ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

RELME

C U B A 2 0 0 2

Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

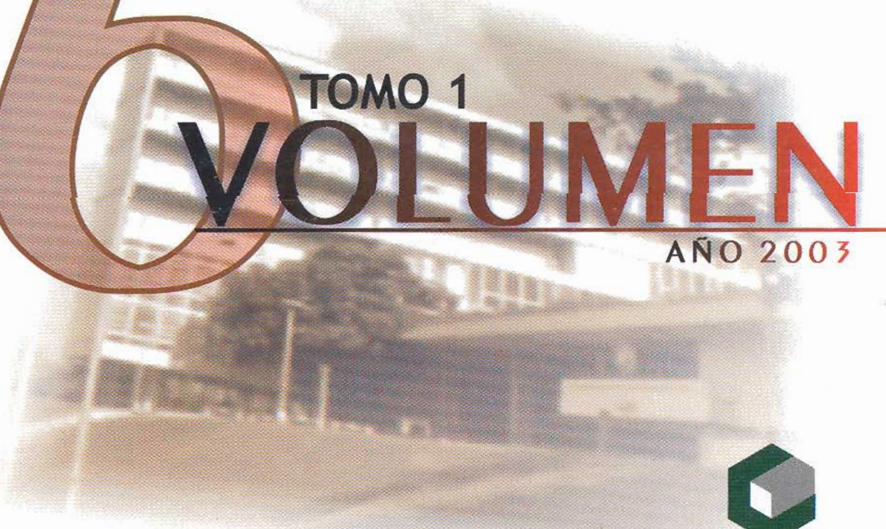
Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

16

TOMO 1

VOLUMEN

AÑO 2003



Instituto Superior Politécnico
José Antonio Echeverría
cujae

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 16

Tomo 1

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
Volumen 16, año 2003

Editor:
Juan Raúl Delgado Rubí

Diseño de Portada:
Marcos Díaz Cedeño

I.S.B.N.: 956-8298-01-0 (Obra Completa)
Volumen 1 I.S.B.N.: 956-8298-02-9

Diagramación e Impresión:
Lorena Impresores Ltda.
Ñuble 1161, Santiago
Fonos: 4639343 - 5559292 - Fono/Fax: 4639342
E-mail: lorenaimpresores@hotmail.com

Impreso en Chile/ Printed in Chile

RELME

CUBA 2002

Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

Comité Internacional de RELME 16

Presidente:	Eugenio Carlos Rodríguez	Cuba
Vocales:	Cecilia Crespo Crespo	Argentina
	Guadalupe Tejada	Panamá
	Carlos Rondero	México

Comité Nacional Organizador de RELME 16

Presidente	Dr. Eugenio Carlos Rodríguez
Asuntos Académicos	Dr. Juan Raúl Delgado Rubí
Apoyo Logístico	Dra. María Lucía Brito Vallina
Relaciones públicas	Lic. María de los Angeles González Peñalver
Relaciones Internacionales y Divulgación	MSc. Mayra Durán Benejam
Finanzas e Inscripción	MSc. Esther Ansola Hazday
Coordinación Técnica	Dra. Bertha Fernández de Alaiza García-Madrigal
Coordinación Nacional	Dra. Virginia Alvarez Suárez
Miembros	Lic. Eva Escalona
	Lic. Lourdes Tarifa
	Dr. Luis Campistrous

PRESENTACIÓN:

Cuando en 1995, durante la 9na Reunión Centroamericana y del Caribe de Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa celebrada en el Centro de Convenciones del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas en Cojímar, La Habana, surgió la idea de acoger en el seno del movimiento a los docentes e investigadores en Matemática Educativa de toda Latinoamérica se daba un importantísimo paso en pos del desarrollo de esta disciplina y del mejoramiento de la enseñanza de la Matemática en nuestros países.

El siguiente año, durante la Décima Reunión en Puerto Rico se constituyó el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y fue ya en México, principal promotor de este movimiento donde se desarrolló la primera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, la cual conservó el ordinal correspondiente de sus predecesoras, o sea se llamó RELME 11 en aras de destacar que era un mismo movimiento, sólo que ahora enriquecido.

La Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 16, desarrollada del 15 al 19 de julio del 2002 en La Habana constituyó un momento importante de consolidación del movimiento. En ella, a diferencia de citas anteriores, pudo participar una nutrida delegación de profesores e investigadores cubanos, quienes trasmitieron sus experiencias en esta área, estando muchos de los trabajos avalados por Tesis de Maestrías y Doctorados de sus autores. Asimismo, concurrió una importante representación de colegas de Argentina, Bolivia, Canadá, Colombia, Costa Rica, Chile, Ecuador, España, Estados Unidos, Guatemala, Honduras, México, Panamá, Perú, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela.

