjunto formado por un par de sucesiones monótonas contiguas carentes de elemento de separación racional y por todos los pares de sucesiones monótonas contiguas que sean equivalentes al primero de los pares considerados; es decir el número irracional es una clase de equivalencia formada por todos los pares de sucesiones monótonas contiguas equivalentes que carecen de elemento de separación racional.
Parecería que estos libros de textos escolares estaban más destinados al perfeccionamiento y capacitación de los docentes en los nuevos conceptos algebraicos que en ser una guía para el estudiante del bachillerato.
No podemos dejar de mencionar para la década de los noventa la influencia que nos llegara desde España con la trilogía formada por **“Matemáticas. Bachillerato 1, 2 y 3”** de Miguel de Guzmán, José Cólera y Adela Salvador de Editorial Anaya publicados en Madrid a partir de 1987. En el prólogo a la edición de 1993 de “Matemáticas. Bachillerato 1” los autores opinan que la selección de contenidos (para España) es ciertamente mejorable, recortando o suprimiendo algunos temas (por ejemplo sobre estructuras algebraicas abstractas). De hecho que cuando presentan la teoría de números ya no hacen más mención a los grupos, anillos o cuerpos conmutativos. Retoman la irracionalidad de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$, e, pero introducen un nuevo ejemplo de irracional, el número de oro o sección áurea, ϕ, como la relación (ratio) entre la diagonal de un pentágono regular y su lado y como proporcionalidad entre los lados de un rectángulo áureo. Dejan la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ para la revista relacionada con el tema al final del capítulo. Muestran una matemática integrada con la historia y la cultura de los pueblos. Presentan para cada tema una clara e interesante motivación, además de las complejidades que rodearon a la construcción de algunos conceptos, no olvidándose destacar qué problemas pudieron ser resueltos gracias al esfuerzo de muchos matemáticos y cuáles siguen aún pendientes de solución.
De la lectura de los libros de textos editados para la década de los `90 podemos decir que interesan particularmente las propiedades, operatoria y los contextos en los que aparece involucrado en número real, es decir los números reales se construyen dando sentido, en lo posible, a los elementos que los constituyen; se identifican ejemplos concretos mediante distintas representaciones y se utilizan éstas para realizar operaciones, expresar magnitudes del mundo físico o cotidiano y establecer relaciones. La propuesta pedagógica de la última década es notoriamente diferente a las anteriores.
Finalmente, el análisis exploratorio sobre el tratamiento didáctico dado al número real en libros de textos nos lleva a proponer los cinco primeros propuestos por Scaglia, S. (2000) y a incorporar uno más propuesto por los docentes consultados. Son estos:
Criterio Orden: descripción y caracterización de la relación de orden entre los distintos conjuntos numéricos. Propuestas de actividades relacionadas con la comparación de números, el orden en las inecuaciones y la expresión de resultados mediante intervalos. El tratamiento de la completitud en **R**.
Criterio Tipo de Número: se describen clasificaciones en base a distintos criterios: pertenencia a un determinado conjunto; algebraicos o trascendentes; divisibilidad; finitud o infinitud, etc.
Criterio Fenomenología: se describe a utilidad de los números reales como modelo para las magnitudes continuas en contextos no exclusivamente matemáticos.
Criterio Representaciones: analiza las representaciones más comunes utilizadas para escribir y nombrar los números reales: simbólica, gráfica y representaciones en la recta.

Criterio Operaciones: se describen las operaciones y se analizan el uso en ecuaciones y funciones; el uso de calculadoras y el estudio de los errores que se cometen.
Criterio Histórico: descripción de los acontecimientos históricos que motivaron la construcción de los números reales.

Reflexiones finales

Cualquiera que sea el tema central que provocó la investigación desde el libro de texto, debemos reconocer que el rol que desempeñan para los diferentes grupos que los comparten (alumnos, docentes, institución, comunidad) no es muy sencillo para describir. Esto trae aparejado importantes implicaciones didácticas porque conlleva cualidades internas, contenidos y una organización que lo hacen foco de múltiples interpretaciones y es crucial además la forma que tenemos de leerlo e interpretarlo. El *libro de texto* significa, por medio de su contenido y su forma, determinadas *construcciones del conocimiento*, ayuda a establecer pautas de *veracidad y legitimación de los saberes* y representa una forma alternativa de *seleccionar y organizar* estos saberes, muestra *aplicaciones y usos* y sugiere *actividades* que serán compartidas por docentes y alumnos. Estas reflexiones constituyen la fuerza necesaria que justifica una lectura exhaustiva del libro de texto escolar.

Referencias bibliográficas

Banfi, J. (1980). Reflexiones de un profesor de matemática. En J. Banfi (Ed), *Problemas de la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires.

Blanco, N.(1994). Materiales curriculares: los libros de texto. En Angulo, F.; Blanco, N. (coordinadores). *Teoría y Desarrollo del Currículum*. Capítulo 12. Málaga: Ed. Aljibe.

Bosch, J. (1980). La polémica sobre la enseñanza conjuntista. En En J. Banfi (Ed), *Problemas de la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires.

Dreyfus, A. (1992). Content analysis of school textboooks: the case of a technology–oriented curriculum. En *International Journal of science education. Vol.14*. London: Editor: John K. Gilbert. Taylor & Francis.

López, M.; Leotta, A.(2000). La educación que espera detrás de los libros. *Aula Abierta*. Año 8. Nº 89. pp.13–18. Buenos Aires: Provisión Escolar Ediciones.

Marro, M. S.; Dellamea, A. B.(1994). *Producción de textos*. Buenos Aires: Ed. Docencia.

Parcerisa, A. (1998). Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos. Buenos Aires: Graó.

Rico, L.(1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. En *Epsilon, Nº 38*, p.185–198. Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

Romero, I. (1997). *Introducción al número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación acción*. Colección Mathema. Granada: Editorial Comares.

Sanz, I. (1994) *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemática. Las configuraciones gráficas de datos*. Tomo I. Tesis Doctoral. Departamento de Lógica y Filosofía de San Sebastián. Universidad del País Vasco, España.

Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Metodología activa en enseñanza de las matemáticas

Mónica Cabrera, Véronique Collin, José Cuevas, Cecilia Vidal
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Lima, Perú
pcmamcab@upc.edu.pe vcollin@upc.edu.pe jcuevas@upc.edu.pe pcmacvid@upc.edu.pe

Resumen
Uno de los juicios más severos a las instituciones educativas en el Perú se refiere al hecho que éstas forman alumnos memorísticos, reproductivos, con una mínima capacidad de análisis y escasa creatividad. Para revertir esta situación el profesor tiene que asumir un papel fundamental.
El presente trabajo se propone compartir la experiencia sobre el desarrollo de un Taller de Metodología Activa en Enseñanza de las Matemáticas, dirigido a profesores de nivel medio, que se desarrolla desde el año 2000 en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), y cuyo propósito fundamental es capacitar al profesor de matemáticas en diversas técnicas educacionales que facilitan el desarrollo de habilidades en el alumno permitiendo así reorientar el estilo de enseñanza tradicional hacia uno que fomente un mejor aprendizaje de los alumnos.
La metodología activa presentada en el Taller comprende desde la redacción de una competencia matemática y de las diferentes habilidades que involucra, hasta llegar a un diseño instruccional completo que incluye técnicas adaptadas a las clases de matemáticas. En este trabajo, se presenta una variedad de ejemplos didácticos diseñados para motivar a los alumnos hacia la matemáticas y para facilitar la adquisición de los diversos conceptos que se presentan en el nivel medio de enseñanza.

Introducción

En el Perú, varias iniciativas se han desarrollado para elevar el nivel de formación básica y de capacitación de los profesores de matemáticas. Sin embargo, todavía son escasos los resultados concretos y la enseñanza sigue siendo tradicional, con el profesor como único protagonista. La resistencia al cambio se manifiesta en los diferentes miembros del proceso de enseñanza - aprendizaje: profesores, alumnos y padres de familia, quienes sucumben a la presión social y piensan que lo fundamental es aprobar los exámenes de admisión de las diferentes universidades que privilegian el aspecto memorístico y reproductivo del conocimiento matemático.
La Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) en su preocupación por elevar el nivel académico-pedagógico de los docentes que imparten asignaturas de matemáticas, plantea la capacitación de los docentes a partir de un modelo educativo basado en competencias(información, habilidades y actitudes) y en el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje en cuatro fases: Motivación, Adquisición, Transferencia y Evaluación, basado en una simplificación del modelo de Gagné (1975).
Se sabe que para lograr un aprendizaje significativo de los alumnos, el contexto de aprendizaje depende en gran medida de las acciones del docente:
“ él (el docente) es quien decide:

- Qué información presentar;
- Cuándo y cómo hacerlo;
- Qué objetivos proponer;
- Qué actividades planificar;
- Qué mensajes dar a los alumnos, antes, durante y después de las diferentes tareas;
- Cómo organizar las actividades - en forma individual, cooperativa o competitiva;
- Qué y cómo evaluar;
- Cómo comunicar a sus alumnos los resultados de las evaluaciones;

- Qué uso hacer de la información recogida ”. (Díaz, 1998)

De lo anterior se desprende la importancia de la planificación de las acciones del docente a través de un diseño instruccional detallado en el cuál se identifica, en cada fase del aprendizaje, las técnicas más eficientes que permiten lograr el aprendizaje significativo de cada habilidad. En este proceso, el profesor debe primero conocer las diferentes técnicas que, en el actual contexto educativo y social se utilizan frecuentemente (aprendizaje vivencial, inferencial, analogías, generación de conflictos, análisis de soluciones etc.) para después categorizarlas en base a las habilidades a las cuales aportan. En segundo lugar, estas técnicas deben ser seleccionadas y ejemplificadas para su uso en la clase de matemáticas.

En este trabajo se presenta el resultado de la investigación de diversas técnicas adaptadas a la clase de matemáticas que se desarrollaron en los talleres de capacitación a profesores de nivel medio así como en el curso remedial de Nivelación de Matemáticas que ofrece la Universidad a los alumnos ingresantes con deficiencias en su instrucción previa. Se hace hincapié en las fases de motivación y de adquisición por la relevancia que ellas tienen y por la importancia de los resultados obtenidos a partir de su aplicación.

Fase de motivación

Como lo menciona Gagné (1975), es axiomática la consideración siguiente: para que se produzca el aprendizaje, es preciso contar con un individuo motivado. Esta premisa es fundamental y, sin embargo, la experiencia muestra que al iniciar una clase de matemáticas, el alumno se encuentra muchas veces sin eje, desintegrado y disperso buscando una razón que justifique su presencia. Por lo tanto, los estímulos presentados por el profesor deben orientar la atención del alumno hacía la meta: la matemática.

Estos estímulos toman diferentes formas según la relación del alumno con la matemática (interesado, indiferente u opuesto). A continuación, se presenta técnicas sugeridas según el tipo de alumnos. La clasificación inicial viene de un estudio efectuado por el Departemento de Calidad Educativa de la universidad (Galván, Golergant, 2000).

Motivan principalmente a los alumnos interesados en la matemática:

- El análisis de necesidades basado en listas de chequeo o preguntas por resolver.

Para crear interés, se recomienda técnicas como:

- Historias y pensamientos usando personajes matemáticos famosos, notas históricas, fábulas y cuentos (según la edad),
- Pensamientos y refranes, anécdotas y metáforas. Como ejemplos de refranes podemos citar a: “Más vale pájaro en mano que cien volando” transformado a “Más vale demostración en mano que cien ejemplos volando”.
- Ayudas audiovisuales (Documentales, extractos de películas, dibujos animados, caricaturas y comics). Estas son muy eficientes hoy en día cuando los alumnos están inmersos en un mundo de imágenes y movimientos. En este caso, para reforzar el efecto de la ayuda y conectar el alumno con el tema matemático involucrado es muy importante acompañar la ayuda de una presentación previa, un plenario o una actividad grupal adicional.

Las técnicas desestabilizadoras tienen un efecto positivo sobre alumnos que muestran claras actitudes negativas hacia la matemática. Por ejemplo:

- La generación de conflictos cognitivos (dilemas, casos de contrastación) así como las provocaciones (postura disonante, rupturas de esquemas o S.O.S.) Así lo menciona Piaget, en sus primeras obras, cuando indica que el progreso cognitivo se produce con mayor probabilidad de éxito en una situación de conflicto.

Al final de la fase de motivación, se espera garantizar un punto de partida favorable para el aprendizaje, en donde los alumnos estén dispuestos a construir su propio aprendizaje, a través de la facilitación del profesor.

Fase de adquisición

Se presenta un análisis de esta fase en base a los modelos de Gagné, Piaget y Ausubel. (Galván, 2000)

Es la fase en la que se activa el proceso de búsqueda para eliminar la incertidumbre que genera el desconocimiento. El profesor da ciertas pautas para que el alumno pueda reflexionar y reconstruir cómo se han formado ciertos conceptos, reglas o principios.

El alumno lanza hipótesis, identifica rutas, revisa el marco teórico, desestructura esquemas obsoletos, realiza nuevas combinaciones, cambia perspectivas, analiza, establece analogías y parecidos para comprender y aprender.

El alumno codifica conceptos, los asimila y los integra en ciertos esquemas o estructuras que permiten articularlos con conocimientos previamente adquiridos. En otros casos, el profesor codifica y explica al alumno la formación de dichos conceptos y lo invita a participar en dicha construcción.

Para que se incorpore cada nuevo concepto a su estructura mental, éste debe ser aplicado de manera muy simple y directa. El alumno asume períodos de repaso, de integración y de significación; recordará todo aquello que posea significado y que además se haga familiar. El vínculo del conocimiento con las experiencias del aprendizaje, fortalecerá el almacenamiento a largo plazo.

Como se explicó anteriormente, es muy importante que cada técnica y actividad desarrollada en la clase esté en correspondencia con las habilidades que se deseen lograr tales que a modo de ejemplo se indica en la tabla siguiente (basada en Galván, Golergant, 2000):

Habilidades (verbos)	Técnicas más adecuadas	Observaciones
Deducir, inferir y descubrir	Técnicas vivenciales (experimentales, retos y desafíos, juegos y concursos). Técnicas inferenciales (directa, ¿Qué pasaría sí?).	Las técnicas vivenciales permiten al alumno relacionarse de manera más concreta con los temas.
Asociar o ejemplificar	Analogía, un ejemplo por minuto y ejemplos inventados por los alumnos.	Fomentar los ejemplos inventados por los alumnos da buenos resultados.
Identificar, reconocer y distinguir	El detalle que faltaba (presentar diversas alternativas de solución en las que algún paso ha sido omitido) y errores en la exposición.	Estas técnicas son muy útiles en los procesos de cálculo y en la modelación. Para las errores, detectar e usar las comunes de los alumnos. Asociado a la corrección, se vuelve más eficaz aún.
Medir, o graficar	Empleo adecuado de instrumentos de medición y las representaciones a escala.	Recomendado para cálculos en geometría y trigonometría.
Analizar, interpretar, cuestionar o	Conjeturas y posibilidades, análisis de solución e interpretaciones de texto.	Muy buenas para discriminar soluciones válidas en el contexto matemático pero no válidas en el contexto real.

criticar		
Categorizar, clasificar, comparar y ordenar	Matrices de dos entradas a rellenar o tarjetas mezcladas en las cuales el alumno mismo define la categorización.	
Sintetizar, resumir	Glosario o fichas resumen	Encargarlo a los alumnos mismos para saber como están entendiendo un tema.
Relacionar, articular y representar	Redes de contenidos y diagramas incompletos.	Para relacionar varios temas o esquematizar un proceso de cálculo.
Evocar, revisar y recordar	Crucigramas, acrósticos, parejas de cartas, juegos o concursos, ordenar procesos y de la A a la Z.	Técnicas que necesitan más creatividad de parte el profesor.

Algunos ejemplos

1. El detalle que faltaba:

Cuatro socios formaron una empresa de organización de eventos. A fin del año obtuvieron \$24 000 en utilidades. Para repartir este monto, acuerdan que cada uno de los dos socios mayoritarios debe recibir el doble de lo que recibirán cada uno de los socios minoritarios. Si estos últimos reciben la misma cantidad, ¿cuánto recibe cada socio?

¿Cuáles son los diferentes errores en los procesos y corrígelos?

Proceso 1	**Proceso 2**	**Proceso 3**
x + x + 2x + 2x = 24 000 6x = 24 000 x = 4 000 Cada socio minoritario recibe: \$ 40 000 Cada socio mayoritario recibe: \$ 8 000	x lo que recibe cada socio mayoritario en dólares. $\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+x+x=24\ 000$ 6x = 48 000 x = 8 000	x lo que recibe cada socio minoritario. $\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+x+x=24$ 6x = 48 x = 8 Cada socio mayoritario recibe: 8 Cada socio minoritario recibe: 4

2**. Errores :** Encuentre los errores y corríjalas.

$\left(\frac{-3}{4}\right)^{-2}=\frac{9}{16}$	$-2^{4}=16$	$(3x^2y^3)^2=3x^4y^6$	$\sqrt{x^2}=x$

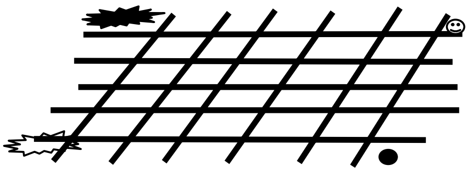
3. Conjeturas y posibilidades.

Se tiene un depósito de vino de 315 litros y se quiere vaciar su contenido en botellas cuya capacidad es de 0,85 litro. Al calcular el número de botellas necesarias, resulta 370,588... ¿Qué responderías en este caso?

Si no fueran botellas sino obreros para realizar una obra, ¿qué responderías?

Y si fueran pasajeros que un avión puede transportar.

4. **Juegos o concursos.**



Alberto y Karina quieren llegar donde se encuentra la carita feliz opuesta a su estrella de partida. Para llegar a ella sólo está permitido avanzar usando todas las tarjetas una sola vez. (2) de ángulos correspondientes, (2) alternos internos, (1) alterno externo y (2) opuestos por el vértice.

Comentarios de los talleres

Durante el desarrollo de los talleres, los profesores han tenido que hacer un gran esfuerzo para romper sus esquemas y reflexionar de modo de responder a preguntas como: ¿Qué puedo crear para motivar a mis alumnos en este tema de matemática? ¿Qué actividad o técnica puedo utilizar para lograr un mejor aprendizaje de mis alumnos de tal o cuál habilidad?

Estos talleres han provocado un conflicto con el estilo de enseñanza de los profesores y recién, muchos de ellos, han reconocido la necesidad de incorporar esta metodología de trabajo en su quehacer diario propiciando un ambiente en el cuál el docente juegue cada vez más un papel de facilitador, donde la tecnología moderna debe ponerse al alcance de los alumnos como apoyo para su propio proceso de aprendizaje.

Este trabajo de sistematización del proceso de enseñanza- aprendizaje no es familiar a los profesores de los colegios peruanos que suelen solamente presentar reglas o teoremas con su lista de problemas. Una profesora de más de treinta años de experiencia, comentó que recién reflexionó sobre las habilidades que desarrollaba en cada una de sus acciones.

Sin embargo, se observa un sorprendente cambio cuando posteriormente, ellos han iniciado la aplicación de la metodología activa en sus clases con un entusiasmo solamente igualado por el entusiasmo de sus propios alumnos al reconciliarse con el estudio de la matemática.

Sin duda, esta nueva metodología necesita invertir mucho tiempo personal y esfuerzo para crear o adaptar técnicas. A veces, las limitaciones económicas del plantel dificultan esta labor por la mayor cantidad de recursos involucrados que en la enseñanza tradicional. Además, se recomienda trabajar en equipo de profesores de un mismo grado y de manera cooperativa, escogiendo primero un capítulo y ampliando a otros temas según el tiempo del que se dispone.

Extracto de un trabajo de profesores presentado en un taller:

(Burgos, J; Mendoza, M; Moreno, A; Pachas, M; Febrero 2001)

Competencia: Resuelve problemas de relaciones métricas en el triángulo rectángulo valorando su importancia en problemas de la vida diaria.

Diseño instruccional (extracto):

Fase	Habilidad	Actitud	Metodología
M		Valora la historia del matemático	Personaje famosos: Pitágoras
A	Deduce la proyección de un segmento	Es observador y curioso.	Vivencial experimental : Reglas, lapiceros y linternas
A	Identifica los elementos de un triángulo rectángulo	Muestra interés en el trabajo en equipo	Tarjetas mezcladas: tarjetas y plumones para resaltar
A	Evoca las situaciones de proporcionalidad.	Valora temas anteriores.	Parejas de cartas
A	Demuestra los teoremas fundamentales aplicando proporcionalidad	Es ordenado y cuidadoso	Ficha de trabajo: Analiza los elementos de una demostración y aplica a las otras demostraciones.
A	Aplica los teoremas en situaciones sencillas.	Comparte con sus compañeros.	Ficha de ejercicios. En equipos.
A	Explica los procesos que ha ejecutado.	Reconoce el rol de la comunicación	Explica oralmente su procedimiento.

A	Evoca e identifica los términos de la sesión anterior.	Es consciente de sus dificultades o limitaciones.	Realiza un acróstico con la palabra RELACIÓN

Efectividad

Como muestra de efectividad del empleo de estas técnicas en las clases de matemáticas, en las encuestas sobre el curso de nivelación de matemáticas de la Universidad la opinión de los alumnos ha mejorado en 5% del ciclo 2000-1 al ciclo 2001-1. Anteriormente aunque el profesor solía tener un calificación alta en estas encuestas, la opinión sobre el curso se mantenía baja. Otro indicador importante es el aumento entre el ciclo 2000-1 y el ciclo 2001-1 de 18% en el porcentaje de alumnos aprobados del curso.
Los profesores de nuestros talleres que han aplicado estas técnicas a sus clases han mejorado la participación creativa de sus alumnos en las ferias de ciencias proponiendo actividades matemáticas.

Conclusiones

En este trabajo se hace explícita la importancia de la fase de motivación como punto de partida del proceso de enseñanza – aprendizaje de los temas matemáticos y que el docente debe dedicarle un gran esfuerzo. En la fase de adquisición, es fundamental identificar qué técnicas son más efectivas para tales habilidades, siendo la lista no exhaustiva. En los talleres han surgido comentarios sobre la dificultad de aplicar técnicas de motivación o adquisición para ciertos temas de álgebra elemental y de geometría entre otros. Es recomendable seguir investigando e innovando nuevas técnicas o variantes de las anteriores así como facilitar la comunicación entre los profesores de los colegios para el intercambio de experiencias de metodología activa.
En este trabajo no se ha expuesto las dos últimas fases (transferencia y evaluación) del modelo educativo planteado aunque sí se han trabajando en los talleres. Se recomienda considerar estas fases en trabajos posteriores.
Aunque el trabajo fue desarrollado para un proceso en el nivel medio de enseñanza, esta metodología es adaptable a los primeros ciclos del nivel universitario y es recomendable propiciar el desarrollo de este tipo de trabajo en este nivel.

Referencias bibliográficas

Gagné, R. (1975). *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción.* México: Ed. Diana.
Díaz , F; Hernández ,G. (1998). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: Mc. Graw Hill.
Galván, L; Gollergant, J. (2000). *Diseño instruccional para un aprendizaje por competencias. Documento interno del documento de Calidad Educativa.* Lima, Perú: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.
Galván, L. (2000). *Psicología del aprendizaje. Documento interno del documento de Calidad Educativa,* Universidad Peruana de Ciencias aplicadas.
Cabrera, M; Collin, V; Cuevas, J; Vidal, C. (2000). *Metodología activa en la enseñanza de las matemáticas*. Actas del IV Congreso Nacional de Educadores, Lima. Perú.

Formación de Profesores

Nivel Superior

El teorema fundamental del álgebra y los cuaterniones

Alicia Gil, Amalia Kaczuriwsky, Ana María Narváez
Universidad Nacional de Cuyo. Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Mendoza.
Universidad Juan A. Maza. Mendoza, Argentina
anarvaez@fcemail.uncu.edu.ar lauma@impsat1.com.ar sistemas@frm.utn.edu.ar

Resumen
El presente trabajo se refiere al Teorema Fundamental del Álgebra: su historia y su transposición didáctica al aula universitaria para lograr su significación en la misma.
A partir del análisis epistemológico de estos contenidos y de considerar la importancia de la contribución de Gauss, dado que "su trabajo debe estudiarse por las generaciones de jóvenes como un mecanismo de estímulo para la creación intelectual de todos los tiempos", el teorema adquiere significación.
Se hace expresa referencia a los cuaterniones de Hamilton quien, en su búsqueda por encontrar "números" que desempeñen, en relación a la geometría del espacio euclideano tridimensional, un papel análogo al que desempeñan los complejos en la geometría plana, abre el camino hacia la matemática abstracta, dando inicio así, a partir de sus cuaterniones, el estudio de las álgebras no conmutativas.
El objetivo que se persigue es mostrar una forma posible para enseñar este tema a los alumnos, tratando de que ellos descubran el por qué de su importancia y exhibir las prolongaciones del mismo, como el hecho que, a partir de él, la matemática toma un nuevo rumbo, desconocido para los matemáticos de entonces, hacia la abstracción.
El marco teórico en los aspectos didácticos son soportados por la Teoría de Transposición Didáctica del Dr. Ives Chevallard, de la que se mencionan algunos de sus conceptos básicos, atendiendo a que tal vez sea la teoría didáctica que mejor se adapta a la enseñanza de la Matemática en la Universidad.

Introducción

No obstante ser un teorema muy usado no sólo en el ámbito escolar sino también fuera de él, casi no se lo nombra cuando es utilizado y menos aún se lo demuestra o se lo argumenta, siendo muy poco lo que se sabe de él, tal vez porque su demostración requiera de un nivel matemático elevado, nos referimos al **Teorema Fundamental del Álgebra**.
En la resolución de ecuaciones y en su reconstrucción a partir de las raíces, su protagonismo es indiscutible.
Es nuestro propósito realizar algunas reflexiones que nos permitan resaltar ese protagonismo en el aula universitaria, para ello nos preguntamos: **¿cómo lograr que este concepto se transforme en un conocimiento significativo para nuestros alumnos universitarios que, a su vez, se desempeñarán como docentes?**
Un marco teórico jerarquizado para este trabajo, es la teoría de Transposición Didáctica del Dr. Ives Chevallard (1985), de la disciplina experimental Didáctica de la Matemática, siendo quizás la que mejor se adecua al ámbito universitario. En éste, el llamado **"saber erudito"** está muy próximo al **"saber a enseñar"**, y por lo tanto son pocas las transformaciones (adaptaciones) que deben realizarse entre ambos.
Una de estas transposiciones es el orden en que se enseñan (trasponen) los contenidos que muchas veces no coincide con el desarrollo histórico de los mismos. Por ejemplo, los sistemas de numeración cuyo orden en la enseñanza tradicional ($\subseteq$, $\wedge$, $\angle$, ∇, $\Re$) no coincide con la formalización respectiva de cada conjunto. Cronológicamente aparecieron en el orden siguiente $\angle$, $\wedge$, $\Re$, $\subseteq$ y ∇ (saber erudito).
En este sentido, la epistemología brinda un apoyo muy importante pues es sabido que la comprensión de una teoría matemática no puede ser completa si se desconocen sus orígenes históricos. Ir a ellos y ver la forma como esa teoría ha influido en el conocimiento,

constituye una herramienta didáctica valiosa que permite mostrar los caminos recorridos por la ciencia, condición necesaria para poder buscar nuevas alternativas, conjeturar mayores alcances y mejorar posibilidades de aprendizaje dentro del sistema didáctico.
Es fundamental que el profesor proponga actividades que permitan al alumno redescubrir el objeto matemático en estudio (repersonalización y recontextualización).
Sin dudas, el problema de la transposición no consiste únicamente en elegir una teoría de aprendizaje; es necesario considerar el medio, instancias de exigencias que implican una adecuación, como puede ser por ejemplo, a los contenidos curriculares que son otra forma de transposición. Luego aparecen los textos desde donde el docente debe tomar la temática, es él quien debe generar el campo de problemas que permita al alumno redescubrir los conocimientos.

Antecedentes históricos

La búsqueda de soluciones a las ecuaciones de primer grado aparecen aproximadamente en el siglo XX a.C.; los babilonios y los egipcios conocían bastante acerca de las de segundo grado; Diofanto fue quien comenzó con una teoría más formal, trabajando con letras en vez de números.
En el año 628 Brahmagupta trabaja expresamente algunos casos de la ecuación de segundo grado, conocía que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$, es decir, concibe la idea de número irracional.
El más conocido de los matemáticos árabes es Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi, conocido como *padre del álgebra*. Se sabe poco de su vida salvo que vivió en la primera mitad del siglo IX y que trabajó en la biblioteca del califa de Bagdad.
Debe destacarse la obra de contenido algebraico "Hisab al-yabr wa´l muqqabala", considerada uno de los primeros libros de álgebra. Obra eminentemente didáctica con abundantes problemas para resolver y adiestrar al lector, principalmente, en la resolución de ecuaciones de segundo grado.
Es el autor de uno de los métodos más antiguos que se conocen para resolver ecuaciones de segundo grado. Dicho método, geométrico, se conoce como de completar cuadrado; sin embargo, para Al-Khwarizmi la solución negativa carecía de significación, evidentemente las soluciones complejas ni "existían".
Pero sigue abierto el problema de hallar la solución a una ecuación de tercer grado, los primeros intentos siempre son de carácter geométrico, Scipione del Ferro, Tartaglia y Cardano trabajan sobre este tema entre 1500 – 1550; Cardano en realidad trata de encontrar una resolvente de la ecuación de tercer grado apoyándose en la de segundo y utilizando coeficientes positivos; Ludovico Ferrari resuelve la de cuarto grado con métodos algebraicos. Durante el siglo quince, consideran ecuaciones con soluciones fraccionarias pero no admiten soluciones negativas (*ficticia*), mucho menos imaginarias (*negativa sofística)*.
En 1572 Rafael Bombelli, plantea la ecuación $x^3 + 15x = 64$, encuentra una resolvente y halla las soluciones; aunque le aparece el número $\sqrt{-1}$, lo soslaya pues considera que siempre $x.x \geq 0$ por eso lo llama “número imposible”.
El reconocimiento de la existencia de raíces negativas va a hacerse recién en los siglos diecisiete y dieciocho. Sin embargo, los números complejos presentan una problemática

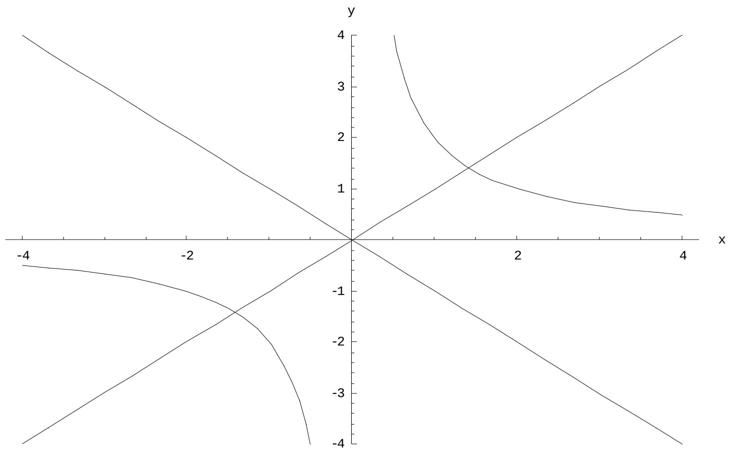
mayor pues, entre otras cosas, no podían ser representados geométricamente, (en ese entonces la idea geométrica era muy fuerte y se identificaba cada punto de la recta con un número real).
Desde la época de Girard era conocido que los números reales se podían representar en correspondencia con los puntos de una recta; en 1625 fue él quien afirmó que toda ecuación algebraica de grado **n** ρ 1 admite **n** raíces reales u ocultas (imaginarias). Wallis había sugerido que los números imaginarios puros se podrían representar por los puntos de una recta perpendicular al eje de los números reales. Sin embargo, sorprendentemente nadie antes que Wessel y Gauss pensó en franquear la etapa de considerar las partes real e imaginaria pura de un complejo como las dos coordenadas rectangulares de un punto del plano al que se asociaría dicho número complejo. El cubrir este salto hizo a los matemáticos sentirse mucho más cómodos con estos números ya que ahora podían visualizarlos en el sentido de que todo punto del plano correspondía a un número complejo y viceversa (Boyer, 1968, pág. 630-631).
A partir del conocimiento de los números complejos y de sus propiedades, tiene sentido el problema de buscar las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, por algunos llamado **"el abuelo de los problemas"**.

El teorema fundamental del álgebra

Gauss, en su tesis de doctorado (1798) y publicada en Helmstädt en 1799, hace un aporte fundamental a la Matemática, demostrando que **"toda ecuación polinómica de grado mayor que cero, se puede factorizar en factores reales lineales y cuadráticos"**, dando así una primera demostración de lo enunciado por Girard, reconocido más tarde universalmente como **"Teorema Fundamental del Álgebra"** y, en Francia, como Teorema de D'Alembert, cuyo enunciado actual es: "**todo polinomio algebraico de grado mayor que o igual a uno de una variable compleja con coeficientes complejos tiene n raíces complejas"**. En esa memoria también dice que no es posible resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado.
Es él quien inicia la introducción sistemática de los números complejos en la Matemática y su representación gráfica (hoy en uso), que fue publicada en 1831 (parece que Gauss estaba en posesión de ella desde 1799), habiendo sido encontrada independientemente por el danés Caspar Wessel (1745-1818), quien la publicó en la revista de la Academia de Ciencias danesa en 1798, y por el suizo Jean Robert Argand (1768-1822) que la hizo conocer en 1806. Lo cierto es que la obra de Wessel pasó desapercibida y así el plano de los números complejos se suele llamar hoy "plano de Gauss", a pesar de que Gauss no publicó sus ideas al respecto hasta unos 30 años más tarde.

En realidad, las primeras demostraciones fueron de tipo geométrico; las líneas generales que seguían las ideas de Gauss para demostrar este teorema, se puede exhibir el siguiente ejemplo.
Para resolver la ecuación $z^2 - 4i = 0$ gráficamente, demostraba que existe un valor complejo $z = a + bi$ que la satisface. Si se sustituye en dicha ecuación z por el complejo $a + bi$, se obtiene la expresión $a^2 - b^2 + (ab - 2)i = 0$, de donde $a^2 - b^2 = 0$ y $ab - 2 = 0$.
Si se interpretan a y b como variables y se representan las dos ecuaciones anteriores en un sistema cartesiano, en abscisas la parte real a y en ordenadas la parte imaginaria pura b, se

obtienen dos curvas: un par de rectas ($a - b = 0, a + b = 0$) y una hipérbola equilátera ($ab = 2$).



Se observa que las dos curvas se cortan en dos puntos.

Una rama de la primera curva se aleja del origen en las direcciones $\theta = 1\pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ y que una rama de la segunda curva se acerca asintóticamente a las direcciones $\theta = 0\pi/4$ y $\theta = 2\pi/4$. El punto de intersección está entre las dos direcciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$; las coordenadas a y b de este punto son la parte real e imaginaria del complejo solución de la ecuación propuesta.

Si la ecuación original hubiera sido de tercer grado, habría habido una rama de una de las dos curvas aproximándose a las direcciones $\theta = 1\pi/6$ y $\theta = 3\pi/6$, y la otra curva se aproximaría as direcciones $\theta = 0\pi/6$ y $\theta = 2\pi/6$. Las ramas son continuas en todos los casos, luego tienen que cortarse en algún punto en el ángulo que va de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/3$.

Para una ecuación de grado n habrá una rama de una de las dos curvas con direcciones asintóticas $\theta = 1\pi/2n$ y $\theta = 3\pi/2n$, mientras que una rama de la otra curva tendrá las direcciones$\theta = 0\pi/2n$ y $\theta = 2\pi/2n$ y estas dos ramas tienen que cortarse necesariamente en un punto entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/n$ y se repite el argumento.
Se observa, por lo tanto que sea cual sea el grado de la ecuación polinómica, tiene que tener al menos una raíz compleja. La demostración dada por Gauss en su tesis se basa en consideraciones geométricas, lo que no resultaba muy satisfactorio. En 1816, Gauss publicó dos nuevas demostraciones y en 1850 otra, tratando siempre de encontrar la demostración

puramente algebraica. Sin embargo, hoy se admite que este teorema depende esencialmente de consideraciones topológicas. (Boyer, 1968, pág. 631-633).
Este teorema, por lo anterior, no es del Álgebra y la razón de ser fundamental lo es, pero en el sentido de la teoría de números, no del álgebra en general.
En los cursos universitarios actuales de Variable compleja se puede demostrar este teorema a partir del Teorema de Louville (ver Churchill, Variable compleja).
Cabe preguntarse ahora si este teorema no es posible extenderlo a otros sistemas numéricos o, equivalentemente, si siempre la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene exactamente **dos** raíces.

Los cuaterniones y la contribución de Hamilton

Sin realmente proponérselo, Hamilton da una respuesta a esa inquietud. Sus trabajos sobre los números complejos le indican el camino hacia los cuaterniones. En un famoso paper de 1837, publicado por Transactions of the Royal Irish Academy, Hamilton declaró ser capaz de construir un álgebra que incluyera a los números negativos y a los complejos, a los que escribía como un par ordenado de números reales.
Pensaba que siguiendo este proceso, era posible también escribir ternas de números reales que podían ser tratadas con las mismas reglas que los complejos. Este sistema no tenía ningún problema con la ley suma, pero tardó diez años en darse cuenta que era imposible tratar de definir una ley para el producto.
Cierto día de 1843, paseando con su esposa, tuvo un relámpago de inspiración: sus dificultades desaparecían si utilizaba cuaternas de la forma $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, con **a**, **b**, **c**, **d** números reales; **i**, **j**, **k**, números imaginarios.
Hamilton definió la suma de dos cuaternios de la siguiente forma: dados
$x = a + bi + cj + dk$; $y = m + ni + pj + qk$, con $(1; i; j; k)$ elementos de una base, es:
$x + y = (a + m) + (b + n)i + (c + p)j + (d + q)k$.
Con la suma así definida, es asociativa, existe elemento neutro: $e = 0 + 0i + 0j + 0k$; todo elemento tiene su inverso aditivo, $-x = -a - bi - cj - dk$ y es válida la ley conmutativa.
Es decir que, con la adición $(\nabla^4; +)$ alcanza la estructura de grupo conmutativo.
Para el producto en ∇^4, define las siguientes reglas:

$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{-1}$; y, siguiendo la regla de la mano derecha:

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k}$; $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i}$; $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j}$; el producto que define es:

$x \cdot y = (a + bi + cj + dk)(m + ni + pj + qk) = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, con

$\alpha = am - bn - cp - dq$; $\beta = an + bm + cq - dp$; $\gamma = ap - bq + cm + dn$ y

$\delta = aq + bp - cn + dm$

Puede verificarse fácilmente que el producto así definido no es conmutativo, aunque es asociativo, existe elemento neutro, y cada elemento no nulo tiene su inverso; es decir,

$(\nabla^4 - \{0\}; .)$ es un grupo no conmutativo.

Como se ve, es posible definir el producto pero se rompe con la conmutatividad; esto representaba para la perspectiva tradicional una violación a una regla sacrosanta de la aritmética y del álgebra.
El Teorema Fundamental del Álgebra es válido cuando los coeficientes del polinomio pertenecen a un cuerpo conmutativo y los dominios de integridad donde éste se verifica reciben el nombre de dominio de factorización única en polinomios ; pierde su validez en el conjunto de los cuaterniones donde la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene infinitas soluciones.

Por otra parte es el primer corte claro del álgebra clásica, aparece una perspectiva moderna, una llave que permite entrar al álgebra abstracta moderna (álgebras no conmutativas), dado que los cuaterniones están sumidos en la teoría de anillos abstractos.

Consideraciones finales

Respecto de la experiencia didáctica, la misma se realizó en un tercer año del Profesorado de Matemática de una Universidad de Mendoza, en la materia Análisis Matemático III (Variable Compleja).
Durante varios años el Teorema Fundamental del Álgebra fue abordado en forma tradicional (enunciado y demostración); hace dos años que se decidió introducirlo haciendo una investigación epistemológica acerca de los sistemas de numeración y la posibilidad o no de resolver determinadas ecuaciones en los mismos.
Fueron así apareciendo los conjuntos N, Z, Q y R y se analizó la evolución del problema a partir de sus raíces históricas.
El análisis de esta evolución de ideas, fue un elemento disparador de la motivación de los estudiantes. Apareció entonces la necesidad de los números complejos y su estructura de cuerpo, y como consecuencia, el Teorema Fundamental del Álgebra. Casi naturalmente surgió la inquietud de investigar qué son los cuaterniones de Hamilton.

Referencias bibliográficas

Boyer, Carl B. (1968). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Chevallard, Yves. (1991). *La Transposición didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Aique grupo editor.

Guzmán Retamal, Ismenia.(1999). *Transposición didáctica*. Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Pycior, Helena M. (1994). The philosophy of algebra. En I.Grattan-Guinnness, Eds. *Companion Encyclopedia Sciences*, Vol. 1, pp794-805. New York, USA: Routledge Inc..

Toti Rigatelly, L. (1994). The Theory of equations from Cardano to Galois. 1540-1830. En I.Grattan-Guinnness, Eds. Companion Encyclopedia Sciences, Vol. 1, pp713-721. New York: Routledge Inc.

Friedrich Gauss, Carl.. (1995).*Disquisitiones Arithmeticae*. Academia colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales. Colección Enrique Pérez Arbelaez Nº. 10. Colombia: Editora Guadalupe Ltda.

Gentile, Enzo (1984*). Notas de Álgebra I*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones EUDEBA.

Dunham, William (1994). *Mathematical universe. An alphabetical journey trrough the great proofs, problems and personalities*. Ed. John Wiley and Sons, Inc.

Lentin, A; Rivaud, J. (1969). Álgebra moderna. España: Ed. Aguilar.

http//matemáticas.reduaz.mx./Biografías/Khwarizmi.html

http//members.es.tripod.de/somriure

http// www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history

Marcano, G. Carrera, I., Rada, S. (1980). *Nuevas tendencias en la enseñanza de la MATEMÁTICA.* Caracas, Venezuela: CENAMEC.

Salkind, N.J. (1998). *Métodos de la Investigación*. México: Prentice Hall.

Influencias en la formación de educadores matemáticos en Venezuela

Yolanda Serres Voisin
Universidad Central de Venezuela. Venezuela
yserres@euler.ciens.ucv.ve

Resumen
El **objetivo** de este trabajo es mostrar las influencias que ha tenido la formación de educadores matemáticos en Venezuela. Para ello se tomarán en consideración: (1) Los programas de postgrados en Educación Matemática existentes en el país. (2) Los tópicos discutidos en los eventos académicos del área. (3) Los proyectos particulares de algunas instituciones como: la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT). y su publicación oficial la revista *Enseñanza de la Matemática*; y el Centro Nacional para el Mejoramiento y la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC) y sus proyectos de actualización docente. Se está utilizando una metodología de análisis de contenido (Krippendorff, 1997), para analizar las influencias de cada una de las unidades de análisis enumeradas anteriormente en la formación de los(as) educadores(as) matemáticos(as). Se tomará como principal instrumento de recolección de información la documentación de los acontecimientos y entrevistas a los educadores.

Situación de la Educación Matemática en Venezuela

Una ciencia o un área de conocimiento se define a través de su(s) objeto(s) y su(s) método(s) de estudio. El término "Educación Matemática" viene de la escuela estadounidense. También existen los términos "Didáctica de la Matemática" de las distintas escuelas europeas y "Matemática Educativa" de la escuela mexicana. En Venezuela se ha utilizado el término "Educación Matemática", sin claridad ni discusión de qué implica éste, cuáles son sus objetos y métodos de estudio. El término Educación Matemática en Venezuela, tuvo su origen con la creación de postgrados específicos en esta área a principios de los años 70. La investigación y, en consecuencia, la evolución y fortalecimiento del área, se han desarrollado a través de estos postgrados, las publicaciones y los eventos dedicados a esta área en particular. También existen algunas instituciones, como son el Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC) y la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT), que han contribuido al fortalecimiento de la misma.

Según Marcano, Carrera y Rada (1980) los estudios de Matemáticas en Venezuela se inician, de forma incipiente, en 1831 en la carrera de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela (UCV) por gestiones de Juan Manuel Cajigal. Anteriormente el país apenas salía de su condición de nación colonizada. En todos los niveles de enseñanza se carecía de personal preparado para ejercer la docencia, ésta era impartida por personas que tenían algún conocimiento matemático. El primer Instituto del país en el cual se administraron programas de Matemática fue el Instituto Pedagógico Nacional, actual Instituto Pedagógico de Caracas (IPC), creado en el año 1936. En cuyo Departamento de Física y Matemáticas se preparaban los docentes en dichas ramas para la educación media. Los egresados de este Instituto tuvieron un papel de liderazgo durante los años 40, 50 y 60 en la enseñanza de la Matemática en el país, tanto en educación media como en primaria pues también formaban a los maestros de las escuelas normales. De hecho la que constituye quizás la primera investigación en Educación Matemática llevada a cabo en Venezuela, fue llevada a cabo en 1963 con la coordinación del Prof. José Alejandro Rodríguez del IPC, por los esposos Villalobos, esta se tituló "Evaluación de la enseñanza de las matemáticas en los liceos de

Venezuela”, y fue publicada en la Revista de Educación, editada por el Ministerio de Educación, este estudio se llevó a cabo en 30 liceos del sector oficial.

Luego, fue a finales de los años 50 cuando surgen otras instituciones que se dedican a la formación de matemáticos y docentes de Matemática, como la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, en 1958, y el Instituto Pedagógico de Barquisimeto en 1959. (Marcano, Carrera y Rada, 1980)

Metodología de investigación

La información para llevar a cabo esta investigación se recogió paralelamente de dos fuentes: 1.- Las entrevistas a las personas responsables de la formación de los educadores matemáticos en las distintas universidades. 2.- Los documentos como programas e informes de creación de los postgrados, las memorias y los informes de los eventos en educación matemática realizados en el país. Las entrevistas son, según Goetz, LeCompte (1988), *no estandarizadas,* pues sirven de guía acerca de las cuestiones generales y la información específica que se quiere reunir, tienen un enfoque informal, y ni el orden de las preguntas ni su contexto son prefijados. Esta tuvo tres partes fundamentales: preguntas generales acerca de los hechos que han influido en la formación de la especialidad Educación Matemática en el país, preguntabas sobre los aspectos específicos considerados esenciales en el fortalecimiento del área (postgrados, eventos, revista especializada y otras instituciones) y preguntas sobre la participación específica del entrevistado, los apoyos recibidos al proceso y el futuro que vislumbraba para el área. Luego se procedió a realizar un análisis de contenido con el propósito de describir tendencias en el contenido de las mismas. (Krippendorff, 1997) El análisis de contenido es una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto. En el caso de esta investigación se ha relacionado la información obtenida en los distintos documentos e informes de creación de los programas de postgrado, informes de los eventos académicos realizados e informes de la ASOVEMAT con lo manifestado por los entrevistados, buscando coincidencias y contextualizando cada dato aportado por los informantes con la documentación publicada por las universidades que imparten los postgrados y con los informes presentados por los miembros de la Asociación Venezolana de Educación Matemática cuando realizan un evento o lo que han publicado acerca de su aporte a la publicación de la revista *Enseñanza de la Matemática.*

Los Postgrados

Para Luengo (1998), la existencia del área Didáctica de las Matemáticas ha posibilitado la creación de departamentos en torno a esta temática, la incorporación de esta cátedra a la actividad normal de cualquier departamento ha traído como consecuencia la organización de programas de doctorado específicos de Didáctica de la Matemática. En Venezuela, los programas de postgrados existentes en el área son:

1. La Maestría en Educación. Mención Enseñanza de la Matemática. De la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), impartida en sus distintos Institutos

Pedagógicos: el de Caracas (1974) además es la primera maestría en el área en Latinoamérica, el de Barquisimeto (1983), el de Maracay (1988) y el de Maturín (1990). También se hizo en 1994 un convenio con la Universidad Nacional Experimental de Guayana para impartir este postgrado en forma conjunta en Ciudad Guayana.

2. Maestría en Educación Matemática (1990). De la Universidad de Carabobo. (Mayor número de graduados).
3. Maestría en Matemática. Mención Docencia. De La Universidad del Zulia (LUZ).(1987)
4. Maestría en Educación. Mención Enseñanza de la Matemática. De la Universidad Rómulo Gallegos. (1994)
5. Maestría en Matemáticas. Mención Docencia. De la Universidad de Los Andes. (1991) (Tuvo dos graduados en Mérida y dos en Trujillo y desapareció)
6. Especialización Didáctica de las Matemáticas con opción a Maestría. Universidad Valle del Momboy. (1998)
7. Doctorado en Ciencias Humanas. Línea de investigación en Didáctica de la Matemática. La Universidad del Zulia.
8. Doctorado en Educación. Línea de investigación en Enseñanza de la Matemática. Universidad Central de Venezuela. (2000)

Caso de la Maestría en Matemática. Mención Docencia. LUZ.

Las líneas de investigación son: 1.-Procesos de enseñanza-aprendizaje en el campo de la matemática. 2.-Rendimiento estudiantil y profesoral en el campo de la matemática. 3.- Planificación y currículum en el área de matemática. 4.- Formación de docentes en el área de matemática. 5.- Definición y diseño de modelos didácticos metodológicos en la enseñanza de la matemática.6.- Investigación educativa a través de modelos matemáticos. 7.- Construcción de modelos matemáticos para la enseñanza a través de servomecanismos.

Existen en La Universidad del Zulia otras unidades de investigación cuyas líneas de trabajo se relacionan con las de la maestría, éstas son el Centro de Estudios Matemáticos (CEM) y el Proyecto Thales (PT). Las líneas de investigación del CEM son: 1.-El conocimiento de contenidos de la Matemática, Física y Ciencias Afines. 2.-Condiciones que inciden en la educación de la Matemática, Física y Ciencias Afines. 3.-Producción de actividades educativas para Matemática, Física y Ciencias Afines. 4.-Formación de docentes para orientar contenidos de Matemática, Física y Ciencias Afines. Las líneas de investigación del PT son: 1.- Formación y capacitación del docente en informática educativa para el área Matemática y Ciencias Afines. *2*.-Telemática e investigación educativa en el área Matemática y Ciencias Afines. 3.- Software interactivo y su incidencia en el aprendizaje de contenidos matemáticos y ciencias afines.

Actualmente se están desarrollando varios proyectos de tesis en relación con las líneas de investigación del PT dirigidas a estudiar las influencias y efectos del uso de la computadora y algunos paquetes informáticos en particular sobre el proceso de enseñanza- aprendizaje y el rendimiento académico. Algunas tendencias en los proyectos en desarrollo de esta maestría son Solución de Problemas y Factores Afectivos, actitudinales y de motivación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los eventos académicos

Los eventos académicos más importantes del área han sido los congresos nacionales, el primero llevado a cabo en 1994 en la ciudad de Maturín, donde dos años antes había nacido la ASOVEMAT, el segundo celebrado en la ciudad de Valencia en 1997 y el tercero se realizó recientemente en la ciudad de Maracaibo (octubre 2000).

I Congreso Venezolano de Educación Matemática (I COVEM): (Informe sobre el I COVEM, 1995). Se llevó a cabo conjuntamente con el III Encuentro de Profesores de Matemática de las Regiones Nor-oriental, Insular y Guayana y fue organizado por la ASOVEMAT y la UPEL-IPM.

Las conferencias centrales dictadas fueron: .- Educación Matemática en el inicio de los años 200, Claude Gaulin de la Universidad Laval de Quebec, Canadá; .- Programa de Modernización y Fortalecimiento de la Educación Básica, Inés de Orellana del CENAMEC; y ¿Se enseña a dmostrar o razonar en Educación Media? Eduardo Lima de Sa, de la USB. Las discusiones de las mesas de trabajo se organizaron alrededor de los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática señalados a continuación: el docente, el alumno, el ambiente escolar, el diseño curricular, la evaluación, aspectos administrativos y reformas educativas. Éstas fueron llevadas al Ministerio de Educación.

II Congreso Venezolano de Educación Matemática (II COVEM): (Memorias del II COVEM, 1997)

Los grupos de trabajo que se organizaron fueron: 1. Matemáticas de la Educación Básica. 2. Matemáticas de la Educación Media. 3. Matemáticas de la Educación Superior. 4. La Matemática y su vinculación con otras disciplinas de los Programas Escolares. 5. Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de las Matemáticas. 6. La resolución de problemas ¿un medio o un fin? 7. Creatividad y Matemática. 8. Hacia donde irá la Educación Matemática del siglo XXI. 9. Juego y Enseñanza de la Matemática. 10. La Matemática y las Artes. 11. La Investigación cualitativa en las Maestrías de Educación Matemática. 12. Resolución de problemas "inútiles" y el desarrollo de la capacidad intelectual. 13. Análisis crítico y evaluación de los textos utilizados en el aula. 14. Diseño de una clase por procesos de pensamiento. En ponencias: 1. Diferentes enfoques para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. 2. Solución de problemas. 3. Investigación en Educación Matemática. 4. Capacitación del Docente en Matemática. 5. Lenguaje y Comunicación

La Revista *Enseñanza de la Matemática*

Según González (1996) desde 1972, cuando se llevó a cabo la III Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, se tuvo conciencia de la necesidad de dotar a la región interamericana de una publicación periódica dedicada a la didáctica de la matemática, pues para ese momento era muy marcada la escasez de material bibliográfico dedicado a los problemas del área en comparación con la actividad que en este campo se realizaba a nivel mundial.

La primera revista especializada en el área es la revista *Enseñanza de la Matemática*, apareció en 1992, editada por la ASOVEMAT, con el apoyo de la UPEL-IPM, ésta ha proporcionado un espacio para intercambiar puntos de vista, experiencias, inquietudes y planteamientos de quienes están interesados en el desarrollo y en el mejoramiento de la calidad de la enseñanza de la matemática en el país. Actualmente es editada con el apoyo del CENAMEC y va por el volumen 10.

El CENAMEC

Este ha influenciado el desarrollo de la Educación Matemática en Venezuela desde su inicio en 1974. Ha desarrollado diversos proyectos en esta área, como son: 1. MATCB-01. 2. .MATCB-02. 3. MATPRI-01. 4. MATPRI-03. 5..MATPRI-01-1. 6. PROMATEM-01 (Olimpíadas Matemáticas) (Marcano, Carrera y Rada, 1980)

El MATCB01 consistió en un diseño curricular experimental innovante para el Ciclo Básico Común de Educación Media. En el mismo intervinieron docentes de Educación Media y de Educación Superior (del Instituto Pedagógico de Caracas). Se realizó entre 1975 y 1980, partiendo de un diagnóstico, pasando por un diseño experimental hasta una implantación progresiva a nivel nacional. Participaron docentes de doce (12) ciudades del país, tres de cada una. Se pretendía romper con la enseñanza tradicional de la clase magistral y que los estudiantes trabajaran más. En principio lo que se quería hacer era una reestructuración del Programa, no un cambio de base como se hizo. Los docentes de Educación Superior elaboraron los objetivos, los contenidos y la evaluación, y los docentes de Educación Media diseñaron cómo hacer para llegar a eso. Se hicieron guías para los profesores, para los estudiantes y los Programas. Se trabajó con material concreto, p.e. en el tema de los sistemas de numeración.

El MATPRI fue un proyecto para introducir el uso de recursos concretos en la enseñanza de la Matemática. Al inicio se hicieron todos los recursos que se iban a utilizar y se grabaron unos videos al respecto.

Actualmente existen otros proyectos como son: 1. Banco de Problemas. 2. Uso de materiales. Uso de Recursos Didácticos. (Asociado a talleres de fracciones, de Sistemas de Numeración, de Geometría, de Resolución de Problemas, de Juegos) 3. Materiales Educativos No Impresos (MENI) 4. Matemática Interactiva. Los talleres pueden ser solicitados por parte de una institución privada y ha habido en los últimos años programas gubernamentales para las instituciones públicas ofrecidos a las Zonas Educativas del país.

El CENAMEC contó con un boletín periódico de Educación Matemática, del cual se elaboraron diez (10) números. Cada uno se dedicó a un tema particular de la matemática, en la última página contaba con una sección de reseña de un personaje que trabajara en el área.

El CENAMEC, actualmente ubicado en el edificio del Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, mantiene una biblioteca muy bien dotada de publicaciones periódicas en el área de Educación Matemática Está planteado ver de qué manera los docentes del interior del país pueden utilizar este servicio de canje, solicitando por INTERNET algunos artículos sin necesidad de viajar a la ciudad capital.

Referencias bibliográficas

ASOVEMAT (1995) *Informe sobre el I Congreso Venezolano de Educación Matemática (I COVEM) realizado en el Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL) del 5 al 8 de Octubre de 1994.*

ASOVEMAT (1997) *Memorias II Congreso Venezolano de Educación Matemáti*ca.

Goetz, J. LeCompte M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

González, F. (1996). Reseña de libros. *Educación Matemática*, 8(1), 103-118.

Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós Ibérica.

Luengo, R. (1998). Una panorámica sobre la Educación Matemática en España. *Memorias III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Caracas: ASOVEMAT.

Marcano, G. Carrera, I., Rada, S. (1980). *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática*. Caracas: CENAMEC.

La valoración de los errores en el aprendizaje de la matemática

Alejandro Muñoz Diosdado
UPIBI, Instituto Politécnico Nacional. México
amunoz@acei.upibi.ipn.mx

Resumen
La evaluación de los exámenes de Matemáticas de los alumnos se ha realizado tradicionalmente de forma binaria, o están bien o están mal. Realizar una evaluación más detallada en donde se revise el procedimiento para resolver algún problema puede llevar a una evaluación más justa. Pero lo que se plantea en este trabajo es que el profesor debe realizar un análisis detallado no tanto de los aciertos sino de los errores que comete el alumno, porque el profesor es el que más puede aprender de los errores de los alumnos. Se hace una clasificación de los errores que cometen los alumnos, se propone una forma cualitativa para valorarlos, y se hacen propuestas para que el profesor pueda conocer más de cerca, a partir de los errores que cometen los alumnos, cómo aprende el alumno, que ha aprendido bien, que ha aprendido mal, qué conceptos le causan confusión, cuáles conceptos necesita repasar, etc. Esto le revela al profesor el grado de maduración que tiene el alumno en las diferentes habilidades del pensamiento y le permite mejorar su práctica docente.

Introducción

Para evaluar cualquier curso de Matemáticas del nivel superior tradicionalmente se aplican exámenes a los alumnos en los cuales tiene que resolver varios problemas, la calificación depende de cuantos problemas pueda resolver bien, porque el profesor hace un recuento de los aciertos y usando alguna escala asigna una calificación. Descrito de esta forma, el problema de la evaluación parece muy sencillo, sin embargo, evaluar no es calificar, realizar el proceso de la forma descrita no solamente puede resultar injusto para el alumno, sino que no permite al profesor darse cuenta de cómo el alumno está aprendiendo. El evaluar así impide que haya retroalimentación por parte de los alumnos hacia el profesor. Muchos profesores están en contra de los exámenes tradicionales, pero el problema no es el examen en sí, lo que no debe ser tradicional es la forma de evaluar tal examen. En las escuelas de Ingeniería de México es común que los profesores califiquen los exámenes de Matemáticas en forma binaria, un problema resuelto se califica con cero o con uno, o está bien o está mal. Con esta forma de calificar el profesor se centra solamente en el resultado, si el alumno logró reproducirlo, entonces el problema está bien, en caso contrario, el problema está mal. Algunos profesores valoran lo que el alumno hizo para resolver un problema, es decir, evalúan el procedimiento, y si el alumno se acercó a la respuesta puede ser que asigne una calificación fraccionaria al problema. Esto es más justo, y permite al evaluador darse cuenta de que parte del proceso de solución no domina el alumno.
El simple hecho de hacer esta valoración proporciona al profesor mucha información y le permite corregir aquellos aspectos que los alumnos no han entendido bien o hacer énfasis en aquellos temas que mostraron ser más difíciles para los alumnos. Sin embargo, esta valoración puede ser muy subjetiva, ¿con qué criterios el profesor puede decir que el alumno merece 0.5? ¿Puede el profesor asignar una calificación de 1.0 a un problema a pesar de que el resultado no sea correcto? ¿Todos los errores que comete un alumno son iguales, o hay errores más graves que otros? Por ello se debe examinar con mayor cuidado las respuestas que un alumno da a un problema, es necesario conocer con precisión el tipo de errores que puede cometer y de ser posible, asignar una escala para cada tipo de error. Por ejemplo, si un alumno copia mal un reactivo pero resuelve bien el problema, obviamente la respuesta no está bien, porque no resolvió el problema que se le planteó. No

obstante, si la respuesta al problema que planteó está bien, entonces ¿qué calificación asignar? Con el método binario estricto la calificación debería ser cero, si por el contrario se califica el procedimiento, entonces la calificación podría ser 1.0. Pero podrían darse otras situaciones. Por ejemplo, si el alumno resolvió bien el problema, pero:

1) Al copiar mal, se eliminó algún término que hace que el problema sea muy fácil.
2) El nuevo problema tiene una dificultad equivalente al original.
3) El alumno agregó un término que hizo que la solución fuera un problema más difícil.

En el primer caso probablemente el profesor piense que el alumno no merece obtener 1.0 a pesar de que el resultado sea correcto; en el segundo caso tal vez decida asignar la misma calificación y en el tercer caso ¿asignaría una calificación mayor a 1.0? Cualquier profesor podría dar una respuesta adecuada a este problema, sencillamente porque el alumno resolvió bien el problema, pero ¿qué sucede si el problema está mal resuelto? Algo que puede ayudar al profesor es conocer qué tipo de errores puede cometer el alumno, no tanto para dar una calificación, porque al fin de cuentas los profesores toman decisiones que no pueden sustraerse de cierta subjetividad. El conocer los errores que comete el alumno es importante porque todos aprendemos de nuestros errores, el alumno aprende de sus errores, pero quien más puede aprender de los errores del alumno es el propio profesor.

Los errores que cometen los alumnos

1.- Planteamiento del problema

La presente investigación se realizó sobre una muestra de 78 alumnos del nivel superior de las carreras de ingeniería en alimentos e ingeniería ambiental, los cuales cursaron la asignatura de Matemáticas I, que es un repaso de Álgebra y Trigonometría. Se aplicó un examen a los alumnos sobre los tópicos de Matemáticas I y para que estuvieran relajados se les dijo que el resultado no afectaría su calificación del presente curso, entregaron el examen cuando terminaron o cuando ya no pudieron resolver más. La redacción de los problemas se hizo lo más simple posible y los reactivos fueron simples también, no había casos especiales o problemas donde hubiera que pensar mucho las respuestas o que requirieran alguna metodología sofisticada. Para muestra el reactivo número 2:
Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6} \qquad (1)$$

Una vez terminada la revisión tradicional, se inició una revisión detallada de los exámenes buscando con la mayor precisión posible los errores que cometen los alumnos. Aunque la calificación que se obtiene por parte de los alumnos puede cambiar si se hace una revisión más detallada (usualmente aumenta, pero puede también bajar), el objetivo no es que la evaluación sea más justa, sino más bien conocer de cerca cómo aprende el alumno, que ha aprendido bien, que ha aprendido mal, que no conoce, qué conceptos le causan confusión, cuáles conceptos necesita repasar un poco, cuáles conceptos necesita volver completamente sobre ellos, etc. Esto está relacionado (así se muestra en este trabajo) con el tipo de errores que comete el alumno y esto a su vez revela el grado de maduración que tiene el alumno en las diferentes habilidades del pensamiento. Tal como se estableció en un trabajo anterior (Muñoz-Diosdado, 2000), los alumnos de nivel superior efectivamente tienen problemas de maduración, muchas veces son problemas de fácil solución, que el profesor puede detectar y resolver si existe la cooperación del alumno (Richard, 1999). No obstante, otras veces se observan problemas de maduración de tal magnitud que pareciera que se originaron desde varios niveles anteriores (Condemarín, Chadwick y Milicic, 1989).

2.- Diferentes tipos de errores

Si en una Academia de Matemáticas se les pidiera a los profesores que elaboren exámenes de opción múltiple, aparentemente, el problema es más o menos sencillo, simplemente hay que pensar como el alumno e imaginar los posibles errores que puede cometer al resolver un problema. A pesar de que en la Academia puede haber profesores con vasta experiencia, resulta que, en cuanto a errores cometidos, los alumnos tienen mucha "creatividad", siempre habrá más errores que los que se puedan imaginar. En este trabajo no se podrá hacer una descripción de todos los posibles errores encontrados (siempre habrá alguno nuevo) sino solamente de los principales, se tratará de agruparlos de acuerdo a su gravedad, pero esto puede variar al aumentar la experiencia o al conocer la opinión de otros docentes.

2.1.- Errores no graves

Pueden definirse como aquellos que no se originan de la falta de conocimiento del alumno sino de circunstancias que tienen que ver sobre todo con la falta de concentración. Por ejemplo, observe lo que un alumno contestó al reactivo 3:

`Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:`

$$x-1=y+1;\;\; x-3=3y-7 \qquad (2)$$

El alumno comenzó a resolverlo de la siguiente forma:

$$x+y=1+1;\;\; x-3y=-7+3 \qquad (3)$$

como se observa el alumno se equivocó desde el primer paso, realmente debió de escribir

$$x-y=1+1;\;\; x-3y=-7+3 \qquad (4)$$

después de este error, el alumno siguió el proceso y encontró la solución x=1/2, y=3/2, el cual es solución del sistema (3) pero no del sistema (2). El error cometido ¿realmente se debe a una falta de conocimiento? La respuesta es no, el error en (3) se debe a que el alumno aplicó mal la propiedad del inverso aditivo en un término, pero la aplicó bien en otros tres términos, se trata de un descuido. Esto no quiere decir que pasemos por alto este tipo de descuidos, pero en todo caso se deberían proponer actividades a este alumno (y a los que cometieron errores similares) para mejorar su concentración, pero habrá que aceptar que el alumno si sabe resolver sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales. ¿Debería de calificarse con un 1.0 este tipo de problema? Aunque esto depende del criterio del profesor, parece que la mayoría diría que no, porque el alumno pudo haber hecho la comprobación haciendo la sustitución en el sistema original y de esta manera darse cuenta que había cometido un error. Parece que este alumno tiende a dar respuestas superficiales, lo cual se concluyó al revisar todo el examen, porque no hizo las comprobaciones que se podían hacer para verificar las respuestas o dejaba los problemas inconclusos. Al realizar el análisis detallado del procedimiento seguramente ningún profesor asignaría un cero.

Hay errores que aparentan ser del mismo estilo pero que demuestran que el alumno tiene más deficiencias, por ejemplo, para este mismo reactivo otro alumno escribió a partir de la primera ecuación lo siguiente:

$$x-1=y+1;\ \ x=y \tag{5}$$

y sustituyó en la segunda ecuación

$$y-3=3y-7$$

de donde despejó para obtener y=2. Este es un error más grave que el descrito anteriormente, porque, aunque se podría argumentar que hubo un descuido, tácitamente el alumno está admitiendo que $x-1=x+1$. Si este alumno no detecta esta contradicción, muestra que tiene deficiencias más profundas que el alumno anterior.

2.2.- Errores por respuestas incompletas

En el problema descrito en (1), al hacer la simplificación se llega al resultado siguiente

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{1}{x-3} \tag{6}$$

Varios de los alumnos llegaron al resultado

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{x+2}{x^2-x-6}$$

este resultado no está mal, al comparar las dos expresiones el alumno piensa que cumplió con lo que se le pedía, es decir, simplificar. Sin embargo, no es posible llegar a la expresión anterior sin saber que $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$, y surge la pregunta ¿porqué no utilizó este mismo resultado para simplificar aun más?. Es también una respuesta superficial. El examen aplicado tuvo respuestas superficiales de parte de muchos alumnos y seguramente cualquier docente ha notado este tipo de respuestas que se quedan a la mitad o cerca del resultado pero sin llegar a él, no obstante que todo lo que hicieron no tiene errores.

También un alto porcentaje de alumnos no entienden el papel del signo (–) en el tercer término de (2), ellos resolvieron el problema de la siguiente forma

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{2(x+2)+3(x-3)-4x-7}{x^2-x-6}=\frac{x-12}{x^2-x-6}$$

no visualizan que el signo (-) afecta a todo el término a la derecha, aunque las operaciones las realizan de forma adecuada el resultado no coincide con lo que debería obtenerse. Los errores por respuestas incompletas indican que el alumno no hace el esfuerzo necesario para llegar a un resultado final, resultados intermedios lo dejan satisfecho, muchas veces es inmediato llegar a este resultado final pero el alumno o no puede o no quiere llegar a él. Hay que combatir esta actitud conformista de los alumnos, la cual nace no tanto de la falta de conocimiento sino de la falta de motivación o de concentración.

2.3.- Errores graves y muy graves

Si el alumno durante el proceso de solución de un problema reiteradamente utiliza mal las propiedades matemáticas, confunde los términos, no sabe leer las instrucciones o realiza mal las operaciones aritméticas o algebraicas entonces se trata de errores graves o muy graves. La presencia de errores graves puede llevar al profesor a calificar con cero un reactivo, lo cual es adecuado. Pero ni aún así puede afirmarse que el alumno no sabe nada

del reactivo. Probablemente el único caso en que estamos seguros que el alumno no sabe nada es cuando dejó el espacio en blanco. El profesor puede aprender de los errores de los alumnos, pero parece que en los errores en los que más puede aprender es en los errores graves, en un error de este tipo es en donde se manifiesta hasta donde llega la ignorancia del alumno, las deficiencias del alumno se vuelven transparentes para el maestro en este tipo de errores, un buen maestro puede diseñar toda una estrategia para ayudar a un alumno a partir del análisis de los errores graves que cometió en la resolución de un conjunto de reactivos. El tipo de errores que un alumno puede cometer es casi tan grande como el número de alumnos, puede cometer errores que ni siquiera nos imaginamos, pero si se entiende lo que hizo mal y cuales son los puntos clave que el alumno no domina entonces puede ayudársele con mayor eficacia. No es clara la frontera entre lo que es un error grave y uno no grave, lo que para algunos pudiera parecer un error grave para otro pudiera parecer apenas un pequeño descuido. En un trabajo descriptivo como éste puede ilustrarse al menos con un ejemplo muchos de los tipos de errores que cometieron los alumnos en un reactivo y la valoración que hace el autor de este trabajo de tales errores.
En el reactivo número 8 se pedía despejar a la variable x de la expresión

$$3^{x+1} = 100 \qquad (8)$$

A continuación se describe lo que seis alumnos de los que cometieron errores hicieron (está copiado directamente de los exámenes y fueron escogidos totalmente al azar). El primer alumno escribió su respuesta como

$$3^{x+1} = 10^2;\;\; x+1 = 2;\;\; x = 1$$

Aunque no lo indica explícitamente, el alumno utilizó logaritmos para resolver el problema, sin embargo aplicó a la izquierda logaritmo base 3 y a la derecha logaritmo base 10, esto se considera un error grave porque demuestra que el alumno no ha entendido que la misma operación que se hace en un miembro de una ecuación, debe hacerse en el otro. Tiene a su favor el hecho de que conoce el concepto de logaritmo pero no le parece sospechoso que el problema se sobre-simplifique tanto y por último no hace la comprobación correspondiente, a pesar de que es evidente que x=1 no es solución.
Un segundo alumno resolvió así el problema

$$(x+1)(\log 3) = 100;\;\; x = \frac{(-1)(100)}{\log 3}$$

Como se observa sólo aplicó logaritmo base 10 al término de la izquierda, el problema se agrava porque no hace el despeje en forma correcta, lo cual muestra graves deficiencias algebraicas para un alumno de nivel superior.
Obsérvese la forma tan singular de razonar del tercer alumno

$$3^{x+1} = 100;\;\; x+1 = \sqrt[3]{100};\;\; x+1 = 4.6;\;\; x = 3.6$$

El alumno no aplicó logaritmos, parece que “elevó” a 1/3 ambos miembros de la ecuación, pero no advierte que de ninguna manera queda x+1 en el lado izquierdo de la ecuación.
¿Y qué se puede decir del cuarto alumno? ¿Porqué esa notación tan extraña?

$$3^{x+1} = 100;\; 3_{100} = x+1;\; 300-1 = x;\;\; x = 299$$

respuestas tan desconcertantes como ésta requieren conversar con el alumno, para que el profesor pueda entender que trató de hacer. Muchas veces los alumnos tratan de hacer procedimientos no permitidos, pero en este caso la notación desconcierta a cualquiera.
El quinto alumno hizo lo siguiente

$$\log(x+1)3 = 100;\ \log(x+1) = \frac{100}{3};\ \log x + \log 1 = \frac{100}{3};\ \log x = \frac{100}{3} - \log 1;\ x = e^{\frac{100}{3} - \log 1}$$

Este alumno comete casi todos los errores posibles, difícilmente se nos ocurrirían otros.
Por último un sexto alumno hizo lo siguiente:

$$\log_3 3^{x+1} = \log_3 10^2;\ x+1 = \log_3 100;\ x = \frac{1}{\log_3 100}$$

He aquí un alumno que utiliza bien las propiedades de los logaritmos pero que no es capaz de hacer un despeje. Esta es una conducta que se observa de forma frecuente, los alumnos entienden bien los conceptos de algún tema avanzado, como derivar o integrar, pero no pueden resolver bien los problemas porque tienen errores algebraicos e incluso aritméticos.

Conclusiones

Evaluar exámenes en forma binaria, poniendo cero si el problema se resolvió mal o uno si se llegó al resultado, es una forma totalmente inadecuada para evaluar. Tomar en cuenta el procedimiento es una forma más justa de asignar una calificación. Pero lo más importante es hacer una revisión detallada y completa de lo que hizo el alumno y sobre todo analizar los errores que cometió el alumno. Caracterizar el tipo de errores que comete el alumno, como no graves, graves o muy graves, si bien puede ayudar a que el profesor evalúe mejor, tiene una mayor utilidad, le permite conocer de cerca el desempeño del alumno, ver sus deficiencias y sus aciertos, valorar el grado de madurez para la realización de ciertas tareas o razonamientos y le permite ver con claridad el éxito que ha tenido en su propio desempeño; un profesor que examina con cuidado los errores de sus alumnos, aprende de esos errores porque puede a su vez corregir su propia práctica docente. En el caso de Matemáticas esto es más importante, porque hay una situación de crisis en la enseñanza de la Matemática (al menos en México), y se requiere de profesores que realicen una evaluación total del alumno, no con el fin único de asignar una calificación, sino de usar este proceso para su propio mejoramiento.

Referencias bibliográficas

Condemarín, M., Chadwick, M., Milicic, N. (1989). *Madurez Escolar. Manual de Evaluación y Desarrollo de las Funciones Básicas para el Aprendizaje Escolar*. Madrid: Ed. Ciencias de la Educación Preescolar y Especial.

Richard, W. (1999). Condiciones para un aprendizaje de calidad en la enseñanza de las ciencias. Reflexiones a partir del proyecto PEEL. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 3-15.

Muñoz Diosdado, A., Arce Viveros, A. (2000). *La maduración para el aprendizaje de la Matemática*. Memorias de Relme XIV, Panamá.

Un taller de docentes sobre situaciones problemáticas que se resuelven con ecuaciones en diferencias finitas y la aplicación de la herramienta DERIVE

Mercedes Anido de López*; Ana María Simoniello de Álvarez**
*Facultad de Ciencias Económicas y Estadística - Univ.Nacional de Rosario, Argentina
**Facultad de Ciencias Económicas - Univ. Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina
amsimoni@fce.unl.edu.ar

Antecedentes

En el diseño original del Proyecto *"La enseñanza de la Matemática con herramientas computacionales"* se ha pensado en los cursos de formación docente como estrategias de transferencia. Trataremos de resumir algunas reflexiones sobre la importancia y el lugar que se les da en el proyecto.

¿Por qué surge en la Facultad de Ciencias Económicas la idea de estos cursos? La enseñanza de la Matemática a alumnos que no sean de una Licenciatura en Matemática plantea un desafío que frecuentemente ha sido ignorado. Los contenidos se han desarrollado como si los alumnos fueran potenciales especialistas en Matemática. En general, la Matemática se presenta en forma aséptica, sin contaminación con los problemas reales. Existe una falta de motivación en la introducción de los temas.

Pensamos que, para un alumno que vocacionalmente ha elegido una carrera del área de las Ciencias Económicas, podría ser atractivo que el aprendizaje se centre en la búsqueda de soluciones de problemas de Economía que utilicen herramientas matemáticas.

Existe en la actualidad una fuerte corriente en Educación Matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de Matemática no se realice sólo explorando las construcciones matemáticas en sí mismas, en las diferentes formas que se han cristalizado a lo largo de los siglos, sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad.

Ello además incentivaría al alumno al estudio y a la formación de conceptos sólidos. Se transitaría así de un aprendizaje a veces memorístico, a un aprendizaje significativo. Se deberían buscar metodologías alternativas que mantengan los beneficios de la educación en un pensamiento lógico riguroso, y que, al mismo tiempo, aprovechen la riqueza de algunos Modelos Matemáticos de la Economía, ya accesibles en el inicio de la Matemática Básica del nivel universitario.

En el caso de la Facultad de Ciencias Económicas que nos ha ocupado principalmente, la mayoría de los docentes a cargo de los cursos de Matemática son docentes graduados en la Facultad de Ciencias Exactas ó Profesores en Matemática. No han recibido formación específica en el manejo de los modelos matemáticos que resuelven problemas originados en el área de la Economía. Debían ser capacitados en el tema.

Por otra parte, la cantidad de alumnos de la Facultad se cuadruplicó en la última década. El aumento de la cantidad de alumnos no fue acompañado por un aumento proporcional de la cantidad de docentes. Esta situación ha incidido en un desbalance en cuanto al tiempo que el docente puede dedicar al estudio y actualización, y ha causado la postergación de las exigencias de perfeccionamiento. Además, el perfeccionamiento individual realizado por el propio docente es duro y difícil, atento a su realidad laboral.

Es por ello que se buscó diseñar, con apoyo de expertos, cursos de formación docente en áreas que son de gran actualidad, por los instrumentos matemáticos que aportan al estudio de temas específicos de Matemática Aplicada.

Se ayudaría así, también, a la formación de planteles capacitados para dar soporte matemático, con fuerte incidencia de métodos cuantitativos, a futuros cursos de postgrado en el área de Economía.
Una de las dificultades que se presentaban tanto para la actualización de los docentes, como para un mejor y más moderno aprendizaje de los alumnos en el área matemática, ha sido la carencia de un ámbito computacional adecuado (equipo y software). Se requería un espacio físico con las herramientas informáticas indispensables para el ejercicio de la docencia e investigación en una universidad moderna. Se necesitaba también formar los docentes en el manejo de los sistemas operativos y software, especialmente a los que no tenían entrenamiento en el manejo de PC. La aparición de las llamadas herramientas CAS (Computer Algebraic System) como poderosas calculadoras numéricas, simbólicas y gráficas, que no requieren conocimientos de programación, podía ser fuertemente motivadora para un cambio curricular y actualización del cuerpo docente, por el interés que despierta su versatilidad para el trabajo matemático. La utilización de herramientas computacionales, en temas que superen el nivel y contenido de los cursos de grado, haría experimentar al propio docente, el valor potencial de las mismas para el aprendizaje. Promovería también la reflexión del docente sobre su práctica educativa.
Consideramos, no obstante, que el mayor logro estriba en el interés demostrado; en la amplitud de la temática que una vez concluido el proyecto abarcará todos los contenidos de la Matemática Básica que se requieren en el grado y postgrado de una Facultad de Ciencias Económicas, y en los trabajos de producción y desarrollo, debidamente documentados, que han surgido como fruto de estos cursos casi todos realizados con modalidad de seminario taller.

El diseño de los cursos

Al respecto, se partió de los supuestos:

- La renovación efectiva de los métodos didácticos, en el marco de un currículum actualizado, sólo puede provenir del convencimiento de los docentes, a partir de su propia experiencia de reconstrucción del conocimiento matemático, en un proceso de redescubrimiento y análisis de los conceptos que permiten resolver problemas.
- Las herramientas computacionales constituyen un importante disparador para el cambio.

Algunas pautas que, se ha considerado, fundamentan la necesidad de promover en el docente en ejercicio de su profesión los cambios y adecuaciones necesarias para efectivizar su acción educativa en el marco de las actuales políticas jurisdiccionales, en el área de la enseñanza de Matemática, son:

- El sistema educativo se encuentra actualmente en un proceso de transformación, tanto en aspectos estructurales como de contenidos. Las instituciones y los agentes involucrados en dicho proceso están destinados a asumir nuevos roles y a definir sus nuevas funciones, rescatando aquellos aspectos que merecen ser conservados por la eficacia demostrada y desechando otros, a la luz de un análisis y reflexión profunda de su experiencia. Uno de los aspectos ya consensuados jurisdiccionalmente está vinculado con la definición del aprendizaje en torno a los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, y con técnicas que involucren el uso de tecnologías en el aula.
- Consideramos que la formación del profesorado es un factor determinante ya que de ello dependerán fuertemente tanto la concreción de objetivos y alcances fijados a los contenidos como la calidad de los resultados de la acción educativa. Cualquier formación que se desee priorizar, basada en la idea de que la actividad docente es una profesión, supone el reconocimiento de la existencia de un marco de contenidos en la disciplina científica

específica, en la del contexto educativo didáctico, con una fundamentación sólida de los mismos, y el diseño de estrategias adecuadas a los fines de promover la construcción de un aprendizaje significativo.

- La inclusión de herramientas computacionales en el proceso de aprendizaje constituye, en alguna medida, una innovación en las técnicas y selección de contenidos disciplinares que se emplean en el aula de Matemática. En nuestra concepción de los cursos desarrollados, y atendiendo a resultados de diversas investigaciones en Educación Matemática a nivel mundial, se considera que el uso adecuado de estas herramientas computacionales ayudan a "hacer", a "enseñar" y a "aprender" Matemática y abren nuevas oportunidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje, propiciando el desarrollo de operaciones intelectuales, capacidades y estrategias.
- Para desarrollar la actualización, capacitación y/o perfeccionamiento del docente en actividad, dado su realidad laboral, se requirió el diseño de estrategias que le posibiliten el acceso a las mismas. Consideramos que para garantizar una adecuada transferencia de nuestra investigación hacia la acción docente, la modalidad educativa a adoptar ha debido prever esas realidades, permitiendo a cada docente adaptar el sistema de cursado a su disponibilidad horaria, su interés en los distintos temas tratados y sus propias necesidades de formación. La educación a distancia se presentó también en algunos cursos como una alternativa que no sólo puede proporcionar esa formación, sino que posibilita su desarrollo apoyando al docente en su actividad habitual, ligando su acción didáctica específica a su propia formación.