Los artículos presentados en el presente Volumen 16 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, como en otras ediciones, siguieron las exigencias planteadas por el CLAME. En esta intensa y dedicada actividad colaboraron los siguientes evaluadores, para los cuales se hace patente el reconocimiento por la encomiable labor desarrollada:

Abel Fernández Infante	Cuba
Adriana González	Argentina
Alfredo del Castillo	Cuba
Ana Tadea Aragón	Argentina
Analida Ardila	Panamá
Beatriz Deiros	Cuba
Bertha Fernández de Alaiza	Cuba
Carlos Rondero	México
Carmen Luisa Méndez Fabret	Cuba
Cecilia Crespo	Argentina
Cecilia Gaita	Perú
Celia Rizo	Cuba
Christiane Ponteville	Argentina
Crisólogo Dolores	México
Delia Lerner	Argentina
Ed Dubinsky	EE.UU
Edison De Faria	Costa Rica
Eréndira Valdez	México
Eugenio Carlos Rodríguez	Cuba
Fabián Valiño	Argentina
Francisco Cordero	México
Guadalupe Tejada de Castillo	Panamá
Gulnara Baldoquín de la Peña	Cuba
Gustavo Bermúdez	Uruguay
Herminia Hernández Fernández	Cuba
Juan Manuel Nole	Panamá
Juan Raúl Delgado Rubí	Cuba
Liliana Homilka	Argentina
Lourdes Hernández Rabell	Cuba
Luis Campistrous	Cuba
Luis R. Moreno Chandler	Panamá
Malva Analia Alberto de Toso	Argentina
Margarita Véliz	Argentina
María Cristina Pérez	Cuba
María del Carmen Pérez	Argentina
María Lucía Brito	Cuba
Marta Elena Valdemoros	México
Martha Fernández Casuso	Cuba
Mayra Durán Benejam	Cuba
Mayra Solana Sagarduy	Cuba
Nélida Pérez	Argentina
Olga Lidia Pérez González	Cuba
Oscar Sardella	Argentina
Otilio Mederos Niceto	Cuba
Patricia Camarena	México
Patricia Sadovsky	Argentina
Paúl Torres	Cuba
Rafael Espín Andrade	Cuba
Raúl de la Cruz Cordovés	Cuba
Regla Calderón Ariosa	Cuba
Ricardo Cantoral	México
Rosa María Farfán	México
Santa Daysi Sánchez	R. Dominicana
Sonia Hernández Rrodríguez	Cuba
Teresita Noriega	Cuba
Teresita Peralta	Costa Rica
Víctor Martínez Luaces	Uruguay
Yolanda Ofarrill	Cuba

Asimismo, el Comité Organizador Nacional quiere agradecer a los participantes y ponentes de RELME 16, ya que fueron ellos los que hicieron posible que se llevara a cabo con éxito este evento, así como a los representantes del CLAME y del Comité Internacional por la colaboración y orientación ofrecida. Merecen un agradecimiento especial Raúl de la Cruz Cordovés, Carmen Luisa Méndez Fabret, Martha Fernández Casuso y Sonia Hernández Rodríguez sin cuya colaboración y apoyo incondicional, tanto la realización del evento como la edición de las Actas no hubiera sido posible.
Queremos patentizar el agradecimiento a Marlén Marcos Vázquez, Abel Fernández, Lourdes Casañas, Ana Margarita Vicente, Beatriz Deiros, María del Carmen Rodríguez, Alfredo del Castillo, Leonor Fernández, Carlos Cepero y Valentina quienes sin ser miembros del Comité Nacional Organizador, trabajaron abnegadamente en pos de la realización del evento.

Un agradecimiento especial queremos patentizar a todos los estudiantes de Ingeniería Industrial e Informática que colaboraron en la preparación y realización del evento, en especial a Eduardo Lima Mitev y Susel Ruiz Durán quienes trabajaron incansablemente antes y durante el evento y a Marbelys Vega Álvarez por su infatigable labor durante el proceso de edición de las Actas, sin cuya ayuda hubiera sido imposible llevarla a feliz término.

Comité Organizador Nacional

Indice del Tomo 1

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 16

Tomo 1

Conferencias Plenarias

Matemática Educativa: un camino entre filiaciones y rupturas

Rosa María Farfán
Departamento de matemática educativa, Cinvestav – IPN. México
rfarfan@mail.cinvestav.mx

Resumen

Si bien es cierto que las preocupaciones por la enseñanza de la matemática y por su mejora progresiva son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tan antigua como la vida en sociedad, el estudio sistemático para localizar los fenómenos que la caracterizan, tendrá apenas unas décadas de existencia. De entonces a la fecha se han formado varias generaciones de matemáticos educativos y, en ese proceso, la disciplina se ha ido constituyendo como un campo de investigación autónomo que ha ganado para sí la legitimidad de una problemática de estudio. En este escrito intentaremos señalar, a partir de diferentes momentos, las diversas filiaciones y rupturas, que a nuestro juicio se han dado y se dan, especialmente con la escuela empirista en el ánimo de aportar elementos al debate sobre la pertinencia e identidad de nuestras investigaciones.