Destacamos objetivos comunes a todos los cursos realizados en el marco del proyecto de referencia, cuyas experiencias se trata de evaluar:

- **Objetivo General:** Proponer pautas para una didáctica operativa en lo que hace el aprendizaje de la matemática, a partir de la experiencia del propio docente puesto en condición de alumno.
- **Objetivo Operativo:** Proporcionar al docente:
  - El conocimiento y manejo de una herramienta apta para la operatoria del cálculo diferencial e integral.
  - La permanente reflexión sobre la potencialidad didáctica de la herramienta utilizada.Como punto de partida del diseño, destinado a docentes de enseñanza media y universitaria y de profesorados en actividad, se discutieron y analizaron estrategias y modelos de comunicación, aprendizaje y administración de medios. El propósito ha sido facilitar la generación de procesos de reflexión y de análisis que ayuden al docente a entender el marco interpretativo y los valores que subyacen en las tareas que lleva a cabo. Desde nuestra perspectiva esto habilitaría al diseño de líneas de acción en la propia práctica docente, revisando enfoques, significación de contenidos y metodologías.

Los contenidos de los cursos fueron organizados sobre la base del trabajo integrado alrededor de dos ejes conceptuales: *la profundización y actualización del conocimiento matemático y la aplicación de las herramientas computacionales.*

En el diseño se contempló la realización de actividades no sólo de aprendizaje, sino también de tutorías y encuentros presenciales periódicos de reflexión, integración y evaluación, tanto individuales como grupales.

Asimismo, se seleccionaron las actividades a partir del análisis de diferentes situaciones cotidianas y procesos de distinta naturaleza estudiados por la ciencia en los que la Matemática es aplicada, aprovechando el potencial simbólico, gráfico y numérico de las herramientas CAS. Se trabajaron los conceptos incorporando al tratamiento práctico, la discusión teórica correspondiente. Se buscó asimismo que el aprendizaje de la herramienta

computacional y los contenidos matemáticos estuvieran integrados con la adquisición de destrezas para la resolución de problemas.
En relación con los sistemas computacionales se propició la búsqueda de información en bibliografía adicional, la problematización y discusión acerca del rol de los medios tecnológicos en la educación, de sus modos de representación, y su relación con las sociedades, sus culturas y momentos históricos. Con los mismos criterios se plantearon las actividades de evaluación y de seguimiento de los aprendizajes, procurando la aplicación de conocimientos a la resolución de problemas y la integración de los contenidos.
El seminario taller sobre Introducción a los modelos dinámicos. Aplicación del Sistema DERIVE en la resolución de problemas con ecuaciones en diferencias finitas
Diversos problemas de la micro y de la macroeconomía son formulados matemáticamente a través de ecuaciones en diferencias finitas. En el marco de la optimización dinámica como en el de otras cuestiones económicas donde las variables se consideran dependientes del tiempo, las ecuaciones en diferencias tienen particular importancia. Algunas áreas de aplicación en las carreras de las Ciencias Económicas son Matemática Financiera, Estadística y Economía.
Se consideró de gran interés la inclusión de estos contenidos atendiendo a las diversas cuestiones del Análisis Matemático y sus aplicaciones, que relacionan. En particular se destacaron las diferencias y semejanzas con la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales, tema éste que fuera motivo de un seminario taller desarrollado previamente.

Producción del seminario taller

Sobre la base del diseño previsto, un eje primordial de la actividad de los docentes participantes lo constituyó la construcción de Unidades didácticas de aprendizaje. Para ello se los estimuló hacia la propuesta de problemas de Economía o Ciencias Sociales que utilizan ecuaciones en diferencias finitas, y al análisis, por el propio docente, de las decisiones tomadas durante el proceso de resolución de problemas durante su actividad en el seminario.
En una segunda instancia se propone al docente la construcción de unidades didácticas centradas en los problemas seleccionados, de modo que:

- contemplen las relaciones entre diversos conceptos, la resolución de ecuaciones en diferencias con la aplicación de la herramienta DERIVE , la exploración de soluciones que ese programa permite y la elaboración de conclusiones;
- coloque al alumno en situación de investigador, aprovechando en forma inteligente las posibilidades de utilizar la herramienta computacional durante el aprendizaje.

De la producción de Unidades didácticas por los docentes, extractamos las que siguen.
Subtema:[1] Aplicación de DERIVE a la resolución de un problema microeconómico que considera un modelo simple de consumo
Autores:Est. Graciela Furno - Est. Liliana Koëgel - Ing. Ricardo Sagristá
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. Universidad Nacional de Rosario

Problema

Consideremos el siguiente modelo simple de consumo en un determinado sistema económico: $C(t) + S(t) = Y(t)$ (1)
donde t representa el tiempo, $C(t)$ el consumo en el tiempo t , $S(t)$ el respectivo ahorro e $Y(t)$ el ingreso para ese tiempo.

[1] Se seleccionaron algunas cuestiones propuestas por los autores.

Se sabe que: $Y(t) = \alpha\ S(t-1)$ donde α representa la tasa de interés y que: $C(t) = \beta Y(t)$ en la que β es la propensión marginal al consumo, que en épocas normales varía entre 0.75 y 0.85, si bien en épocas de hiperinflación puede superar con creces la unidad.
Sustituyendo las expresiones de $C(t)$ y $S(t)$ en (1), se obtiene la ecuación en diferencias:

$$Y(t+1) = \alpha\ (1-\beta)\ Y(t)$$

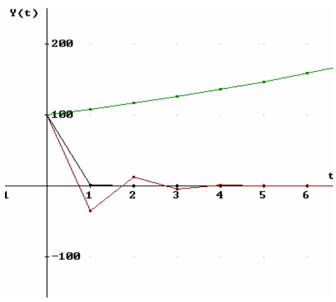
Llamando $p = \alpha\ (1-\beta)$, resulta: $Y(t+1) = p\,Y(t)$ $\quad (2)$
ecuación en diferencias lineal de primer orden, a coeficientes constantes (q = 0).

Cuando se tiene la ecuación en diferencias

$Y(t+1) = p(t)\ y(t) + q(t)$ con la condición $y(t_0) = y_0$
el programa DERIVE contiene un operador funcional que permite obtener la solución particular de la ecuación que satisface la condición dada: LIN1_DIFFERENCE (p,q,t,t_0,y_0)
Si no está dada la condición $y(t_0) = y_0$, se considera en general que $y(0) = k$ (k constante real) para $t_0 = 0$, con lo que se obtiene la solución particular correspondiente.
Dicho operador debe ser cargado previamente (File - Load - Utility - RECUREQN.MTH).
Utilice el operador anterior para encontrar la solución particular de la ecuación (2) en los siguientes casos, partiendo de un ingreso de 100 unidades monetarias:

α	β	$P = \alpha\,(1-\beta)$
0.08	0.80	0.016
0.70	1.50	-0.35
1.20	0.10	1.08

En cada uno de los casos anteriores, obtenga 15 puntos de la gráfica (Se sugiere usar el operador Vector). Estudie el comportamiento de la correspondiente sucesión $Y(t)$. Compruébelo analíticamente. Verifique las soluciones obtenidas.



Gráfica de soluciones de Y (t+1) = p Y (

Algunos aspectos de la resolución gráfica con DERIVE que permitirá al alumno analizar características de las soluciones se observan en el gráfico.

Subtema:[2] Aplicación de DERIVE en la resolución de ecuaciones en diferencias finitas de 2do. orden.
Autora: Est. Ileana Pluss. Fac. de Ciencias Económicas y Estadística. Univ: Nacional de Rosario.

Problema:

Sea el siguiente modelo : $\quad Y_{t+2} = C_{t+2} + I_{t+2}$

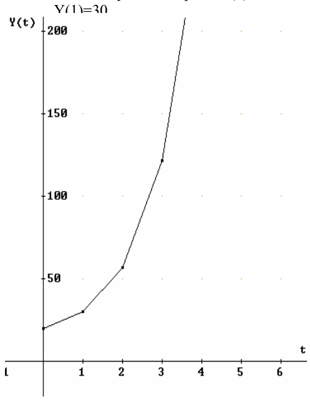
$$C_{t+2} = a\,Y_{t+1}$$

$$I_{t+2} = b\,(C_{t+2} - C_{t+1}) + d$$

Siendo Y la renta, C el consumo, e I la inversión.

a) Obtener la trayectoria temporal de la renta en el caso que: a = 0,5 ; b = 6 ; d = 12.
b) Encontrar la solución particular que satisfaga las condiciones $Y(0) = 20$,$Y(1) = 30$
c) Obtener la gráfica de la solución particular y estimar en ella características de la sucesión obtenida. Verificar con los cálculos apropiados.

Solución particular para Y(0)=20, Y(1)=30



Resolución con DERIVE:

---
[2] Se seleccionaron algunas cuestiones propuestas por la autora.

El primer paso consiste en obtener la ecuación en diferencias que se deduce del modelo:

$$Y_{t+2} - a\,Y_{t+1} - b\,(\,aY_{t+1} - a\,Y_t\,) - d = 0$$

Reduciendo, la ecuación en diferencias es : $Y(t + 2) - 3.5\,Y(t + 1) + 3\cdot Y(t) = 12$, que es ecuación lineal, a coeficientes constantes, de orden 2, no homogénea. El operador LIN2_CCF (-3.5, 3, 12, t, c1, c2) permite obtener su solución general: $Y(t) = c1.2^t - c2.\,1{,}5^t + 24$, t = 0, 1, 2,...

La solución particular que satisface las condiciones dadas : $Y(0) = 20$ e $Y(1) = 30$, es:
$Y(t) = 24.2^t - 28.\,1{,}5^t + 24$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

El operador VECTOR([t, Y(t)], t, 0, 10, 1) permite obtener una matriz de datos para una variación de la variable t de 0 a 10 en pasos de a 1 ; así puede obtener la gráfica de algunos puntos de la sucesión.

Al sólo efecto de una mejor visualización se han conectado los puntos correspondientes a la sucesión solución.

Podemos observar en la gráfica que la sucesión {Y(t)} es monótona creciente y por lo tanto diverge.

Es decir que la gráfica de Y(t) es explosiva y no tiende a un valor de equilibrio.

Estas conclusiones pueden verificarse en forma analítica.

Conclusión

Consideramos que en gran medida se han alcanzado los objetivos propuestos, lo que se ha evaluado a través de los cursos, de las opiniones de los participantes y sus acciones posteriores en el ambiente habitual de trabajo docente, el aula de Matemática.

El trabajo se realiza en el marco del Proyecto de investigación de la Universidad Nacional de Rosario "*La Enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales*" que dirigen la Lic. Mercedes Anido de López y el Ing. Héctor Rubio Scola.

Referencias bibliográficas

Anido de López, M. ; Simoniello de Álvarez,A.M. (1997). La construcción de unidades didácticas en el marco del proyecto de investigación: La enseñanza de la matemática con herramientas computacionales. *Actas de las II Jornadas de Investigación. Fac. de Cs. Económicas y Estadística. Univ. Nac. de Rosario. Argentina.*

Anido de López, M.;Simoniello de Álvarez,A.M. (1998).Las Ecuaciones diferenciales como herramientas disparadoras de un trabajo de formación docente. *Actas de las III Jornadas de Investigación. Fac. de Cs. Económicas y Estadística. Univ. Nac. de Rosario. Argentina.*

Anido de López, M.; Simoniello de Álvarez, A.M. (1999).La Ingeniería Didáctica en las Ecuaciones diferenciales con DERIVE. *Anales del III Congreso de (Tele)Informática Educativa. Santa Fe. Argentina. pp.237-247.*

Artigue, M. (1990). Ingéniérie Dídactíque. En *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9.(3)*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 281-307.

Jonassen,D.(1995). Computer as congnítíve tools Leamíng wíth Technology. Not from Technology. *Journal of computing in Higher Education* 6 - (2). pp. 4073.

Schoenfeld, A. (1989) . Ideas in the air: Speculations on small group learning, environment and cultural influences on cognition, and epistemology. *International Journal of Educational Research,13(1).*

Wittmann, E. Ch.(1984). Teachíng Uníts as the Integratíng Core of Mathematics Educatíon. *Educational Studies in Mathematics* 15, pp. 251-361.

Wittmann, E. Ch.(1995). Mathematícs Educatíon as "Desígn Scíence". *Educational Studies in Mathematics,* 29 (4)1 pp. 355-374.

Procesos metacognitivos y reflexivos: su desarrollo en la formación inicial de profesores de matemática a través de la práctica de enseñanza

Diana Jaramillo[3], Dario Fiorentini[4]
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp. Brasil
diana_jaramillo@hotmail.com; dariof@unicamp.br

Resumen
Esta comunicación hace parte de la investigación "(re)constitución del ideario de los futuros profesores de Matemática en un contexto de investigación sobre la práctica pedagógica", que actualmente estamos desarrollando en la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Educación de la *Universidade Estadual de Campinas-Unicamp*, Campinas-SP, Brasil[5].
Pretendemos, en esta comunicación, describir y analizar algunos instrumentos de mediación trabajados con los futuros profesores de Matemática, en la disciplina 'Práctica de Enseñanza de Matemática', en la *Unicamp.* Instrumentos que ayudan a desarrollar sus procesos metacognitivos y reflexivos, y que contribuyen a un mejor entendimiento, por parte del formando, de la relación que se establece entre su ideario y su práctica pedagógica. El término "ideario" se refiere a las creencias/concepciones/conocimientos/saberes del profesor que resultan de sus vivencias, experiencias, lecturas y aprendizajes formales o no. Estos instrumentos son: autobiografías; diarios reflexivos; lectura, análisis y discusión de textos; análisis de episodios de clase; narrativas escritas y/u orales; y mapas conceptuales.
Tenemos indicios, a partir de la investigación en curso y de nuestra práctica como profesores de profesores, que estos instrumentos contribuyen significativamente para la problematización y generación de un pensamiento consciente de los futuros profesores sobre su propio ideario acerca del conocimiento matemático, de su aprendizaje y de su enseñanza. Así, en este proceso, el formando se constituye en un "sujeto de conocimiento" que continuamente está construyendo, produciendo y resignificando conocimientos a partir y para su propia práctica profesional.

Introducción

La formación del profesor de Matemática se ha apoyado tradicionalmente en tres ejes: formación matemática, formación pedagógica general, y formación didáctica específica. Los dos primeros ejes han sido considerados los principales, mientras que el tercero ha sido visto como un mero puente entre ellos. Los saberes de la didáctica específica parecen reducirse a las aplicaciones de los conocimientos matemáticos unidos, simplemente, a los conocimientos pedagógicos generales. Esa concepción de formación de profesores está basada en el paradigma de racionalidad técnica (Schön, 1992).
La tendencia actual de formación de profesores, que intenta romper con ese paradigma, parece concebir el tercer eje como el principal eje de la formación, pues es en esa dimensión que los saberes de la actividad profesional funden teoría y práctica, teniendo como referencial la propia práctica profesional en una perspectiva dialéctica y compleja. Correspondería, por lo tanto, a este eje el papel de formar un profesor reflexivo e investigador y sujeto productor de conocimientos. Los programas de Licenciatura en Matemática en Brasil están todavía estructurados en el paradigma de la racionalidad técnica. Sin embargo, en la *Unicamp*, estamos intentando, desarrollar la disciplina de Práctica de Enseñanza de Matemática bajo el otro paradigma.
Dado que esta disciplina es ofrecida solamente al final del programa (en los dos últimos semestres), el estudiante llega a la Práctica de Enseñanza sin tener una base firme y sólida que le permita reflexionar y/o fundamentar sus reflexiones, criticar y/o fundamentar sus

[3] Estudiante de Doctorado de la Facultad de Educación, Área de Educación Matemática, *Unicamp.*
[4] Profesor de la Facultad de Educación, Área de Educación Matemática, *Unicamp.*
[5] Esta pesquisa está siendo financiada por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo-FAPESP.*

críticas, decidir y/o fundamentar sus decisiones cuando tiene que enfrentar situaciones reales de la práctica pedagógica en Matemáticas. Siendo así, es solamente en esta disciplina que el formando, futuro profesor de Matemática, puede confrontar su ideario pedagógico[6] sobre la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje con la práctica pedagógica en situación real.

Asumimos la Práctica de Enseñanza como el momento en que la reflexión y la problematización de la práctica pedagógica deben contribuir para resignificar el ideario del profesor y viceversa. Así, el plan de trabajo en el cual está basada esta Práctica pretende generar una actitud reflexiva, investigativa, crítica y emancipada sobre la práctica pedagógica. La componente reflexión está siendo influenciada, principalmente, por las concepciones de Carr & Kemmis(1986), Clandinin & Connelly (1990), Freire (1997) y Zeichner & Liston (1999). Así, consideramos que uno de los objetivos fundamentales de esta disciplina es desarrollar procesos reflexivos, investigativos y metacognitivos en los futuros profesores, y por lo tanto hemos intentado buscar algunos instrumentos de mediación que posibiliten esa formación.

De esta forma, pretendemos en esta comunicación destacar y describir algunos instrumentos de mediación trabajados con los futuros profesores de Matemática, en la Práctica de Enseñanza de la *Unicamp*. Estos instrumentos ayudan a desarrollar diversos procesos metacognitivos y reflexivos, y contribuyen a un mejor entendimiento, por parte del formando, de la relación que se establece entre su propio ideario y su propia práctica pedagógica.

Sobre los procesos reflexivos y metacognitivos

El ideario pedagógico del profesor se alimenta, fundamentalmente, de dos fuentes básicas:

- la primera, de la formación incidental[7] y de la formación inicial. Aquí el futuro profesor de Matemáticas está construyendo su ideario pedagógico con relación al conocimiento matemático (académico y/o escolar), al conocimiento pedagógico, a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, a la sociedad y al mundo (contexto). Este ideario influye directamente en el proceso de enseñanza que él desarrolla, y se manifiesta claramente en el proceso de aprendizaje de sus alumnos, ambos componentes importantes de la práctica pedagógica;
- la segunda, de las experiencias profesionales producidas a partir de la práctica pedagógica. Estas experiencias se convierten en saberes experienciales (Fiorentini *et al* 1999) a partir de una reflexión continua y sistemática antes, durante y después de la acción pedagógica. De esta forma, el futuro profesor no apenas construye su experiencia profesional sino que también problematiza, resignifica y reconstituye críticamente su propio ideario.

Así, el ideario está constantemente alimentando la práctica pedagógica, y ésta, a su vez, está siendo problematizada y transformada, por parte del profesor, a partir de su confronto reflexivo y crítico con la realidad en el salón de clase. Esta relación ente el ideario y la

[6] En esta investigación el término "ideario" está siendo construido como un constructo que se refiere a las creencias, concepciones, conocimientos/saberes del profesor. Este ideario resulta de vivencias, experiencias, lecturas y aprendizajes adquiridos a lo largo de su formación.
[7] La formación incidental se refiere a los aprendizajes al respecto del quehacer pedagógico y de la acción docente, adquiridos de forma implícita al vivenciar el proceso de enseñanza y/o aprendizaje, sea como profesor o sea como alumno.

práctica está siendo estudiada, en este trabajo, como dialéctica y compleja[8], pues ella no puede responder a una simple relación estática causa-efecto.
Es precisamente cuando esta relación, este ciclo (dialéctico y complejo) **ideario-práctica pedagógica**, se inicia y se repite que se manifiesta la necesidad del desarrollo de procesos reflexivos y metacognitivos que contribuyan a la 'concientización', por parte del licenciando, de dos aspectos fundamentales: del ideario que está (re)constituyendo y de los saberes experienciales que produce reflexivamente a partir de la práctica pedagógica.
Por lo tanto, la reflexión y la metacognición se constituyen en elementos importantes para ser tenidos en cuenta en la Práctica de Enseñanza, motivo de este estudio.
Nuestra concepción de reflexión está fundamentalmente basada en las perspectivas de Carr & Kemmis (1986), Clandinin & Connelly (1990), Freire (1997) y Zeichner & Liston (1999). Para los primeros la reflexión está dirigida a mejorar la racionalidad y comprensión de las prácticas pedagógicas, en el contexto en que ellas se desarrollan. Para los segundos el objetivo de la reflexión es la comprensión de los profesores sobre su conocimiento práctico personal, asociada al pasado, presente y futuro. Freire concibe la reflexión del profesor sobre su práctica pedagógica como un elemento articulador entre la teoría y la prática, superando la tendencia dicotómica, entre ellas, comúnmente presente en los cursos de formación inicial y, en general, de la formación continua de profesores. Y los últimos definen el profesor reflexivo como aquel que valoriza los orígenes, propósitos y consecuencias de su trabajo
El futuro profesor, a través de la dialéctica entre su ideario y su práctica, produce conocimientos y nuevas comprensiones sobre ella. Tomar ese conocimiento como objeto de reflexión y discusión permite tomar conciencia sobre el significado de tal conocimiento y de los cambios que está sufriendo, llegando, de esta forma, al desarrollo de los procesos metacognitivos.
La metacognición, según Santos (1997:20):

> *Involucra el conocimiento del individuo sobre su propio conocimiento. Eso ocurre cuando el individuo tiene conciencia y sabe lo que, de hecho, ya aprendió y ya domina con seguridad y facilidad, y cuando el individuo también está consciente sobre lo que todavía no aprendió y lo que siente dificultades. Es decir, cuando el individuo está desarrollando su metacognición él tiene conocimiento a nivel consciente de sus potencialidades y dificultades. Además, el individuo sabe usar su conocimiento de modo eficaz e intenta superar sus dificultades.*

Contribuir como profesores de profesores en la 'concientización' -por parte del licenciando- del ideario que el futuro profesor viene (re)constituyendo implica ayudarlo a abordar de forma consciente, informada y auto-dirigida sus propias creencias, concepciones, conocimientos y saberes. Con relación a este aspecto, Gunstone e Northfield (1994: 525) expresan: *"es el alumno o profesor alumno quien debe primero reconocer sus ideas y creencias relevantes, para evaluarlas en términos de lo que debe ser aprendido y como este aprendizaje debe ocurrir, y entonces decidir si reconstruye o no sus ideas y creencias"*. Para estos autores, el hecho de construir esa decisión informada y consciente es ser apropiadamente metacognitivo.
Veamos, entonces, algunos instrumentos de mediación trabajados durante la Práctica de Enseñanza en Matemática y que contribuyen al desarrollo de estos procesos reflexivos y metacognitivos.

[8] Estos términos están siendo entendidos a partir de Kopnin (1978) y Morin (1982, 1999), respectivamente.

Sobre los instrumentos de mediación

Los instrumentos de mediación que están siendo utilizando son:

1. **Autobiografías**: elaboradas por los formandos al comienzo de cada uno de los dos semestres de la Práctica de Enseñanza en Matemática. En ellas se recogen experiencias significativas y formativas que el futuro profesor ha "almacenado" antes de iniciar su Práctica de Enseñanza, y que influyen notoriamente en sus propias visiones como formandos y profesores de Matemáticas.
2. **Lectura, análisis y discusión de textos**: los cuales dan alguna sustentación teórica y conceptual para la reflexión y el desarrollo de la *práctica pedagógica significativa en Matemática*[9].
3. **Diarios reflexivos**: elaborados sistemáticamente durante/después de cada observación de clase o clase dada por el practicante. Con ellos se espera que el futuro profesor se involucre personalmente en un proceso de acción-reflexión, ya que, al escribirlo, él reconstruye la experiencia vivida, (re)evaluándola y estando atento a diversos hechos y características que inicialmente pudieron ser ignorados.
4. **Narrativas escritas y/u orales**: las cuales permiten la (re)construcción de los argumentos explicativos de los futuros profesores, con la intención de adquirir una profunda comprensión e interpretación de las experiencias narradas. Las narrativas escritas, particularmente, permiten examinar tanto el pensamiento como las acciones del profesor. Ellas se constituyen en un registro físico de los procesos mentales que posibilita intercambiar ideas o generar diálogos, tanto con otras personas como consigo mismo (Goldsmith & Schifter, 1997).
5. **Los mapas conceptuales**: definidos como una organización pictórica o una representación visual de un tema, los cuales deben presentar un concepto central, otros subconceptos, conexiones, ejemplos y características del asunto en cuestión (Novak & Gowin, 1988), liberando elementos cognitivos, intelectuales y emocionales. Durante el proceso de elaboración de los mapas conceptuales se ponen en evidencia conceptos, proposiciones, posiciones y puntos de vista. En este proceso se desarrollan constantemente nuevos significados y nuevas relaciones conceptuales. Los mapas deben estar siempre acompañados de textos narrativos (orales o escritos). Estos textos, de un lado, permiten que la estructura que represente el mapa conceptual se amplíe y remodele a través de la introducción de nuevas informaciones que van siendo recogidas durante la exposición del texto; finalizada la exposición, el mapa muestra una clara individualidad que permite diferenciar el sujeto, autor, de otros sujetos. De otro lado, pueden ser considerados como elementos fundamentales para la negociación de significados y de ideas, tanto de un sujeto consigo mismo como con otros sujetos. En nuestro caso, los formandos, realizan mapas conceptuales sobre su ideario pedagógico, sobre la formación que han recibido y sobre diferentes lecturas de artículos y textos.
6. **Análisis de episodios de clase**: a partir de episodios reales o ficticios expuestos en caricaturas, o publicados por profesores en ejercicio, o traídos por los propios formandos a partir de sus observaciones y su inmersión en la escuela donde realiza parte de su Práctica de Enseñanza. Estos episodios se constituyen en ejemplos prácticos de la realidad de la sala de clase y del contexto educativo. Ellos permiten que el formando vea la parte humana de la realidad educativa. Permiten que los futuros profesores piensen en

[9] Entendemos la práctica pedagógica significativa como el encuentro de diferentes manifestaciones que se dan en un espacio y en un tiempo, donde confluyen distintos sujetos, objetos y factores: profesor, alumno, currículo y contexto unidos a la componente **experiencia** (tanto del profesor como del alumno).

cómo actuarían en determinadas situaciones como docentes (descubriendo, de esa forma, algunas creencias y concepciones que lo inducirían a actuar de una u otra manera). Ayudan también a desarrollar capacidades argumentativas y deliberativas en los licenciandos a medida que se plantean preguntas, se buscan respuestas, se formulan nuevas preguntas, se toleran ambigüedades y se enfrentan situaciones en constante cambio, manteniendo una actitud atenta y abierta a la comprensión de tales situaciones (Arnaus, 1999).

A modo de ejemplo

Presentamos a continuación un episodio de clase (ficticio), analizado durante la Práctica de Enseñanza, y parte de la reflexión oral que Esperanza, una de las protagonistas de esta investigación, realizó:

Yo separé así, las cosas buenas y las cosas malas que yo encontré aquí. De las cosas buenas que yo encontré fue el comportamiento de ella... El comportamiento de ella de pedirle a la profesora permiso para ir al baño para poder desahogarse, para poder hacer escándalo, entre comillas, sin perjudicar la clase, sin perjudicar a los otros alumnos. También es bueno el comportamiento de la profesora, al permitir que el alumno, pensando que era muy urgente, fuese al baño. Porque existen profesores que dicen no, no va y se acabó...

De las cosas malas es que Mafalda no está entendiendo el tema y no lo dice, no conversa con la profesora ni con algún compañero de clase. Otra cosa mala es que la profesora ni sabe lo que está pasando con su alumno, pues aquí parece una relación de este tipo: **el alumno finge que aprende y el profesor finge que enseña...**

Y otro hecho que observé es sobre la falta de motivación para enseñar un tema matemático para el alumno, antes de enseñar el contenido, por ejemplo, hablar sobre la importancia del conenido mismo, sea él práctico o no, así el alumno podría saber porque es importante estar estudiando eso, como ella dijo aquí, de la forma que ella dijo en esta penúltima (refiriéndose a la caricatura). En el comienzo del último recuadro parece que la profesora no sirve para nada, entonces, por lo menos, que sirva para estar explicando la importancia de aquello y motivar un poco y así explicar el contenido...

Al analizar este episodio, Esperanza reflexiona sobre la práctica de enseñanza de Matemática y, de este modo, explicita y problematiza parte de su ideario pedagógico. Ella observa y se manifiesta sobre la relación alumno-profesor, sobre las relaciones alumno-conocimiento matemático y profesor-conocimiento matemático, sobre la triada alumno-matemática-profesor y discute, también, la gestión y la dinámica de la clase.

A modo de conclusiones

Tenemos indicios, a partir de nuestra investigación y de nuestra práctica docente como profesores de profesores de Matemáticas, que estos instrumentos de mediación contribuyen de manera significativa para la problematización y generación de un pensamiento consciente de los futuros profesores sobre su propio ideario acerca del conocimiento matemático, del aprendizaje, de la enseñanza y de la evaluación de la Matemática. Tales instrumentos permiten, también, que el futuro profesor entienda la relación (dialéctica y compleja) existente entre su propio ideario y su práctica pedagógica, así el futuro profesor de Matemática se constituye en "sujeto de conocimiento", es decir, se constituye en un individuo que constantemente está construyendo, produciendo y resignificando conocimientos a partir y para su propia práctica profesional.

Referencias bibliográficas

Arnaus, R. (1999). La formación del profesorado: un encuentro comprometido con la complejidad educativa. In: ANGULO R., J.F. & otros (edit.). *Desarrollo profesional del docente: política, investigación y práctica.* Madrid: Akal.

Carr, W. & Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza: la investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona, Martínez Roca.

Clandinin, J. & Connelly, M. (1990). "Stories of Experience and Narrative Inquiry". *Educational Researcher*. Vol. 19, No. 5, June-July, pp.2-14.

Fiorentini, D., Nacarato, A. M. & Pinto, R.A. (1999). Saberes da experiência docente em Matemática e educação continuada. *Quadrante: Revista Teórica e de Investigação*. Lisboa: APM. Vol. 8, números 1-2, pp.33-60.

Freire, P. (1997). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra.

Goldsmith, L. & Schifter, D. (1997). "Understanding Teachers in Transition: Characteristics of a Model for the Development of Mathematics Teaching. In: Fennema, E. & Nelson, B. (Ed.). *Mathematics Teachers in Transition.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publisher.

Gunstone, R. & Northfield, J. (1994). "Metacognition and Teaching to Learn". *International Journal of Science Education.* Vol.16 No. 5. pp. 523-536, September-October.

Kopnin, P.V.(1978). *A Diáletica como Lógica e Teoría do Conhecimento.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Morin, E. (1982). *Ciência com consciência.* Mem Martins: Publicações Europa-América.

Morin, E. (1999). *Complexidade e transdisciplinaridade: reforma da universidade e do ensino fundamental.* Tradução de Edgard de Assis Carvalho. Natal: EDUFRN.

Novak, J. & Gowin, B. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

Rodríguez, J. M. (1995). *Formación de profesores y prácticas de enseñanza: un estudio de caso.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Santos, V.M.P. (1997). *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: métodos alternativos.* Rio de Janeiro: UFRJ.

Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Ediciones Paidós.

Zeichner , K. & Liston, D. (1999). Enseñar a reflexionar a los futuros docentes. In: Angulo R., J.F. & otros (edit.). *Desarrollo profesional del docente: política, investigación y práctica*. Madrid: Akal.

Estrategias para la actualización docente de los profesores de la materia de Cálculo en el Nivel Superior de Educación

Luz María Minguer Allec
Instituto Tecnológico de Oaxaca. México
luzma16@hotmail.com

Resumen
El presente estudio trata la problemática de la Formación de Profesionales de la enseñanza de las matemáticas en el nivel superior de educación. Los profesores de matemáticas del nivel superior poseen en general una Cultura matemática construida y definida por el entorno familiar y sociocultural así como por sus vivencias escolares enmarcadas en las concepciones de la didáctica tradicional, que les impide identificar de forma clara la problemática de la enseñanza de las matemáticas con todas sus implicaciones y consecuentemente llegar a plantear acciones congruentes en su práctica docente.
Este estudio busca establecer en un primer tiempo, lo que es la Cultura Matemática de los Profesores del Instituto Tecnológico de Oaxaca y en un segundo momento, proporcionar al profesor de cálculo del nivel superior de educación, elementos para ampliar su Cultura matemática, de tal manera que ésta le permita fundamentar sus acciones en el proceso de comunicación de los conocimientos matemáticos, desde la perspectiva de la Matemática Educativa. La investigación se encuentra en curso y aún no cuenta con resultados finales.

Antecedentes

El Instituto Tecnológico de Oaxaca (ITO), perteneciente al Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos, tiene como principal vocación formar profesionistas técnicos que contribuyan al desarrollo tecnológico del País y ofrece las carreras de ingenierías: Industrial, Eléctrica, Electrónica, Química, Civil y Mecánica, así como las licenciaturas en administración e informática. En este contexto, la enseñanza de las matemáticas adquiere particular importancia ya que ésta será el instrumento que permitirá a los alumnos llegar a construir modelos matemáticos de su especialidad y acceder a la comprensión de otras materias que conforman sus planes de estudio.

En esta Institución como en la mayoría de las escuelas de educación superior y de otros niveles de educación, enfrentamos la problemática de la enseñanza de las matemáticas que se traduce en altos índices de deserción y de reprobación en materias en las que el lenguaje matemático es un requisito. En la búsqueda de soluciones a esta situación se han realizado cursos propedéuticos que cubran los contenidos que son requeridos para abordar nuevos conocimientos; se han propuesto modificaciones en los programas de estudio para depurarlos y de esta forma obtener el máximo provecho de los contenidos abordados; y se ofrecen de manera continua cursos de actualización profesional y docente a los profesores; sin embargo a pesar de los esfuerzos realizados no se han logrado abatir estos índices.

El Haber tenido un primer encuentro con la propuesta que hace la Matemática Educativa a través de un diplomado titulado “Introducción a la matemática educativa” ofrecido a los catedráticos del nivel superior de educación del estado de Oaxaca, me permitió vislumbrar una opción diferente para intentar dar solución a la problemática de la enseñanza de las matemáticas, desde una perspectiva congruente que engloba todos los aspectos que en ella intervienen. Esta nueva disciplina se concibe como: “La Ciencia que estudia para un campo particular (la matemática) los fenómenos de su enseñanza, las condiciones de la transmisión de la cultura propia de una institución (la científica) y las condiciones de adquisición de conocimientos del que aprende" (Cantoral, 1990).

Abordar la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de la Matemática Educativa, impone mirar de forma crítica y diferente a los actores que intervienen en este proceso, las instituciones, los saberes, el alumno, el maestro, los métodos. Una Práctica docente enmarcada en este contexto puede ofrecer fundamentos teórico-metodológicos que permitan al profesor realizar su actividad profesional de una manera congruente.

El objetivo fundamental de este estudio es, proporcionar al profesor de cálculo del nivel superior de educación, elementos para ampliar su Cultura matemática, de tal manera que ésta le permita fundamentar sus acciones en el proceso de comunicación de los conocimientos matemáticos, desde la perspectiva de la Matemática Educativa.

Me interesa que los maestros adquieran un bagaje de conocimientos que comprenda: contenidos matemáticos, estrategias didácticas y metodológicas, y temas diversos relacionados con la matemática educativa. Con el propósito de ampliar la cultura matemática con la que fundamentan su quehacer docente.

Definición del problema

La educación familiar, el medio social en el que nos desenvolvemos, la cultura propia de nuestro entorno, así como nuestras vivencias como alumnos en las materias de matemáticas es decir, nuestro pasado escolar, definen la labor docente que desempeñamos en general todos los profesores y van conformando una Cultura matemática que corresponderá a la historia de vidas de cada individuo.

En esa "Cultura matemática", está implícita la visión particular del mundo y su relación con La Matemática, que un individuo posee. Cuando decimos La Matemática nos referimos al panorama extenso que contempla todos los ámbitos en los que podemos encontrarla, desde un laboratorio científico, pasando por las matemáticas escolares, hasta las matemáticas utilitarias y cotidianas de la calle, es decir, lo que ese individuo entiende por La Matemática (¿ésta se crea o se descubre?, ¿los conceptos matemáticos son fijos? o ¿sufren cambios?, ¿que lugar ocupan las matemáticas que se aprenden en la calle? ¿se reconoce y se valora socialmente la labor de "hacer matemáticas" que toda persona efectúa cuando por necesidad obtiene un porcentaje o aplica una regla de tres simple en el curso de su vida cotidiana? Etc.); la manera como él concibe la enseñanza de las matemáticas, las respuestas que tiene a las siguientes preguntas: ¿la enseñanza de las matemáticas sólo se practica en el aula? ¿ se circunscribe únicamente al ámbito escolar?, en el aula, ¿es él el único responsable de conocer los temas matemáticos para poder transmitirlo a sus alumnos?, en el proceso de transmisión del conocimiento, ¿es él el único que "sabe" matemáticas? ¿la enseñanza de las matemáticas trata con conceptos y procedimientos que deben de memorizarse?, ¿cuál es el lugar que ocupa el trabajo en equipo y la discusión grupal en una clase de matemáticas?, ¿de que manera concibe él su profesión de enseñante de matemáticas con respecto a los demás profesores y a la sociedad misma?

El conocimiento, y el desconocimiento de las respuestas a estas y otras preguntas más, conforman, una parte de la Cultura matemática, misma que puede estar constituida con referentes que pertenecen a la didáctica tradicional o bien, definida en el marco conceptual de la matemática educativa .
La administración de la educación en México, como en la mayor parte de los países del mundo se ha desarrollado con una percepción de la enseñanza de las matemáticas fundamentada en los principios de la didáctica tradicional, de tal modo que esta corriente ha predominado en las Instituciones escolares y en la sociedad. En el Instituto Tecnológico de Oaxaca la Cultura matemática que subyace en las formas y actitudes de la administración, de los maestros y de los estudiantes es limitada e impide a las partes involucradas una visión crítica acerca de su propio desempeño. Por lo que identificamos el siguiente problema:
Los profesores de matemáticas del nivel superior poseen en general, una cultura matemática limitada definida en el marco de la didáctica tradicional, que no les permite identificar de forma clara la problemática de la enseñanza de las matemáticas con todas sus implicaciones y consecuentemente les impide llegar a plantear acciones congruentes en su práctica docente.

Justificación

Hasta ahora, todos los esfuerzos realizados para ofrecer una actualización docente y profesional a los profesores de matemáticas del nivel superior, se han visto enmarcados en la propuesta de la didáctica tradicional (enfoque clásico de la didáctica), pero ésta se ha revelado insuficiente para dar respuesta a numerosos fenómenos implicados directa o indirectamente en la enseñanza de las matemáticas.
Por esta razón, la didáctica tradicional ha tenido que evolucionar incluyendo en su problemática nuevos objetos de estudio que anteriormente habían sido considerados únicamente como herramientas para describir otros objetos de investigación, a esta nueva propuesta en México se le conoce como la Matemática Educativa.
La matemática educativa es el resultado de la evolución en los contenidos y en la forma, de la problemática que aborda la didáctica tradicional.

En el Instituto Tecnológico de Oaxaca, todos los esfuerzos realizados para la formación docente y profesional de nuestros catedráticos han sido espontáneos sin una planeación que responda de manera global a la problemática ya identificada entre los profesores y que habla de la necesidad de actualización e información en los aspectos de: contenidos matemáticos, estrategias didácticas y metodológicas, y fundamentos teóricos de la matemática. Por esta razón la implementación de estrategias para la actualización y formación docente tendientes a conformar una Cultura Matemática en nuestros profesores es altamente prioritaria.

Tomando en cuenta la importancia que reviste el hecho de que los profesores se actualicen y amplíen su Cultura Matemática para poder abordar de manera crítica su labor docente, consideramos que la disciplina de la Matemática Educativa constituye el referente teórico idóneo para enmarcar los programas de actualización docente de los profesores de matemáticas del nivel superior.

La realización de este trabajo puede aportar a la actualización de profesores del nivel superior de educación, una alternativa consistente en un paquete didáctico que comprenda los materiales para transmitir: las estrategias didácticas y metodológicas, los conocimientos matemáticos y los elementos teóricos de la Matemática educativa, para ampliar su Cultura matemática.

OBJETIVO :

Proporcionar al profesor de cálculo del nivel superior de educación, elementos teórico-metodológicos para ampliar su Cultura matemática, de tal manera que ésta le permita fundamentar sus acciones en el proceso de comunicación de los conocimientos matemáticos, desde la perspectiva de la matemática educativa.

HIPÓTESIS:

Los profesores cuya Cultura Matemática está conformada desde la perspectiva de la Matemática Educativa estarán en posibilidades de cuestionar su práctica docente actual.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN:

¿ Cuáles son las implicaciones que tiene el hecho de ampliar la Cultura matemática de los profesores en el marco de la Matemática Educativa?

MÉTODO:

El método planteado para este estudio, contempla los siguiente aspectos:

- ➢ Realización de un diagnóstico para conocer la Cultura matemática de los profesores en el nivel superior de educación, desde tres aspectos: contenidos matemáticos, estrategias didácticas y metodológicas utilizadas en el aula y concepciones relacionadas con: la matemática, la enseñanza de las matemáticas y el significado de aprender matemáticas
- Diseño de los instrumentos de medición para el diagnóstico
- Selección de la muestra.
- Aplicación de la encuesta
- Análisis de resultados.
- ➢ Diseño de un paquete didáctico, que comprenderá la definición y justificación de los contenidos del marco referencial que será propuesto a los catedráticos, así como de la selección apropiada de las situaciones didácticas para el aprendizaje de conceptos del cálculo.
- Selección de la muestra
- Puesta en escena: En el marco de un curso-taller (cuya duración está por definirse) en el que se creará un ***ambiente de aprendizaje*** propicio con: trabajo en equipos; discusiones grupales; interacción con situaciones adidácticas; intervenciones del maestro que se transforma en un ***monitor*** que guía el trabajo de los estudiantes e interviene solamente para desbloquear sin dar soluciones; rupturas constantes del Contrato didáctico.
- Análisis de resultados.

Esquema de fundamentos

Deseo estructurar el marco teórico de este trabajo, partiendo de la problemática de la formación docente que en la actualidad se encuentra definida en el marco de una época novedosa que impone nuevas funciones a la educación en general y a las instituciones escolares en particular, para enfrentar retos, problemas y situaciones que se van definiendo y conformando día con día, debido a la innovación tecnológica y al auge de los medios de comunicación en la función educativa; por lo mismo se requiere que la formación docente elabore estrategias que preparen al maestro para jugar un nuevo papel en el escenario de la educación. Abordaré aspectos como el significado de la Formación Docente de profesores de matemáticas en educación Superior, haciendo los cuestionamientos siguientes, ¿cuáles son sus objetivos?, ¿En que marco conceptual debe desarrollarse esa formación? ¿qué papel juega la utilización de modelos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en las aulas? ¿la formación docente y profesional de los profesores de cálculo debe estar vinculada a la práctica en clase de los principios teóricos y a la investigación con el propósito de mejorar su desempeño a partir de los nuevos conocimientos adquiridos y de la reflexión y observación constante sobre sí mismo? ¿qué significa actualización profesional?
Enseguida deseo abordar las teorías del aprendizaje, concretamente las teorías de la reestructuración ya que son éstas las que constituyen el referente teórico de las diferentes metodologías surgidas en Matemática Educativa, específicamente el diseño de las situaciones de instrucción en las que se busca la construcción de conocimientos científicos o matemáticos o de manera más general la comprensión de nuevos significados o destrezas.
Como parte central de este marco presentaré un planteamiento general de lo que es la disciplina de la Matemática Educativa, su desarrollo y conformación. Para continuar abordando uno a uno los aspectos que están involucrados en este estudio, como son: La teoría de las situaciones didácticas, los obstáculos epistemológicos, la transposición didáctica, la teoría de los campos conceptuales, y finalmente con estos elementos, definir a la Ingeniería Didáctica, y las estrategias de resolución de problemas.

CONTENIDO:

- Formación docente
- Teorías del aprendizaje
- La Matemática educativa (desarrollo y conformación)
    - Transposición didáctica
    - Teoría de los campos conceptuales
    - Teoría de las situaciones didácticas
    - Obstáculos epistemológicos
    - Ingeniería didáctica
    - Estrategias de resolución de problemas.

Conclusiones

El presente trabajo se encuentra en desarrollo y aún no se cuenta con resultados finales que se puedan compartir con la comunidad de Matemática Educativa. Sin embargo los resultados que se esperan obtener son: Comprobar que la ampliación de la Cultura Matemática en el marco conceptual de la Matemática Educativa es un elemento importante en la formación docente de los profesores de cálculo del Instituto Tecnológico de Oaxaca, a través de un material didáctico, teórico-metodológico que por su congruencia científica propicia la construcción de conocimientos matemáticos y aporta información teórica que fundamenta y permite conocer la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Brousseau,G. (1986). Fondements et Méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*..7 (2), 33-115

Brousseau,G. (1986). Le contrat didactique: le milieu. *Recherche en en didactique des mathématiques*, 9 (3), 309-336.

Cantoral R. (1990). Matemática educativa. (Ed.), *Serie: Antologías* (No.1). Área de educación Superior del DME-CINVESTAV-IPN. México.

Chevallard, I. (1997*). Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Edit. ICE-Horsori. Universidad de Barcelona.

Duady, R.(1995) *La Ingeniería didáctica en educación matemática: La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento.* México D. F: Edit. Ibero América.

Douady, R. (1986) Jeu de Cadre et Dialectique Outil-objet. *Recherche en en didactique des mathématiques*, 7 (2), 5-32.

Perrin-Glorian, M. (1994). *Vingt ans de didáctique des matemáriques en France. Hommage a Guy Brousseau et G. Vergnaud.* La penseé sauvage. Grenoble éditions.

La educación matemática en administración. Una aproximación al problema de sus estudios universitarios

Nelly Elizabeth González de Hernández
Universidad Central de Venezuela
gonzalne@yahoo.com

Resumen
¿Cuánta Matemática debemos enseñar para formar un profesional? Esta pregunta sale a relucir con frecuencia. El rigor del aprendizaje, el contenido de los programas, las aplicaciones o ejemplos que se deben utilizar en cada caso, son motivo de discusión entre los actores involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje en Matemática. La Escuela de Administración de la Universidad Central de Venezuela, UCV, discute desde hace 2 años un proceso de reestructuración, el cual pretende modificar la estructura curricular de las materias para graduar a un profesional dirigido al trabajo en una Gerencia moderna.
Este trabajo tiene como objetivo contribuir con esta discusión y al mismo tiempo advertir que lejos de simplificar la formación matemática del Administrador, debemos garantizar más allá de una formación técnica básica un elemento de formación de actitudes hacia el trabajo y el razonamiento científico.

Introducción

Cuando las instituciones educativas universitarias revisan el perfil del profesional que están formando, con la finalidad de atender las nuevas necesidades del mercado laboral, se debería experimentar un proceso controversial y por ende enriquecedor, pues la consulta, exploración y discusión involucraría a numerosos sectores e interesados.
La carrera de Administración en la Universidad Central de Venezuela (UCV), que se someterá a ese proceso de cambio y actualización, deberá, a nuestro juicio, corregir algunas características propias de esta disciplina en nuestro país: generalización de los conocimientos y poca profundidad en las herramientas básicas. Si bien es cierto que el papel fundamental de este profesional será el de actuar como un director de orquesta, sus bases deben ser sólidas y seguras para permitirle planificar, dirigir, controlar y corregir.
En el caso específico de la enseñanza de la Matemática en nuestra Escuela, se simplifican la teoría y los ejercicios tal y como lo recomiendan los Programas, evitando la demostración de teoremas y cualquier planteamiento que se pueda interpretar como exigente. En consecuencia nuestro egresado, si opta por la posibilidad de dar clases, escogerá otras materias y muy pocas veces Matemática porque se reconoce con limitaciones en su conocimiento. Esta situación provoca un círculo vicioso, los profesores de Matemática son ajenos a la carrera de Administración porque los ganadores de los concursos de oposición suelen ser matemáticos, ingenieros, estadísticos, entre otros, pero una vez que comienzan a dar clases se encuentran con que deben adaptarse a las simplificaciones que los materiales impresos y programas obligan. Paradójicamente se percibe con la presencia del profesor *importado* que la materia se dicta con un nivel de exigencia propio de otras disciplinas. Por otra parte los estudiantes ofrecen resistencia al estudio de las matemáticas[10] afirmando que no aceptan una formación *regularmente severa* porque supuestamente no la van a utilizar en la carrera y serán otros los profesionales que lidiarán con esas fórmulas y gráficos. Además, un obstáculo adicional lo constituye el material impreso para estudiar la materia, donde encontramos: Matemática para Economía, Matemática para

[10] Encuesta aplicada durante el segundo semestre 1998 y primer y segundo semestre 1999. Proyecto Análisis, Revisión y Posibles Mejoras al Proceso de Asesoramiento Académico en la EAC FACES UCV. Prof. Nelly de Hernández

Administración, Matemática para Ciencias Sociales, como si se tratase de diferentes materias. ¿La diferencia está en los ejemplos dirigidos a cada especialidad? No es cierto, la verdadera razón es que los textos dirigidos a estas disciplinas, en su mayoría, simplifican su contenido teórico a niveles, en algunos casos, extremos y convierten el material de estudio en una receta que el estudiante repite sin mayor convicción y con menos entendimiento.
Ésta es la actual situación de la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela, donde se está discutiendo desde hace 2 años, aproximadamente, la necesidad de desarrollar un proceso de reestructuración que la lleve a adecuar los contenidos programáticos de las materias que se dictan o a eliminar materias y sustituirlas por otras que contribuyan a formar un gerente para el nuevo milenio. Dicho de esa forma pareciera que la transformación nos llevará a interesantes ofertas y a unos resultados realmente favorables, pero en una primera propuesta los responsables de estas discusiones preliminares dibujan la posibilidad de dictar dos cursos de matemática en lugar de tres, como ocurre actualmente, con la inevitable consecuencia de eliminar algunos objetivos.
El propósito de esta investigación es establecer las necesidades de conocimiento matemático que los profesores de las distintas áreas de la Escuela de Administración requieren para desarrollar sus respectivos trabajos en el aula y comparar si sus opiniones coinciden con la información que se desprende del análisis de los distintos Programas. El contraste de estas dos opiniones nos permitirá orientar la discusión que nos llevará a colaborar para la reestructuración exitosa del pensum.

Método

La investigación se realizó en dos etapas: una primera donde se establecieron las necesidades implícitas en los programas de las distintas materias que conforman la carrera de Administración y otra, posterior, donde indagamos sobre las expectativas de los conocimientos matemáticos que los profesores esperan que los estudiantes conozcan para poder desarrollar el trabajo en el aula.

Etapa I. Necesidades de conocimiento matemático

Para alcanzar los objetivos de la Etapa I se cumplió con los pasos siguientes:

- Revisión de las necesidades de herramientas matemáticas que el estudiante de ciencias administrativas debe poseer. Esta revisión consistió en analizar los programas de las distintas materias se debe cursar para obtener la licenciatura. Cabe decir que aunque se modifiquen, se altere el orden en que se dictan, se amplíe o reduzca el número objetivos, siguen manteniendo siempre una estructura básica de los conocimientos que debe poseer un Administrador
- Agrupación de las materias en áreas de conocimiento para simplificar el análisis de resultados
- Consulta de la opinión de expertos para confirmar nuestra apreciación

Etapa II. Opinión del profesorado

Para alcanzar los objetivos de esta etapa se realizó una encuesta de opinión bajo los criterios siguientes:

Metodología:

- Entrevistas de profundidad
- El instrumento utilizado fue un cuestionario con preguntas cerradas y abiertas.

El número de preguntas fue de 5. El tiempo estimado para realizar la entrevista fue de 15 minutos

- El tipo de muestreo fue exhaustivo (censo). La población bajo estudio fue de 130 profesores
- Período de aplicación: segundo semestre lectivo del 2000

Variables de clasificación:

- Departamento donde se desempeña el docente

Resultados

En estos momentos podemos imaginar la formación del estudiante de Administración como una estructura en bloques, representados por cada uno de los Departamentos en los que se encuentra organizada la Escuela. Cada departamento, de acuerdo con la justificación de sus materias, tiene la siguiente función básica[11]:

Ciencias Administrativas: formará al estudiante para utilizar técnicas y herramientas que posibiliten la conducción y operación de las organizaciones; optimizado los recursos, dirigiendo eficientemente al personal, conociendo la estructura y funcionamiento del estado y de la administración pública venezolana así como del funcionamiento de las empresas privadas.

Ciencias Económicas y Sociales: cumple con la responsabilidad de formar al estudiante en aspectos básicos de su área de interés. A través de las cátedras de Metodología y Técnicas de Investigación deja sentada las bases para el trabajo investigativo durante la vida estudiantil, con la aplicación inmediata en el proceso de aprendizaje y posteriormente en la vida profesional cuando organice su trabajo.

Gracias a las cátedras de Economía, el Departamento informará sobre: los elementos básicos de teoría microeconómica y macroeconómica, la economía venezolana y sus relaciones con el exterior. En las cátedras de Historia se explicará la transformación que ha sufrido la sociedad a través del tiempo y la cátedra de Sociología enseña el estudio del trabajo organizado a partir del carácter social de las estructuras empresariales.

Las asignaturas de Geografía vinculan los conocimientos económicos de producción del país con la localización física de esas unidades productivas, así como de las características agrícolas, pecuarias, hidráulicas, forestales, industriales, mineras y energéticas de Venezuela.

Ciencias Jurídicas: define e instruye sobre los conceptos legales y éticos que tiene en la actualidad la sociedad con respecto a la propiedad y otros derechos, informa sobre la realidad empresarial del país y su regulación.

Contabilidad: Durante los primeros 4 semestres de la carrera ofrece el estudio de la contabilidad financiera con la finalidad de suministrar las herramientas para que el administrador realice la custodia y el control de los bienes de cualquier sistema económico.

Estadística y Matemática: dado que el conocimiento matemático está estrechamente vinculado con el método científico que siguen las disciplinas del quehacer humano y que en nuestro mundo real todos los procesos, físicos, químicos, económicos, sociales, entre otros, pueden ser representados mediante modelos matemáticos, se enseñan al futuro profesional los conocimientos sobre teoría de funciones, cálculo diferencial e integral y álgebra de matrices,

---

[11] Esta información se encuentra detallada en el Plan de Estudio del Ciclo Básico y de la Especialización en Administración EAC FACES UCV. Publicaciones de la Coordinación Administrativa año 2000

enfatizando sus aplicaciones específicas a situaciones de índole económica. Por otra parte, la Estadística es una de las ramas de mayor incidencia en estos tiempos, pues interviene en forma acentuada en las investigaciones y/o métodos científicos a través de la experimentación y la observación.
Ahora bien, estas funciones de los distintos bloques, descritos a muy grandes rasgos, se mantendrán una vez realizada la reestructuración[12]. Se mantiene el criterio de dar un fundamento socioeconómico al futuro administrador, respaldado por el estudio de su entorno desde una perspectiva histórica y geográfica. Se mantiene la necesidad del conocimiento contable y legal. Por supuesto el tema de las Ciencias Administrativas se profundiza y expande y finalmente se mantiene la propuesta de dar formación en Matemática y Estadística, sólo que en la primera se sacrifica el número de horas de clase y en consecuencia se debe mutilar el contenido de los actuales programas. ¿Cuáles contenidos serán eliminados? No se especifican, se deja a los *expertos* la decisión milagrosa de cumplir con esta etapa importante de la formación, con un menor contendido pero dotando al alumno de los conocimientos que necesitará a lo largo de sus estudios.
Se agruparon las necesidades de conocimiento de Matemática de cada uno de los bloques de información que actualmente se imparten y que se mantendrán en un futuro y quedaron establecidas de manera resumida como lo presentamos a continuación:

El bloque Ciencias Administrativas registra la siguiente necesidad de herramientas matemáticas de acuerdo con los contenidos programáticos de las distintas materias que en él se dictan[13]:

- Representar la realidad con modelos matemáticos para simular situaciones de la empresa y estudiar restricciones
- Calcular puntos de equilibrio
- Realizar proyecciones
- Calcular condiciones óptimas

El Bloque de Ciencias Económicas y Sociales requiere definir e interpretar:

- Indicadores, Variables
- Funciones y Gráficos
- Valores marginales y elasticidad de funciones

El Bloque de materias de Contabilidad exige la siguiente formación:

- Identificar ecuaciones
- Analizar resultados de las diversas transacciones que ocurren en empresas comerciales
- Realizar cálculos financieros

El Bloque de Ciencias Jurídicas requiere de información matemática para describir los cálculos en forma de procesos y ecuaciones (algoritmos y fórmulas) para determinar:

- Salarios, recargos, remuneraciones del descanso, bonos, prestaciones, interés, régimen transitorio, indemnización por despidos o retiros, cuotas sindicales
- Ingreso público, ingresos tributarios, impuestos, contribuciones especiales

Una vez que establecemos las necesidades de cada bloque, verificamos si los contenidos

[12] Anteproyecto de reestructuración de la Escuela de Administración. Prof. Oscar Bastidas. Julio 2000
[13] Otras herramientas pueden ser requeridas pero nos limitamos a citar aquellos textos de los programas donde se hace una clara y directa referencia de situaciones de estudio que exigen un proceso de cálculo e interpretación matemática

actuales permiten al estudiante responder a ese conjunto de exigencias y consideramos que teóricamente están dadas las condiciones pues Matemática I ofrece el piso de la formación que requiere el estudiante en Matemática II ya que le instruye en Teoría de Conjuntos, Relaciones y Funciones. En un segundo semestre el estudiante recibe la instrucción para desempeñarse en el cálculo diferencial y en Matemática III trabaja con Funciones de Varias Variables, Matrices y Cálculo Integral.
Ahora bien, una situación es que teóricamente las necesidades y su satisfacción estén plasmadas en los programas académicos y otra que los docentes reconozcan que las condiciones están dadas para utilizar en sus respectivas materias este instrumental. Para verificar esta situación abordamos la segunda etapa del estudio encontrando los resultados siguientes:
Sólo una tercera parte de los profesores respondieron la encuesta. La distribución de los entrevistados por Departamento fue la siguiente: 25% pertenecen al Departamento de Ciencias Administrativas, 25% al Departamento de Ciencias Económicas, 38% al Departamento de Contabilidad y 12% al Departamento de Ciencias Jurídicas.
Estos entrevistados señalan:
Los docentes del Departamento de Ciencias Jurídicas consideran que sus materias son estrictamente teóricas y que no necesitan de ningún apoyo matemático.
Los entrevistados del Departamento de Ciencias Económicas en un 100% hablan de la necesidad del concepto de función y de derivada; llama la atención que 2 profesores de la materia Teoría Económica, defensores de la afirmación anterior, de cualquier manera no pueden utilizar cálculo diferencial en sus exposiciones pues esta materia se encuentra en el primer semestre, momento en el cual todavía el alumno no sabe derivar.
Los docentes del Departamento de Ciencias Administrativas dividen sus opiniones, aunque en mayoría reconocen la importancia de la materia en el programa de formación, un 60% aproximadamente nos exige una estricta enseñanza de la construcción de curvas y su interpretación mientras que el 40% indica indispensables el análisis de datos para los trabajos de investigación que parecen ser una estrategia frecuente en este departamento.
Finalmente los profesores de Contabilidad nos hablan de la necesidad de estimular la destreza en resolver operaciones aritméticas pero sin citar con precisión objetivos contenidos en la Matemática que dictamos.

Discusión

La Matemática surge por una necesidad de la vida cotidiana y se ha convertido en un inmenso sistema de variadas y extensas disciplinas. Como las demás ciencias, refleja las leyes del mundo que nos rodea y sirve de potente instrumento para el conocimiento y dominio de la naturaleza. Ciertos rasgos característicos de la matemática son su abstracción, su precisión, su rigor lógico, el carácter irrefutable de sus conclusiones y finalmente, el campo excepcionalmente amplio de sus aplicaciones.
Por otra parte el desempeño de una gerencia exige la recolección e interpretación de datos, la construcción y experimentación con modelos matemáticos, predicción sobre operaciones futuras y la presentación de recomendaciones con justificaciones sobre su factibilidad. La toma de decisiones es una responsabilidad gerencial clave. El proceso se inicia cuando un gerente observa un problema. Quizá inconscientemente el gerente primero define el problema y después formula el objetivo, reconoce las restricciones y evalúa las alternativas. Después selecciona el curso de acción aparentemente *mejor* (aquel que nos llevará a la solución óptima). Este proceso de análisis es formal

o informal y toma dos formas básicas: cualitativo y cuantitativo. Las habilidades en análisis cualitativo son inherentes en el gerente y generalmente aumentan con la experiencia. Las habilidades en análisis cuantitativo se pueden adquirir por el estudio de las *herramientas* matemáticas, al usarlas puede maximizar su efectividad en la toma de decisiones, puede comparar y combinar la información cualitativa y cuantitativa y así tomar las mejores decisiones posibles.
Pareciera entonces que Matemática y Administración son materias inseparables y si aún no estuviésemos convencidos bastaría con pasearnos por las siguientes ideas:

- El presupuesto del próximo año es un modelo de cuánto se puede gastar
- La descripción de una meta es un modelo de lo que se debe lograr en un período
- El estado de ingresos es un modelo del funcionamiento de una compañía

Las herramientas que nos proporciona la matemática nos permiten llegar a soluciones de problemas más complejos que no pudiesen resolverse con otros enfoques. Con un análisis de sensibilidad podemos alterar los datos de entrada y observar lo que ocurre a los resultados, podemos determinar cuáles son los factores más importantes sobre un período con condiciones variables. Los conceptos de probabilidad para enfrentar ambientes inciertos, los pronósticos, la toma de decisión, los modelos de inventario, la evaluación de alternativas, la combinación y asignación óptima de recursos, la simulación de situaciones, la teoría de colas y la teoría de redes son algunas de las técnicas que un gerente debe conocer y aplicar, y para ello es indispensable el conocimiento de algunas *herramientas* matemáticas.
Si la información y formación sobre Matemática no se convierte en un objetivo de extrema importancia en la carrera de Administración estaremos preparando profesionales con serias limitaciones para el ejercicio eficiente de su profesión y sin mayores opciones para continuar su proceso de desarrollo intelectual con estudios de postgrado. Esta preocupación debe alimentarse principalmente en el grupo de docentes que hoy son responsables de dirigir los procesos de actualización en la Universidad para que guíen hacia una sólida instrucción en todas las áreas, con una clara concepción de las ventajas de sentar bases sólidas en el conocimiento matemático: la llave para abrir numerosas puertas.

Referencias bibliográficas

Aleksandrov, A. Kolmogorov A. y otros. (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Editorial.
Bockelmann, F. (1995). *Formación y Funciones Sociales de la Opinión Pública.* Ediciones Gili, S.A.
Chevallard, I. (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Universidad de Barcelona: Editorial ICE- Horsori.
EAC FACES UCV. (2000). *Programas del Ciclo Básico y Profesional*. Publicaciones EAC.
Levin, R. Kirkpatrick, Ch. (1985). *Enfoques cuantitativos a la Administración*. México: Compañía Editorial S.A.
Resnick, L. (1990). *La enseñanza de la Matemática y su fundamento psicológico*. Barcelona: Editorial Paidós.

Métodos y técnicas participativas, con aplicaciones matemáticas y un interesante juego algebraico

Graciela Clyde Abraham *, Berta Josefa Chahar**, Hilda María Motok*, Mabel C. Rodríguez Anido*, Marta del Valle Zamora**
* Fac. Regional Tucuman. Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
** Facultad de Bioquímica y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
marzam@infovia.com.ar mranido@hotmail.com

Resumen
El objetivo de este trabajo es ofrecer una alternativa didáctica tendiente a incorporar métodos más dinámicos y eficientes de enseñanza y aprendizaje, como también divulgar y mostrar la factibilidad de la implementación de los Métodos y Técnicas Participativas en la Matemática de Nivel Superior. Propuestas de este tipo aplicadas en distintas asignaturas, en este caso Álgebra y Geometría Analítica de 1^er^ año, enriquecen el proceso de enseñanza y aprendizaje: facilitando el trabajo grupal, la asimilación de conocimientos y la solución creativa de problemas. Esta metodología se aplicó en un taller, que se desarrolló en dos momentos: el primero teórico práctico y el segundo sólo práctico, ambos respaldados por un marco teórico. Los objetivos propuestos fueron logrados La evaluación del taller arroja como resultados positivos un alto grado de aceptación de los métodos y técnicas participativas, en particular la técnica de la rejilla y el laberinto de acción.

Marco cognoscitivo básico

La Escuela Nueva nace a fines del siglo pasado y con ella comienza a revertirse el esquema tradicional del proceso docente. Aparecen nuevos métodos que apelan al aprendizaje grupal y ubican paulatinamente al alumno en un rol protagónico y racional . En estas últimas décadas y en todos los niveles educativos, cobraron importancia los **Métodos y Técnicas Participativas,** que tienen como base el trabajo conjunto y que presentan variadas y novedosas formas que enriquecen el proceso de enseñanza y aprendizaje. Estos métodos son presentados mediante una explicación de los conceptos teóricos, mencionando algunas aplicaciones ya realizadas en Matemática. En esta síntesis teórica, se aplica la **Conversación heurística,** ventajas, desventajas y posibilidades de aplicación de éstas técnicas.

Dado que los métodos y técnicas participativas se basan en el trabajo grupal se enuncian las siguientes **REGLAS BÁSICAS PARA LA DISCUSIÓN GRUPAL:**

1- Cada participante es responsable del desarrollo exitoso de la reunión.
2- Evite conversaciones particulares que perturben o retarden la reunión.
3- No tema expresar sus ideas, preguntas u opiniones.
4- No sea crítico ni sarcástico, evite conflictos personales y mantenga una actitud amistosa y de apoyo.
5- Escuche con atención y respete el punto de vista de los demás.
6- Exprese con claridad y precisión sus ideas y no subestime las de los demás.
7- No sature la reunión con intervenciones reiteradas que no aportan ideas nuevas.
8- No grite ni gesticule, ni trate de imponerse a los demás; la fuerza de su opinión está en la calidad de su contenido.
9- Pida la palabra, no interrumpa al que está hablando.
10- No abandone anticipadamente la reunión.

La aplicación a la enseñanza de los Métodos y Técnicas Participativas no garantizan, por sí mismas, el éxito del proceso docente, sino que es necesario efectuar una correcta selección y la aplicación frecuente de los mismos.

En el cuadro, se muestra la contribución de los distintos **Métodos y Técnicas Participativas** y la incidencia de cada grupo en el proceso de enseñanza y aprendizaje:

Clasificación de métodos y técnicas participativas

FACILITAN EL TRABAJO EN GRUPO		Presentación Presentación por parejas Baile de presentación Los refranes Encuadre Abanico de roles Juego cara a cara Reformulación Presentación subjetiva Riesgo Escribir tres palabras.
PROPICIAN LA ASIMILACIÓN DE CONOCIMIENTOS	MÉTODOS DE DISCUSIÓN	Discusión plenaria Discusión en pequeños grupos Phillips 66 Discusión reiterada Discusión confrontación Mesa redonda Discusión panel
	MÉTODOS DE SITUACIONES	Casos (situación, conflicto, familiarización progresiva con el caso) Incidentes (sencillo, programado simple y complejo, laberinto de acción)
	MÉTODOS PROBLÉMICOS	Exposición problémica Conversación heurística Búsqueda parcial Método investigativo
	OTROS MÉTODOS	Juego de roles Simulación Técnica de la rejilla Concordar – discordar Palabras claves Aprendizaje en parejas
AYUDAN A LA SOLUCIÓN CREATIVA DE PROBLEMAS		Grupos Nominales Tormenta de cerebros o lluvia de ideas ó torbellino de ideas Sinestesia o sinéctica Anti-éxito
	TÉCNICAS de DE BONO	P. N. I. (positivo, negativo, interesante) C. T. F. (considere todos los factores) C. y S. (consecuencias y secuelas) P. b. (prioridades básicas) O.P.V. (otros puntos de vista)

❖ **APLICACIÓNES PRÁCTICAS PARA LA 1ª SESIÓN**

1º) ***Lluvia o torbellino de ideas***: Se usa esta técnica para detectar la predisposición de los participantes hacia estos nuevos métodos. Consta de cuatro etapas: preparación, calentamiento, generación de ideas y evaluación.

a) ***Preparación:*** se propone la pregunta: *"¿Porqué considera que puede resultar interesante el uso de Métodos y Técnicas Participativas en la enseñanza de la Matemática?"*.

b) ***Calentamiento*:** los participantes intercambian ideas.

c) ***Generación de ideas:*** se registran las que proponen los participantes en ronda.

d) ***Evaluación:*** se valoran las ideas producidas, por votación de los presentes, se seleccionan las ideas más valiosas y se eliminan las de poca relevancia; la lista resultante se pone a consideración del grupo para su aceptación o para posibles modificaciones.

2º) ***Discusión en Pequeños Grupos****:* Esta técnica posibilita un debate amplio del problema donde todos tienen la posibilidad de participar varias veces, siendo escuchados por el resto del grupo. Para concluir y evaluar, se realiza una **Sesión Plenaria,** en la cual cada grupo expone sus resultados y el docente resume lo actuado.

El objetivo es incentivar en los estudiantes el desarrollo de estrategias de solución y habilidades de pensamiento, para que comprendan el problema, identifiquen las incógnitas y transfieran situaciones de la vida real a sistemas de ecuaciones lineales. Los grupos analizan y resuelven el problema propuesto para esta técnica**:**

Se dan tres aleaciones de plata, cobre y oro con la siguiente composición:

	PLATA	COBRE	ORO
1º	5%	15º	80%
2º	10%	25%	65%
3º	15%	30%	55%

¿Cuántos gramos se han de tomar de cada una para obtener 20 gr. de una nueva aleación que contenga 12% de plata, 26% de cobre, 62% de oro?

Resolución.:Con la guía del profesor se pretende que los estudiantes desglosen el problema, discutan probables alternativas de solución para llegar a resolverlo de la siguiente manera:

1-Se identifican las incógnitas : Se llama x = gr. de la 1° aleación ; y = gr. de la 2° aleación; z = gr. de la 3° aleación. Se escribe la condición x + y + z =20

2- Se determina qué operaciones hay que realizar. En la nueva aleación debe haber:

12 x 20/100= 2,4 gr. de plata

26 x 20/100= 5,2 gr. de plata

62 x 20/100= 12,4 gr. de plata

En x gr. de la 1° aleación se encuentra 5 x/100 gr. de plata, 15 x/100 gr. de cobre y 80 x/100 gr. de oro. En y ir de la 2° aleación se encuentra 10 y/100 gr. de plata, 25 y/100 gr. de cobre y 65 x/100 gr. de oro. En z gr. de la 3° aleación se encuentra 15 z/100 gr. de plata, 30 z/100 gr. de cobre y 55 z/100 gr. de oro.

3- Se escribe el sistema

$$\begin{cases} 5x/100 + 10y/100 + 15z/100 = 2{,}4 \\ 15x/100 + 25y/100 + 30z/100 = 5{,}2 \\ 80x/100 + 65y/100 + 55z/100 = 12{,}4 \end{cases}$$

Que una vez transformado queda

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 48 \\ 3x + 5y + 6z = 104 \\ 16x + 13y + 11z = 248 \end{cases}$$

Resuelto por eliminación de Gauss conduce a las soluciones x = 4, y = 4, z = 12.

4- Se verifica que los resultados obtenidos son correctos y se interpreta la solución.
La nueva aleación tiene 4 gr. de la 1° aleación, 4 gr. de la 2° aleación y 12 gr. de la 3° aleación, de tal modo que se obtiene 4 + 4 + 12 = 20 gr. de la nueva aleación.
En la *Sesión Plenaria*, después de hacer la puesta en común de los resultados, los estudiantes manifiestan la aceptación de esta forma de trabajo.
3º) *Técnica de la rejilla*: Se utiliza esta técnica para que los estudiantes ejerciten el razonamiento en la teoría y en las aplicaciones prácticas; permite manejar una considerable cantidad de información en poco tiempo. Todas las propuestas prácticas deben tener el mismo grado de complejidad, a fin de tratar que los alumnos trabajen y asimilen a igual nivel.
Esta técnica consta de tres etapas: en la 1ª (estimada en 20 min.), se organizan los cinco equipos horizontalmente; cada equipo realiza un problema diferente; en la 2ª etapa (estimada en 30 min.), se forman los equipos verticalmente, de modo que cada uno realice los cinco ejercicios, y cada estudiante explicará al resto del grupo lo que hizo en la 1ª etapa. En la 3ª etapa (estimada en 10 min.), se selecciona aleatoriamente un equipo para exponer en el **Plenario**, efectuándose las correcciones que sean necesarias.
El siguiente cuadro matricial (rejilla), ilustra la formación de los equipos:

EQUIPOS	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
I	1 26	2	3	4	5
II	6	7 27	8	9	10
III	11	12	13 28	14	15
IV	16	17	18	19	20
V	21	22	23	24	25

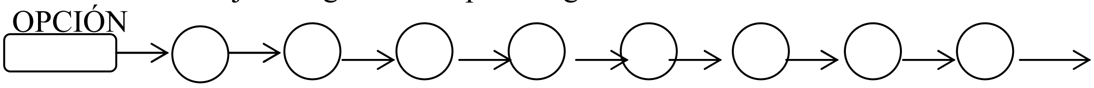
❖ **2ª sesión del taller**

Comienza con un breve repaso de la teoría. A continuación se trabaja con el **Método de Situaciones:** Incidente Programado Complejo (Laberinto de acción).
Laberinto de acción: Esta técnica se aplica generalmente al finalizar un tema y el objetivo es afianzar los conocimientos en una forma entretenida y atractiva. Consiste en presentar una situación con varias alternativas de solución, donde la alternativa seleccionada conduzca obligatoriamente a otra situación, en la que se explica qué ocurrió al tomar esa decisión y presenta nuevas alternativas para decidir. El proceso sigue hasta llegar al fin del laberinto, que dará o no solución a la situación planteada.
En este trabajo se presenta una situación problemática sobre el tema Sistema de Ecuaciones Lineales.
HOJA DE INSTRUCCIONES: Leer atentamente esta hoja antes de iniciar el trabajo.
Problema
En un partido del mundial de fútbol Francia'98, a estadio completo, se recaudaron $ 2.900.000 entre plateas y populares. Las populares exceden en 5.000 al doble de las plateas, y éstas representan la mitad de aquellas disminuida en 2.500. Calcular cuántos espectadores hay en cada categoría. Para su información, en el anexo 1 se adjuntan dos entradas al estadio. **Opciones** :¿Cuál de las dos opciones que se consignan a continuación, piensan Ustedes que resuelve el problema?
1ra Opción: Ustedes plantean un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.
2da Opción: Ustedes plantean un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
Si Ustedes eligen la primera opción, busquen las tarjetas **2** ó **5**.

Si Ustedes eligen la segunda opción, busquen las tarjetas **1** ó **3** ó **4**.

Instrucciones para la resolución

a) Analizar el problema propuesto y plantear el sistema correspondiente.
b) Elegir una de las dos opciones propuestas.
c) Dibujar círculos para anotar la opción inicial (en el primero de ellos) y luego, el número de cada tarjeta elegida en los pasos siguientes.



d) Seguir las indicaciones de las tarjetas hasta el fin del laberinto ó hasta llegar a una instrucción terminal de replanteo, ó hasta que se agote el tiempo (determinado por el profesor) destinado a resolver el problema.
e) Conservar el trabajo hasta la realización de una reunión plenaria, donde se analizarán las líneas obtenidas por cada grupo.

Al finalizar la tarea, se aclara el proceso seguido en las líneas indicadas en el laberinto. El **Anexo 2** reproduce dicho esquema , con dos ejemplos de líneas resueltas.
La línea de la izquierda no conduce a la solución, se llega a un punto de replanteo; la línea de la derecha lleva a la solución, con el menor número de pasos.
Las tarjetas correspondientes a la *línea de la izquierda*, llevan las siguientes consignas:

Tarjeta 2: Si plantearon el sistema: $\begin{cases} x - 2y = 5\,000 \\ y - \frac{1}{2}x = -2\,500 \\ 40x + 100y = 2\,900\,000 \end{cases}$

Busquen la tarjeta **6** ó la **10**.

Tarjeta 10: Analicen su sistema por Rouché - Frobenius. Según sus conclusiones busquen la tarjeta **11** ó la **15**.

Tarjeta 11: De sus análisis no pueden sacar conclusiones. Busquen la tarjeta **13**.

Tarjeta 13: Ustedes eligieron opciones falsas. Replanteen sus procedimientos.

Para la línea de la derecha:

Tarjeta 1: Si plantearon el sistema: $\begin{cases} x - 2y = 5\,000 \\ 40x + 100y = 2\,900\,000 \end{cases}$

Busquen la tarjeta **7** ó **9**.

Tarjeta 9: Analicen usando la matriz inversa de la matriz del sistema. Según sus conclusiones busquen la tarjeta **16** ó la **24**.

Tarjeta 24: Resuelvan con la matriz inversa y busquen la tarjeta **14** ó la **22**.

Tarjeta 14: La solución es x = 35 000, y = 15 000. Llegaron a la solución correcta.

Conclusiones

Al finalizar este taller se implementó una de las técnicas participativas de De Bono llamada P.N.I. mediante la cual los participantes indicaron los aspectos positivos, negativos e interesantes de la propuesta que permitió evaluar el grado de aceptación de la misma. Entre los aspectos positivos mencionaron la variedad de técnicas para la resolución de problemas, la novedad de los métodos y la importancia de que existan docentes universitarios con formación en Didáctica de la Matemática. Como criticas negativas manifestaron la confusa redacción de las tarjetas del laberinto y la participación indisciplinada de los asistentes. La aplicación de la Técnica de la Rejilla y el Laberinto de Acción sobresalieron como los aspectos más interesantes.

La planificación y realización de este Taller ha significado estudio, esfuerzo e imaginación, pero por sobre todo, la satisfacción de haber concretado un trabajo coherente, creativo y que brinda un significativo logro docente, más allá de las modificaciones sugeridas por los talleristas.

Referencias bibliográficas

Castellanos, A. V.(1988). *Rol del docente-coordinador de grupo y Comunicación en el grupo.* Cuba :CEPES Universidad de la Habana.

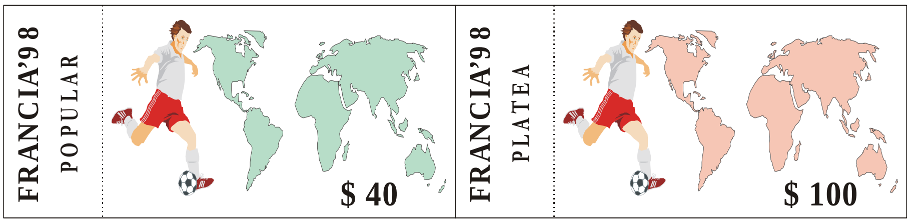
Di Caro, H.(1995). *Álgebra y Geometría Analítica*. Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional.

Grossman, S. I.(1998). *Algebra Lineal*. México: Mc. Graw Hill Interamericana S.A.

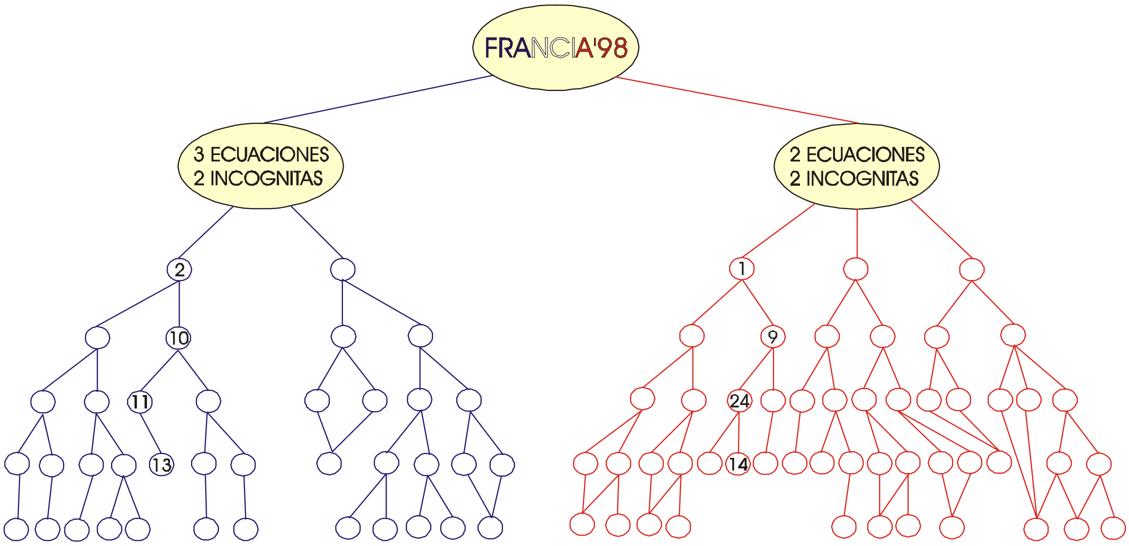
.Ojalvo, V., Castellanos, A. V.(1991). *El trabajo en grupos en la educación*. CEPES. Universidad de la Habana. Cuba.

Vargas, P., Bustillos, G.(1992). *Técnicas participativas para la educación popular*. Buenos Aires: Editorial Humanitas.

ANEXO 1



ANEXO 2



Educación a Distancia

Nivel Superior

Investigación en educación a distancia. Un acercamiento sistémico

Gisela Montiel Espinosa, Rosa María Farfán Márquez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. IPN. México
gmontiel@mail.cinvestav.mx rfarfan@mail.cinvestav.mx

Resumen
Actualmente es posible utilizar la tecnología interactiva de la información para ofrecer educación a distancia y con ello atender a un mayor número de usuarios. Empero, como detallaremos adelante, la investigación al respecto es escasa por lo que es de fundamental importancia desarrollar investigación a fin de sustentar los proyectos que impulsarán los diversos sistemas educativos usando esta modalidad de educación a distancia. Esta investigación inicia una línea de investigación en Educación a Distancia por lo que una tarea necesaria es la de realizar un estado del arte que nos permita conocer el nacimiento, desarrollo, avances y resultados de esta disciplina en el marco del aprendizaje de las matemáticas. El presente artículo pretende cubrir esta primer tarea, a fin de establecer la base de nuestra investigación.

Presentación

Esencialmente, en nuestra disciplina, encontramos en la educación a distancia un medio para hacer llegar a los profesionistas preocupados por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, formación a nivel de posgrado. Como disciplina científica y movimiento social, la Matemática Educativa ha construido y utilizado fundamentos teóricos con base a los fenómenos acaecidos en el aula presencial, por lo que una pregunta pertinente de inicio sería: ¿qué pasa ahora con dichos fundamentos teóricos en un escenario de educación a distancia? La respuesta no es sencilla e inmediata, requiere de investigación sistemática que logre caracterizar los nuevos escenarios y mostrar evidencias que refuercen o modifiquen nuestras categorías teóricas.
Dentro del grupo de investigación del área de educación superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, nos planteamos investigar específicamente sobre las posibles categorías invariantes de una teoría que aborda el estudio sistémico de las interacciones alumno-profesor-saber al seno del salón de clase, a saber, la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997). En nuestra opinión, hacer investigación presupone conocer el campo de acción, conocer las investigaciones hechas alrededor del fenómeno elegido para nuestro estudio, a fin de hacer un uso adecuado de sus datos y resultados, además consideramos que trabajos como éste, inicia una línea de investigación en Educación a Distancia por lo que una tarea necesaria es la de realizar un estado del arte que nos permita conocer el nacimiento, desarrollo, avances y resultados de esta disciplina en el marco del aprendizaje de las matemáticas.

Definiendo a la Educación a Distancia

Para la Asociación de Aprendizaje a Distancia de los Estados Unidos (USDLA, por sus iniciales en inglés) el aprendizaje a distancia es la adquisición de conocimiento y de habilidades a través de medios de información e instrucción, utilizando la tecnología apropiada. La educación a distancia sería entonces el proceso que involucra ese aprendizaje y la instrucción que lo permita. La modalidad a distancia se ha desarrollado gracias a las prácticas educativas que han buscado la masificación a través del uso de las tecnologías creadas en todos los tiempos, desde la imprenta, la televisión, la radio y ahora la tecnología interactiva de comunicación. Es con la práctica y el uso de esta tecnología que surge la necesidad de encontrar elementos teóricos que sustenten los fenómenos de enseñanza y aprendizaje propios de la educación a distancia. Así, surgen distintas aproximaciones que estudian a detalle ciertas características distintivas de la educación a distancia, como lo son la separación física entre instructor y estudiante o el uso indispensable de la tecnología.

Investigación en educación distancia

La investigación se ha desarrollado principalmente en dos vertientes, la investigación teórica y la investigación descriptiva. Ambas han sido significativas en la formación de la educación a distancia como campo específico de investigación; una va de la mano con la otra. La investigación teórica se ha inclinado hacia los estudios que analizan impactos psicológicos y sociales que provoca la distancia y el uso de tecnología, así como hacia el estudio de las relaciones que se desarrollan entre los participantes de un curso. Estas investigaciones han logrado resaltar algunos elementos y fenómenos propios de la educación a distancia.
Por otra parte la investigación descriptiva centra su atención en lo referente al diseño instruccional, es decir, análisis, diseño, implementación, evaluación y costo de proyectos a distancia, donde un eje principal ha sido el uso de tecnología y la tecnología misma. Estos estudios dejan ver un ciclo de desarrollo instruccional (Fig. 1), capaz de proporcionar una infraestructura y un proceso de planeación sistemática para el desarrollo y adaptación de sus programas basados en las necesidades del alumno y los requerimientos del contenido.

Fig. 1
Ciclo de desarrollo Instruccional

En la etapa de **Diseño** se deben determinar las necesidades intruccionales, analizar las características personales, culturales y educativas de la audiencia, y establecer las metas y objetivos del diseño instruccional basados en los requerimientos y características del estudiante.
En la fase de **Desarrollo** se plantea un perfil del contenido temático, una revisión de los materiales, que no pueden ser una simple transposición de los usados en la clase presencial, se organiza y desarrolla el contenido contextualizándolo a las necesidades del alumno y se seleccionan los materiales y métodos de instrucción
La **Evaluación** tiene como finalidad revisar si los materiales y métodos cumplen con las metas y objetivos, desarrollar estrategias de evaluación formativa, cualitativa o cuantitativa y recolectar y analizar datos de dicha evaluación.
Por último, como resultado de la evaluación se hace una **Revisión** cuyo objetivo es la reestructuración del diseño.
Si analizamos cuidadosamente el proceso descrito, este ciclo puede utilizarse para cualquier práctica educativa en cualquier escenario, sin embargo, es importante que en

cada diseño se resalte lo propio. Esto es, para el caso de la educación a distancia se deben predecir los fenómenos distintivos de este escenario.
Pero la educación a distancia no ha sido la misma en todos los tiempos, los avances tecnológicos han marcado fuertes cambios en su desarrollo y en su repercusión en el sistema educativo. Para observar y entender la evolución que ha tenido la investigación en educación a distancia es necesario conocer su desarrollo histórico, un poco de sus éxitos y fracasos, así como su dependencia de la tecnología.

Historia

El devenir histórico de la Educación a Distancia nos muestra que los avances en telecomunicaciones han cambiado la perspectiva de su análisis. Pensemos cuando en 1700 la educación a distancia, que recibía el nombre de educación por correspondencia, tenía como objetivo hacer llegar materiales impresos a sus estudiantes, no había tecnología que hiciera posible una retroalimentación inmediata entre instructor y estudiante. Después del año 1900 la radio y la televisión abren nuevas posibilidades en la educación a distancia, la transmisión de material a los estudiantes es más rápida y puede haber una respuesta de los estudiantes que refleje cierto nivel de aprendizaje. La Segunda Guerra Mundial detiene un poco el proceso que llevaba la educación a distancia, sin embargo, al impartir cursos instruccionales con fines bélicos a través de estas tecnologías surge la necesidad de crear programas de investigación dirigidos a generar y entender teorías que expliquen cómo es que estos medios afectan la vida del salón de clase.
Hasta ese momento la interacción entre alumno e instructor era algo que preocupaba a la gente involucrada en la elaboración de cursos. Era normal comparar la educación a distancia con la educación convencional (incluso hoy en día se llega a hacer esta comparación), así que la búsqueda por igualar la efectividad en ambas modalidades dirigía la atención a la respuesta de los estudiantes y a la retroalimentación que propiciaba el instructor. Esta preocupación va disminuyendo con las ventajas que ofrece la tecnología en microondas a finales de los 60's y principios de los 70's, se da una revolución en telecomunicaciones que incrementa la interacción entre estudiantes e instructores.

Investigación

El reconocimiento de la Educación a Distancia como campo científico depende en gran medida de sus trabajos en investigación. Hasta hoy, la investigación hecha da muestra de un trabajo sistemático que ha distinguido y analizado los elementos invariantes en las diversas formas u opciones de esta modalidad. Tal es el caso de la Teoría de la Distancia Transaccional de (Moore, 1990, 1991) Moore evoluciona de una teoría de aprendizaje individual, por ejemplo la educación por correspondencia, hasta una teoría basada en el ***diálogo, estructura*** y ***autonomía del estudiante*** como elementos constitutivos de todas las prácticas de enseñanza y aprendizaje a distancia.

Teoría de la Distancia Transaccional

Esta teoría es muy característica de los trabajos de investigación teórica que se han dado hasta hoy, aquellos que giran en torno a la explicación de fenómenos novedosos en esta modalidad que podrían darse en cualquier proyecto o área de estudio. Además, quizá por conjuntar elementos importantes en cualquier práctica educativa esta teoría es la mas utilizada como marco teórico en los estudios descriptivos de la disciplina.

Al hablar de distancia, la Teoría de Distancia Transaccional se refiere a algo más que una simple separación física entre instructor y estudiante. Se refiere a una distancia de percepción y entendimiento, en parte causada por la separación física. La Teoría de la distancia Transaccional expuesta por (Moore, 1990, 1991, 1993) habla sobre la transacción llamada educación a distancia que ocurre en un ambiente cuya característica especial es la separación física entre instructor y estudiante, entendiendo transacción como la interacción entre éstos, el ambiente y los consecuentes comportamientos de enseñanza y aprendizaje. Con esta separación se da un desfase de comunicación y una brecha psicológica, un espacio de malentendidos potenciales entre lo que percibe el profesor y lo que percibe el estudiante. Este espacio es lo que se define como "distancia transaccional". Lo que determina la cantidad de distancia en un programa es una función de dos variables, el diálogo y la estructura (Moore, 1991)

El "***diálogo***" se da gracias a las interacciones que hay entre profesor y estudiante, cuando el primero da instrucciones y el segundo responde. La dirección del diálogo en una relación educativa que se da con el objeto de mejorar el entendimiento del estudiante. No se usan las palabras diálogo e interacción como sinónimos, el término diálogo se usa para describir una interacción o serie de interacciones con cualidades positivas, que otras interacciones pueden no tener. La naturaleza y proporción del diálogo se determina por la filosofía educativa del instructor o equipo responsable del diseño del curso, por las personalidades de instructor y estudiante, por el contenido del curso, por los factores ambientales y lo mas importante por los medios de comunicación.

La "***estructura***" se conforma por los elementos en el diseño del curso que son organizados de tal forma que éste pueda ser proporcionado a través de diversos medios. La estructura expresa la rigidez o la flexibilidad de los objetivos educativos del curso, de las estrategias de enseñanza y de los medios de evaluación. Además, refleja la capacidad del curso para responder a necesidades individuales del estudiante. Gran estructura puede no permitir una cantidad significativa de diálogo. La cantidad de diálogo y la flexibilidad de estructura varían de programa a programa, más que de un medio a otro (Moore, 1990)

El último elemento de esta teoría es la "***autonomía del estudiante***", que se refiere a la auto-dirección del estudio, es decir, a la toma de decisiones respecto de su propio aprendizaje y la construcción de su propio conocimiento basado en sus experiencias. (Carrison & Bayton, 1989) y (Bayton, 1992) han ampliado este último concepto a control del estudiante, desarrollando un modelo que lo define en términos de independencia (la capacidad de tomar decisiones), competencia –o poder- (habilidades y destrezas) y apoyo (tanto material como humano) Un balance dinámico entre estos tres aspectos, a través del proceso de comunicación bidireccional entre instructor y estudiante, le permitirán a este último desarrollar y mantener un control sobre su proceso de aprendizaje (Moore, 1990).

De ninguna manera se debe pensar que la distancia garantiza la independencia del estudiante.

La teoría no ha dado evidencia de ser invariante en cualquier contexto (o paradigma) de educación a distancia. Esto es, Moore comienza con una teoría de aprendizaje independiente dado el fenómeno de educación por correspondencia, conforme la tecnología muestra grandes avances la teoría cambia sus objetivos de estudio tomando como foco central la interacción que se da entre el estudiante e instructor y todo lo que influye en esta.

Pero quizá la aportación más importante de Moore con esta teoría sea el hecho de romper con la idea de la distancia física, estableciendo que no es ésta la que causa desfases en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sino que hoy la distancia es una separación de comunicación entre los involucrados en cualquier practica educativa, en cualquier escenario.

La interacción como elemento indispensable

El profesor, el estudiante, el objeto de conocimiento y los objetivos de enseñanza, son los elementos de cualquier práctica educativa, pero es la interacción entre ellos la que determina dicha práctica. La interacción es entonces el elemento intrínseco de la efectividad de cualquier ambiente educativo, en la educación a distancia es el componente nuclear de toda estrategia instruccional. En un ambiente a distancia se identifican cuatro tipos de interacción (Gunawardena, C. N. & McIsaac, M. S., 1996) –Fig. 2-

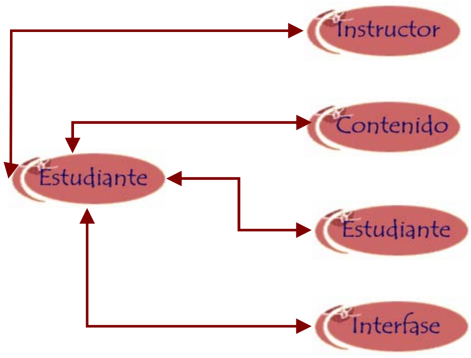


Fig. 2
Interacciones en un ambiente de educación a distancia

La interacción ***estudiante-profesor*** provee retroalimentación, motivación y diálogo, en la interacción ***estudiante–contenido*** se obtiene la información intelectual del material, mientras que en la interacción ***estudiante–estudiante*** se da un intercambio de ideas e información, y por último, la interacción ***estudiante–interfase*** es el manejo del medio tecnológico por parte del estudiante.

El énfasis puesto en la interacción puede compararse con el énfasis que hoy en día se le da a la comunicación en el salón de clase. Sin embargo, el análisis de las distintas interacciones que se llevan a cabo en la modalidad educativa a distancia refuerza la idea de los estudios sistemáticos que observan elementos constitutivos de forma aislada.

Pero al hablar de educación a distancia, no sólo la interactividad resalta como elemento importante, también la autonomía del estudiante toma un papel de suma importancia al caracterizar esta modalidad. Como ya se mencionó en la Teoría de la Distancia Transaccional, el hecho de que exista una distancia entre instructor y alumno no asegura independencia de este último respecto de su aprendizaje. Esto pudiera pensarse por la falta de control total sobre las acciones del alumno. Entonces, debe tomarse en cuenta esta variable para que el diseño sea tal que controle el aprendizaje cuando el alumno se ocupe de sus actividades.

Sin embargo, el foco de atención esta puesto en la responsabilidad que adquiere el alumno. Responsabilizarse de su aprendizaje constituye un elemento clave para que el alumno se desenvuelva exitosamente en los ambientes a distancia. Pero en la literatura se describe esta responsabilidad como una especie de actitud ante la modalidad, no como una responsabilidad que provoque el diseño didáctico.

La importancia que se le da a la responsabilidad del estudiante ha llevado a diversos teóricos a pensar en investigación y diseños basados en el paradigma constructivista. Aunque quizá el obstáculo más grande para este paradigma sea la estructura misma de la educación a distancia. Un sistema educativo a distancia bien estructurado requiere de especialistas en tecnología, diseñadores educativos, expertos en los contenidos escolares, auxiliares de apoyo para estudiantes y profesores, entre otros. Esta modalidad presupone una red de recursos humanos y materiales que requieren de mucha interacción y retroalimentación. Esta actividad será la que provoque que el alumno se adapte a este ambiente, y será el diseño del programa el que posibilite que el alumno se responsabilice de su propio aprendizaje.

Algo que es claro en este análisis de los trabajos realizados en la educación a distancia es el proceso de evolución de una disciplina, que conforme identifica elementos propios y comunes con otras prácticas educativas define una línea de investigación que puede formar un fundamento teórico en su quehacer educativo. Es claro que en el camino de la ciencia siempre habrá escepticismo, correcciones, pruebas y nuevos retos. Ante esto solo tenemos el camino de la investigación, camino que la educación a distancia recorre a paso acelerado. La investigación, como hasta ahora se ha hecho, no avanza ni avanzará a la velocidad de la práctica educativa, no es posible que la investigación, como la práctica, cambie conforme la tecnología avanza, simplemente porque la tecnología esta orientada a la innovación en la práctica.

Referencias bibliográficas

Baynton, M. (1992). Dimensions of control in distance Education: A factor analysis. The American Journal of distance Education, 6(2), 17-31.

Brousseau, G. (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. En Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V. (Eds). Kluwer Academic Publishers.

Carrison, R. & Bayton, M. (1989). “Beyond Independence in Distance Education: the concept of control”, in Readings in Principles of Distance Education, Eds. Moore, M.G. and Smith, G. C.

Gunawardena, C. N. & McIsaac, M. S. (1996). Distance Education. In D. H. Jonassen (Ed.). Handbook of research for educational communications and technology: a project of the Association for Educational communications and Technology. 403 – 437. New York: Simon & Schuster Macmillan. Disponible en la página web:
http://seamonkey.ed.asu.edu/~mcisaac/dechapter

Montiel, G. (2001) Un estado del arte de la investigación en educación a distancia. Antologías 1. Programa Editorial Red de cimates

Moore, M. G. (1991). Editorial: Distance Education Theory. The American Journal of Distance Education, 5(3), 1-6.

Moore, M. G. (1990). Recent Contributions to the Theory of Distance Education. Open Learning, 5(3), 10-15.

Moore, M. G. (1993). Theory of Transactional Distance. In D. Keegan (Ed.), Theoretical principles of distance education (pp 22-38). New York: Routledge.

La capacitación a distancia: generador de zonas de desarrollo próximo

Laura Benavides López
Ministerio de Educación Pública, Costa Rica. Universidad Católica de Costa Rica. Costa Rica
laurabelo@costarricense.cr

Resumen

La propuesta de solución: "Programa de Capacitación a Distancia" se concibe a partir de los resultados que arrojó la evaluación realizada al programa de capacitación presencial de la Dirección Regional de Educación de San Carlos del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, durante el período 1999 a 2000.

Se aplica como técnica principal, el análisis situacional (F.O.D.A.) en tres puntos básicos del Programa de Capacitación Presencial: en la identificación de recursos, en la caracterización del programa y en determinar si la capacitación genera cambios en el docente capacitado.

La opinión de los sujetos se registró en cuatro instrumentos, luego se les aplicó diferentes técnicas para garantizar objetividad en las afirmaciones que se citan en el F.O.D.A. Con base a estos se construyó un flujograma explicativo que permite visualizar los factores estructurales, condicionantes y concretos que inciden en el programa de capacitación presencial. Tomando en cuenta todos estos aspectos se propone un *plan de acción* que corresponde a un Programa de Capacitación a Distancia, con un enfoque pedagógico fundamentado en la *zona de desarrollo próximo*, con un sistema multimedial que permite utilizar variedad de recursos didácticos y tecnológicos dirigidos a satisfacer los diferentes estilos de aprendizaje y necesidades de los educadores.

Introducción

El sistema educativo, está cada vez más presionado frente a las demandas de desarrollo de las personas y de las comunidades. Las sociedades, para lograr su desarrollo social y económico, se sustenta cada vez en la sólida formación de las personas que la integran. La coexistencia entre un sector que se acerca a niveles altos de información, conocimiento y acceso a nuevas tecnologías; y por otro lado, grupos mayoritarios de adultos que no terminaron su educación básica obligatoria, analfabetas, niños y jóvenes que permanecen fuera de los servicios educativos.

El Centro Latinoamericano para la Competitividad y Desarrollo Sostenible (1999: 53) manifiesta: Ineludiblemente, el desarrollo de servicios de educación y capacitación cada vez más especializados y acoplados a las necesidades competitivas de las empresas debe de estar sustentado en sistemas de educación básica con niveles de cobertura, calidad y eficiencia significativamente mayores que los que tiene actualmente la región centroamericana.

La formación de los maestros es un elemento decisivo para lograr una educación eficiente y de calidad en las escuelas, se requiere de una formación sólida no sólo en la parte psicopedagógica, sino también en lo que respecta a las ciencias, matemática y tecnología. En Costa Rica a pesar de que los docentes de primaria se forman en las universidades públicas y privadas. El programa de estudios de la carrera de Educación para I y II ciclo contemplan a lo sumo de tres a cuatro asignaturas que enfatizan en matemática y ciencias, el grueso del currículo lo forman asignaturas, en el área de las ciencias sociales. Este vacío cognitivo, en las ciencias naturales y exactas, se ve reflejado en una forma u otra en los aprendizajes de los estudiantes.

De ahí la importancia que el Ministerio de Educación Pública, a través de las Direcciones Regionales de Educación, posea un eficiente programa de capacitación. Es por esta razón que se toma la iniciativa de evaluar el Programa de Capacitación Presencial dirigido a los docentes de I y II ciclo de la Educación General Básica de la Dirección Regional de Educación de San Carlos que se venían ofreciendo en años anteriores al 2001.

Objetivo General

Evaluar el Programa de Capacitación Presencial dirigida a los docentes de I y II ciclo de la Educación General Básica de la Dirección Regional de Educación de San Carlos.

Objetivos Específicos

1. Identificar el proceso de capacitación dirigido a los docentes.
2. Identificar los recursos físicos, humanos y financieros para el programa de capacitación.
3. Determinar si la capacitación es fuente generadora de autonomía personal y profesional.
4. Elaborar una propuesta de solución.

Referente metodológico

Tipo de investigación

La presente investigación se enmarca dentro del enfoque cualitativo, cuya orientación busca, principalmente, según Venegas (1994:25): *comprender los fenómenos sociales, el investigador necesita descubrir la definición de la situación del actor, esto es, su percepción e interpretación de la realidad y la forma en que éstas se relacionan con su comportamiento*.

Participantes en la investigación

120 docentes: 3 Directores de Departamentos: Desarrollo Educativo, Recursos Humanos y Director Regional; 13 Supervisores de Circuitos Escolares; 10 Directores de Instituciones; 15
Asesores Técnicos y 72 maestros.

Procedimiento

Se realizó un Análisis Situacional (FODA) en cada una de las áreas indicadas anteriormente. Se enriqueció este análisis con la opinión de los participantes, que se registró mediante cuatro instrumentos.

Se elaboraron categorías de análisis, en las respuestas abiertas proporcionadas por los sujetos. Como también se emplearon diferentes técnicas e instrumentos para darle mayor validez y objetividad a las afirmaciones que se enuncian en el FODA.

De esta manera se priorizó debilidades y amenazas; se valoraron las estrategias de Capacitación Presencial empleadas en el programa de capacitación en años anteriores al 2001; y se determinó los factores estructurales condicionantes y concretos que inciden en el programa de capacitación.

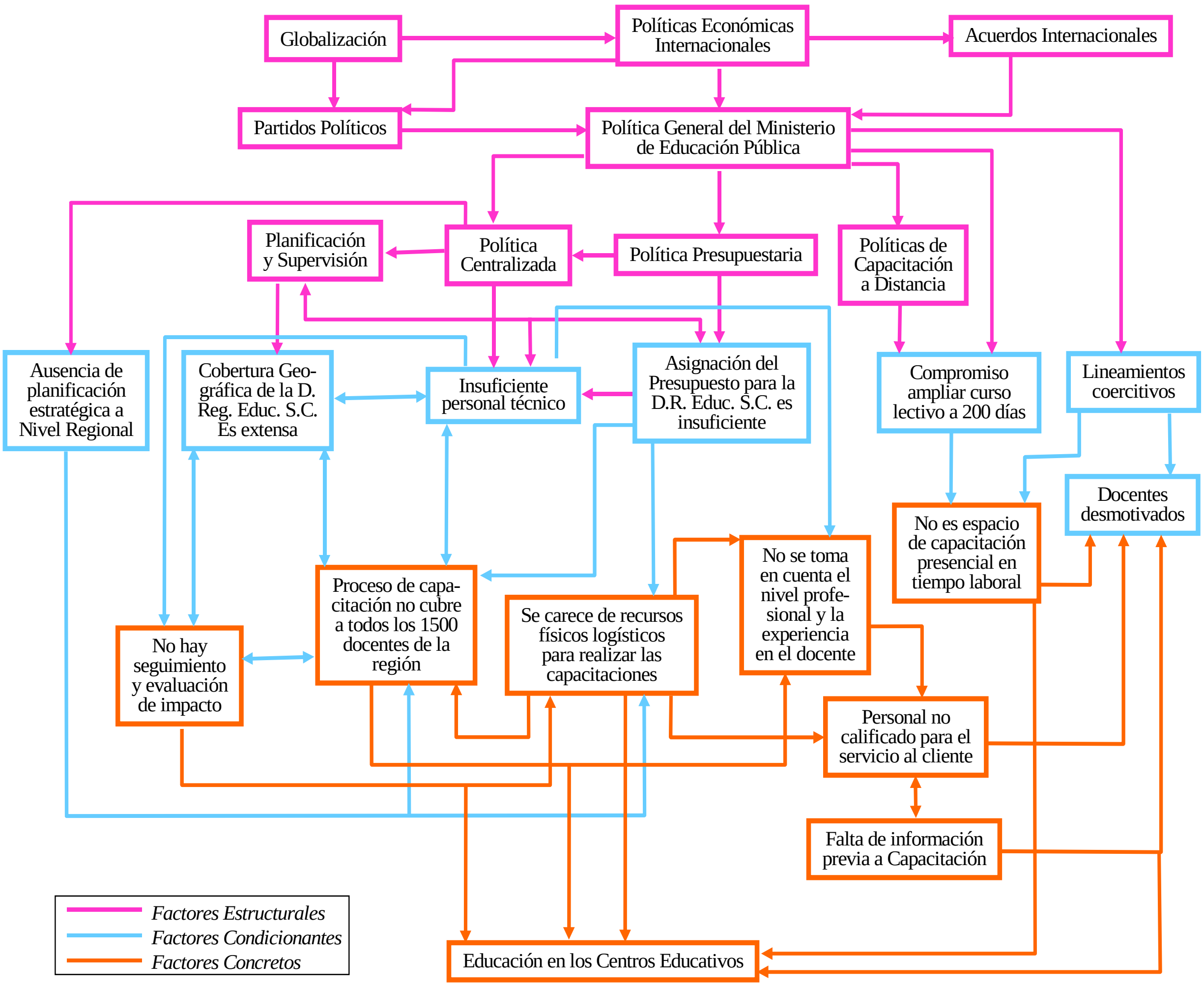
Resultados

La Dirección Regional de Educación de San Carlos posee ciertas debilidades en el programa de capacitación presencial, de acuerdo con los resultados arrojados en el análisis situacional y jerarquizados en la figura 1, encontramos que entre los factores estructurales, están fuera de los límites de la organización, y no se pueden modificar son: la política de centralizada del Ministerio de Educación, tanto presupuestaria, de planificación como de supervisión y los acuerdos internacionales en materia de educación. Se encuentra entre los **factores condicionantes**: asignación del presupuesto para la Dirección Regional de Educación de San Carlos es insuficiente, escaso personal técnico; y la ausencia de una planificación estratégica.

Los **factores concretos** que afectan negativamente el programa de capacitación presencial están: se carece de recursos físicos, logísticos para realizar las capacitaciones; las capacitaciones no cubren a los 1500 docentes de la región, no hay seguimiento y evaluación; no se toman en cuenta el nivel profesional y la experiencia del docente; personal no calificado para el servicio público; no hay espacio presencial en tiempo laboral para realizar la capacitación.

Entre los nudos críticos, está la ausencia de presupuesto, ya que esto no permite contar con recursos físicos logísticos para la capacitación, lo que imposibilita extender el programa a los 1500 docentes; y no hay vehículo para visitar los circuitos escolares, que son muy distantes de la Sede Regional. Por otro lado, no se puede dar una atención individualizada de acuerdo con el nivel académico y exigencia del docente, se trata de cubrir las necesidades de la mayoría; otra forma en que este factor incide es en el nombramiento de personal no idóneo para atender el servicio al cliente, y no se les brinda capacitación e inducción en el puesto; esto a su vez influye en la información que se le brinda al docente de aula.

Figura N°1
Programa de Capacitación de la Dirección Regional de Educación de San Carlos (Flujograma)
Modalidad presencial



Plan de acción

Objetivo

Crear un programa de capacitación a distancia que contribuya con el mejoramiento de la calidad de la formación académica, científica y pedagógica de los docentes de I y II ciclo de la Educación General Básica de la Dirección Regional de San Carlos.

En está modalidad de Capacitación a Distancia se establecerá una relación centralizada entre el capacitador y la persona que se capacita. Esta mediación se distinguirá por ofrecer:
a. Una diversa y amplia gama de cursos (en nivel básico, mediano y avanzado) en los temas que requiera la población de docentes.
b. Los materiales que conforman el curso deben generar un alto nivel de interacción dirigido a diferentes estilos y ritmos de aprendizaje.
c. Establecer un vínculo mediatizado con la persona que se capacita, a través de los diferentes medios que constituyen un sistema didáctico, que permitan al maestro que se capacita ser un sujeto activo de su auto-aprendizaje.
d. Los soportes didácticos que se emplearían en este programa de capacitación a distancia serían: módulos, videos, cassettes, cd-rom, Internet, programas de radio y televisión que permitirán satisfacer los diferentes estilos de aprendizaje del docente que se capacita, establecer un sistema de acompañamiento variado.

Dentro de la propuesta, *el significado de aprendizaje* corresponde a un proceso mediante el cual una persona demuestra un crecimiento en sus ámbitos intelectual, social y emocional; entendiéndose como aprendizaje independiente, autogestionario y permanente, donde la persona se apropia y responsabiliza de su proceso de formación sin control externo, después de haber pasado por una etapa de ayuda, de colaboración, en la creación de Zonas de Desarrollo Próximo. El reto que se plantea en el programa de capacitación a distancia es brindar una mediación de calidad que les permita avanzar hacia la Zona de Desarrollo Próximo a cada docente.

El establecimiento de un Cluster Regional de Servicios Educativos representa una estrategia de maximizar la oportunidad de contar con instituciones públicas y privadas con una trayectoria en el área de capacitación , abiertas a dar el apoyo logístico al programa de Capacitación de la Dirección Regional de Educación de San Carlos.

Evaluación del plan de acción

Para determinar la efectividad del Plan de Acción, es importante proponer indicadores observables y válidos; que permitan verificar si el programa de capacitación tanto en su proceso como su producto, se logran los objetivos propuestos.

Se proponen algunos pasos para evaluar y supervisar el plan de acción. Revisión y actualización anual del FODA. Establecimiento de estándares. Estimación de satisfacción de los docentes--Establecimiento de un equipo que evalúe la calidad del material didáctico y el desarrollo de los espacios de intercambio de experiencias. Realización de visitas a un 33% de los docentes que hayan concluido un determinado curso. La visita se hará sin previo aviso. El Asesor técnico (tutor) contará con instrumentos de observación, cuestionarios o entrevista según sea el caso. Valoración del portafolio o cuaderno paralelo donde él registrará sus reflexiones, entre la práctica educativa y el contenido del módulo como su revaloración de su quehacer de aula a partir del “nuevo conocimiento”.

Logros

*L*os logros más relevantes, que se espera obtener, con la implementación de un programa de capacitación a distancia los siguientes:

a. Se incorpore una mayor cantidad de docentes en el programa capacitación a distancia.
b. Se propicie un cambio de actitud, respecto al autoaprendizaje y desarrollo profesional y personal en los docentes.
c. Se eleve el nivel académico y profesional de los docentes, especialmente en el área: Ciencias y Matemática.
d. Se fortalezca la formación académica científica y matemática del equipo técnico asesor y de los docentes de la región.
e. Establecimiento de un Cluster de servicios educativos en la región .
f. Implementación de un nuevo enfoque psicopedagógico en la capacitación basado en las Zonas de Desarrollo Próximo.

Referencias bibliográficas

Arrien, J. (1996). UNESCO en el Desarrollo y en las Innovaciones de la Educación en Centroamérica. Oficina de la UNESCO para Centroamérica y Panamá. San José, Costa Rica.

Arroyo, J. (1999). Administración Estratégica en las Organizaciones. San José: EUNED.

Barrantes, R.(1988). Educación a Distancia. San José: EUNED.

Barrantes, R. (1999). Investigación: un camino al conocimiento, un enfoque cuantitativo y cualitativo. San José, C. R.: EUNED.

Brenes,F.(1999). Principios Psicopedagógicos Constructivistas para el Diseño de Instrucción en la Educación a Distancia. Innovaciones Educativas (Rev. Nº10), pág.45-52.

Instituto Centroamericano para la Competitividad y el Desarrollo Sostenible. Centroamérica en el Siglo XXI. Alajuela, Costa Rica: HIID, 1999.

Vidaorreta, María (1998). Organización de los procesos de capacitación. San José, C.R.: Depto. Publicaciones del MEP.

Venegas, P. (1994). Algunos Elementos de Investigación. 3ªed. San José, C.R.: EUNED.

Una experiencia, utilizando las NTIC, en el estudio individual de alumnos de cursos semipresenciales de Matemática para Ingenieros Industriales

Milagros Horta Navarro*, Marcelo Marcet Sánchez*, Rita Martinez Pichardo*, Nancy Horta Chávez*, Martin Herrán**, Walter Garzón**
* Profesores de la Universidad de Matanzas, Cuba
** Profesores de la Universidad de Salta; Argentina
mmarcet2000@yahoo.com marcelm@fujae.var.cyt.cu mily@quimec.umtz.edu.cu

Resumen
El presente trabajo muestra una experiencia llevada a cabo en la universidad de Matanzas, Cuba; en cuanto a la utilización de las TIC en la modalidad de cursos semipresenciales de matemática para ingenieros Industriales, que consistió en plasmar en una pagina web, desde los objetivos generales de cada una de las asignaturas que componen la disciplina Matemática para Ingenieros Industriales, hasta los objetivos específicos de cada clase, un módulo con exámenes típicos de la asignatura, otro con cada una de las clases de la asignatura, escritas con un estilo coloquial y claro, rica en ejemplos e ilustraciones geométricas que sirvieran para esclarecer los diferentes conceptos matemáticos, además tiene incorporada esta página, de cada una de las clases una amplia referencia bibliográfica, que le permite al estudiante profundizar en estos contenidos en diferentes libros, consta además de una serie de folletos confeccionados por el profesor para este tipo de curso, que les permite no solo aprender matemática, sino aprender también a utilizar asistentes matemáticos de la asignatura.

Introducción

En nuestro país, Cuba, existe una modalidad de enseñanza a distancia, de carácter semipresencial orientada a estudiantes trabajadores, que ingresan a una carrera universitaria afín al trabajo que realizan. Como requisitos para el ingreso a este tipo de curso tienen: el estar graduados de bachiller, aprobar un examen de ingreso (el cual es elaborado y revisado por los profesores de la Universidad en la cual ellos aspiran a matricular) y estar vinculados en la actividad laboral que desempeñan a la especialidad por la que optan para estudiar.
Estos estudiantes reciben las mismas asignaturas que los alumnos regulares, con la diferencia que en un menor número de horas clases; los encuentros presenciales con el profesor son de dos a tres horas semanales, por lo que se limitan éstos a la orientación (por parte del profesor) de los temas que ellos deben estudiar y la aclaración de cualquier duda de los contenidos con anterioridad orientados, esto hace que en gran medida, el rendimiento de los estudiantes dependa de un eficiente estudio individual de su parte, por lo que la orientación del profesor debe estar correctamente dirigida a los objetivos del programa de estudio y apoyada por materiales que permitan a los estudiantes orientarse en su autopreparación.
Esta manera de enfrentar la superación en Cuba provoca que la participación en cursos de esta naturaleza hacen que los asistentes tengan que alejarse de su centro laboral y del hogar con los inconvenientes que esto conlleva y no tengan otra posibilidad para intercambiar con sus profesores que no sean las dos o tres horas semanales de clase (por asignatura), que por lo regular son insuficientes.
Teniendo en cuenta esta problemática, que trae como consecuencia un menor rendimiento de los estudiantes en este tipo de cursos, con respecto a los que lo realizan por cursos regulares, un grupo de profesores de Matemática de la Universidad de Matanzas y de la Universidad Salta Argentina, que recibieron un diplomado en nuestra universidad, se dieron a la tarea de confeccionar materiales que pudieran suplir, en alguna medida la no presencia del profesor y que no solo ayudara en nuestra asignatura sino que les permitiera a

éstos utilizar las TIC, de manera que se pudiera coadyuvar a una formación más integral y a tono con las exigencias actuales. El presente trabajo trata sobre esta experiencia.

Desarrollo

La computación que hace tan solo unos años se empleaba para cálculos matemáticos complicados, ha ido cediendo espacio a las más diversas actividades del desarrollo humano, al punto que en la actualidad no existe prácticamente un área, en que de algún modo no se utilice esta herramienta. El elevado nivel de perfeccionamiento y accesibilidad de estos equipos, ha permitido que su uso se extienda en la práctica a los más diversos campos, entre los que, por supuesto, se encuentra la educación, para la cual es imprescindible a nuestro modo de ver.

Una de las áreas de la educación en que estos artefactos pueden jugar un papel importantísimo es en lo relacionado con el estudio Individual de los estudiantes, elemento primordial en este tipo de cursos en que la presencia del profesor no esta siempre presente, a partir de materiales previamente elaborados de manera que los estudiantes puedan consultarlo a través de la red universitaria o grabándolo en un disquete y consultándolo en su casa o centro de trabajo.

Existen varias tecnologías y métodos que se pueden utilizar en la educación a distancia para lograr una mayor atención y entendimiento para el alumno y resultan herramientas de apoyo al aprendizaje, entre ellas está el uso de la informática (De Pablos, 1996).

Es por ello que los profesores de Matemática de este tipo de curso de la Universidad de Matanzas, Cuba, nos dimos a la tarea, en aras de que estos estudiantes contaran con condiciones que le permitieran un mejor aprovechamiento de las horas dedicadas a la auto preparación, de realizar materiales que apoyaran el estudio Independiente de la asignatura. Éstos debían ser tales que implicaran un modesto costo a la universidad y que pudieran estar disponible para ellos en un razonable periodo de tiempo, confeccionándose así una página WEB de la Disciplina: **Matemática para ingenieros Industriales** en la que aparecen una serie de documentos que orientan a los estudiantes de esta especialidad, específicamente los de cursos para trabajadores, en su auto preparación, esta página está insertada en la intranet universitaria y los estudiantes pueden acceder desde cualquier máquina de la universidad y en cualquier horario.

Esta disciplina: ***Matemática para Ingenieros Industriales*** consta de 5 asignaturas que los estudiantes deben cursar en los dos primeros años de la carrera, estas son: Matemática I, Matemática II, Matemática III, Matemática IV y Álgebra lineal.

En la página principal, aparece cada una de las asignaturas que componen la disciplina:

Al oprimir el botón del mouse sobre el nombre de una de las asignaturas de la Disciplina aparecerá en el marco izquierdo inferior el nombre de cada uno de los documentos de esta asignatura a los que se podrá tener acceso, de manera que el que esté visitando la página accionando sobre el documento que desee consultar tendrá la oportunidad de leerlo en el marco de la derecha de la página.

Estos documentos son:

- **Programa Analítico de la asignatura.**

En este material aparece todo el sistema de contenidos de la asignatura, el sistema de habilidades que debe lograr el estudiante, los objetivos generales educativos, instructivos y específicos de cada clase; es confeccionado a nivel nacional por un grupo de expertos, que tienen representación de los diferentes departamentos de cada una de las universidades del país, el cual resulta importante que los estudiantes conozcan con el fin de que estos sepan los objetivos que el debe vencer en cada asignatura, así como las habilidades que debe desarrollar.

- **Sistema de evaluación.**

Aparecen los tipos de evaluación que se realizarán por temas, con el tiempo de duración de cada uno de ellos y los objetivos que se persiguen medir en cada una de éstas, además se recoge un grupo de modelos de exámenes ya aplicados en otros cursos, los cuales el estudiante podrá utilizar como auto examen.

- **Distribución de contenidos.**

Está la distribución del contenido de la asignatura por clase o encuentro y los objetivos específicos de cada clase.

- **Objetivos generales del año en los que la asignatura tributa.**

En el Plan general de la carrera aparecen, entre otros, los objetivos generales de cada año, en este documento se recogen estos objetivos y como las diferentes asignaturas tributan a estos objetivos generales del año. En la página aparecen estos objetivos del año y como la asignatura matemática tributa a ellos, la finalidad de él es que los estudiantes conozcan la importancia de la asignatura para dar cumplimiento a objetivos de la especialidad.

- **Preparación de la asignatura.**

Aparece el plan de clases de la asignatura, con cada una de las clases de la asignatura y su correspondiente orientación bibliográfica.

El texto de cada clase, está elaborado como algo vivo, simulando una interlocución permanente con el alumno e interactuando con éste, para que este texto cumpla su objetivo y permita suplir en alguna medida la ausencia del profesor.

El discurso pedagógico en los materiales significa un estímulo, un desafío permanente a la acción y la reflexión de quien los consulta (Hdez, Alicia, 1998).

(...) " deben ser un juego de intercambio comunicacional que implique una ida y vuelta permanente, con mensajes significativos y valorados por ambos lados con información relevante y pertinente para aportar a la construcción conjunta del conocimiento y marchar hacia la meta que debe ser, no sólo la problematización de la propia realidad, sino la elaboración de propuestas de solución adecuada que ayuden a superarlas"(Mena, 1993).

Cada una de estas clases tiene una serie de preguntas de interactividad que el estudiante debe contestar y enviar sus respuestas al profesor por correo electrónico, también por ese medio puede enviar al profesor consultas a cuestiones relacionadas con la clase y que él no entienda en el material, el profesor recepciona estas dudas de los estudiantes y las aclara en la clase encuentro siguiente.

- **Materiales didácticos de la asignatura.**

Al entrar en este sitio los estudiantes podrán encontrar páginas de la asignatura bajadas de Internet las cuales pueden consultar, esto les permite que ellos tengan acceso a este tipo de materiales que de no estar presentes en la página elaborada, ellos no podrían consultar pues los accesos a Internet en nuestro país todavía son limitados.

Además aparecen folletos de ejercicios elaborados por los profesores, de manera que cada grupo de ejercicio constituya un sistema de tareas que los estudiantes deben resolver y enviar por correo electrónico a su profesor, con una gran variedad de problemas de aplicación; también aparecen ayudas para aprender a trabajar con software profesionales de Matemática (**Derive**) que esta contemplado en sus planes de estudio que deben saber utilizar.

(...) "al elaborar materiales para la Educación a Distancia debemos tener en cuenta la importancia de estimular permanentemente a los educandos, de forma tal que se vean comprometidos en la búsqueda de fuentes de información y en la solución de problemas. Cuando los materiales transmiten conocimientos acabados, se pierde el motor central del aprendizaje; se desperdicia la capacidad inquisitiva del alumno" (Hdez Alicia, 1998)**.**
Teniendo en cuenta este planteamiento, con el cual estamos identificados plenamente, nos dimos a la tarea de confeccionar textos, que no fueran libros de textos tradicionales digitalizados, sino libros elaborados de tal manera que visualizara aspectos que la impresión hace que esto sea posible, como es el caso de gráficas con movimientos, que hagan más claro al estudiante la compresión de ciertos conceptos demasiado abstractos para ellos, por otro lado estos textos están elaborados de manera que los estudiantes al consultarlos no encuentren una respuesta acabada del hecho, sino que ellos tengan que investigar para llegar a la respuesta que desean , es decir que sean sujetos activos en la apropiación de los conocimientos y no lectores pasivos de un material que se aprende de memoria y después se repite.
A esta página los estudiantes pueden acceder por la intranet universitaria, lo que permite que pueda visitarla cualquiera que le interese hacerlo, a cualquier hora del día o la noche, por lo que los estudiantes de cursos para trabajadores tienen posibilidad de ir a la universidad y estudiar por este material en su tiempo libre, pero además desde internet pueden consultarlo también aún sin estar en la universidad, si sus centros de trabajo tienen acceso a este servicio o sencillamente llevárselo en disketes y usarlo en cualquier máquina.
Este material didáctico tiene una gran importancia y secundada por las nuevas tecnologías informáticas puede resolver problemas de masividad, espacio y tiempo y llevar el conocimiento más actualizado a quienes lo necesitan, sin tener que ausentarse de su puesto de trabajo y su familia, permitiendo desarrollar de forma masiva los proceso permanentes de educación y entrenamiento, resolviendo los problemas provocados por la lejanía, es una estrategia educativa basada en la aplicación de la tecnología al aprendizaje sin limitaciones de lugar, tiempo, u ocupación de los estudiantes. Implica nuevos roles para los alumnos y para los profesores; nuevas actitudes y nuevos enfoques metodológicos.
Los estudiantes pueden realizar preguntas, acerca de dudas en algunos de los ejercicios o contenidos, a partir del correo electrónico del profesor y éste a su vez enviar la respuesta a éstos también utilizando esta vía.
Es evidente pues que deberá asegurarse la adquisición de conocimientos que permitan aprovechar la tecnología y obtener beneficios de ella, ya sea en la asistencia, la docencia o la investigación.
Aunque las condiciones tecnológicas están creadas, existe un gran número de profesionales y técnicos que no son capaces, a pesar del desarrollo que ha alcanzado la informática, de interactuar con una computadora y explotarla en función de sus necesidades, por lo que se hace necesario que sobre todo los docentes se capaciten en esta temática de manera que puedan brindarle a los estudiantes, sobre todo a los de cursos a distancia, materiales eficientes que apoyen su auto preparación y poder contar con profesionales, graduados en estos cursos de un alto nivel científico, a tono con las exigencias actuales.
Esta experiencia se viene aplicando hace dos cursos en nuestra universidad, lo que nos ha permitido hacer estudios comparativos sobre la permanencia de estos estudiantes en los grupos durante estos dos cursos, así como de los resultados docentes que ya se vienen obteniendo, con respecto a lo sucedido en los cursos anteriores cuando no existía este

sistema didáctico de la disciplina que sirve de apoyo en el estudio individual de los alumnos

En la siguiente tabla (tabla 1) se muestra el comportamiento durante tres cursos anteriores a la utilización de este sistema didáctico, atendiendo al por ciento de permanencia en la carrera en los dos primeros años de ésta, así como el por ciento de aprobados en base a los que se mantenían hasta el final de las diferentes asignaturas de las disciplinas.

Tabla 1

Curso analizado	**Por ciento de permanencia**	**Resultados alcanzados en exámenes**
95-96	Solo un 20 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron en él hasta el final del año.	El 20 % de los estudiantes presentados a exámenes, vencieron satisfactoriamente el curso
96-97	23 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron en el hasta el final del año.	El 35 % de los estudiantes presentados a exámenes , vencieron satisfactoriamente el curso
97-98	10 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron en el hasta el final del año.	El 60 % de los estudiantes presentados a exámenes , vencieron satisfactoriamente el curso

La siguiente tabla (tabla 2) muestra los resultados alcanzados en los dos cursos posteriores a el mejoramiento de las condiciones materiales para la autopreparación de los estudiantes, esto es: la confección de esta pagina web que permite una mejor orientación del estudio independiente para este tipo de estudiantes

Tabla 2

Curso analizado	**Por ciento de permanencia**	**Resultados alcanzados en exámenes**
98-99	70 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron en él hasta el final del año.	El 63 % de los estudiantes presentados a exámenes , vencieron satisfactoriamente el curso
99-2000	73 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron hasta el final del año.	El 60 % de los estudiantes presentados a exámenes , vencieron satisfactoriamente el curso

Como se puede apreciar resulta notable la diferencia entre la cantidad de estudiantes que llegaban hasta finales del segundo año de la carrera durante los cursos 95-96, 96-97 y 97-98, con respecto a los que llegaron a igual período de la carrera en los cursos 98-99 y 99-

00. También es significativa la diferencia de los estudiantes promovidos durante el primer y segundo año de la carrera, con respecto a los resultados arrojados en este sentido en el otro periodo analizado.
Es importante aclarar que durante los periodos comparativos no hubo otro factor que cambiara en el proceso de enseñanza aprendizaje que no fuera la introducción de este recurso didáctico, que antes no poseían, pues los profesores son los mismos, las características de los estudiantes son similares; por lo que nos hace afirmar que estos resultados satisfactorios, en este tipo de curso se debe a la orientación más racional y eficiente del estudio independiente de los estudiantes de cursos semi presenciales.

Conclusiones

Este trabajo en nuestra Universidad constituye solo el comienzo de un trabajo más técnico y de más alto nivel científico con la utilización de hipermedia, que ya se esta comenzando a realizar para estos cursos a distancia, por el momento este fue un intento por palear las dificultades existentes en el rendimiento académico de este tipo de estudiantes que surtió efecto y que se pudo constatar en los resultados docentes de los cursos donde se realizó esta experiencia, que fueron superior con respecto a cursos anteriores, donde no se contaban con estos materiales, lo que a nuestro modo de ver hacía que los estudiantes no estuvieran orientados correctamente al estudio independiente, lo cual redundaba en una nula motivación por el estudio y que éstos causaran baja antes de concluir el primer año de la carrera; con estas nuevas posibilidades de autopreparación los estudiantes se sienten orientados hacia los conocimientos que deben aprender y la manera de llegar a adquirir éstos, lo que hace que se sientan confiados en que pueden lograr vencer las diferentes asignaturas y de hecho sientan más motivación para estudiar y seguir adelante con su proyecto de superación.
Nos permitió, además, recoger la documentación de las diferentes asignaturas sobre soporte electrónico de manera que se logró una mayor organización en el proceso docente educativo, y no solo ayudó a la superación individual de los estudiantes sino que permitió a las autoridades del Ministerio de Educación Superior o de la Universidad analizar o controlar el trabajo que realizan los profesores en aras del mejoramiento del proceso de enseñanza aprendizaje, así como sirvió de orientación para los profesores noveles acerca del trabajo metodológico y de la experiencia del departamento, el cual , en muchos casos enriquecieron aportando ideas nuevas.

Referencias bibliográficas

De Pablos, J. (1996). *Tecnología y Educación: una aproximación sociocultural.* Barcelona: CEDECS.
Hernández, Alicia (1998). Diseño curricular en el sistema de Educación a distancia, tesis de maestría, Universidad de La Habana.
Mena, M. (1994) Nuevos Enfoques Pedagógicos para mejorar la producción de materiales en la Educación a Distancia en Journal of Distance Education, Canadá.

Desarrollo del Curriculum

Nivel Medio

Estudio de la curricula y organización de los contenidos correspondientes al tercer ciclo de EGB y polimodal de las escuelas medias dependientes de la Universidad Nacional del Sur

G. Guala, E. Güichal, V. Oscherov, B. Friedli
Departamento de Matemática y Escuelas Medias. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Argentina
gguala@arnet.com.ar eguichal@criba.edu.ar oscherov@criba.edu.ar

Resumen
Este trabajo da cuenta de lo realizado en el marco del Proyecto: *Estudio de la Currícula y Organización de los Contenidos correspondientes al Tercer Ciclo de la EGB,* durante el ciclo lectivo correspondiente al año 2.000. Es llevado a cabo por un equipo de docentes – investigadores pertenecientes al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur (UNS), conjuntamente con la Coordinación del Departamento de Matemática de las Escuelas Medias dependientes de dicha Universidad (EMUNS), quienes ante la necesidad de la revisión y actualización de la currícula correspondiente al Tercer Ciclo de la Educación General Básica (EGB), originada particularmente por las reformas estructurales producidas en las EMUNS a partir de la aplicación de la Ley Federal de Educación, se propusieron generar un espacio de reflexión, estudio e investigación dirigido a docentes de dichas escuelas. En este sentido instrumentamos un Seminario – Taller permanente con el objeto de lograr consensos en la construcción del Proyecto Curricular del Area de Matemática, potenciar nuevos enfoques metodológicos de trabajo en equipo de docentes de la EGB y proponer estrategias de mejoramiento contínuo en la práctica docente. Así mismo, se buscó mediante el tratamiento conjunto de los contenidos con docentes del Tercer Ciclo de la EGB y de la Educación Polimodal, la articulación entre los distintos niveles y orientaciones de las EMUNS.

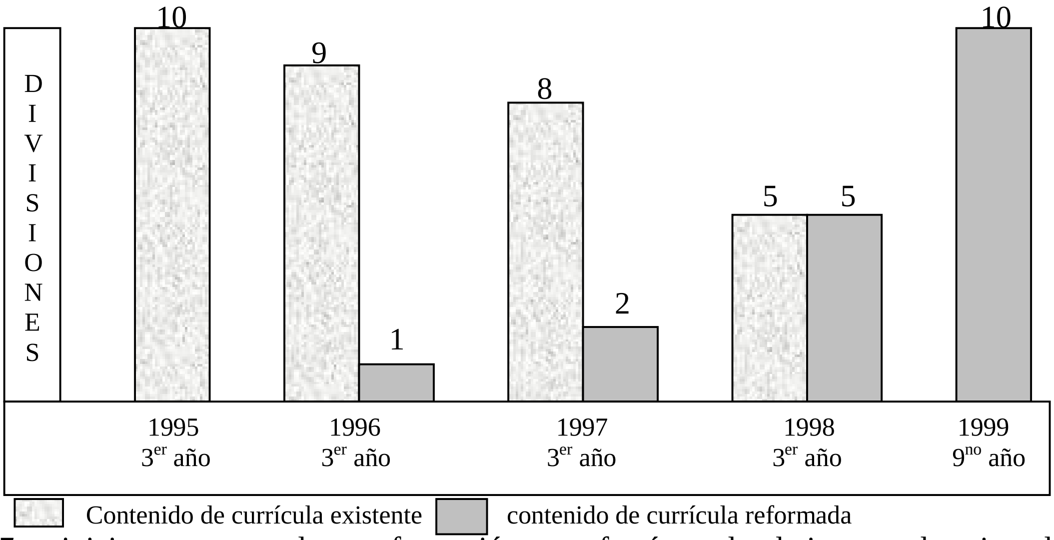
Contexto de transformaciones

En 1995 constituimos un equipo de trabajo, integrado por docentes – investigadores pertenecientes al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y al Tercer Ciclo de la Educación General Básica de las Escuelas dependientes de la misma, que se abocó a la realización de proyectos de innovación pedagógica.
En ese momento la estructura de las EMUNS era la siguiente:

- EMUNS
  - Departamento de Aplicación
    - Jardín de Infantes (3 a 5 años)
    - Escuela Primaria (1^{ero} a 7^{mo} grado)
  - Escuela de Ciclo Básico (1^{ero} a 3^{er} año)
  - Ciclo Superior
    - Escuela Superior de Comercio (4^{to} a 6^{to} años)
    - Escuela Normal (4^{to} a 6^{to} años)
    - Escuela de Agricultura y Ganadería (4^{to} a 6^{to} años)

Trabajamos con un contenido de tercer año en el que los alumnos presentaban dificultades de aprendizaje, esto es, con: “Polinomios: operaciones, factorización, uso de la regla de Ruffini y resolución de ecuaciones algebraicas”.
Observábamos que las dificultades se presentaban al momento de la aplicación del contenido en distintos contextos y más tarde, tanto en el ciclo superior como en el ingreso a la universidad, era necesario recomenzar desde el principio. Entendíamos que una de las

causas era el tratamiento del tema recurriendo a la resolución de numerosos ejercicios siguiendo determinados patrones que conducían a una mera mecanización.
El cambio propuesto en ese momento fue el de dejar el estudio de los polinomios para ciclos superiores y, profundizando de este modo el trabajo con números reales, abordar los temas mencionados desde el concepto de función polinómica en una variable, función a la que definimos como suma de una función constante con productos de una función constante por una potencial, agregando posteriormente *función racional*
De 1996 a 1998 se continuó con ese enfoque, aumentando cada año el número de divisiones hasta completar los existentes. Un esquema de tal situación es el siguiente:



En 1997 se inicia un proceso de transformación que afectó a todo el sistema educativo al aplicarse la Ley Federal de Educación y que, particularmente, provocó reformas estructurales en las EMUNS cuya organización pasó a ser la siguiente:

EMUNS
- Nivel Inicial (3 a 5 años)
- Educación General Básica
  - Primer Ciclo (1^{ero}, 2^{do} y 3^{er} años)
  - Segundo Ciclo (4^{to}, 5^{to} y 6^{to} años)
  - Tercer Ciclo (7^{mo}, 8^{vo} y 9^{no} años)
- Nivel Polimodal (1^{ero}, 2^{do} y 3^{er} años)

El grupo se planteó entonces participar en la construcción de una propuesta curricular que respondiera a los desafíos generados por esta reforma. Para hacerlo propusimos el Proyecto: *Estudio de la Currícula y Organización de los Contenidos correspondientes al Tercer Ciclo de la EGB.*
Con la puesta en marcha del mismo nos proponíamos trabajar por una enseñanza más significativa para los alumnos y por una transformación generada desde los propios actores.

Contábamos para ello con:

- Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica, emanados del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, aprobados en 1994.

- Documentos Curriculares de la Jurisdicción emanados de la Dirección de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.
- Producción en el campo de la Didáctica de la Matemática y de la Teoría Curricular, que provee de un marco teórico para tratar problemas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y problemas curriculares.
- El Curriculum de las EMUNS, que surgió de la reflexión conjunta de docentes y directivos, pero que no registraba cambios significativos, en tanto documento escrito, desde fines de la década del 70.
- Intencionalidad de directivos y de un grupo de docentes, participantes en diversas experiencias áulicas realizadas con anterioridad, de comprometerse y comprometer al mayor número de docentes en la construcción de un nueva Curricula.

Nuestra propuesta

Basándonos en lo que contábamos y considerando en principio cuestiones vinculadas al curriculum como: el problema del curriculum, considerado en el sentido de Stenhouse (1987): *el problema del curriculum más sencilla y directamente formulado es el de relacionar ideas con realidades, el de ligar el curriculum concebido o en el papel con el curriculum en clase*; la relación planteada por Angulo Rasco (1994) entre las que denomina dimensiones básicas de nuestra razón (representación y acción) y las distintas acepciones de curriculum marcando la distinción entre la racionalidad de la representación (curriculum como contenido) y la racionalidad de la acción (curriculum como acción interactiva y construcción práctica) y la necesidad de considerar el curriculum como representación de la acción (curriculum como planificación); la concepción de Gagné (1967), quien considera al curriculum como *materia de aprendizaje* y como una secuencia de unidades de contenido que se articulan apoyándose unas en las otras en la secuencia, de manera que el alumno necesite dominar las capacidades de las anteriores para pasar a la siguiente –criterio tecnicista predominante aún hoy en día en diversas asignaturas, pero que podemos rescatar en cuanto a que en Matemática es necesario elaborar secuencias didácticas, no rígidas ni prescriptivas sino lo suficientemente flexibles, que permitan recuperar los saberes previos para construir nuevos conceptos que, a su vez, sirvan de base para otros nuevos–; el respeto hacia la *especificidad del contenido* (Díaz Barriga, 1985) en la construcción del curriculum para, de esta manera, *conformar la construcción metodológica a partir de la estructura conceptual (sintáctica y semántica) de la disciplina y la estructura cognitiva de los sujetos en situación de apropiarse de ella* (Edelstein, 1996). Con todos estos elementos nos propusimos generar un espacio de reflexión, estudio e investigación que durante el ciclo lectivo correspondiente al año 2000 se dio a través de un Seminario – Taller permanente. Este Seminario tuvo por objetivos: lograr consensos en la construcción del Proyecto Curricular del Area de Matemática, potenciar nuevos enfoques metodológicos de trabajo en equipo de docentes de la EGB y proponer estrategias de mejoramiento contínuo en la práctica docente.

Aspectos del Seminario – Taller

En el mes de mayo de 2000 se realiza la presentación de la propuesta. Comprometen su participación en el Seminario un buen número de docentes, especialmente aquellos que a raíz de la Reforma Educativa tratarán con alumnos de entre 12 y 13 años (antes lo hacían

con alumnos de 14 y 15) y aquellos que se desempeñan como docentes en Educación Polimodal. Así mismo se acuerda que el contenido *funciones*, uno de los ejes transversales de la currícula de la EGB, será el primero en abordarse.
Se establecen encuentros periódicos, de dos horas de duración, en los que se promueve la participación activa de todos los asistentes, tanto en actividades grupales como individuales. Estas estuvieron orientadas, por un lado, hacia el análisis y la reflexión sobre las propias prácticas, a la identificación de dificultades en el aprendizaje del contenido abordado, a la propuesta de distintas estrategias de enseñanza, a la construcción de secuencias, y, por otro lado, al tratamiento del concepto de función, de la representación de una función en diferentes registros relacionada con la articulación entre registros, a la modelización. Se incluyeron momentos no presenciales destinados a lectura de documentos curriculares y bibliografía referida al contenido disciplinar tratado y a su didáctica que constituyeron un insumo para los encuentros.
Dado que las EMUNS cuentan con Laboratorio de Computación fue posible trabajar en el mismo. Como capacitadores propusimos el uso de un programa amigable y orientamos en su uso, sin embargo, puesto que había docentes que utilizaban otros y con buenos resultados, la elección fue abierta. Algunos docentes por primera vez utilizaron la computadora y realizando pequeñas experiencias con sus alumnos se sorprendieron al trabajar con un registro gráfico de funciones que les permitió visualizar propiedades de la misma sólo pensables en otros niveles.
Se realizaron experiencias áulicas y se analizaron las planificaciones presentadas por los docentes del Tercer Ciclo de la EGB

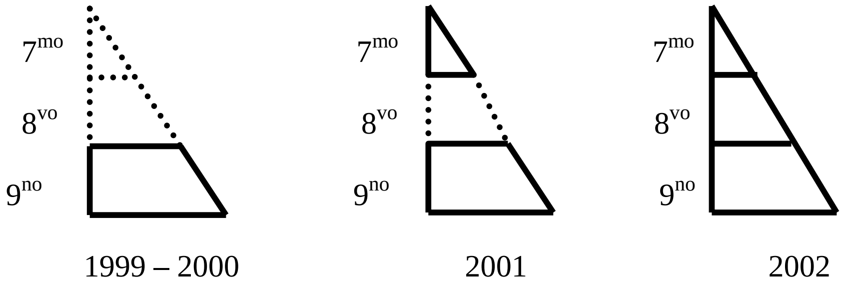
Una primera aproximación para la construcción de la currícula del Tercer Ciclo considerando el concepto de función

Durante el seminario se realizaron observaciones desde las experiencias áulicas y reflexiones sobre las prácticas cotidianas señalándose entre otras las siguientes consideraciones a ser tenidas en cuenta en la construcción de la nueva currícula.

- Desfazaje entre lo planificado y la acción en el aula. Los docentes cuestionaron la concentración, en el noveno año, de un excesivo número de contenidos.
- Pertinencia del desarrollo del concepto de función polinómica y posteriormente la racional con su nuevo enfoque observada en los casos en que se realizaron experiencias áulicas.
- Traslado de los contenidos del tercer año tradicional, con un desarrollo similar, al noveno año correspondiente a la reforma sin tener en cuenta mínimamente que los alumnos tenían edades diferentes.
- Estudio, dentro de la propia disciplina, de la funciones de proporcionalidad directa e inversa, sin haber considerado el concepto de función y restringiéndose únicamente a un registro gráfico al presentar el tema.
- Uso, lectura y análisis, en séptimo año, de tablas y gráficos, no sólo en Matemática sino también en otras asignaturas, sin utilizar el concepto de función.
- Consideración de las funciones puntuales desde un enfoque geométrico exclusivamente.

A ellas se agregaron las experiencias realizadas a partir del seminario en séptimo y octavo años trabajando sobre el concepto de función.
Todo esto fue tenido en cuenta en la nueva currícula.

Veamos un esquema de la reforma propuesta que pasa de la concentración del contenido función en noveno año a su tratamiento en forma espiralada en los tres años del tercer ciclo:



Conclusiones

Creemos que esta primera etapa en el desarrollo del proyecto, favoreció la conformación de grupos de trabajo en la institución, generó algunos acuerdos relacionados con aspectos de la enseñanza del contenido *funciones* y su didáctica, permitió analizar el uso de distintos recursos, en particular la computadora, y junto a las experiencias áulicas constituyó la base de una primera aproximación a la currícula del Tercer Ciclo de la EGB. Cabe agregar que docentes de matemática e informática del Segundo Ciclo se encuentran trabajando con grupos de alumnos de quinto y sexto año en una introducción del concepto de función a través de juegos de estrategia y utilizando variables relacionadas.

Referencias bibliograficas

Azcarate; Deulofeu (1990). *Funciones y Gráficas*. Editorial Síntesis. Colección: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Libro 26. Madrid..

Artigue (1990). Epistemologie et Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 2.3. Traducción de Artigue M. para uso en sus cursos dictados en UBA.

Baquero; Braslavsky; Llorente: *La teoría de Lev Vigotsky. Nuevas lecturas a la luz de problemas actuales*. Novedades Educativas Nº 113. Buenos Aires–Mexico D. F.

Díaz Barriga (1985). *Didáctica y curriculum*. México, D.F. Ediciones Nuovomar.

Edelstein (1997). *Un capítulo pendiente: el método en el debate didáctico contemporáneo*. En Camilloni; Davini; Edelstein; Litwin; Souto; Barco: *Corrientes Didácticas Contemporáneas*. Ed. Paidós. Biblioteca: Cuestiones de Educación. Reimpresión. Argentina

García; Martínez; Miñano (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas.* Editorial Síntesis. Madrid.

IREM (1996). *Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas*. Topiques.

Martínez Bonafé (1994). *Los proyectos curriculares como estrategia de renovación pedagógica*; Angulo Rasco: *¿A qué llamamos curriculum*?; ambos en: Angulo; Blanco(coordinadores): *Teoría y desarrollo del currículo*. Ediciones Aljibe. España.

Stenhouse (1996). *La investigación como base de la enseñanza.* Ediciones Morata. S.A. Madrid. España. Reimpresión.

UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas (1995). *Lenguajes gráficos en Matemáticas.* Nº 4. Año 2. Grao. Barcelona. Abril.

Desarrollo del Curriculum

Nivel Superior

Análisis de textos para determinar contenidos de enseñanza

Gustavo Enrique Menocal
Universidad del Norte Santo Tomas de Aquino
gusmenocal@hotmail.com

Resumen
El objetivo del presente trabajo es la selección de los contenidos de Matemática que se deberían incluir para cubrir los requerimientos mínimos de los perfiles profesionales y las asignaturas de aplicación en las carreras de Contador Público y Licenciado en Administración de Empresas. Se trata de una investigación teórica sobre la base del análisis de textos. Para realizar el análisis se seleccionaron once textos correspondientes a las asignaturas que determinan los perfiles de ambas carreras; en cada uno de ellos se relevaron los contenidos de Matemática, analizándolos brevemente y consignando su ubicación. Luego se procedió al ordenamiento y análisis de los datos, que permitió establecer un orden de prioridades y un criterio de selección. Finalmente se formularon conclusiones y algunas recomendaciones.

Desarrollo

Analizando los principios curriculares seguidos por el autor, tanto la **selección** como la **secuenciación de los contenidos** deberían tener: **significatividad lógica**; en cuanto a que los contenidos del aprendizaje deben estar estructurados de manera tal que permita a los alumnos acceder a los conocimientos nuevos utilizando los que ya conocen; **significatividad psicológica**, en el sentido de presentar las situaciones problemáticas con un grado de complejidad, significatividad y avance que sea posible alcanzar significativamente por los estudiantes; y **significatividad social**, de modo que el avance en los conocimientos de Matemática permita al alumno un mejor desenvolvimiento con el medio en que se encuentra; tanto con sus compañeros, como con sus profesores y con la sociedad en general.

"Las disciplinas por su rigor metodológico y estructura ordenada son el mejor modo de conocer la estructura y funcionamiento de la realidad física... Hay dos problemas que se plantean a esta perspectiva un tanto aséptica y formal de tratar los contenidos y experiencias del currículum. En primer lugar no puede olvidarse que la producción del conocimiento científico, los criterios de validación del mismo y, sobre todo, las orientaciones de la investigación científica y aplicación tecnológica se encuentran estrechamente vinculados a las necesidades e intereses de una formación social peculiar. Esta formación social, es en parte responsable de los que se produce, de cómo se produce y utiliza el conocimiento científico y de por qué no se produce otro tipo de conocimiento. Esta vinculación entre estructura social y producción científica también tiene que enseñarse en la escuela. Sólo así podrá comprenderse la verdadera naturaleza de los procesos de producción del conocimiento científico, que evite una visión simplificada, aséptica y mistificada de la ciencia. En segundo lugar, la producción del conocimiento en áreas disciplinares muy refinadas tiene tanto una razón lógica como una causa histórica...
Desde la posición más dinámica de la perspectiva disciplinar Phenix propone los siguientes criterios de selección: Los contenidos deben extraerse de los campos de búsqueda disciplinada. Esencialización de los contenidos: extraer, de forma racional, los conceptos e ideas claves con mayor capacidad de representación dentro del ámbito respectivo. La selección debe realizarse en función de su capacidad para ejemplificar los

métodos de investigación y los modos de comprensión en el estudio disciplinado. El conocimiento de los métodos y procedimientos de búsqueda capacitan para un aprendizaje permanente. La selección atenderá la capacidad de los contenidos para incitar y activar la imaginación. El crecimiento del significado sólo ocurre cuando el alumno asimila activamente y recrea el material del aprendizaje... El conocimiento científico no se produce en el vacío y descontextualizado, es, por el contrario, relativo a una circunstancia histórica con peculiaridades socio - políticas, es dinámico, provisional, en parte erróneo y cambiante. No conocemos el mundo como es en realidad sino mediado por una estructura conceptual que poseemos. Tal estructura de conocimientos es una construcción humana y, por tanto, relativa a las contingencias de una particular estructura social..." (Gimeno Sacristán, & Pérez Gómez, 1989)

Teniendo en cuenta el nivel en el que se ubica la asignatura y que en todos los casos es preciso tener en cuenta los tres criterios, se recomienda que en la selección de los contenidos, se ponga mayor énfasis en los criterios de significatividad lógica y de significatividad social; mientras que en la organización de los mismos, el énfasis debería estar puesto en el criterio de la significatividad psicológica.
Los libros seleccionados corresponden a las asignaturas: Estadística, Matemática Financiera, Introducción a la Economía, Economía I, Economía II, Costos I y Costos II, integrantes de las carreras mencionadas de la U.N.S.T.A. (Universidad del Norte Santo Tomas de Aquino); asignaturas estas que usan conocimientos de Matemática Superior. Los once textos se componen por: uno de Estadística , uno de Macroeconomía, tres de Economía, cinco de Costos, y uno de Matemática Financiera y están entre los recomendados por las respectivas cátedras, según lo explicitan sus programas.
De cada texto se relevaron los contenidos de Matemática, analizándolos brevemente y consignando el capítulo y la pagina al que corresponden. Se extrajeron algunos casos que parecieron interesantes por contener conceptos e ideas claves con el propósito de ser expuestos como ejemplos en las clases correspondientes y de ese modo incitar y activar la imaginación y el interés por ellos .
El motivo por el cual se analizaron cinco textos de Costos, es que se esperaba encontrar en alguno de ellos más cantidad de contenidos de Matemática Superior; al no hallarlos en el; primero, se buscó en el siguiente y así sucesivamente; pero se concluyó que en esa área de las Ciencias Económicas se utilizan muy pocos contenidos del álgebra y el cálculo.
Del análisis surge que la frecuencia de los contenidos está dada en el siguiente orden:
1)- **Representaciones Gráfica**s:
Lo que más aparece de Matemática en los textos analizados es: Representaciones graficas en dos dimensiones (R^2), predominando las gráficas de rectas y composición de segmentos de rectas; siguen en el orden las gráficas de rectas combinadas con curvas en las que se destacan intersecciones entre ambas. En la mayoría de los casos las representaciones gráficas no están acompañadas por las expresiones analíticas correspondientes, siendo en general ilustraciones de consideraciones empíricas o teóricas. Dentro de las gráficas descritas, se aprecia con cierta frecuencia representaciones en escala semilogarítmicas, que permiten la linealización de las mismas. En muchos casos, las gráficas en X-Y responden a datos de tablas de valores que provienen de situaciones reales; siendo de menor frecuencia la aparición de representaciones gráficas de funciones definidas analíticamente.

Dentro de las representaciones de curvas, es frecuente observar gráficas de funciones racionales, del tipo de hipérbolas equiláteras, aunque solo se grafican las ramas correspondiente al semieje positivo del dominio.
En algunos casos, las representaciones son de variable discreta, mientras que en otros (la mayoría), lo son de variable continua. Para lograr que las funciones de variable discreta sean graficadas y trabajadas como continuas, o con intervalos de continuidad, generalmente se divide la variable independiente en el tiempo; ya que en la mayoría de las situaciones económicas, estadísticas o financieras la variable independiente pertenece al conjunto de los números Naturales (cantidad de unidades producidas, vendidas, etc.).
Aparecen también representaciones de curvas que no responden a funciones, sino a relaciones matemáticas, aunque en ningún caso se observó sus definiciones analíticas.
Obviamente, en el texto de estadística abundan las representaciones gráficas de curvas de Distribución Normal; en muchas de ellas se calcula el área encerrada entre la curva y determinados parámetros; pero este valor se obtiene utilizando tablas confeccionadas a ese fin, no aplicando cálculo de áreas mediante integral definida. También se observa la transformación de dichas curvas de Distribución Normal a diagramas rectangulares o triangulares, en los que resulta más sencillo apreciar las áreas citadas. En el texto de estadística también se observó la aparición de representaciones gráficas en tres dimensiones (R^3), que contenían sucesiones de curvas de Distribución Normal; pero en ningún caso aparecieron las definiciones analíticas. En varios textos se apreciaron representaciones gráficas de: diagramas de torta, en los cuales los datos estaban dados porcentualmente y diagramas de barras verticales y horizontales.
2)- **Recta**:
Estos contenidos aparecen, en su mayoría, como representaciones gráficas sin definiciones analíticas, en algunos casos las hay con sus definiciones analíticas y en otros, solo las ecuaciones que las definen. Es interesante destacar los análisis de pendiente de una recta, que se repiten con frecuencia en los libros de economía, además de intersecciones entre rectas y entre rectas y curvas, paralelismo entre dos rectas (en forma gráfica) y rectas tangentes a curvas (generalmente en forma gráfica).
3)- **Funciones de una variable**:
Predominan las funciones lineales y las funciones racionales, en menor medida las funciones exponenciales y logarítmicas. Se observó que las funciones mencionadas estaban definidas en forma gráfica y también en forma analítica. La mayoría son funciones continuas o con intervalos de continuidad, aunque aparecen funciones discretas.
4)- **Números Reales**:
Es frecuente que aparezcan desigualdades e inecuaciones de diversos tipos, como así también operaciones con las mismas: $\infty \ y \ \frac{1}{\infty}$. En distintos casos se utiliza Valor Absoluto y se encontraron ejemplos de identidades matemáticas, cálculos de x2; x1/2; 1/x; etc. y conceptos de desigualdades: $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(X)dx$ (Neter et al., 1.980).
5)- **Símbolo Suma, Factorial, Combinaciones, Números combinatorios**:
Es muy frecuente encontrar ecuaciones con Símbolo Suma. En algunas circunstancias se presentan en forma genérica (sin sus respectivos límites), y en otras aparecen indicados sus limites inferior y superior: $\dot{e}_x = .5 + \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega - r - 1} l_{x+1}$; (Cissell & Cissell, 1.978). Hay

también ecuaciones en las que se usa factorial, e incluso algunos textos tienen apartados en los que se define factorial: $P(X) = \frac{(\mu x)^x e^{-\mu x}}{X!}$ $X!$: *factorial* (Neter et al., 1.980).

También se han observado casos de Números Combinatorios y desarrollo de potencias de un binomio (Binomio de Newton).

$S = P(1+i)^n$; *Tasa Efectiva*: $r = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$; (Cissell & Cissell, 1.978)

6)- **Derivada:**

En los textos de Economía, Macroeconomía, Estadística y Matemática Financiera, aparecen situaciones en las que se utiliza Derivada: tanto su definición analítica (como limite del cociente incremental), como la interpretación geométrica y distintas aplicaciones entre las que se puede destacar Recta Tangente a una curva, Máximo Relativo y Concavidad.

$$E_d = \lim_{\Delta P \to 0} - \frac{\Delta Q}{\Delta P} \frac{(P_1 + P_2)/2}{(Q_1 + Q_2)/2} = \frac{dQ}{dP} \frac{P}{Q} = - \frac{P\left[df\ (P)/ dP\ \right]}{f\ (P)}$$; (Samuelson, 1.979)

$$\underset{\Delta Q_1 \to 0}{lím} \left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} \right) = - \frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{U_1}{U_2} = RMS\ {}^{Q_2}_{Q_1}$$ Morchon & Beker, 1.997)

Existen situaciones económicas en las que se aplican Derivadas Parciales y Ecuaciones Diferenciales.

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \sum \frac{\partial}{\partial \alpha} (Y - \alpha - \beta X)^2 = \sum \left[-2(Y - \alpha - \beta X)\right]$$ (Neter et al., 1.980)

7)- **Funciones de varias variables:**

Aparecen, en textos de Economía y Macroeconomía, funciones de varias variables. En algunos casos se explica el concepto de "*ceteris páribus*", que consiste en dejar fijas o invariantes todas las variables menos una y analizar cómo la variación de esta influye en la situación económica; luego se toma otra variable, dejando fijas las demás y se repite el análisis, etc.

8)- **Series:**

En orden de aparición siguen las Series, siendo las más frecuentes, las Progresiones Geométricas y las Series Geométricas.

$$S_n = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

$$S_n = Rs_{\overline{n}|} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ (Cissell & Cissell, 1.978)

9)- Integrales:

Aparecen Integrales Definidas con limites de integración reales e Integrales Impropias de distintos tipos.

$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(X)dx;$ $\mu x = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)dx$; (Neter et al., 1.980)

$\sigma^2 x = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu x)^2 f(X)dx$; *Cálculo de áreas bajo la curva de Gauss*

10)- Límite

Este tema aparece de distintas formas: como límite del cociente incremental (definición de derivada) y también se observan:

$\lim_{x \to \infty} f(x)$; $\lim_{x \to 0} f(x)$; (Cissell & Cissell, 1.978)

$$\lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m/j} \right]^{j} = \lim_{m' \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m'}\right)^{m'} \right]^{j} = e^{j}$$

11)- Ecuaciones Algebraicas de grado "n":

Aparecen con poca frecuencia.

12)- Matices y Determinantes:

Aparecen con poca frecuencia en resolución de algunos sistemas de ecuaciones.

Conclusiones

De lo expuesto surge que los contenidos de Representaciones Gráficas deberían enseñarse en forma transversal desde el primer día de clase. Si bien las más frecuentes son las representaciones en R^2, es necesario al menos, incluir conocimientos generales de representaciones en R^3, que aparecen en textos de estadística; como así también la forma de graficar desigualdades (que se utiliza mucho en métodos de resolución de problemas de programación lineal) y graficar e interpretar diagramas de torta, histogramas, etc. En este punto puede resultar muy útil usar como ejemplos los informes periodísticos. (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad lógica).

Se observa que el contenido Recta es muy frecuente, fundamentalmente en interpretaciones gráficas de pendiente, como en intersecciones de rectas entre sí y de rectas con curvas. El autor considera de importancia ahondar en los ejemplos de situaciones reales, buscando seleccionar los que contienen la mayor cantidad de conceptos e ideas claves (pendiente, crecimiento, ordenada al origen, intersecciones, etc.), de modo que sirvan a los estudiantes para expresarse con propiedad y fluidez, tanto en su medio social, como en el académico (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad social).

En el tema de funciones de una variable, se repiten con frecuencia algunos tipos especiales tales como funciones exponenciales y funciones racionales de ciertos tipos. Consecuentemente con lo manifestado en el parágrafo anterior, cuando se elabore el epitome correspondiente seria apropiado profundizar más en estos contenidos con situaciones problemáticas reales. (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad social).

Es obvio que hay contenidos, como propiedades de Números Reales, Desigualdades, Valor Absoluto, etc., que no se pueden dejar de lado; puesto que no sería posible avanzar, sin el manejo de estos en los temas específicos a enseñar, ya que constituyen contenidos de soporte imprescindibles. Pero hay que considerar que los estudiantes ya los adquirieron en el nivel medio, de modo que sería conveniente volver a ellos en clases de apoyo.

Se observa que contenidos como Símbolo Suma, Factorial, Combinaciones, Números combinatorios y Binomio de Newton, aparecen con mucha frecuencia en varios textos de las distintas ramas analizadas; se considera necesario pues, elaborar un epitome que los contenga y que a su vez los relacione con conocimientos más generales. (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad lógica).

Derivada es un contenido de gran aplicación en distintas ramas de las Ciencias Económicas, por lo tanto resulta excelente presentarlo como aplicación de alguno de esos temas mediante situaciones problemáticas significativas y ahondar conceptualmente en la

definición analítica y en la interpretación geométrica; mientras que se cree más apropiado organizar procedimentalmente las propiedades y los métodos o reglas de derivación. (selección de contenidos siguiendo los criterio de significatividad social y psicológica).
La mayoría de los fenómenos económicos y/o sociales dependen de muchos factores, esta situación tratada desde un punto de vista matemático, generan funciones de varias variables. Para analizarlas, es preciso apelar a los conceptos de *ceteris páribus*, o derivadas parciales. Es importante incluir estos contenidos con la profundidad que exige su tratamiento en los textos de economía o estadística en los que aparecen. (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad social).
Se han encontrado numerosos ejemplos de Series Geométricas; esto promueve a tratarla como contenido organizador en el epitome correspondiente. No obstante, se cree innecesario profundizar demasiado en otros tipos de series. (selección de contenidos siguiendo los criterios de significatividad lógico y social).
Asimismo, existen temas que no han aparecido en los textos investigados y que sin embargo figuran en la gran mayoría de los programas de Matemática de las Facultades de Ciencias Económicas y también en la Propuesta de Contenidos Mínimos que publicó la Asociación de Docentes de Matemática en Facultades de Ciencias Económicas y Afines. (Asociación de Docentes de Matemática en Facultades de Ciencias Económicas y Afines, 1.997). Entre ellos el que brilla por su ausencia es Trigonometría. Lo único que se encontró de este tema en los textos analizados fue consideraciones sobre pendiente de una recta, de la forma: $tg\,\alpha$. Lo que hace pensar en la prescindencia de tales contenidos.

Referencias bibliográficas

Asociación de Docentes de Matemática en Facultades de Ciencias Económicas y Afines, (1997, setiembre). Anexo Comisión 1: *Contenidos mínimos área de Matemática*. Salta, Argentina.
Backer, M. et al. (1.983). *Contabilidad de Costos. Un Enfoque para la toma de Decisiones*. México, D. F. México: McGraw-Hill.
Cissell, R. & Cissell, H., (1.978). *Matemática Financiera*. México, D. F. México: Compañía Editorial Continental S.A.
Domínguez, Luis (1979). *Costos por Proceso y Estándares*. Buenos Aires, Argentina: Cangallo SACI.
Domínguez, L. (1981). *Costos Especiales*. Buenos Aires, Argentina: Cangallo SACI.
Domínguez, Luis, (1981). *Costos y Presupuestos*. Decisiones y Técnicas. Buenos Aires, Argentina: Cangallo SACI.
Dornbusch, R. & Fischer, S. (1994). *Macroeconomía*. Madrid, España: McGraw-Hill. Interamericana de España S.A.. 6ta Edición.
Espósito, W. et al. (1987). *Tratado de Contabilidad de Costos*. Buenos Aires, Argentina: Macchi.
Gimeno Sacristán, J. & Pérez Gómez, A. (1989). *La enseñanza, su teoría y su práctica*. Madrid, España: Ediciones Akal S.A.
Morchon, F. & Beker, V. (1997). *Economía. Principios y Aplicaciones*. Madrid, España: McGraw-Hill, 2da Edición.
Neter, J. et al. (1980). *Fundamentos de Estadística*. México, D.F., México: ContinentalS.A.
Samuelson, P.; Nordhaus, W., (1996). *Economía*. Madrid, España: McGraw-Hill.
Samuelson, P. (1979). *Cursos de Economía Moderna*. Madrid, España: Aguilar S.A.

Cursos de iniciación en el área de matemática, experiencia en la escuela de administración y contaduría. FACES UCV

Juana Lorenzo de Centeno
Universidad Central de Venezuela
juanalorenzo@yahoo.com

Resumen

El curso de iniciación de la Escuela de Administración y Contaduría, se viene dictando desde el segundo período lectivo del año 1999, con la finalidad de ofrecer a los estudiantes que ingresan a nuestra Escuela, el desarrollo de un conjunto de destrezas que les permitan comenzar con altas probabilidades de éxito la carrera.

Una de las áreas donde desarrollamos las destrezas mencionadas anteriormente es la de Matemática, donde insistimos en el desarrollo de métodos gráficos para la interpretación de definiciones básicas que se definirán formalmente en Matemática I, II y III.

Realizar cursos de iniciación es un proceso cuestionado en diferentes instancias ¿es necesario invertir recursos en corregir las fallas de educación media? ¿Estamos incrementando la carrera en un semestre innecesariamente? ¿Es preferible repasar la matemática de bachillerato? ¿Se deben incorporar los tópicos tratados en Iniciación en la carrera?

En estos momentos se hace necesario evaluar los contenidos programáticos del curso de Matemática en el proceso de iniciación con el fin de seleccionar su contenido si fuese necesario o comprobar que las estrategias, objetivos, técnicas de trabajo y evaluación han sido adecuadas.