Presentación

La matemática educativa nace como disciplina científica teniendo como presupuestos explícitos: la voluntad (y la afirmación de la posibilidad) de abordar razonablemente, sistemáticamente, científicamente y con especificidad los fenómenos de enseñanza de las matemáticas. Arriesgando una definición se podría decir que la matemática educativa es la ciencia que estudia, para un campo particular (las matemáticas), los fenómenos de su enseñanza, las condiciones de la transmisión de la "cultura" propia de una institución (la científica) y las condiciones de la adquisición de conocimientos del que aprende.

Asumimos como *problemática* de estudio para la *matemática educativa*, el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza. Dicha introducción del saber matemático al sistema didáctico, obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad; de manera que afectan también a las relaciones entre estudiantes y profesor. Este proceso de incorporación de conocimientos y prácticas altamente especializados al sistema didáctico, plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados a fin de entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático a las prácticas de los actores educativos.

En el devenir del desarrollo disciplinar, podemos establecer filiaciones y rupturas con el saber: matemático, psicológico, etnográfico y cultural que han dado como consecuencia diversas miradas, a saber: *una mirada sin alumnos, una mirada sin escuela, una mirada sin escenarios y una mirada sociocultural.* En lo que sigue abordaremos esta discusión, previamente estableceremos los pautas epistemológicas que seguimos.

En general para las ciencias humanas: la separación entre la opinión común y el discurso científico es mas impreciso que en otros casos (Bourdieu, 1973), puesto que la familiaridad con el universo educativo constituye el obstáculo epistemológico por excelencia para el matemático educativo porque produce continuamente concepciones o sistematizaciones ficticias, al mismo tiempo que sus condiciones de credibilidad. De modo que, como señala Bachelard: *el hecho se conquista contra la ilusión del saber inmediato... op cit*; asimismo debe recordarse reiteradamente en el curso de la investigación que: una investigación seria conduce a reunir lo que vulgarmente se separa o a distinguir lo que vulgarmente se confunde... op cit. Así una investigación científica inicia señalando explícitamente las rupturas que hubo de superar para plantear el estudio.

Por otro lado la noción de vigilancia teórica es consustancial a la investigación puesto que *lo que a menudo se observa no es pertinente ni significante, y lo que es pertinente y significante es frecuentemente difícil de observar en un laboratorio de física o en cualquier otra ciencia... op cit* y es justamente la teoría quién ofrece el balance. En términos operativos: *Una experiencia no es otra cosa que una pregunta dirigida a la naturaleza, y la medida la lectura de la respuesta. Pero antes de realizar la experiencia, se debe pensarla, es decir formular la pregunta que se quiere dirigir a la naturaleza, y antes de obtener una conclusión de la medida, se debe interpretarla, es decir, comprender la respuesta de la naturaleza...* Planck citado por Bordieu en *op cit*. Es decir, que los hechos que convalidan la teoría, valen lo que vale la teoría que validan.

La vigilancia epistemológica: Surge en un esfuerzo por captar la lógica del error para construir la lógica del descubrimiento de la verdad. En la práctica científica no se puede pretender construir problemáticas o teorías nuevas sino cuando se renuncia a la ambición imposible de decirlo todo, sobre todas las cosas y, además, ordenadamente.... *el hecho científico se conquista, construye, comprueba e implica rechazar al mismo tiempo el empirismo que reduce el acto científico a una comprobación ... op cit*

Matemática Educativa filial del: *Saber matemático* lo que produce *una mirada sin alumnos*

La problemática clásica en matemática educativa se ocupó de diseñar presentaciones del contenido matemático escolar que se consideraban mas accesibles para los alumnos y para los profesores que aquéllas otras presentaciones llamadas tradicionales. Se asumía que una presentación mejor adaptada a la escuela y a sus agentes podría ser construida sólo con la reflexión del profesional de la matemática. Siguiendo esta línea, se produjeron libros de texto y materiales educativos sin tomar en consideración sistemáticamente otros factores como aquellos de naturaleza cognitiva o afectiva o bien los relativos a las cuestiones socio culturales del conocimiento. Se buscaba producir aquello que la escuela habría de consumir, sin estudiar a profundidad la cultura escolar.