En ese sentido presentamos las siguientes inquietudes para su discusión y revisión con la finalidad de proponer una investigación donde esperamos consultar la opinión de coordinadores, profesores, estudiantes con experiencia en cursos de iniciación dictados por la EAC, estudiantes de nuevo. Ingreso en la EAC y experiencias similares en otras escuelas.

Introducción

El curso de iniciación en Matemática se ha dictado en los 2 últimos años bajo las condiciones siguientes:

Dirigido a:	Estudiantes de la Escuela de Administración y Contaduría con ingreso por prueba interna entre los puestos 51 y 351 (los 50 primeros ingresan directamente a primer semestre.
Tiempo aproximado del Curso:	72 horas
Distribución de las clases:	6 horas semanales
Total de semanas empleadas:	12 semanas
Contenido del Programa experimental:	Se desarrollarán seis (6) temas cuya descripción realizaremos a continuación:

Tema 1. Intervalos y puntos del plano cartesiano

Existen tres representaciones útiles, aunque no totalmente equivalentes, de los intervalos. Éstas serán las que se trabajarán en el tema. La noción de intervalo es utilizada para introducir algunas propiedades. No se darán explícitamente todas las definiciones, ni convenciones con el fin de que el profesor las dé en la medida en que los alumnos la soliciten. Se recomendará no insistir innecesariamente en el formalismo de la teoría de conjuntos.

Los ejercicios del plano cartesiano se utilizarán no sólo para introducir la noción del punto del plano, sino también para enfrentar al alumno con ciertas preconcepciones erradas de la notación algebraica.

Tema 2. Estudios de curvas
Se estudian las curvas (gráfico de función) que tengan como máximo un punto vertical.
En este tema el uso explícito de la noción de función o el de fórmula, entorpecería la comprensión del tópico, además ello se hará posteriormente. Al enseñar el contenido de este capítulo se evitará el uso explícito de la noción de función y no se relacionará el gráfico con las *fórmulas.*

Tema 3. Operaciones con curvas
Los caminos actúan en varias direcciones: por una parte sirven para codificar puntos del plano de manera no trivial. Esta actividad juega un papel importante cuando se debe pasar a una representación o descripción simbólica de aquellas que se ven en el plano. Los caminos también son fundamentales para construir de manera natural las curvas compuestas o la curva inversa. Finalmente, son un recurso invalorable para el descubrimiento de las transformadas horizontales y verticales y el estudio de las propiedades.
El funcionamiento de lo que se llama visión total o global, reside en el reconocimiento, en una curva, de ciertos hechos que van a facilitar la graficación de la curva resultante sin casi tener que hacer operaciones numéricas. Así, algunos de los aspectos más importantes de las curvas al hacer la operación con sus puntos de corte con los ejes x, las partes positivas, las zonas de crecimiento, etc., de esta manera las nociones introducidas en los capítulos anteriores entran en juego, quedan reforzadas y el alumno puede apreciar su utilidad.

Tema 4. Fórmulas y curvas
El diagrama es un recurso semiótico extremadamente poderoso. Para que pueda ser utilizado desde un punto de vista didáctico es necesario asegurar que el alumno tenga una comprensión cabal de su funcionamiento. En este tema se motivaría al alumno para el uso de la calculadora, de esta manera aparece como un recurso útil para condensar información.

Tema 5. Rectas, parábolas e hipérbolas
El estudio de las curvas tratadas en este tema está orientado a interpretar y manipular los coeficientes de las respectivas fórmulas, tanto para graficarlas como para cambiar a la forma algebraica.

Tema 6. Inecuaciones
La resolución de inecuaciones en una variable, privilegia el enfoque funcional, esto posibilita el uso de gráfico de funciones para la búsqueda de la solución y al mismo tiempo, permite evitar la manipulación algebraica del símbolo de desigualdad.
El otro aspecto formativo es aprender a modelar problemas planteados con palabras en términos de sistemas de ecuaciones lineales.
Al haber desarrollado conocimiento de representación gráfica de funciones le resultará más sencillo la comparación entre el método algebraico y el método gráfico de resolución de inecuaciones.
El tema plantea una interacción entre lo cualitativo, dado por el gráfico, y lo cuantitativo dado por el álgebra.

Conclusión

Se pretende con este curso, la comprensión de las ideas básicas del cálculo. En los dos primeros temas se desarrolla un conocimiento intuitivo de los objetos o *curvas* y que usualmente se denominan gráficos de funciones reales.
El tercer tema fortalecerá ciertas nociones algebraicas esenciales, sin hacer ninguna relación con los gráficos.
El cuarto tema une el trabajo con los gráficos hechos en los dos primeros temas con lo algebraico del tercero.
El tema cinco permite refinar y profundizar las ideas del cuatro y los temas restantes permitirán al estudiante conocer gráfica e intuitivamente herramientas de trabajo básicas para el trabajo en la materia Matemática I de la Escuela de Administración y Contaduría.

Resultados

A continuación presentamos los resultados en los dos cursos de iniciación realizados y los resultados en los cursos de Matemática I y Matemática II.

Matemática Iniciación	**SEG 99**	**SEG 00**
Inscritos	177	357
Aprobados	107 (60%)	279 (78,15%)
Reprobados	70 (40%)	78 (21,85%)

La experiencia en los semestres antes y después de realizar un curso de iniciación la resumimos en el siguiente cuadro:

Matemática I	**PRI 99**	**Seg 99**	**PRI 00**	**Seg 00**
Inscritos	415	355	341	199
Aprobados	196 (47,23 %)	232 (65,35 %)	188 (55,13 %)	104 (52,26%)
Reprobados	219 (52,77 %)	123(34,65 %)	153 (44,87 %)	95 (47,74%)

El primer curso de iniciación se dictó en el año 1999 durante el primer semestre, para ese momento el porcentaje de aprobados fue de un 47,23%, considerando que en ese grupo de estudiantes se encontraban cursando los primeros 50 que aprobaron la prueba interna el resultado no podemos considerarlo satisfactorio.
En el semestre siguiente, segundo del 99, el número de aprobados se incrementó a un 65,35%, podríamos atribuir esta leve mejoría a la realización del curso de iniciación pero no podemos ser contundentes en esta afirmación pues hasta la fecha no se ha realizado un trabajo que permita demostrarlo.
Las proporciones se mantienen muy parejas durante el año 2000 razón que nos mueve a preocuparnos en evaluar el resultado de los cursos de iniciación ¿ Vale el esfuerzo continuar con esta propuesta? ¿Debemos cambiar nuestras estrategias?

Matemática II	**PRI 99**	**Seg 99**	**PRI 00**	**Seg 00**
Cursantes	414	349	395	339
Aprobados	190 (45,89 %)	187 (53,58 %)	163 (38,8 %)	140 (41,30%)
Reprobados	224(54,11 %)	162(46,42 %)	232 (61.2 %)	199 (58,70%)

En el segundo semestre de 1999 presenta un incremento en el porcentaje de aprobados lo que parece lógico ya que el porcentaje de aprobados en matemática I aumentó por las razones antes expuestas. Es importante destacar que en los dos períodos siguientes el porcentaje de aplazados aumentó y fue mayor que el porcentaje de aprobados, este hecho nos debe llevar a realizar un análisis profundo sobre el curso de iniciación.

Discusión

Proponemos una investigación que permita evaluar la pertinencia del contenido del curso de iniciación el siguiente esquema de trabajo:

Objetivos Generales:
Analizar la selección del contenido programático del curso de iniciación en la Escuela de Administración y Contaduría, en el área de matemática.
Objetivos Específicos:
1. Estudiar la experiencia de docentes involucrados en el trabajo de iniciación en el área de matemática.
2. Consultar la experiencia de alumnos con experiencia en cursos de iniciación anteriores al año 2001 en la EAC.
3. Evaluar las expectativas de los estudiantes de nuevo ingreso en relación con el curso de iniciación, área de matemática para el año 2001.

Materiales y Métodos:
- Prueba diagnóstico en el área de matemática para los estudiantes de nuevo ingreso.
- Entrevistas de profundidad a docentes con experiencias en cursos de iniciación en la EAC.
- Entrevista de profundidad con docentes de la cátedra de matemática en la EAC.
- Consultas de opinión a los estudiantes de nuevo ingreso y participantes del curso de iniciación 2001.
- Prueba diagnóstico en el área de matemática para los estudiantes de nuevo ingreso Primer Semestre

Referencias bibliográficas
Alson, Pedro. (1996). *Método de graficación*. 3ª ed. Caracas: Editorial Erro.
Párraga R., Alicia. (2000). *Proyecto de curso de iniciación II-2000.* Caracas: U. C. V., Escuela de Administración y Contaduría.
Silva, Metal. (1982). *La habilidad numérica del estudiante que solicita ingreso a la Educación Superior.* Mérida (Venezuela): U. L. A.
Venezuela. Universidad Central. Comisión de Admisión Interna, Escuela de Administración y Contaduría. (1996). *Consideraciones críticas al informe sobre los resultados de la selección de nuevos estudiantes presentado por la Dirección de la Escuela de Administración y Contaduría*. Caracas.
Venezuela. Universidad Central. (2001). *Jornadas de Admisión 2001. Compartiendo experiencias.* El Laurel (Estado Miranda, Venezuela).
Venezuela. Universidad Nacional Abierta. (1992). *Procesos y estrategias de solución de problemas.* Curso Introductorio. Caracas.

Documentos de los Grupos de Trabajo y Discusión

Actividades de enseñanza que pueden apoyar el tránsito de los estudiantes desde la secundaria a la Universidad

Delia Belgrano Rawson*, Guillermo W. Herrera*, Magdalena Pagano**,
Walter Álvarez**, Eduardo Lacués**
*Facultad Regional Mendoza. Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
**Universidad Católica del Uruguay (UCU). Uruguay
deliab@frm.utn.edu.ar deliab@tutopia.com gherrera@frm.utn.edu.ar gwherrera@tutopia.com
mapagano@ucu.edu.uy walvarez@ucu.edu.uy elacues@ucu.edu.uy

Resumen

El problema de la articulación entre la enseñanza secundaria y la terciaria provoca preocupación en nuestros países, por muy diversos motivos. En el primer año de universidad un gran número de alumnos abandona, o al menos, se atrasa en relación con los plazos previstos en las distintas carreras. En este escenario, Matemática juega un papel destacado, al punto de ser señalada como uno de los principales obstáculos a superar por parte de los estudiantes. La propuesta es discutir estas cuestiones, con las evidencias que cada uno pueda aportar, y procurar acercar soluciones que puedan ser implementadas y evaluadas en nuestras aulas. La forma de trabajo que sugerimos es la de dividir cada sesión en dos partes: una expositiva en la que se aborde alguno de los aspectos anteriores, seguida de otra deliberativa en la que cada uno de los integrantes pueda hacer su aporte. Entre los temas a exponer figuran:

-Requerimientos que se exigen al ingresante en relación con sus conocimientos de Matemática.

-Apoyos que pueden suministrarse a los estudiantes para provocar el desarrollo de sus capacidades intelectuales.

-Formas de generar actitudes positivas hacia el aprendizaje de la matemática.

Constitución y forma de funcionamiento del grupo

En este grupo se integraron docentes tanto de enseñanza secundaria como universitarios, provenientes de diferentes países (Argentina, Costa Rica, México, Venezuela, Uruguay).
Se trabajó en dos sesiones. En cada una, luego de una corta introducción por parte de los convocantes, se pasó a un régimen de mesa redonda, en la que se recibieron los aportes de gran número de los participantes.

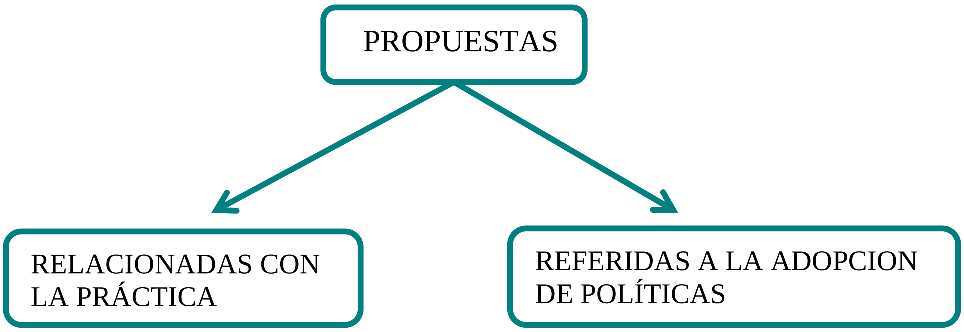
Análisis de la situación

Como una primera conclusión, puede establecerse que en los diferentes países existen diversas modalidades de egreso de la secundaria (que van desde la aprobación de las diferentes asignaturas que componen el currículo de la escuela secundaria, hasta la necesidad de rendir distintos exámenes de calificación) y de ingreso a la universidad (desde cumplir la sola condición de haber completado los estudios secundarios hasta la de concursar por alguna de las plazas disponibles).
Una segunda conclusión es que también existen marcadas diferencias entre los contenidos matemáticos que se tratan en la secundaria, y por lo tanto en la universidad, en los diferentes países. En algunos, el cálculo diferencial se trata a partir del ingreso en la universidad, en tanto en otros forma parte de los programas de secundaria.
A pesar de constatar estas diferencias, existe consenso en el sentido de que los cursos de matemática del primer año universitario se constituyen en un barrera difícilmente franqueable para muchos de los estudiantes. Esto ha llevado a que en muchos lugares se

implementen medidas tendentes a superar esta situación, que han tomado formas como cursos de ingreso previos al comienzo de los correspondientes al currículo universitario o como trabajos de compensación en forma simultánea a estos mismos cursos.
Sin embargo, y pese a que algunas de estas experiencias se consideran exitosas, se reconoce la existencia de un problema estructural, que no parece ser abordable sólo por los docentes de secundaria ni sólo por los universitarios, y que está unido a factores cognitivos, afectivos y actitudinales que se asocian con el tránsito entre la secundaria y la universidad.
En el orden cognitivo, se notan necesidades de orden diferente entre la secundaria y la universidad en cuanto a capacidades intelectuales (como las de inducir generalizaciones, reconocer casos particulares, manejar registros simbólicos de diversas clases, entre otras), y en la universidad suele aceptarse como responsabilidad casi exclusiva de la secundaria el desarrollarlas a un nivel adecuado.
En el plano afectivo puede mencionarse la diferente consideración del estudiante que se hace en cada subsistema, de manera que se pasa de tutelarlo muy cercanamente en la secundaria a dejarlo librado a sus solas posibilidades en la universidad, provocando de esta manera reacciones de aislamiento o de desamparo.
En cuanto a lo actitudinal, se señala que el trabajo en la universidad requiere, entre otras condiciones, de dedicación prolongada a tareas de diversos tipos (entre los que se incluyen trabajos de laboratorio, confección de informes, resolución de ejercicios y de problemas), y de cierta capacidad de tolerar presiones (representadas, por ejemplo, por la necesidad de cumplir con fechas de entregas de trabajos parciales o rendir exámenes de acuerdo a calendarios muy cortos), en un grado muy distinto al que se plantea en secundaria.
El reconocimiento de estos hechos conduce a la necesidad de disminuir las distancias que suelen separar a docentes de secundaria y universitarios, de manera de tender puentes que vinculen las actividades matemáticas que se realizan en cada subsistema y así minimizar el impacto negativo que se produce en los estudiantes al pasar de uno a otro.
Aceptada esta necesidad, la atención se concentró en el siguiente problema: si los distintos países tienen diferencias tan marcadas en sus currículos, tanto en secundaria como en la universidad, ¿qué clase de propuestas pueden tener una generalidad suficiente como para ser válida en todos ellos?.
La respuesta a esta cuestión constituye el aporte de este grupo al diseño de prácticas de enseñanza y a la implementación de políticas institucionales en pos de lograr una mejor inserción en el sistema universitario de los estudiantes que egresan de las escuelas secundarias, y se presenta a continuación.

Propuestas

Dividimos nuestras propuestas en dos clases: las que tienen que ver con la práctica docente y las que se refieren a la adopción de políticas institucionales.



En relación con la práctica docente, hubo acuerdo en que, debido a las diferencias detectadas, no podía pretenderse abordar el problema de qué contenidos matemáticos debían tratarse y que, por lo tanto, era necesario tratar de identificar prácticas que pudieran llevarse a cabo con cualquier contenido.

En este sentido, se acepta que debe buscarse un balance entre diversos aspectos de los saberes matemáticos:

a) Origen histórico y social: problemas que dieron origen ideas matemáticas; evolución en el tiempo de las formas de concebir la matemática.
b) Aplicabilidad: construcción de modelos; interpretación, predicción y control de fenómenos.
c) Carácter formal: estructura lógica; representaciones simbólicas.
d) Procesos de cálculo: numérico; simbólico.

En otro orden, se decidió abordar las tres dimensiones mencionadas antes: cognitiva, afectiva y actitudinal, y tratarlas por separado.

En cuanto a la primera, se reconoce la necesidad de que se trabaje en el desarrollo de capacidades generales, entre las que se cuentan las siguientes:

a) Comprender consignas y aplicar procedimientos apropiados para responderlas.
b) Abstraer propiedades generales comunes a diversos objetos.
c) Reconocer casos particulares de formulaciones generales.
d) Comunicarse con otros en forma adecuada (escrita, oral, gráfica, simbólica) a la situación de trabajo.
e) Traducir la información presentada en un registro (gráfico, simbólico, verbal, numérico) a cualquiera de los otros.

En el aspecto afectivo, se detecta la necesidad de apoyar el proceso de transformación personal que lleva a un estudiante de la secundaria a convertirse en uno universitario, mediante la generación de compromisos con sus pares, con sus profesores y con la institución. Para atender este aspecto es que se hacen propuestas en cuanto al diseño de políticas institucionales.

La tercera componente considerada es la actitudinal. Éste es un tema particularmente importante, porque se considera que algunas actitudes de los estudiantes benefician los procesos de aprendizaje. En este sentido, se planteó buscar formas de estimular actitudes como las siguientes:

a) Persistencia frente a las dificultades, como forma de encarar proyectos a largo plazo como el que constituye una carrera universitaria.
b) Disposición a aceptar presiones y controles, propios de la actuación profesional y de la propia vida académica.
c) Valoración positiva del saber, en particular del matemático, como elemento organizador del conocimiento personal y fundamento de la práctica profesional.
d) Asunción de la propia responsabilidad en el proceso de formación personal y profesional.

Se entiende que un planteo como el anterior puede facilitar la búsqueda de troncos comunes en la secundaria (preparatoria a la universidad), en la universidad y entre ambos subsistemas, en cada país en particular, de manera que sea posible identificar contenidos matemáticos que se conviertan en marcos de referencia sobre los que diseñar prácticas docentes concretas, que acorten las distancias que actualmente existe entre ambos subsistemas.

Por otro lado, la atención de los integrantes del grupo también se centró en las diferentes formas de organización de los sistemas educativos y de las instituciones de enseñanza, tratando de detectar aquellos aspectos que se considera favorecen los aprendizajes y de esta manera, propiciar la adopción de políticas que tiendan a fortalecerlos.

En relación con este aspecto del problema, se consideró que es necesario atender el problema de la preparación de los profesores, sobre todo los de la universidad, donde una larga tradición ha establecido que la formación en docencia es de importancia menor frente a la disciplinar o incluso la profesional. Se entiende que dado que los cursos universitarios de los primeros años son una continuación natural de los de la secundaria, debe buscarse para atender estos cursos a profesores que reúnan un sólida preparación en la disciplina matemática y a la vez en didáctica, de manera que puedan afrontar el desafío de presentar los contenidos de sus cursos en forma correctamente adaptada a la carrera profesional en la que éstos se insertan.

En este sentido, deben buscarse caminos que propicien los contactos entre docentes, tanto con los del interior de cada país como con los del extranjero. Estos intercambios redundan en mayores motivaciones para desempeñar la tarea, a la vez que son oportunidades de mejorar la formación profesional.

Otro elemento que entró en esta discusión es el del establecimiento de un sistema de tutorías (que algunos integrantes del grupo mencionaron como experiencia exitosa en sus instituciones), que coloca a cada ingresante a la universidad en relación directa con un docente que se encarga de seguir su proceso académico.[1] Se considera que este sistema presenta al menos dos elementos que favorecen el desempeño del alumno: por un lado, se generan vínculos que progresivamente van comprometiendo al estudiante con la institución, a través de sus compañeros y del cuerpo docente; por otro, se puede acompañar en el aspecto afectivo el tránsito que debe hacer un joven para adquirir autonomía y responsabilizarse por su propia formación.

[1]Tutoria: proceso de acompañamiento durante la formación de los estudiantes, que se concreta mediante la atención personalizada a un alumno o a un grupo reducido de alumnos por parte de académicos competentes y formados para esta función, apoyándose conceptualmente en las teorías del aprendizaje más que en las de enseñanza; dicho proceso de acompañamiento es de tipo académico que busca mejorar el rendimiento de los estudiantes en aspectos tanto académicos como afectivos, solucionar problemas escolares, promover y corregir hábitos de estudio, trabajo, reflexión y convivencia social, entre otros.

Vinculado con el anterior, pero más próximo al problema de los aprendizajes, se trató el tema de los diferentes sistemas de apoyo docente a los estudiantes. En particular, se señala la importancia de que se establezcan momentos dedicados a clases de consulta, en las que los estudiantes tengan oportunidad de un contacto más personal con el profesor. Se mencionaron experiencias que muestran que muchos estudiantes pueden aprovechar estas instancias para mejorar su desempeño o para superar carencias previas. Este tipo de apoyos no tiene por qué limitarse al ámbito universitario, y pueden ser además oportunidad para que se trabaje no sólo en los aprendizajes disciplinares, sino también en las dimensiones que se mencionaron antes. Estas actividades se asumen por los docentes como parte de su compromiso con la institución, y, al menos en el nivel universitario, pueden convertirse en una instancia de participación para estudiantes avanzados.

Resumen

Se ha descrito la integración y el funcionamiento del grupo de discusión.
Se presenta un análisis de la situación que se da en diferentes países, y partir de este diagnóstico se efectúan propuestas en dos ámbitos diferentes: el que se refiere a las prácticas docentes y el que tiene que ver con la implementación de políticas institucionales.
Se destaca como una conclusión fundamental la necesidad de tender puentes entre las actividades de enseñanza de matemática en la escuela secundaria y en la universidad, a través de un mayor diálogo entre los docentes de cada subsistema.

Índice de autores

Formación de Profesores

Nivel Medio

Generación de problemas a partir de situaciones cotidianas

Nora Andrada, María Casbas, Nydia Dal Bianco, Julio López, Estela Torroba
Universidad Nacional de La Pampa. Argentina
nandrada@cpenet.com.ar   juliohlopez@cpenet.com.ar

Resumen
Para permitir a los docentes cumplir eficazmente con su tarea y a la vez ligar lo que deben enseñar con las situaciones cotidianas, se propone que se ejercite la creatividad de situaciones problemáticas para plantear a sus alumnos, a partir de publicaciones de difusión masiva, publicidades en cualquier medio al alcance de sus alumnos, cuestiones observables en el medio y por todos conocidas, lecturas en textos de otras asignaturas, etc., y que a su vez, trasmitan la habilidad de leer en múltiples situaciones corrientes las que pueden ser resueltas con los conocimientos matemáticos vertidos en el aula.

Marco teórico

Los contenidos de Matemática que se han de impartir en la Escuela Media- Polimodal no son sólo necesarios por su valor de preparación para conocimientos posteriores que los jóvenes habrán de adquirir en otra etapa de su formación, sino por el valor propio que esta formación aporta y por su necesidad para la vida en la sociedad actual. Es necesario mostrar a los alumnos que los conocimientos matemáticos nos brindan la posibilidad de proponer modelos que permiten describir y comprender complejos procesos del mundo natural y social y sirven para resolver los más diversos problemas.
Múltiples investigadores de renombre sostienen que, entre los elementos más importantes que existen para desarrollar la capacidad de resolver problemas, está el hecho de brindar la oportunidad de resolver gran variedad de problemas matemáticos. La enseñanza de la Matemática a través de la *resolución de problemas* es una corriente actual, avalada por matemáticos y educadores de prestigio, entre los que puede mencionarse al Dr. Luis Santaló. Son muchos los autores que han encarado sus textos precisamente en ese sentido, planteando problemas tanto como disparadores para la presentación y tratamiento de un tema, como para ejercitar conceptos y métodos, afianzar contenidos o agilizar el uso de las herramientas adquiridas.
El aprendizaje de la *resolución de problemas* con contenido matemático es un proceso a largo plazo y es tarea de los docentes ayudar a los alumnos a adquirir confianza en sus posibilidades, sin evitarles el esfuerzo del aprendizaje. El docente no debe estar para dar soluciones sino para ayudar a los alumnos a utilizar los recursos de que dispone, eventualmente mediante una serie de preguntas que encausen su tarea.

Objetivo del trabajo y la experiencia

Pensando siempre en el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática, particularmente en el Nivel Polimodal, hemos acercado a los docentes que desempeñan su tarea precisamente en ese nivel, una propuesta de trabajo basada en la *resolución de problemas* planteados a partir de situaciones cotidianas del entorno de los alumnos, o extraídas de publicaciones periódicas no matemáticas, o de libros de texto de las propias o de otras asignaturas.

Es cierto que a veces no resulta simple encontrar publicaciones que circunscriban una noticia, una publicidad o un comentario a cuestiones que permitan resolverse mediante el uso de una determinada herramienta matemática que queremos enseñar o aplicar. Sin embargo, sí es posible tomar la idea desde una de esas fuentes para transformarla en una situación problemática. Será necesario realizar una recreación del material, adaptándolo, simplificándolo o completándolo. El docente será capaz de "extraer" o "adecuar" una situación corriente a una situación viable de ser presentada a los alumnos como un planteo que les permita aplicar conocimientos y herramientas conocidas para su resolución o comprensión. Sería oportuno también mostrar a los alumnos el proceso de adaptación que realizó el docente para llegar a ese planteo, para inducir procesos similares en ellos.
La aplicación del método de trabajo que propusimos, implica otras cuestiones indirectas que beneficiarán tanto al propio docente como a sus alumnos. Permite, además de alcanzar el objetivo directo (cual es el de lograr que el alumno conozca, aprenda o domine un tema propio de la asignatura), que se acostumbre al proceso de *transferencia* de esos conocimientos a la solución de cuestiones observables en la realidad.
La fuente natural para realizar esas búsquedas y adaptaciones tiene que ser aquella con la que los alumnos del curso se vinculan habitualmente, con la que tienen contacto en su vida cotidiana. Puede tratarse de una revista, un diario, de la observación de programas o publicidades televisivas, de elementos por todos conocidos como una tarjeta de crédito, un resumen bancario, un formulario de recolección de datos para cualquier institución o actividad cercana. Y si además, se tiene la posibilidad de descubrir en esos alumnos un interés particular en el tema o elemento seleccionado o a seleccionar para la propuesta de problemas, seguro que el interés que se despertará será mucho mayor del previsto y además los resultados logrados con el trabajo realizado con esa base, mucho más provechoso desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje.
Como una experiencia adicional que podría llevarse a la práctica y que aportaría significativamente al objetivo perseguido, puede sugerirse que los mismos alumnos aporten el material a usar, que busquen situaciones de la realidad que puedan relacionarse con lo aprendido o que hacen referencia a los conceptos y contenidos que se están tratando en determinado momento del curso. Esta metodología de búsqueda de fuentes de situaciones para generar problemas seguro que permitirá al docente descubrir esos intereses de los que se habla en el párrafo precedente, al observar los aportes que los propios alumnos realicen.
Estimamos que resultaría extremadamente enriquecedor que algunas experiencias se vinculen con temas y conocimientos de otras asignaturas del curso y, de ser posible, compartir el desarrollo de la clase en que se plantean esas situaciones con el profesor de aquella asignatura. Incluso, invitar a otros profesores a compartir sus clases con el profesor de matemática cuando deban analizar situaciones en que es necesario aplicar contenidos y conceptos matemáticos. Experiencias en ese sentido ayudarán a los alumnos a realizar una real integración de conocimientos.
El material que se puso consideración en la experiencia del Curso-Taller encarado por los integrantes de la Subcomisión de Matemática de la Comisión de Articulación Escuela Media-Universidad, no pretendió, ni mucho menos, agotar las posibilidades, sirvió sólo para ejemplificar posibles formas de trabajo que debieran ser experimentadas y enriquecidas por cada docente en su tarea tanto de preparación como de desarrollo de sus clases. Asimismo, debe tenerse presente que, en algunos ejemplos presentados se ha vinculado la situación problemática planteada con un determinado tema, cuando esa misma

situación, con pequeñas variantes, podría ser aplicada para motivar o ejercitar otro tema previsto en los contenidos curriculares del curso.

Selección de contenidos

A efectos de presentar adecuadamente la tarea realizada, se transcriben a continuación algunas de las situaciones que se incluyeron en el material elaborado y que permitieron la ejemplificación y trabajo de los aspectos metodológicos propuestos.
Algunos de estos ejemplos se acompañan de la fuente considerada y en otros casos, la fuente no fue precisamente una nota o elemento escrito, sino la consideración de alguna cuestión que al realizar la experiencia piloto con un grupo de auxiliares, indicó que sería un buen tema para incluir en alguna situación problemática.

PATENTES.
Hasta hace algunos años atrás, el sistema de patentes de automotores vigente en nuestro país se conformaba con una letra (que identificaba a la provincia y entonces era un total de 21) acompañada por seis dígitos iguales o distintos entre sí.

Actualmente el sistema vigente cuenta con tres letras coincidentes o no entre sí (de un total de 27 de posible uso) y tres dígitos iguales o distintos entre sí. ¿Puede de este último modo patentarse mayor cantidad de vehículos que antes?.

BICICLETEADA

Un grupo de jóvenes ha decidido realizar un paseo en bicicletas desde la ciudad de Santa Rosa hasta la localidad de Catriló (86 kilómetros de distancia), proponiéndose hacer ese recorrido a una velocidad constante de 20 km/h. El padre de uno de ellos se ha ofrecido a traerlos de regreso en su camioneta, que regularmente conduce a una velocidad media de 50 km/h, pero le ha pedido a su hijo que le haga un llamado con su celular, cuando lleguen a la localidad de Anguil, distante 24 km. del punto de partida, para iniciar en ese momento su viaje. Esa comunicación se produce a las 9 horas del día de la bicicleteada, y el padre, tal su compromiso, sale a la búsqueda, justo en el momento de producido el aviso previsto.

Interesa saber:

a) A qué hora comenzaron su paseo estos jóvenes.
b) A qué hora alcanza el padre al grupo de ciclistas.
c) A cuántos kilómetros del punto de partida se produce el encuentro.
d) Si el padre no se detiene en el camino al cruzar a los jóvenes, cuántos minutos debe esperar en Catriló a que lleguen los ciclistas.

e) A qué hora debió haber realizado el llamado el hijo para que la llegada del grupo y de su padre a Catriló se produjera en el mismo momento.
f) Si los ciclistas tardaron quince minutos en Catriló para hacer la carga de sus bicicletas en la camioneta, a qué hora se produjo su llegada de regreso a Santa Rosa, si lo iniciaron inmediatamente de concluida esta carga.

FIN DE SEMANA LARGO EN EL CAMPO.
Mi amigo y yo habíamos decidido pasar este fin de semana en el campo, como consecuencia de contar libres con el sábado, el domingo y el lunes que es feriado, pero mi amigo me avisa que desiste del paseo porque tuvo un desperfecto en la cañería de su casa. Me explicó: "Cada media hora, cae una gota de un caño que pasa por el techo y he calculado en unos 300 mm^3 el volumen de la gota. Coloqué un recipiente de 75 cm de largo por 40 de ancho y 50 mm de alto para recogerlas, pero tengo miedo que se llene si me ausento estos tres días." ¿Es fundado el temor de mi amigo?

Comentarios
Cada una de las situaciones problemáticas que fueron incluidas en el material que se elaboró al efecto, y del que se han transcripto precedentemente algunas selecciones, surgió de contemplar algunas de las consideraciones que se detallaron como objetivos a perseguir con la experiencia. Para mejor ilustrar, insertamos seguidamente las razones que llevaron a la redacción e inclusión de cada una de las cuestiones que se incorporaron en este trabajo y los comentarios acerca de su tratamiento en el curso taller y en las experiencias docentes con los mismos.

PATENTES
Esta situación problemática surge de un artículo publicado en un periódico como consecuencia de una entrevista entre el periodista y el responsable del Registro de la Propiedad Automotor de una determinada jurisdicción, en el que se vierte en forma indirecta que el cambio del sistema de patentamiento del anterior al actual, obedece fundamentalmente a lograr alcanzar una mayor cantidad de posibilidades de confección de patentes, tanto que con este sistema se puede incluir en uno único, a la población automotriz no sólo de la República Argentina sino de todo el Mercosur. Se incluye el análisis entonces, a efectos de desvirtuar en los alumnos la conclusión aparente que surge de la noticia en el sentido comentado y permitirles además tomar conciencia de que la lectura de éstas debe hacerse con espíritu crítico, logrando además que sean efectos multiplicadores de este criterio frente a los individuos de la comunidad.
Se simplificó la situación minimizando las alternativas reales del sistema anterior de patentamiento, reduciendo a su vez las posibilidades de resultados que se alcanzarían con el mismo, situación ésta que inicialmente no se comenta pero que luego de alcanzarse la respuesta, el propio docente destacará para ilustrar mejor a sus educandos. Nos referimos en este sentido, a la suposición de que todas las patentes del país contaban en el sistema anterior con un número de seis cifras, cuando en realidad las patentes de Capital Federal contaban con siete, si bien la primera cifra no llegó a valores superiores al 2 porque antes de aumentar el tamaño de la población automotriz a un nivel que requiriera el uso de una cifra mayor, fue desestimado y reemplazado por el actual de tres letras y tres cifras.
Esta situación problemática además, se estimó interesante como para plantear o ejercitar (introducir o afirmar) el tema relativo a análisis combinatorio en donde la solución final se

logra no por el análisis simple de una situación, sino de la reunión de más de un problema simple, en un problema de complejidad mayor, relativo a sucesos simultáneos.
La experiencia con los docentes que participaron del Curso-Taller derivó en una confirmación respecto de la modificación de criterio que se observa en todos ellos respecto del convencimiento existente hasta el momento en sentido absolutamente contrario al efectivamente probado al realizar las determinaciones correspondientes. Los comentarios sobre la experiencia en aula realizada por algunos docentes que la concretaron con sus alumnos por estar justamente tratando el tema en el momento de concreción del Curso-Taller, permitió confirmar que el criterio reinante en la mayoría de quienes no habían realizado las determinaciones correspondientes difería de la realidad, y que el de quienes no estaban convencidos de lo contrario era, en todos los casos, la falta de criterio por no haber analizado el caso o bien, no teniendo idea alguna sobre el particular. Requerido que los alumnos relevaran el criterio existente al respecto entre los integrantes de su propia familia se confirmaron idénticas conclusiones, lo que permitió a los alumnos sentirse plenamente satisfechos de poder ilustrar a los demás con los conocimientos adquiridos, desalojando en la comunidad vinculada a ellos, un error de criterio largamente mantenido.

BICICLETEADA.
Este planteo problemático surge de la adecuación y recreación de una nota periodística referido a una bicicleteada realizada por una organización defensora de las buenas costumbres en la práctica deportiva del común de los vecinos, que habitualmente no hacen de este tipo de actividades, una habitualidad.
Frente a múltiples comentarios realizados por los alumnos respecto de si serían capaces o no de completar el recorrido, y si serían o no capaces de hacer de igual forma que la ida el regreso, se decidió redactar el problema presentado aprovechando para que con la solución del mismo se ejercitara el manejo en relaciones de velocidad, tiempo y espacio, y la comprensión de las consignas que habitualmente deben interpretarse a partir de este tipo de planteos, ya sea desde un texto, ya desde un caso concreto frente a situaciones similares.
Las cuestiones que se plantearon al efecto, se vincularon con los comentarios que, realizados por los alumnos, exteriorizaban las preocupaciones y permitían al docente que lo redactó, detectar criterios inicialmente erróneos como consecuencia de estimaciones no adecuadas e incluso con conclusiones previas que presentaban incoherencia entre sí y falta de vinculación de unos resultados estimados respecto de otros, ligados naturalmente entre ellos y que sin embargo derivaban en apreciaciones que no se condecían unas con otras.
Se entendió que por tratarse de una actividad de interés propio de los educandos, su solución sería encarada con un entusiasmo distinto que si se les proponía un problema que apuntara a igual finalidad educativa pero extraído de un texto que planteaba una situación totalmente ajena a esos intereses.

FIN DE SEMANA LARGO EN EL CAMPO.
Este problema es en extremo sencillo. Surge de un comentario casual recibido desde la propia clase que es aprovechado para que, dándole forma, resulte una aplicación del tema de reducción de unidades de medida de un sistema a otros y que a la vez permite un repaso de otros conocimientos previos tales como el cálculo de volúmenes por ejemplo.
Se entiende que resulta interesante que en una situación problemática que se plantee al alumnado no se trate de reducir el problema para que la obtención de su solución sea lograda únicamente con la herramienta que se está enseñando o ejercitando. De ese modo,

la necesidad de vincular varios procesos y conocimientos, los acostumbre a que la solución de un problema de la realidad, requiere en general el uso de múltiples herramientas y que debe conocerse también la secuencia de uso de las mismas para el logro del resultado pretendido, no ya para un problema de aula, sino para una situación cotidiana a atender haciendo un servicio para sí mismo o para terceros.

Conclusiones

La experiencia se concretó en cuatro reuniones de 4 horas y media de duración cada una y con una reunión por mes, durante el segundo cuatrimestre del período lectivo 2.000.
En la primera de las reuniones se hicieron los comentarios generales sobre la propuesta y se suministró el material elaborado al efecto, haciendo consideraciones generales sobre los elementos que dieron origen a los problemas y situaciones planteadas.
Para la segunda de las reuniones se intentaron las soluciones de la mayoría de las situaciones problemáticas planteadas. Durante esta segunda reunión, se expusieron y analizaron los procesos de solución alternativos que intentó cada uno de los participantes, destacándose que algunas de esas soluciones fueron alcanzadas en forma individual, otras en forma grupal por varios docentes y otras surgieron de la elaboración de alumnos de los participantes del taller.
Se solicitó a los docentes que para la tercera reunión consideraran situaciones que pudieran darse en su ámbito de trabajo o en su medio y en base a ellas se elaborara una batería de problemas afines con los temas que estaban incluidos en los contenidos de las asignaturas a su cargo. Estas búsquedas y las redacciones y soluciones propuestas a las situaciones planteadas fueron expuestas y discutidas en el tercer encuentro, aportando cada asistente y los conductores de la experiencia, sugerencias de mejoramiento y alternativas de explotación de la situación problemática prevista, quedando en su caso redactadas en forma definitiva y para que en el tiempo que mediaba entre esta tercera y la última reunión se sometieran a experiencia las mismas. Se solicitó que se registraran las observaciones sobre la experiencia aúlica en cada una de ellas, tanto positivas como negativas, con el objeto de considerarlas en la cuarta y última reunión, retroalimentando el proceso y analizando los méritos de éxito que podrían imputarse a la metodología y las cuestiones que merecen tenerse en cuenta para evitar efectos no deseados.
La exposición de estas conclusiones en la cuarta y última reunión del curso taller fue sumamente rica. Hubo experiencias que fueron concretadas en el aula directamente. Algunas de ellas vinculando necesidades matemáticas derivadas desde otras asignaturas del plan de estudios y para alumnos del mismo año y curso del establecimiento en el que se realizó la prueba. Otras se concretaron en eventos organizados específicamente al efecto, como la realización de una jornada denominada de “Matemática en Familia” donde las situaciones fueron expuestas a los alumnos para que fueran resueltas con el apoyo de familiares convocados al efecto. Una experiencia particular fue la de anticipar un análisis de producción frutícola local que luego permitió someter los resultados logrados a los que los organismos específicos publican sobre idéntico tema. Un único docente realizó la experiencia de solicitar a los alumnos que en lugar de solucionar situaciones problemáticas planteadas desde el docente, se realizara un análisis conjunto de una situación particular y luego los alumnos fueran los que redactaran una situación problemática vinculada a un tema en particular de la asignatura en el marco de la situación observada previamente.

En general la conclusión fue que los alumnos se encontraron en general más motivados con estos problemas que con los tradicionales extraídos de textos matemáticos, pero también fue considerable la expresión relativa a las dificultades que implicó la redacción de los problemas a plantear a los alumnos por parte de los propios docentes, y en el caso especial en que se solicitó la redacción de esos problemas a los alumnos, los graves problemas de expresión literal que enfrentaron la mayoría de los educandos frente a la rigurosidad matemática con que deben ser planteados.
El cierre del taller implicó el suministro a los participantes, agrupados en grupos de cuatro personas en cada grupo, de un total de 15 ejemplares de un diario local (a todos los grupos idéntico material) para que redactaran situaciones problemáticas, indicando para qué tema lo elaboraban y qué finalidad perseguían con esa redacción. Los comentarios finales fueron muy ricos, observándose un caso muy llamativo. Hubo una información periodística que todos los grupos explotaron de algún modo, aunque con temas totalmente diferentes de un grupo a los restantes.
La experiencia realizada con los docentes permitió detectar que en general, en la elaboración de sus clases al momento de redactar una ejercitación, intentan dar en forma conjunta, por una parte, los datos directos de utilidad en la solución pretendida, y por otra, tratar que la situación planteada se resuelva sólo aplicando el tema para el cuál la misma se había diseñado, cuestión que en la discusión realizada se determinó como no recomendable porque induce al alumno a concentrar su esfuerzo en trasladar la situación problemática a una solución en el marco del tema en estudio.
Simultáneamente se escucharon múltiples opiniones relativas a la falta de criterio en el alumnado para anticipar una respuesta para el planteo propuesto. Cuando se requería incluso la interpretación del resultado logrado (aún siendo correcto), los alumnos no eran capaces de argumentar o vincular la respuesta alcanzada con otros parámetros, que le permitieran confiar en el mismo como un resultado viable. Se recomendó entonces que se hagan comentarios conjuntos o que se sometan a discusión las posibles soluciones alcanzadas intentado que cada alumno o grupo de alumnos defienda criteriosamente la alcanzada, en el marco de la conducción y encauzamiento de opiniones realizada por los docentes a cargo de la experiencia que debiera ser rutinaria.

Referencias bibliograficas

C.Parra, I. Saiz (compiladoras). 1994. *Didáctica de la matemática. Apuntes y reflexiones* **-** Editorial Paidós Educador.
L.E. Siñeriz (1972). *Métodos heurísticos de Resolución de Problemas.* Cuadernillos Universitarios. U.N. del Comahue.
D. Ausubel, J. Novak, H. Hanesian. *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo* - Editorial Trillas.
Didáctica de matemática. Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Editorial Paidós Educador. 1994.
Material bibliográfico de uso corriente en cualquier asignatura y curso regular de la enseñanza polimodal.
Publicaciones diarias y periódicas de difusión masiva y de tipo informativo.

Hacia un modelo de docente investigador

Gloria Nora Suhit
FRBB. UTN
gsuhit@criba.edu.ar

Resumen
Los aportes de la investigación educativa y la experiencia personal me permiten aseverar que la mejora de la calidad educativa se basa fundamentalmente en el docente.
Se plantea entonces la necesidad de contar con centros de formación docente de excelencia que aseguren una formación inicial y continua acorde con las tendencias y experiencias innovadoras en el área, tendencias que conciben dicha preparación como un profundo cambio didáctico asociado a una tarea permanente de reflexión sobre la práctica, que permita formar profesionales autónomos, cooperativos e investigadores.
Se propone diseñar cursos, de formación inicial y permanente, que : pongan el acento en los contenidos que el docente debe enseñar ; proporcionen una sólida comprensión de los conceptos fundamentales y su evolución histórica ; los familiaricen con los procesos de razonamiento que subyacen en la construcción de los conocimientos; los formen en la investigación – acción.

Introducción

La misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo tan rápidamente cambiante que les toca vivir. Es decir, impartir enseñanzas para que adquieran las competencias que todo ser humano necesitará para resolver de manera eficaz y autónoma las diversas situaciones de la vida.

Para integrarse y participar de la vida social es preciso dominar una serie de competencias como: ser creativo, saber usar productos de alta tecnología, procesar información múltiple, trabajar en equipo, etc.

"En estos tiempos en que la educación parece proyectarse hacia el hombre en situación, es decir, al individuo con sus particularidades, sus vínculos humanos y su relación con el contexto físico, la propuesta educativa se orienta hacia una formación para la vida cotidiana… y desplaza su preocupación del producto (el conocimiento) hacia el proceso (la adquisición del conocimiento) con el consiguiente acento en el aprendizaje y el desarrollo de las capacidades, entre ellas y por sobre todas: la capacidad de ***aprender a aprender***, para utilizar los conocimientos de un modo eficaz. (Braghiroli, C., 1994)

La enseñanza de la matemática, en este contexto, debe ser vista como un quehacer de la cultura que ayuda a la comunicación interpersonal y a la solución de problemas.

Con el desarrollo de la ciencia y de la tecnología y dado el papel preponderante de la matemática en ellas, el problema de lograr una buena formación matemática en todos los niveles de la educación se agudiza con renovado interés.

Aunque la matemática es única, su presentación para un buen aprendizaje varía mucho según los alumnos a quienes va dirigida, detalle que es conveniente tener en cuenta tanto para una mayor motivación como una mejor preparación para las actividades futuras de los alumnos- docentes.

La investigación educativa ha puesto en evidencia la existencia de marcadas diferencias entre lo perseguido por los diseñadores de currículos y lo que los docentes llevan a la práctica. No basta con diseñar con fundamento un currículo si los docentes no reciben la preparación adecuada para impartirlo, por lo tanto se necesita una profunda revisión de la formación docente- inicial y permanente- extendiendo a la misma las adquisiciones de la investigación sobre el aprendizaje de las ciencias y, en particular, las propuestas de orientación constructivista.

¿Qué deben saber y saber hacer los docentes de matemática para impartir una docencia de calidad?

Los aportes de la investigación didáctica permiten concebir la formación docente como un *"profundo cambio didáctico"* que plantea la necesidad de un buen conocimiento de la materia a enseñar y de la apropiación de una concepción de la enseñanza- aprendizaje de las ciencias como una construcción del conocimiento, es decir, como una investigación de los alumnos y de los docentes. De este modo la preparación docente debe quedar asociada a una tarea de investigación e innovación permanentes, que permita formar un profesional autónomo, cooperativo e investigador.

La actitud investigadora, que resulta imprescindible en cualquier proceso de innovación, se ve reforzada desde una propuesta de currículo abierto al favorecer ésta la reflexión sobre la práctica como medio para tomar decisiones curriculares.

A través de *la dimensión reflexiva el docente deja de ser un mediador entre la teoría y la práctica, para convertirse en un mediador activo que desde la práctica reconstruye críticamente su propia teoría y participa, así, en el desarrollo significativo del conocimiento y la práctica profesional*. (Porlán, 1992 y Carr, 1993)

¿Qué exige conocer el contenido de la asignatura?

Implica conocimientos profesionales muy diversos (Coll,C., 1987) que son más amplios y completos que los que habitualmente se desarrollan en los cursos de formación inicial e incluyen entre otros, los siguientes:

✓ **Conocer la historia de la matemática,** que aporta una visión más humana a esta ciencia y un potente auxiliar para: (Guzmán, 1993)

- Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas matemáticas.
- Enmarcar temporal y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación precedentes
- Señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente
- Subrayar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes

- ✓ **Saber seleccionar contenidos** asequibles a los alumnos y susceptibles de interesarlos

Siguiendo al Dr. Santaló (1994) podemos afirmar que: “es tan extenso el campo de la matemática y se han acumulado tantos conocimientos, que es muy difícil seleccionar la matemática que los alumnos van a necesitar en el futuro. Hoy más que nunca ***“enseñar es elegir”***
Como señala Linn(1987) el conocimiento profundo de la materia es fundamental para una enseñanza eficaz y no puede adquirirse en el período siempre breve de una formación inicial, por lo tanto debemos tener en cuenta la preparación de los alumnos- docentes para profundizar en los conocimientos y adquirir otros nuevos, en función de los cambios curriculares, avances científicos, cuestiones planteadas por los alumnos…, es decir, formarlos para “aprender a aprender”.

¿Cómo enseñar lo que se ha de construir?

La evolución de la matemática no sólo se ha producido por acumulación de conocimientos o para dar respuestas a distintos campos de aplicación. Los propios conceptos matemáticos han ido modificando su significado con el transcurso del tiempo, ampliándolo, precisándolo o revisándolo, adquiriendo relevancia o por el contrario, siendo relegados a segundo plano.

Esta consideración epistemológica tiene importantes repercusiones desde el punto de vista curricular. Presentar la matemática como algo acabado, cerrado y alejado de la realidad no refleja su evolución histórica y su carácter constructivo, provisorio y tentativo.

Desde este punto de vista, la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta, de la intuición y de las aproximaciones inductivas necesarias para la resolución de problemas particulares. La experiencia y comprensión de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas a partir de la actividad real es, un paso previo para la formalización. Los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y analizar qué sucede…son los pasos necesarios para elaborar principios y teorías. Esta fase inductiva informa al matemático sobre la corrección del camino por el que transita el proceso de construcción del conocimiento. La deducción formal suele aparecer en una etapa posterior.

Como plantea G. Brousseau, es preciso diseñar situaciones didácticas que hagan funcionar el saber, a partir de los saberes definidos culturalmente en los programas escolares. Se trata de colocar a los alumnos en una situación que evolucione de tal manera que el conocimiento que se espera que aprendan sea el único medio eficaz para controlar dicha situación. La situación proporciona la significación del conocimiento para el alumno, en la medida en que lo convierte en un instrumento de control de los resultados de su actividad. El alumno construye, así, un conocimiento contextualizado, a diferencia de la secuencia habitual, donde la búsqueda de aplicaciones de los conocimientos sucede a su presentación descontextualizada.

Acentuar la actividad constructiva no supone ignorar que la matemática tiene una estructura interna que relaciona y organiza sus diferentes partes. Hay una componente vertical, que fundamenta unos conceptos con otros, que impone una determinada secuencia temporal en el aprendizaje y que obliga, en ocasiones, a trabajar
algunos aspectos con la única finalidad de integrar otros que son los que se consideran importantes desde el punto de vista educativo.

Por lo tanto, no existe un único camino, ni el mejor y si lo hay tiene un fundamento más pedagógico que epistemológico y como lo sugiere el Dr. Santaló :
"El aprendizaje es siempre un avance en zig- zag, que salta de la motivación a las aplicaciones, para volver en busca de las definiciones necesarias y algunos razonamientos de apoyo y saltar nuevamente en busca de atractivas novedades. Por eso, los contenidos, aunque sea imprescindible elegir una ordenación en los programas, muchas veces deben exponerse mezclados, uniendo conceptos análogos en el fondo, aunque alejados en su ordenación establecida". ("La enseñanza de la Matemática en la Escuela Media", 1986, pág. 16)

Necesidad de innovaciones en la evaluación

La investigación didáctica ha puesto de relieve que "las innovaciones en el currículo no pueden darse por consolidadas si no se reflejan en transformaciones similares en la evaluación" (Linn,1987)
Poco importan las innovaciones introducidas si la evaluación continúa consistiendo en pruebas finales para verificar el grado de asimilación de algunos conocimientos conceptuales.
Una evaluación coherente con la concepción constructivista del aprendizaje es la que permite suministrar retroalimentación adecuada a los alumnos y al propio docente contribuyendo a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
Para que la evaluación se convierta en un instrumento efectivo de aprendizaje es preciso extender el concepto y la práctica de la evaluación al conjunto de saberes, capacidades y actitudes del aprendizaje de la matemática, superando la habitual limitación de la repetición de contenidos conceptuales. Recordemos que sólo aquello que es evaluado es percibido por los alumnos como realmente importante.

Es importante que el alumno adquiera la capacidad de autoevaluación, como reflexión crítica de su propio proceso de aprendizaje, ya que ésta permite que tome conciencia de sus avances o retrocesos, que analice lo apropiado de su método de trabajo.

Si se pretende hacer de la evaluación un instrumento de seguimiento y mejora del proceso de enseñanza – aprendizaje no debemos olvidar que se trata de una actividad compartida donde el papel del docente es un factor determinante. Esto supone que los alumnos deben tener oportunidad de discutir aspectos como el ritmo de trabajo, los materiales utilizados, el clima de la clase… De este modo la evaluación aparecerá efectivamente como un instrumento de mejora de la enseñanza.

¿Cómo iniciar el cambio?

Para iniciar el cambio se necesita una profunda revisión de la formación docente- inicial y continua- que plantee la necesidad de un buen conocimiento de la materia a enseñar y de la apropiación de una concepción de la enseñanza – aprendizaje de la matemática como construcción del conocimiento.
La epistemología genética muestra que hay cambios en el desarrollo de la matemática que no corresponde a una nueva acumulación de nuevos "descubrimientos". Como resultados de estos cambios, la comunidad matemática crea en su actividad una nueva manera de "ver" a los objetos, a la misma disciplina.
En este contexto el "conocimiento matemático" es el resultado de la reflexión sobre acciones interiorizadas – la abstracción reflexiva. La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos sino esencialmente una actividad, una actividad humana, histórica. La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método predomina sobre el contenido.
El hecho que las ***verdades matemáticas*** lo sean en todas partes y para cualquier persona, no justifica que la ***educación matemática*** debe ser igual en todas partes y para todo el mundo.
Aunque las verdades matemáticas son universales, ello no significa que en la enseñanza no se deba considerar la individualidad de los alumnos y/o el contexto social y cultural donde se enseña.
Una **educación matemática** debe ser algo más que **comunicar** estas verdades a los alumnos.
En el aprendizaje de la matemática hay un aspecto en el que hay acuerdo: los **significados compartidos** que se tienen de las **verdades matemáticas.**
El significado matemático se logra estableciendo conexiones entre la idea matemática concreta que se discute y el conocimiento previo del aprendiz. Por lo tanto el significado se logra de una manera personal.
Luego si acordamos que en la actividad humana el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención y se construyen diferentes versiones sobre su contenido, versiones que se comparan, negocian y reconstruyen en el proceso mismo de la actividad, estos aspectos de construcción personal deben considerarse en la enseñanza.
Esta visión obliga a una reformulación epistemológica, la cual consiste en considerar al humano haciendo matemática y a diseñar situaciones donde el foco de atención esté no sólo en la adquisición del conocimiento, sino también en el desarrollo de actividades. Por lo tanto al "estudiar la construcción del conocimiento se debe tener en cuenta cuatro componentes fundamentales: epistemológica, cognitiva, didáctica y social. Esta aproximación múltiple y sistémica recibe el nombre de **acercamiento socioepistemológico".** (Cordero Osorio, F., 1999)
La actual filosofía de la matemática dejó de preocuparse tan insistentemente como en la primera mitad del siglo sobre los problemas de la fundamentación matemática, especialmente tras los resultados de Gödel a comienzos de los años 30 y pasó a enfocar su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática (I.Lakatos), así como en los aspectos relativos a la historicidad e inmersión en la cultura en la que se origina, considerando la matemática como un subsistema cultural con características en gran parte comunes a otros sistemas semejantes. Estos cambios sobre el quehacer matemático vienen provocando, de forma más o menos consciente, fluctuaciones importantes sobre cómo debe ser la enseñanza de la matemática.

Luego se propone diseñar cursos que:

- Enfoquen el acento en los contenidos que el docente debe enseñar.
- Proporcionen una sólida comprensión de los conceptos fundamentales
- Familiaricen con el proceso de razonamiento que subyace en la construcción de los conocimientos
- Den a conocer las dificultades que cabe esperar encuentren los alumnos al estudiar la asignatura.
- Muestren la forma peculiar de aparecer las ideas matemáticas y las conexiones con otras ciencias.
- Incentiven la capacidad de reflexionar en y sobre la práctica, para descubrir, criticar y modificar los modelos, esquemas y creencias que subyacen a la misma; promoviendo el cambio didáctico personal desde una perspectiva constructivista.

De este modo la formación docente debe quedar asociada a una tarea de investigación e innovación permanente, con el propósito de hacer posible que el acto educativo matemático resulte una vivencia y la respuesta a la pregunta que siempre nos preocupa: **¿ para qué enseñamos matemática?** coincida con la propuesta del Dr. Claudi Alsina :

> ***"Enseñar matemática es compartir una forma de ver el mundo"***

Referencias bibliográficas

Ausubel; Novak; Hanesian. (1983). *Psicología Educativa*. México: Trillas.

Braghiroli, C. (1994) *Redes conceptuales: una propuesta con futuro.* Jornadas de capacitación docente. Bahía Blanca: UNS.

Castorina,J. y otros (1996). *Piaget- Vigotsky : contribuciones para replantear el debate.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Coll, C. (coordinador). (1999). *Psicología de la instrucción de la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria*. Barcelona, España: Horsori.

Cordero Osorio, F. (2001). *Una epistemología a través de la actividad humana.* RELIME. Vol. 4. N° 2.

Elliot, J. (1991). *El cambio educativo desde la investigación- acción.* Madrid, España: Morata.

Martínez, J.M. (1997). *La mediación en el proceso de aprendizaje*. Madrid, España: Bruño.

Palacios, Coll; Marchesi. (compiladores). (1990). *Desarrollo cognitivo y Educación* . Vol III. Madrid, España: Alianza.

Porlán, R. (1993). *Constructivismo y escuela.* Sevilla, España: Díada.

Resnik,L.; Ford,W. (1990) *La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona, España: Paidós.

Sanjurjo, L.; Vera, M.T. (1998). *Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior.* Rosario, Argentina: Homo Sapiens.

Santaló,L. y colaboradores (1994). *Enfoques, hacia una didáctica humanista de la matemática.* Buenos Aires, Argentina: Troquel.

Desarrollo del pensamiento geométrico en el futuro profesor de matemática

Norma Rosa Cerizola, Ruth L. Martínez, María A. Miní
Universidad Nacional de San Luis. Departamento de Matemática. Argentina
nceri@unsl.edu.ar martinez@unsl.edu.ar mini@unsl.edu.ar

Introducción

La formación de futuros Profesores de Matemática se constituye en la actualidad en un desafío, especialmente si tenemos en cuenta los requerimientos sobre cómo deberá formar matemáticamente a sus alumnos. De acuerdo a recomendaciones de matemáticos como Miguel de Guzmán, "la educación matemática se debe concebir como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático, a la manera como el aprendiz de artista va siendo imbuido, como por ósmosis, en la forma peculiar de ver las cosas características de la escuela en que se entronca" (Guzmán,1992).

Pero, para que pueda lograr en sus alumnos esta "inculturación "matemática, él mismo debe ser formado de este modo, pues, como expresara Luis A. Santaló, los Profesores tienden a reproducir las prácticas docentes que mamaron durante su carrera.

Esas formas de "inmersión" en el pensamiento matemático no se consiguen solamente a través de la comprensión de teorías matemáticas formales, sino tejiendo una trama donde se entrecruza este aspecto con otros relacionados con la creación matemática como: la resolución de problemas, el estado de los conocimientos matemáticos en distintas épocas, la influencia de las corrientes filosóficas de la Matemática en el surgimiento de sus teorías, las razones de su surgimiento, sus posibilidades y sus límites en cuanto a los problemas que resuelven...

Teniendo en cuenta estas premisas, consideramos que una forma de organización del tratamiento de los temas de una determinada asignatura (o de un grupo de ellas) es a través de la utilización de "hilos conductores", temas especialmente elegidos que se constituyan en "contextos adecuados" para un concepto o problema, que permita no sólo resolverlo, sino que, "lleven a buscar un método que haga que esa solución parezca inevitable, que muestre que es lo que realmente está pasando" (Stewart, 1996)

Todas las ramas de la Matemática ofrecen la posibilidad de elección de "hilos conductores", sin embargo una de estas ramas en particular, constituye una fuente inagotable de hermosos problemas, cuya solución ha resultado ser un desafío para la imaginación creadora de los matemáticos de todos los tiempos: la geometría sintética.

A través de este trabajo pretendemos mostrar un modelo de organización de la enseñanza de la geometría, basada en "hilos conductores" eligiendo como tal, el llamado "Problema de Apolonio" y su historia.

El tratamiento del mismo tiene como punto inicial una incursión en el estado del conocimiento de la geometría griega en sus distintas épocas, hasta llegar a la civilización helénica, ubicando temporal y espacialmente las contribuciones de Apolonio. Con el planteo del conocido hoy como el "Problema de Apolonio", se procede a incursionar en los "Elementos" de Euclides, donde aparece su solución para casos particulares por medio de la regla y el compás griegos o sea, al decir de Descartes, con "líneas rectas y circulares".

Se continúa analizando las soluciones del problema dadas por Viète (utilizando el álgebra) y la de Gergonne (a través de centros homotecias, polos y centros radicales), para culminar con la de Steiner (por medio de la transformación de inversión).

A partir de allí se abordan y resuelven problemas donde se pone en evidencia el poderoso instrumento que resulta esta transformación, ya sea para resolver problemas, cuyas soluciones con otras herramientas matemáticas son muy engorrosas o, problemas no resueltos hasta la creación de esta teoría.

Miremos el tema de esta manera... El punto de partida

Todos los pueblos han desarrollado, en el transcurso de su historia, alguna forma de pensamiento matemático. Los fines han sido muy diversos, entre ellos podemos mencionar algunos como: satisfacer necesidades de la vida cotidiana, elaborar de vaticinios, acercarse a la divinidad, guiar el pensamiento filosófico, comprender los fenómenos naturales...

Pero, cualquiera haya sido su punto de partida, la matemática ha llegado hasta nuestros días a través de dos corrientes principales: el número y la forma. Su unión, a partir del siglo XVII permitió nutrir el caudal inagotable de la creación matemática, alcanzando hoy día logros asombrosos en ámbitos hasta hace poco insospechados.

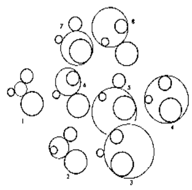
La matemática como ciencia, aparece en Grecia entre los siglos V y IV a.C. a partir de los conocimientos de dos civilizaciones milenarias, la babilónica y la egipcia. El contacto entre el Oriente y los griegos, comienza en los tiempos del imperio persa y termina poco después de las expediciones de Alejandro el Grande. A la matemática de la civilización egipcia, los griegos accedieron a través de sus cada vez más frecuentes viajes por el Mediterráneo, donde extendieron su comercio.

La matemática fue sometida entonces a las discusiones de los filósofos griegos. Estos pensadores, entre los que encontramos a Pitágoras y Platón, pronto se dieron cuenta de las grandes dificultades relativas a los conceptos de continuidad, movimiento e infinitud, así como al problema de medir magnitudes arbitrarias con unidades prefijadas (magnitudes inconmensurables). Fue probablemente este último problema, el que llevó a los griegos a ignorar el " número" priorizando la "forma". Es así como se abrieron camino a través de la geometría sintética, con el agravante de la influencia ejercida por las concepciones de Platón sobre la matemática, las que resultaron nefastas para su progreso. La imposición de limitar a "la regla" y "el compás" como únicos medios de construcción geométrica (que no se utilizan como instrumentos de medición: la regla es no graduada y el compás se "cierra" luego de trazar una circunferencia), se erigió en un obstáculo para el desarrollo de la geometría. El motor fue puesto nuevamente en marcha casi cuatro siglos después, en el período alejandrino, gracias a la audacia y la imaginación creadora de mentes brillantes, como veremos luego.

El "Hilo conductor, un "Hilo histórico..." El Problema de Apolonio

El conocido actualmente como "Problema de Apolonio" consiste en lo siguiente: dados tres objetos matemáticos, como tres puntos, tres rectas o tres círculos, trazar una circunferencia que sea simultáneamente tangente a los tres elementos.

Hay un total de diez soluciones. Las dos más sencillas son las que se refieren a tres puntos o tres rectas, éstas se encuentran utilizando conceptos de geometría elemental.



El problema de los tres círculos (exteriores entre sí), tiene en total ocho soluciones, como puede observarse en la figura.

La historia de este problema comienza en el año 332 a.C cuando Alejandro Magno fundó en Egipto una ciudad a la que modestamente llamó Alejandría. Alejandro murió en el año 323 a.C, sin haber podido terminar la construcción de la ciudad.

La inestabilidad política que siguió a su muerte llevó a la división del imperio alejandrino en tres partes. Una de ellas era Egipto, que pasó a estar bajo la dinastía ptolemaica. Pronto, Alejandría se convirtió en el foco intelectual del Mediterráneo y el máximo exponente de la cultura Helénica por aquella época. Su museo y su famosa biblioteca se constituyeron en el lugar de trabajo de más de cien sabios, entre los que se encontraban grandes matemáticos como Euclides, Arquímedes, Apolonio, Eratóstenes, Ptolomeo, Pappus y Diofanto.
Allí escribió Euclides su monumental obra los Elementos en la cual sistematizó la geometría siguiendo la más pura tradición platónica. Debido a ello, en los Elementos, Euclides no trata sobre las mediciones de las longitudes de los segmentos, de las áreas y volúmenes, sino de sus relaciones.
Adoptó también el método de razonamiento sintético, conocido hoy como axiomático-deductivo, para la demostración de cualquier teorema, Euclides parte de una “afirmación válida a ciencia cierta”, la cual se apoya en última instancia en un sistema de condiciones iniciales. A partir de esta última, se desarrollan sucesivamente consecuencias que conducen a la afirmación buscada.
Arquímedes (287?, 212 a.C.) y Apolonio (260?, 200 a.C.), desobedecieron las recomendaciones de Platón, pues ellas se erigían como un obstáculo para resolver un gran número de problemas. Arquímedes utilizó recursos experimentales y conocimientos de la Física, creando el “método de las palancas” para obtener resultados matemáticos, los que luego demostró a través del método analítico. Apolonio, “el gran geómetra” desarrolló la teoría de las secciones cónicas, estudiando curvas como la elipse y la hipérbola, que no se pueden dibujar con la regla y el compás. En su tratado sobre las cónicas, hace uso magistral del método sintético, pero no se limita a la regla y el compás, sino que hace uso del álgebra geométrica (equivalente geométrico de las ecuaciones). En su obra Tangencias, cuyo original se perdiera y que conocemos hoy - quizá parcialmente - gracias a la obra de los comentaristas, aparece planteado el problema que hoy lleva su nombre, junto con las soluciones de los casos elementales. Es muy probable que Apolonio resolviera el caso de las tres circunferencias, pero desgraciadamente nunca lo sabremos...
También en los Elementos, se plantea el Problema de Apolonio, se solucionan los casos de tres puntos y tres rectas, pero no el más general.

Conocimientos perdidos y vueltos a recuperar

Con las sucesivas destrucciones de la biblioteca de Alejandría se perdieron casi todos los conocimientos del mundo antiguo, sin embargo los árabes, causantes de una de esas destrucciones a la vez salvaron muchas obras que tradujeron del griego a su lengua.
Pocos siglos antes de estos sucesos, más precisamente en el año 415 de nuestra era, Europa comenzó a sumirse en la oscura noche de la Edad Media, época de un estancamiento casi total del desarrollo de nuevos conocimientos, en particular matemáticos. Sin embargo, en los monasterios la actividad no se apaga. Los copistas se dedican a reproducir varias obras griegas que han llegado a sus manos.
Con el Renacimiento, Europa despierta de un largo sueño y comienza a gestarse un hombre nuevo, ávido de conocimientos y con una cosmovisión distinta, al ensancharse las fronteras del mundo conocido con el descubrimiento de nuevas tierras.
Los hombres se reencuentran con los conocimientos del mundo antiguo gracias al legado de los musulmanes y de los copistas. Obras como los Elementos y Las Cónicas, son traducidas al latín. Mentes brillantes comienzan a entender ese lenguaje matemático griego casi esotérico, recuperando de este modo esos saberes. Sin embargo, los conocimientos que

necesitaban los hombres del renacimiento eran distintos de las complejidades sutiles de la geometría griega, incluso la de Apolonio. Es así como se abandona su estudio y por lo tanto su desarrollo, apareciendo teorías matemáticas nuevas como el álgebra, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal.

Nuevas instrumentos matemáticos para resolver viejos problemas

El álgebra sincopada, resultó ser un instrumento eficaz en manos de Viète (1540- 1603) para resolver el Problema de Apolonio. Más aún lo fue la geometría analítica de Descartes (1596-1650). Las ocho soluciones de este problema para el caso de tres circunferencias, se obtiene resolviendo un sistema de tres ecuaciones cuadráticas. Gergonne (1771-1859), en la primera mitad del siglo XIX, obtiene una de las soluciones más elegantes del Problema de Apolonio a través de centros de homotecia, polos y centros radicales.

Es así como tres teorías distintas permitieron resolver totalmente el problema, pero con métodos diferentes de los de la geometría sintética!

La inversión, una transformación del plano con mucha imaginación

La primera mitad del siglo XIX fue una época de controversias sobre los métodos de las distintas geometrías. Aparecieron grandes geómetras que apostaron por el método de la geometría sintética alegando, que el pensamiento de la geometría analítica era básicamente un pensamiento algebraico.

Entre estos defensores de la geometría sintética encontramos a Jakob Steiner (1796-1863), conocido como “el más grande geómetra (puro) desde Apolonio” (Bell, 1995), cuya vida contradice la creencia “de que para ser un buen matemático, hay que ponerse en marcha muy pronto” (Guzmán, 1995), pues fue un analfabeto integral hasta la edad en que muchos de sus contemporáneos se preparaban para ingresar a la universidad.

A él se le atribuye la invención de la transformación del plano llamada “inversión”, que permite solucionar un gran número de problemas de un modo muy elegante, entre ellos el Problema de Apolonio.

Esta “transformación” generaliza la simetría respecto de una recta y a veces se la llama reflexión circular.

Recordemos que una transformación es una ley que asigna a cada punto *P* del plano otro punto *P´* llamado imagen del punto *P* en la transformación.

Fijemos un punto *O* del plano y un número k mayor que cero. Cada punto *P* del plano, distinto de *O*, se transforma en un punto *P´* situado sobre la semirrecta *OP*si cumple: $\overline{OP}\,\overline{OP'} = k^2$.

Al punto O se le llama centro de inversión y a *k* potencia de la inversión. La inversión tiene la particularidad que debemos restringirla al plano euclídeo exceptuando O, llamado centro de inversión, que en la transformación no tiene imagen. Lo notable es que la inversión intercambia el interior con el exterior del círculo ω con centro O y radio *k* (y viceversa). A la circunferencia ω la llamaremos circunferencia de inversión. Notemos que los puntos de la circunferencia son los invariantes de transformación. Si agregamos al plano euclídeo P_∞, punto en el infinito, tendremos que el centro *O* de inversión tiene imagen y la inversión será una transformación definida sobre el plano inversivo. Es fácil ver que toda recta que pase por *O* se transforma en la misma recta; que una circunferencia concéntrica a ω de radio R, se transforma en una circunferencia concéntrica de radio k^2/R. No es tan sencillo, pero tampoco complicado el hecho de demostrar que toda recta que no pase por *O* se invierte en una circunferencia que pasa por *O*, y demostraremos:

Teorema 1: Cualquier circunferencia que no pase por *O* se invierte en una circunferencia que no pasa por *O*.

Sea el diámetro $\overline{PQ}$, tal que *O, P, Q* estén alineados, por lo tanto *O, P, P´, Q, Q´* están alineados. Para cualquier punto *S* perteneciente a c, tenemos que el triángulo *Q S P* es rectángulo y los triángulos *O S P* y *O S´ P´* son semejantes, como también lo son los triángulos *O S Q* y *O S´Q´*. En consecuencia los pares de ángulos , *O S´P´*, *O S P* y *S S´Q´*, *S Q P* son iguales. Como la suma de los ángulos *O S´P´* y *S S´Q´* es un recto, concluimos que el ángulo *S´P´Q´*, es un ángulo recto y S' pertenece a la circunferencia que tiene como diámetro a *P´Q´*. Como *S* es un punto arbitrario de *c*, tenemos que la inversa de c es una circunferencia.

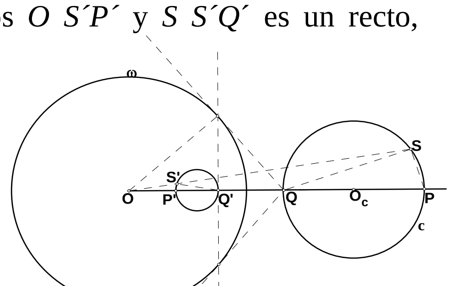


Fig. 1

Nota 1: Si estamos en el plano inversivo, como una recta puede considerarse como una circunferencia de radio infinito, podemos decir que el inverso de cualquier circunferencia es una circunferencia.

Un resultado sorprendente fue el obtenido por Mascheroni (1750-1800) en 1797:

Teorema 2: Todas las construcciones geométricas posibles mediante la regla y el compás pueden hacerse sólo con el compás.

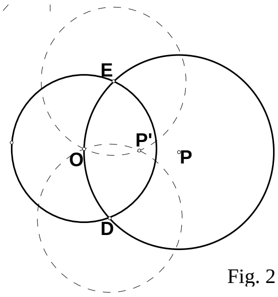


Fig. 2

A través de la inversión se logra una demostración fácil y elegante del Teorema 2. Toda recta se transforma en una circunferencia (eligiendo el centro de inversión no perteneciente a la recta), lo único que nos hace falta para la demostración del teorema de Mascheroni es poder construir el inverso de un punto P solamente usando el compás, como muestra la Fig.2.

La demostración la encontramos en el libro *¿Qué es la Matemática?* de Courant y Robbins (págs 156-157)

En otras transformaciones, como en la homotecia, hay propiedades de las figuras primitivas que se conservan, por ejemplo la forma. Nos preguntamos: ¿Qué propiedades conservan las imágenes de las figuras primitivas bajo la transformación de inversión? Evidentemente no es la forma, pues ya vimos que hay rectas que se transforman en circunferencias y, viceversa. Lo que se conserva es el ángulo entre dos rectas o curvas. Con esto decimos:

Teorema 3: Dos curvas secantes se transforman por una inversión en otras dos curvas que se cortan bajo el mismo ángulo.

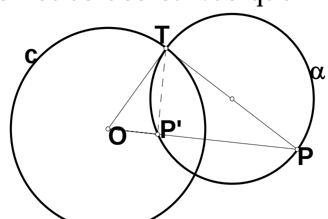


Fig. 3

La demostración se basa en tener en cuenta que la inversa de dos rectas que se cortan en un punto P se invierten en dos circunferencias que se cortan en un punto P’. En P’, las rectas tangentes a dichas circunferencias se cortan formando un ángulo igual que el de las rectas originales.

Nota 2: La inversión conserva la magnitud de los ángulos, pero no el sentido. Esto sucede porque cuanto más lejos está un punto del centro de inversión, más cerca está su correspondiente inverso.

Problema de Apolonio

El problema consiste en encontrar una circunferencia tangente a otras tres dadas c_1, c_2 y c_3. En la figura 3 mostramos un ejemplo.

Si las tres circunferencias dadas son concéntricas, no hay circunferencias reales que sean tangentes a ellas.

Debemos enfatizar, quizás, que siempre son soluciones reales las que estamos buscando. La condición para el contacto de dos circunferencias es que la distancia entre los centros es igual a la suma o diferencia de los radios, según sea la clase de contacto, externo o interno. Si consideramos las tres circunferencias c_1, c_2 y c_3, como las dadas en la Fig. 4, uno de los métodos consta en agregar o sustraer del radio de las tres circunferencias, el radio de la más pequeña, así reduciendo el problema a encontrar una circunferencia que pase por un punto d_3 y sea tangente a dos circunferencias d_1 y d_2. Esto se ve claro, ya que al invertir respecto de una circunferencia con centro en d_3, se tienen dos circunferencias d'_1 y d'_2. Si trazamos una de las rectas tangentes a ambas, la inversa de ésta es tangente a d_1 y d_2 y pasa por d_3. Luego construimos con centro A, ver Fig. 4, y radios elegidos convenientemente una de las soluciones al problema.

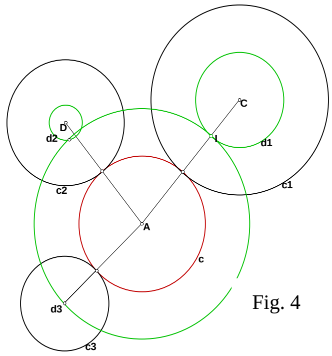


Fig. 4

Conclusiones

La transformación de inversión es, al decir de Miguel de Guzmán una "transformación loca y muy divertida" pues, si la comparamos con otras transformaciones del plano ésta no conserva "las formas". Justamente el no conservar las formas ayuda a la formación de un pensamiento geométrico distinto, que se basa fundamentalmente en un ejercicio de la imaginación. El método básico consiste en elegir adecuadamente el centro de inversión para transformar un problema en otro más simple, resolver éste, y luego volver al problema original por la transformación inversa. Allí vemos con asombro cómo se han acomodado las piezas del "puzzle" mostrándonos el problema resuelto.

Al optar por un ordenamiento distinto de los temas a través de un "hilo conductor" nos ha permitido reordenar y jerarquizar de otro modo nuestros conocimientos. La profundización en la historia del Problema de Apolonio nos hizo que siguiéramos varias bifurcaciones, como el Problema de Arbelos, Inversión, Geometría Analítica, etc. Con todo lo expuesto creemos que esta propuesta nos ha permitido concretar nuestro objetivo: "Desarrollo del Pensamiento Geométrico en el Futuro Profesor de Matemática"

Referencias bibliográficas

Guzmán, M. de (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Argentina: OMA.
Courant, R y Robbins, H (1971). *Qué es la matemática*. España: Aguilar.
Coxeter, F (1988). *Fundamentos de Geometría*. México Limusa,.
Coxeter y Greitzer (1994). *Retorno a la Geometría*. España: Ribadeneyra.
Santaló, L (1993). *La Geometría en la Formación de Profesores*. Argentina: Red Olímpica.
Honsberger,R(1970). *Ingenuity in Mathematics*. EEUU: The Mathematical Association of America.
Pedoe, D (1970). *Geometry*. Gran Bretaña: Cambridge University Press.
Guzmán, M. de (1995). *Aventuras Matemáticas*. España: Pirámide.
Stanley Ogilvi, C (1969). *Excursions in Geometry*. New York: Dover Publications, Inc.
Cadwell, J.H.(1977). *Topics in Recreational Mathematics*, Gran Bretaña: Cambridge University-Press.
Stewart, I (1996). *De aquí al infinito*. España: Drakontos.
Bell, E. T. (1995). *Historia de las Matemáticas*, México: Fondo de Cultura Económica.

Una experiencia de capacitación docente del EGB3 y Polimodal

Lidia Beatriz Esper*, Lucía Rodríguez Montelongo**
*Facultad de Cs. Naturales e I.M.Lillo-UNT. Argentina
**Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia-UNT. Argentina
liesper@yahoo.com.ar lucymon@unt.edu.ar

Resumen
Se relata una experiencia de formación y actualización en el área de Matemática a docentes del Tercer ciclo de la EGB y Polimodal, realizadas en Tartagal – Salta como parte de las actividades de la III Feria del Libro. En el marco de este evento y a través de la Secretaria Regional Adjunta a la Dirección de la Olimpíada Matemática Argentina (OMA), se nos propuso la organización de un curso para docentes del Tercer nivel de la Educación General Básica (EGB3) y Polimodal. La temática a tratar fue "Semejanza e Introducción a los Fractales" que se desarrolló en tres secciones con un total de 18 hs.
En este caso, se propuso un taller para generar un espacio dinámico de interacción entre los participantes, con fuerte énfasis en actividades experimentales, fundamentado en resultados recientes de la investigación educativa.
El desafío consistía que los docentes:
-Fortalecieran su autonomía para el mejoramiento continuo de su gestión profesional, aportando a su formación y actualización.
-Generen un espacio para la discusión y reflexión sobre los contenidos a tratar,
-Transfieran los contenidos vistos a la propia práctica docente, en especial a los alumnos que participan en las olimpíadas, brindándole nuevas estrategias.
En el presente artículo se describe, las características del taller y los objetivos alcanzados.

Introducción

La Secretaria Regional Adjunta a la Dirección de la Olimpíada Matemática Argentina (OMA) nos propuso la organización y el dictado de un curso, para docentes del Tercer nivel de la Educación General Básica (EGB3) y Polimodal, en el marco de la III[a] Feria del Libro. Este evento se llevó a cabo en el Instituto Santa Catalina de Bolognia (Tartagal – Salta), durante el mes de Agosto de 2000. La temática sugerida fue "Semejanza e Introducción a los Fractales. Se desarrolló en un curso taller, para generar un espacio dinámico de interacción entre los participantes, con fuerte énfasis en actividades experimentales, fundamentado en resultados recientes de la Investigación Educativa, realizándose en tres actividades con un total de 18hs

El desafío consistía que los docentes-alumnos:

- Fortalecieran su autonomía para el mejoramiento continuo de su gestión profesional, aportando a su formación y actualización.
- Generaran un espacio para la discusión y reflexión sobre los contenidos a tratar,
- Transfirieran los contenidos vistos a la propia práctica docente, en especial a los alumnos que participan en las olimpíadas, brindándole nuevas estrategias.

Marco Teórico

Este taller de capacitación, se basó en un modelo de aprendizaje constructivista, que concibe el aprendizaje de las ciencias como:

- Un proceso de construcción de significados en el cual el aprendiz aporta sus propias maneras de pensar al enfrentar una situación que intenta comprender.

- Un proceso de elaboración intelectual colectiva en el que se confrontan ideas y se intercambian argumentaciones.

Se tuvo presente dos principios pedagógicos orientar la exploración inicial y proporcionar, a lo largo del desarrollo de los distintos problemas, una estructura de apoyo, que consistía en reforzar varios conceptos, propiedades y teoremas de la temática en estudio.

El aprender no significó simplemente reemplazar un punto de vista, ni acumular nuevo conocimiento sobre el viejo, sino transformar el conocimiento. Esta transformación, a su vez, ocurre a través del pensamiento activo y original del aprendiz, quien considera sus saberes previos e implica la experimentación y la resolución con los problemas planteados. Además, se consideró a los errores como parte del aprendizaje y se trato de hallar el término medio entre dictarles todos los movimientos y no orientarlos en absoluto.

Metodología

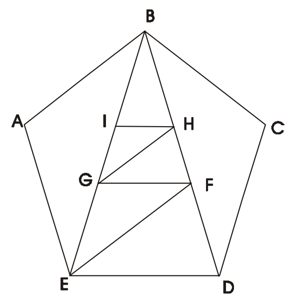
Se propone el trabajo grupal para realizar las actividades (comisiones de 5 o 6 integrantes), siendo la función del docente, fundamentalmente la de guía o coordinador.

Los participantes (docentes de los niveles antes mencionados y alumnos del último año del profesorado de matemática) contaron con un documento básico que incluyó la teoría necesaria, problemas para ser desarrollados durante el taller, y la resolución de algunos problemas de geometría fractal, dado que para el resto de los ejercicios propuestos se hizo una puesta en común.

El taller se estructuró en tres actividades que estuvieron orientadas hacia el trabajo interactivo entre los participantes.