Por ejemplo en el primer número de la revista *Educational Studies in Mathematics* de 1968 se presentan recomendaciones sobre la coordinación de la enseñanza entre los cursos de física y matemáticas. Cabe señalar que no se ofrecen referencias bibliográficas ni referencias sobre un marco teórico a seguir. De entre dichas recomendaciones, destacamos las siguientes a manera de ejemplo:

Las matemáticas constituyen una muy característica actividad de la mente humana. Todos los niños deben ser educados en matemáticas.

Las matemáticas se desarrollan cada vez más hacia una ciencia de las estructuras generales. Estas cuentan con un destacable poder de aplicación, uniformación y unificación. Su conocimiento y el manejo adecuado y su utilización en la realidad son el objetivo real de la enseñanza de las matemáticas. Algunas de esas estructuras son de carácter elemental y deben ser usadas desde la niñez.... Otras, más sofisticadas debe ser adquiridas sólo hasta el fin de la secundaria.

La enseñanza de la física y las matemáticas debe estar bien coordinada.

El mundo físico deviene inteligible a través de conceptos y de su formulación matemática [...] es necesario desarrollar aptitudes en los estudiantes para identificar estructuras matemáticas presentes en situaciones físicas ... particularmente del cálculo algebraico... Para asegurarse de que esto es entendido, los maestros de ambas disciplinas deben explicar cómo esos lenguajes se conectan.

Otro ejemplo de este escenario se presenta en Kent y Hedger (1980). En donde los autores recomiendan que para ver que $3x = 12$ es equivalente a $x = 12/3$... en nuestra experiencia algunos alumnos pueden ver este método en términos de un "movimiento" de los símbolos al resolver la ecuación. Necesitamos "mover" el 3 de su punto de inicio para colocarlo debajo del 12 ofreciendo el diagrama de tal movimiento.

Estas aproximaciones didácticas sin alumnos, hicieron evidente la necesidad de atender aspectos, hasta entonces transparentes para los matemáticos educativos, como el papel que desempeñan las acciones del profesor en los actos de aprendizaje de sus alumnos, o la forma en que los diálogos intervienen en los procesos de desarrollo del pensamiento. En cierta medida la problemática había sido planteada, se le reconoció como un tema de interés; empero, no había sido completamente estudiada. Era necesario modificar y ampliar la problemática de estudio al incluir explícitamente al aprendizaje del alumno como factor central del diseño curricular y para el desarrollo de la instrucción en una clase habitual de matemáticas.

Matemática Educativa filial del: *Saber psicológico lo que produce una mirada sin escuela*

Hacia la década de los 80's se presentó en la International Conference of Mathematics Education (ICME – 4) un programa de acción en torno del cual se desarrolló paulatinamente nuestra disciplina. A partir de planteamientos como aquel del profesor Freudenthal al someter a consideración preguntas como la siguiente: ¿Cómo aprenden las personas? y ¿cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje? En nuestra opinión, ello dio pie a un nuevo paradigma de investigación que modificaba su objeto y su método de estudio, derivando en una aproximación cognitiva a la investigación que realiza observación y descripción sistemática de los logros de los estudiantes y de las diversas experiencias de aprendizaje. Por supuesto una de las pretensiones de esta aproximación fue que estos estudios cognitivos, en tanto dieran explicación de cómo se aprende matemáticas, pudiesen dar pautas (o al menos aproximaciones) para la articulación de los principios que subyacen a los futuros diseños curriculares.

Uno de los primeros e ilustrativos trabajos en esta aproximación es el de (Herscovics, 1980) publicado en la revista Recherches en didactique des Mathématiques con el titulo "Constructing meaning for linear equations: a problem of representation". El estudio señala como marco teórico un modelo de entendimiento que distingue entre contenido y forma matemática e identifica cuatro modos de entendimiento: instrumental, relacional, intuitivo y formal con base en los trabajos de Piaget, Bruner y Bauersfeld, entre otros. Asimismo se explicita como metodología lo que los autores llaman "Russian teaching experiment" basándose en Menchinskaya (1969) y Kantowski (1979) en esta aproximación y al contrario de las presentaciones escolares usuales se parte de las formas geométricas hacia las algebraicas.

La investigación supone implícitamente que para la construcción de significado de las nuevas formas y operaciones algebraicas, el aprendiz no tendría dificultad en usarlas. Empero la evidencia dice lo contrario:

Los estudiantes tienen dificultades al usar sus ecuaciones para generar pares ordenados a pesar de que éstos les permiten inicialmente derivar las ecuaciones. Conservan el concepto de pendiente y son concientes de su invarianza, pero no pueden recordar o derivar la fórmula para la pendiente. A pesar de que identifican una ecuación dada (y = 2x) con su gráfica, no pueden generar ninguna de las otras ecuaciones lineales. En el postest los 3 alumnos pudieron reconocer y verbalizar la restricción característica en las coordenadas de puntos en una línea horizontal, pero no podían escribir la ecuación.