En la Actividad Nº 1, se presentaron problemas de congruencia y semejanza. Como problema disparador, tomamos los que propone Iglesias (1995), porque nos pareció muy didáctico para la apertura de este taller:

El tangrama siguiente muestra la figura de un pentágono regular al que se le trazan dos diagonales ($\overline{BE}$ y $\overline{BD}$) y un segmento ($\overline{EF}$) que pertenece a una tercera diagonal. Además: $\overline{GF} \parallel \overline{ED}$, $\overline{GH} \parallel \overline{EF}$, $\overline{IH} \parallel \overline{GF}$.
Con estos segmentos trazados en el pentágono se obtienen varios triángulos:



a) *¿Qué clase de triángulo es cada uno?*
b) *¿Hay triángulos congruentes? ¿Hay triángulos semejantes?*
c) *Entre los ángulos interiores de esos triángulos ¿Cuántas clases de ángulos congruentes hay?*
d) *Entre los segmentos que son lados de esos triángulos ¿Cuántas clases de segmentos congruentes hay?.*

En este problema el docente alumno debió recordar: suma de ángulos interiores de un polígono convexo, tipos de triángulos, ángulos entre paralelas cortadas por una transversal, congruencia y semejanza de triángulos. La mayor dificultad la tuvieron con clases de congruencias, semejanzas y teoremas afines, por ser desconocidos o estar olvidados.
Analíticamente, el alumno logró descubrir, entre otras cosas, que todos los triángulos del tangrama son isósceles, que son tres las clases de ángulos congruentes y cuatro las clases de segmentos congruentes.

Calcar y recortar el tangrama pentagonal para componer distintos polígonos.
a) ¿Qué clases de polígonos has formado?
b) ¿Hay polígonos de distintas formas y áreas iguales? ¿Y de distinta forma y perímetros iguales?
c) Organizar la colección de polígonos formados usando distintos criterios por el número de lados, por la convexidad, por áreas crecientes, por perímetros crecientes, etc.

Con este problema el alumno comienza la manipulación propiamente dicha del tangrama y la actividad adquirió un carácter lúdico. Estimula la creación y un mayor nivel de observación.
En esta instancia, se refuerzan los conceptos y relaciones geométricas vistas en el ejercicio anterior, comprobando fácilmente algunos de los resultados.

Con cinco de las figuras del tangrama anterior, construya el pentágono original con un hueco en el centro de forma pentagonal. Indique a que clase S_i pertenecen el lado y la diagonal del nuevo pentágono.

Este problema no tuvo dificultad, dado que solo requirió la manipulación de las piezas.

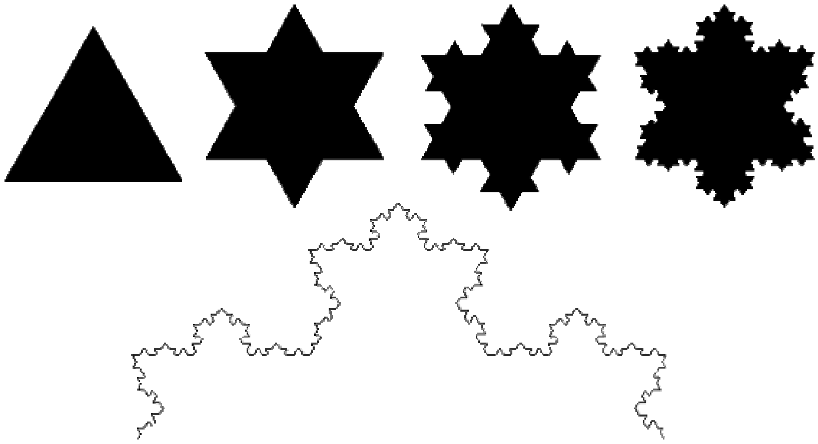
Llamemos l y d a las medidas del lado y de la diagonal del pentágono original, respectivamente.
Llamemos l´ y d´ a las medidas del lado y de la diagonal del pentágono que forma el hueco dentro del tangrama del problema anterior.
a) ¿ Hay alguna relación entre las medidas de uno y otro pentágono?
b) En el pentágono original ¿Qué relación hay entre l y d? Justifique la respuesta.
c) En el pentágono hueco ¿Qué relación hay entre l´ y d´? Justifique la respuesta.
d) Anotar todas las observaciones que sugiera la resolución del problema.

Al final de esta instancia, se hizo necesaria la intervención docente, dado que no pudieron interpretar que la razón de la diagonal y el lado del pentágono ($d/l = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$) es el número de oro, desconocido por la mayoría de los alumnos, el cual tuvo que ser discutido.

Se continuó con otros problemas, de mayor dificultad, que servirán en especial para la práctica del alumno olímpico.

Antes de terminar esta actividad, se propuso resolver el siguiente problema, que sirvió como nexo para introducirlos en la segunda actividad con problemas de la geometría fractal:

> *A partir de un triángulo equilátero P, de área A y perímetro p, construimos el polígono* P_1 *borrando el tercio central de cada lado y construyendo el 1º triángulo equilátero como se indica en la figura. Luego construimos el polígono* P_2 *borrando el tercio central de cada lado de* P_1 *y construyendo triángulos equiláteros. Continuando de esta manera obtenemos* $P_3, P_4, \dots, P_n$.



> *¿ Se obtienen triángulos equiláteros semejantes?*
> *Calcule el área* A_n *y el perímetro* p_n *del polígono* P_n *y demuestre que: cualquiera sea n, es* $A_n < (8/5)\, A$.

Para su resolución, se calcula el perímetro y el área del polígono que resulta tras cada iteración, por inducción se obtiene:

- $p_n = p\left(\frac{4}{3}\right)^n$, una sucesión geométrica, cuyo primer término es *p* (cualquiera sea el valor de *p* , que para simplificar los cálculos se podría suponer que el perímetro del triángulo $p = 3$), y la razón (4/3). Al ser la razón mayor que 1, a medida que n aumenta, p_n se hace cada vez mayor, es decir $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$, por lo que estamos frente a una sucesión divergente.
- Situación contraria para la sucesión de las áreas, donde por semejanza de figuras planas y por inducción, se llega a que:

$$A_n = A\left[1 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}\right]$$. Reconociendo la serie geométrica,

cuyo primer término es (1/3) y la razón (4/9), menor que 1, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A\left[1+\frac{1/3}{\left(1-4/9\right)}\right] = \frac{8}{5}A$$ (cualquiera se A); cantidad finita de la superficie encerrada por este fractal geométrico[1].

Al comienzo, este problema tuvo dificultad en los docentes-alumnos por lo que el docente guía proporcionó una orientación esencial, explicando en cada iteración como variaba el perímetro y el área del polígono considerado, ayudando a aprender a observar y a realizar conjeturas (Turégano, 1997); aportando conocimientos matemáticos que no recordaban en esos momentos y/ o herramientas de las que no disponían.
En esta fase el docente-alumno está situado ante algo que "conoce" y ante algo que "desconoce" parcial o totalmente; ese "estado" es el que lo motiva a la búsqueda para poder dar respuestas.
Se observa, que allí donde hay un cambio de escala, hay una semejanza. Esta invarianza frente a cambios de escala (autosemejanza) es una propiedad fundamental de los fractales que son estructuras en las cuales los detalles pequeños repiten las características globales más grandes, en un número infinito de veces (de Guzmán, y col., 1993).
En las sucesivas iteraciones de este ejemplo, se obtiene gráficamente el prefactal[2] "copo de nieve", de Von Koch[3].
En la Actividad Nº 2, se dio una pequeña introducción e historia de la Teoría Fractal, y se presento otros fractales clásicos y su construcción, hasta una determinada iteración, pues se llega un momento en el que el modelo de estas repeticiones son solamente realizables a través de computadoras. Por tal motivo, como tercera actividad, se propuso el uso de la tecnología informática, para lograr una mejor aproximación de las representaciones prefactales, donde utilizamos un software confeccionado por el equipo de investigación dirigido por el Dr. Hibbard, T. y col.,(1996).
Al finalizar cada actividad, se facilitó a los participantes una síntesis elaborada por los docentes coordinadores, donde se analizaron los resultados de cada una de ellas y se profundizaron los conceptos analizadas.

Conclusiones

Al finalizar el taller, quisimos evaluar el mismo y dimos una encuesta para que manifestaran sus propias opiniones y/o sugerencias acerca de la metodología empleada, material concreto, y tema propuesto. De acuerdo a los resultados destacamos que la metodología implementada fue muy satisfactoria, pues revirtió la actitud inicial de descreimiento de los participantes sobre la posibilidad de resolver los problemas propuestos.
Relación áurea y Fractales, desconocidos por la mayoría de los alumnos, fueron temas que les resultaron muy interesante.
La inclusión de la geometría fractal en la curricula se justifica por la necesidad de actualizar los conocimientos matemáticos.

[1] Santaló (1992), llamó fractales geométricos a las iteraciones de construcciones geométricas
[2] Porque el dibujo no define el fractal, sólo lo insinúa.
[3] La curva de Koch, fue introducida por Mandelbrot (1987), como modelo simplificado de una costa

La utilización de programas informáticos brindó la oportunidad de pasar de unos estilos de investigación a otros: visuales, experimentales y formales (Turégano, 1997).
Es importante señalar también, que se lograron los objetivos propuestos, y además otros no previstos, como los siguientes:

- Un alto grado de compromiso con la tarea y el aprendizaje,
- La conveniencia de enseñar Fractales desde el nivel inicial, con propuestas adecuadas a la edad de los alumnos,
- Un consenso sobre la necesidad de reforzar la formación y capacitación de los docentes en el área de Matemática..
- La reflexión sobre los avances tecnológicos contemporáneos y su vínculo con la temática abordada.

Referencias bibliográficas

Aguilera, N. (1995). *Un paseo por el jardín de los fractales*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Red Olímpica. Olimpíada Matemática Argentina.

Coexeter, H.S.; Greitzer, S.L. (1993): *Retorno a la Geometría.* Colección: La Tortuga de Aquiles Nº 1. Madrid, España: Ed.DLS-Euler.

De Guzmán, M.; Martin, M.A.; Morán M.; Reyes M. (1993). *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Barcelona, España: Ed. Labor, SA.

Fauring P.; Gutierrez F. (1993). *Olimpíada Matemática Argentina, PROBLEMAS I*. Buenos Aires, Argentina: Ed. Red Olímpica.

Hibbard, T. y col. (1996). *Geometría del Siglo XXI*. (Documento de trabajo) III Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur. Universidad Nacional de Salta, Argentina.

Hinrchsen, E.; Busciazzo, N.; Filiputti, S.; S. de Hinrichsen, S. (1993). *Olimpíada Matemática Argentina, PROBLEMAS II.* Buenos Aires, Argentina: Ed. Red Olímpica.

Ibañez, M.; Eguez, R.; Funes, M. (1994). *¿Qué son los Fractales? ¿Para que sirven?* (Documento de trabajo) V Jornadas del NOA de Articulación entre los niveles medio y universitario en la disciplina Matemática, Universidad Nacional de Catamarca. Argentina.

Iglesias, L.D.(1995). Propuesta didáctica. En *Elementos de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Publicación Didáctico Científica Editada por la UNIVERSIDAD CAECE, vol. IX Nº XXXV,. pp 37-41.

Mandelbrot, B.B. (1987). *Los objetos fractales*. España: Ed. Tusquets.

Marín Rodríguez, M. (1994). La Enseñanza de los Fractales. *Revista Números* Nº 25. La Laguna, Tenerife, España: Ed. Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemática. pp17-24.

Paz Sordía, A. (1963). *Geometría I-II-II*. New York, EEUU: Ed. Minerva Books, LTD.

Rojo, A.; Sánchez, S.; Greco, M. (1981). *Ejercicios y Problemas de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ed. Librería "EL ATENEO".

Santaló, L.A. (1992). Conjuntos fractales. *Elementos de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Publicación Científica Editada por la UNIVERSIDAD CAECE, vol. VI Nº XXIII,. pp 5 -26.

Santaló, L.A. (1993). *La geometría en la formación de Profesores*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Red Olímpica.

Turégano, P. (1997). Una experiencia de geometría fractal en la formación inicial de maestros de primaria. *Memorias de las VIIIª JAEM (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de la Matemática)* Salamanca, España, pp 175-177.

Formación de profesores de matemática : Una experiencia en Guatemala

Mayra Castillo
Universidad de San Carlos de Guatemala.
mayracastillo@hotmail.com

Resumen
El presente estudio busca la validación de una propuesta para profesionalizar a los docentes que imparten Matemática en la escuela secundaria sin haber realizado estudios específicos de profesorado. Se inicia detectando líderes entre los docentes y conformando asociaciones que permitan convocar a los maestros de Matemática de distintas regiones. El programa completo está propuesto para cinco años, de los cuales, el más avanzado de los grupos ha cubierto tres. Se abarcan aspectos formativos tanto de la Matemática como de su Didáctica. Desde sus propias aulas, los docentes determinan los conocimientos que requieren y buscan la estrategias innovadoras que les permitan ponerlos a disposición de sus alumnos, en las condiciones específicas en las que laboran. Se ha trabajado durante tres de los cinco años propuestos, al final de los cuales podremos exponer los resultados finales de la implementación de la propuesta.

Introducción

La experiencia como docente en programas regulares de formación de profesores permitieron detectar algunos rasgos del docente de matemática en servicio en la escuela secundaria guatemalteca:

- Muchos de los docentes que imparten matemática no tienen estudios de profesorado.
- Muchos maestros laboran en dos o tres jornadas de trabajo y en varios niveles educativos.
- Comparando el número de egresados de las distintas escuelas de formación de profesores y estimando el número de docentes en servicio, podía concluirse que el país no cuenta con suficientes profesores adecuadamente formados para atender las demandas de un sistema escolar cada día más privatizado y con poco o ningún control estatal.

Sin embargo, había que estimar más de cerca el problema, por lo cual realizamos un estudio piloto con 300 profesores en servicio en todos los sectores del sistema educativo del país, el cual produjo los siguientes resultados (Castillo 1997).

- El 22% de los profesores en servicio en la capital del país tenían estudios concluidos de profesorado. El 78% restante estaba distribuido así: 45% eran profesores de pedagogía, 22% estudiantes de ingeniería, 11% maestros de educación primaria.
- El 85% de los profesores especializados trabajaban en el sector público.
- En el interior del país sólo el 4% de los profesores habían realizado estudios de profesorado. El 96% restante, se distribuía así: 62 % eran maestros de primaria, el 24% eran profesores de pedagogía, y el 10 % restante eran peritos contadores, técnicos pecuarios y otros (Castillo, 1996)

Con estos datos preliminares, establecimos contacto con profesores de varias provincias en la cuales algunos de los profesores eran especializados y gozaban de prestigio y reconocimiento entre sus colegas y ante las autoridades locales. Una vez ubicados los líderes, trabajamos en la formación de una asociaciones de profesores de Matemática, que incluyera entre sus objetivos la elevación de la calidad de la educación matemática en la región. Las primeras reuniones se dedicaron a definir su normativa, intereses, necesidades y expectativas. De este trabajo se derivó a la realización de talleres y cursos trimestrales.
La participación constante de los docentes en la manifestación de sus intereses y la continua reflexión sobre la medida en que se satisfacían sus expectativas, originó que a finales de

l998 solicitaran un programa de formación continua que durara un mínimo de 3 años. Dicho programa concluyó en el 2001, su tercer año de funcionamiento.
Aunque se invirtió casi un año de trabajo organizativo, esta etapa previa permitió a los docentes reflexionar sobre su problemática prioritaria e involucrarse directamente en la búsqueda de estrategias para su profesionalización. Además, permitió conocer número de profesores especializados en varias provincias. A partir de este momento, los docentes tienen a su cargo la gestión financiera y administrativa del programa e interactúan con el equipo de investigadores en el análisis continuo de las actividades realizadas en cada fase.

Antecedentes

La actual propuesta para la actualización de docentes de Matemática de la escuela secundaria se plantea como un trabajo de investigación – acción centrado en la necesidad de formar al maestro como un ser autónomo y crítico, por lo cual la finalidad no sólo es que el maestro aprenda Matemática, sino que también aprenda a enseñarla (Santos Guerra, 1993) . Se tomó como base otro estudio que evidencia que gran parte de los profesores son propicios a enseñar matemática por los mismos caminos que ellos fueron enseñados (Lester y col. citado por Gómez, 1998). Romper este ciclo y modificar su ejercicio profesional hacia formas más consistentes con nuevos planteamientos curriculares, implica conocer y experimentar una forma diferente de saber, de hacer, de aprender y de enseñar matemática.
Otros estudios señalan que los resultados más significativos en la formación de profesores, son aquellas experiencias en las cuales hay consistencia entre la forma de trabajar del formador -modelo didáctico subyacente- y la filosofía que se intenta transmitir con el contenido de estudio -modelo didáctico explícito (Vacc y Bright, 1994). Lo anterior se puntualiza en la expresión "se enseña a enseñar, enseñando". En este sentido, todos lo elementos utilizados son objetos de aprendizaje para el profesor.
Los principios de la innovación propuesta se describen a continuación:

- **Articulación teoría- práctica** (Azcárate, 2000):
  Se experimentan con los profesores estrategias de enseñanza de la matemática estableciendo un isomorfismo entre el modelo didáctico utilizado y el que se propone que implementen en las aulas.
- **Estimulación de la creatividad y el auto-perfeccionamiento** (Fernández y García, 1999):
  Entendemos el auto-perfeccionamiento docente como una actividad autónoma que presupone cambios en el dominio y comprensión de los fines y naturaleza de la actuación profesional, para lo cual es indispensable que los maestros tengan claridad de sus responsabilidades sociales e históricas. Este proceso es imposible de realizar sin la participación de los propios docentes en la definición y aceptación de dichas responsabilidades.
- **Fomento a la participación activa y democrática** (Porlan, 1993):
  La dirección del proceso de actualización de los docentes se encamina tanto al ejercicio libre de la expresión, como al surgimiento de iniciativas del colectivo tendientes a la búsqueda de soluciones a problemáticas en el ámbito de la educación matemática .
- **Fomento a investigación desde el aula y para el aula** (Porlan, 1993):
  Se potencia la figura del profesor como un investigador de los problemas de aprendizaje que presentan sus alumnos, sus actitudes hacia la matemática, procedimientos novedosos usados por los alumnos, etc.

Por otra parte, se busca el desarrollo de su creatividad cuando debe adaptar las propuestas experimentadas al grado y lugar donde labora .

- **Fomento de la calidad de la educación matemática** (Registrado en la firma de los Acuerdos de Paz, Guatemala, 1996)**:**

Guatemala necesita urgentemente no sólo que la educación científica llegue a sectores mayoritarios olvidados, sino que fundamentalmente se eleve el nivel de la calidad de la educación matemática que reciben los niños y jóvenes guatemaltecos.

- **Equidad:**

Los profesores de matemática en servicio pueden asistir al programa sin distinción de raza, credo, sexo, edad, sector o institución de trabajo.

Descripción de la Propuesta

Duración:

- **Etapa inicial:**

  Se busca dotar a los docentes de los conocimientos y herramientas básicas que le permitan satisfacer sus necesidades inmediatas, reflexionar sobre su participación en el hecho educativo y reconocerse como un ser capaz de propiciar cambios en su conducta y en la de sus alumnos, respecto a la matemática.

Esta etapa dura tres años, cada curso anual consta de 120 horas de trabajo presencial.

- **Etapa intermedia:**

  Los profesores que terminen la etapa de formación inicial, trabajarán un año más centrando su atención en el estudio de la temática que necesitan para orientar la formación de los alumnos egresados del nivel medio, ya sea que estos continúen estudios superiores o se incorporen a los procesos productivos del país. Como fruto de su experiencia, los docentes comparten abiertamente experiencias de aula con sus colegas.

  En esta etapa se trabaja adicionalmente con los profesores con el fin de que se constituyan en monitores para la formación de los maestros de la escuela primaria en cada comunidad. Adicionalmente, se les brinda orientación en el diseño de proyectos que puedan gestionar fondos con agencias internacionales, organizaciones no gubernamentales, etc.

- **Etapa avanzada:**

  Esta etapa dura un año más y se pretende trabajar enfáticamente en aquellos aspectos que le permitan realizar innovaciones y perfilarse desde del aula como un investigador. Los profesores deberán participar en eventos de actualización en su región y otras regiones, escribir sus experiencias de aula para publicarse en un boletín de educación matemática cuya edición impulsamos, presentar proyectos educativos individuales o en grupo que permitan implementar soluciones a los problemas que detectó en su etapa de formación.

Reconocimientos Académicos

Cada uno de los primeros cuatro año se reconoce con un diploma que acredita a los participantes como Profesor Técnico en cada grado del ciclo básico y bachillerato. El quinto año se reconocerá con un diploma de auxiliar de investigación.

Metodología de trabajo

El trabajo de formación de los docentes lo enfocamos desde las perspectivas social, laboral, académica e investigativa; trabajando los siguientes aspectos:

- **Construcción de conocimientos matemáticos:**

Desde el inicio del trabajo organizativo, los docentes manifestaron claramente que necesitaban que cada año se trataran los contenidos que corresponden a cada grado del ciclo básico y en consecuencia, hacia allí dirigimos nuestros esfuerzos.

Los estudios que realizamos en cada región permitieron establecer que la falta de control del Estado sobre la calidad de la educación, permite una gran anarquía en cuanto a los contenidos desarrollados en cada grado. Encontramos que si bien es cierto, existen algunos ejemplares de guías curriculares dadas por el Ministerio de Educación, la mayoría de establecimientos educativos tiene su propio programa, y lo que es peor aún, cada profesor elabora el programa que desarrolla de acuerdo a sus preferencias o conocimientos que domina. La esporádica supervisión que pudiera existir era solventada por la presentación de planes de clase que afirmaban que todos los contenidos habían sido desarrollados.

De manera que al hablar de los contenidos de cada grado del ciclo básico, cada uno tenía su versión. Así que primero procedimos a unificar criterios sobre los contenidos que todo el grupo se comprometía a desarrollar y de ellos seleccionamos aquellos que la mayoría preferían o que mostraban mayor deficiencia en la prueba de diagnóstico realizada.

- **Desarrollo histórico de los conocimientos matemáticos:**

Además de los contenidos matemáticos en sí, se presentan a los docentes referencias históricas que le permiten conocer y comprender la evolución de los conocimientos matemáticos hasta su estado actual. Además, se estudia el aporte de la matemática al desarrollo de la ciencia y de la sociedad y promovemos la valoración del legado científico de los pueblos Mayas, con énfasis en lo concerniente a los conocimientos matemáticos.

- **Problemas de aprendizaje:**

Aprovechando la experiencia docente de la mayoría de los asistentes, en el tratamiento de cada tema promovemos que ellos describan los errores que más frecuentemente han observado que cometen sus alumnos. La mayoría de las veces, es muy jocosamente celebrado que muchos de ellos cometen no sólo los errores que describen, sino también otros que no estaban registrados. Este reconocimiento de las propias deficiencias, tiene dos efectos en los docentes: querer aprender y superarse y otro de entendimiento de las dificultades inherentes de aprendizaje que presentan algunos temas.

- **Didáctica de la matemática:**

Desde el principio de nuestro trabajo con los docentes, ellos manifestaron gran interés en conocer y aplicar estrategias concretas de trabajo en el aula. En cada taller presentamos propuestas didácticas de los miembros del equipo o de colegas de Latinoamérica que colaboran brindando su experiencia al programa.

Como sus expectativas respecto a lo novedoso en estrategias de enseñanza y materiales didácticos eran crecientes, le hicimos dos planteamientos:

1. No existen propuestas didácticas para todos los temas y que funcionen con todos los grupos de alumnos.
2. Ellos podían construir propuestas didácticas muy valiosas y funcionales. Más aún, tenían que hacerlo para buscar por sobre todas las cosas, que sus alumnos aprendieran.

El primer planteamiento los desilusionó y el otro fue recibido con escepticismo. Manifestaron que las propuestas didácticas valiosas las hacían los especialistas y no maestros rurales sin mayor preparación como ellos. Así que gran parte de nuestro trabajo se dirigió a motivarles a que describieran las estrategias que usaban, a rescatar y valorar aquellas que nos parecían interesantes. Después de varios años han ido descubriendo sus capacidades, las cuales han mostrado en eventos regionales y varios de ellos ya presentaron ponencias en los Congresos Nacionales de Matemática Educativa que organizamos anualmente.

- **Roles del profesor de matemática:**

Nuestro trabajo inicial en este sentido se orientó hacia el descubrimiento de las concepciones que los docentes tenían de ellos mismos, de su labor docente, de las razones del fracaso escolar, de sus necesidades, etc. Fomentamos el análisis y la reflexión constante de su propio trabajo, y como fruto de ellos, la búsqueda de la renovación como persona y como docente. El trabajo posterior fue de definición de los cambios que había que hacer, qué tipo de profesor necesita Guatemala para ayudarnos a consolidar la cultura de paz que anhela nuestro pueblo, cómo debe ser el profesor de matemática que ayudará a nuestros niños y jóvenes a enfrentar los retos de la nueva era, cómo puede cada profesor desde su aula contribuir al desarrollo de la nación. Estas y otras interrogantes están siempre en fase se reflexión y discusión con todos los docentes.

- **Investigación desde el aula y para el aula:**

Como parte de su formación, desde el inicio se les orienta hacia la descripción de sus actividades docentes, enfatizando sus principales problemas de aula, actitud de los alumnos, problemas de aprendizaje detectados y posibles explicaciones de los mismos, preguntas de alumnos y procedimientos novedosos usados, etc. Al inicio de la siguiente sesión se discuten en común todos los aspectos anteriores, buscando la sistematización de la información y el respaldo teórico que permita estudiarla más a fondo y explicarla.

Metodología de evaluación

- Prueba de diagnóstico de conocimientos: es una prueba que permite detectar los temas cuyo conocimiento es más deficiente para la mayoría, patrones en las respuestas, estrategias de solución etc.

  Al docente, le permite comparar sus conocimientos iniciales contra los finales en una escala meramente cuantitativa.
- Pruebas escritas: se realizan dos pruebas escritas sobre contenidos desarrollados o comentario de problemas de aula.
- Reporte de práctica docente: los profesores entregan un reporte del trabajo realizado en el aula, con constancia del trabajo de los alumnos, su evaluación e interpretación de resultados,etc.
- Entrega de tareas: Mensualmente son asignados algunos ejercicios o problemas interesantes para su resolución individual o grupal.
- Asistencia a por lo menos 9 de los 10 talleres y a los cursos que se imparten en el congreso nacional.
- Auto-evaluación y co-evaluación de los logros alcanzados y reformulación continua de las metas de aprendizaje, tanto individuales como colectivas.

Resultados obtenidos

- Fundación de siete asociaciones regionales de profesores de Matemática.
- Finalización de etapa inicial con aproximadamente 300 profesores de matemática.

- En ejecución programa de actualización de maestros de primaria, con el apoyo de grupos de profesores tecnificados en las distintas regiones.
- Consolidación de la comunidad de profesores de Matemática de distintos niveles educativos.
- Identificación de necesidades prioritarias en el campo de la enseñanza de la Matemática, en cuatro regiones del país.
- Teorización de conducta de los docentes participantes en el proceso, que servirá de base para la formulación de un modelo que pueda implementarse a nivel nacional, para profesionalizar y actualizar a los docentes en servicio.

Reflexiones finales

La formación de profesores en la modalidad a distancia que hemos ensayado, constituye una experiencia que está en continua reconstrucción a la luz de las necesidades y posibilidades de los profesores en servicio y del equipo de docentes e investigadores que conducen el aspecto académico del programa.

Hemos recuperado la fe de muchos docentes en ellos mismos y renovado su intención de transformar su mundo. Hemos obtenido la solidaridad de colegas de Latinoamérica y tendido lazos entre profesores e investigadores. Hasta el momento no existe en Guatemala un programa similar que permita establecer comparaciones, pero las necesidades de profesionalizar a miles de docentes guatemaltecos, y de otras regiones del continente, amerita que esta experiencia sea documentada y puesta al servicio de los nuevos formadores de educadores matemáticos que deberán realizar esta tarea en condiciones adversas y encontrar en los propios docentes, la fuerza que les permita enfrentar el reto de mejorar la educación de nuestros pueblos.

Al final del estudio, tendremos una propuesta para la formación de los profesores en servicio que pueda implementarse en cualquier región del país.

Referencias bibliográficas

Azcarate, P. (2000). Revista Investigación en la escuela # 42: Estudio de caso en la formación del profesorado. Los futuros maestros ante el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Diada Editora. Sevilla. España.

Blanco, L. (1998). Nuevos retos en la formación de los profesores de matemática. Ponencia presentada en Relme l4. Bogotá Colombia.

Castillo, M. (1997). Estimación del porcentaje de profesores especializados que imparten Matemática en el nivel secundario. Facultad de Ingeniería. USAC. Guatemala.

Cela. D. (1996). Revista investigación en la escuela, # 29. Formación permanente del profesorado y autonomía. Diada Editora. Sevilla.

Fernández y García. (1999). *Autoperfeccionamiento docente*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Revolución.

Gomez, P. (1998) Formación permanente de profesores de matemática. Ponencia presentada en Relme l4. Bogotá, Colombia.

Gomez. P. (1998). Un medio para potenciar profesores investigadores. Ponencia presentada en Relme l4. Bogotá, Colombia.

Porlan, R. (1993). onstructivismo y Escuela. Hacia un modelo de enseñanza basada en la investigación. Diada Editora. Sevilla

Santos Guerra, M. (1993). La formación inicial. Cuadernos de Pedagogía.

Vacc, N y Bright, G. (1994). Changing preservice teacher-education programs. Profesional Develoment for Teachers of Mathematics. (traducción interna).

La creatividad: un desafío docente

Graciela C. Abraham de Juárez, Marta del Valle Zamora
Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Tucumán), Argentina
marzam@infovia.com.ar

Resumen
Teniendo en cuenta que la creatividad es esencial para todas las actividades humanas, la inquietud por esta temática surgió al observar la necesidad de *ser creativos*, actualmente imperiosa para el docente en el mundo postmoderno. De allí que, iniciar al docente en la importancia y conocimiento de la creatividad sistematizada, es el objetivo de este trabajo, a través de una metodología que enfatiza las aplicaciones prácticas, sin descuidar la teoría básica necesaria para que el aprendizaje teórico-práctico resulte sencillo y adecuado a cada nivel educativo. Por todo esto, el marco teórico comprende**:** un concepto de creatividad, temas que lo complementan (aptitudes de la persona creativa, atributos inherentes a la creatividad, etc.) y las estrategias más adecuadas para su implementación en la Matemática Educativa, mediante algunas aplicaciones adecuadas a cada nivel. Este taller resultó una experiencia fructífera, tanto por el interés despertado en los talleristas como por sus logros teórico-prácticos**:** se resolvieron aplicaciones de estrategias básicas, pero significativas.

Introducción: La capacidad creadora del hombre movió al mundo de la cultura y el progreso; por eso *La Creatividad es un factor muy importante para vivir en el mundo posmoderno***,** ya que cubre todas las actividades humanas, desde educación y medicina hasta la producción en general, pero no concentrando la capacidad creativa en grupos de "iluminados", sino procurando su expansión holística a todos los aspectos y niveles. La función del docente no es sólo ser creativo, sino también propiciar un clima de creatividad en sus clases, para que los estudiantes sean capaces de aportar ideas originales y renovadoras, con aprendizajes adecuados. Sistematizar los estudios de las estrategias para la creatividad es un buen *objetivo educacional*. Pero, ¿se puede "enseñar" a alguien a ser creativo*?.* Sí, pero no es sencillo**:** se precisa idoneidad docente, empeño y paciencia.

Definición: Hay inconvenientes para dar una definición clara y precisa de Creatividad. La palabra es poli-semántica y sinonímica, no obstante, las ideas principales que forman una conceptualización básica, serían**:**
*La **Creatividad** no es solamente crear ó inventar algo, sino que, fundamentalmente, **constituye la técnica de resolver problemas,** volcando la mente hacia fuera. No es privilegio de unos pocos "elegidos", sino una propiedad intelectual que los individuos poseen en distinta medida, susceptible de ser desarrollada ó incrementada, y que se revela ante ciertas situaciones de motivación ó estímulo. Ser creativo requiere de un complejo proceso mental, resultado de la conjunción interrelacionada de**:** operaciones, contenidos y productos del pensamiento, que genera novedades ó ideas innovadoras, no vistas ni pensadas antes. En el ámbito educativo, la creatividad es el componente primordial para la formación de hombres y mujeres capaces e independientes**:** para pensar, sentir y actuar. Finalmente, la Creatividad es el **uso productivo de la imaginación,** tendiente a fines personales, económicos, educacionales, sociales, políticos, etc.**,** constituyendo el factor más práctico que el hombre actual debe conocer y aplicar adecuadamente en la posmodernidad.*

Otros aspectos de interés, para completar las ideas conceptuales:

a) En todo el mundo, son importantes los estudios psicológicos que realiza la Escuela Rusa, basados en el **Enfoque Histórico-Cultural** de ***Vigostki*** y sus continuadores. Plantea

Vigostki que el ser humano realiza dos operaciones mentales básicas**: reproductora**, ligada a la memoria para reproducir ideas anteriores, y **creadora,** relacionada con la disociación y la asociación de las ideas presentes. También afirma que la Creatividad no sólo la poseen los genios, sino que potencialmente existe en cualquier ser humano que piensa, razona, imagina y crea algo. Enfatiza en la **unidad mental de lo cognoscitivo con lo afectivo** y señala su carácter socio-histórico, que depende del entorno social y del momento histórico en que cada ser humano vive.

b) El apoyo psicológico de la Creatividad es la *Escuela Psicológica de la Gestalt*, que propicia la **percepción configurativa,** enfoque contrario al asociacionismo.

c) El Pensamiento creativo es, sin duda, un **Proceso Cognoscitivo,** que combina operaciones mentales**:** divergentes y convergentes, laterales y verticales, intuición y análisis, fantasía y lógica. Hyzer clasifica al pensamiento creativo en dos tipos**:** analítico e intuitivo, que están siempre presentes en la psiquis humana.

d) Algunas **características personales,** inherentes al individuo creativo, son:

Imaginación.	Originalidad.	Curiosidad intelectual.
Afición a lo creativo.	Apertura a lo nuevo.	Fluidez de pensamiento.
Flexibilidad mental.	Perspicacia.	Amplia información.
Fuerte poder de intuición.	Constante actitud de empatía.	Inteligencia fuerte.
Capacidad de abstracción.	Capacidad de síntesis.	Capacidad de redefinición.
Percepción configurativa.	Facilidad de expresión de sus procesos mentales.	Coherencia organizativa.
Independencia.	Poder de decisión.	Libre asociación de ideas.
Confianza en sí mismos.	Capacidad de autocrítica.	Facilidad de procesamiento.

e) Fue John Dewey el 1º en afirmar que la Creatividad no es teórica, sino que se inicia con una **situación problemática.** Raudsepp dice que la habilidad para percibir y formular correctamente un problema, son indispensables para la solución eficaz del mismo. En lo Científico, Tecnológico, Educativo y Laboral, **es tan importante descubrir problemas como resolverlos.**

f) La **imaginación,** como transformación sucesiva de ideas, es un factor fundamental en lo creativo, ya que es un proceso intelectual dinámico, que pasa de una imagen mental a otra, permitiendo **la libre asociación de ideas = imaginación + memoria.**

g) En la mayoría de las investigaciones actuales, se considera que la Creatividad puede darse en los siguientes contextos**: persona, sociedad, procesos diversos, productos, ó en la conjunción** de algunos de ellos ó de todos.

Principales estrategias para desarrollar la creatividad:

a) Las estrategias son necesarias a fin de lograr una formación mental creativa. Debido a que la Creatividad se nutre de complejos procesos mentales, se encuentra aún en la etapa experimental. Se estudia sobre la base de investigaciones más ó menos serias y confiables. Para la Psicología Cognitiva, un tema polémico es la distinción entre Estrategias y Habilidades. Las habilidades serían específicas y relacionadas con la ejecución de una tarea particular; en cambio, las estrategias involucran procesos psicológicos más complejos.

b) Una **definición satisfactoria de Estrategia**, sería la siguiente**:**

*"**Las Estrategias son vías que conducen a un buen proceso mental creativo**, el puente de unión entre **el qué y el cómo pensar** para llegar a la solución del conflicto. Se definen como el modo a través del cual las personas descubren equivalencias y asociaciones entre*

las cosas que las rodean; la secuencia de decisiones que una persona realiza ***en su camino hacia la obtención del concepto ó solución del problema".***

c) Abordaremos de manera sucinta y esquemática las principales estrategias. El detalle irá en cada problema, acompañando las que se apliquen**:**

Chi y Glaser Estrategias en función de los Métodos de solución adoptados Por los sujetos que resuelven.	Búsqueda al azar. Búsqueda en profundidad. Análisis de medios y fines. Subobjetivos. Generación y comprobación.

Brunner y colaboradores Estrategias Experimentales	1) Recepción de la información 2) Selección del concepto (solución)	Examen simultáneo. Exploración sucesiva. Foco fijo. Foco al azar.

Kirst Presenta las estrategias como Ejercicios agrupados en torno a capacidades y factores creativos.	Movilidad. Fluidez. Originalidad. Análisis. Producción. Construcción. Cambio de forma.

De la Torre Revisión bibliográfica y síntesis de las estrategias.	<u>Las divide en</u> <u>Seis tipos</u>**:** Analíticas. Estructurantes. Asociativas. Metamórficas. Inferentes. Complejas ó mixtas.	*f* CIRCEP, Checklist, Ideograma, Matrices y todas las Morfológicas. *f* Todas las Analíticas. *f* Asociaciones forzadas, *f* Lista de Atributos, Morfologizador, Circumrelator. *f* Heuridrama, RED, DSP. *f* Check List, Lista de Atributos, Superposiciones, Ideograma. *f* Brainstorming. *f* Sinéctica, Morfologizador.

Kauffman Clasifica las estrategias Como**:**	Intuitivas Analíticas Combinatorias

En este trabajo nos identificamos con la **Clasificación de Foustier**

<u>Analógicas</u> Se considera la analogía como proceso fundamental.	a) Sinéctica Hacer familiar lo extraño. Hacer extraño lo familiar. b) Biónica. c) Circept. d) Heuridrama. e) Brainstorming f) DSP y REC.
<u>Antitéticas</u> Destruir el objeto para su renovación.	a) Liberación semántica. b) Lista de Atributos. c) Análisis funcional d) Check-list ó Quebrantamiento.

<u>Aleatorias</u> Tienen por finalidad provocar combinaciones al azar.	a) Ideogramación. b) Asociaciones forzadas. c) Matrices de descubrimiento. d) Análisis morfológico. e) Delphi. f) Morfologizador. g) Circumrrelator. h) Superposiciones.

d) Todas **las estrategias son valiosas** porque proporcionan técnicas novedosas y una manera distinta de "ver" y aplicar la Matemática.

e) En los problemas matemáticos, siempre se aplican las estrategias **analíticas y analógicas,** como así también es posible realizar un **brainstorming.**

2- Aplicaciones matemáticas de algunas estrategias.

Problema 1: (Nivel Superior)

Un constructor realiza 5 casas del tipo I, 7 del tipo II y 12 del tipo III, que se representan mediante el vector fila E = (5 7 12). Se saben los insumos mínimos de los siguientes materiales: H (hierro), M (madera), V (vidrio), P (pintura) y T (mano de obra), como así también los costos unitarios de cada ítem para las obras y se los representa mediante las matrices A y C (costos), respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 8 & 12 & 9 & 21 \\ 5 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}; \qquad C = (\ 15 \quad 8 \quad 5 \quad 1 \quad 10\ )$$

Se pide**:** a) ¿Qué representa cada fila de la matriz A?

b) ¿Y cada columna?

c)¿Cuál es la cantidad necesaria de H, M, V, P y T para construir todas las casas?

d)¿Cuánto importa el total de los ítemes para el proyecto de las 24 viviendas?

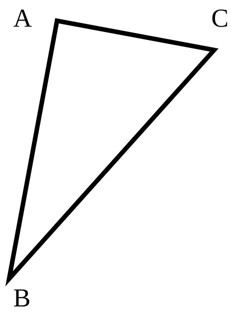
Desarrollo:

Se aplica la estrategia **Matrices de descubrimiento,** cuyos pasos responden a los ítemes a, b, c y d, respectivamente**:** 1) Se plantea el problema; 2) Se analizan los elementos dados en la matriz A, para responder los incisos a) y b)**:** ¿Qué representan la fila 2 y la columna 3?,¿Qué son los elementos a_{32}, a_{25} y a_{14}?; 3) Se efectúan los productos de las matrices respectivas, para responder a los ítemes c) y d)**:**

E_{1x3}**.** $A_{3x5} = Q_{1x5}$, que resuelve el ítem c. Q_{1x5} **.** $(C)^{t}_{1x5} = I_{1x1}$, resultado del ítem d).

(El alumno debe darse cuenta que debe transponer la matriz C)

Problema 2: (Nivel Secundario e Ingreso)



Comprobaremos los efectos que se producen al aplicar, por separado, ambos procedimientos a una misma situación problemática**:**

De acuerdo al triángulo BAC de la figura, que es rectángulo en el ¢, tal que $\overline{BC}$ = x - 1, $\overline{AB}$ = x + 1 y $\overline{AC}$ = x, calcular las medidas de sus tres lados.

Desarrollo**:**

1º) El alumno posee buena información, pero sólo trabaja con su pensamiento lógico.

Entonces, plantea por Pitágoras**:**

$$(x-1)^2 = x^2 + (x+1)^2$$

Resuelve y obtiene**:** $x^2 + 4x = 0$

Por lo tanto**:** x1 = 0 y x2 = -4 . Entonces, los valores de la hipotenusa son**:** **a = -1** ó **a = -5.** Vemos en ambos casos que **a < 0**, lo cual indica que el problema es irresoluble, aparentemente. Ante esta situación, el alumno retorna al principio y controla lo que hizo, comprobando que todos sus cálculos son correctos. Entonces,........¿qué pasa? Comienza a fijarse mejor y analiza nuevamente,.......,pide ayuda a sus compañeros y al Profesor ...... y ..... ¡¡Bueno!!, finalmente se da cuenta, explica todo lo que le pasó y la nueva solución, concluyendo así su problema

2º) El alumno posee buena información y además una **aguda percepción configurativa, perspicacia y creatividad**. De inmediato se dará cuenta que el problema no tiene solución, porque si x debe pertenecer a los reales positivos, entonces la hipotenusa sería menor que los catetos, lo cuál es imposible en un triángulo rectángulo. El alumno explicará todo esto, dando por finalizado el problema.

Problema 3: (Nivel Primario)

Un biólogo recogió en una caja 8 insectos entre arañas y escarabajos. El nº total de patas es 54. ¿Cuántos insectos de cada clase hay en la caja?

Desarrollo**:** En este problema se usará una **Estrategia Sinéctica:** *Hacer conocido lo extraño*, motivando a los alumnos para familiarizarse con los conceptos "extras" que son necesarios para comprender el problema**:** saber cuántas patas tiene cada insecto, llegando a que la araña tiene 8 patas y el escarabajo, 6.

Ahora, mediante **Búsqueda al azar**, se resolverá por tanteo, llegando a**:**

arañas	escarabajos	Cálculos
0	8	8.6=48 patas (no es solución)
1	7	1.8 +7.6 = 50 patas (no es solución)
2	6	2.8 + 6.6 =52 patas (no es solución)
3	**5**	3.8 + 5.6 = **54 patas** (solución)

Respuesta**:** En la caja hay 3 arañas y 5 escarabajos.

Problema 4: (Nivel Superior)

Al concluir el tema "Sistemas de ecuaciones lineales", se propone un ejercicio integrador para afianzar los conocimientos en lo que respecta a los métodos de resolución. Para ello, aplicamos la Estrategia **Examen simultáneo**, con las **tarjetas de Bruner**. Se han confeccionado 9 tarjetas diferentes. ¿Cuáles de estos sistemas se pueden resolver por todos los métodos estudiados, sin efectuar cálculos?.

tarjeta 1 $m \times n$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$	**tarjeta 4** $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$	**tarjeta 7** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ y + 3z = 0 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$
tarjeta 2 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - y - 2z = 7 \\ x + 5y + 4z = -5 \end{cases}$ $\Delta \neq 0$	**tarjeta 5** $n \times n$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$	**tarjeta 8** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$

tarjeta 3 $\Delta = 0$	tarjeta 6 $\Delta \neq 0$	tarjeta 9
$\begin{cases} -2u+v+w-t=0 \\ 3u-v+w-4t=0 \\ -u+2v+w=0 \\ -2v-3w+5t=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-2x_3=0 \\ x_1+7x_2+8x_3=0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=0 \\ -\frac{1}{x}-\frac{5}{z}=0 \end{cases}$

Desarrollo:

Los alumnos ven todas las tarjetas a la vez. La pregunta precisa que recuerden todos los métodos de resolución vistos, y sus condiciones de aplicación. Éstos son**:**

- # Regla de Cramer
- # Mediante inversión de matrices

$\left\{\begin{array}{l}\text{Sistemas n x n}\\ \text{condición } \Delta \neq 0\end{array}\right.$

- □ Método de eliminación de Gauss
- □ Método de Gauss - Jordan

$\left\{\begin{array}{l}\text{Sistemas m x n}\\ \text{y análisis de rangos}\end{array}\right.$

Los alumnos determinan el orden de los sistemas y deducen que los sistemas donde m≠n, no se pueden resolver por todos los métodos. Es decir **descartan las tarjetas 1, 4, 7 y 8**, esta última porque tiene 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

Con la tarjeta 9, tienen que ordenar el sistema**:**

$\begin{cases} 2y+3x=0 \\ z+5x=0 \end{cases}$ que tiene 2 ecuaciones y 3 incógnitas. **Se descarta la tarjeta 9.**

El sistema de la tarjeta 3 es homogéneo y $\Delta = 0$, por lo que tiene infinitas soluciones. También **se descarta la tarjeta 3**.

La tarjeta 6 es tramposa, porque al ser el sistema homogéneo y $\Delta \neq 0$ sólo tiene solución única**:** la trivial. Pero como $\Delta \neq 0$ admitiría tres tipos de resolución.

El sistema de la tarjeta 2 se puede resolver por todos los métodos. La respuesta es entonces**: tarjeta 2 y 6** se pueden resolver por todos los métodos, sin efectuar cálculos.

La **tarjeta 5** requiere de cálculos y analizar el determinante; si $\Delta = 0$, también es solución.

Conclusiones

Este taller resultó una experiencia enriquecedora**:** para las docentes, por la creatividad y el esfuerzo puestos en su realización, y para los asistentes, tratando de sintetizar y asimilar los contenidos teóricos básicos y de comprender la importancia de la creatividad en los tiempos posmodernos. La práctica fue aceptada con beneplácito, tanto los problemas resueltos, como los propuesto y, no obstante que la teoría resultó algo extensa, se compensó con la labor de síntesis y con las realizaciones concretas de la Matemática Recreativa.

Referencias bibliográficas

Autores varios.(1985). Metodo l. de la Creación Científica. Acad. de Ciencias. URSS y Cuba.
Arce Medina, E.(1985). Ap. La Creatividad, ¿qué es, cómo se promueve?. Méjico. UNAM.
Colectivo de autores. (1995). Pensar y crear. Cuba. Academia.
De Bono, E. (1995). El Pensamiento Lateral. Argentina. Paidós.
Dualibi, R. y Simonsen, H. (1992). Creatividad & Marketing. Argentina. Mc Graw-Hill.
Gámez, G. (1998). Todos somos creativos. España. Urano.
Mitjans Martínez,A. (1995). Creatividad, personalidad y educación. Cuba. Pueblo y Educación.
Moles, A. (1986). La Creación Científica. España. Taurus.
Pérez Pantaleón, G. (1996). Ap. Métodos y Técnicas Participativas. Cuba. Univ. de La Habana.
Rouquette, M. L. (1975). La Creatividad. Argentina. Huemul.
Scott, J. A. y Davis, G. A. (1989). Estrategias para la Creatividad. Argentina. Paidós

Descripción de situaciones didácticas desde los libros de textos (en los últimos veinticinco años)

Malva Alberto; Lilián Cadoche
Universidad Tecnológica Nacional. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
mtoso@satlink.com.ar lcadoche@fcv.unl.edu.ar

Resumen
El trabajo tiene dos componentes importantes: el libro de texto y el tratamiento didáctico dado al número real. Inicialmente subrayaremos las características que posee libro de texto dentro del sistema educativo: lo mostraremos como un producto cultural, como un elemento compartido por profesores y estudiantes y como un mediador entre el currículum y las realizaciones didácticas. Posteriormente, utilizando una adecuada selección de libros de textos identificaremos algunas propuestas didácticas con las que se presentó en el concepto de número real en las dos últimas décadas y finalmente seleccionaremos criterios de análisis que permitirán describir distintas representaciones, propiedades, usos y problemas que se muestran actualmente cuando se pretende convertirlo en un objeto de enseñanza y aprendizaje.

Introducción

En el ejercicio cotidiano de nuestra práctica, los docentes somos conscientes que existen temas y conceptos que presentan ciertas resistencias, algunas dificultades o que provocan obstáculos cognoscitivos por parte de los alumnos cuando quieren llegar a una interpretación y manipulación correctas; también reconocemos que dichos temas y conceptos son importantes en sí mismos, son útiles y tienen numerosas aplicaciones. Uno de ellos es el de número real.
Estas vivencias son compartidas por colegas y han sido puestas de manifiesto en investigaciones que han abordado la problemática del número real desde distintas perspectivas: cognitivas, didácticas, históricas, semánticas, (Scaglia, 2000; Romero, 1997; Sanz, 1994).
Suele ser bastante común encontrar docentes con un dejo de insatisfacción respecto de lo que sus alumnos aprenden. A pesar de ello, las dificultades y errores que comenten los estudiantes como resultado del aprendizaje de los números reales o aquellos específicamente estudiados en algunas de las investigaciones citadas no serán considerados en este trabajo. Reconocemos, sin embargo, que si logramos hacer una primera aproximación a la caracterización de las propuestas didácticas sobre el tema del número real puestas de manifiesto en los libros de textos escolares que fueron o son más ampliamente utilizados por los docentes y los alumnos en el contexto escolar, podremos en el futuro proponer secuencias didácticas que ayuden a superar las dificultades y los errores de los alumnos (Rico, 1997).

Identificación del libro de texto

Consideramos como *libro de texto* a aquel que utilizan docentes y alumnos como guía y auxiliar de los procesos de enseñanza y aprendizaje, como consulta y material didáctico habitual y cuyo contenido es compartido por los actores de la interacción educativa. El libro de texto escolar debe dar cuenta ante quienes lo usan para enseñar y ante quienes lo usan para aprender y por consiguiente, en los últimos años, se puede observar que está dotado de

una serie de recursos tanto lingüísticos como paratextuales que intentan favorecer la lectura y comprensión del contenido: por ejemplo, contiene títulos y subtítulos con diferentes tipos de letras; negritas para resaltar palabras; ilustraciones; recuadros; íconos; fotografías; etc.; además debe atender a los conocimientos previos de los alumnos, a los objetivos de aprendizaje, a los lineamientos curriculares vigentes y, en general, la comunidad educativa no puede prescindir de él (Sanz, 1994; Parcerisa, 1998). El libro de texto está generalmente organizado por capítulos y temas con un contenido y conjunto de actividades que cubren distintos aspectos del conocimiento para ser desarrollado en períodos básicos del calendario escolar. Aceptamos que el libro de texto emerge como un organizador y comunicador de conocimientos medianamente estandarizados cuando responde a un currículum vigente; que es importante en sí mismo y por él mismo; que contiene mensajes acerca del pasado, para el aquí y ahora así como para el futuro.
Lo consideramos como:

- la forma más típica y tradicional de preservar la intención de lo que pretendemos enseñar en el salón de clases en la escuela; es un medio típico de conservar el conocimiento matemático; allí se perpetúan tanto los significados correctos como los incorrectos atribuidos a un objeto de estudio;
- el reflejo de la selección y organización de contenidos disciplinares y actividades que autores y editoriales estiman que pueden ser compartidos por docentes y alumnos;
- revelador de hechos que permiten interpretar algunos fenómenos propios de los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados, por ejemplo, con representaciones, concepciones, usos o aplicaciones;
- la morada favorita de las diversas corrientes didácticas que caracterizan distintos períodos temporales por los que ha atravesado la educación; revela parte de los sistemas educativos imperantes en una época y lugar;

Numerosas investigaciones anticipan, caracterizan y definen los roles del libro de texto escolar. El libro de texto escolar constituye una ejemplificación por excelencia del tipo de material curricular que por su extensión y características "ejerce una enorme influencia sobre los docentes (configurando la estructura de su trabajo) y los estudiantes (delimitando su acceso al conocimiento)" (Blanco, 1994, p. 264).
El libro de texto escolar es una variable fuertemente ligada a los cambios curriculares. Dreyfus (1992) estudia la correspondencia entre el currículum y el libro de texto escolar. El mismo autor da cuenta de sus estudios realizados a partir de 1980 que confirman que los docentes tienen una marcada tendencia a contar con libros de textos oficiales y que demandan su existencia. En su análisis acerca de definiciones clásicas sobre el libro de texto escolar cita a Westbury (1985) quien considera que el libro de texto es el "depositario del conocimiento que las escuelas quieren comunicar", ... "un instrumento básico para la organización de la currícula" y ..... "una herramienta básica para la enseñanza y el aprendizaje". Para Dreyfus, en principio, "el libro de texto escolar presenta y representa la intención de sus autores" (Ibid, p.5) Señala además que llevarlos a la práctica, transformarlos, trasladarlos, ejecutarlos en el salón de clase es tarea del docente. Es más explícito respecto a las funciones que debe cumplir el libro de texto desde la posición del que aprende, diciendo que el rol que asigna al libro de texto escolar es el "de compensador, de mediador para aquel que por diversas razones no aprende durante la clase" (Ibid, p. 4). Otros señalan que los libros de textos "deben colaborar en la formación de alumnos participativos, críticos, responsables" ... "propiciar la capacidad de indagación, búsqueda"

... “permitir al alumno actuar e interactuar con el conocimiento, sus compañeros y el medio” (López y Leotta, 2000, p. 18).
Algunas investigaciones acerca de libros de textos definen criterios para seleccionarlos, analizarlos y evaluarlos para usarlos de la mejor manera posible (Parcerisa, 1998). Por su parte, Marro y Dellamea (1993, p. 60–69) dan las tareas básicas que debe realizar un lector para asignar significado proposicional a sucesiones de párrafos, capítulos y cualquier otra unidad extensa del lenguaje.

Antes de proseguir con nuestro trabajo haremos dos observaciones:

- Queremos destacar la importante labor que realizan los autores de los libros de textos y nuestro profundo respeto. No es nuestra intención emitir alguna valoración tanto sobre ellos como sobre los libros de texto que han elaborado.
- Nuestro profundo agradecimiento a editoriales y autores de libros de textos que hacen posible este estudio.

La lectura exhaustiva de los libros de textos

Los docentes tenemos una amplia trayectoria en el ejercicio de la crítica, de la mediación y transformación de los libros de textos que usamos en nuestras clases, ejerciendo una continua vigilancia epistemológica sobre lo escrito, así como una lectura muy exhaustiva sobre la propuesta didáctica. El docente no recibe el texto pasivamente, sino que selecciona, enfatiza, critica, propone alternativas, modifica y lo reinterpreta de maneras distintas cada vez que lo usa, a partir de la lectura exhaustiva y de sus propias experiencias de clase. Los siguientes párrafos fueron marcados (para un posterior debate) por los docentes durante un ejercicio de lectura de distintos textos escolares:

- “Los números de infinitas cifras no periódicas se llaman números irracionales”.
- “Conjunto de números irracionales...caracterizados por la propiedad: La expresión decimal de todo número irracional consta de infinitos algoritmos que no forman período.
- "Conjunto de números reales....En símbolos: $R = \{ Q \cup I \}$”
- “El conjunto de los números racionales Q se amplía notoriamente con la aparición de los números irracionales”.
- “Definición de irracional: cuando el cociente entre dos números enteros da como resultado otro número con infinitas cifras decimales, estamos en presencia de un irracional.

Ejemplo:

a) $\frac{5}{17} = 0{,}29411764705882...$ b) $-\frac{6}{19} = -0{,}315789473684210...$

Ubicar los irracionales vistos en el ejemplo a) y b), se remite a la ubicación en la recta numérica por medio de los números fraccionarios”.

Los libros de textos como la morada favorita de distintas corrientes didácticas

Hacia 1980 numerosos docentes y matemáticos cuestionaban la `forma rigurosa´ de introducir los números. Bosch, J. (1980, p. 41) opinaba que el “pasaje riguroso de Q a R es imposible en el nivel de enseñanza secundaria e invita a abandonar el método genético (construcción sucesiva de los números N, Z, Q, R y C) por completo”. Agrega que “es conveniente, en cambio que el profesor conozca con todo detalle ese método, así como el método global consistente en definir axiomáticamente el conjunto de los números reales y luego ir distinguiendo dentro de él los números naturales, enteros y racionales. Sólo el conocimiento pormenorizado de ambos métodos lo convencerá de que ninguno de ellos es aplicable a la enseñanza secundaria y lo inducirá a adoptar compromisos pedagógicos más adecuados". "El método genético es una parte importante de la historia de la matemática, pero ya es historia. Es una buena pieza de colección para matemáticos y profesores, pero no para alumnos de la escuela secundaria actual".

Por su parte Banfi, J. (1980, p. 145), hace recomendaciones a los docentes acerca de los libros de textos escolares. Refiriéndose a las actividades del profesorado en ejercicio dice: "En primer término examinará todos los textos nacionales y extranjeros que pueda conseguir. Eliminará drásticamente todos los ejercicios reiterativos, rutinarios o sin interés" ... "No convendrá que se ajuste a ningún manual por bueno que parezca, so pena de perder espontaneidad e iniciativa. Los consultará a todos, los comparará, los juzgará en función de sus ideas pedagógicas y efectuará su crítica para no cometer errores" ... "Los libros de textos deben perder su carácter adusto que a menudo constituye una de las características en nuestro país aun cuando en los últimos tiempos se haya podido comprobar una sensible mejoría. Ninguno de ellos dejará de contener la información que interesa a los alumnos aún cuando no forma parte de los programas vigentes; nos referimos especialmente a temas amenos, las curiosidades matemáticas, las anécdotas, los temas para pensar, las notas históricas, etc".

A pesar de las polémicas, y de la nueva crisis, los libros de texto de la época reflejan tanto la construcción genética de la teoría de números como la posición de que todo el edificio de la Matemática se asienta sobre axiomas y que la existencia de un objeto matemático queda garantizada por la consistencia de los axiomas que lo introducen.

Libros de textos escolares como:

Dalmasso J. C. (1970) en **Matemática para 4º año. Un enfoque moderno** publicado por Ed. Codex S.A. en Buenos Aires como su segunda edición dedica 25 páginas a la conceptualización del número real (método genético) partiendo de la densidad de los números racionales. Lo define como el representante de las clases de equivalencia de sucesiones regulares que tienden a un punto racional o a una laguna en los racionales. Finaliza la presentación de los números reales enunciando la estructura de cuerpo ordenado que tienen los números reales (método axiomático).

López, A. R. (1975) en **Matemática Moderna 4** publicado por Ed. Stella en Buenos Aires, en su tercera edición comienza con la construcción geométrica de un triángulo rectángulo isósceles cuyo lado es unidad de medida mostrando que su hipotenusa es un número comprendido entre 1 y 2 y posteriormente prueba la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Luego aproxima el valor de $\sqrt{2}$ mediante sucesiones racionales pensándolo como un límite común de aproximaciones por defecto o por exceso, sin pertenecer a ninguna de las sucesiones. Menciona la completitud de los números reales y luego menciona las operaciones de adición y multiplicación con sus propiedades pero sin mencionar las estructuras algebraicas que subyacen en ellas.

Rojo A, Sánchez S. y Greco M.(1977), en **"Matemática 4"** publicado por Librería Ed. El Ateneo en Buenos Aires dedican 9 páginas a la conceptualización del número real presentándolo como un cuerpo ordenado y completo.

Cabrera, E. y Médici, H. (1977) en **"Matemática Cuarto Año"** publicado por Editorial Crespillo en Buenos Aires definen en 15 páginas el número real. Muestra la construcción

del número irracional como todo conjunto formado por un par de sucesiones monótonas contiguas carentes de elemento de separación racional y por todos los pares de sucesiones monótonas contiguas que sean equivalentes al primero de los pares considerados; es decir el número irracional es una clase de equivalencia formada por todos los pares de sucesiones monótonas contiguas equivalentes que carecen de elemento de separación racional.
Parecería que estos libros de textos escolares estaban más destinados al perfeccionamiento y capacitación de los docentes en los nuevos conceptos algebraicos que en ser una guía para el estudiante del bachillerato.
No podemos dejar de mencionar para la década de los noventa la influencia que nos llegara desde España con la trilogía formada por **"Matemáticas. Bachillerato 1, 2 y 3"** de Miguel de Guzmán, José Cólera y Adela Salvador de Editorial Anaya publicados en Madrid a partir de 1987. En el prólogo a la edición de 1993 de "Matemáticas. Bachillerato 1" los autores opinan que la selección de contenidos (para España) es ciertamente mejorable, recortando o suprimiendo algunos temas (por ejemplo sobre estructuras algebraicas abstractas). De hecho que cuando presentan la teoría de números ya no hacen más mención a los grupos, anillos o cuerpos conmutativos. Retoman la irracionalidad de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$, e, pero introducen un nuevo ejemplo de irracional, el número de oro o sección áurea, ϕ, como la relación (ratio) entre la diagonal de un pentágono regular y su lado y como proporcionalidad entre los lados de un rectángulo áureo. Dejan la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ para la revista relacionada con el tema al final del capítulo. Muestran una matemática integrada con la historia y la cultura de los pueblos. Presentan para cada tema una clara e interesante motivación, además de las complejidades que rodearon a la construcción de algunos conceptos, no olvidándose destacar qué problemas pudieron ser resueltos gracias al esfuerzo de muchos matemáticos y cuáles siguen aún pendientes de solución.
De la lectura de los libros de textos editados para la década de los `90 podemos decir que interesan particularmente las propiedades, operatoria y los contextos en los que aparece involucrado en número real, es decir los números reales se construyen dando sentido, en lo posible, a los elementos que los constituyen; se identifican ejemplos concretos mediante distintas representaciones y se utilizan éstas para realizar operaciones, expresar magnitudes del mundo físico o cotidiano y establecer relaciones. La propuesta pedagógica de la última década es notoriamente diferente a las anteriores.
Finalmente, el análisis exploratorio sobre el tratamiento didáctico dado al número real en libros de textos nos lleva a proponer los cinco primeros propuestos por Scaglia, S. (2000) y a incorporar uno más propuesto por los docentes consultados. Son estos:
Criterio Orden: descripción y caracterización de la relación de orden entre los distintos conjuntos numéricos. Propuestas de actividades relacionadas con la comparación de números, el orden en las inecuaciones y la expresión de resultados mediante intervalos. El tratamiento de la completitud en **R**.
Criterio Tipo de Número: se describen clasificaciones en base a distintos criterios: pertenencia a un determinado conjunto; algebraicos o trascendentes; divisibilidad; finitud o infinitud, etc.
Criterio Fenomenología: se describe a utilidad de los números reales como modelo para las magnitudes continuas en contextos no exclusivamente matemáticos.
Criterio Representaciones: analiza las representaciones más comunes utilizadas para escribir y nombrar los números reales: simbólica, gráfica y representaciones en la recta.

Criterio Operaciones: se describen las operaciones y se analizan el uso en ecuaciones y funciones; el uso de calculadoras y el estudio de los errores que se cometen.
Criterio Histórico: descripción de los acontecimientos históricos que motivaron la construcción de los números reales.

Reflexiones finales

Cualquiera que sea el tema central que provocó la investigación desde el libro de texto, debemos reconocer que el rol que desempeñan para los diferentes grupos que los comparten (alumnos, docentes, institución, comunidad) no es muy sencillo para describir. Esto trae aparejado importantes implicaciones didácticas porque conlleva cualidades internas, contenidos y una organización que lo hacen foco de múltiples interpretaciones y es crucial además la forma que tenemos de leerlo e interpretarlo. El *libro de texto* significa, por medio de su contenido y su forma, determinadas *construcciones del conocimiento*, ayuda a establecer pautas de *veracidad y legitimación de los saberes* y representa una forma alternativa de *seleccionar y organizar* estos saberes, muestra *aplicaciones y usos* y sugiere *actividades* que serán compartidas por docentes y alumnos. Estas reflexiones constituyen la fuerza necesaria que justifica una lectura exhaustiva del libro de texto escolar.

Referencias bibliográficas

Banfi, J. (1980). Reflexiones de un profesor de matemática. En J. Banfi (Ed), *Problemas de la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires.

Blanco, N.(1994). Materiales curriculares: los libros de texto. En Angulo, F.; Blanco, N. (coordinadores). *Teoría y Desarrollo del Currículum*. Capítulo 12. Málaga: Ed. Aljibe.

Bosch, J. (1980). La polémica sobre la enseñanza conjuntista. En En J. Banfi (Ed), *Problemas de la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires.

Dreyfus, A. (1992). Content analysis of school textboooks: the case of a technology–oriented curriculum. En *International Journal of science education. Vol.14*. London: Editor: John K. Gilbert. Taylor & Francis.

López, M.; Leotta, A.(2000). La educación que espera detrás de los libros. *Aula Abierta*. Año 8. Nº 89. pp.13–18. Buenos Aires: Provisión Escolar Ediciones.

Marro, M. S.; Dellamea, A. B.(1994). *Producción de textos*. Buenos Aires: Ed. Docencia.

Parcerisa, A. (1998). Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos. Buenos Aires: Graó.

Rico, L.(1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. En *Epsilon, Nº 38*, p.185–198. Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

Romero, I. (1997). *Introducción al número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación acción*. Colección Mathema. Granada: Editorial Comares.

Sanz, I. (1994) *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemática. Las configuraciones gráficas de datos*. Tomo I. Tesis Doctoral. Departamento de Lógica y Filosofía de San Sebastián. Universidad del País Vasco, España.

Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Metodología activa en enseñanza de las matemáticas

Mónica Cabrera, Véronique Collin, José Cuevas, Cecilia Vidal
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Lima, Perú
pcmamcab@upc.edu.pe vcollin@upc.edu.pe jcuevas@upc.edu.pe pcmacvid@upc.edu.pe

Resumen
Uno de los juicios más severos a las instituciones educativas en el Perú se refiere al hecho que éstas forman alumnos memorísticos, reproductivos, con una mínima capacidad de análisis y escasa creatividad. Para revertir esta situación el profesor tiene que asumir un papel fundamental.
El presente trabajo se propone compartir la experiencia sobre el desarrollo de un Taller de Metodología Activa en Enseñanza de las Matemáticas, dirigido a profesores de nivel medio, que se desarrolla desde el año 2000 en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), y cuyo propósito fundamental es capacitar al profesor de matemáticas en diversas técnicas educacionales que facilitan el desarrollo de habilidades en el alumno permitiendo así reorientar el estilo de enseñanza tradicional hacia uno que fomente un mejor aprendizaje de los alumnos.
La metodología activa presentada en el Taller comprende desde la redacción de una competencia matemática y de las diferentes habilidades que involucra, hasta llegar a un diseño instruccional completo que incluye técnicas adaptadas a las clases de matemáticas. En este trabajo, se presenta una variedad de ejemplos didácticos diseñados para motivar a los alumnos hacia la matemáticas y para facilitar la adquisición de los diversos conceptos que se presentan en el nivel medio de enseñanza.

Introducción

En el Perú, varias iniciativas se han desarrollado para elevar el nivel de formación básica y de capacitación de los profesores de matemáticas. Sin embargo, todavía son escasos los resultados concretos y la enseñanza sigue siendo tradicional, con el profesor como único protagonista. La resistencia al cambio se manifiesta en los diferentes miembros del proceso de enseñanza - aprendizaje: profesores, alumnos y padres de familia, quienes sucumben a la presión social y piensan que lo fundamental es aprobar los exámenes de admisión de las diferentes universidades que privilegian el aspecto memorístico y reproductivo del conocimiento matemático.
La Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) en su preocupación por elevar el nivel académico-pedagógico de los docentes que imparten asignaturas de matemáticas, plantea la capacitación de los docentes a partir de un modelo educativo basado en competencias(información, habilidades y actitudes) y en el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje en cuatro fases: Motivación, Adquisición, Transferencia y Evaluación, basado en una simplificación del modelo de Gagné (1975).
Se sabe que para lograr un aprendizaje significativo de los alumnos, el contexto de aprendizaje depende en gran medida de las acciones del docente:
“ él (el docente) es quien decide:

- Qué información presentar;
- Cuándo y cómo hacerlo;
- Qué objetivos proponer;
- Qué actividades planificar;
- Qué mensajes dar a los alumnos, antes, durante y después de las diferentes tareas;
- Cómo organizar las actividades - en forma individual, cooperativa o competitiva;
- Qué y cómo evaluar;
- Cómo comunicar a sus alumnos los resultados de las evaluaciones;

- Qué uso hacer de la información recogida ”. (Díaz, 1998)

De lo anterior se desprende la importancia de la planificación de las acciones del docente a través de un diseño instruccional detallado en el cuál se identifica, en cada fase del aprendizaje, las técnicas más eficientes que permiten lograr el aprendizaje significativo de cada habilidad. En este proceso, el profesor debe primero conocer las diferentes técnicas que, en el actual contexto educativo y social se utilizan frecuentemente (aprendizaje vivencial, inferencial, analogías, generación de conflictos, análisis de soluciones etc.) para después categorizarlas en base a las habilidades a las cuales aportan. En segundo lugar, estas técnicas deben ser seleccionadas y ejemplificadas para su uso en la clase de matemáticas.

En este trabajo se presenta el resultado de la investigación de diversas técnicas adaptadas a la clase de matemáticas que se desarrollaron en los talleres de capacitación a profesores de nivel medio así como en el curso remedial de Nivelación de Matemáticas que ofrece la Universidad a los alumnos ingresantes con deficiencias en su instrucción previa. Se hace hincapié en las fases de motivación y de adquisición por la relevancia que ellas tienen y por la importancia de los resultados obtenidos a partir de su aplicación.

Fase de motivación

Como lo menciona Gagné (1975), es axiomática la consideración siguiente: para que se produzca el aprendizaje, es preciso contar con un individuo motivado. Esta premisa es fundamental y, sin embargo, la experiencia muestra que al iniciar una clase de matemáticas, el alumno se encuentra muchas veces sin eje, desintegrado y disperso buscando una razón que justifique su presencia. Por lo tanto, los estímulos presentados por el profesor deben orientar la atención del alumno hacía la meta: la matemática.
Estos estímulos toman diferentes formas según la relación del alumno con la matemática (interesado, indiferente u opuesto). A continuación, se presenta técnicas sugeridas según el tipo de alumnos. La clasificación inicial viene de un estudio efectuado por el Departemento de Calidad Educativa de la universidad (Galván, Golergant, 2000).
Motivan principalmente a los alumnos interesados en la matemática:

- El análisis de necesidades basado en listas de chequeo o preguntas por resolver.

Para crear interés, se recomienda técnicas como:

- Historias y pensamientos usando personajes matemáticos famosos, notas históricas, fábulas y cuentos (según la edad),
- Pensamientos y refranes, anécdotas y metáforas. Como ejemplos de refranes podemos citar a: “Más vale pájaro en mano que cien volando” transformado a “Más vale demostración en mano que cien ejemplos volando”.
- Ayudas audiovisuales (Documentales, extractos de películas, dibujos animados, caricaturas y comics). Estas son muy eficientes hoy en día cuando los alumnos están inmersos en un mundo de imágenes y movimientos. En este caso, para reforzar el efecto de la ayuda y conectar el alumno con el tema matemático involucrado es muy importante acompañar la ayuda de una presentación previa, un plenario o una actividad grupal adicional.

Las técnicas desestabilizadoras tienen un efecto positivo sobre alumnos que muestran claras actitudes negativas hacia la matemática. Por ejemplo:

- La generación de conflictos cognitivos (dilemas, casos de contrastación) así como las provocaciones (postura disonante, rupturas de esquemas o S.O.S.) Así lo menciona Piaget, en sus primeras obras, cuando indica que el progreso cognitivo se produce con mayor probabilidad de éxito en una situación de conflicto.

Al final de la fase de motivación, se espera garantizar un punto de partida favorable para el aprendizaje, en donde los alumnos estén dispuestos a construir su propio aprendizaje, a través de la facilitación del profesor.

Fase de adquisición

Se presenta un análisis de esta fase en base a los modelos de Gagné, Piaget y Ausubel. (Galván, 2000)

Es la fase en la que se activa el proceso de búsqueda para eliminar la incertidumbre que genera el desconocimiento. El profesor da ciertas pautas para que el alumno pueda reflexionar y reconstruir cómo se han formado ciertos conceptos, reglas o principios.

El alumno lanza hipótesis, identifica rutas, revisa el marco teórico, desestructura esquemas obsoletos, realiza nuevas combinaciones, cambia perspectivas, analiza, establece analogías y parecidos para comprender y aprender.

El alumno codifica conceptos, los asimila y los integra en ciertos esquemas o estructuras que permiten articularlos con conocimientos previamente adquiridos. En otros casos, el profesor codifica y explica al alumno la formación de dichos conceptos y lo invita a participar en dicha construcción.

Para que se incorpore cada nuevo concepto a su estructura mental, éste debe ser aplicado de manera muy simple y directa. El alumno asume períodos de repaso, de integración y de significación; recordará todo aquello que posea significado y que además se haga familiar. El vínculo del conocimiento con las experiencias del aprendizaje, fortalecerá el almacenamiento a largo plazo.

Como se explicó anteriormente, es muy importante que cada técnica y actividad desarrollada en la clase esté en correspondencia con las habilidades que se deseen lograr tales que a modo de ejemplo se indica en la tabla siguiente (basada en Galván, Golergant, 2000):

Habilidades (verbos)	Técnicas más adecuadas	Observaciones
Deducir, inferir y descubrir	Técnicas vivenciales (experimentales, retos y desafíos, juegos y concursos). Técnicas inferenciales (directa, ¿Qué pasaría sí?).	Las técnicas vivenciales permiten al alumno relacionarse de manera más concreta con los temas.
Asociar o ejemplificar	Analogía, un ejemplo por minuto y ejemplos inventados por los alumnos.	Fomentar los ejemplos inventados por los alumnos da buenos resultados.
Identificar, reconocer y distinguir	El detalle que faltaba (presentar diversas alternativas de solución en las que algún paso ha sido omitido) y errores en la exposición.	Estas técnicas son muy útiles en los procesos de cálculo y en la modelación. Para las errores, detectar e usar las comunes de los alumnos. Asociado a la corrección, se vuelve más eficaz aún.
Medir, o graficar	Empleo adecuado de instrumentos de medición y las representaciones a escala.	Recomendado para cálculos en geometría y trigonometría.
Analizar, interpretar, cuestionar o	Conjeturas y posibilidades, análisis de solución e interpretaciones de texto.	Muy buenas para discriminar soluciones válidas en el contexto matemático pero no válidas en el contexto real.

criticar		
Categorizar, clasificar, comparar y ordenar	Matrices de dos entradas a rellenar o tarjetas mezcladas en las cuales el alumno mismo define la categorización.	
Sintetizar, resumir	Glosario o fichas resumen	Encargarlo a los alumnos mismos para saber como están entendiendo un tema.
Relacionar, articular y representar	Redes de contenidos y diagramas incompletos.	Para relacionar varios temas o esquematizar un proceso de cálculo.
Evocar, revisar y recordar	Crucigramas, acrósticos, parejas de cartas, juegos o concursos, ordenar procesos y de la A a la Z.	Técnicas que necesitan más creatividad de parte el profesor.

Algunos ejemplos

1. El detalle que faltaba:

Cuatro socios formaron una empresa de organización de eventos. A fin del año obtuvieron \$24 000 en utilidades. Para repartir este monto, acuerdan que cada uno de los dos socios mayoritarios debe recibir el doble de lo que recibirán cada uno de los socios minoritarios. Si estos últimos reciben la misma cantidad, ¿cuánto recibe cada socio?

¿Cuáles son los diferentes errores en los procesos y corrígelos?

Proceso 1	**Proceso 2**	**Proceso 3**
x + x + 2x + 2x = 24 000 6x = 24 000 x = 4 000 Cada socio minoritario recibe: \$ 40 000 Cada socio mayoritario recibe: \$ 8 000	x lo que recibe cada socio mayoritario en dólares. $\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+x+x=24\ 000$ 6x = 48 000 x = 8 000	x lo que recibe cada socio minoritario. $\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+x+x=24$ 6x = 48 x = 8 Cada socio mayoritario recibe: 8 Cada socio minoritario recibe: 4

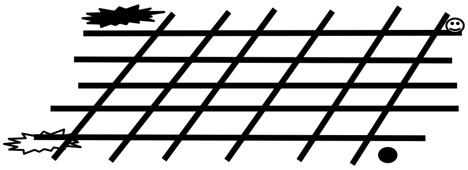
2**. Errores :** Encuentre los errores y corríjalas.

$\left(\frac{-3}{4}\right)^{-2}=\frac{9}{16}$	$-2^4 = 16$	$(3x^2y^3)^2 = 3x^4y^6$	$\sqrt{x^2}=x$

3. Conjeturas y posibilidades.

Se tiene un depósito de vino de 315 litros y se quiere vaciar su contenido en botellas cuya capacidad es de 0,85 litro. Al calcular el número de botellas necesarias, resulta 370,588...
¿Qué responderías en este caso?
Si no fueran botellas sino obreros para realizar una obra, ¿qué responderías?
Y si fueran pasajeros que un avión puede transportar.

4. **Juegos o concursos.**



Alberto y Karina quieren llegar donde se encuentra la carita feliz opuesta a su estrella de partida. Para llegar a ella sólo está permitido avanzar usando todas las tarjetas una sola vez. (2) de ángulos correspondientes, (2) alternos internos, (1) alterno externo y (2) opuestos por el vértice.

Comentarios de los talleres

Durante el desarrollo de los talleres, los profesores han tenido que hacer un gran esfuerzo para romper sus esquemas y reflexionar de modo de responder a preguntas como: ¿Qué puedo crear para motivar a mis alumnos en este tema de matemática? ¿Qué actividad o técnica puedo utilizar para lograr un mejor aprendizaje de mis alumnos de tal o cuál habilidad?
Estos talleres han provocado un conflicto con el estilo de enseñanza de los profesores y recién, muchos de ellos, han reconocido la necesidad de incorporar esta metodología de trabajo en su quehacer diario propiciando un ambiente en el cuál el docente juegue cada vez más un papel de facilitador, donde la tecnología moderna debe ponerse al alcance de los alumnos como apoyo para su propio proceso de aprendizaje.
Este trabajo de sistematización del proceso de enseñanza- aprendizaje no es familiar a los profesores de los colegios peruanos que suelen solamente presentar reglas o teoremas con su lista de problemas. Una profesora de más de treinta años de experiencia, comentó que recién reflexionó sobre las habilidades que desarrollaba en cada una de sus acciones.
Sin embargo, se observa un sorprendente cambio cuando posteriormente, ellos han iniciado la aplicación de la metodología activa en sus clases con un entusiasmo solamente igualado por el entusiasmo de sus propios alumnos al reconciliarse con el estudio de la matemática.
Sin duda, esta nueva metodología necesita invertir mucho tiempo personal y esfuerzo para crear o adaptar técnicas. A veces, las limitaciones económicas del plantel dificultan esta labor por la mayor cantidad de recursos involucrados que en la enseñanza tradicional. Además, se recomienda trabajar en equipo de profesores de un mismo grado y de manera cooperativa, escogiendo primero un capítulo y ampliando a otros temas según el tiempo del que se dispone.

Extracto de un trabajo de profesores presentado en un taller:
(Burgos, J; Mendoza, M; Moreno, A; Pachas, M; Febrero 2001)
Competencia: Resuelve problemas de relaciones métricas en el triángulo rectángulo valorando su importancia en problemas de la vida diaria.
Diseño instruccional (extracto):

Fase	Habilidad	Actitud	Metodología
M		Valora la historia del matemático	Personaje famosos: Pitágoras
A	Deduce la proyección de un segmento	Es observador y curioso.	Vivencial experimental : Reglas, lapiceros y linternas
A	Identifica los elementos de un triángulo rectángulo	Muestra interés en el trabajo en equipo	Tarjetas mezcladas: tarjetas y plumones para resaltar
A	Evoca las situaciones de proporcionalidad.	Valora temas anteriores.	Parejas de cartas
A	Demuestra los teoremas fundamentales aplicando proporcionalidad	Es ordenado y cuidadoso	Ficha de trabajo: Analiza los elementos de una demostración y aplica a las otras demostraciones.
A	Aplica los teoremas en situaciones sencillas.	Comparte con sus compañeros.	Ficha de ejercicios. En equipos.
A	Explica los procesos que ha ejecutado.	Reconoce el rol de la comunicación	Explica oralmente su procedimiento.

A	Evoca e identifica los términos de la sesión anterior.	Es consciente de sus dificultades o limitaciones.	Realiza un acróstico con la palabra RELACIÓN

Efectividad

Como muestra de efectividad del empleo de estas técnicas en las clases de matemáticas, en las encuestas sobre el curso de nivelación de matemáticas de la Universidad la opinión de los alumnos ha mejorado en 5% del ciclo 2000-1 al ciclo 2001-1. Anteriormente aunque el profesor solía tener un calificación alta en estas encuestas, la opinión sobre el curso se mantenía baja. Otro indicador importante es el aumento entre el ciclo 2000-1 y el ciclo 2001-1 de 18% en el porcentaje de alumnos aprobados del curso.
Los profesores de nuestros talleres que han aplicado estas técnicas a sus clases han mejorado la participación creativa de sus alumnos en las ferias de ciencias proponiendo actividades matemáticas.

Conclusiones

En este trabajo se hace explícita la importancia de la fase de motivación como punto de partida del proceso de enseñanza – aprendizaje de los temas matemáticos y que el docente debe dedicarle un gran esfuerzo. En la fase de adquisición, es fundamental identificar qué técnicas son más efectivas para tales habilidades, siendo la lista no exhaustiva. En los talleres han surgido comentarios sobre la dificultad de aplicar técnicas de motivación o adquisición para ciertos temas de álgebra elemental y de geometría entre otros. Es recomendable seguir investigando e innovando nuevas técnicas o variantes de las anteriores así como facilitar la comunicación entre los profesores de los colegios para el intercambio de experiencias de metodología activa.
En este trabajo no se ha expuesto las dos últimas fases (transferencia y evaluación) del modelo educativo planteado aunque sí se han trabajando en los talleres. Se recomienda considerar estas fases en trabajos posteriores.
Aunque el trabajo fue desarrollado para un proceso en el nivel medio de enseñanza, esta metodología es adaptable a los primeros ciclos del nivel universitario y es recomendable propiciar el desarrollo de este tipo de trabajo en este nivel.