En esta perspectiva y para el caso de las matemáticas escolares del nivel universitario, uno de los primeros y muy representativos estudios fue el contenido en (Tall y Vinner, 1981). En él se introducen y desarrollan términos como "imagen del concepto" y "definición del concepto". Se dice entonces que el estudiante para definir si un objeto matemático dado es un ejemplo ó un contra ejemplo de un concepto no decide necesariamente sobre la base de definiciones aprendidas, sino con relación a la imagen conceptual que ha sido forjada al filo de su experiencia y que representa *"la total estructura cognitiva asociada con el concepto que incluye todas las imágenes mentales, propiedades asociadas y procesos"*. Así los estudiantes pueden dar una definición conjuntista de la noción de función (definición del concepto) y negarse a reconocer como una función a una relación funcional definida por dos expresiones algebraicas diferentes sobre dos intervalos: "una función dada por dos fórmulas". De la misma forma, pueden negarse a considerar como iguales a funciones matemáticamente equivalentes pero definidas por procesos diferentes. Ello a causa de que su imagen conceptual de una función esta ligada a su representación algebraica única.

A la clásica pregunta: a) cómo es 0.9999.. respecto de 1 y b) Encuentre el valor de la suma 9/10 + 9/102 + ... La respuesta mayoritaria en el primer caso es: 0.999... 1 y se acompaña de diversas justificaciones producto de una visión de la escritura decimal ilimitada: "al escribir 0.999999 como no se detiene jamás, debe ser inferior a uno", Se dice: "es infinitamente próximo a 1, pero no es igual al 1", "justo antes, debe ser el último número antes de 1". En el segundo caso la respuesta mayoritaria: 1, se obtiene por activación del procedimiento de cálculo de la suma de una particular serie geométrica.

Este tipo de estudios proporcionaron una herramienta útil y eficaz para estudiar el comportamiento cognitivo de los estudiantes ante algún tipo de tareas matemáticas; empero, creemos que el desempeño de los alumnos no puede reducirse a la dimensión cognitiva. Pues las relaciones que ellos mantienen con los objetos matemáticos están condicionadas por las representaciones que se forjan más globalmente sobre los que es la actividad matemática, de sus ideas de lo que es el aprendizaje de las matemáticas, de su posición con relación de las matemáticas y más globalmente incluso, de su status como alumno. La forma en la que vive una situación de enseñanza y sus producciones matemáticas, en ese contexto, son condicionadas por las características de la costumbre didáctica. Su comportamiento cognitivo en el seno de la institución escolar puede ser entendida de una manera muy diferente a aquella que brinda su comportamiento cognitivo. La vida en las instituciones matiza los procesos del pensamiento. El término "institución", podemos tomarlo en un sentido amplio: la familia, la clase, la escuela, el sistema educativo, el ambiente social constituido también por otro tipo de organizaciones humanas. Por ejemplo, los estudiantes suelen creer que...

$2^0 = 0$; $2^0 = 2$; $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)=-8$; $2^{-1} = -2$; $\text{sen}x/x = \text{sen}$; $(10 + 2)/(5 + 2) = 10/5$

(Martínez, 2000) encontró que esas dificultades se presentan en la historia y se inducen desde la enseñanza a través de los textos. Por lo que el problema es más amplio que el de las estructuras cognitivas de los estudiantes.

Matemática Educativa filial del: *Saber etnográfico* lo que produce *una mirada sin escenarios*

Otra forma de abordar los problemas la constituyeron las aproximaciones sistémicas que han intentado analizar los fenómenos didácticos tomando en cuenta la complejidad del sistema en donde suelen considerarse distintos polos: el del saber, aquél de quién aprende y el de quién enseña en un medio determinado. Tratando de esclarecer sus relaciones mutuas a fin de "explicar" los diversos fenómenos didácticos que se suceden en el hecho educativo.

Un ejemplo, al que nos hemos referido en varias ocasiones, respecto del fenómeno de la propagación del calor y el surgimiento de la noción de convergencia documentado en (Farfán, 1997) reporta como resultado la obligatoriedad de desarrollar la intuición más allá de lo sensible, como una etapa previa, antes de significar el concepto matemático. El tipo de estudio epistemológico que realizamos nos proporcionó la explicación que niega, parcialmente, nuestra hipótesis de partida, a saber, si bien es cierto que el concepto surgió en el ámbito de la determinación del estado estacionario; éste no resulta propicio para recrearse en el aula pues resulta ser mas complejo que aquél que deseamos introducir. Esto último nos indujo al estudio socioepistemológico en las diversas formaciones profesionales de nuestro sistema de educación superior.