Referencias bibliográficas

Gagné, R. (1975). *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción.* México: Ed. Diana.
Díaz , F; Hernández ,G. (1998). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: Mc. Graw Hill.
Galván, L; Gollergant, J. (2000). *Diseño instruccional para un aprendizaje por competencias. Documento interno del documento de Calidad Educativa.* Lima, Perú: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.
Galván, L. (2000). *Psicología del aprendizaje. Documento interno del documento de Calidad Educativa,* Universidad Peruana de Ciencias aplicadas.
Cabrera, M; Collin, V; Cuevas, J; Vidal, C. (2000). *Metodología activa en la enseñanza de las matemáticas*. Actas del IV Congreso Nacional de Educadores, Lima. Perú.

Formación de Profesores

Nivel Superior

El teorema fundamental del álgebra y los cuaterniones

Alicia Gil, Amalia Kaczuriwsky, Ana María Narváez
Universidad Nacional de Cuyo. Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Mendoza.
Universidad Juan A. Maza. Mendoza, Argentina
anarvaez@fcemail.uncu.edu.ar lauma@impsat1.com.ar sistemas@frm.utn.edu.ar

Resumen
El presente trabajo se refiere al Teorema Fundamental del Álgebra: su historia y su transposición didáctica al aula universitaria para lograr su significación en la misma.
A partir del análisis epistemológico de estos contenidos y de considerar la importancia de la contribución de Gauss, dado que "su trabajo debe estudiarse por las generaciones de jóvenes como un mecanismo de estímulo para la creación intelectual de todos los tiempos", el teorema adquiere significación.
Se hace expresa referencia a los cuaterniones de Hamilton quien, en su búsqueda por encontrar "números" que desempeñen, en relación a la geometría del espacio euclideano tridimensional, un papel análogo al que desempeñan los complejos en la geometría plana, abre el camino hacia la matemática abstracta, dando inicio así, a partir de sus cuaterniones, el estudio de las álgebras no conmutativas.
El objetivo que se persigue es mostrar una forma posible para enseñar este tema a los alumnos, tratando de que ellos descubran el por qué de su importancia y exhibir las prolongaciones del mismo, como el hecho que, a partir de él, la matemática toma un nuevo rumbo, desconocido para los matemáticos de entonces, hacia la abstracción.
El marco teórico en los aspectos didácticos son soportados por la Teoría de Transposición Didáctica del Dr. Ives Chevallard, de la que se mencionan algunos de sus conceptos básicos, atendiendo a que tal vez sea la teoría didáctica que mejor se adapta a la enseñanza de la Matemática en la Universidad.

Introducción

No obstante ser un teorema muy usado no sólo en el ámbito escolar sino también fuera de él, casi no se lo nombra cuando es utilizado y menos aún se lo demuestra o se lo argumenta, siendo muy poco lo que se sabe de él, tal vez porque su demostración requiera de un nivel matemático elevado, nos referimos al **Teorema Fundamental del Álgebra**.
En la resolución de ecuaciones y en su reconstrucción a partir de las raíces, su protagonismo es indiscutible.
Es nuestro propósito realizar algunas reflexiones que nos permitan resaltar ese protagonismo en el aula universitaria, para ello nos preguntamos: **¿cómo lograr que este concepto se transforme en un conocimiento significativo para nuestros alumnos universitarios que, a su vez, se desempeñarán como docentes?**
Un marco teórico jerarquizado para este trabajo, es la teoría de Transposición Didáctica del Dr. Ives Chevallard (1985), de la disciplina experimental Didáctica de la Matemática, siendo quizás la que mejor se adecua al ámbito universitario. En éste, el llamado **"saber erudito"** está muy próximo al **"saber a enseñar"**, y por lo tanto son pocas las transformaciones (adaptaciones) que deben realizarse entre ambos.
Una de estas transposiciones es el orden en que se enseñan (trasponen) los contenidos que muchas veces no coincide con el desarrollo histórico de los mismos. Por ejemplo, los sistemas de numeración cuyo orden en la enseñanza tradicional ($\subseteq$, $\wedge$, $\angle$, ∇, $\Re$) no coincide con la formalización respectiva de cada conjunto. Cronológicamente aparecieron en el orden siguiente $\angle$, $\wedge$, $\Re$, $\subseteq$ y ∇ (saber erudito).
En este sentido, la epistemología brinda un apoyo muy importante pues es sabido que la comprensión de una teoría matemática no puede ser completa si se desconocen sus orígenes históricos. Ir a ellos y ver la forma como esa teoría ha influido en el conocimiento,

constituye una herramienta didáctica valiosa que permite mostrar los caminos recorridos por la ciencia, condición necesaria para poder buscar nuevas alternativas, conjeturar mayores alcances y mejorar posibilidades de aprendizaje dentro del sistema didáctico.
Es fundamental que el profesor proponga actividades que permitan al alumno redescubrir el objeto matemático en estudio (repersonalización y recontextualización).
Sin dudas, el problema de la transposición no consiste únicamente en elegir una teoría de aprendizaje; es necesario considerar el medio, instancias de exigencias que implican una adecuación, como puede ser por ejemplo, a los contenidos curriculares que son otra forma de transposición. Luego aparecen los textos desde donde el docente debe tomar la temática, es él quien debe generar el campo de problemas que permita al alumno redescubrir los conocimientos.

Antecedentes históricos

La búsqueda de soluciones a las ecuaciones de primer grado aparecen aproximadamente en el siglo XX a.C.; los babilonios y los egipcios conocían bastante acerca de las de segundo grado; Diofanto fue quien comenzó con una teoría más formal, trabajando con letras en vez de números.
En el año 628 Brahmagupta trabaja expresamente algunos casos de la ecuación de segundo grado, conocía que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$, es decir, concibe la idea de número irracional.
El más conocido de los matemáticos árabes es Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi, conocido como *padre del álgebra*. Se sabe poco de su vida salvo que vivió en la primera mitad del siglo IX y que trabajó en la biblioteca del califa de Bagdad.
Debe destacarse la obra de contenido algebraico "Hisab al-yabr wa´l muqqabala", considerada uno de los primeros libros de álgebra. Obra eminentemente didáctica con abundantes problemas para resolver y adiestrar al lector, principalmente, en la resolución de ecuaciones de segundo grado.
Es el autor de uno de los métodos más antiguos que se conocen para resolver ecuaciones de segundo grado. Dicho método, geométrico, se conoce como de completar cuadrado; sin embargo, para Al-Khwarizmi la solución negativa carecía de significación, evidentemente las soluciones complejas ni "existían".
Pero sigue abierto el problema de hallar la solución a una ecuación de tercer grado, los primeros intentos siempre son de carácter geométrico, Scipione del Ferro, Tartaglia y Cardano trabajan sobre este tema entre 1500 – 1550; Cardano en realidad trata de encontrar una resolvente de la ecuación de tercer grado apoyándose en la de segundo y utilizando coeficientes positivos; Ludovico Ferrari resuelve la de cuarto grado con métodos algebraicos. Durante el siglo quince, consideran ecuaciones con soluciones fraccionarias pero no admiten soluciones negativas (*ficticia*), mucho menos imaginarias (*negativa sofística).*
En 1572 Rafael Bombelli, plantea la ecuación $x^3 + 15x = 64$, encuentra una resolvente y halla las soluciones; aunque le aparece el número $\sqrt{-1}$, lo soslaya pues considera que siempre $x.x \geq 0$ por eso lo llama "número imposible".
El reconocimiento de la existencia de raíces negativas va a hacerse recién en los siglos diecisiete y dieciocho. Sin embargo, los números complejos presentan una problemática

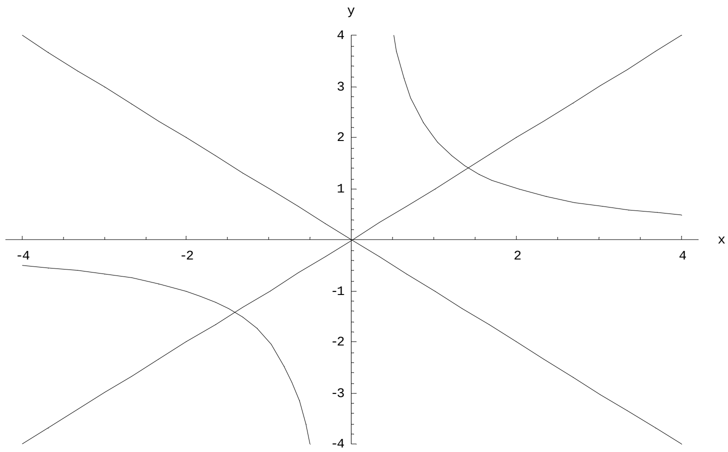
mayor pues, entre otras cosas, no podían ser representados geométricamente, (en ese entonces la idea geométrica era muy fuerte y se identificaba cada punto de la recta con un número real).
Desde la época de Girard era conocido que los números reales se podían representar en correspondencia con los puntos de una recta; en 1625 fue él quien afirmó que toda ecuación algebraica de grado **n** ρ 1 admite **n** raíces reales u ocultas (imaginarias). Wallis había sugerido que los números imaginarios puros se podrían representar por los puntos de una recta perpendicular al eje de los números reales. Sin embargo, sorprendentemente nadie antes que Wessel y Gauss pensó en franquear la etapa de considerar las partes real e imaginaria pura de un complejo como las dos coordenadas rectangulares de un punto del plano al que se asociaría dicho número complejo. El cubrir este salto hizo a los matemáticos sentirse mucho más cómodos con estos números ya que ahora podían visualizarlos en el sentido de que todo punto del plano correspondía a un número complejo y viceversa (Boyer, 1968, pág. 630-631).
A partir del conocimiento de los números complejos y de sus propiedades, tiene sentido el problema de buscar las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, por algunos llamado **"el abuelo de los problemas"**.

El teorema fundamental del álgebra

Gauss, en su tesis de doctorado (1798) y publicada en Helmstädt en 1799, hace un aporte fundamental a la Matemática, demostrando que **"toda ecuación polinómica de grado mayor que cero, se puede factorizar en factores reales lineales y cuadráticos"**, dando así una primera demostración de lo enunciado por Girard, reconocido más tarde universalmente como **"Teorema Fundamental del Álgebra"** y, en Francia, como Teorema de D'Alembert, cuyo enunciado actual es: "**todo polinomio algebraico de grado mayor que o igual a uno de una variable compleja con coeficientes complejos tiene n raíces complejas"**. En esa memoria también dice que no es posible resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado.
Es él quien inicia la introducción sistemática de los números complejos en la Matemática y su representación gráfica (hoy en uso), que fue publicada en 1831 (parece que Gauss estaba en posesión de ella desde 1799), habiendo sido encontrada independientemente por el danés Caspar Wessel (1745-1818), quien la publicó en la revista de la Academia de Ciencias danesa en 1798, y por el suizo Jean Robert Argand (1768-1822) que la hizo conocer en 1806. Lo cierto es que la obra de Wessel pasó desapercibida y así el plano de los números complejos se suele llamar hoy "plano de Gauss", a pesar de que Gauss no publicó sus ideas al respecto hasta unos 30 años más tarde.

En realidad, las primeras demostraciones fueron de tipo geométrico; las líneas generales que seguían las ideas de Gauss para demostrar este teorema, se puede exhibir el siguiente ejemplo.
Para resolver la ecuación $z^2 - 4i = 0$ gráficamente, demostraba que existe un valor complejo $z = a + bi$ que la satisface. Si se sustituye en dicha ecuación z por el complejo $a + bi$, se obtiene la expresión $a^2 - b^2 + (ab - 2)i = 0$, de donde $a^2 - b^2 = 0$ y $ab - 2 = 0$.
Si se interpretan a y b como variables y se representan las dos ecuaciones anteriores en un sistema cartesiano, en abscisas la parte real a y en ordenadas la parte imaginaria pura b, se

obtienen dos curvas: un par de rectas ($a - b = 0, a + b = 0$) y una hipérbola equilátera ($ab = 2$).



Se observa que las dos curvas se cortan en dos puntos.

Una rama de la primera curva se aleja del origen en las direcciones $\theta = 1\pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ y que una rama de la segunda curva se acerca asintóticamente a las direcciones $\theta = 0\pi/4$ y $\theta = 2\pi/4$. El punto de intersección está entre las dos direcciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$; las coordenadas a y b de este punto son la parte real e imaginaria del complejo solución de la ecuación propuesta.

Si la ecuación original hubiera sido de tercer grado, habría habido una rama de una de las dos curvas aproximándose a las direcciones $\theta = 1\pi/6$ y $\theta = 3\pi/6$, y la otra curva se aproximaría as direcciones $\theta = 0\pi/6$ y $\theta = 2\pi/6$. Las ramas son continuas en todos los casos, luego tienen que cortarse en algún punto en el ángulo que va de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/3$.

Para una ecuación de grado n habrá una rama de una de las dos curvas con direcciones asintóticas $\theta = 1\pi/2n$ y $\theta = 3\pi/2n$, mientras que una rama de la otra curva tendrá las direcciones $\theta = 0\pi/2n$ y $\theta = 2\pi/2n$ y estas dos ramas tienen que cortarse necesariamente en un punto entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/n$ y se repite el argumento.
Se observa, por lo tanto que sea cual sea el grado de la ecuación polinómica, tiene que tener al menos una raíz compleja. La demostración dada por Gauss en su tesis se basa en consideraciones geométricas, lo que no resultaba muy satisfactorio. En 1816, Gauss publicó dos nuevas demostraciones y en 1850 otra, tratando siempre de encontrar la demostración

puramente algebraica. Sin embargo, hoy se admite que este teorema depende esencialmente de consideraciones topológicas. (Boyer, 1968, pág. 631-633).
Este teorema, por lo anterior, no es del Álgebra y la razón de ser fundamental lo es, pero en el sentido de la teoría de números, no del álgebra en general.
En los cursos universitarios actuales de Variable compleja se puede demostrar este teorema a partir del Teorema de Louville (ver Churchill, Variable compleja).
Cabe preguntarse ahora si este teorema no es posible extenderlo a otros sistemas numéricos o, equivalentemente, si siempre la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene exactamente **dos** raíces.

Los cuaterniones y la contribución de Hamilton

Sin realmente proponérselo, Hamilton da una respuesta a esa inquietud. Sus trabajos sobre los números complejos le indican el camino hacia los cuaterniones. En un famoso paper de 1837, publicado por Transactions of the Royal Irish Academy, Hamilton declaró ser capaz de construir un álgebra que incluyera a los números negativos y a los complejos, a los que escribía como un par ordenado de números reales.
Pensaba que siguiendo este proceso, era posible también escribir ternas de números reales que podían ser tratadas con las mismas reglas que los complejos. Este sistema no tenía ningún problema con la ley suma, pero tardó diez años en darse cuenta que era imposible tratar de definir una ley para el producto.
Cierto día de 1843, paseando con su esposa, tuvo un relámpago de inspiración: sus dificultades desaparecían si utilizaba cuaternas de la forma $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, con **a**, **b**, **c**, **d** números reales; **i**, **j**, **k**, números imaginarios.
Hamilton definió la suma de dos cuaternios de la siguiente forma: dados
$x = a + bi + cj + dk$; $y = m + ni + pj + qk$, con (1; i; j; k) elementos de una base, es:
$x + y = (a + m) + (b + n)i + (c + p)j + (d + q)k$.
Con la suma así definida, es asociativa, existe elemento neutro: $e = 0 + 0i + 0j + 0k$; todo elemento tiene su inverso aditivo, $-x = -a - bi - cj – dk$ y es válida la ley conmutativa.
Es decir que, con la adición $(\nabla^4; +)$ alcanza la estructura de grupo conmutativo.
Para el producto en ∇^4, define las siguientes reglas:

$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{-1}$; y, siguiendo la regla de la mano derecha:

$\mathbf{i . j = - j . i = k}$; $\mathbf{j . k = - k . j = i}$; $\mathbf{k . i = -i . k = j}$; el producto que define es:

$x . y = (a + bi + cj + dk) (m + ni + pj + qk) = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, con

$\alpha = am – bn –cp –dq$; $\beta = an + bm + cq – dp$; $\gamma = ap –bq + cm + dn$ y

$\delta= aq + bp – cn + dm$

Puede verificarse fácilmente que el producto así definido no es conmutativo, aunque es asociativo, existe elemento neutro, y cada elemento no nulo tiene su inverso; es decir,

$(\nabla^4 – \{0\}; .)$ es un grupo no conmutativo.

Como se ve, es posible definir el producto pero se rompe con la conmutatividad; esto representaba para la perspectiva tradicional una violación a una regla sacrosanta de la aritmética y del álgebra.
El Teorema Fundamental del Álgebra es válido cuando los coeficientes del polinomio pertenecen a un cuerpo conmutativo y los dominios de integridad donde éste se verifica reciben el nombre de dominio de factorización única en polinomios ; pierde su validez en el conjunto de los cuaterniones donde la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene infinitas soluciones.

Por otra parte es el primer corte claro del álgebra clásica, aparece una perspectiva moderna, una llave que permite entrar al álgebra abstracta moderna (álgebras no conmutativas), dado que los cuaterniones están sumidos en la teoría de anillos abstractos.

Consideraciones finales

Respecto de la experiencia didáctica, la misma se realizó en un tercer año del Profesorado de Matemática de una Universidad de Mendoza, en la materia Análisis Matemático III (Variable Compleja).
Durante varios años el Teorema Fundamental del Álgebra fue abordado en forma tradicional (enunciado y demostración); hace dos años que se decidió introducirlo haciendo una investigación epistemológica acerca de los sistemas de numeración y la posibilidad o no de resolver determinadas ecuaciones en los mismos.
Fueron así apareciendo los conjuntos N, Z, Q y R y se analizó la evolución del problema a partir de sus raíces históricas.
El análisis de esta evolución de ideas, fue un elemento disparador de la motivación de los estudiantes. Apareció entonces la necesidad de los números complejos y su estructura de cuerpo, y como consecuencia, el Teorema Fundamental del Álgebra. Casi naturalmente surgió la inquietud de investigar qué son los cuaterniones de Hamilton.

Referencias bibliográficas

Boyer, Carl B. (1968). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Chevallard, Yves. (1991). *La Transposición didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Aique grupo editor.

Guzmán Retamal, Ismenia.(1999). *Transposición didáctica*. Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Pycior, Helena M. (1994). The philosophy of algebra. En I.Grattan-Guinnness, Eds. *Companion Encyclopedia Sciences*, Vol. 1, pp794-805. New York, USA: Routledge Inc..

Toti Rigatelly, L. (1994). The Theory of equations from Cardano to Galois. 1540-1830. En I.Grattan-Guinnness, Eds. Companion Encyclopedia Sciences, Vol. 1, pp713-721. New York: Routledge Inc.

Friedrich Gauss, Carl.. (1995).*Disquisitiones Arithmeticae*. Academia colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales. Colección Enrique Pérez Arbelaez Nº. 10. Colombia: Editora Guadalupe Ltda.

Gentile, Enzo (1984*). Notas de Álgebra I.* Buenos Aires, Argentina: Ediciones EUDEBA.

Dunham, William (1994). *Mathematical universe. An alphabetical journey trrough the great proofs, problems and personalities*. Ed. John Wiley and Sons, Inc.

Lentin, A; Rivaud, J. (1969). Álgebra moderna. España: Ed. Aguilar.

http//matemáticas.reduaz.mx./Biografías/Khwarizmi.html

http//members.es.tripod.de/somriure

http// www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history

Marcano, G. Carrera, I., Rada, S. (1980). *Nuevas tendencias en la enseñanza de la MATEMÁTICA.* Caracas, Venezuela: CENAMEC.

Salkind, N.J. (1998). *Métodos de la Investigación*. México: Prentice Hall.

Influencias en la formación de educadores matemáticos en Venezuela

Yolanda Serres Voisin
Universidad Central de Venezuela. Venezuela
yserres@euler.ciens.ucv.ve

Resumen
El **objetivo** de este trabajo es mostrar las influencias que ha tenido la formación de educadores matemáticos en Venezuela. Para ello se tomarán en consideración: (1) Los programas de postgrados en Educación Matemática existentes en el país. (2) Los tópicos discutidos en los eventos académicos del área. (3) Los proyectos particulares de algunas instituciones como: la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT). y su publicación oficial la revista *Enseñanza de la Matemática*; y el Centro Nacional para el Mejoramiento y la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC) y sus proyectos de actualización docente. Se está utilizando una metodología de análisis de contenido (Krippendorff, 1997), para analizar las influencias de cada una de las unidades de análisis enumeradas anteriormente en la formación de los(as) educadores(as) matemáticos(as). Se tomará como principal instrumento de recolección de información la documentación de los acontecimientos y entrevistas a los educadores.

Situación de la Educación Matemática en Venezuela

Una ciencia o un área de conocimiento se define a través de su(s) objeto(s) y su(s) método(s) de estudio. El término "Educación Matemática" viene de la escuela estadounidense. También existen los términos "Didáctica de la Matemática" de las distintas escuelas europeas y "Matemática Educativa" de la escuela mexicana. En Venezuela se ha utilizado el término "Educación Matemática", sin claridad ni discusión de qué implica éste, cuáles son sus objetos y métodos de estudio. El término Educación Matemática en Venezuela, tuvo su origen con la creación de postgrados específicos en esta área a principios de los años 70. La investigación y, en consecuencia, la evolución y fortalecimiento del área, se han desarrollado a través de estos postgrados, las publicaciones y los eventos dedicados a esta área en particular. También existen algunas instituciones, como son el Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC) y la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT), que han contribuido al fortalecimiento de la misma.

Según Marcano, Carrera y Rada (1980) los estudios de Matemáticas en Venezuela se inician, de forma incipiente, en 1831 en la carrera de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela (UCV) por gestiones de Juan Manuel Cajigal. Anteriormente el país apenas salía de su condición de nación colonizada. En todos los niveles de enseñanza se carecía de personal preparado para ejercer la docencia, ésta era impartida por personas que tenían algún conocimiento matemático. El primer Instituto del país en el cual se administraron programas de Matemática fue el Instituto Pedagógico Nacional, actual Instituto Pedagógico de Caracas (IPC), creado en el año 1936. En cuyo Departamento de Física y Matemáticas se preparaban los docentes en dichas ramas para la educación media. Los egresados de este Instituto tuvieron un papel de liderazgo durante los años 40, 50 y 60 en la enseñanza de la Matemática en el país, tanto en educación media como en primaria pues también formaban a los maestros de las escuelas normales. De hecho la que constituye quizás la primera investigación en Educación Matemática llevada a cabo en Venezuela, fue llevada a cabo en 1963 con la coordinación del Prof. José Alejandro Rodríguez del IPC, por los esposos Villalobos, esta se tituló "Evaluación de la enseñanza de las matemáticas en los liceos de

Venezuela", y fue publicada en la Revista de Educación, editada por el Ministerio de Educación, este estudio se llevó a cabo en 30 liceos del sector oficial.

Luego, fue a finales de los años 50 cuando surgen otras instituciones que se dedican a la formación de matemáticos y docentes de Matemática, como la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, en 1958, y el Instituto Pedagógico de Barquisimeto en 1959. (Marcano, Carrera y Rada, 1980)

Metodología de investigación

La información para llevar a cabo esta investigación se recogió paralelamente de dos fuentes: 1.- Las entrevistas a las personas responsables de la formación de los educadores matemáticos en las distintas universidades. 2.- Los documentos como programas e informes de creación de los postgrados, las memorias y los informes de los eventos en educación matemática realizados en el país. Las entrevistas son, según Goetz, LeCompte (1988), *no estandarizadas,* pues sirven de guía acerca de las cuestiones generales y la información específica que se quiere reunir, tienen un enfoque informal, y ni el orden de las preguntas ni su contexto son prefijados. Esta tuvo tres partes fundamentales: preguntas generales acerca de los hechos que han influido en la formación de la especialidad Educación Matemática en el país, preguntabas sobre los aspectos específicos considerados esenciales en el fortalecimiento del área (postgrados, eventos, revista especializada y otras instituciones) y preguntas sobre la participación específica del entrevistado, los apoyos recibidos al proceso y el futuro que vislumbraba para el área. Luego se procedió a realizar un análisis de contenido con el propósito de describir tendencias en el contenido de las mismas. (Krippendorff, 1997) El análisis de contenido es una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto. En el caso de esta investigación se ha relacionado la información obtenida en los distintos documentos e informes de creación de los programas de postgrado, informes de los eventos académicos realizados e informes de la ASOVEMAT con lo manifestado por los entrevistados, buscando coincidencias y contextualizando cada dato aportado por los informantes con la documentación publicada por las universidades que imparten los postgrados y con los informes presentados por los miembros de la Asociación Venezolana de Educación Matemática cuando realizan un evento o lo que han publicado acerca de su aporte a la publicación de la revista *Enseñanza de la Matemática.*

Los Postgrados

Para Luengo (1998), la existencia del área Didáctica de las Matemáticas ha posibilitado la creación de departamentos en torno a esta temática, la incorporación de esta cátedra a la actividad normal de cualquier departamento ha traído como consecuencia la organización de programas de doctorado específicos de Didáctica de la Matemática. En Venezuela, los programas de postgrados existentes en el área son:

1. La Maestría en Educación. Mención Enseñanza de la Matemática. De la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), impartida en sus distintos Institutos

Pedagógicos: el de Caracas (1974) además es la primera maestría en el área en Latinoamérica, el de Barquisimeto (1983), el de Maracay (1988) y el de Maturín (1990). También se hizo en 1994 un convenio con la Universidad Nacional Experimental de Guayana para impartir este postgrado en forma conjunta en Ciudad Guayana.
2. Maestría en Educación Matemática (1990). De la Universidad de Carabobo. (Mayor número de graduados).
3. Maestría en Matemática. Mención Docencia. De La Universidad del Zulia (LUZ).(1987)
4. Maestría en Educación. Mención Enseñanza de la Matemática. De la Universidad Rómulo Gallegos. (1994)
5. Maestría en Matemáticas. Mención Docencia. De la Universidad de Los Andes. (1991) (Tuvo dos graduados en Mérida y dos en Trujillo y desapareció)
6. Especialización Didáctica de las Matemáticas con opción a Maestría. Universidad Valle del Momboy. (1998)
7. Doctorado en Ciencias Humanas. Línea de investigación en Didáctica de la Matemática. La Universidad del Zulia.
8. Doctorado en Educación. Línea de investigación en Enseñanza de la Matemática. Universidad Central de Venezuela. (2000)

Caso de la Maestría en Matemática. Mención Docencia. LUZ.

Las líneas de investigación son: 1.-Procesos de enseñanza-aprendizaje en el campo de la matemática. 2.-Rendimiento estudiantil y profesoral en el campo de la matemática. 3.- Planificación y currículum en el área de matemática. 4.- Formación de docentes en el área de matemática. 5.- Definición y diseño de modelos didácticos metodológicos en la enseñanza de la matemática.6.- Investigación educativa a través de modelos matemáticos. 7.- Construcción de modelos matemáticos para la enseñanza a través de servomecanismos.

Existen en La Universidad del Zulia otras unidades de investigación cuyas líneas de trabajo se relacionan con las de la maestría, éstas son el Centro de Estudios Matemáticos (CEM) y el Proyecto Thales (PT). Las líneas de investigación del CEM son: 1.-El conocimiento de contenidos de la Matemática, Física y Ciencias Afines. 2.-Condiciones que inciden en la educación de la Matemática, Física y Ciencias Afines. 3.-Producción de actividades educativas para Matemática, Física y Ciencias Afines. 4.-Formación de docentes para orientar contenidos de Matemática, Física y Ciencias Afines. Las líneas de investigación del PT son: 1.- Formación y capacitación del docente en informática educativa para el área Matemática y Ciencias Afines. *2.*-Telemática e investigación educativa en el área Matemática y Ciencias Afines. 3.- Software interactivo y su incidencia en el aprendizaje de contenidos matemáticos y ciencias afines.

Actualmente se están desarrollando varios proyectos de tesis en relación con las líneas de investigación del PT dirigidas a estudiar las influencias y efectos del uso de la computadora y algunos paquetes informáticos en particular sobre el proceso de enseñanza- aprendizaje y el rendimiento académico. Algunas tendencias en los proyectos en desarrollo de esta maestría son Solución de Problemas y Factores Afectivos, actitudinales y de motivación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los eventos académicos

Los eventos académicos más importantes del área han sido los congresos nacionales, el primero llevado a cabo en 1994 en la ciudad de Maturín, donde dos años antes había nacido la ASOVEMAT, el segundo celebrado en la ciudad de Valencia en 1997 y el tercero se realizó recientemente en la ciudad de Maracaibo (octubre 2000).

I Congreso Venezolano de Educación Matemática (I COVEM): (Informe sobre el I COVEM, 1995). Se llevó a cabo conjuntamente con el III Encuentro de Profesores de Matemática de las Regiones Nor-oriental, Insular y Guayana y fue organizado por la ASOVEMAT y la UPEL-IPM.

Las conferencias centrales dictadas fueron: .- Educación Matemática en el inicio de los años 200, Claude Gaulin de la Universidad Laval de Quebec, Canadá; .- Programa de Modernización y Fortalecimiento de la Educación Básica, Inés de Orellana del CENAMEC; y ¿Se enseña a dmostrar o razonar en Educación Media? Eduardo Lima de Sa, de la USB. Las discusiones de las mesas de trabajo se organizaron alrededor de los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática señalados a continuación: el docente, el alumno, el ambiente escolar, el diseño curricular, la evaluación, aspectos administrativos y reformas educativas. Éstas fueron llevadas al Ministerio de Educación.

II Congreso Venezolano de Educación Matemática (II COVEM): (Memorias del II COVEM, 1997)

Los grupos de trabajo que se organizaron fueron: 1. Matemáticas de la Educación Básica. 2. Matemáticas de la Educación Media. 3. Matemáticas de la Educación Superior. 4. La Matemática y su vinculación con otras disciplinas de los Programas Escolares. 5. Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de las Matemáticas. 6. La resolución de problemas ¿un medio o un fin? 7. Creatividad y Matemática. 8. Hacia donde irá la Educación Matemática del siglo XXI. 9. Juego y Enseñanza de la Matemática. 10. La Matemática y las Artes. 11. La Investigación cualitativa en las Maestrías de Educación Matemática. 12. Resolución de problemas "inútiles" y el desarrollo de la capacidad intelectual. 13. Análisis crítico y evaluación de los textos utilizados en el aula. 14. Diseño de una clase por procesos de pensamiento. En ponencias: 1. Diferentes enfoques para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. 2. Solución de problemas. 3. Investigación en Educación Matemática. 4. Capacitación del Docente en Matemática. 5. Lenguaje y Comunicación

La Revista *Enseñanza de la Matemática*

Según González (1996) desde 1972, cuando se llevó a cabo la III Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, se tuvo conciencia de la necesidad de dotar a la región interamericana de una publicación periódica dedicada a la didáctica de la matemática, pues para ese momento era muy marcada la escasez de material bibliográfico dedicado a los problemas del área en comparación con la actividad que en este campo se realizaba a nivel mundial.

La primera revista especializada en el área es la revista *Enseñanza de la Matemática*, apareció en 1992, editada por la ASOVEMAT, con el apoyo de la UPEL-IPM, ésta ha proporcionado un espacio para intercambiar puntos de vista, experiencias, inquietudes y planteamientos de quienes están interesados en el desarrollo y en el mejoramiento de la calidad de la enseñanza de la matemática en el país. Actualmente es editada con el apoyo del CENAMEC y va por el volumen 10.

El CENAMEC

Este ha influenciado el desarrollo de la Educación Matemática en Venezuela desde su inicio en 1974. Ha desarrollado diversos proyectos en esta área, como son: 1. MATCB-01. 2. .MATCB-02. 3. MATPRI-01. 4. MATPRI-03. 5..MATPRI-01-1. 6. PROMATEM-01 (Olimpíadas Matemáticas) (Marcano, Carrera y Rada, 1980)

El MATCB01 consistió en un diseño curricular experimental innovante para el Ciclo Básico Común de Educación Media. En el mismo intervinieron docentes de Educación Media y de Educación Superior (del Instituto Pedagógico de Caracas). Se realizó entre 1975 y 1980, partiendo de un diagnóstico, pasando por un diseño experimental hasta una implantación progresiva a nivel nacional. Participaron docentes de doce (12) ciudades del país, tres de cada una. Se pretendía romper con la enseñanza tradicional de la clase magistral y que los estudiantes trabajaran más. En principio lo que se quería hacer era una reestructuración del Programa, no un cambio de base como se hizo. Los docentes de Educación Superior elaboraron los objetivos, los contenidos y la evaluación, y los docentes de Educación Media diseñaron cómo hacer para llegar a eso. Se hicieron guías para los profesores, para los estudiantes y los Programas. Se trabajó con material concreto, p.e. en el tema de los sistemas de numeración.

El MATPRI fue un proyecto para introducir el uso de recursos concretos en la enseñanza de la Matemática. Al inicio se hicieron todos los recursos que se iban a utilizar y se grabaron unos videos al respecto.

Actualmente existen otros proyectos como son: 1. Banco de Problemas. 2. Uso de materiales. Uso de Recursos Didácticos. (Asociado a talleres de fracciones, de Sistemas de Numeración, de Geometría, de Resolución de Problemas, de Juegos) 3. Materiales Educativos No Impresos (MENI) 4. Matemática Interactiva. Los talleres pueden ser solicitados por parte de una institución privada y ha habido en los últimos años programas gubernamentales para las instituciones públicas ofrecidos a las Zonas Educativas del país.

El CENAMEC contó con un boletín periódico de Educación Matemática, del cual se elaboraron diez (10) números. Cada uno se dedicó a un tema particular de la matemática, en la última página contaba con una sección de reseña de un personaje que trabajara en el área.

El CENAMEC, actualmente ubicado en el edificio del Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, mantiene una biblioteca muy bien dotada de publicaciones periódicas en el área de Educación Matemática Está planteado ver de qué manera los docentes del interior del país pueden utilizar este servicio de canje, solicitando por INTERNET algunos artículos sin necesidad de viajar a la ciudad capital.

Referencias bibliográficas

ASOVEMAT (1995) *Informe sobre el I Congreso Venezolano de Educación Matemática (I COVEM) realizado en el Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL) del 5 al 8 de Octubre de 1994.*

ASOVEMAT (1997) *Memorias II Congreso Venezolano de Educación Matemáti*ca.

Goetz, J. LeCompte M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

González, F. (1996). Reseña de libros. *Educación Matemática*, 8(1), 103-118.

Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós Ibérica.

Luengo, R. (1998). Una panorámica sobre la Educación Matemática en España. *Memorias III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Caracas: ASOVEMAT.

Marcano, G. Carrera, I., Rada, S. (1980). *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática*. Caracas: CENAMEC.

La valoración de los errores en el aprendizaje de la matemática

Alejandro Muñoz Diosdado
UPIBI, Instituto Politécnico Nacional. México
amunoz@acei.upibi.ipn.mx

Resumen
La evaluación de los exámenes de Matemáticas de los alumnos se ha realizado tradicionalmente de forma binaria, o están bien o están mal. Realizar una evaluación más detallada en donde se revise el procedimiento para resolver algún problema puede llevar a una evaluación más justa. Pero lo que se plantea en este trabajo es que el profesor debe realizar un análisis detallado no tanto de los aciertos sino de los errores que comete el alumno, porque el profesor es el que más puede aprender de los errores de los alumnos. Se hace una clasificación de los errores que cometen los alumnos, se propone una forma cualitativa para valorarlos, y se hacen propuestas para que el profesor pueda conocer más de cerca, a partir de los errores que cometen los alumnos, cómo aprende el alumno, que ha aprendido bien, que ha aprendido mal, qué conceptos le causan confusión, cuáles conceptos necesita repasar, etc. Esto le revela al profesor el grado de maduración que tiene el alumno en las diferentes habilidades del pensamiento y le permite mejorar su práctica docente.

Introducción

Para evaluar cualquier curso de Matemáticas del nivel superior tradicionalmente se aplican exámenes a los alumnos en los cuales tiene que resolver varios problemas, la calificación depende de cuantos problemas pueda resolver bien, porque el profesor hace un recuento de los aciertos y usando alguna escala asigna una calificación. Descrito de esta forma, el problema de la evaluación parece muy sencillo, sin embargo, evaluar no es calificar, realizar el proceso de la forma descrita no solamente puede resultar injusto para el alumno, sino que no permite al profesor darse cuenta de cómo el alumno está aprendiendo. El evaluar así impide que haya retroalimentación por parte de los alumnos hacia el profesor. Muchos profesores están en contra de los exámenes tradicionales, pero el problema no es el examen en sí, lo que no debe ser tradicional es la forma de evaluar tal examen. En las escuelas de Ingeniería de México es común que los profesores califiquen los exámenes de Matemáticas en forma binaria, un problema resuelto se califica con cero o con uno, o está bien o está mal. Con esta forma de calificar el profesor se centra solamente en el resultado, si el alumno logró reproducirlo, entonces el problema está bien, en caso contrario, el problema está mal. Algunos profesores valoran lo que el alumno hizo para resolver un problema, es decir, evalúan el procedimiento, y si el alumno se acercó a la respuesta puede ser que asigne una calificación fraccionaria al problema. Esto es más justo, y permite al evaluador darse cuenta de que parte del proceso de solución no domina el alumno.
El simple hecho de hacer esta valoración proporciona al profesor mucha información y le permite corregir aquellos aspectos que los alumnos no han entendido bien o hacer énfasis en aquellos temas que mostraron ser más difíciles para los alumnos. Sin embargo, esta valoración puede ser muy subjetiva, ¿con qué criterios el profesor puede decir que el alumno merece 0.5? ¿Puede el profesor asignar una calificación de 1.0 a un problema a pesar de que el resultado no sea correcto? ¿Todos los errores que comete un alumno son iguales, o hay errores más graves que otros? Por ello se debe examinar con mayor cuidado las respuestas que un alumno da a un problema, es necesario conocer con precisión el tipo de errores que puede cometer y de ser posible, asignar una escala para cada tipo de error. Por ejemplo, si un alumno copia mal un reactivo pero resuelve bien el problema, obviamente la respuesta no está bien, porque no resolvió el problema que se le planteó. No

obstante, si la respuesta al problema que planteó está bien, entonces ¿qué calificación asignar? Con el método binario estricto la calificación debería ser cero, si por el contrario se califica el procedimiento, entonces la calificación podría ser 1.0. Pero podrían darse otras situaciones. Por ejemplo, si el alumno resolvió bien el problema, pero:

1) Al copiar mal, se eliminó algún término que hace que el problema sea muy fácil.
2) El nuevo problema tiene una dificultad equivalente al original.
3) El alumno agregó un término que hizo que la solución fuera un problema más difícil.

En el primer caso probablemente el profesor piense que el alumno no merece obtener 1.0 a pesar de que el resultado sea correcto; en el segundo caso tal vez decida asignar la misma calificación y en el tercer caso ¿asignaría una calificación mayor a 1.0? Cualquier profesor podría dar una respuesta adecuada a este problema, sencillamente porque el alumno resolvió bien el problema, pero ¿qué sucede si el problema está mal resuelto? Algo que puede ayudar al profesor es conocer qué tipo de errores puede cometer el alumno, no tanto para dar una calificación, porque al fin de cuentas los profesores toman decisiones que no pueden sustraerse de cierta subjetividad. El conocer los errores que comete el alumno es importante porque todos aprendemos de nuestros errores, el alumno aprende de sus errores, pero quien más puede aprender de los errores del alumno es el propio profesor.

Los errores que cometen los alumnos

1.- Planteamiento del problema

La presente investigación se realizó sobre una muestra de 78 alumnos del nivel superior de las carreras de ingeniería en alimentos e ingeniería ambiental, los cuales cursaron la asignatura de Matemáticas I, que es un repaso de Álgebra y Trigonometría. Se aplicó un examen a los alumnos sobre los tópicos de Matemáticas I y para que estuvieran relajados se les dijo que el resultado no afectaría su calificación del presente curso, entregaron el examen cuando terminaron o cuando ya no pudieron resolver más. La redacción de los problemas se hizo lo más simple posible y los reactivos fueron simples también, no había casos especiales o problemas donde hubiera que pensar mucho las respuestas o que requirieran alguna metodología sofisticada. Para muestra el reactivo número 2:
Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6} \qquad (1)$$

Una vez terminada la revisión tradicional, se inició una revisión detallada de los exámenes buscando con la mayor precisión posible los errores que cometen los alumnos. Aunque la calificación que se obtiene por parte de los alumnos puede cambiar si se hace una revisión más detallada (usualmente aumenta, pero puede también bajar), el objetivo no es que la evaluación sea más justa, sino más bien conocer de cerca cómo aprende el alumno, que ha aprendido bien, que ha aprendido mal, que no conoce, qué conceptos le causan confusión, cuáles conceptos necesita repasar un poco, cuáles conceptos necesita volver completamente sobre ellos, etc. Esto está relacionado (así se muestra en este trabajo) con el tipo de errores que comete el alumno y esto a su vez revela el grado de maduración que tiene el alumno en las diferentes habilidades del pensamiento. Tal como se estableció en un trabajo anterior (Muñoz-Diosdado, 2000), los alumnos de nivel superior efectivamente tienen problemas de maduración, muchas veces son problemas de fácil solución, que el profesor puede detectar y resolver si existe la cooperación del alumno (Richard, 1999). No obstante, otras veces se observan problemas de maduración de tal magnitud que pareciera que se originaron desde varios niveles anteriores (Condemarín, Chadwick y Milicic, 1989).

2.- Diferentes tipos de errores

Si en una Academia de Matemáticas se les pidiera a los profesores que elaboren exámenes de opción múltiple, aparentemente, el problema es más o menos sencillo, simplemente hay que pensar como el alumno e imaginar los posibles errores que puede cometer al resolver un problema. A pesar de que en la Academia puede haber profesores con vasta experiencia, resulta que, en cuanto a errores cometidos, los alumnos tienen mucha "creatividad", siempre habrá más errores que los que se puedan imaginar. En este trabajo no se podrá hacer una descripción de todos los posibles errores encontrados (siempre habrá alguno nuevo) sino solamente de los principales, se tratará de agruparlos de acuerdo a su gravedad, pero esto puede variar al aumentar la experiencia o al conocer la opinión de otros docentes.

2.1.- Errores no graves

Pueden definirse como aquellos que no se originan de la falta de conocimiento del alumno sino de circunstancias que tienen que ver sobre todo con la falta de concentración. Por ejemplo, observe lo que un alumno contestó al reactivo 3:

`Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:`

$$x-1=y+1;\ \ x-3=3y-7 \tag{2}$$

El alumno comenzó a resolverlo de la siguiente forma:

$$x+y=1+1;\ \ x-3y=-7+3 \tag{3}$$

como se observa el alumno se equivocó desde el primer paso, realmente debió de escribir

$$x-y=1+1;\ \ x-3y=-7+3 \tag{4}$$

después de este error, el alumno siguió el proceso y encontró la solución x=1/2, y=3/2, el cual es solución del sistema (3) pero no del sistema (2). El error cometido ¿realmente se debe a una falta de conocimiento? La respuesta es no, el error en (3) se debe a que el alumno aplicó mal la propiedad del inverso aditivo en un término, pero la aplicó bien en otros tres términos, se trata de un descuido. Esto no quiere decir que pasemos por alto este tipo de descuidos, pero en todo caso se deberían proponer actividades a este alumno (y a los que cometieron errores similares) para mejorar su concentración, pero habrá que aceptar que el alumno si sabe resolver sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales. ¿Debería de calificarse con un 1.0 este tipo de problema? Aunque esto depende del criterio del profesor, parece que la mayoría diría que no, porque el alumno pudo haber hecho la comprobación haciendo la sustitución en el sistema original y de esta manera darse cuenta que había cometido un error. Parece que este alumno tiende a dar respuestas superficiales, lo cual se concluyó al revisar todo el examen, porque no hizo las comprobaciones que se podían hacer para verificar las respuestas o dejaba los problemas inconclusos. Al realizar el análisis detallado del procedimiento seguramente ningún profesor asignaría un cero.

Hay errores que aparentan ser del mismo estilo pero que demuestran que el alumno tiene más deficiencias, por ejemplo, para este mismo reactivo otro alumno escribió a partir de la primera ecuación lo siguiente:

$$x-1=y+1;\;\; x=y \qquad (5)$$

y sustituyó en la segunda ecuación

$$y-3=3y-7$$

de donde despejó para obtener y=2. Este es un error más grave que el descrito anteriormente, porque, aunque se podría argumentar que hubo un descuido, tácitamente el alumno está admitiendo que $x-1=x+1$. Si este alumno no detecta esta contradicción, muestra que tiene deficiencias más profundas que el alumno anterior.

2.2.- Errores por respuestas incompletas

En el problema descrito en (1), al hacer la simplificación se llega al resultado siguiente

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{1}{x-3} \qquad (6)$$

Varios de los alumnos llegaron al resultado

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{x+2}{x^2-x-6}$$

este resultado no está mal, al comparar las dos expresiones el alumno piensa que cumplió con lo que se le pedía, es decir, simplificar. Sin embargo, no es posible llegar a la expresión anterior sin saber que $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$, y surge la pregunta ¿porqué no utilizó este mismo resultado para simplificar aun más?. Es también una respuesta superficial. El examen aplicado tuvo respuestas superficiales de parte de muchos alumnos y seguramente cualquier docente ha notado este tipo de respuestas que se quedan a la mitad o cerca del resultado pero sin llegar a él, no obstante que todo lo que hicieron no tiene errores.

También un alto porcentaje de alumnos no entienden el papel del signo (–) en el tercer término de (2), ellos resolvieron el problema de la siguiente forma

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{2(x+2)+3(x-3)-4x-7}{x^2-x-6}=\frac{x-12}{x^2-x-6}$$

no visualizan que el signo (-) afecta a todo el término a la derecha, aunque las operaciones las realizan de forma adecuada el resultado no coincide con lo que debería obtenerse. Los errores por respuestas incompletas indican que el alumno no hace el esfuerzo necesario para llegar a un resultado final, resultados intermedios lo dejan satisfecho, muchas veces es inmediato llegar a este resultado final pero el alumno o no puede o no quiere llegar a él. Hay que combatir esta actitud conformista de los alumnos, la cual nace no tanto de la falta de conocimiento sino de la falta de motivación o de concentración.

2.3.- Errores graves y muy graves

Si el alumno durante el proceso de solución de un problema reiteradamente utiliza mal las propiedades matemáticas, confunde los términos, no sabe leer las instrucciones o realiza mal las operaciones aritméticas o algebraicas entonces se trata de errores graves o muy graves. La presencia de errores graves puede llevar al profesor a calificar con cero un reactivo, lo cual es adecuado. Pero ni aún así puede afirmarse que el alumno no sabe nada

del reactivo. Probablemente el único caso en que estamos seguros que el alumno no sabe nada es cuando dejó el espacio en blanco. El profesor puede aprender de los errores de los alumnos, pero parece que en los errores en los que más puede aprender es en los errores graves, en un error de este tipo es en donde se manifiesta hasta donde llega la ignorancia del alumno, las deficiencias del alumno se vuelven transparentes para el maestro en este tipo de errores, un buen maestro puede diseñar toda una estrategia para ayudar a un alumno a partir del análisis de los errores graves que cometió en la resolución de un conjunto de reactivos. El tipo de errores que un alumno puede cometer es casi tan grande como el número de alumnos, puede cometer errores que ni siquiera nos imaginamos, pero si se entiende lo que hizo mal y cuales son los puntos clave que el alumno no domina entonces puede ayudársele con mayor eficacia. No es clara la frontera entre lo que es un error grave y uno no grave, lo que para algunos pudiera parecer un error grave para otro pudiera parecer apenas un pequeño descuido. En un trabajo descriptivo como éste puede ilustrarse al menos con un ejemplo muchos de los tipos de errores que cometieron los alumnos en un reactivo y la valoración que hace el autor de este trabajo de tales errores.
En el reactivo número 8 se pedía despejar a la variable x de la expresión

$$3^{x+1} = 100 \tag{8}$$

A continuación se describe lo que seis alumnos de los que cometieron errores hicieron (está copiado directamente de los exámenes y fueron escogidos totalmente al azar). El primer alumno escribió su respuesta como

$$3^{x+1} = 10^2;\ \ x+1 = 2;\ \ x = 1$$

Aunque no lo indica explícitamente, el alumno utilizó logaritmos para resolver el problema, sin embargo aplicó a la izquierda logaritmo base 3 y a la derecha logaritmo base 10, esto se considera un error grave porque demuestra que el alumno no ha entendido que la misma operación que se hace en un miembro de una ecuación, debe hacerse en el otro. Tiene a su favor el hecho de que conoce el concepto de logaritmo pero no le parece sospechoso que el problema se sobre-simplifique tanto y por último no hace la comprobación correspondiente, a pesar de que es evidente que x=1 no es solución.
Un segundo alumno resolvió así el problema

$$(x+1)(\log 3) = 100;\ \ x = \frac{(-1)(100)}{\log 3}$$

Como se observa sólo aplicó logaritmo base 10 al término de la izquierda, el problema se agrava porque no hace el despeje en forma correcta, lo cual muestra graves deficiencias algebraicas para un alumno de nivel superior.
Obsérvese la forma tan singular de razonar del tercer alumno

$$3^{x+1} = 100;\ \ x+1 = \sqrt[3]{100};\ \ x+1 = 4.6;\ \ x = 3.6$$

El alumno no aplicó logaritmos, parece que “elevó” a 1/3 ambos miembros de la ecuación, pero no advierte que de ninguna manera queda x+1 en el lado izquierdo de la ecuación.
¿Y qué se puede decir del cuarto alumno? ¿Porqué esa notación tan extraña?

$$3^{x+1} = 100;\ 3_{100} = x+1;\ 300-1 = x;\ \ x = 299$$

respuestas tan desconcertantes como ésta requieren conversar con el alumno, para que el profesor pueda entender que trató de hacer. Muchas veces los alumnos tratan de hacer procedimientos no permitidos, pero en este caso la notación desconcierta a cualquiera.
El quinto alumno hizo lo siguiente

$$\log(x+1)3 = 100;\ \log(x+1) = \frac{100}{3};\ \log x + \log 1 = \frac{100}{3};\ \log x = \frac{100}{3} - \log 1;\ x = e^{\frac{100}{3} - \log 1}$$

Este alumno comete casi todos los errores posibles, difícilmente se nos ocurrirían otros.
Por último un sexto alumno hizo lo siguiente:

$$\log_3 3^{x+1} = \log_3 10^2;\ x+1 = \log_3 100;\ x = \frac{1}{\log_3 100}$$

He aquí un alumno que utiliza bien las propiedades de los logaritmos pero que no es capaz de hacer un despeje. Esta es una conducta que se observa de forma frecuente, los alumnos entienden bien los conceptos de algún tema avanzado, como derivar o integrar, pero no pueden resolver bien los problemas porque tienen errores algebraicos e incluso aritméticos.

Conclusiones

Evaluar exámenes en forma binaria, poniendo cero si el problema se resolvió mal o uno si se llegó al resultado, es una forma totalmente inadecuada para evaluar. Tomar en cuenta el procedimiento es una forma más justa de asignar una calificación. Pero lo más importante es hacer una revisión detallada y completa de lo que hizo el alumno y sobre todo analizar los errores que cometió el alumno. Caracterizar el tipo de errores que comete el alumno, como no graves, graves o muy graves, si bien puede ayudar a que el profesor evalúe mejor, tiene una mayor utilidad, le permite conocer de cerca el desempeño del alumno, ver sus deficiencias y sus aciertos, valorar el grado de madurez para la realización de ciertas tareas o razonamientos y le permite ver con claridad el éxito que ha tenido en su propio desempeño; un profesor que examina con cuidado los errores de sus alumnos, aprende de esos errores porque puede a su vez corregir su propia práctica docente. En el caso de Matemáticas esto es más importante, porque hay una situación de crisis en la enseñanza de la Matemática (al menos en México), y se requiere de profesores que realicen una evaluación total del alumno, no con el fin único de asignar una calificación, sino de usar este proceso para su propio mejoramiento.

Referencias bibliográficas

Condemarín, M., Chadwick, M., Milicic, N. (1989). *Madurez Escolar. Manual de Evaluación y Desarrollo de las Funciones Básicas para el Aprendizaje Escolar*. Madrid: Ed. Ciencias de la Educación Preescolar y Especial.

Richard, W. (1999). Condiciones para un aprendizaje de calidad en la enseñanza de las ciencias. Reflexiones a partir del proyecto PEEL. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 3-15.

Muñoz Diosdado, A., Arce Viveros, A. (2000). *La maduración para el aprendizaje de la Matemática*. Memorias de Relme XIV, Panamá.

Un taller de docentes sobre situaciones problemáticas que se resuelven con ecuaciones en diferencias finitas y la aplicación de la herramienta DERIVE

Mercedes Anido de López*; Ana María Simoniello de Álvarez**
*Facultad de Ciencias Económicas y Estadística - Univ.Nacional de Rosario, Argentina
**Facultad de Ciencias Económicas - Univ. Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina
amsimoni@fce.unl.edu.ar

Antecedentes

En el diseño original del Proyecto *"La enseñanza de la Matemática con herramientas computacionales"* se ha pensado en los cursos de formación docente como estrategias de transferencia. Trataremos de resumir algunas reflexiones sobre la importancia y el lugar que se les da en el proyecto.

¿Por qué surge en la Facultad de Ciencias Económicas la idea de estos cursos? La enseñanza de la Matemática a alumnos que no sean de una Licenciatura en Matemática plantea un desafío que frecuentemente ha sido ignorado. Los contenidos se han desarrollado como si los alumnos fueran potenciales especialistas en Matemática. En general, la Matemática se presenta en forma aséptica, sin contaminación con los problemas reales. Existe una falta de motivación en la introducción de los temas.

Pensamos que, para un alumno que vocacionalmente ha elegido una carrera del área de las Ciencias Económicas, podría ser atractivo que el aprendizaje se centre en la búsqueda de soluciones de problemas de Economía que utilicen herramientas matemáticas.

Existe en la actualidad una fuerte corriente en Educación Matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de Matemática no se realice sólo explorando las construcciones matemáticas en sí mismas, en las diferentes formas que se han cristalizado a lo largo de los siglos, sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad.

Ello además incentivaría al alumno al estudio y a la formación de conceptos sólidos. Se transitaría así de un aprendizaje a veces memorístico, a un aprendizaje significativo. Se deberían buscar metodologías alternativas que mantengan los beneficios de la educación en un pensamiento lógico riguroso, y que, al mismo tiempo, aprovechen la riqueza de algunos Modelos Matemáticos de la Economía, ya accesibles en el inicio de la Matemática Básica del nivel universitario.

En el caso de la Facultad de Ciencias Económicas que nos ha ocupado principalmente, la mayoría de los docentes a cargo de los cursos de Matemática son docentes graduados en la Facultad de Ciencias Exactas ó Profesores en Matemática. No han recibido formación específica en el manejo de los modelos matemáticos que resuelven problemas originados en el área de la Economía. Debían ser capacitados en el tema.

Por otra parte, la cantidad de alumnos de la Facultad se cuadruplicó en la última década. El aumento de la cantidad de alumnos no fue acompañado por un aumento proporcional de la cantidad de docentes. Esta situación ha incidido en un desbalance en cuanto al tiempo que el docente puede dedicar al estudio y actualización, y ha causado la postergación de las exigencias de perfeccionamiento. Además, el perfeccionamiento individual realizado por el propio docente es duro y difícil, atento a su realidad laboral.

Es por ello que se buscó diseñar, con apoyo de expertos, cursos de formación docente en áreas que son de gran actualidad, por los instrumentos matemáticos que aportan al estudio de temas específicos de Matemática Aplicada.

Se ayudaría así, también, a la formación de planteles capacitados para dar soporte matemático, con fuerte incidencia de métodos cuantitativos, a futuros cursos de postgrado en el área de Economía.

Una de las dificultades que se presentaban tanto para la actualización de los docentes, como para un mejor y más moderno aprendizaje de los alumnos en el área matemática, ha sido la carencia de un ámbito computacional adecuado (equipo y software). Se requería un espacio físico con las herramientas informáticas indispensables para el ejercicio de la docencia e investigación en una universidad moderna. Se necesitaba también formar los docentes en el manejo de los sistemas operativos y software, especialmente a los que no tenían entrenamiento en el manejo de PC. La aparición de las llamadas herramientas CAS (Computer Algebraic System) como poderosas calculadoras numéricas, simbólicas y gráficas, que no requieren conocimientos de programación, podía ser fuertemente motivadora para un cambio curricular y actualización del cuerpo docente, por el interés que despierta su versatilidad para el trabajo matemático. La utilización de herramientas computacionales, en temas que superen el nivel y contenido de los cursos de grado, haría experimentar al propio docente, el valor potencial de las mismas para el aprendizaje. Promovería también la reflexión del docente sobre su práctica educativa.

Consideramos, no obstante, que el mayor logro estriba en el interés demostrado; en la amplitud de la temática que una vez concluido el proyecto abarcará todos los contenidos de la Matemática Básica que se requieren en el grado y postgrado de una Facultad de Ciencias Económicas, y en los trabajos de producción y desarrollo, debidamente documentados, que han surgido como fruto de estos cursos casi todos realizados con modalidad de seminario taller.

El diseño de los cursos

Al respecto, se partió de los supuestos:

- La renovación efectiva de los métodos didácticos, en el marco de un currículum actualizado, sólo puede provenir del convencimiento de los docentes, a partir de su propia experiencia de reconstrucción del conocimiento matemático, en un proceso de redescubrimiento y análisis de los conceptos que permiten resolver problemas.
- Las herramientas computacionales constituyen un importante disparador para el cambio.

Algunas pautas que, se ha considerado, fundamentan la necesidad de promover en el docente en ejercicio de su profesión los cambios y adecuaciones necesarias para efectivizar su acción educativa en el marco de las actuales políticas jurisdiccionales, en el área de la enseñanza de Matemática, son:

- El sistema educativo se encuentra actualmente en un proceso de transformación, tanto en aspectos estructurales como de contenidos. Las instituciones y los agentes involucrados en dicho proceso están destinados a asumir nuevos roles y a definir sus nuevas funciones, rescatando aquellos aspectos que merecen ser conservados por la eficacia demostrada y desechando otros, a la luz de un análisis y reflexión profunda de su experiencia. Uno de los aspectos ya consensuados jurisdiccionalmente está vinculado con la definición del aprendizaje en torno a los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, y con técnicas que involucren el uso de tecnologías en el aula.
- Consideramos que la formación del profesorado es un factor determinante ya que de ello dependerán fuertemente tanto la concreción de objetivos y alcances fijados a los contenidos como la calidad de los resultados de la acción educativa. Cualquier formación que se desee priorizar, basada en la idea de que la actividad docente es una profesión, supone el reconocimiento de la existencia de un marco de contenidos en la disciplina científica

específica, en la del contexto educativo didáctico, con una fundamentación sólida de los mismos, y el diseño de estrategias adecuadas a los fines de promover la construcción de un aprendizaje significativo.

- La inclusión de herramientas computacionales en el proceso de aprendizaje constituye, en alguna medida, una innovación en las técnicas y selección de contenidos disciplinares que se emplean en el aula de Matemática. En nuestra concepción de los cursos desarrollados, y atendiendo a resultados de diversas investigaciones en Educación Matemática a nivel mundial, se considera que el uso adecuado de estas herramientas computacionales ayudan a "hacer", a "enseñar" y a "aprender" Matemática y abren nuevas oportunidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje, propiciando el desarrollo de operaciones intelectuales, capacidades y estrategias.
- Para desarrollar la actualización, capacitación y/o perfeccionamiento del docente en actividad, dado su realidad laboral, se requirió el diseño de estrategias que le posibiliten el acceso a las mismas. Consideramos que para garantizar una adecuada transferencia de nuestra investigación hacia la acción docente, la modalidad educativa a adoptar ha debido prever esas realidades, permitiendo a cada docente adaptar el sistema de cursado a su disponibilidad horaria, su interés en los distintos temas tratados y sus propias necesidades de formación. La educación a distancia se presentó también en algunos cursos como una alternativa que no sólo puede proporcionar esa formación, sino que posibilita su desarrollo apoyando al docente en su actividad habitual, ligando su acción didáctica específica a su propia formación.

Destacamos objetivos comunes a todos los cursos realizados en el marco del proyecto de referencia, cuyas experiencias se trata de evaluar:

- **Objetivo General:** Proponer pautas para una didáctica operativa en lo que hace el aprendizaje de la matemática, a partir de la experiencia del propio docente puesto en condición de alumno.
- **Objetivo Operativo:** Proporcionar al docente:
  - El conocimiento y manejo de una herramienta apta para la operatoria del cálculo diferencial e integral.
  - La permanente reflexión sobre la potencialidad didáctica de la herramienta utilizada.Como punto de partida del diseño, destinado a docentes de enseñanza media y universitaria y de profesorados en actividad, se discutieron y analizaron estrategias y modelos de comunicación, aprendizaje y administración de medios. El propósito ha sido facilitar la generación de procesos de reflexión y de análisis que ayuden al docente a entender el marco interpretativo y los valores que subyacen en las tareas que lleva a cabo. Desde nuestra perspectiva esto habilitaría al diseño de líneas de acción en la propia práctica docente, revisando enfoques, significación de contenidos y metodologías.

Los contenidos de los cursos fueron organizados sobre la base del trabajo integrado alrededor de dos ejes conceptuales: *la profundización y actualización del conocimiento matemático y la aplicación de las herramientas computacionales.*

En el diseño se contempló la realización de actividades no sólo de aprendizaje, sino también de tutorías y encuentros presenciales periódicos de reflexión, integración y evaluación, tanto individuales como grupales.

Asimismo, se seleccionaron las actividades a partir del análisis de diferentes situaciones cotidianas y procesos de distinta naturaleza estudiados por la ciencia en los que la Matemática es aplicada, aprovechando el potencial simbólico, gráfico y numérico de las herramientas CAS. Se trabajaron los conceptos incorporando al tratamiento práctico, la discusión teórica correspondiente. Se buscó asimismo que el aprendizaje de la herramienta

computacional y los contenidos matemáticos estuvieran integrados con la adquisición de destrezas para la resolución de problemas.
En relación con los sistemas computacionales se propició la búsqueda de información en bibliografía adicional, la problematización y discusión acerca del rol de los medios tecnológicos en la educación, de sus modos de representación, y su relación con las sociedades, sus culturas y momentos históricos. Con los mismos criterios se plantearon las actividades de evaluación y de seguimiento de los aprendizajes, procurando la aplicación de conocimientos a la resolución de problemas y la integración de los contenidos.
El seminario taller sobre Introducción a los modelos dinámicos. Aplicación del Sistema DERIVE en la resolución de problemas con ecuaciones en diferencias finitas
Diversos problemas de la micro y de la macroeconomía son formulados matemáticamente a través de ecuaciones en diferencias finitas. En el marco de la optimización dinámica como en el de otras cuestiones económicas donde las variables se consideran dependientes del tiempo, las ecuaciones en diferencias tienen particular importancia. Algunas áreas de aplicación en las carreras de las Ciencias Económicas son Matemática Financiera, Estadística y Economía.
Se consideró de gran interés la inclusión de estos contenidos atendiendo a las diversas cuestiones del Análisis Matemático y sus aplicaciones, que relacionan. En particular se destacaron las diferencias y semejanzas con la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales, tema éste que fuera motivo de un seminario taller desarrollado previamente.

Producción del seminario taller

Sobre la base del diseño previsto, un eje primordial de la actividad de los docentes participantes lo constituyó la construcción de Unidades didácticas de aprendizaje. Para ello se los estimuló hacia la propuesta de problemas de Economía o Ciencias Sociales que utilizan ecuaciones en diferencias finitas, y al análisis, por el propio docente, de las decisiones tomadas durante el proceso de resolución de problemas durante su actividad en el seminario.
En una segunda instancia se propone al docente la construcción de unidades didácticas centradas en los problemas seleccionados, de modo que:

- contemplen las relaciones entre diversos conceptos, la resolución de ecuaciones en diferencias con la aplicación de la herramienta DERIVE , la exploración de soluciones que ese programa permite y la elaboración de conclusiones;
- coloque al alumno en situación de investigador, aprovechando en forma inteligente las posibilidades de utilizar la herramienta computacional durante el aprendizaje.

De la producción de Unidades didácticas por los docentes, extractamos las que siguen.
Subtema:[1] Aplicación de DERIVE a la resolución de un problema microeconómico que considera un modelo simple de consumo
Autores:Est. Graciela Furno - Est. Liliana Koëgel - Ing. Ricardo Sagristá
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. Universidad Nacional de Rosario

Problema

Consideremos el siguiente modelo simple de consumo en un determinado sistema económico: $C(t) + S(t) = Y(t)$ (1)
donde t representa el tiempo, $C(t)$ el consumo en el tiempo t , $S(t)$ el respectivo ahorro e $Y(t)$ el ingreso para ese tiempo.

[1] Se seleccionaron algunas cuestiones propuestas por los autores.

Se sabe que: $Y(t) = \alpha\ S(t-1)$ donde α representa la tasa de interés y que: $C(t) = \beta Y(t)$ en la que β es la propensión marginal al consumo, que en épocas normales varía entre 0.75 y 0.85, si bien en épocas de hiperinflación puede superar con creces la unidad.
Sustituyendo las expresiones de $C(t)$ y $S(t)$ en (1), se obtiene la ecuación en diferencias:

$$Y(t+1) = \alpha\ (1-\beta)\ Y(t)$$

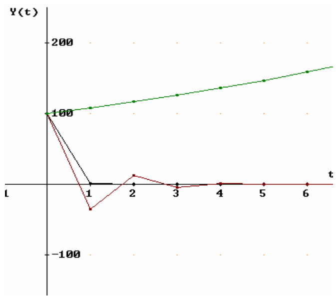
Llamando $p = \alpha\ (1-\beta)$, resulta: $Y(t+1) = p\,Y(t) \qquad (2)$
ecuación en diferencias lineal de primer orden, a coeficientes constantes (q = 0).

Cuando se tiene la ecuación en diferencias

$Y(t+1) = p(t)\ y(t) + q(t)$ con la condición $y(t_0) = y_0$
el programa DERIVE contiene un operador funcional que permite obtener la solución particular de la ecuación que satisface la condición dada: LIN1_DIFFERENCE (p,q,t,t_0,y_0)
Si no está dada la condición $y(t_0) = y_0$, se considera en general que $y(0) = k$ (k constante real) para $t_0 = 0$, con lo que se obtiene la solución particular correspondiente.
Dicho operador debe ser cargado previamente (File - Load - Utility - RECUREQN.MTH).
Utilice el operador anterior para encontrar la solución particular de la ecuación (2) en los siguientes casos, partiendo de un ingreso de 100 unidades monetarias:

α	β	$P = \alpha\,(1-\beta)$
0.08	0.80	0.016
0.70	1.50	-0.35
1.20	0.10	1.08

En cada uno de los casos anteriores, obtenga 15 puntos de la gráfica (Se sugiere usar el operador Vector). Estudie el comportamiento de la correspondiente sucesión $Y(t)$. Compruébelo analíticamente. Verifique las soluciones obtenidas.



Gráfica de soluciones de Y (t+1) = p Y (

Algunos aspectos de la resolución gráfica con DERIVE que permitirá al alumno analizar características de las soluciones se observan en el gráfico.

Subtema:[2] Aplicación de DERIVE en la resolución de ecuaciones en diferencias finitas de 2do. orden.
Autora: Est. Ileana Pluss. Fac. de Ciencias Económicas y Estadística. Univ: Nacional de Rosario.

Problema:

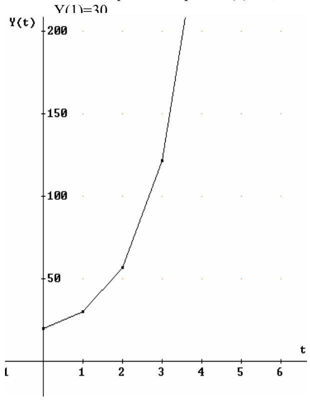
Sea el siguiente modelo :

$$Y_{t+2} = C_{t+2} + I_{t+2}$$
$$C_{t+2} = a\,Y_{t+1}$$
$$I_{t+2} = b\,(C_{t+2} - C_{t+1}) + d$$

Siendo Y la renta, C el consumo, e I la inversión.

a) Obtener la trayectoria temporal de la renta en el caso que: a = 0,5 ; b = 6 ; d = 12.
b) Encontrar la solución particular que satisfaga las condiciones $Y(0) = 20$,$Y(1) = 30$
c) Obtener la gráfica de la solución particular y estimar en ella características de la sucesión obtenida. Verificar con los cálculos apropiados.

Solución particular para Y(0)=20, Y(1)=30



Resolución con DERIVE:

---
[2] Se seleccionaron algunas cuestiones propuestas por la autora.

El primer paso consiste en obtener la ecuación en diferencias que se deduce del modelo:

$$Y_{t+2} - a\,Y_{t+1} - b\,(aY_{t+1} - a\,Y_t) - d = 0$$

Reduciendo, la ecuación en diferencias es : $Y(t+2) - 3.5\ Y(t+1) + 3\cdot Y(t) = 12$, que es ecuación lineal, a coeficientes constantes, de orden 2, no homogénea. El operador LIN2_CCF (-3.5, 3, 12, t, c1, c2) permite obtener su solución general: $Y(t) = c1.2^t - c2.\,1{,}5^t + 24$, t = 0, 1, 2,...

La solución particular que satisface las condiciones dadas : Y(0) = 20 e Y(1) = 30 , es:
$Y(t) = 24.2^t - 28.\,1{,}5^t + 24$, $t = 0, 1, 2, ...$

El operador VECTOR([t, Y(t)], t, 0, 10, 1) permite obtener una matriz de datos para una variación de la variable t de 0 a 10 en pasos de a 1 ; así puede obtener la gráfica de algunos puntos de la sucesión.

Al sólo efecto de una mejor visualización se han conectado los puntos correspondientes a la sucesión solución.

Podemos observar en la gráfica que la sucesión {Y(t)} es monótona creciente y por lo tanto diverge.

Es decir que la gráfica de Y(t) es explosiva y no tiende a un valor de equilibrio.

Estas conclusiones pueden verificarse en forma analítica.

Conclusión

Consideramos que en gran medida se han alcanzado los objetivos propuestos, lo que se ha evaluado a través de los cursos, de las opiniones de los participantes y sus acciones posteriores en el ambiente habitual de trabajo docente, el aula de Matemática.

El trabajo se realiza en el marco del Proyecto de investigación de la Universidad Nacional de Rosario "*La Enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales*" que dirigen la Lic. Mercedes Anido de López y el Ing. Héctor Rubio Scola.

Referencias bibliográficas

Anido de López, M. ; Simoniello de Álvarez,A.M. (1997). La construcción de unidades didácticas en el marco del proyecto de investigación: La enseñanza de la matemática con herramientas computacionales. *Actas de las II Jornadas de Investigación. Fac. de Cs. Económicas y Estadística. Univ. Nac. de Rosario. Argentina.*

Anido de López, M.;Simoniello de Álvarez,A.M. (1998).Las Ecuaciones diferenciales como herramientas disparadoras de un trabajo de formación docente. *Actas de las III Jornadas de Investigación. Fac. de Cs. Económicas y Estadística. Univ. Nac. de Rosario. Argentina.*

Anido de López, M.; Simoniello de Álvarez, A.M. (1999).La Ingeniería Didáctica en las Ecuaciones diferenciales con DERIVE. *Anales del III Congreso de (Tele)Informática Educativa. Santa Fe. Argentina. pp.237-247.*

Artigue, M. (1990). Ingéníeríe Dídactíque. En *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9.(3)*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 281-307.

Jonassen,D.(1995). Computer as congnítíve tools Leamíng wíth Technology. Not from Technology. *Journal of computing in Higher Education* 6 - (2). pp. 4073.

Schoenfeld, A. (1989) . Ideas in the air: Speculations on small group learning, environment and cultural influences on cognition, and epistemology. *International Journal of Educational Research,13(1).*

Wittmann, E. Ch.(1984). Teachíng Uníts as the Integratíng Core of Mathematics Educatíon. *Educational Studies in Mathematics* 15, pp. 251-361.

Wittmann, E. Ch.(1995). Mathematícs Educatíon as "Desígn Scíence". *Educational Studies in Mathematics,* 29 (4)1 pp. 355-374.

Procesos metacognitivos y reflexivos: su desarrollo en la formación inicial de profesores de matemática a través de la práctica de enseñanza

Diana Jaramillo[3], Dario Fiorentini[4]
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp. Brasil
diana_jaramillo@hotmail.com; dariof@unicamp.br

Resumen
Esta comunicación hace parte de la investigación "(re)constitución del ideario de los futuros profesores de Matemática en un contexto de investigación sobre la práctica pedagógica", que actualmente estamos desarrollando en la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Educación de la *Universidade Estadual de Campinas-Unicamp*, Campinas-SP, Brasil[5].
Pretendemos, en esta comunicación, describir y analizar algunos instrumentos de mediación trabajados con los futuros profesores de Matemática, en la disciplina 'Práctica de Enseñanza de Matemática', en la *Unicamp.* Instrumentos que ayudan a desarrollar sus procesos metacognitivos y reflexivos, y que contribuyen a un mejor entendimiento, por parte del formando, de la relación que se establece entre su ideario y su práctica pedagógica. El término "ideario" se refiere a las creencias/concepciones/conocimientos/saberes del profesor que resultan de sus vivencias, experiencias, lecturas y aprendizajes formales o no. Estos instrumentos son: autobiografías; diarios reflexivos; lectura, análisis y discusión de textos; análisis de episodios de clase; narrativas escritas y/u orales; y mapas conceptuales.
Tenemos indicios, a partir de la investigación en curso y de nuestra práctica como profesores de profesores, que estos instrumentos contribuyen significativamente para la problematización y generación de un pensamiento consciente de los futuros profesores sobre su propio ideario acerca del conocimiento matemático, de su aprendizaje y de su enseñanza. Así, en este proceso, el formando se constituye en un "sujeto de conocimiento" que continuamente está construyendo, produciendo y resignificando conocimientos a partir y para su propia práctica profesional.

Introducción

La formación del profesor de Matemática se ha apoyado tradicionalmente en tres ejes: formación matemática, formación pedagógica general, y formación didáctica específica. Los dos primeros ejes han sido considerados los principales, mientras que el tercero ha sido visto como un mero puente entre ellos. Los saberes de la didáctica específica parecen reducirse a las aplicaciones de los conocimientos matemáticos unidos, simplemente, a los conocimientos pedagógicos generales. Esa concepción de formación de profesores está basada en el paradigma de racionalidad técnica (Schön, 1992).
La tendencia actual de formación de profesores, que intenta romper con ese paradigma, parece concebir el tercer eje como el principal eje de la formación, pues es en esa dimensión que los saberes de la actividad profesional funden teoría y práctica, teniendo como referencial la propia práctica profesional en una perspectiva dialéctica y compleja. Correspondería, por lo tanto, a este eje el papel de formar un profesor reflexivo e investigador y sujeto productor de conocimientos. Los programas de Licenciatura en Matemática en Brasil están todavía estructurados en el paradigma de la racionalidad técnica. Sin embargo, en la *Unicamp*, estamos intentando, desarrollar la disciplina de Práctica de Enseñanza de Matemática bajo el otro paradigma.
Dado que esta disciplina es ofrecida solamente al final del programa (en los dos últimos semestres), el estudiante llega a la Práctica de Enseñanza sin tener una base firme y sólida que le permita reflexionar y/o fundamentar sus reflexiones, criticar y/o fundamentar sus

[3] Estudiante de Doctorado de la Facultad de Educación, Área de Educación Matemática, *Unicamp.*
[4] Profesor de la Facultad de Educación, Área de Educación Matemática, *Unicamp.*
[5] Esta pesquisa está siendo financiada por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo-FAPESP.*

críticas, decidir y/o fundamentar sus decisiones cuando tiene que enfrentar situaciones reales de la práctica pedagógica en Matemáticas. Siendo así, es solamente en esta disciplina que el formando, futuro profesor de Matemática, puede confrontar su ideario pedagógico[6] sobre la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje con la práctica pedagógica en situación real.

Asumimos la Práctica de Enseñanza como el momento en que la reflexión y la problematización de la práctica pedagógica deben contribuir para resignificar el ideario del profesor y viceversa. Así, el plan de trabajo en el cual está basada esta Práctica pretende generar una actitud reflexiva, investigativa, crítica y emancipada sobre la práctica pedagógica. La componente reflexión está siendo influenciada, principalmente, por las concepciones de Carr & Kemmis(1986), Clandinin & Connelly (1990), Freire (1997) y Zeichner & Liston (1999). Así, consideramos que uno de los objetivos fundamentales de esta disciplina es desarrollar procesos reflexivos, investigativos y metacognitivos en los futuros profesores, y por lo tanto hemos intentado buscar algunos instrumentos de mediación que posibiliten esa formación.

De esta forma, pretendemos en esta comunicación destacar y describir algunos instrumentos de mediación trabajados con los futuros profesores de Matemática, en la Práctica de Enseñanza de la *Unicamp*. Estos instrumentos ayudan a desarrollar diversos procesos metacognitivos y reflexivos, y contribuyen a un mejor entendimiento, por parte del formando, de la relación que se establece entre su propio ideario y su propia práctica pedagógica.

Sobre los procesos reflexivos y metacognitivos

El ideario pedagógico del profesor se alimenta, fundamentalmente, de dos fuentes básicas:

- la primera, de la formación incidental[7] y de la formación inicial. Aquí el futuro profesor de Matemáticas está construyendo su ideario pedagógico con relación al conocimiento matemático (académico y/o escolar), al conocimiento pedagógico, a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, a la sociedad y al mundo (contexto). Este ideario influye directamente en el proceso de enseñanza que él desarrolla, y se manifiesta claramente en el proceso de aprendizaje de sus alumnos, ambos componentes importantes de la práctica pedagógica;
- la segunda, de las experiencias profesionales producidas a partir de la práctica pedagógica. Estas experiencias se convierten en saberes experienciales (Fiorentini *et al* 1999) a partir de una reflexión continua y sistemática antes, durante y después de la acción pedagógica. De esta forma, el futuro profesor no apenas construye su experiencia profesional sino que también problematiza, resignifica y reconstituye críticamente su propio ideario.

Así, el ideario está constantemente alimentando la práctica pedagógica, y ésta, a su vez, está siendo problematizada y transformada, por parte del profesor, a partir de su confronto reflexivo y crítico con la realidad en el salón de clase. Esta relación ente el ideario y la

[6] En esta investigación el término "ideario" está siendo construido como un constructo que se refiere a las creencias, concepciones, conocimientos/saberes del profesor. Este ideario resulta de vivencias, experiencias, lecturas y aprendizajes adquiridos a lo largo de su formación.

[7] La formación incidental se refiere a los aprendizajes al respecto del quehacer pedagógico y de la acción docente, adquiridos de forma implícita al vivenciar el proceso de enseñanza y/o aprendizaje, sea como profesor o sea como alumno.

práctica está siendo estudiada, en este trabajo, como dialéctica y compleja[8], pues ella no puede responder a una simple relación estática causa-efecto.

Es precisamente cuando esta relación, este ciclo (dialéctico y complejo) **ideario-práctica pedagógica**, se inicia y se repite que se manifiesta la necesidad del desarrollo de procesos reflexivos y metacognitivos que contribuyan a la 'concientización', por parte del licenciando, de dos aspectos fundamentales: del ideario que está (re)constituyendo y de los saberes experienciales que produce reflexivamente a partir de la práctica pedagógica.

Por lo tanto, la reflexión y la metacognición se constituyen en elementos importantes para ser tenidos en cuenta en la Práctica de Enseñanza, motivo de este estudio.

Nuestra concepción de reflexión está fundamentalmente basada en las perspectivas de Carr & Kemmis (1986), Clandinin & Connelly (1990), Freire (1997) y Zeichner & Liston (1999). Para los primeros la reflexión está dirigida a mejorar la racionalidad y comprensión de las prácticas pedagógicas, en el contexto en que ellas se desarrollan. Para los segundos el objetivo de la reflexión es la comprensión de los profesores sobre su conocimiento práctico personal, asociada al pasado, presente y futuro. Freire concibe la reflexión del profesor sobre su práctica pedagógica como un elemento articulador entre la teoría y la prática, superando la tendencia dicotómica, entre ellas, comúnmente presente en los cursos de formación inicial y, en general, de la formación continua de profesores. Y los últimos definen el profesor reflexivo como aquel que valoriza los orígenes, propósitos y consecuencias de su trabajo

El futuro profesor, a través de la dialéctica entre su ideario y su práctica, produce conocimientos y nuevas comprensiones sobre ella. Tomar ese conocimiento como objeto de reflexión y discusión permite tomar conciencia sobre el significado de tal conocimiento y de los cambios que está sufriendo, llegando, de esta forma, al desarrollo de los procesos metacognitivos.

La metacognición, según Santos (1997:20):

> *Involucra el conocimiento del individuo sobre su propio conocimiento. Eso ocurre cuando el individuo tiene conciencia y sabe lo que, de hecho, ya aprendió y ya domina con seguridad y facilidad, y cuando el individuo también está consciente sobre lo que todavía no aprendió y lo que siente dificultades. Es decir, cuando el individuo está desarrollando su metacognición él tiene conocimiento a nivel consciente de sus potencialidades y dificultades. Además, el individuo sabe usar su conocimiento de modo eficaz e intenta superar sus dificultades.*

Contribuir como profesores de profesores en la 'concientización' -por parte del licenciando- del ideario que el futuro profesor viene (re)constituyendo implica ayudarlo a abordar de forma consciente, informada y auto-dirigida sus propias creencias, concepciones, conocimientos y saberes. Con relación a este aspecto, Gunstone e Northfield (1994: 525) expresan: *"es el alumno o profesor alumno quien debe primero reconocer sus ideas y creencias relevantes, para evaluarlas en términos de lo que debe ser aprendido y como este aprendizaje debe ocurrir, y entonces decidir si reconstruye o no sus ideas y creencias"*. Para estos autores, el hecho de construir esa decisión informada y consciente es ser apropiadamente metacognitivo.

Veamos, entonces, algunos instrumentos de mediación trabajados durante la Práctica de Enseñanza en Matemática y que contribuyen al desarrollo de estos procesos reflexivos y metacognitivos.

[8] Estos términos están siendo entendidos a partir de Kopnin (1978) y Morin (1982, 1999), respectivamente.

Sobre los instrumentos de mediación

Los instrumentos de mediación que están siendo utilizando son:

1. **Autobiografías**: elaboradas por los formandos al comienzo de cada uno de los dos semestres de la Práctica de Enseñanza en Matemática. En ellas se recogen experiencias significativas y formativas que el futuro profesor ha "almacenado" antes de iniciar su Práctica de Enseñanza, y que influyen notoriamente en sus propias visiones como formandos y profesores de Matemáticas.
2. **Lectura, análisis y discusión de textos**: los cuales dan alguna sustentación teórica y conceptual para la reflexión y el desarrollo de la *práctica pedagógica significativa en Matemática*[9].
3. **Diarios reflexivos**: elaborados sistemáticamente durante/después de cada observación de clase o clase dada por el practicante. Con ellos se espera que el futuro profesor se involucre personalmente en un proceso de acción-reflexión, ya que, al escribirlo, él reconstruye la experiencia vivida, (re)evaluándola y estando atento a diversos hechos y características que inicialmente pudieron ser ignorados.
4. **Narrativas escritas y/u orales**: las cuales permiten la (re)construcción de los argumentos explicativos de los futuros profesores, con la intención de adquirir una profunda comprensión e interpretación de las experiencias narradas. Las narrativas escritas, particularmente, permiten examinar tanto el pensamiento como las acciones del profesor. Ellas se constituyen en un registro físico de los procesos mentales que posibilita intercambiar ideas o generar diálogos, tanto con otras personas como consigo mismo (Goldsmith & Schifter, 1997).
5. **Los mapas conceptuales**: definidos como una organización pictórica o una representación visual de un tema, los cuales deben presentar un concepto central, otros subconceptos, conexiones, ejemplos y características del asunto en cuestión (Novak & Gowin, 1988), liberando elementos cognitivos, intelectuales y emocionales. Durante el proceso de elaboración de los mapas conceptuales se ponen en evidencia conceptos, proposiciones, posiciones y puntos de vista. En este proceso se desarrollan constantemente nuevos significados y nuevas relaciones conceptuales. Los mapas deben estar siempre acompañados de textos narrativos (orales o escritos). Estos textos, de un lado, permiten que la estructura que represente el mapa conceptual se amplíe y remodele a través de la introducción de nuevas informaciones que van siendo recogidas durante la exposición del texto; finalizada la exposición, el mapa muestra una clara individualidad que permite diferenciar el sujeto, autor, de otros sujetos. De otro lado, pueden ser considerados como elementos fundamentales para la negociación de significados y de ideas, tanto de un sujeto consigo mismo como con otros sujetos. En nuestro caso, los formandos, realizan mapas conceptuales sobre su ideario pedagógico, sobre la formación que han recibido y sobre diferentes lecturas de artículos y textos.
6. **Análisis de episodios de clase**: a partir de episodios reales o ficticios expuestos en caricaturas, o publicados por profesores en ejercicio, o traídos por los propios formandos a partir de sus observaciones y su inmersión en la escuela donde realiza parte de su Práctica de Enseñanza. Estos episodios se constituyen en ejemplos prácticos de la realidad de la sala de clase y del contexto educativo. Ellos permiten que el formando vea la parte humana de la realidad educativa. Permiten que los futuros profesores piensen en

[9] Entendemos la práctica pedagógica significativa como el encuentro de diferentes manifestaciones que se dan en un espacio y en un tiempo, donde confluyen distintos sujetos, objetos y factores: profesor, alumno, currículo y contexto unidos a la componente **experiencia** (tanto del profesor como del alumno).

cómo actuarían en determinadas situaciones como docentes (descubriendo, de esa forma, algunas creencias y concepciones que lo inducirían a actuar de una u otra manera). Ayudan también a desarrollar capacidades argumentativas y deliberativas en los licenciandos a medida que se plantean preguntas, se buscan respuestas, se formulan nuevas preguntas, se toleran ambigüedades y se enfrentan situaciones en constante cambio, manteniendo una actitud atenta y abierta a la comprensión de tales situaciones (Arnaus, 1999).

A modo de ejemplo

Presentamos a continuación un episodio de clase (ficticio), analizado durante la Práctica de Enseñanza, y parte de la reflexión oral que Esperanza, una de las protagonistas de esta investigación, realizó:

Yo separé así, las cosas buenas y las cosas malas que yo encontré aquí. De las cosas buenas que yo encontré fue el comportamiento de ella... El comportamiento de ella de pedirle a la profesora permiso para ir al baño para poder desahogarse, para poder hacer escándalo, entre comillas, sin perjudicar la clase, sin perjudicar a los otros alumnos. También es bueno el comportamiento de la profesora, al permitir que el alumno, pensando que era muy urgente, fuese al baño. Porque existen profesores que dicen no, no va y se acabó...

De las cosas malas es que Mafalda no está entendiendo el tema y no lo dice, no conversa con la profesora ni con algún compañero de clase. Otra cosa mala es que la profesora ni sabe lo que está pasando con su alumno, pues aquí parece una relación de este tipo: **el alumno finge que aprende y el profesor finge que enseña...**

Y otro hecho que observé es sobre la falta de motivación para enseñar un tema matemático para el alumno, antes de enseñar el contenido, por ejemplo, hablar sobre la importancia del conenido mismo, sea él práctico o no, así el alumno podría saber porque es importante estar estudiando eso, como ella dijo aquí, de la forma que ella dijo en esta penúltima (refiriéndose a la caricatura). En el comienzo del último recuadro parece que la profesora no sirve para nada, entonces, por lo menos, que sirva para estar explicando la importancia de aquello y motivar un poco y así explicar el contenido...

Al analizar este episodio, Esperanza reflexiona sobre la práctica de enseñanza de Matemática y, de este modo, explicita y problematiza parte de su ideario pedagógico. Ella observa y se manifiesta sobre la relación alumno-profesor, sobre las relaciones alumno-conocimiento matemático y profesor-conocimiento matemático, sobre la triada alumno-matemática-profesor y discute, también, la gestión y la dinámica de la clase.

A modo de conclusiones

Tenemos indicios, a partir de nuestra investigación y de nuestra práctica docente como profesores de profesores de Matemáticas, que estos instrumentos de mediación contribuyen de manera significativa para la problematización y generación de un pensamiento consciente de los futuros profesores sobre su propio ideario acerca del conocimiento matemático, del aprendizaje, de la enseñanza y de la evaluación de la Matemática. Tales instrumentos permiten, también, que el futuro profesor entienda la relación (dialéctica y compleja) existente entre su propio ideario y su práctica pedagógica, así el futuro profesor de Matemática se constituye en "sujeto de conocimiento", es decir, se constituye en un individuo que constantemente está construyendo, produciendo y resignificando conocimientos a partir y para su propia práctica profesional.

Referencias bibliográficas

Arnaus, R. (1999). La formación del profesorado: un encuentro comprometido con la complejidad educativa. In: ANGULO R., J.F. & otros (edit.). *Desarrollo profesional del docente: política, investigación y práctica.* Madrid: Akal.

Carr, W. & Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza: la investigación-acción en la formación del profesorado.* Barcelona, Martínez Roca.

Clandinin, J. & Connelly, M. (1990). "Stories of Experience and Narrative Inquiry". *Educational Researcher.* Vol. 19, No. 5, June-July, pp.2-14.

Fiorentini, D., Nacarato, A. M. & Pinto, R.A. (1999). Saberes da experiência docente em Matemática e educação continuada. *Quadrante: Revista Teórica e de Investigação*. Lisboa: APM. Vol. 8, números 1-2, pp.33-60.

Freire, P. (1997). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra.

Goldsmith, L. & Schifter, D. (1997). "Understanding Teachers in Transition: Characteristics of a Model for the Development of Mathematics Teaching. In: Fennema, E. & Nelson, B. (Ed.). *Mathematics Teachers in Transition.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publisher.

Gunstone, R. & Northfield, J. (1994). "Metacognition and Teaching to Learn". *International Journal of Science Education.* Vol.16 No. 5. pp. 523-536, September-October.

Kopnin, P.V.(1978). *A Diáletica como Lógica e Teoría do Conhecimento.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Morin, E. (1982). *Ciência com consciência.* Mem Martins: Publicações Europa-América.

Morin, E. (1999). *Complexidade e transdisciplinaridade: reforma da universidade e do ensino fundamental.* Tradução de Edgard de Assis Carvalho. Natal: EDUFRN.

Novak, J. & Gowin, B. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

Rodríguez, J. M. (1995). *Formación de profesores y prácticas de enseñanza: un estudio de caso.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Santos, V.M.P. (1997). *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: métodos alternativos.* Rio de Janeiro: UFRJ.

Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Ediciones Paidós.

Zeichner , K. & Liston, D. (1999). Enseñar a reflexionar a los futuros docentes. In: Angulo R., J.F. & otros (edit.). *Desarrollo profesional del docente: política, investigación y práctica*. Madrid: Akal.

Estrategias para la actualización docente de los profesores de la materia de Cálculo en el Nivel Superior de Educación

Luz María Minguer Allec
Instituto Tecnológico de Oaxaca. México
luzma16@hotmail.com

Resumen
El presente estudio trata la problemática de la Formación de Profesionales de la enseñanza de las matemáticas en el nivel superior de educación. Los profesores de matemáticas del nivel superior poseen en general una Cultura matemática construida y definida por el entorno familiar y sociocultural así como por sus vivencias escolares enmarcadas en las concepciones de la didáctica tradicional, que les impide identificar de forma clara la problemática de la enseñanza de las matemáticas con todas sus implicaciones y consecuentemente llegar a plantear acciones congruentes en su práctica docente.
Este estudio busca establecer en un primer tiempo, lo que es la Cultura Matemática de los Profesores del Instituto Tecnológico de Oaxaca y en un segundo momento, proporcionar al profesor de cálculo del nivel superior de educación, elementos para ampliar su Cultura matemática, de tal manera que ésta le permita fundamentar sus acciones en el proceso de comunicación de los conocimientos matemáticos, desde la perspectiva de la Matemática Educativa. La investigación se encuentra en curso y aún no cuenta con resultados finales.

Antecedentes

El Instituto Tecnológico de Oaxaca (ITO), perteneciente al Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos, tiene como principal vocación formar profesionistas técnicos que contribuyan al desarrollo tecnológico del País y ofrece las carreras de ingenierías: Industrial, Eléctrica, Electrónica, Química, Civil y Mecánica, así como las licenciaturas en administración e informática. En este contexto, la enseñanza de las matemáticas adquiere particular importancia ya que ésta será el instrumento que permitirá a los alumnos llegar a construir modelos matemáticos de su especialidad y acceder a la comprensión de otras materias que conforman sus planes de estudio.

En esta Institución como en la mayoría de las escuelas de educación superior y de otros niveles de educación, enfrentamos la problemática de la enseñanza de las matemáticas que se traduce en altos índices de deserción y de reprobación en materias en las que el lenguaje matemático es un requisito. En la búsqueda de soluciones a esta situación se han realizado cursos propedéuticos que cubran los contenidos que son requeridos para abordar nuevos conocimientos; se han propuesto modificaciones en los programas de estudio para depurarlos y de esta forma obtener el máximo provecho de los contenidos abordados; y se ofrecen de manera continua cursos de actualización profesional y docente a los profesores; sin embargo a pesar de los esfuerzos realizados no se han logrado abatir estos índices.

El Haber tenido un primer encuentro con la propuesta que hace la Matemática Educativa a través de un diplomado titulado “Introducción a la matemática educativa” ofrecido a los catedráticos del nivel superior de educación del estado de Oaxaca, me permitió vislumbrar una opción diferente para intentar dar solución a la problemática de la enseñanza de las matemáticas, desde una perspectiva congruente que engloba todos los aspectos que en ella intervienen. Esta nueva disciplina se concibe como: “La Ciencia que estudia para un campo particular (la matemática) los fenómenos de su enseñanza, las condiciones de la transmisión de la cultura propia de una institución (la científica) y las condiciones de adquisición de conocimientos del que aprende" (Cantoral, 1990).

Abordar la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de la Matemática Educativa, impone mirar de forma crítica y diferente a los actores que intervienen en este proceso, las instituciones, los saberes, el alumno, el maestro, los métodos. Una Práctica docente enmarcada en este contexto puede ofrecer fundamentos teórico-metodológicos que permitan al profesor realizar su actividad profesional de una manera congruente.

El objetivo fundamental de este estudio es, proporcionar al profesor de cálculo del nivel superior de educación, elementos para ampliar su Cultura matemática, de tal manera que ésta le permita fundamentar sus acciones en el proceso de comunicación de los conocimientos matemáticos, desde la perspectiva de la Matemática Educativa.

Me interesa que los maestros adquieran un bagaje de conocimientos que comprenda: contenidos matemáticos, estrategias didácticas y metodológicas, y temas diversos relacionados con la matemática educativa. Con el propósito de ampliar la cultura matemática con la que fundamentan su quehacer docente.

Definición del problema

La educación familiar, el medio social en el que nos desenvolvemos, la cultura propia de nuestro entorno, así como nuestras vivencias como alumnos en las materias de matemáticas es decir, nuestro pasado escolar, definen la labor docente que desempeñamos en general todos los profesores y van conformando una Cultura matemática que corresponderá a la historia de vidas de cada individuo.

En esa "Cultura matemática", está implícita la visión particular del mundo y su relación con La Matemática, que un individuo posee. Cuando decimos La Matemática nos referimos al panorama extenso que contempla todos los ámbitos en los que podemos encontrarla, desde un laboratorio científico, pasando por las matemáticas escolares, hasta las matemáticas utilitarias y cotidianas de la calle, es decir, lo que ese individuo entiende por La Matemática (¿ésta se crea o se descubre?, ¿los conceptos matemáticos son fijos? o ¿sufren cambios?, ¿que lugar ocupan las matemáticas que se aprenden en la calle? ¿se reconoce y se valora socialmente la labor de "hacer matemáticas" que toda persona efectúa cuando por necesidad obtiene un porcentaje o aplica una regla de tres simple en el curso de su vida cotidiana? Etc.); la manera como él concibe la enseñanza de las matemáticas, las respuestas que tiene a las siguientes preguntas: ¿la enseñanza de las matemáticas sólo se practica en el aula? ¿ se circunscribe únicamente al ámbito escolar?, en el aula, ¿es él el único responsable de conocer los temas matemáticos para poder transmitirlo a sus alumnos?, en el proceso de transmisión del conocimiento, ¿es él el único que "sabe" matemáticas? ¿la enseñanza de las matemáticas trata con conceptos y procedimientos que deben de memorizarse?, ¿cuál es el lugar que ocupa el trabajo en equipo y la discusión grupal en una clase de matemáticas?, ¿de que manera concibe él su profesión de enseñante de matemáticas con respecto a los demás profesores y a la sociedad misma?

El conocimiento, y el desconocimiento de las respuestas a estas y otras preguntas más, conforman, una parte de la Cultura matemática, misma que puede estar constituida con referentes que pertenecen a la didáctica tradicional o bien, definida en el marco conceptual de la matemática educativa .
La administración de la educación en México, como en la mayor parte de los países del mundo se ha desarrollado con una percepción de la enseñanza de las matemáticas fundamentada en los principios de la didáctica tradicional, de tal modo que esta corriente ha predominado en las Instituciones escolares y en la sociedad. En el Instituto Tecnológico de Oaxaca la Cultura matemática que subyace en las formas y actitudes de la administración, de los maestros y de los estudiantes es limitada e impide a las partes involucradas una visión crítica acerca de su propio desempeño. Por lo que identificamos el siguiente problema:
Los profesores de matemáticas del nivel superior poseen en general, una cultura matemática limitada definida en el marco de la didáctica tradicional, que no les permite identificar de forma clara la problemática de la enseñanza de las matemáticas con todas sus implicaciones y consecuentemente les impide llegar a plantear acciones congruentes en su práctica docente.

Justificación

Hasta ahora, todos los esfuerzos realizados para ofrecer una actualización docente y profesional a los profesores de matemáticas del nivel superior, se han visto enmarcados en la propuesta de la didáctica tradicional (enfoque clásico de la didáctica), pero ésta se ha revelado insuficiente para dar respuesta a numerosos fenómenos implicados directa o indirectamente en la enseñanza de las matemáticas.
Por esta razón, la didáctica tradicional ha tenido que evolucionar incluyendo en su problemática nuevos objetos de estudio que anteriormente habían sido considerados únicamente como herramientas para describir otros objetos de investigación, a esta nueva propuesta en México se le conoce como la Matemática Educativa.
La matemática educativa es el resultado de la evolución en los contenidos y en la forma, de la problemática que aborda la didáctica tradicional.

En el Instituto Tecnológico de Oaxaca, todos los esfuerzos realizados para la formación docente y profesional de nuestros catedráticos han sido espontáneos sin una planeación que responda de manera global a la problemática ya identificada entre los profesores y que habla de la necesidad de actualización e información en los aspectos de: contenidos matemáticos, estrategias didácticas y metodológicas, y fundamentos teóricos de la matemática. Por esta razón la implementación de estrategias para la actualización y formación docente tendientes a conformar una Cultura Matemática en nuestros profesores es altamente prioritaria.

Tomando en cuenta la importancia que reviste el hecho de que los profesores se actualicen y amplíen su Cultura Matemática para poder abordar de manera crítica su labor docente, consideramos que la disciplina de la Matemática Educativa constituye el referente teórico idóneo para enmarcar los programas de actualización docente de los profesores de matemáticas del nivel superior.

La realización de este trabajo puede aportar a la actualización de profesores del nivel superior de educación, una alternativa consistente en un paquete didáctico que comprenda los materiales para transmitir: las estrategias didácticas y metodológicas, los conocimientos matemáticos y los elementos teóricos de la Matemática educativa, para ampliar su Cultura matemática.

OBJETIVO :

Proporcionar al profesor de cálculo del nivel superior de educación, elementos teórico-metodológicos para ampliar su Cultura matemática, de tal manera que ésta le permita fundamentar sus acciones en el proceso de comunicación de los conocimientos matemáticos, desde la perspectiva de la matemática educativa.

HIPÓTESIS:

Los profesores cuya Cultura Matemática está conformada desde la perspectiva de la Matemática Educativa estarán en posibilidades de cuestionar su práctica docente actual.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN:

¿ Cuáles son las implicaciones que tiene el hecho de ampliar la Cultura matemática de los profesores en el marco de la Matemática Educativa?

MÉTODO:

El método planteado para este estudio, contempla los siguiente aspectos:

- ➢ Realización de un diagnóstico para conocer la Cultura matemática de los profesores en el nivel superior de educación, desde tres aspectos: contenidos matemáticos, estrategias didácticas y metodológicas utilizadas en el aula y concepciones relacionadas con: la matemática, la enseñanza de las matemáticas y el significado de aprender matemáticas
- Diseño de los instrumentos de medición para el diagnóstico
- Selección de la muestra.
- Aplicación de la encuesta
- Análisis de resultados.
- ➢ Diseño de un paquete didáctico, que comprenderá la definición y justificación de los contenidos del marco referencial que será propuesto a los catedráticos, así como de la selección apropiada de las situaciones didácticas para el aprendizaje de conceptos del cálculo.
- Selección de la muestra
- Puesta en escena: En el marco de un curso-taller (cuya duración está por definirse) en el que se creará un ***ambiente de aprendizaje*** propicio con: trabajo en equipos; discusiones grupales; interacción con situaciones adidácticas; intervenciones del maestro que se transforma en un ***monitor*** que guía el trabajo de los estudiantes e interviene solamente para desbloquear sin dar soluciones; rupturas constantes del Contrato didáctico.
- Análisis de resultados.

Esquema de fundamentos

Deseo estructurar el marco teórico de este trabajo, partiendo de la problemática de la formación docente que en la actualidad se encuentra definida en el marco de una época novedosa que impone nuevas funciones a la educación en general y a las instituciones escolares en particular, para enfrentar retos, problemas y situaciones que se van definiendo y conformando día con día, debido a la innovación tecnológica y al auge de los medios de comunicación en la función educativa; por lo mismo se requiere que la formación docente elabore estrategias que preparen al maestro para jugar un nuevo papel en el escenario de la educación. Abordaré aspectos como el significado de la Formación Docente de profesores de matemáticas en educación Superior, haciendo los cuestionamientos siguientes, ¿cuáles son sus objetivos?, ¿En que marco conceptual debe desarrollarse esa formación? ¿qué papel juega la utilización de modelos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en las aulas? ¿la formación docente y profesional de los profesores de cálculo debe estar vinculada a la práctica en clase de los principios teóricos y a la investigación con el propósito de mejorar su desempeño a partir de los nuevos conocimientos adquiridos y de la reflexión y observación constante sobre sí mismo? ¿qué significa actualización profesional?
Enseguida deseo abordar las teorías del aprendizaje, concretamente las teorías de la reestructuración ya que son éstas las que constituyen el referente teórico de las diferentes metodologías surgidas en Matemática Educativa, específicamente el diseño de las situaciones de instrucción en las que se busca la construcción de conocimientos científicos o matemáticos o de manera más general la comprensión de nuevos significados o destrezas.
Como parte central de este marco presentaré un planteamiento general de lo que es la disciplina de la Matemática Educativa, su desarrollo y conformación. Para continuar abordando uno a uno los aspectos que están involucrados en este estudio, como son: La teoría de las situaciones didácticas, los obstáculos epistemológicos, la transposición didáctica, la teoría de los campos conceptuales, y finalmente con estos elementos, definir a la Ingeniería Didáctica, y las estrategias de resolución de problemas.

CONTENIDO:

- Formación docente
- Teorías del aprendizaje
- La Matemática educativa (desarrollo y conformación)
  - Transposición didáctica
  - Teoría de los campos conceptuales
  - Teoría de las situaciones didácticas
  - Obstáculos epistemológicos
  - Ingeniería didáctica
  - Estrategias de resolución de problemas.

Conclusiones

El presente trabajo se encuentra en desarrollo y aún no se cuenta con resultados finales que se puedan compartir con la comunidad de Matemática Educativa. Sin embargo los resultados que se esperan obtener son: Comprobar que la ampliación de la Cultura Matemática en el marco conceptual de la Matemática Educativa es un elemento importante en la formación docente de los profesores de cálculo del Instituto Tecnológico de Oaxaca, a través de un material didáctico, teórico-metodológico que por su congruencia científica propicia la construcción de conocimientos matemáticos y aporta información teórica que fundamenta y permite conocer la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Brousseau,G. (1986). Fondements et Méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*..7 (2), 33-115

Brousseau,G. (1986). Le contrat didactique: le milieu. *Recherche en en didactique des mathématiques*, 9 (3), 309-336.

Cantoral R. (1990). Matemática educativa. (Ed.), *Serie: Antologías* (No.1). Área de educación Superior del DME-CINVESTAV-IPN. México.

Chevallard, I. (1997*). Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Edit. ICE-Horsori. Universidad de Barcelona.

Duady, R.(1995) *La Ingeniería didáctica en educación matemática: La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento.* México D. F: Edit. Ibero América.

Douady, R. (1986) Jeu de Cadre et Dialectique Outil-objet. *Recherche en en didactique des mathématiques*, 7 (2), 5-32.

Perrin-Glorian, M. (1994). *Vingt ans de didáctique des matemáriques en France. Hommage a Guy Brousseau et G. Vergnaud.* La penseé sauvage. Grenoble éditions.

La educación matemática en administración. Una aproximación al problema de sus estudios universitarios

Nelly Elizabeth González de Hernández
Universidad Central de Venezuela
gonzalne@yahoo.com

Resumen
¿Cuánta Matemática debemos enseñar para formar un profesional? Esta pregunta sale a relucir con frecuencia. El rigor del aprendizaje, el contenido de los programas, las aplicaciones o ejemplos que se deben utilizar en cada caso, son motivo de discusión entre los actores involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje en Matemática. La Escuela de Administración de la Universidad Central de Venezuela, UCV, discute desde hace 2 años un proceso de reestructuración, el cual pretende modificar la estructura curricular de las materias para graduar a un profesional dirigido al trabajo en una Gerencia moderna.

Este trabajo tiene como objetivo contribuir con esta discusión y al mismo tiempo advertir que lejos de simplificar la formación matemática del Administrador, debemos garantizar más allá de una formación técnica básica un elemento de formación de actitudes hacia el trabajo y el razonamiento científico.

Introducción

Cuando las instituciones educativas universitarias revisan el perfil del profesional que están formando, con la finalidad de atender las nuevas necesidades del mercado laboral, se debería experimentar un proceso controversial y por ende enriquecedor, pues la consulta, exploración y discusión involucraría a numerosos sectores e interesados.

La carrera de Administración en la Universidad Central de Venezuela (UCV), que se someterá a ese proceso de cambio y actualización, deberá, a nuestro juicio, corregir algunas características propias de esta disciplina en nuestro país: generalización de los conocimientos y poca profundidad en las herramientas básicas. Si bien es cierto que el papel fundamental de este profesional será el de actuar como un director de orquesta, sus bases deben ser sólidas y seguras para permitirle planificar, dirigir, controlar y corregir.

En el caso específico de la enseñanza de la Matemática en nuestra Escuela, se simplifican la teoría y los ejercicios tal y como lo recomiendan los Programas, evitando la demostración de teoremas y cualquier planteamiento que se pueda interpretar como exigente. En consecuencia nuestro egresado, si opta por la posibilidad de dar clases, escogerá otras materias y muy pocas veces Matemática porque se reconoce con limitaciones en su conocimiento. Esta situación provoca un círculo vicioso, los profesores de Matemática son ajenos a la carrera de Administración porque los ganadores de los concursos de oposición suelen ser matemáticos, ingenieros, estadísticos, entre otros, pero una vez que comienzan a dar clases se encuentran con que deben adaptarse a las simplificaciones que los materiales impresos y programas obligan. Paradójicamente se percibe con la presencia del profesor *importado* que la materia se dicta con un nivel de exigencia propio de otras disciplinas. Por otra parte los estudiantes ofrecen resistencia al estudio de las matemáticas[10] afirmando que no aceptan una formación *regularmente severa* porque supuestamente no la van a utilizar en la carrera y serán otros los profesionales que lidiarán con esas fórmulas y gráficos. Además, un obstáculo adicional lo constituye el material impreso para estudiar la materia, donde encontramos: Matemática para Economía, Matemática para

[10] Encuesta aplicada durante el segundo semestre 1998 y primer y segundo semestre 1999. Proyecto Análisis, Revisión y Posibles Mejoras al Proceso de Asesoramiento Académico en la EAC FACES UCV. Prof. Nelly de Hernández

Administración, Matemática para Ciencias Sociales, como si se tratase de diferentes materias. ¿La diferencia está en los ejemplos dirigidos a cada especialidad? No es cierto, la verdadera razón es que los textos dirigidos a estas disciplinas, en su mayoría, simplifican su contenido teórico a niveles, en algunos casos, extremos y convierten el material de estudio en una receta que el estudiante repite sin mayor convicción y con menos entendimiento.
Ésta es la actual situación de la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela, donde se está discutiendo desde hace 2 años, aproximadamente, la necesidad de desarrollar un proceso de reestructuración que la lleve a adecuar los contenidos programáticos de las materias que se dictan o a eliminar materias y sustituirlas por otras que contribuyan a formar un gerente para el nuevo milenio. Dicho de esa forma pareciera que la transformación nos llevará a interesantes ofertas y a unos resultados realmente favorables, pero en una primera propuesta los responsables de estas discusiones preliminares dibujan la posibilidad de dictar dos cursos de matemática en lugar de tres, como ocurre actualmente, con la inevitable consecuencia de eliminar algunos objetivos.
El propósito de esta investigación es establecer las necesidades de conocimiento matemático que los profesores de las distintas áreas de la Escuela de Administración requieren para desarrollar sus respectivos trabajos en el aula y comparar si sus opiniones coinciden con la información que se desprende del análisis de los distintos Programas. El contraste de estas dos opiniones nos permitirá orientar la discusión que nos llevará a colaborar para la reestructuración exitosa del pensum.

Método

La investigación se realizó en dos etapas: una primera donde se establecieron las necesidades implícitas en los programas de las distintas materias que conforman la carrera de Administración y otra, posterior, donde indagamos sobre las expectativas de los conocimientos matemáticos que los profesores esperan que los estudiantes conozcan para poder desarrollar el trabajo en el aula.

Etapa I. Necesidades de conocimiento matemático

Para alcanzar los objetivos de la Etapa I se cumplió con los pasos siguientes:

- Revisión de las necesidades de herramientas matemáticas que el estudiante de ciencias administrativas debe poseer. Esta revisión consistió en analizar los programas de las distintas materias se debe cursar para obtener la licenciatura. Cabe decir que aunque se modifiquen, se altere el orden en que se dictan, se amplíe o reduzca el número objetivos, siguen manteniendo siempre una estructura básica de los conocimientos que debe poseer un Administrador
- Agrupación de las materias en áreas de conocimiento para simplificar el análisis de resultados
- Consulta de la opinión de expertos para confirmar nuestra apreciación

Etapa II. Opinión del profesorado

Para alcanzar los objetivos de esta etapa se realizó una encuesta de opinión bajo los criterios siguientes:

<u>Metodología:</u>

- Entrevistas de profundidad
- El instrumento utilizado fue un cuestionario con preguntas cerradas y abiertas.

El número de preguntas fue de 5. El tiempo estimado para realizar la entrevista fue de 15 minutos

- El tipo de muestreo fue exhaustivo (censo). La población bajo estudio fue de 130 profesores
- Período de aplicación: segundo semestre lectivo del 2000

Variables de clasificación:

- Departamento donde se desempeña el docente

Resultados

En estos momentos podemos imaginar la formación del estudiante de Administración como una estructura en bloques, representados por cada uno de los Departamentos en los que se encuentra organizada la Escuela. Cada departamento, de acuerdo con la justificación de sus materias, tiene la siguiente función básica[11]:

Ciencias Administrativas: formará al estudiante para utilizar técnicas y herramientas que posibiliten la conducción y operación de las organizaciones; optimizado los recursos, dirigiendo eficientemente al personal, conociendo la estructura y funcionamiento del estado y de la administración pública venezolana así como del funcionamiento de las empresas privadas.

Ciencias Económicas y Sociales: cumple con la responsabilidad de formar al estudiante en aspectos básicos de su área de interés. A través de las cátedras de Metodología y Técnicas de Investigación deja sentada las bases para el trabajo investigativo durante la vida estudiantil, con la aplicación inmediata en el proceso de aprendizaje y posteriormente en la vida profesional cuando organice su trabajo.

Gracias a las cátedras de Economía, el Departamento informará sobre: los elementos básicos de teoría microeconómica y macroeconómica, la economía venezolana y sus relaciones con el exterior. En las cátedras de Historia se explicará la transformación que ha sufrido la sociedad a través del tiempo y la cátedra de Sociología enseña el estudio del trabajo organizado a partir del carácter social de las estructuras empresariales.

Las asignaturas de Geografía vinculan los conocimientos económicos de producción del país con la localización física de esas unidades productivas, así como de las características agrícolas, pecuarias, hidráulicas, forestales, industriales, mineras y energéticas de Venezuela.

Ciencias Jurídicas: define e instruye sobre los conceptos legales y éticos que tiene en la actualidad la sociedad con respecto a la propiedad y otros derechos, informa sobre la realidad empresarial del país y su regulación.

Contabilidad: Durante los primeros 4 semestres de la carrera ofrece el estudio de la contabilidad financiera con la finalidad de suministrar las herramientas para que el administrador realice la custodia y el control de los bienes de cualquier sistema económico.

Estadística y Matemática: dado que el conocimiento matemático está estrechamente vinculado con el método científico que siguen las disciplinas del quehacer humano y que en nuestro mundo real todos los procesos, físicos, químicos, económicos, sociales, entre otros, pueden ser representados mediante modelos matemáticos, se enseñan al futuro profesional los conocimientos sobre teoría de funciones, cálculo diferencial e integral y álgebra de matrices,

---

[11] Esta información se encuentra detallada en el Plan de Estudio del Ciclo Básico y de la Especialización en Administración EAC FACES UCV. Publicaciones de la Coordinación Administrativa año 2000

enfatizando sus aplicaciones específicas a situaciones de índole económica. Por otra parte, la Estadística es una de las ramas de mayor incidencia en estos tiempos, pues interviene en forma acentuada en las investigaciones y/o métodos científicos a través de la experimentación y la observación.
Ahora bien, estas funciones de los distintos bloques, descritos a muy grandes rasgos, se mantendrán una vez realizada la reestructuración[12]. Se mantiene el criterio de dar un fundamento socioeconómico al futuro administrador, respaldado por el estudio de su entorno desde una perspectiva histórica y geográfica. Se mantiene la necesidad del conocimiento contable y legal. Por supuesto el tema de las Ciencias Administrativas se profundiza y expande y finalmente se mantiene la propuesta de dar formación en Matemática y Estadística, sólo que en la primera se sacrifica el número de horas de clase y en consecuencia se debe mutilar el contenido de los actuales programas. ¿Cuáles contenidos serán eliminados? No se especifican, se deja a los *expertos* la decisión milagrosa de cumplir con esta etapa importante de la formación, con un menor contendido pero dotando al alumno de los conocimientos que necesitará a lo largo de sus estudios.
Se agruparon las necesidades de conocimiento de Matemática de cada uno de los bloques de información que actualmente se imparten y que se mantendrán en un futuro y quedaron establecidas de manera resumida como lo presentamos a continuación:

El bloque Ciencias Administrativas registra la siguiente necesidad de herramientas matemáticas de acuerdo con los contenidos programáticos de las distintas materias que en él se dictan[13]:

- Representar la realidad con modelos matemáticos para simular situaciones de la empresa y estudiar restricciones
- Calcular puntos de equilibrio
- Realizar proyecciones
- Calcular condiciones óptimas

El Bloque de Ciencias Económicas y Sociales requiere definir e interpretar:

- Indicadores, Variables
- Funciones y Gráficos
- Valores marginales y elasticidad de funciones

El Bloque de materias de Contabilidad exige la siguiente formación:

- Identificar ecuaciones
- Analizar resultados de las diversas transacciones que ocurren en empresas comerciales
- Realizar cálculos financieros

El Bloque de Ciencias Jurídicas requiere de información matemática para describir los cálculos en forma de procesos y ecuaciones (algoritmos y fórmulas) para determinar:

- Salarios, recargos, remuneraciones del descanso, bonos, prestaciones, interés, régimen transitorio, indemnización por despidos o retiros, cuotas sindicales
- Ingreso público, ingresos tributarios, impuestos, contribuciones especiales

Una vez que establecemos las necesidades de cada bloque, verificamos si los contenidos

[12] Anteproyecto de reestructuración de la Escuela de Administración. Prof. Oscar Bastidas. Julio 2000
[13] Otras herramientas pueden ser requeridas pero nos limitamos a citar aquellos textos de los programas donde se hace una clara y directa referencia de situaciones de estudio que exigen un proceso de cálculo e interpretación matemática

actuales permiten al estudiante responder a ese conjunto de exigencias y consideramos que teóricamente están dadas las condiciones pues Matemática I ofrece el piso de la formación que requiere el estudiante en Matemática II ya que le instruye en Teoría de Conjuntos, Relaciones y Funciones. En un segundo semestre el estudiante recibe la instrucción para desempeñarse en el cálculo diferencial y en Matemática III trabaja con Funciones de Varias Variables, Matrices y Cálculo Integral.
Ahora bien, una situación es que teóricamente las necesidades y su satisfacción estén plasmadas en los programas académicos y otra que los docentes reconozcan que las condiciones están dadas para utilizar en sus respectivas materias este instrumental. Para verificar esta situación abordamos la segunda etapa del estudio encontrando los resultados siguientes:
Sólo una tercera parte de los profesores respondieron la encuesta. La distribución de los entrevistados por Departamento fue la siguiente: 25% pertenecen al Departamento de Ciencias Administrativas, 25% al Departamento de Ciencias Económicas, 38% al Departamento de Contabilidad y 12% al Departamento de Ciencias Jurídicas.
Estos entrevistados señalan:
Los docentes del Departamento de Ciencias Jurídicas consideran que sus materias son estrictamente teóricas y que no necesitan de ningún apoyo matemático.
Los entrevistados del Departamento de Ciencias Económicas en un 100% hablan de la necesidad del concepto de función y de derivada; llama la atención que 2 profesores de la materia Teoría Económica, defensores de la afirmación anterior, de cualquier manera no pueden utilizar cálculo diferencial en sus exposiciones pues esta materia se encuentra en el primer semestre, momento en el cual todavía el alumno no sabe derivar.
Los docentes del Departamento de Ciencias Administrativas dividen sus opiniones, aunque en mayoría reconocen la importancia de la materia en el programa de formación, un 60% aproximadamente nos exige una estricta enseñanza de la construcción de curvas y su interpretación mientras que el 40% indica indispensables el análisis de datos para los trabajos de investigación que parecen ser una estrategia frecuente en este departamento.
Finalmente los profesores de Contabilidad nos hablan de la necesidad de estimular la destreza en resolver operaciones aritméticas pero sin citar con precisión objetivos contenidos en la Matemática que dictamos.

Discusión

La Matemática surge por una necesidad de la vida cotidiana y se ha convertido en un inmenso sistema de variadas y extensas disciplinas. Como las demás ciencias, refleja las leyes del mundo que nos rodea y sirve de potente instrumento para el conocimiento y dominio de la naturaleza. Ciertos rasgos característicos de la matemática son su abstracción, su precisión, su rigor lógico, el carácter irrefutable de sus conclusiones y finalmente, el campo excepcionalmente amplio de sus aplicaciones.
Por otra parte el desempeño de una gerencia exige la recolección e interpretación de datos, la construcción y experimentación con modelos matemáticos, predicción sobre operaciones futuras y la presentación de recomendaciones con justificaciones sobre su factibilidad. La toma de decisiones es una responsabilidad gerencial clave. El proceso se inicia cuando un gerente observa un problema. Quizá inconscientemente el gerente primero define el problema y después formula el objetivo, reconoce las restricciones y evalúa las alternativas. Después selecciona el curso de acción aparentemente *mejor* (aquel que nos llevará a la solución óptima). Este proceso de análisis es formal

o informal y toma dos formas básicas: cualitativo y cuantitativo. Las habilidades en análisis cualitativo son inherentes en el gerente y generalmente aumentan con la experiencia. Las habilidades en análisis cuantitativo se pueden adquirir por el estudio de las *herramientas* matemáticas, al usarlas puede maximizar su efectividad en la toma de decisiones, puede comparar y combinar la información cualitativa y cuantitativa y así tomar las mejores decisiones posibles.
Pareciera entonces que Matemática y Administración son materias inseparables y si aún no estuviésemos convencidos bastaría con pasearnos por las siguientes ideas:

- El presupuesto del próximo año es un modelo de cuánto se puede gastar
- La descripción de una meta es un modelo de lo que se debe lograr en un período
- El estado de ingresos es un modelo del funcionamiento de una compañía

Las herramientas que nos proporciona la matemática nos permiten llegar a soluciones de problemas más complejos que no pudiesen resolverse con otros enfoques. Con un análisis de sensibilidad podemos alterar los datos de entrada y observar lo que ocurre a los resultados, podemos determinar cuáles son los factores más importantes sobre un período con condiciones variables. Los conceptos de probabilidad para enfrentar ambientes inciertos, los pronósticos, la toma de decisión, los modelos de inventario, la evaluación de alternativas, la combinación y asignación óptima de recursos, la simulación de situaciones, la teoría de colas y la teoría de redes son algunas de las técnicas que un gerente debe conocer y aplicar, y para ello es indispensable el conocimiento de algunas *herramientas* matemáticas.
Si la información y formación sobre Matemática no se convierte en un objetivo de extrema importancia en la carrera de Administración estaremos preparando profesionales con serias limitaciones para el ejercicio eficiente de su profesión y sin mayores opciones para continuar su proceso de desarrollo intelectual con estudios de postgrado. Esta preocupación debe alimentarse principalmente en el grupo de docentes que hoy son responsables de dirigir los procesos de actualización en la Universidad para que guíen hacia una sólida instrucción en todas las áreas, con una clara concepción de las ventajas de sentar bases sólidas en el conocimiento matemático: la llave para abrir numerosas puertas.

Referencias bibliográficas

Aleksandrov, A. Kolmogorov A. y otros. (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Editorial.
Bockelmann, F. (1995). *Formación y Funciones Sociales de la Opinión Pública*. Ediciones Gili, S.A.
Chevallard, I. (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Universidad de Barcelona: Editorial ICE- Horsori.
EAC FACES UCV. (2000). *Programas del Ciclo Básico y Profesional*. Publicaciones EAC.
Levin, R. Kirkpatrick, Ch. (1985). *Enfoques cuantitativos a la Administración*. México: Compañía Editorial S.A.
Resnick, L. (1990). *La enseñanza de la Matemática y su fundamento psicológico*. Barcelona: Editorial Paidós.

Métodos y técnicas participativas, con aplicaciones matemáticas y un interesante juego algebraico

Graciela Clyde Abraham *, Berta Josefa Chahar**, Hilda María Motok*, Mabel C. Rodríguez Anido*, Marta del Valle Zamora**
* Fac. Regional Tucuman. Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
** Facultad de Bioquímica y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
marzam@infovia.com.ar mranido@hotmail.com

Resumen
El objetivo de este trabajo es ofrecer una alternativa didáctica tendiente a incorporar métodos más dinámicos y eficientes de enseñanza y aprendizaje, como también divulgar y mostrar la factibilidad de la implementación de los Métodos y Técnicas Participativas en la Matemática de Nivel Superior. Propuestas de este tipo aplicadas en distintas asignaturas, en este caso Álgebra y Geometría Analítica de 1er año, enriquecen el proceso de enseñanza y aprendizaje: facilitando el trabajo grupal, la asimilación de conocimientos y la solución creativa de problemas. Esta metodología se aplicó en un taller, que se desarrolló en dos momentos: el primero teórico práctico y el segundo sólo práctico, ambos respaldados por un marco teórico. Los objetivos propuestos fueron logrados La evaluación del taller arroja como resultados positivos un alto grado de aceptación de los métodos y técnicas participativas, en particular la técnica de la rejilla y el laberinto de acción.

Marco cognoscitivo básico

La Escuela Nueva nace a fines del siglo pasado y con ella comienza a revertirse el esquema tradicional del proceso docente. Aparecen nuevos métodos que apelan al aprendizaje grupal y ubican paulatinamente al alumno en un rol protagónico y racional . En estas últimas décadas y en todos los niveles educativos, cobraron importancia los **Métodos y Técnicas Participativas,** que tienen como base el trabajo conjunto y que presentan variadas y novedosas formas que enriquecen el proceso de enseñanza y aprendizaje. Estos métodos son presentados mediante una explicación de los conceptos teóricos, mencionando algunas aplicaciones ya realizadas en Matemática. En esta síntesis teórica, se aplica la **Conversación heurística,** ventajas, desventajas y posibilidades de aplicación de éstas técnicas.

Dado que los métodos y técnicas participativas se basan en el trabajo grupal se enuncian las siguientes **REGLAS BÁSICAS PARA LA DISCUSIÓN GRUPAL:**

1- Cada participante es responsable del desarrollo exitoso de la reunión.
2- Evite conversaciones particulares que perturben o retarden la reunión.
3- No tema expresar sus ideas, preguntas u opiniones.
4- No sea crítico ni sarcástico, evite conflictos personales y mantenga una actitud amistosa y de apoyo.
5- Escuche con atención y respete el punto de vista de los demás.
6- Exprese con claridad y precisión sus ideas y no subestime las de los demás.
7- No sature la reunión con intervenciones reiteradas que no aportan ideas nuevas.
8- No grite ni gesticule, ni trate de imponerse a los demás; la fuerza de su opinión está en la calidad de su contenido.
9- Pida la palabra, no interrumpa al que está hablando.
10- No abandone anticipadamente la reunión.

La aplicación a la enseñanza de los Métodos y Técnicas Participativas no garantizan, por sí mismas, el éxito del proceso docente, sino que es necesario efectuar una correcta selección y la aplicación frecuente de los mismos.

En el cuadro, se muestra la contribución de los distintos **Métodos y Técnicas Participativas** y la incidencia de cada grupo en el proceso de enseñanza y aprendizaje:

Clasificación de métodos y técnicas participativas

FACILITAN EL TRABAJO EN GRUPO		Presentación Presentación por parejas Baile de presentación Los refranes Encuadre Abanico de roles Juego cara a cara Reformulación Presentación subjetiva Riesgo Escribir tres palabras.
PROPICIAN LA ASIMILACIÓN DE CONOCIMIENTOS	MÉTODOS DE DISCUSIÓN	Discusión plenaria Discusión en pequeños grupos Phillips 66 Discusión reiterada Discusión confrontación Mesa redonda Discusión panel
	MÉTODOS DE SITUACIONES	Casos (situación, conflicto, familiarización progresiva con el caso) Incidentes (sencillo, programado simple y complejo, laberinto de acción)
	MÉTODOS PROBLÉMICOS	Exposición problémica Conversación heurística Búsqueda parcial Método investigativo
	OTROS MÉTODOS	Juego de roles Simulación Técnica de la rejilla Concordar – discordar Palabras claves Aprendizaje en parejas
AYUDAN A LA SOLUCIÓN CREATIVA DE PROBLEMAS		Grupos Nominales Tormenta de cerebros o lluvia de ideas ó torbellino de ideas Sinestesia o sinéctica Anti-éxito
	TÉCNICAS de DE BONO	P. N. I. (positivo, negativo, interesante) C. T. F. (considere todos los factores) C. y S. (consecuencias y secuelas) P. b. (prioridades básicas) O.P.V. (otros puntos de vista)

❖ APLICACIÓNES PRÁCTICAS PARA LA 1ª SESIÓN

1º) ***Lluvia o torbellino de ideas***: Se usa esta técnica para detectar la predisposición de los participantes hacia estos nuevos métodos. Consta de cuatro etapas: preparación, calentamiento, generación de ideas y evaluación.

a) ***Preparación:*** se propone la pregunta: *"¿Porqué considera que puede resultar interesante el uso de Métodos y Técnicas Participativas en la enseñanza de la Matemática?"*.

b) ***Calentamiento*:** los participantes intercambian ideas.

c) ***Generación de ideas:*** se registran las que proponen los participantes en ronda.

d) ***Evaluación:*** se valoran las ideas producidas, por votación de los presentes, se seleccionan las ideas más valiosas y se eliminan las de poca relevancia; la lista resultante se pone a consideración del grupo para su aceptación o para posibles modificaciones.

2º) ***Discusión en Pequeños Grupos****:* Esta técnica posibilita un debate amplio del problema donde todos tienen la posibilidad de participar varias veces, siendo escuchados por el resto del grupo. Para concluir y evaluar, se realiza una **Sesión Plenaria,** en la cual cada grupo expone sus resultados y el docente resume lo actuado.

El objetivo es incentivar en los estudiantes el desarrollo de estrategias de solución y habilidades de pensamiento, para que comprendan el problema, identifiquen las incógnitas y transfieran situaciones de la vida real a sistemas de ecuaciones lineales. Los grupos analizan y resuelven el problema propuesto para esta técnica**:**

Se dan tres aleaciones de plata, cobre y oro con la siguiente composición:

	PLATA	COBRE	ORO
1º	5%	15º	80%
2º	10%	25%	65%
3º	15%	30%	55%

¿Cuántos gramos se han de tomar de cada una para obtener 20 gr. de una nueva aleación que contenga 12% de plata, 26% de cobre, 62% de oro?

Resolución.:Con la guía del profesor se pretende que los estudiantes desglosen el problema, discutan probables alternativas de solución para llegar a resolverlo de la siguiente manera:

1-Se identifican las incógnitas : Se llama x = gr. de la 1° aleación ; y = gr. de la 2° aleación; z = gr. de la 3° aleación. Se escribe la condición x + y + z =20

2- Se determina qué operaciones hay que realizar. En la nueva aleación debe haber:

12 x 20/100= 2,4 gr. de plata

26 x 20/100= 5,2 gr. de plata

62 x 20/100= 12,4 gr. de plata

En x gr. de la 1° aleación se encuentra 5 x/100 gr. de plata, 15 x/100 gr. de cobre y 80 x/100 gr. de oro. En y ir de la 2° aleación se encuentra 10 y/100 gr. de plata, 25 y/100 gr. de cobre y 65 x/100 gr. de oro. En z gr. de la 3° aleación se encuentra 15 z/100 gr. de plata, 30 z/100 gr. de cobre y 55 z/100 gr. de oro.

3- Se escribe el sistema

$$\begin{cases} 5x/100 + 10y/100 + 15z/100 = 2{,}4 \\ 15x/100 + 25y/100 + 30z/100 = 5{,}2 \\ 80x/100 + 65y/100 + 55z/100 = 12{,}4 \end{cases}$$

Que una vez transformado queda

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 48 \\ 3x + 5y + 6z = 104 \\ 16x + 13y + 11z = 248 \end{cases}$$

Resuelto por eliminación de Gauss conduce a las soluciones x = 4, y = 4, z = 12.

4- Se verifica que los resultados obtenidos son correctos y se interpreta la solución.
La nueva aleación tiene 4 gr. de la 1° aleación, 4 gr. de la 2° aleación y 12 gr. de la 3° aleación, de tal modo que se obtiene 4 + 4 + 12 = 20 gr. de la nueva aleación.
En la *Sesión Plenaria*, después de hacer la puesta en común de los resultados, los estudiantes manifiestan la aceptación de esta forma de trabajo.
3º) *Técnica de la rejilla*: Se utiliza esta técnica para que los estudiantes ejerciten el razonamiento en la teoría y en las aplicaciones prácticas; permite manejar una considerable cantidad de información en poco tiempo. Todas las propuestas prácticas deben tener el mismo grado de complejidad, a fin de tratar que los alumnos trabajen y asimilen a igual nivel.
Esta técnica consta de tres etapas: en la 1ª (estimada en 20 min.), se organizan los cinco equipos horizontalmente; cada equipo realiza un problema diferente; en la 2ª etapa (estimada en 30 min.), se forman los equipos verticalmente, de modo que cada uno realice los cinco ejercicios, y cada estudiante explicará al resto del grupo lo que hizo en la 1ª etapa. En la 3ª etapa (estimada en 10 min.), se selecciona aleatoriamente un equipo para exponer en el **Plenario**, efectuándose las correcciones que sean necesarias.
El siguiente cuadro matricial (rejilla), ilustra la formación de los equipos:

EQUIPOS	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
I	1 26	2	3	4	5
II	6	7 27	8	9	10
III	11	12	13 28	14	15
IV	16	17	18	19	20
V	21	22	23	24	25

❖ **2ª sesión del taller**

Comienza con un breve repaso de la teoría. A continuación se trabaja con el **Método de Situaciones:** Incidente Programado Complejo (Laberinto de acción).
Laberinto de acción: Esta técnica se aplica generalmente al finalizar un tema y el objetivo es afianzar los conocimientos en una forma entretenida y atractiva. Consiste en presentar una situación con varias alternativas de solución, donde la alternativa seleccionada conduzca obligatoriamente a otra situación, en la que se explica qué ocurrió al tomar esa decisión y presenta nuevas alternativas para decidir. El proceso sigue hasta llegar al fin del laberinto, que dará o no solución a la situación planteada.
En este trabajo se presenta una situación problemática sobre el tema Sistema de Ecuaciones Lineales.
HOJA DE INSTRUCCIONES: Leer atentamente esta hoja antes de iniciar el trabajo.
Problema
En un partido del mundial de fútbol Francia'98, a estadio completo, se recaudaron $ 2.900.000 entre plateas y populares. Las populares exceden en 5.000 al doble de las plateas, y éstas representan la mitad de aquellas disminuida en 2.500. Calcular cuántos espectadores hay en cada categoría. Para su información, en el anexo 1 se adjuntan dos entradas al estadio. **Opciones** :¿Cuál de las dos opciones que se consignan a continuación, piensan Ustedes que resuelve el problema?
1ra Opción: Ustedes plantean un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.
2da Opción: Ustedes plantean un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
Si Ustedes eligen la primera opción, busquen las tarjetas **2** ó **5**.

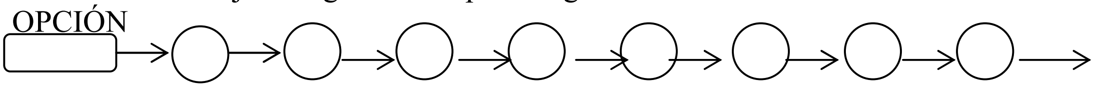
Si Ustedes eligen la segunda opción, busquen las tarjetas **1** ó **3** ó **4**.

Instrucciones para la resolución

a) Analizar el problema propuesto y plantear el sistema correspondiente.

b) Elegir una de las dos opciones propuestas.

c) Dibujar círculos para anotar la opción inicial (en el primero de ellos) y luego, el número de cada tarjeta elegida en los pasos siguientes.



d) Seguir las indicaciones de las tarjetas hasta el fin del laberinto ó hasta llegar a una instrucción terminal de replanteo, ó hasta que se agote el tiempo (determinado por el profesor) destinado a resolver el problema.

e) Conservar el trabajo hasta la realización de una reunión plenaria, donde se analizarán las líneas obtenidas por cada grupo.

Al finalizar la tarea, se aclara el proceso seguido en las líneas indicadas en el laberinto. El **Anexo 2** reproduce dicho esquema , con dos ejemplos de líneas resueltas.

La línea de la izquierda no conduce a la solución, se llega a un punto de replanteo; la línea de la derecha lleva a la solución, con el menor número de pasos.

Las tarjetas correspondientes a la *línea de la izquierda*, llevan las siguientes consignas:

Tarjeta 2: Si plantearon el sistema: $\begin{cases} x - 2y = 5\,000 \\ y - \frac{1}{2}x = -2\,500 \\ 40x + 100y = 2\,900\,000 \end{cases}$

Busquen la tarjeta **6** ó la **10**.

Tarjeta 10: Analicen su sistema por Rouché - Frobenius. Según sus conclusiones busquen la tarjeta **11** ó la **15**.

Tarjeta 11: De sus análisis no pueden sacar conclusiones. Busquen la tarjeta **13**.

Tarjeta 13: Ustedes eligieron opciones falsas. Replanteen sus procedimientos.

Para la línea de la derecha:

Tarjeta 1: Si plantearon el sistema: $\begin{cases} x - 2y = 5\,000 \\ 40x + 100y = 2\,900\,000 \end{cases}$

Busquen la tarjeta **7** ó **9**.

Tarjeta 9: Analicen usando la matriz inversa de la matriz del sistema. Según sus conclusiones busquen la tarjeta **16** ó la **24**.

Tarjeta 24: Resuelvan con la matriz inversa y busquen la tarjeta **14** ó la **22**.

Tarjeta 14: La solución es x = 35 000, y = 15 000. Llegaron a la solución correcta.

Conclusiones

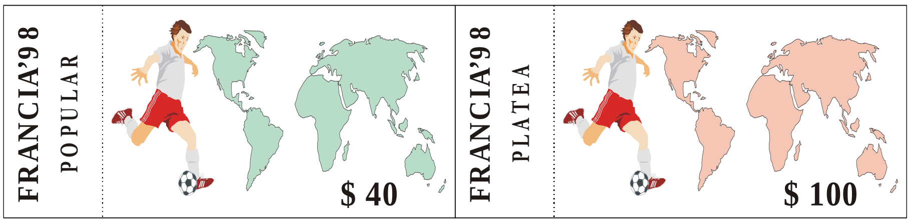
Al finalizar este taller se implementó una de las técnicas participativas de De Bono llamada P.N.I. mediante la cual los participantes indicaron los aspectos positivos, negativos e interesantes de la propuesta que permitió evaluar el grado de aceptación de la misma. Entre los aspectos positivos mencionaron la variedad de técnicas para la resolución de problemas, la novedad de los métodos y la importancia de que existan docentes universitarios con formación en Didáctica de la Matemática. Como criticas negativas manifestaron la confusa redacción de las tarjetas del laberinto y la participación indisciplinada de los asistentes. La aplicación de la Técnica de la Rejilla y el Laberinto de Acción sobresalieron como los aspectos más interesantes.

La planificación y realización de este Taller ha significado estudio, esfuerzo e imaginación, pero por sobre todo, la satisfacción de haber concretado un trabajo coherente, creativo y que brinda un significativo logro docente, más allá de las modificaciones sugeridas por los talleristas.

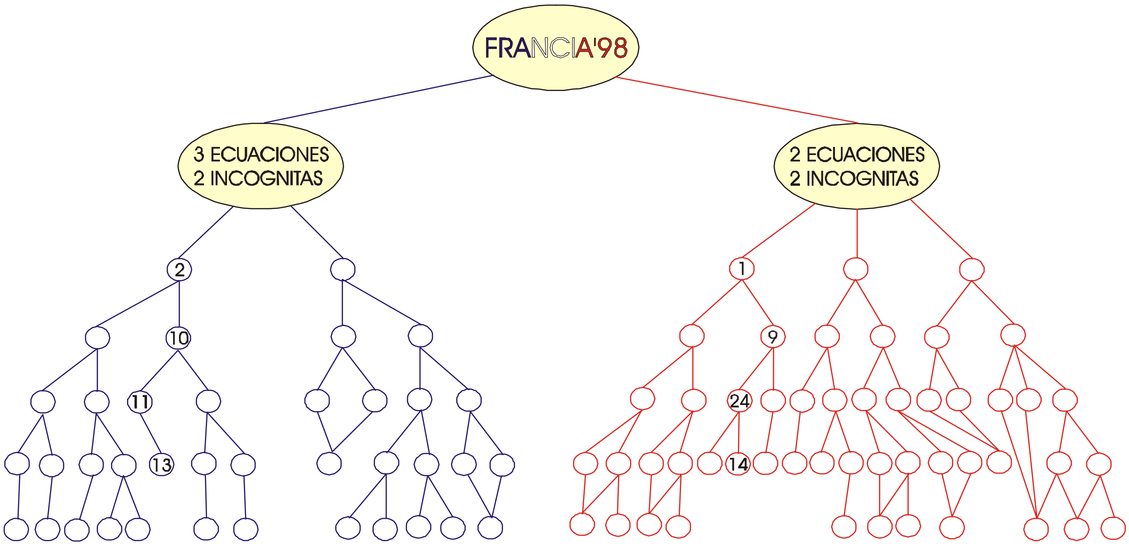
Referencias bibliográficas

Castellanos, A. V.(1988). *Rol del docente-coordinador de grupo y Comunicación en el grupo.* Cuba :CEPES Universidad de la Habana.
Di Caro, H.(1995). *Álgebra y Geometría Analítica*. Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional.
Grossman, S. I.(1998). *Algebra Lineal*. México: Mc. Graw Hill Interamericana S.A.
.Ojalvo, V., Castellanos, A. V.(1991). *El trabajo en grupos en la educación*. CEPES. Universidad de la Habana. Cuba.
Vargas, P., Bustillos, G.(1992). *Técnicas participativas para la educación popular*. Buenos Aires: Editorial Humanitas.

ANEXO 1



ANEXO 2



Educación a Distancia

Nivel Superior

Investigación en educación a distancia. Un acercamiento sistémico

Gisela Montiel Espinosa, Rosa María Farfán Márquez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. IPN. México
gmontiel@mail.cinvestav.mx rfarfan@mail.cinvestav.mx

Resumen
Actualmente es posible utilizar la tecnología interactiva de la información para ofrecer educación a distancia y con ello atender a un mayor número de usuarios. Empero, como detallaremos adelante, la investigación al respecto es escasa por lo que es de fundamental importancia desarrollar investigación a fin de sustentar los proyectos que impulsarán los diversos sistemas educativos usando esta modalidad de educación a distancia. Esta investigación inicia una línea de investigación en Educación a Distancia por lo que una tarea necesaria es la de realizar un estado del arte que nos permita conocer el nacimiento, desarrollo, avances y resultados de esta disciplina en el marco del aprendizaje de las matemáticas. El presente artículo pretende cubrir esta primer tarea, a fin de establecer la base de nuestra investigación.

Presentación

Esencialmente, en nuestra disciplina, encontramos en la educación a distancia un medio para hacer llegar a los profesionistas preocupados por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, formación a nivel de posgrado. Como disciplina científica y movimiento social, la Matemática Educativa ha construido y utilizado fundamentos teóricos con base a los fenómenos acaecidos en el aula presencial, por lo que una pregunta pertinente de inicio sería: ¿qué pasa ahora con dichos fundamentos teóricos en un escenario de educación a distancia? La respuesta no es sencilla e inmediata, requiere de investigación sistemática que logre caracterizar los nuevos escenarios y mostrar evidencias que refuercen o modifiquen nuestras categorías teóricas.
Dentro del grupo de investigación del área de educación superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, nos planteamos investigar específicamente sobre las posibles categorías invariantes de una teoría que aborda el estudio sistémico de las interacciones alumno-profesor-saber al seno del salón de clase, a saber, la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997). En nuestra opinión, hacer investigación presupone conocer el campo de acción, conocer las investigaciones hechas alrededor del fenómeno elegido para nuestro estudio, a fin de hacer un uso adecuado de sus datos y resultados, además consideramos que trabajos como éste, inicia una línea de investigación en Educación a Distancia por lo que una tarea necesaria es la de realizar un estado del arte que nos permita conocer el nacimiento, desarrollo, avances y resultados de esta disciplina en el marco del aprendizaje de las matemáticas.

Definiendo a la Educación a Distancia

Para la Asociación de Aprendizaje a Distancia de los Estados Unidos (USDLA, por sus iniciales en inglés) el aprendizaje a distancia es la adquisición de conocimiento y de habilidades a través de medios de información e instrucción, utilizando la tecnología apropiada. La educación a distancia sería entonces el proceso que involucra ese aprendizaje y la instrucción que lo permita. La modalidad a distancia se ha desarrollado gracias a las prácticas educativas que han buscado la masificación a través del uso de las tecnologías creadas en todos los tiempos, desde la imprenta, la televisión, la radio y ahora la tecnología interactiva de comunicación. Es con la práctica y el uso de esta tecnología que surge la necesidad de encontrar elementos teóricos que sustenten los fenómenos de enseñanza y aprendizaje propios de la educación a distancia. Así, surgen distintas aproximaciones que estudian a detalle ciertas características distintivas de la educación a distancia, como lo son la separación física entre instructor y estudiante o el uso indispensable de la tecnología.

Investigación en educación distancia

La investigación se ha desarrollado principalmente en dos vertientes, la investigación teórica y la investigación descriptiva. Ambas han sido significativas en la formación de la educación a distancia como campo específico de investigación; una va de la mano con la otra. La investigación teórica se ha inclinado hacia los estudios que analizan impactos psicológicos y sociales que provoca la distancia y el uso de tecnología, así como hacia el estudio de las relaciones que se desarrollan entre los participantes de un curso. Estas investigaciones han logrado resaltar algunos elementos y fenómenos propios de la educación a distancia.

Por otra parte la investigación descriptiva centra su atención en lo referente al diseño instruccional, es decir, análisis, diseño, implementación, evaluación y costo de proyectos a distancia, donde un eje principal ha sido el uso de tecnología y la tecnología misma. Estos estudios dejan ver un ciclo de desarrollo instruccional (Fig. 1), capaz de proporcionar una infraestructura y un proceso de planeación sistemática para el desarrollo y adaptación de sus programas basados en las necesidades del alumno y los requerimientos del contenido.

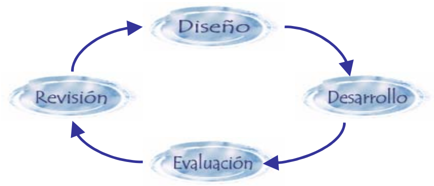


Fig. 1
Ciclo de desarrollo Instruccional

En la etapa de **Diseño** se deben determinar las necesidades intruccionales, analizar las características personales, culturales y educativas de la audiencia, y establecer las metas y objetivos del diseño instruccional basados en los requerimientos y características del estudiante.

En la fase de **Desarrollo** se plantea un perfil del contenido temático, una revisión de los materiales, que no pueden ser una simple transposición de los usados en la clase presencial, se organiza y desarrolla el contenido contextualizándolo a las necesidades del alumno y se seleccionan los materiales y métodos de instrucción

La **Evaluación** tiene como finalidad revisar si los materiales y métodos cumplen con las metas y objetivos, desarrollar estrategias de evaluación formativa, cualitativa o cuantitativa y recolectar y analizar datos de dicha evaluación.

Por último, como resultado de la evaluación se hace una **Revisión** cuyo objetivo es la reestructuración del diseño.

Si analizamos cuidadosamente el proceso descrito, este ciclo puede utilizarse para cualquier práctica educativa en cualquier escenario, sin embargo, es importante que en

cada diseño se resalte lo propio. Esto es, para el caso de la educación a distancia se deben predecir los fenómenos distintivos de este escenario.
Pero la educación a distancia no ha sido la misma en todos los tiempos, los avances tecnológicos han marcado fuertes cambios en su desarrollo y en su repercusión en el sistema educativo. Para observar y entender la evolución que ha tenido la investigación en educación a distancia es necesario conocer su desarrollo histórico, un poco de sus éxitos y fracasos, así como su dependencia de la tecnología.

Historia

El devenir histórico de la Educación a Distancia nos muestra que los avances en telecomunicaciones han cambiado la perspectiva de su análisis. Pensemos cuando en 1700 la educación a distancia, que recibía el nombre de educación por correspondencia, tenía como objetivo hacer llegar materiales impresos a sus estudiantes, no había tecnología que hiciera posible una retroalimentación inmediata entre instructor y estudiante. Después del año 1900 la radio y la televisión abren nuevas posibilidades en la educación a distancia, la transmisión de material a los estudiantes es más rápida y puede haber una respuesta de los estudiantes que refleje cierto nivel de aprendizaje. La Segunda Guerra Mundial detiene un poco el proceso que llevaba la educación a distancia, sin embargo, al impartir cursos instruccionales con fines bélicos a través de estas tecnologías surge la necesidad de crear programas de investigación dirigidos a generar y entender teorías que expliquen cómo es que estos medios afectan la vida del salón de clase.
Hasta ese momento la interacción entre alumno e instructor era algo que preocupaba a la gente involucrada en la elaboración de cursos. Era normal comparar la educación a distancia con la educación convencional (incluso hoy en día se llega a hacer esta comparación), así que la búsqueda por igualar la efectividad en ambas modalidades dirigía la atención a la respuesta de los estudiantes y a la retroalimentación que propiciaba el instructor. Esta preocupación va disminuyendo con las ventajas que ofrece la tecnología en microondas a finales de los 60's y principios de los 70's, se da una revolución en telecomunicaciones que incrementa la interacción entre estudiantes e instructores.

Investigación

El reconocimiento de la Educación a Distancia como campo científico depende en gran medida de sus trabajos en investigación. Hasta hoy, la investigación hecha da muestra de un trabajo sistemático que ha distinguido y analizado los elementos invariantes en las diversas formas u opciones de esta modalidad. Tal es el caso de la Teoría de la Distancia Transaccional de (Moore, 1990, 1991) Moore evoluciona de una teoría de aprendizaje individual, por ejemplo la educación por correspondencia, hasta una teoría basada en el ***diálogo, estructura*** y ***autonomía del estudiante*** como elementos constitutivos de todas las prácticas de enseñanza y aprendizaje a distancia.

Teoría de la Distancia Transaccional

Esta teoría es muy característica de los trabajos de investigación teórica que se han dado hasta hoy, aquellos que giran en torno a la explicación de fenómenos novedosos en esta modalidad que podrían darse en cualquier proyecto o área de estudio. Además, quizá por conjuntar elementos importantes en cualquier práctica educativa esta teoría es la mas utilizada como marco teórico en los estudios descriptivos de la disciplina.

Al hablar de distancia, la Teoría de Distancia Transaccional se refiere a algo más que una simple separación física entre instructor y estudiante. Se refiere a una distancia de percepción y entendimiento, en parte causada por la separación física. La Teoría de la distancia Transaccional expuesta por (Moore, 1990, 1991, 1993) habla sobre la transacción llamada educación a distancia que ocurre en un ambiente cuya característica especial es la separación física entre instructor y estudiante, entendiendo transacción como la interacción entre éstos, el ambiente y los consecuentes comportamientos de enseñanza y aprendizaje. Con esta separación se da un desfase de comunicación y una brecha psicológica, un espacio de malentendidos potenciales entre lo que percibe el profesor y lo que percibe el estudiante. Este espacio es lo que se define como "distancia transaccional". Lo que determina la cantidad de distancia en un programa es una función de dos variables, el diálogo y la estructura (Moore, 1991)

El "***diálogo***" se da gracias a las interacciones que hay entre profesor y estudiante, cuando el primero da instrucciones y el segundo responde. La dirección del diálogo en una relación educativa que se da con el objeto de mejorar el entendimiento del estudiante. No se usan las palabras diálogo e interacción como sinónimos, el término diálogo se usa para describir una interacción o serie de interacciones con cualidades positivas, que otras interacciones pueden no tener. La naturaleza y proporción del diálogo se determina por la filosofía educativa del instructor o equipo responsable del diseño del curso, por las personalidades de instructor y estudiante, por el contenido del curso, por los factores ambientales y lo mas importante por los medios de comunicación.

La "***estructura***" se conforma por los elementos en el diseño del curso que son organizados de tal forma que éste pueda ser proporcionado a través de diversos medios. La estructura expresa la rigidez o la flexibilidad de los objetivos educativos del curso, de las estrategias de enseñanza y de los medios de evaluación. Además, refleja la capacidad del curso para responder a necesidades individuales del estudiante. Gran estructura puede no permitir una cantidad significativa de diálogo. La cantidad de diálogo y la flexibilidad de estructura varían de programa a programa, más que de un medio a otro (Moore, 1990)

El último elemento de esta teoría es la "***autonomía del estudiante***", que se refiere a la auto-dirección del estudio, es decir, a la toma de decisiones respecto de su propio aprendizaje y la construcción de su propio conocimiento basado en sus experiencias. (Carrison & Bayton, 1989) y (Bayton, 1992) han ampliado este último concepto a control del estudiante, desarrollando un modelo que lo define en términos de independencia (la capacidad de tomar decisiones), competencia –o poder- (habilidades y destrezas) y apoyo (tanto material como humano) Un balance dinámico entre estos tres aspectos, a través del proceso de comunicación bidireccional entre instructor y estudiante, le permitirán a este último desarrollar y mantener un control sobre su proceso de aprendizaje (Moore, 1990).

De ninguna manera se debe pensar que la distancia garantiza la independencia del estudiante.

La teoría no ha dado evidencia de ser invariante en cualquier contexto (o paradigma) de educación a distancia. Esto es, Moore comienza con una teoría de aprendizaje independiente dado el fenómeno de educación por correspondencia, conforme la tecnología muestra grandes avances la teoría cambia sus objetivos de estudio tomando como foco central la interacción que se da entre el estudiante e instructor y todo lo que influye en esta.

Pero quizá la aportación más importante de Moore con esta teoría sea el hecho de romper con la idea de la distancia física, estableciendo que no es ésta la que causa desfases en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sino que hoy la distancia es una separación de comunicación entre los involucrados en cualquier practica educativa, en cualquier escenario.

La interacción como elemento indispensable

El profesor, el estudiante, el objeto de conocimiento y los objetivos de enseñanza, son los elementos de cualquier práctica educativa, pero es la interacción entre ellos la que determina dicha práctica. La interacción es entonces el elemento intrínseco de la efectividad de cualquier ambiente educativo, en la educación a distancia es el componente nuclear de toda estrategia instruccional. En un ambiente a distancia se identifican cuatro tipos de interacción (Gunawardena, C. N. & McIsaac, M. S., 1996) –Fig. 2-

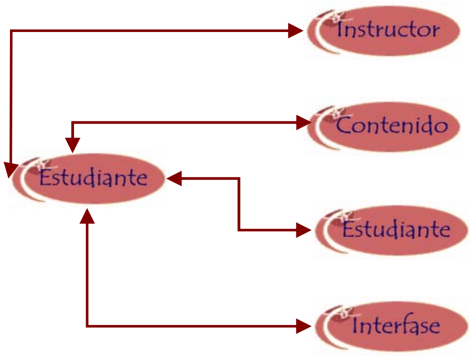


Fig. 2
Interacciones en un ambiente de educación a distancia

La interacción ***estudiante-profesor*** provee retroalimentación, motivación y diálogo, en la interacción ***estudiante–contenido*** se obtiene la información intelectual del material, mientras que en la interacción ***estudiante–estudiante*** se da un intercambio de ideas e información, y por último, la interacción ***estudiante–interfase*** es el manejo del medio tecnológico por parte del estudiante.
El énfasis puesto en la interacción puede compararse con el énfasis que hoy en día se le da a la comunicación en el salón de clase. Sin embargo, el análisis de las distintas interacciones que se llevan a cabo en la modalidad educativa a distancia refuerza la idea de los estudios sistemáticos que observan elementos constitutivos de forma aislada.
Pero al hablar de educación a distancia, no sólo la interactividad resalta como elemento importante, también la autonomía del estudiante toma un papel de suma importancia al caracterizar esta modalidad. Como ya se mencionó en la Teoría de la Distancia Transaccional, el hecho de que exista una distancia entre instructor y alumno no asegura independencia de este último respecto de su aprendizaje. Esto pudiera pensarse por la falta de control total sobre las acciones del alumno. Entonces, debe tomarse en cuenta esta variable para que el diseño sea tal que controle el aprendizaje cuando el alumno se ocupe de sus actividades.

Sin embargo, el foco de atención esta puesto en la responsabilidad que adquiere el alumno. Responsabilizarse de su aprendizaje constituye un elemento clave para que el alumno se desenvuelva exitosamente en los ambientes a distancia. Pero en la literatura se describe esta responsabilidad como una especie de actitud ante la modalidad, no como una responsabilidad que provoque el diseño didáctico.

La importancia que se le da a la responsabilidad del estudiante ha llevado a diversos teóricos a pensar en investigación y diseños basados en el paradigma constructivista. Aunque quizá el obstáculo más grande para este paradigma sea la estructura misma de la educación a distancia. Un sistema educativo a distancia bien estructurado requiere de especialistas en tecnología, diseñadores educativos, expertos en los contenidos escolares, auxiliares de apoyo para estudiantes y profesores, entre otros. Esta modalidad presupone una red de recursos humanos y materiales que requieren de mucha interacción y retroalimentación. Esta actividad será la que provoque que el alumno se adapte a este ambiente, y será el diseño del programa el que posibilite que el alumno se responsabilice de su propio aprendizaje.

Algo que es claro en este análisis de los trabajos realizados en la educación a distancia es el proceso de evolución de una disciplina, que conforme identifica elementos propios y comunes con otras prácticas educativas define una línea de investigación que puede formar un fundamento teórico en su quehacer educativo. Es claro que en el camino de la ciencia siempre habrá escepticismo, correcciones, pruebas y nuevos retos. Ante esto solo tenemos el camino de la investigación, camino que la educación a distancia recorre a paso acelerado. La investigación, como hasta ahora se ha hecho, no avanza ni avanzará a la velocidad de la práctica educativa, no es posible que la investigación, como la práctica, cambie conforme la tecnología avanza, simplemente porque la tecnología esta orientada a la innovación en la práctica.

Referencias bibliográficas

Baynton, M. (1992). Dimensions of control in distance Education: A factor analysis. The American Journal of distance Education, 6(2), 17-31.

Brousseau, G. (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. En Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V. (Eds). Kluwer Academic Publishers.

Carrison, R. & Bayton, M. (1989). “Beyond Independence in Distance Education: the concept of control”, in Readings in Principles of Distance Education, Eds. Moore, M.G. and Smith, G. C.

Gunawardena, C. N. & McIsaac, M. S. (1996). Distance Education. In D. H. Jonassen (Ed.). Handbook of research for educational communications and technology: a project of the Association for Educational communications and Technology. 403 – 437. New York: Simon & Schuster Macmillan. Disponible en la página web:
http://seamonkey.ed.asu.edu/~mcisaac/dechapter

Montiel, G. (2001) Un estado del arte de la investigación en educación a distancia. Antologías 1. Programa Editorial Red de cimates

Moore, M. G. (1991). Editorial: Distance Education Theory. The American Journal of Distance Education, 5(3), 1-6.

Moore, M. G. (1990). Recent Contributions to the Theory of Distance Education. Open Learning, 5(3), 10-15.

Moore, M. G. (1993). Theory of Transactional Distance. In D. Keegan (Ed.), Theoretical principles of distance education (pp 22-38). New York: Routledge.

La capacitación a distancia: generador de zonas de desarrollo próximo

Laura Benavides López
Ministerio de Educación Pública, Costa Rica. Universidad Católica de Costa Rica. Costa Rica
laurabelo@costarricense.cr

Resumen

La propuesta de solución: "Programa de Capacitación a Distancia" se concibe a partir de los resultados que arrojó la evaluación realizada al programa de capacitación presencial de la Dirección Regional de Educación de San Carlos del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, durante el período 1999 a 2000.

Se aplica como técnica principal, el análisis situacional (F.O.D.A.) en tres puntos básicos del Programa de Capacitación Presencial: en la identificación de recursos, en la caracterización del programa y en determinar si la capacitación genera cambios en el docente capacitado.

La opinión de los sujetos se registró en cuatro instrumentos, luego se les aplicó diferentes técnicas para garantizar objetividad en las afirmaciones que se citan en el F.O.D.A. Con base a estos se construyó un flujograma explicativo que permite visualizar los factores estructurales, condicionantes y concretos que inciden en el programa de capacitación presencial. Tomando en cuenta todos estos aspectos se propone un *plan de acción* que corresponde a un Programa de Capacitación a Distancia, con un enfoque pedagógico fundamentado en la *zona de desarrollo próximo*, con un sistema multimedial que permite utilizar variedad de recursos didácticos y tecnológicos dirigidos a satisfacer los diferentes estilos de aprendizaje y necesidades de los educadores.

Introducción

El sistema educativo, está cada vez más presionado frente a las demandas de desarrollo de las personas y de las comunidades. Las sociedades, para lograr su desarrollo social y económico, se sustenta cada vez en la sólida formación de las personas que la integran. La coexistencia entre un sector que se acerca a niveles altos de información, conocimiento y acceso a nuevas tecnologías; y por otro lado, grupos mayoritarios de adultos que no terminaron su educación básica obligatoria, analfabetas, niños y jóvenes que permanecen fuera de los servicios educativos.

El Centro Latinoamericano para la Competitividad y Desarrollo Sostenible (1999: 53) manifiesta: Ineludiblemente, el desarrollo de servicios de educación y capacitación cada vez más especializados y acoplados a las necesidades competitivas de las empresas debe de estar sustentado en sistemas de educación básica con niveles de cobertura, calidad y eficiencia significativamente mayores que los que tiene actualmente la región centroamericana.

La formación de los maestros es un elemento decisivo para lograr una educación eficiente y de calidad en las escuelas, se requiere de una formación sólida no sólo en la parte psicopedagógica, sino también en lo que respecta a las ciencias, matemática y tecnología. En Costa Rica a pesar de que los docentes de primaria se forman en las universidades públicas y privadas. El programa de estudios de la carrera de Educación para I y II ciclo contemplan a lo sumo de tres a cuatro asignaturas que enfatizan en matemática y ciencias, el grueso del currículo lo forman asignaturas, en el área de las ciencias sociales. Este vacío cognitivo, en las ciencias naturales y exactas, se ve reflejado en una forma u otra en los aprendizajes de los estudiantes.

De ahí la importancia que el Ministerio de Educación Pública, a través de las Direcciones Regionales de Educación, posea un eficiente programa de capacitación. Es por esta razón que se toma la iniciativa de evaluar el Programa de Capacitación Presencial dirigido a los docentes de I y II ciclo de la Educación General Básica de la Dirección Regional de Educación de San Carlos que se venían ofreciendo en años anteriores al 2001.

Objetivo General

Evaluar el Programa de Capacitación Presencial dirigida a los docentes de I y II ciclo de la Educación General Básica de la Dirección Regional de Educación de San Carlos.

Objetivos Específicos

1. Identificar el proceso de capacitación dirigido a los docentes.
2. Identificar los recursos físicos, humanos y financieros para el programa de capacitación.
3. Determinar si la capacitación es fuente generadora de autonomía personal y profesional.
4. Elaborar una propuesta de solución.

Referente metodológico

Tipo de investigación

La presente investigación se enmarca dentro del enfoque cualitativo, cuya orientación busca, principalmente, según Venegas (1994:25): *comprender los fenómenos sociales, el investigador necesita descubrir la definición de la situación del actor, esto es, su percepción e interpretación de la realidad y la forma en que éstas se relacionan con su comportamiento*.

Participantes en la investigación

120 docentes: 3 Directores de Departamentos: Desarrollo Educativo, Recursos Humanos y Director Regional; 13 Supervisores de Circuitos Escolares; 10 Directores de Instituciones; 15
Asesores Técnicos y 72 maestros.

Procedimiento

Se realizó un Análisis Situacional (FODA) en cada una de las áreas indicadas anteriormente. Se enriqueció este análisis con la opinión de los participantes, que se registró mediante cuatro instrumentos.

Se elaboraron categorías de análisis, en las respuestas abiertas proporcionadas por los sujetos. Como también se emplearon diferentes técnicas e instrumentos para darle mayor validez y objetividad a las afirmaciones que se enuncian en el FODA.

De esta manera se priorizó debilidades y amenazas; se valoraron las estrategias de Capacitación Presencial empleadas en el programa de capacitación en años anteriores al 2001; y se determinó los factores estructurales condicionantes y concretos que inciden en el programa de capacitación.

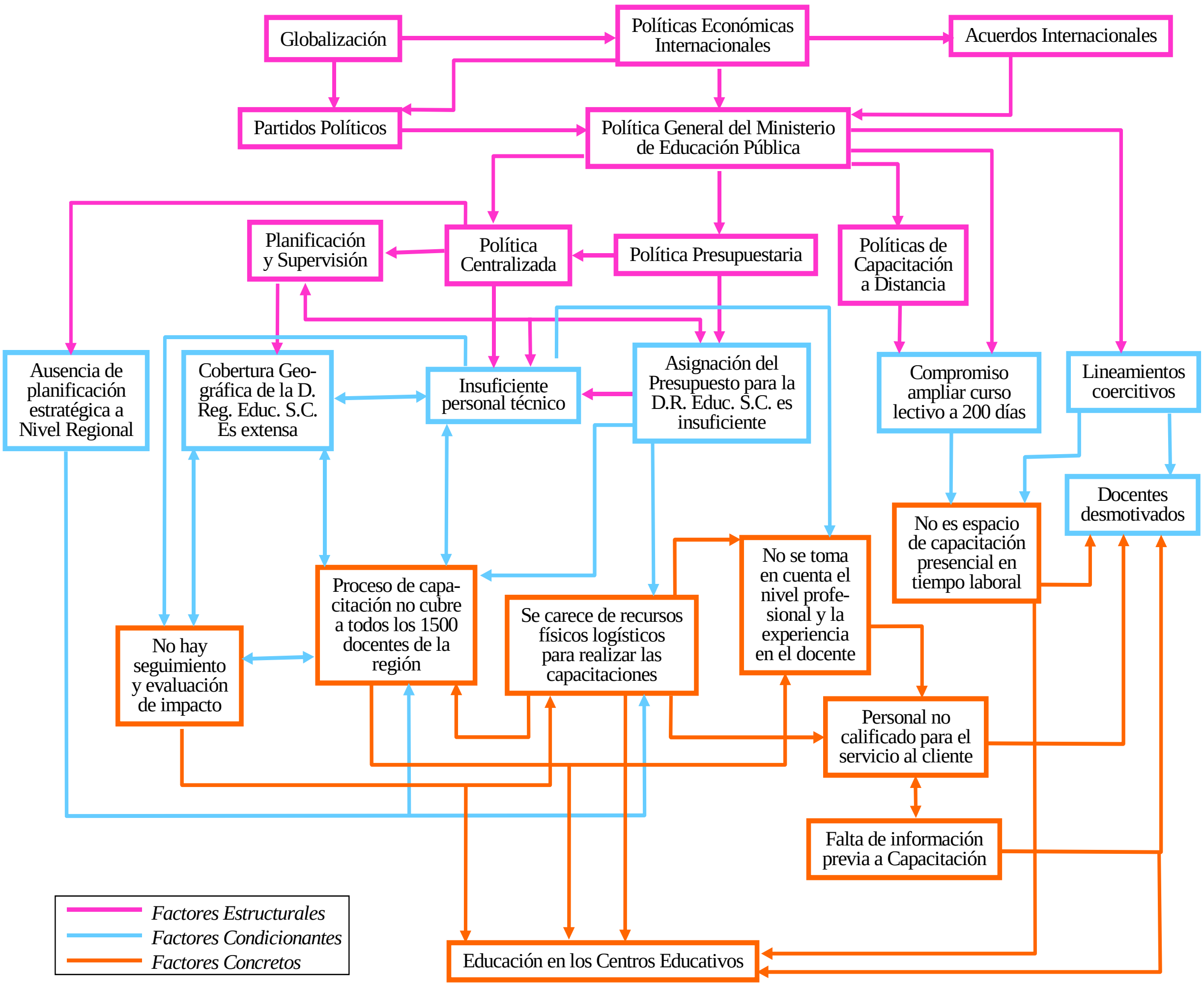
Resultados

La Dirección Regional de Educación de San Carlos posee ciertas debilidades en el programa de capacitación presencial, de acuerdo con los resultados arrojados en el análisis situacional y jerarquizados en la figura 1, encontramos que entre los factores estructurales, están fuera de los límites de la organización, y no se pueden modificar son: la política de centralizada del Ministerio de Educación, tanto presupuestaria, de planificación como de supervisión y los acuerdos internacionales en materia de educación. Se encuentra entre los **factores condicionantes**: asignación del presupuesto para la Dirección Regional de Educación de San Carlos es insuficiente, escaso personal técnico; y la ausencia de una planificación estratégica.