Matemática Educativa filial del: *Saber cultural* lo que produce *una mirada sociocultural*

En nuestra Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa tenemos varios ejemplos relacionados con el acercamiento socioepistemologico, citamos algunos resultados a fin de ejemplificar las intenciones del mismo:

Construcción social del concepto del cero entre los mayas antiguos

La formación del cero entre los mayas se caracteriza por la inexistencia de dicotomías, eso favoreció la constitución de la *noción de cero*. El Dios de la lluvia no es *apriori* bueno o malo, sino que lo es simultáneamente, de ahí que la noción de transición entre lo uno y lo otro sea tan importante como los estados mismos

Construcción social del binomio de NewtonEl binomio de Newton se escribe por vez primera como $P+PQ$ y no como $a+b$. (Cantoral, 2000) Ello obedece a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología diferente de la que hoy enseñamos en clase, entre las características que se destacan podemos enunciar:

Un programa en el dominio de la ciencia que busca predecir la marcha de fenómenos mediante la metáfora del flujo de agua.

Esa noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente.

Discusión

Todo ejercicio de revisión, por modesto que sea, conlleva irremediablemente al establecimiento separaciones y filiaciones por lo que es conveniente señalar que reconocemos que cada una de las diversas aproximaciones que hemos discutido han aportado resultados y métodos para construir nuestra disciplina. Asimismo reiteramos que buscamos pertinencia, coherencia e identidad de nuestra investigación a fin de beneficiar a nuestros sistemas educativos. Por ello la importancia del ejercicio de reflexión, en nuestra comunidad, de nuestros acercamientos teóricos, métodos y resultados, sometidos a una continua y estricta vigilancia epistemológica sin, por supuesto, caer en exorcismos paralizantes.

Referencias bibliográficas

Bourdieu P. et al (1998). *El oficio de sociólogo* 20ª ed., México: Siglo XXI

Cantoral, R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Editorial Iberoamérica.

Herscovics, N. (1980). Constructing meaning for linear equations: a problem of representation. *Recherches en didactique des Mathématiques* 1(3), 351-385

Kent y Hedger (1980). Growing Tall. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 137-179

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Tall y Vinner (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

(1968) Final recommendations of the participants about the coordination of the teaching of mathematics and physics. *Educational Studies in Mathematics* (1) 243-2.

El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas[1]

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona. España
gascon@mat.uab.es

Resumen

Este trabajo se estructura en torno a la evolución (no histórica) del *problema* de la *Educación Matemática*. Una vez constatado el fracaso de la *respuesta pedagógica* a dicho problema, surge la *Didáctica de las Matemáticas* que lo aborda tomando en consideración, de manera integrada, "lo matemático" y "lo pedagógico", lo que provoca una doble ruptura: con la *Pedagogía* y con los *modelos epistemológicos ingenuos, transparentes e incuestionables* del conocimiento matemático. En la segunda parte del trabajo se esquematizan muy brevemente las respuestas que proporcionan a dicho problema los dos principales Programas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas: el Programa *Cognitivo* y el Programa *Epistemológico*.

1. El problema de la Educación Matemática

Cualquiera que sea la forma de delimitar el objeto de estudio y la problemática de la Didáctica de las Matemáticas, existe un acuerdo básico respecto a la *problemática inicial* común a todos los enfoques en Didáctica de las Matemáticas. Llamaré *"problema de la Educación Matemática"*[2] al problema que genera el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas y que puede describirse inicialmente como sigue:

Si la actividad matemática es una actividad humana, como el lenguaje, ¿por qué la inmensa mayoría de los estudiantes son *ajenos* a dicha actividad? ¿Por qué es tan difícil que los estudiantes *entren* en la disciplina matemática[3] a lo largo de toda la Enseñanza Obligatoria (y más allá)? ¿Por qué los estudiantes no *piensan por si mismos* los problemas matemáticos? ¿Por qué no *plantean preguntas* que vayan más allá de lo que se va a pedir en los exámenes? ¿Por qué no utilizan las matemáticas para *resolver problemas que ellos mismos plantean*? ¿Cómo puede explicarse, en definitiva, el fenómeno relativamente universal de la *alienación matemática*?

A pesar de la complejidad del problema de la Educación Matemático, postulo que para responder al mismo se requerirá un enfoque unitario, esto es, unos principios básicos que permitan reformular y abordar todos los aspectos del problema.

---

[1] Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT. Algunas de las ideas que aquí se proponen fueron presentadas esquemáticamente por el autor en la comunicación "*Matemáticas y Educación Matemática. ¿Hacia una futura convergencia*?" en el ámbito del Congreso de la Real Sociedad Española de Matemáticas que se celebró en Puerto de la Cruz (Tenerife) entre el 27 de Enero y el 1 de Febrero de 2002.

[2] Se trata, en cierto sentido, del problema inverso al *"problema de Bertrand Russell"* que éste formulaba como sigue en una de sus últimas obras: "¿Cómo ocurre que los seres humanos, cuyos contactos con el mundo son breves, personales y limitados, son capaces, sin embargo, de llegar a saber tanto como saben" (Russell, 1948, p. 5). "

[3] *Acceder* a una obra significa "entrar" en ella. En la escuela esta entrada se realiza a través del estudio. "Estudiar una obra" supone *reconocer la disciplina propia de la obra y someterse a ella.* [...] la escuela impone cierto tipo de exigencias totalmente externas a las matemáticas, recubriéndolas de elementos que les son ajenos y que pueden *obstaculizar el descubrimiento de la verdadera disciplina matemática.* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 118).

2. La respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática

Según el punto de vista pedagógico, todavía muy influyente en nuestra cultura escolar, el problema de la Educación Matemática permanece esencialmente inalterado al sustituir "Matemáticas" por cualquier otra disciplina como, por ejemplo, "educación física", "latín vulgar", "música barroca", "filosofía analítica", "literatura francesa", "química orgánica" o "sociología". La Pedagogía pretende dar una respuesta esencialmente común al problema de la Educación de cualquiera de dichas disciplinas.

De hecho, la Pedagogía se ha construido sobre una ficción histórica fundada en la *disociación* entre lo *"matemático"* (considerado clásicamente como el contenido de la enseñanza de las matemáticas, transparente, incuestionable e independiente de la forma de enseñar) y lo *"pedagógico"* (considerado como la *forma* de enseñar, independiente del contenido que se enseña). Se trata de un *mito cultural*[4] fuertemente arraigado en nuestra cultura y del que todavía no nos hemos librado. Este mito es el que legitima culturalmente la existencia de un ámbito propio de "lo pedagógico" y, por tanto, a la Pedagogía como disciplina. En coherencia con este prejuicio básico, la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática:

(a) Empieza por eliminar la disciplina matemática[5] considerada como la causante de la *alienación matemática de los alumnos.*

(b) Postula, implícitamente, que "lo matemático" (como "lo lingüístico" o "lo musical") no es problemático y que, por tanto, puede ponerse entre paréntesis.

(c) Se centra en modificar las estrategias de enseñanza que se suponen esencialmente independientes de las cuestiones a estudiar. Dichas estrategias deben responder a las preguntas siguientes: "¿Qué enseñar[6]?", "¿Cuándo enseñar?", "¿Cómo enseñar?" y "¿Qué, cómo y cuando evaluar?", según criterios preestablecidos e independientes de la disciplina a estudiar.

Hoy en día podemos afirmar sin paliativos ni reservas de ningún tipo que *la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática ha fracasado absolutamente*: por una parte, la eliminación la disciplina matemática no ha hecho más que agravar el problema de la *alienación matemática* de los alumnos y, en lo que se refiere a los aspectos más específicos del problema como, por ejemplo: la problemática del paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad; la iniciación al álgebra escolar en la ESO; o el papel que pueden jugar las calculadoras simbólicas en el estudio de las matemáticas; la Pedagogía, simplemente, no tiene nada que decir.

Hay que reconocer, sin embargo, que el enfoque pedagógico conserva todavía una parte importante de su crédito y paraliza el progreso hacia enfoques más eficaces. En mi opinión

---

[4] Se trata de un mito interesado: "[...] nier le plus possible la dépendance réciproque de l'organisation scolaire et des questions à étudier afin d'étendre le plus possible le champ de l'intervention légitime des pouvoirs –d'Église ou d'État selon les époques– en matière scolaire [...]" (Chevallard, 2000, p. 106).

[5] La noción de "disciplina matemática" se analiza en Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp. 129-133). Más adelante describiré las principales "dimensiones" o aspectos de la misma.