Los **factores concretos** que afectan negativamente el programa de capacitación presencial están: se carece de recursos físicos, logísticos para realizar las capacitaciones; las capacitaciones no cubren a los 1500 docentes de la región, no hay seguimiento y evaluación; no se toman en cuenta el nivel profesional y la experiencia del docente; personal no calificado para el servicio público; no hay espacio presencial en tiempo laboral para realizar la capacitación.

Entre los nudos críticos, está la ausencia de presupuesto, ya que esto no permite contar con recursos físicos logísticos para la capacitación, lo que imposibilita extender el programa a los 1500 docentes; y no hay vehículo para visitar los circuitos escolares, que son muy distantes de la Sede Regional. Por otro lado, no se puede dar una atención individualizada de acuerdo con el nivel académico y exigencia del docente, se trata de cubrir las necesidades de la mayoría; otra forma en que este factor incide es en el nombramiento de personal no idóneo para atender el servicio al cliente, y no se les brinda capacitación e inducción en el puesto; esto a su vez influye en la información que se le brinda al docente de aula.

Figura Nº1
Programa de Capacitación de la Dirección Regional de Educación de San Carlos (Flujograma) Modalidad presencial



Plan de acción

Objetivo

Crear un programa de capacitación a distancia que contribuya con el mejoramiento de la calidad de la formación académica, científica y pedagógica de los docentes de I y II ciclo de la Educación General Básica de la Dirección Regional de San Carlos.

En está modalidad de Capacitación a Distancia se establecerá una relación centralizada entre el capacitador y la persona que se capacita. Esta mediación se distinguirá por ofrecer:
a. Una diversa y amplia gama de cursos (en nivel básico, mediano y avanzado) en los temas que requiera la población de docentes.
b. Los materiales que conforman el curso deben generar un alto nivel de interacción dirigido a diferentes estilos y ritmos de aprendizaje.
c. Establecer un vínculo mediatizado con la persona que se capacita, a través de los diferentes medios que constituyen un sistema didáctico, que permitan al maestro que se capacita ser un sujeto activo de su auto-aprendizaje.
d. Los soportes didácticos que se emplearían en este programa de capacitación a distancia serían: módulos, videos, cassettes, cd-rom, Internet, programas de radio y televisión que permitirán satisfacer los diferentes estilos de aprendizaje del docente que se capacita, establecer un sistema de acompañamiento variado.

Dentro de la propuesta, *el significado de aprendizaje* corresponde a un proceso mediante el cual una persona demuestra un crecimiento en sus ámbitos intelectual, social y emocional; entendiéndose como aprendizaje independiente, autogestionario y permanente, donde la persona se apropia y responsabiliza de su proceso de formación sin control externo, después de haber pasado por una etapa de ayuda, de colaboración, en la creación de Zonas de Desarrollo Próximo. El reto que se plantea en el programa de capacitación a distancia es brindar una mediación de calidad que les permita avanzar hacia la Zona de Desarrollo Próximo a cada docente.

El establecimiento de un Cluster Regional de Servicios Educativos representa una estrategia de maximizar la oportunidad de contar con instituciones públicas y privadas con una trayectoria en el área de capacitación , abiertas a dar el apoyo logístico al programa de Capacitación de la Dirección Regional de Educación de San Carlos.

Evaluación del plan de acción

Para determinar la efectividad del Plan de Acción, es importante proponer indicadores observables y válidos; que permitan verificar si el programa de capacitación tanto en su proceso como su producto, se logran los objetivos propuestos.

Se proponen algunos pasos para evaluar y supervisar el plan de acción. Revisión y actualización anual del FODA. Establecimiento de estándares. Estimación de satisfacción de los docentes--Establecimiento de un equipo que evalúe la calidad del material didáctico y el desarrollo de los espacios de intercambio de experiencias. Realización de visitas a un 33% de los docentes que hayan concluido un determinado curso. La visita se hará sin previo aviso. El Asesor técnico (tutor) contará con instrumentos de observación, cuestionarios o entrevista según sea el caso. Valoración del portafolio o cuaderno paralelo donde él registrará sus reflexiones, entre la práctica educativa y el contenido del módulo como su revaloración de su quehacer de aula a partir del “nuevo conocimiento”.

Logros

*L*os logros más relevantes, que se espera obtener, con la implementación de un programa de capacitación a distancia los siguientes:

a. Se incorpore una mayor cantidad de docentes en el programa capacitación a distancia.
b. Se propicie un cambio de actitud, respecto al autoaprendizaje y desarrollo profesional y personal en los docentes.
c. Se eleve el nivel académico y profesional de los docentes, especialmente en el área: Ciencias y Matemática.
d. Se fortalezca la formación académica científica y matemática del equipo técnico asesor y de los docentes de la región.
e. Establecimiento de un Cluster de servicios educativos en la región .
f. Implementación de un nuevo enfoque psicopedagógico en la capacitación basado en las Zonas de Desarrollo Próximo.

Referencias bibliográficas

Arrien, J. (1996). UNESCO en el Desarrollo y en las Innovaciones de la Educación en Centroamérica. Oficina de la UNESCO para Centroamérica y Panamá. San José, Costa Rica.

Arroyo, J. (1999). Administración Estratégica en las Organizaciones. San José: EUNED.

Barrantes, R.(1988). Educación a Distancia. San José: EUNED.

Barrantes, R. (1999). Investigación: un camino al conocimiento, un enfoque cuantitativo y cualitativo. San José, C. R.: EUNED.

Brenes,F.(1999). Principios Psicopedagógicos Constructivistas para el Diseño de Instrucción en la Educación a Distancia. Innovaciones Educativas (Rev. Nº10), pág.45-52.

Instituto Centroamericano para la Competitividad y el Desarrollo Sostenible. Centroamérica en el Siglo XXI. Alajuela, Costa Rica: HIID, 1999.

Vidaorreta, María (1998). Organización de los procesos de capacitación. San José, C.R.: Depto. Publicaciones del MEP.

Venegas, P. (1994). Algunos Elementos de Investigación. 3ªed. San José, C.R.: EUNED.

Una experiencia, utilizando las NTIC, en el estudio individual de alumnos de cursos semipresenciales de Matemática para Ingenieros Industriales

Milagros Horta Navarro*, Marcelo Marcet Sánchez*, Rita Martinez Pichardo*, Nancy Horta Chávez*, Martin Herrán**, Walter Garzón**
* Profesores de la Universidad de Matanzas, Cuba
** Profesores de la Universidad de Salta; Argentina
mmarcet2000@yahoo.com marcelm@fujae.var.cyt.cu mily@quimec.umtz.edu.cu

Resumen
El presente trabajo muestra una experiencia llevada a cabo en la universidad de Matanzas, Cuba; en cuanto a la utilización de las TIC en la modalidad de cursos semipresenciales de matemática para ingenieros Industriales, que consistió en plasmar en una pagina web, desde los objetivos generales de cada una de las asignaturas que componen la disciplina Matemática para Ingenieros Industriales, hasta los objetivos específicos de cada clase, un módulo con exámenes típicos de la asignatura, otro con cada una de las clases de la asignatura, escritas con un estilo coloquial y claro, rica en ejemplos e ilustraciones geométricas que sirvieran para esclarecer los diferentes conceptos matemáticos, además tiene incorporada esta página, de cada una de las clases una amplia referencia bibliográfica, que le permite al estudiante profundizar en estos contenidos en diferentes libros, consta además de una serie de folletos confeccionados por el profesor para este tipo de curso, que les permite no solo aprender matemática, sino aprender también a utilizar asistentes matemáticos de la asignatura.

Introducción

En nuestro país, Cuba, existe una modalidad de enseñanza a distancia, de carácter semipresencial orientada a estudiantes trabajadores, que ingresan a una carrera universitaria afín al trabajo que realizan. Como requisitos para el ingreso a este tipo de curso tienen: el estar graduados de bachiller, aprobar un examen de ingreso (el cual es elaborado y revisado por los profesores de la Universidad en la cual ellos aspiran a matricular) y estar vinculados en la actividad laboral que desempeñan a la especialidad por la que optan para estudiar.
Estos estudiantes reciben las mismas asignaturas que los alumnos regulares, con la diferencia que en un menor número de horas clases; los encuentros presenciales con el profesor son de dos a tres horas semanales, por lo que se limitan éstos a la orientación (por parte del profesor) de los temas que ellos deben estudiar y la aclaración de cualquier duda de los contenidos con anterioridad orientados, esto hace que en gran medida, el rendimiento de los estudiantes dependa de un eficiente estudio individual de su parte, por lo que la orientación del profesor debe estar correctamente dirigida a los objetivos del programa de estudio y apoyada por materiales que permitan a los estudiantes orientarse en su autopreparación.
Esta manera de enfrentar la superación en Cuba provoca que la participación en cursos de esta naturaleza hacen que los asistentes tengan que alejarse de su centro laboral y del hogar con los inconvenientes que esto conlleva y no tengan otra posibilidad para intercambiar con sus profesores que no sean las dos o tres horas semanales de clase (por asignatura), que por lo regular son insuficientes.
Teniendo en cuenta esta problemática, que trae como consecuencia un menor rendimiento de los estudiantes en este tipo de cursos, con respecto a los que lo realizan por cursos regulares, un grupo de profesores de Matemática de la Universidad de Matanzas y de la Universidad Salta Argentina, que recibieron un diplomado en nuestra universidad, se dieron a la tarea de confeccionar materiales que pudieran suplir, en alguna medida la no presencia del profesor y que no solo ayudara en nuestra asignatura sino que les permitiera a

éstos utilizar las TIC, de manera que se pudiera coadyuvar a una formación más integral y a tono con las exigencias actuales. El presente trabajo trata sobre esta experiencia.

Desarrollo

La computación que hace tan solo unos años se empleaba para cálculos matemáticos complicados, ha ido cediendo espacio a las más diversas actividades del desarrollo humano, al punto que en la actualidad no existe prácticamente un área, en que de algún modo no se utilice esta herramienta. El elevado nivel de perfeccionamiento y accesibilidad de estos equipos, ha permitido que su uso se extienda en la práctica a los más diversos campos, entre los que, por supuesto, se encuentra la educación, para la cual es imprescindible a nuestro modo de ver.

Una de las áreas de la educación en que estos artefactos pueden jugar un papel importantísimo es en lo relacionado con el estudio Individual de los estudiantes, elemento primordial en este tipo de cursos en que la presencia del profesor no esta siempre presente, a partir de materiales previamente elaborados de manera que los estudiantes puedan consultarlo a través de la red universitaria o grabándolo en un disquete y consultándolo en su casa o centro de trabajo.

Existen varias tecnologías y métodos que se pueden utilizar en la educación a distancia para lograr una mayor atención y entendimiento para el alumno y resultan herramientas de apoyo al aprendizaje, entre ellas está el uso de la informática (De Pablos, 1996).

Es por ello que los profesores de Matemática de este tipo de curso de la Universidad de Matanzas, Cuba, nos dimos a la tarea, en aras de que estos estudiantes contaran con condiciones que le permitieran un mejor aprovechamiento de las horas dedicadas a la auto preparación, de realizar materiales que apoyaran el estudio Independiente de la asignatura. Éstos debían ser tales que implicaran un modesto costo a la universidad y que pudieran estar disponible para ellos en un razonable periodo de tiempo, confeccionándose así una página WEB de la Disciplina: **Matemática para ingenieros Industriales** en la que aparecen una serie de documentos que orientan a los estudiantes de esta especialidad, específicamente los de cursos para trabajadores, en su auto preparación, esta página está insertada en la intranet universitaria y los estudiantes pueden acceder desde cualquier máquina de la universidad y en cualquier horario.

Esta disciplina: ***Matemática para Ingenieros Industriales*** consta de 5 asignaturas que los estudiantes deben cursar en los dos primeros años de la carrera, estas son: Matemática I, Matemática II, Matemática III, Matemática IV y Álgebra lineal.

En la página principal, aparece cada una de las asignaturas que componen la disciplina:

Al oprimir el botón del mouse sobre el nombre de una de las asignaturas de la Disciplina aparecerá en el marco izquierdo inferior el nombre de cada uno de los documentos de esta asignatura a los que se podrá tener acceso, de manera que el que esté visitando la página accionando sobre el documento que desee consultar tendrá la oportunidad de leerlo en el marco de la derecha de la página.

Estos documentos son:

- **Programa Analítico de la asignatura.**

En este material aparece todo el sistema de contenidos de la asignatura, el sistema de habilidades que debe lograr el estudiante, los objetivos generales educativos, instructivos y específicos de cada clase; es confeccionado a nivel nacional por un grupo de expertos, que tienen representación de los diferentes departamentos de cada una de las universidades del país, el cual resulta importante que los estudiantes conozcan con el fin de que estos sepan los objetivos que el debe vencer en cada asignatura, así como las habilidades que debe desarrollar.

- **Sistema de evaluación.**

Aparecen los tipos de evaluación que se realizarán por temas, con el tiempo de duración de cada uno de ellos y los objetivos que se persiguen medir en cada una de éstas, además se recoge un grupo de modelos de exámenes ya aplicados en otros cursos, los cuales el estudiante podrá utilizar como auto examen.

- **Distribución de contenidos.**

Está la distribución del contenido de la asignatura por clase o encuentro y los objetivos específicos de cada clase.

- **Objetivos generales del año en los que la asignatura tributa.**

En el Plan general de la carrera aparecen, entre otros, los objetivos generales de cada año, en este documento se recogen estos objetivos y como las diferentes asignaturas tributan a estos objetivos generales del año. En la página aparecen estos objetivos del año y como la asignatura matemática tributa a ellos, la finalidad de él es que los estudiantes conozcan la importancia de la asignatura para dar cumplimiento a objetivos de la especialidad.

- **Preparación de la asignatura.**

Aparece el plan de clases de la asignatura, con cada una de las clases de la asignatura y su correspondiente orientación bibliográfica.

El texto de cada clase, está elaborado como algo vivo, simulando una interlocución permanente con el alumno e interactuando con éste, para que este texto cumpla su objetivo y permita suplir en alguna medida la ausencia del profesor.

El discurso pedagógico en los materiales significa un estímulo, un desafío permanente a la acción y la reflexión de quien los consulta (Hdez, Alicia, 1998).

(...) " deben ser un juego de intercambio comunicacional que implique una ida y vuelta permanente, con mensajes significativos y valorados por ambos lados con información relevante y pertinente para aportar a la construcción conjunta del conocimiento y marchar hacia la meta que debe ser, no sólo la problematización de la propia realidad, sino la elaboración de propuestas de solución adecuada que ayuden a superarlas"(Mena, 1993).

Cada una de estas clases tiene una serie de preguntas de interactividad que el estudiante debe contestar y enviar sus respuestas al profesor por correo electrónico, también por ese medio puede enviar al profesor consultas a cuestiones relacionadas con la clase y que él no entienda en el material, el profesor recepciona estas dudas de los estudiantes y las aclara en la clase encuentro siguiente.

- **Materiales didácticos de la asignatura.**

Al entrar en este sitio los estudiantes podrán encontrar páginas de la asignatura bajadas de Internet las cuales pueden consultar, esto les permite que ellos tengan acceso a este tipo de materiales que de no estar presentes en la página elaborada, ellos no podrían consultar pues los accesos a Internet en nuestro país todavía son limitados.

Además aparecen folletos de ejercicios elaborados por los profesores, de manera que cada grupo de ejercicio constituya un sistema de tareas que los estudiantes deben resolver y enviar por correo electrónico a su profesor, con una gran variedad de problemas de aplicación; también aparecen ayudas para aprender a trabajar con software profesionales de Matemática (**Derive**) que esta contemplado en sus planes de estudio que deben saber utilizar.

(...) "al elaborar materiales para la Educación a Distancia debemos tener en cuenta la importancia de estimular permanentemente a los educandos, de forma tal que se vean comprometidos en la búsqueda de fuentes de información y en la solución de problemas. Cuando los materiales transmiten conocimientos acabados, se pierde el motor central del aprendizaje; se desperdicia la capacidad inquisitiva del alumno" (Hdez Alicia, 1998)**.**

Teniendo en cuenta este planteamiento, con el cual estamos identificados plenamente, nos dimos a la tarea de confeccionar textos, que no fueran libros de textos tradicionales digitalizados, sino libros elaborados de tal manera que visualizara aspectos que la impresión hace que esto sea posible, como es el caso de gráficas con movimientos, que hagan más claro al estudiante la compresión de ciertos conceptos demasiado abstractos para ellos, por otro lado estos textos están elaborados de manera que los estudiantes al consultarlos no encuentren una respuesta acabada del hecho, sino que ellos tengan que investigar para llegar a la respuesta que desean , es decir que sean sujetos activos en la apropiación de los conocimientos y no lectores pasivos de un material que se aprende de memoria y después se repite.

A esta página los estudiantes pueden acceder por la intranet universitaria, lo que permite que pueda visitarla cualquiera que le interese hacerlo, a cualquier hora del día o la noche, por lo que los estudiantes de cursos para trabajadores tienen posibilidad de ir a la universidad y estudiar por este material en su tiempo libre, pero además desde internet pueden consultarlo también aún sin estar en la universidad, si sus centros de trabajo tienen acceso a este servicio o sencillamente llevárselo en disketes y usarlo en cualquier máquina.

Este material didáctico tiene una gran importancia y secundada por las nuevas tecnologías informáticas puede resolver problemas de masividad, espacio y tiempo y llevar el conocimiento más actualizado a quienes lo necesitan, sin tener que ausentarse de su puesto de trabajo y su familia, permitiendo desarrollar de forma masiva los proceso permanentes de educación y entrenamiento, resolviendo los problemas provocados por la lejanía, es una estrategia educativa basada en la aplicación de la tecnología al aprendizaje sin limitaciones de lugar, tiempo, u ocupación de los estudiantes. Implica nuevos roles para los alumnos y para los profesores; nuevas actitudes y nuevos enfoques metodológicos.

Los estudiantes pueden realizar preguntas, acerca de dudas en algunos de los ejercicios o contenidos, a partir del correo electrónico del profesor y éste a su vez enviar la respuesta a éstos también utilizando esta vía.

Es evidente pues que deberá asegurarse la adquisición de conocimientos que permitan aprovechar la tecnología y obtener beneficios de ella, ya sea en la asistencia, la docencia o la investigación.

Aunque las condiciones tecnológicas están creadas, existe un gran número de profesionales y técnicos que no son capaces, a pesar del desarrollo que ha alcanzado la informática, de interactuar con una computadora y explotarla en función de sus necesidades, por lo que se hace necesario que sobre todo los docentes se capaciten en esta temática de manera que puedan brindarle a los estudiantes, sobre todo a los de cursos a distancia, materiales eficientes que apoyen su auto preparación y poder contar con profesionales, graduados en estos cursos de un alto nivel científico, a tono con las exigencias actuales.

Esta experiencia se viene aplicando hace dos cursos en nuestra universidad, lo que nos ha permitido hacer estudios comparativos sobre la permanencia de estos estudiantes en los grupos durante estos dos cursos, así como de los resultados docentes que ya se vienen obteniendo, con respecto a lo sucedido en los cursos anteriores cuando no existía este sistema didáctico de la disciplina que sirve de apoyo en el estudio individual de los alumnos

En la siguiente tabla (tabla 1) se muestra el comportamiento durante tres cursos anteriores a la utilización de este sistema didáctico, atendiendo al por ciento de permanencia en la carrera en los dos primeros años de ésta, así como el por ciento de aprobados en base a los que se mantenían hasta el final de las diferentes asignaturas de las disciplinas.

Tabla 1

Curso analizado	**Por ciento de permanencia**	**Resultados alcanzados en exámenes**
95-96	Solo un 20 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron en él hasta el final del año.	El 20 % de los estudiantes presentados a exámenes, vencieron satisfactoriamente el curso
96-97	23 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron en el hasta el final del año.	El 35 % de los estudiantes presentados a exámenes , vencieron satisfactoriamente el curso
97-98	10 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron en el hasta el final del año.	El 60 % de los estudiantes presentados a exámenes , vencieron satisfactoriamente el curso

La siguiente tabla (tabla 2) muestra los resultados alcanzados en los dos cursos posteriores a el mejoramiento de las condiciones materiales para la autopreparación de los estudiantes, esto es: la confección de esta pagina web que permite una mejor orientación del estudio independiente para este tipo de estudiantes

Tabla 2

Curso analizado	**Por ciento de permanencia**	**Resultados alcanzados en exámenes**
98-99	70 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron en él hasta el final del año.	El 63 % de los estudiantes presentados a exámenes , vencieron satisfactoriamente el curso
99-2000	73 %, de los estudiantes que matricularon el curso se mantuvieron hasta el final del año.	El 60 % de los estudiantes presentados a exámenes , vencieron satisfactoriamente el curso

Como se puede apreciar resulta notable la diferencia entre la cantidad de estudiantes que llegaban hasta finales del segundo año de la carrera durante los cursos 95-96, 96-97 y 97-98, con respecto a los que llegaron a igual período de la carrera en los cursos 98-99 y 99-

00. También es significativa la diferencia de los estudiantes promovidos durante el primer y segundo año de la carrera, con respecto a los resultados arrojados en este sentido en el otro periodo analizado.
Es importante aclarar que durante los periodos comparativos no hubo otro factor que cambiara en el proceso de enseñanza aprendizaje que no fuera la introducción de este recurso didáctico, que antes no poseían, pues los profesores son los mismos, las características de los estudiantes son similares; por lo que nos hace afirmar que estos resultados satisfactorios, en este tipo de curso se debe a la orientación más racional y eficiente del estudio independiente de los estudiantes de cursos semi presenciales.

Conclusiones

Este trabajo en nuestra Universidad constituye solo el comienzo de un trabajo más técnico y de más alto nivel científico con la utilización de hipermedia, que ya se esta comenzando a realizar para estos cursos a distancia, por el momento este fue un intento por palear las dificultades existentes en el rendimiento académico de este tipo de estudiantes que surtió efecto y que se pudo constatar en los resultados docentes de los cursos donde se realizó esta experiencia, que fueron superior con respecto a cursos anteriores, donde no se contaban con estos materiales, lo que a nuestro modo de ver hacía que los estudiantes no estuvieran orientados correctamente al estudio independiente, lo cual redundaba en una nula motivación por el estudio y que éstos causaran baja antes de concluir el primer año de la carrera; con estas nuevas posibilidades de autopreparación los estudiantes se sienten orientados hacia los conocimientos que deben aprender y la manera de llegar a adquirir éstos, lo que hace que se sientan confiados en que pueden lograr vencer las diferentes asignaturas y de hecho sientan más motivación para estudiar y seguir adelante con su proyecto de superación.
Nos permitió, además, recoger la documentación de las diferentes asignaturas sobre soporte electrónico de manera que se logró una mayor organización en el proceso docente educativo, y no solo ayudó a la superación individual de los estudiantes sino que permitió a las autoridades del Ministerio de Educación Superior o de la Universidad analizar o controlar el trabajo que realizan los profesores en aras del mejoramiento del proceso de enseñanza aprendizaje, así como sirvió de orientación para los profesores noveles acerca del trabajo metodológico y de la experiencia del departamento, el cual , en muchos casos enriquecieron aportando ideas nuevas.

Referencias bibliográficas

De Pablos, J. (1996). *Tecnología y Educación: una aproximación sociocultural.* Barcelona: CEDECS.
Hernández, Alicia (1998). Diseño curricular en el sistema de Educación a distancia, tesis de maestría, Universidad de La Habana.
Mena, M. (1994) Nuevos Enfoques Pedagógicos para mejorar la producción de materiales en la Educación a Distancia en Journal of Distance Education, Canadá.

Desarrollo del Curriculum

Nivel Medio

Estudio de la curricula y organización de los contenidos correspondientes al tercer ciclo de EGB y polimodal de las escuelas medias dependientes de la Universidad Nacional del Sur

G. Guala, E. Güichal, V. Oscherov, B. Friedli
Departamento de Matemática y Escuelas Medias. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Argentina
gguala@arnet.com.ar eguichal@criba.edu.ar oscherov@criba.edu.ar

Resumen
Este trabajo da cuenta de lo realizado en el marco del Proyecto: *Estudio de la Currícula y Organización de los Contenidos correspondientes al Tercer Ciclo de la EGB,* durante el ciclo lectivo correspondiente al año 2.000. Es llevado a cabo por un equipo de docentes – investigadores pertenecientes al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur (UNS), conjuntamente con la Coordinación del Departamento de Matemática de las Escuelas Medias dependientes de dicha Universidad (EMUNS), quienes ante la necesidad de la revisión y actualización de la currícula correspondiente al Tercer Ciclo de la Educación General Básica (EGB), originada particularmente por las reformas estructurales producidas en las EMUNS a partir de la aplicación de la Ley Federal de Educación, se propusieron generar un espacio de reflexión, estudio e investigación dirigido a docentes de dichas escuelas. En este sentido instrumentamos un Seminario – Taller permanente con el objeto de lograr consensos en la construcción del Proyecto Curricular del Area de Matemática, potenciar nuevos enfoques metodológicos de trabajo en equipo de docentes de la EGB y proponer estrategias de mejoramiento contínuo en la práctica docente. Así mismo, se buscó mediante el tratamiento conjunto de los contenidos con docentes del Tercer Ciclo de la EGB y de la Educación Polimodal, la articulación entre los distintos niveles y orientaciones de las EMUNS.

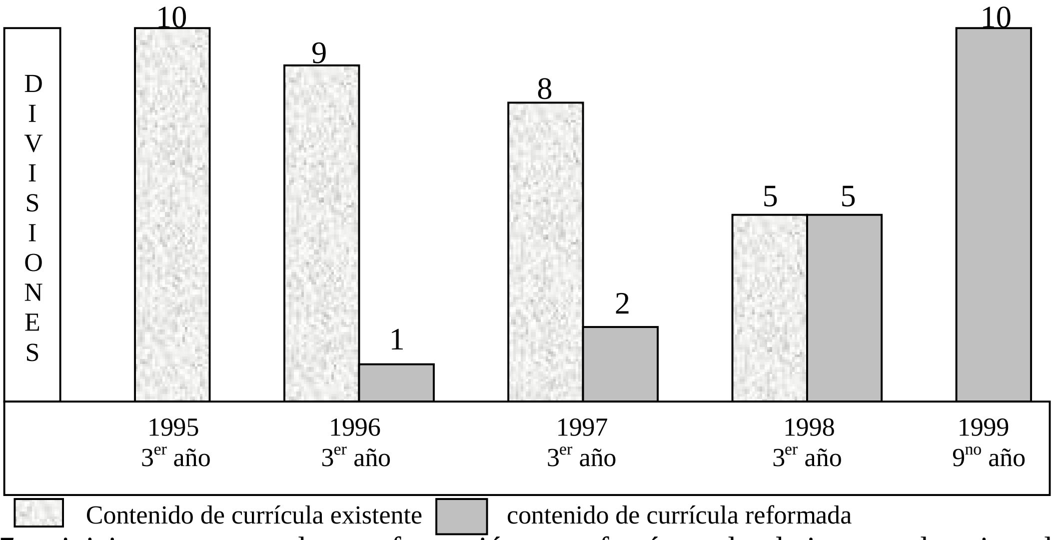
Contexto de transformaciones

En 1995 constituimos un equipo de trabajo, integrado por docentes – investigadores pertenecientes al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y al Tercer Ciclo de la Educación General Básica de las Escuelas dependientes de la misma, que se abocó a la realización de proyectos de innovación pedagógica.
En ese momento la estructura de las EMUNS era la siguiente:

EMUNS
- Departamento de Aplicación
  - Jardín de Infantes (3 a 5 años)
  - Escuela Primaria (1^{ero} a 7^{mo} grado)
- Escuela de Ciclo Básico (1^{ero} a 3^{er} año)
- Ciclo Superior
  - Escuela Superior de Comercio (4^{to} a 6^{to} años)
  - Escuela Normal (4^{to} a 6^{to} años)
  - Escuela de Agricultura y Ganadería (4^{to} a 6^{to} años)

Trabajamos con un contenido de tercer año en el que los alumnos presentaban dificultades de aprendizaje, esto es, con: "Polinomios: operaciones, factorización, uso de la regla de Ruffini y resolución de ecuaciones algebraicas".
Observábamos que las dificultades se presentaban al momento de la aplicación del contenido en distintos contextos y más tarde, tanto en el ciclo superior como en el ingreso a la universidad, era necesario recomenzar desde el principio. Entendíamos que una de las

causas era el tratamiento del tema recurriendo a la resolución de numerosos ejercicios siguiendo determinados patrones que conducían a una mera mecanización.
El cambio propuesto en ese momento fue el de dejar el estudio de los polinomios para ciclos superiores y, profundizando de este modo el trabajo con números reales, abordar los temas mencionados desde el concepto de función polinómica en una variable, función a la que definimos como suma de una función constante con productos de una función constante por una potencial, agregando posteriormente *función racional*
De 1996 a 1998 se continuó con ese enfoque, aumentando cada año el número de divisiones hasta completar los existentes. Un esquema de tal situación es el siguiente:



En 1997 se inicia un proceso de transformación que afectó a todo el sistema educativo al aplicarse la Ley Federal de Educación y que, particularmente, provocó reformas estructurales en las EMUNS cuya organización pasó a ser la siguiente:

EMUNS
- Nivel Inicial (3 a 5 años)
- Educación General Básica
  - Primer Ciclo (1ero, 2do y 3er años)
  - Segundo Ciclo (4to, 5to y 6to años)
  - Tercer Ciclo (7mo, 8vo y 9no años)
- Nivel Polimodal (1ero, 2do y 3er años)

El grupo se planteó entonces participar en la construcción de una propuesta curricular que respondiera a los desafíos generados por esta reforma. Para hacerlo propusimos el Proyecto: *Estudio de la Currícula y Organización de los Contenidos correspondientes al Tercer Ciclo de la EGB.*
Con la puesta en marcha del mismo nos proponíamos trabajar por una enseñanza más significativa para los alumnos y por una transformación generada desde los propios actores.

Contábamos para ello con:

- Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica, emanados del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, aprobados en 1994.

- Documentos Curriculares de la Jurisdicción emanados de la Dirección de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.
- Producción en el campo de la Didáctica de la Matemática y de la Teoría Curricular, que provee de un marco teórico para tratar problemas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y problemas curriculares.
- El Curriculum de las EMUNS, que surgió de la reflexión conjunta de docentes y directivos, pero que no registraba cambios significativos, en tanto documento escrito, desde fines de la década del 70.
- Intencionalidad de directivos y de un grupo de docentes, participantes en diversas experiencias áulicas realizadas con anterioridad, de comprometerse y comprometer al mayor número de docentes en la construcción de un nueva Curricula.

Nuestra propuesta

Basándonos en lo que contábamos y considerando en principio cuestiones vinculadas al curriculum como: el problema del curriculum, considerado en el sentido de Stenhouse (1987): *el problema del curriculum más sencilla y directamente formulado es el de relacionar ideas con realidades, el de ligar el curriculum concebido o en el papel con el curriculum en clase*; la relación planteada por Angulo Rasco (1994) entre las que denomina dimensiones básicas de nuestra razón (representación y acción) y las distintas acepciones de curriculum marcando la distinción entre la racionalidad de la representación (curriculum como contenido) y la racionalidad de la acción (curriculum como acción interactiva y construcción práctica) y la necesidad de considerar el curriculum como representación de la acción (curriculum como planificación); la concepción de Gagné (1967), quien considera al curriculum como *materia de aprendizaje* y como una secuencia de unidades de contenido que se articulan apoyándose unas en las otras en la secuencia, de manera que el alumno necesite dominar las capacidades de las anteriores para pasar a la siguiente –criterio tecnicista predominante aún hoy en día en diversas asignaturas, pero que podemos rescatar en cuanto a que en Matemática es necesario elaborar secuencias didácticas, no rígidas ni prescriptivas sino lo suficientemente flexibles, que permitan recuperar los saberes previos para construir nuevos conceptos que, a su vez, sirvan de base para otros nuevos–; el respeto hacia la *especificidad del contenido* (Díaz Barriga, 1985) en la construcción del curriculum para, de esta manera, *conformar la construcción metodológica a partir de la estructura conceptual (sintáctica y semántica) de la disciplina y la estructura cognitiva de los sujetos en situación de apropiarse de ella* (Edelstein, 1996). Con todos estos elementos nos propusimos generar un espacio de reflexión, estudio e investigación que durante el ciclo lectivo correspondiente al año 2000 se dio a través de un Seminario – Taller permanente. Este Seminario tuvo por objetivos: lograr consensos en la construcción del Proyecto Curricular del Area de Matemática, potenciar nuevos enfoques metodológicos de trabajo en equipo de docentes de la EGB y proponer estrategias de mejoramiento contínuo en la práctica docente.

Aspectos del Seminario – Taller

En el mes de mayo de 2000 se realiza la presentación de la propuesta. Comprometen su participación en el Seminario un buen número de docentes, especialmente aquellos que a raíz de la Reforma Educativa tratarán con alumnos de entre 12 y 13 años (antes lo hacían

con alumnos de 14 y 15) y aquellos que se desempeñan como docentes en Educación Polimodal. Así mismo se acuerda que el contenido *funciones*, uno de los ejes transversales de la currícula de la EGB, será el primero en abordarse.
Se establecen encuentros periódicos, de dos horas de duración, en los que se promueve la participación activa de todos los asistentes, tanto en actividades grupales como individuales. Estas estuvieron orientadas, por un lado, hacia el análisis y la reflexión sobre las propias prácticas, a la identificación de dificultades en el aprendizaje del contenido abordado, a la propuesta de distintas estrategias de enseñanza, a la construcción de secuencias, y, por otro lado, al tratamiento del concepto de función, de la representación de una función en diferentes registros relacionada con la articulación entre registros, a la modelización. Se incluyeron momentos no presenciales destinados a lectura de documentos curriculares y bibliografía referida al contenido disciplinar tratado y a su didáctica que constituyeron un insumo para los encuentros.
Dado que las EMUNS cuentan con Laboratorio de Computación fue posible trabajar en el mismo. Como capacitadores propusimos el uso de un programa amigable y orientamos en su uso, sin embargo, puesto que había docentes que utilizaban otros y con buenos resultados, la elección fue abierta. Algunos docentes por primera vez utilizaron la computadora y realizando pequeñas experiencias con sus alumnos se sorprendieron al trabajar con un registro gráfico de funciones que les permitió visualizar propiedades de la misma sólo pensables en otros niveles.
Se realizaron experiencias áulicas y se analizaron las planificaciones presentadas por los docentes del Tercer Ciclo de la EGB

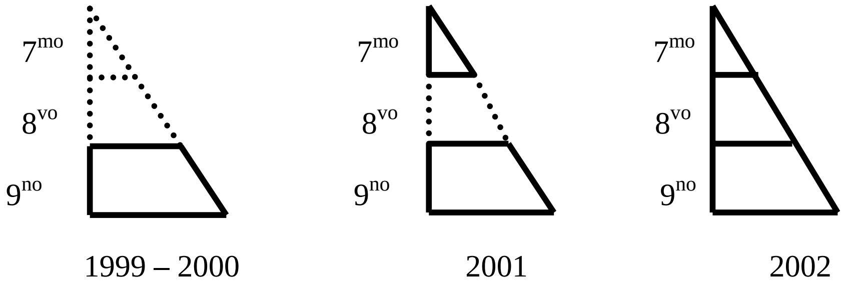
Una primera aproximación para la construcción de la currícula del Tercer Ciclo considerando el concepto de función

Durante el seminario se realizaron observaciones desde las experiencias áulicas y reflexiones sobre las prácticas cotidianas señalándose entre otras las siguientes consideraciones a ser tenidas en cuenta en la construcción de la nueva currícula.

- Desfazaje entre lo planificado y la acción en el aula. Los docentes cuestionaron la concentración, en el noveno año, de un excesivo número de contenidos.
- Pertinencia del desarrollo del concepto de función polinómica y posteriormente la racional con su nuevo enfoque observada en los casos en que se realizaron experiencias áulicas.
- Traslado de los contenidos del tercer año tradicional, con un desarrollo similar, al noveno año correspondiente a la reforma sin tener en cuenta mínimamente que los alumnos tenían edades diferentes.
- Estudio, dentro de la propia disciplina, de la funciones de proporcionalidad directa e inversa, sin haber considerado el concepto de función y restringiéndose únicamente a un registro gráfico al presentar el tema.
- Uso, lectura y análisis, en séptimo año, de tablas y gráficos, no sólo en Matemática sino también en otras asignaturas, sin utilizar el concepto de función.
- Consideración de las funciones puntuales desde un enfoque geométrico exclusivamente.

A ellas se agregaron las experiencias realizadas a partir del seminario en séptimo y octavo años trabajando sobre el concepto de función.
Todo esto fue tenido en cuenta en la nueva currícula.

Veamos un esquema de la reforma propuesta que pasa de la concentración del contenido función en noveno año a su tratamiento en forma espiralada en los tres años del tercer ciclo:



Conclusiones

Creemos que esta primera etapa en el desarrollo del proyecto, favoreció la conformación de grupos de trabajo en la institución, generó algunos acuerdos relacionados con aspectos de la enseñanza del contenido *funciones* y su didáctica, permitió analizar el uso de distintos recursos, en particular la computadora, y junto a las experiencias áulicas constituyó la base de una primera aproximación a la currícula del Tercer Ciclo de la EGB. Cabe agregar que docentes de matemática e informática del Segundo Ciclo se encuentran trabajando con grupos de alumnos de quinto y sexto año en una introducción del concepto de función a través de juegos de estrategia y utilizando variables relacionadas.

Referencias bibliograficas

Azcarate; Deulofeu (1990). *Funciones y Gráficas*. Editorial Síntesis. Colección: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Libro 26. Madrid..

Artigue (1990). Epistemologie et Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 2.3. Traducción de Artigue M. para uso en sus cursos dictados en UBA.

Baquero; Braslavsky; Llorente: *La teoría de Lev Vigotsky. Nuevas lecturas a la luz de problemas actuales*. Novedades Educativas Nº 113. Buenos Aires–Mexico D. F.

Díaz Barriga (1985). *Didáctica y curriculum*. México, D.F. Ediciones Nuovomar.

Edelstein (1997). *Un capítulo pendiente: el método en el debate didáctico contemporáneo*. En Camilloni; Davini; Edelstein; Litwin; Souto; Barco: *Corrientes Didácticas Contemporáneas*. Ed. Paidós. Biblioteca: Cuestiones de Educación. Reimpresión. Argentina

García; Martínez; Miñano (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas.* Editorial Síntesis. Madrid.

IREM (1996). *Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas*. Topiques.

Martínez Bonafé (1994). *Los proyectos curriculares como estrategia de renovación pedagógica*; Angulo Rasco: *¿A qué llamamos curriculum*?; ambos en: Angulo; Blanco(coordinadores): *Teoría y desarrollo del currículo*. Ediciones Aljibe. España.

Stenhouse (1996). *La investigación como base de la enseñanza.* Ediciones Morata. S.A. Madrid. España. Reimpresión.

UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas (1995). *Lenguajes gráficos en Matemáticas.* Nº 4. Año 2. Grao. Barcelona. Abril.

Desarrollo del Curriculum

Nivel Superior

Análisis de textos para determinar contenidos de enseñanza

Gustavo Enrique Menocal
Universidad del Norte Santo Tomas de Aquino
gusmenocal@hotmail.com

Resumen
El objetivo del presente trabajo es la selección de los contenidos de Matemática que se deberían incluir para cubrir los requerimientos mínimos de los perfiles profesionales y las asignaturas de aplicación en las carreras de Contador Público y Licenciado en Administración de Empresas. Se trata de una investigación teórica sobre la base del análisis de textos. Para realizar el análisis se seleccionaron once textos correspondientes a las asignaturas que determinan los perfiles de ambas carreras; en cada uno de ellos se relevaron los contenidos de Matemática, analizándolos brevemente y consignando su ubicación. Luego se procedió al ordenamiento y análisis de los datos, que permitió establecer un orden de prioridades y un criterio de selección. Finalmente se formularon conclusiones y algunas recomendaciones.

Desarrollo

Analizando los principios curriculares seguidos por el autor, tanto la **selección** como la **secuenciación de los contenidos** deberían tener: **significatividad lógica**; en cuanto a que los contenidos del aprendizaje deben estar estructurados de manera tal que permita a los alumnos acceder a los conocimientos nuevos utilizando los que ya conocen; **significatividad psicológica**, en el sentido de presentar las situaciones problemáticas con un grado de complejidad, significatividad y avance que sea posible alcanzar significativamente por los estudiantes; y **significatividad social**, de modo que el avance en los conocimientos de Matemática permita al alumno un mejor desenvolvimiento con el medio en que se encuentra; tanto con sus compañeros, como con sus profesores y con la sociedad en general.

"Las disciplinas por su rigor metodológico y estructura ordenada son el mejor modo de conocer la estructura y funcionamiento de la realidad física... Hay dos problemas que se plantean a esta perspectiva un tanto aséptica y formal de tratar los contenidos y experiencias del currículum. En primer lugar no puede olvidarse que la producción del conocimiento científico, los criterios de validación del mismo y, sobre todo, las orientaciones de la investigación científica y aplicación tecnológica se encuentran estrechamente vinculados a las necesidades e intereses de una formación social peculiar. Esta formación social, es en parte responsable de los que se produce, de cómo se produce y utiliza el conocimiento científico y de por qué no se produce otro tipo de conocimiento. Esta vinculación entre estructura social y producción científica también tiene que enseñarse en la escuela. Sólo así podrá comprenderse la verdadera naturaleza de los procesos de producción del conocimiento científico, que evite una visión simplificada, aséptica y mistificada de la ciencia. En segundo lugar, la producción del conocimiento en áreas disciplinares muy refinadas tiene tanto una razón lógica como una causa histórica...
Desde la posición más dinámica de la perspectiva disciplinar Phenix propone los siguientes criterios de selección: Los contenidos deben extraerse de los campos de búsqueda disciplinada. Esencialización de los contenidos: extraer, de forma racional, los conceptos e ideas claves con mayor capacidad de representación dentro del ámbito respectivo. La selección debe realizarse en función de su capacidad para ejemplificar los

métodos de investigación y los modos de comprensión en el estudio disciplinado. El conocimiento de los métodos y procedimientos de búsqueda capacitan para un aprendizaje permanente. La selección atenderá la capacidad de los contenidos para incitar y activar la imaginación. El crecimiento del significado sólo ocurre cuando el alumno asimila activamente y recrea el material del aprendizaje... El conocimiento científico no se produce en el vacío y descontextualizado, es, por el contrario, relativo a una circunstancia histórica con peculiaridades socio - políticas, es dinámico, provisional, en parte erróneo y cambiante. No conocemos el mundo como es en realidad sino mediado por una estructura conceptual que poseemos. Tal estructura de conocimientos es una construcción humana y, por tanto, relativa a las contingencias de una particular estructura social..." (Gimeno Sacristán, & Pérez Gómez, 1989)

Teniendo en cuenta el nivel en el que se ubica la asignatura y que en todos los casos es preciso tener en cuenta los tres criterios, se recomienda que en la selección de los contenidos, se ponga mayor énfasis en los criterios de significatividad lógica y de significatividad social; mientras que en la organización de los mismos, el énfasis debería estar puesto en el criterio de la significatividad psicológica.

Los libros seleccionados corresponden a las asignaturas: Estadística, Matemática Financiera, Introducción a la Economía, Economía I, Economía II, Costos I y Costos II, integrantes de las carreras mencionadas de la U.N.S.T.A. (Universidad del Norte Santo Tomas de Aquino); asignaturas estas que usan conocimientos de Matemática Superior. Los once textos se componen por: uno de Estadística , uno de Macroeconomía, tres de Economía, cinco de Costos, y uno de Matemática Financiera y están entre los recomendados por las respectivas cátedras, según lo explicitan sus programas.

De cada texto se relevaron los contenidos de Matemática, analizándolos brevemente y consignando el capítulo y la pagina al que corresponden. Se extrajeron algunos casos que parecieron interesantes por contener conceptos e ideas claves con el propósito de ser expuestos como ejemplos en las clases correspondientes y de ese modo incitar y activar la imaginación y el interés por ellos .

El motivo por el cual se analizaron cinco textos de Costos, es que se esperaba encontrar en alguno de ellos más cantidad de contenidos de Matemática Superior; al no hallarlos en el; primero, se buscó en el siguiente y así sucesivamente; pero se concluyó que en esa área de las Ciencias Económicas se utilizan muy pocos contenidos del álgebra y el cálculo.

Del análisis surge que la frecuencia de los contenidos está dada en el siguiente orden:

1)- **Representaciones Gráfica**s:

Lo que más aparece de Matemática en los textos analizados es: Representaciones graficas en dos dimensiones (R^2), predominando las gráficas de rectas y composición de segmentos de rectas; siguen en el orden las gráficas de rectas combinadas con curvas en las que se destacan intersecciones entre ambas. En la mayoría de los casos las representaciones gráficas no están acompañadas por las expresiones analíticas correspondientes, siendo en general ilustraciones de consideraciones empíricas o teóricas. Dentro de las gráficas descritas, se aprecia con cierta frecuencia representaciones en escala semilogarítmicas, que permiten la linealización de las mismas. En muchos casos, las gráficas en X-Y responden a datos de tablas de valores que provienen de situaciones reales; siendo de menor frecuencia la aparición de representaciones gráficas de funciones definidas analíticamente.

Dentro de las representaciones de curvas, es frecuente observar gráficas de funciones racionales, del tipo de hipérbolas equiláteras, aunque solo se grafican las ramas correspondiente al semieje positivo del dominio.
En algunos casos, las representaciones son de variable discreta, mientras que en otros (la mayoría), lo son de variable continua. Para lograr que las funciones de variable discreta sean graficadas y trabajadas como continuas, o con intervalos de continuidad, generalmente se divide la variable independiente en el tiempo; ya que en la mayoría de las situaciones económicas, estadísticas o financieras la variable independiente pertenece al conjunto de los números Naturales (cantidad de unidades producidas, vendidas, etc.).
Aparecen también representaciones de curvas que no responden a funciones, sino a relaciones matemáticas, aunque en ningún caso se observó sus definiciones analíticas.
Obviamente, en el texto de estadística abundan las representaciones gráficas de curvas de Distribución Normal; en muchas de ellas se calcula el área encerrada entre la curva y determinados parámetros; pero este valor se obtiene utilizando tablas confeccionadas a ese fin, no aplicando cálculo de áreas mediante integral definida. También se observa la transformación de dichas curvas de Distribución Normal a diagramas rectangulares o triangulares, en los que resulta más sencillo apreciar las áreas citadas. En el texto de estadística también se observó la aparición de representaciones gráficas en tres dimensiones (R^3), que contenían sucesiones de curvas de Distribución Normal; pero en ningún caso aparecieron las definiciones analíticas. En varios textos se apreciaron representaciones gráficas de: diagramas de torta, en los cuales los datos estaban dados porcentualmente y diagramas de barras verticales y horizontales.
2)- **Recta**:
Estos contenidos aparecen, en su mayoría, como representaciones gráficas sin definiciones analíticas, en algunos casos las hay con sus definiciones analíticas y en otros, solo las ecuaciones que las definen. Es interesante destacar los análisis de pendiente de una recta, que se repiten con frecuencia en los libros de economía, además de intersecciones entre rectas y entre rectas y curvas, paralelismo entre dos rectas (en forma gráfica) y rectas tangentes a curvas (generalmente en forma gráfica).
3)- **Funciones de una variable**:
Predominan las funciones lineales y las funciones racionales, en menor medida las funciones exponenciales y logarítmicas. Se observó que las funciones mencionadas estaban definidas en forma gráfica y también en forma analítica. La mayoría son funciones continuas o con intervalos de continuidad, aunque aparecen funciones discretas.
4)- **Números Reales**:
Es frecuente que aparezcan desigualdades e inecuaciones de diversos tipos, como así también operaciones con las mismas: $\infty \; y \; \frac{1}{\infty}$. En distintos casos se utiliza Valor Absoluto y se encontraron ejemplos de identidades matemáticas, cálculos de x2; x1/2; 1/x; etc. y conceptos de desigualdades: $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(X)\,dx$ (Neter et al., 1.980).
5)- **Símbolo Suma, Factorial, Combinaciones, Números combinatorios**:
Es muy frecuente encontrar ecuaciones con Símbolo Suma. En algunas circunstancias se presentan en forma genérica (sin sus respectivos límites), y en otras aparecen indicados sus limites inferior y superior: $\dot{e}_x = .5 + \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega - r - 1} l_{x+1}$; (Cissell & Cissell, 1.978). Hay

también ecuaciones en las que se usa factorial, e incluso algunos textos tienen apartados en los que se define factorial: $P(X)=\dfrac{(\mu x)^x e^{-\mu x}}{X!}$ $\quad X!$: *factorial* (Neter et al., 1.980).

También se han observado casos de Números Combinatorios y desarrollo de potencias de un binomio (Binomio de Newton).

$S=P(1+i)^n$; *Tasa Efectiva*: $r=\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^m-1$; (Cissell & Cissell, 1.978)

6)- **Derivada:**

En los textos de Economía, Macroeconomía, Estadística y Matemática Financiera, aparecen situaciones en las que se utiliza Derivada: tanto su definición analítica (como limite del cociente incremental), como la interpretación geométrica y distintas aplicaciones entre las que se puede destacar Recta Tangente a una curva, Máximo Relativo y Concavidad.

$E_d=\lim\limits_{\Delta P\to 0}-\dfrac{\Delta Q}{\Delta P}\dfrac{(P_1+P_2)/2}{(Q_1+Q_2)/2}=\dfrac{dQ}{dP}\dfrac{P}{Q}=-\dfrac{P\left[df\;(P)/\,dP\;\right]}{f\;(P)}$; (Samuelson, 1.979)

$\underset{\Delta Q_1\to 0}{lím}\left(\dfrac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1}\right)=-\dfrac{dQ_2}{dQ_1}=\dfrac{U_1}{U_2}=RMS\;{}^{Q_2}_{Q_1}$ Morchon & Beker, 1.997)

Existen situaciones económicas en las que se aplican Derivadas Parciales y Ecuaciones Diferenciales.

$\dfrac{\partial Q}{\partial\alpha}=\sum\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(Y-\alpha-\beta X)^2=\sum\left[-2(Y-\alpha-\beta X)\right]$ (Neter et al., 1.980)

7)- **Funciones de varias variables:**

Aparecen, en textos de Economía y Macroeconomía, funciones de varias variables. En algunos casos se explica el concepto de "*ceteris páribus*", que consiste en dejar fijas o invariantes todas las variables menos una y analizar cómo la variación de esta influye en la situación económica; luego se toma otra variable, dejando fijas las demás y se repite el análisis, etc.

8)- **Series:**

En orden de aparición siguen las Series, siendo las más frecuentes, las Progresiones Geométricas y las Series Geométricas.

$S_n=1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}$

$S_n=Rs_{\overline{n|}}=R\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ (Cissell & Cissell, 1.978)

9)- Integrales:

Aparecen Integrales Definidas con limites de integración reales e Integrales Impropias de distintos tipos.

$P(a\le x\le b)=\int_a^b f(X)dx;$ $\quad \mu x=E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}Xf(X)dx$; (Neter et al., 1.980)

$\sigma^2x=\int_{-\infty}^{+\infty}(X-\mu x)^2 f(X)dx$; *Cálculo de áreas bajo la curva de Gauss*

10)- Límite

Este tema aparece de distintas formas: como límite del cociente incremental (definición de derivada) y también se observan:

$$\lim_{x \to \infty} f(x); \quad \lim_{x \to 0} f(x);$$

(Cissell & Cissell, 1.978)

$$\lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m} \right)^{m/j} \right]^{j} = \lim_{m' \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m'} \right)^{m'} \right]^{j} = e^{j}$$

11)- Ecuaciones Algebraicas de grado "n":

Aparecen con poca frecuencia.

12)- Matices y Determinantes:

Aparecen con poca frecuencia en resolución de algunos sistemas de ecuaciones.

Conclusiones

De lo expuesto surge que los contenidos de Representaciones Gráficas deberían enseñarse en forma transversal desde el primer día de clase. Si bien las más frecuentes son las representaciones en R^2, es necesario al menos, incluir conocimientos generales de representaciones en R^3, que aparecen en textos de estadística; como así también la forma de graficar desigualdades (que se utiliza mucho en métodos de resolución de problemas de programación lineal) y graficar e interpretar diagramas de torta, histogramas, etc. En este punto puede resultar muy útil usar como ejemplos los informes periodísticos. (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad lógica).

Se observa que el contenido Recta es muy frecuente, fundamentalmente en interpretaciones gráficas de pendiente, como en intersecciones de rectas entre sí y de rectas con curvas. El autor considera de importancia ahondar en los ejemplos de situaciones reales, buscando seleccionar los que contienen la mayor cantidad de conceptos e ideas claves (pendiente, crecimiento, ordenada al origen, intersecciones, etc.), de modo que sirvan a los estudiantes para expresarse con propiedad y fluidez, tanto en su medio social, como en el académico (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad social).

En el tema de funciones de una variable, se repiten con frecuencia algunos tipos especiales tales como funciones exponenciales y funciones racionales de ciertos tipos. Consecuentemente con lo manifestado en el parágrafo anterior, cuando se elabore el epitome correspondiente seria apropiado profundizar más en estos contenidos con situaciones problemáticas reales. (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad social).

Es obvio que hay contenidos, como propiedades de Números Reales, Desigualdades, Valor Absoluto, etc., que no se pueden dejar de lado; puesto que no sería posible avanzar, sin el manejo de estos en los temas específicos a enseñar, ya que constituyen contenidos de soporte imprescindibles. Pero hay que considerar que los estudiantes ya los adquirieron en el nivel medio, de modo que sería conveniente volver a ellos en clases de apoyo.

Se observa que contenidos como Símbolo Suma, Factorial, Combinaciones, Números combinatorios y Binomio de Newton, aparecen con mucha frecuencia en varios textos de las distintas ramas analizadas; se considera necesario pues, elaborar un epitome que los contenga y que a su vez los relacione con conocimientos más generales. (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad lógica).

Derivada es un contenido de gran aplicación en distintas ramas de las Ciencias Económicas, por lo tanto resulta excelente presentarlo como aplicación de alguno de esos temas mediante situaciones problemáticas significativas y ahondar conceptualmente en la

definición analítica y en la interpretación geométrica; mientras que se cree más apropiado organizar procedimentalmente las propiedades y los métodos o reglas de derivación. (selección de contenidos siguiendo los criterio de significatividad social y psicológica).
La mayoría de los fenómenos económicos y/o sociales dependen de muchos factores, esta situación tratada desde un punto de vista matemático, generan funciones de varias variables. Para analizarlas, es preciso apelar a los conceptos de *ceteris páribus*, o derivadas parciales. Es importante incluir estos contenidos con la profundidad que exige su tratamiento en los textos de economía o estadística en los que aparecen. (selección de contenidos siguiendo el criterio de significatividad social).
Se han encontrado numerosos ejemplos de Series Geométricas; esto promueve a tratarla como contenido organizador en el epitome correspondiente. No obstante, se cree innecesario profundizar demasiado en otros tipos de series. (selección de contenidos siguiendo los criterios de significatividad lógico y social).
Asimismo, existen temas que no han aparecido en los textos investigados y que sin embargo figuran en la gran mayoría de los programas de Matemática de las Facultades de Ciencias Económicas y también en la Propuesta de Contenidos Mínimos que publicó la Asociación de Docentes de Matemática en Facultades de Ciencias Económicas y Afines. (Asociación de Docentes de Matemática en Facultades de Ciencias Económicas y Afines, 1.997). Entre ellos el que brilla por su ausencia es Trigonometría. Lo único que se encontró de este tema en los textos analizados fue consideraciones sobre pendiente de una recta, de la forma: $tg\,\alpha$. Lo que hace pensar en la prescindencia de tales contenidos.

Referencias bibliográficas

Asociación de Docentes de Matemática en Facultades de Ciencias Económicas y Afines, (1997, setiembre). Anexo Comisión 1: *Contenidos mínimos área de Matemática*. Salta, Argentina.
Backer, M. et al. (1.983). *Contabilidad de Costos. Un Enfoque para la toma de Decisiones*. México, D. F. México: McGraw-Hill.
Cissell, R. & Cissell, H., (1.978). *Matemática Financiera*. México, D. F. México: Compañía Editorial Continental S.A.
Domínguez, Luis (1979). *Costos por Proceso y Estándares*. Buenos Aires, Argentina: Cangallo SACI.
Domínguez, L. (1981). *Costos Especiales*. Buenos Aires, Argentina: Cangallo SACI.
Domínguez, Luis, (1981). *Costos y Presupuestos*. Decisiones y Técnicas. Buenos Aires, Argentina: Cangallo SACI.
Dornbusch, R. & Fischer, S. (1994). *Macroeconomía*. Madrid, España: McGraw-Hill. Interamericana de España S.A.. 6ta Edición.
Espósito, W. et al. (1987). *Tratado de Contabilidad de Costos*. Buenos Aires, Argentina: Macchi.
Gimeno Sacristán, J. & Pérez Gómez, A. (1989). *La enseñanza, su teoría y su práctica*. Madrid, España: Ediciones Akal S.A.
Morchon, F. & Beker, V. (1997). *Economía. Principios y Aplicaciones*. Madrid, España: McGraw-Hill, 2da Edición.
Neter, J. et al. (1980). *Fundamentos de Estadística*. México, D.F., México: ContinentalS.A.
Samuelson, P.; Nordhaus, W., (1996). *Economía*. Madrid, España: McGraw-Hill.
Samuelson, P. (1979). *Cursos de Economía Moderna*. Madrid, España: Aguilar S.A.

Cursos de iniciación en el área de matemática, experiencia en la escuela de administración y contaduría. FACES UCV

Juana Lorenzo de Centeno
Universidad Central de Venezuela
juanalorenzo@yahoo.com

Resumen
El curso de iniciación de la Escuela de Administración y Contaduría, se viene dictando desde el segundo período lectivo del año 1999, con la finalidad de ofrecer a los estudiantes que ingresan a nuestra Escuela, el desarrollo de un conjunto de destrezas que les permitan comenzar con altas probabilidades de éxito la carrera.
Una de las áreas donde desarrollamos las destrezas mencionadas anteriormente es la de Matemática, donde insistimos en el desarrollo de métodos gráficos para la interpretación de definiciones básicas que se definirán formalmente en Matemática I, II y III.
Realizar cursos de iniciación es un proceso cuestionado en diferentes instancias ¿es necesario invertir recursos en corregir las fallas de educación media? ¿Estamos incrementando la carrera en un semestre innecesariamente? ¿Es preferible repasar la matemática de bachillerato? ¿Se deben incorporar los tópicos tratados en Iniciación en la carrera?
En estos momentos se hace necesario evaluar los contenidos programáticos del curso de Matemática en el proceso de iniciación con el fin de seleccionar su contenido si fuese necesario o comprobar que las estrategias, objetivos, técnicas de trabajo y evaluación han sido adecuadas.
En ese sentido presentamos las siguientes inquietudes para su discusión y revisión con la finalidad de proponer una investigación donde esperamos consultar la opinión de coordinadores, profesores, estudiantes con experiencia en cursos de iniciación dictados por la EAC, estudiantes de nuevo. Ingreso en la EAC y experiencias similares en otras escuelas.

Introducción

El curso de iniciación en Matemática se ha dictado en los 2 últimos años bajo las condiciones siguientes:

Dirigido a:	Estudiantes de la Escuela de Administración y Contaduría con ingreso por prueba interna entre los puestos 51 y 351 (los 50 primeros ingresan directamente a primer semestre.
Tiempo aproximado del Curso:	72 horas
Distribución de las clases:	6 horas semanales
Total de semanas empleadas:	12 semanas
Contenido del Programa experimental:	Se desarrollarán seis (6) temas cuya descripción realizaremos a continuación:

Tema 1. Intervalos y puntos del plano cartesiano

Existen tres representaciones útiles, aunque no totalmente equivalentes, de los intervalos. Éstas serán las que se trabajarán en el tema. La noción de intervalo es utilizada para introducir algunas propiedades. No se darán explícitamente todas las definiciones, ni convenciones con el fin de que el profesor las dé en la medida en que los alumnos la soliciten. Se recomendará no insistir innecesariamente en el formalismo de la teoría de conjuntos.
Los ejercicios del plano cartesiano se utilizarán no sólo para introducir la noción del punto del plano, sino también para enfrentar al alumno con ciertas preconcepciones erradas de la notación algebraica.

Tema 2. Estudios de curvas
Se estudian las curvas (gráfico de función) que tengan como máximo un punto vertical.
En este tema el uso explícito de la noción de función o el de fórmula, entorpecería la comprensión del tópico, además ello se hará posteriormente. Al enseñar el contenido de este capítulo se evitará el uso explícito de la noción de función y no se relacionará el gráfico con las *fórmulas.*

Tema 3. Operaciones con curvas
Los caminos actúan en varias direcciones: por una parte sirven para codificar puntos del plano de manera no trivial. Esta actividad juega un papel importante cuando se debe pasar a una representación o descripción simbólica de aquellas que se ven en el plano. Los caminos también son fundamentales para construir de manera natural las curvas compuestas o la curva inversa. Finalmente, son un recurso invalorable para el descubrimiento de las transformadas horizontales y verticales y el estudio de las propiedades.
El funcionamiento de lo que se llama visión total o global, reside en el reconocimiento, en una curva, de ciertos hechos que van a facilitar la graficación de la curva resultante sin casi tener que hacer operaciones numéricas. Así, algunos de los aspectos más importantes de las curvas al hacer la operación con sus puntos de corte con los ejes x, las partes positivas, las zonas de crecimiento, etc., de esta manera las nociones introducidas en los capítulos anteriores entran en juego, quedan reforzadas y el alumno puede apreciar su utilidad.

Tema 4. Fórmulas y curvas
El diagrama es un recurso semiótico extremadamente poderoso. Para que pueda ser utilizado desde un punto de vista didáctico es necesario asegurar que el alumno tenga una comprensión cabal de su funcionamiento. En este tema se motivaría al alumno para el uso de la calculadora, de esta manera aparece como un recurso útil para condensar información.

Tema 5. Rectas, parábolas e hipérbolas
El estudio de las curvas tratadas en este tema está orientado a interpretar y manipular los coeficientes de las respectivas fórmulas, tanto para graficarlas como para cambiar a la forma algebraica.

Tema 6. Inecuaciones
La resolución de inecuaciones en una variable, privilegia el enfoque funcional, esto posibilita el uso de gráfico de funciones para la búsqueda de la solución y al mismo tiempo, permite evitar la manipulación algebraica del símbolo de desigualdad.
El otro aspecto formativo es aprender a modelar problemas planteados con palabras en términos de sistemas de ecuaciones lineales.
Al haber desarrollado conocimiento de representación gráfica de funciones le resultará más sencillo la comparación entre el método algebraico y el método gráfico de resolución de inecuaciones.
El tema plantea una interacción entre lo cualitativo, dado por el gráfico, y lo cuantitativo dado por el álgebra.

Conclusión

Se pretende con este curso, la comprensión de las ideas básicas del cálculo. En los dos primeros temas se desarrolla un conocimiento intuitivo de los objetos o *curvas* y que usualmente se denominan gráficos de funciones reales.
El tercer tema fortalecerá ciertas nociones algebraicas esenciales, sin hacer ninguna relación con los gráficos.
El cuarto tema une el trabajo con los gráficos hechos en los dos primeros temas con lo algebraico del tercero.
El tema cinco permite refinar y profundizar las ideas del cuatro y los temas restantes permitirán al estudiante conocer gráfica e intuitivamente herramientas de trabajo básicas para el trabajo en la materia Matemática I de la Escuela de Administración y Contaduría.

Resultados

A continuación presentamos los resultados en los dos cursos de iniciación realizados y los resultados en los cursos de Matemática I y Matemática II.

Matemática Iniciación	**SEG 99**	**SEG 00**
Inscritos	177	357
Aprobados	107 (60%)	279 (78,15%)
Reprobados	70 (40%)	78 (21,85%)

La experiencia en los semestres antes y después de realizar un curso de iniciación la resumimos en el siguiente cuadro:

Matemática I	**PRI 99**	**Seg 99**	**PRI 00**	**Seg 00**
Inscritos	415	355	341	199
Aprobados	196 (47,23 %)	232 (65,35 %)	188 (55,13 %)	104 (52,26%)
Reprobados	219 (52,77 %)	123(34,65 %)	153 (44,87 %)	95 (47,74%)

El primer curso de iniciación se dictó en el año 1999 durante el primer semestre, para ese momento el porcentaje de aprobados fue de un 47,23%, considerando que en ese grupo de estudiantes se encontraban cursando los primeros 50 que aprobaron la prueba interna el resultado no podemos considerarlo satisfactorio.
En el semestre siguiente, segundo del 99, el número de aprobados se incrementó a un 65,35%, podríamos atribuir esta leve mejoría a la realización del curso de iniciación pero no podemos ser contundentes en esta afirmación pues hasta la fecha no se ha realizado un trabajo que permita demostrarlo.
Las proporciones se mantienen muy parejas durante el año 2000 razón que nos mueve a preocuparnos en evaluar el resultado de los cursos de iniciación ¿ Vale el esfuerzo continuar con esta propuesta? ¿Debemos cambiar nuestras estrategias?

Matemática II	**PRI 99**	**Seg 99**	**PRI 00**	**Seg 00**
Cursantes	414	349	395	339
Aprobados	190 (45,89 %)	187 (53,58 %)	163 (38,8 %)	140 (41,30%)
Reprobados	224(54,11 %)	162(46,42 %)	232 (61.2 %)	199 (58,70%)

En el segundo semestre de 1999 presenta un incremento en el porcentaje de aprobados lo que parece lógico ya que el porcentaje de aprobados en matemática I aumentó por las razones antes expuestas. Es importante destacar que en los dos períodos siguientes el porcentaje de aplazados aumentó y fue mayor que el porcentaje de aprobados, este hecho nos debe llevar a realizar un análisis profundo sobre el curso de iniciación.

Discusión

Proponemos una investigación que permita evaluar la pertinencia del contenido del curso de iniciación el siguiente esquema de trabajo:

<u>Objetivos Generales:</u>
Analizar la selección del contenido programático del curso de iniciación en la Escuela de Administración y Contaduría, en el área de matemática.
<u>Objetivos Específicos:</u>
1. Estudiar la experiencia de docentes involucrados en el trabajo de iniciación en el área de matemática.
2. Consultar la experiencia de alumnos con experiencia en cursos de iniciación anteriores al año 2001 en la EAC.
3. Evaluar las expectativas de los estudiantes de nuevo ingreso en relación con el curso de iniciación, área de matemática para el año 2001.

<u>Materiales y Métodos:</u>
- Prueba diagnóstico en el área de matemática para los estudiantes de nuevo ingreso.
- Entrevistas de profundidad a docentes con experiencias en cursos de iniciación en la EAC.
- Entrevista de profundidad con docentes de la cátedra de matemática en la EAC.
- Consultas de opinión a los estudiantes de nuevo ingreso y participantes del curso de iniciación 2001.
- Prueba diagnóstico en el área de matemática para los estudiantes de nuevo ingreso Primer Semestre

Referencias bibliográficas

Alson, Pedro. (1996). *Método de graficación*. 3ª ed. Caracas: Editorial Erro.

Párraga R., Alicia. (2000). *Proyecto de curso de iniciación II-2000.* Caracas: U. C. V., Escuela de Administración y Contaduría.

Silva, Metal. (1982*). La habilidad numérica del estudiante que solicita ingreso a la Educación Superior.* Mérida (Venezuela): U. L. A.

Venezuela. Universidad Central. Comisión de Admisión Interna, Escuela de Administración y Contaduría. (1996*). Consideraciones críticas al informe sobre los resultados de la selección de nuevos estudiantes presentado por la Dirección de la Escuela de Administración y Contaduría*. Caracas.

Venezuela. Universidad Central. (2001). *Jornadas de Admisión 2001. Compartiendo experiencias.* El Laurel (Estado Miranda, Venezuela).

Venezuela. Universidad Nacional Abierta. (1992). *Procesos y estrategias de solución de problemas.* Curso Introductorio. Caracas**.**

Documentos de los Grupos de Trabajo y Discusión

Actividades de enseñanza que pueden apoyar el tránsito de los estudiantes desde la secundaria a la Universidad

Delia Belgrano Rawson*, Guillermo W. Herrera*, Magdalena Pagano**,
Walter Álvarez**, Eduardo Lacués**
*Facultad Regional Mendoza. Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
**Universidad Católica del Uruguay (UCU). Uruguay
deliab@frm.utn.edu.ar deliab@tutopia.com gherrera@frm.utn.edu.ar gwherrera@tutopia.com
mapagano@ucu.edu.uy walvarez@ucu.edu.uy elacues@ucu.edu.uy

Resumen
El problema de la articulación entre la enseñanza secundaria y la terciaria provoca preocupación en nuestros países, por muy diversos motivos. En el primer año de universidad un gran número de alumnos abandona, o al menos, se atrasa en relación con los plazos previstos en las distintas carreras. En este escenario, Matemática juega un papel destacado, al punto de ser señalada como uno de los principales obstáculos a superar por parte de los estudiantes. La propuesta es discutir estas cuestiones, con las evidencias que cada uno pueda aportar, y procurar acercar soluciones que puedan ser implementadas y evaluadas en nuestras aulas. La forma de trabajo que sugerimos es la de dividir cada sesión en dos partes: una expositiva en la que se aborde alguno de los aspectos anteriores, seguida de otra deliberativa en la que cada uno de los integrantes pueda hacer su aporte. Entre los temas a exponer figuran:
-Requerimientos que se exigen al ingresante en relación con sus conocimientos de Matemática.
-Apoyos que pueden suministrarse a los estudiantes para provocar el desarrollo de sus capacidades intelectuales.
-Formas de generar actitudes positivas hacia el aprendizaje de la matemática.

Constitución y forma de funcionamiento del grupo

En este grupo se integraron docentes tanto de enseñanza secundaria como universitarios, provenientes de diferentes países (Argentina, Costa Rica, México, Venezuela, Uruguay).
Se trabajó en dos sesiones. En cada una, luego de una corta introducción por parte de los convocantes, se pasó a un régimen de mesa redonda, en la que se recibieron los aportes de gran número de los participantes.

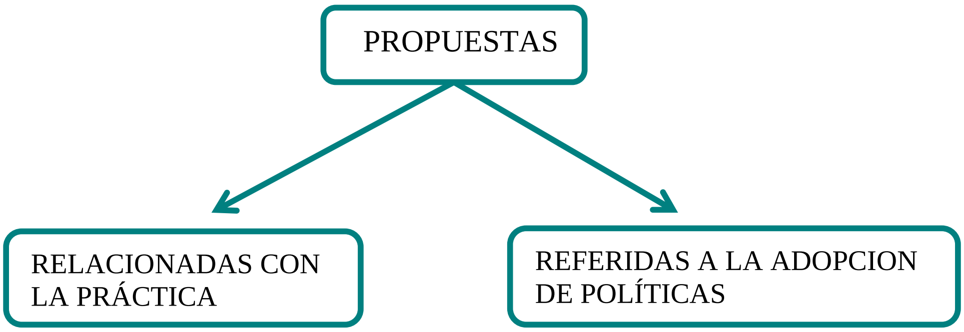
Análisis de la situación

Como una primera conclusión, puede establecerse que en los diferentes países existen diversas modalidades de egreso de la secundaria (que van desde la aprobación de las diferentes asignaturas que componen el currículo de la escuela secundaria, hasta la necesidad de rendir distintos exámenes de calificación) y de ingreso a la universidad (desde cumplir la sola condición de haber completado los estudios secundarios hasta la de concursar por alguna de las plazas disponibles).
Una segunda conclusión es que también existen marcadas diferencias entre los contenidos matemáticos que se tratan en la secundaria, y por lo tanto en la universidad, en los diferentes países. En algunos, el cálculo diferencial se trata a partir del ingreso en la universidad, en tanto en otros forma parte de los programas de secundaria.
A pesar de constatar estas diferencias, existe consenso en el sentido de que los cursos de matemática del primer año universitario se constituyen en un barrera difícilmente franqueable para muchos de los estudiantes. Esto ha llevado a que en muchos lugares se

implementen medidas tendentes a superar esta situación, que han tomado formas como cursos de ingreso previos al comienzo de los correspondientes al currículo universitario o como trabajos de compensación en forma simultánea a estos mismos cursos.
Sin embargo, y pese a que algunas de estas experiencias se consideran exitosas, se reconoce la existencia de un problema estructural, que no parece ser abordable sólo por los docentes de secundaria ni sólo por los universitarios, y que está unido a factores cognitivos, afectivos y actitudinales que se asocian con el tránsito entre la secundaria y la universidad.
En el orden cognitivo, se notan necesidades de orden diferente entre la secundaria y la universidad en cuanto a capacidades intelectuales (como las de inducir generalizaciones, reconocer casos particulares, manejar registros simbólicos de diversas clases, entre otras), y en la universidad suele aceptarse como responsabilidad casi exclusiva de la secundaria el desarrollarlas a un nivel adecuado.
En el plano afectivo puede mencionarse la diferente consideración del estudiante que se hace en cada subsistema, de manera que se pasa de tutelarlo muy cercanamente en la secundaria a dejarlo librado a sus solas posibilidades en la universidad, provocando de esta manera reacciones de aislamiento o de desamparo.
En cuanto a lo actitudinal, se señala que el trabajo en la universidad requiere, entre otras condiciones, de dedicación prolongada a tareas de diversos tipos (entre los que se incluyen trabajos de laboratorio, confección de informes, resolución de ejercicios y de problemas), y de cierta capacidad de tolerar presiones (representadas, por ejemplo, por la necesidad de cumplir con fechas de entregas de trabajos parciales o rendir exámenes de acuerdo a calendarios muy cortos), en un grado muy distinto al que se plantea en secundaria.
El reconocimiento de estos hechos conduce a la necesidad de disminuir las distancias que suelen separar a docentes de secundaria y universitarios, de manera de tender puentes que vinculen las actividades matemáticas que se realizan en cada subsistema y así minimizar el impacto negativo que se produce en los estudiantes al pasar de uno a otro.
Aceptada esta necesidad, la atención se concentró en el siguiente problema: si los distintos países tienen diferencias tan marcadas en sus currículos, tanto en secundaria como en la universidad, ¿qué clase de propuestas pueden tener una generalidad suficiente como para ser válida en todos ellos?.
La respuesta a esta cuestión constituye el aporte de este grupo al diseño de prácticas de enseñanza y a la implementación de políticas institucionales en pos de lograr una mejor inserción en el sistema universitario de los estudiantes que egresan de las escuelas secundarias, y se presenta a continuación.

Propuestas

Dividimos nuestras propuestas en dos clases: las que tienen que ver con la práctica docente y las que se refieren a la adopción de políticas institucionales.



En relación con la práctica docente, hubo acuerdo en que, debido a las diferencias detectadas, no podía pretenderse abordar el problema de qué contenidos matemáticos debían tratarse y que, por lo tanto, era necesario tratar de identificar prácticas que pudieran llevarse a cabo con cualquier contenido.
En este sentido, se acepta que debe buscarse un balance entre diversos aspectos de los saberes matemáticos:

a) Origen histórico y social: problemas que dieron origen ideas matemáticas; evolución en el tiempo de las formas de concebir la matemática.
b) Aplicabilidad: construcción de modelos; interpretación, predicción y control de fenómenos.
c) Carácter formal: estructura lógica; representaciones simbólicas.
d) Procesos de cálculo: numérico; simbólico.

En otro orden, se decidió abordar las tres dimensiones mencionadas antes: cognitiva, afectiva y actitudinal, y tratarlas por separado.
En cuanto a la primera, se reconoce la necesidad de que se trabaje en el desarrollo de capacidades generales, entre las que se cuentan las siguientes:

a) Comprender consignas y aplicar procedimientos apropiados para responderlas.
b) Abstraer propiedades generales comunes a diversos objetos.
c) Reconocer casos particulares de formulaciones generales.
d) Comunicarse con otros en forma adecuada (escrita, oral, gráfica, simbólica) a la situación de trabajo.
e) Traducir la información presentada en un registro (gráfico, simbólico, verbal, numérico) a cualquiera de los otros.

En el aspecto afectivo, se detecta la necesidad de apoyar el proceso de transformación personal que lleva a un estudiante de la secundaria a convertirse en uno universitario, mediante la generación de compromisos con sus pares, con sus profesores y con la institución. Para atender este aspecto es que se hacen propuestas en cuanto al diseño de políticas institucionales.
La tercera componente considerada es la actitudinal. Éste es un tema particularmente importante, porque se considera que algunas actitudes de los estudiantes benefician los procesos de aprendizaje. En este sentido, se planteó buscar formas de estimular actitudes como las siguientes:

a) Persistencia frente a las dificultades, como forma de encarar proyectos a largo plazo como el que constituye una carrera universitaria.
b) Disposición a aceptar presiones y controles, propios de la actuación profesional y de la propia vida académica.
c) Valoración positiva del saber, en particular del matemático, como elemento organizador del conocimiento personal y fundamento de la práctica profesional.
d) Asunción de la propia responsabilidad en el proceso de formación personal y profesional.

Se entiende que un planteo como el anterior puede facilitar la búsqueda de troncos comunes en la secundaria (preparatoria a la universidad), en la universidad y entre ambos subsistemas, en cada país en particular, de manera que sea posible identificar contenidos matemáticos que se conviertan en marcos de referencia sobre los que diseñar prácticas docentes concretas, que acorten las distancias que actualmente existe entre ambos subsistemas.

Por otro lado, la atención de los integrantes del grupo también se centró en las diferentes formas de organización de los sistemas educativos y de las instituciones de enseñanza, tratando de detectar aquellos aspectos que se considera favorecen los aprendizajes y de esta manera, propiciar la adopción de políticas que tiendan a fortalecerlos.

En relación con este aspecto del problema, se consideró que es necesario atender el problema de la preparación de los profesores, sobre todo los de la universidad, donde una larga tradición ha establecido que la formación en docencia es de importancia menor frente a la disciplinar o incluso la profesional. Se entiende que dado que los cursos universitarios de los primeros años son una continuación natural de los de la secundaria, debe buscarse para atender estos cursos a profesores que reúnan un sólida preparación en la disciplina matemática y a la vez en didáctica, de manera que puedan afrontar el desafío de presentar los contenidos de sus cursos en forma correctamente adaptada a la carrera profesional en la que éstos se insertan.

En este sentido, deben buscarse caminos que propicien los contactos entre docentes, tanto con los del interior de cada país como con los del extranjero. Estos intercambios redundan en mayores motivaciones para desempeñar la tarea, a la vez que son oportunidades de mejorar la formación profesional.

Otro elemento que entró en esta discusión es el del establecimiento de un sistema de tutorías (que algunos integrantes del grupo mencionaron como experiencia exitosa en sus instituciones), que coloca a cada ingresante a la universidad en relación directa con un docente que se encarga de seguir su proceso académico.[1] Se considera que este sistema presenta al menos dos elementos que favorecen el desempeño del alumno: por un lado, se generan vínculos que progresivamente van comprometiendo al estudiante con la institución, a través de sus compañeros y del cuerpo docente; por otro, se puede acompañar en el aspecto afectivo el tránsito que debe hacer un joven para adquirir autonomía y responsabilizarse por su propia formación.

[1]Tutoria: proceso de acompañamiento durante la formación de los estudiantes, que se concreta mediante la atención personalizada a un alumno o a un grupo reducido de alumnos por parte de académicos competentes y formados para esta función, apoyándose conceptualmente en las teorías del aprendizaje más que en las de enseñanza; dicho proceso de acompañamiento es de tipo académico que busca mejorar el rendimiento de los estudiantes en aspectos tanto académicos como afectivos, solucionar problemas escolares, promover y corregir hábitos de estudio, trabajo, reflexión y convivencia social, entre otros.

Vinculado con el anterior, pero más próximo al problema de los aprendizajes, se trató el tema de los diferentes sistemas de apoyo docente a los estudiantes. En particular, se señala la importancia de que se establezcan momentos dedicados a clases de consulta, en las que los estudiantes tengan oportunidad de un contacto más personal con el profesor. Se mencionaron experiencias que muestran que muchos estudiantes pueden aprovechar estas instancias para mejorar su desempeño o para superar carencias previas. Este tipo de apoyos no tiene por qué limitarse al ámbito universitario, y pueden ser además oportunidad para que se trabaje no sólo en los aprendizajes disciplinares, sino también en las dimensiones que se mencionaron antes. Estas actividades se asumen por los docentes como parte de su compromiso con la institución, y, al menos en el nivel universitario, pueden convertirse en una instancia de participación para estudiantes avanzados.

Resumen

Se ha descrito la integración y el funcionamiento del grupo de discusión.
Se presenta un análisis de la situación que se da en diferentes países, y partir de este diagnóstico se efectúan propuestas en dos ámbitos diferentes: el que se refiere a las prácticas docentes y el que tiene que ver con la implementación de políticas institucionales.
Se destaca como una conclusión fundamental la necesidad de tender puentes entre las actividades de enseñanza de matemática en la escuela secundaria y en la universidad, a través de un mayor diálogo entre los docentes de cada subsistema.

Índice de autores