[6] Esta pregunta, al igual que las restantes, no presupone, en el enfoque pedagógico, ningún tipo de cuestionamiento de los conocimientos matemáticos. Así, las respuestas posibles en dicho enfoque como, por ejemplo: "Se debe enseñar geometría sintética en la E.S.O.", no comportan ningún tipo de análisis de las posibles organizaciones matemáticas escolares en torno a la geometría sintética ni, mucho menos, de las diferentes relaciones que podrían establecerse entre éstas y el resto de las organizaciones matemáticas.

la causa principal de esta situación es la *separación radical* entre la *actividad matemática y la enseñanza de las matemáticas* que se manifiesta incluso dentro de la propia Universidad. Esta separación, que se refleja en una *comunidad matemática escindida* (Gascón, 1993), es el resultado de un complejo conjunto de factores relacionados entre sí, de entre los cuales destacaré los tres siguientes:

A. La influencia académica y política de los Departamentos y Facultades de Pedagogía que hace que éstos continúen teniendo un gran peso en el diseño de los currículos de Primaria y Secundaria (tanto de matemáticas como de las demás disciplinas) y en la formación del profesorado de dichos niveles educativos.

B. La *separación radical* (legal e institucional) entre la comunidad productora del saber matemático, recluida actualmente en la universidad[7] y el ámbito tradicional de la Pedagogía que no es otro que la enseñanza "no universitaria"[8]. Basta recordar la poca incidencia que ha tenido la comunidad matemática nuclear –formada por los investigadores en matemáticas– en el diseño del currículum de matemáticas de la última reforma de la Enseñanza Secundaria, así como su escasa participación en la formación del profesorado de matemáticas de todos los niveles educativos.

C. La preponderancia del *"modelo popular"* de las matemáticas[9] en las instituciones docentes. Veremos que este modelo, al reducir la "actividad matemática" a series del tipo *"definición-especulación-teorema-prueba"*, expulsa la "enseñanza de las matemáticas" fuera de las actividades genuinamente "matemáticas".

Los efectos combinados de estos factores convergen en una absurda separación entre "hacer" y "enseñar" matemáticas que empobrece ambas actividades (que pueden llegar a ser consideradas como fines absolutos en si mismas) e impide tomar en consideración una *"solución didáctico-matemática"* al problema de la Educación Matemática y renunciar, definitivamente, a la fracasada *"solución pedagógica"*.

3. El modelo popular de las matemáticas

El modelo epistemológico de las matemáticas, que suele sustentarse implícitamente como incuestionable, es el "modelo popular" de las matemáticas. William P. Thurston (1994) describe y caricaturiza dicho modelo en los siguientes términos:

- Los matemáticos parten de algunas estructuras matemáticas fundamentales y de una colección de axiomas "dados" que caracterizan dichas estructuras;
- Respecto de dichas estructuras existen cuestiones importantes y variadas que pueden expresarse en forma de proposiciones matemáticas formales;
- La tarea de los matemáticos es la de buscar una serie de deducciones que enlacen los axiomas con dichas proposiciones o con la negación de éstas.

---

[7] Dieudonné (1987) indica que antes de 1940 el número de puestos de trabajo en la enseñanza universitaria de las matemáticas era muy reducido (menos de 100 en Francia) y, en consecuencia, hasta 1920 algunos matemáticos de la categoría de Weierstrass, Grassmann, Killing y Montel fueron, durante toda o parte de sus carreras, profesores de Enseñanza Secundaria. Pero, en la actualidad, los productores del conocimiento matemático han desaparecido prácticamente de la Enseñanza Secundaria.

[8] La escisión legal entre enseñanza universitaria y no universitaria aumentó dicha separación en España.

[9] Descrito y criticado severamente por el matemático norteamericano William P. Thurston, (1994). En la próxima sección describiré brevemente este modelo epistemológico de las matemáticas así como las consecuencias que acarrea, en las instituciones en las que todavía es predominante, sobre las posibles formas de abordar el problema de la Educación Matemática.

Para dar razón del origen de las cuestiones problemáticas se añade la *especulación* como un ingrediente importante y suplementario de dicho modelo. *Especular* consiste en emitir conjeturas, plantear preguntas, hacer suposiciones inteligentes y desarrollar argumentos heurísticos sobre lo que es verosímil. Se obtiene así el modelo *definición-especulación-teorema-prueba* (DSTP) (Thurston, 1994).

El "modelo popular" constituye, en definitiva, una forma ingenua y simplista de interpretar el conocimiento matemático y puede considerarse como una variedad del *"euclideanismo"* que pretende que los conocimientos matemáticos pueden deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (axiomas) que constan de términos perfectamente conocidos *(términos primitivos)*. La verdad de los axiomas fluye entonces desde los axiomas hasta los teoremas por los canales deductivos de transmisión de verdad *(pruebas)* (Lakatos, 1978a).

Es fácil mostrar que el *modelo epistemológico de las matemáticas* predominante en una institución escolar (sea éste cual fuere y aunque esté implícito) influye poderosamente sobre las características del *modelo docente*, esto es, sobre la manera sistemática y compartida de organizar y gestionar el proceso de enseñanza de las matemáticas en dicha institución (Gascón, 2001). En este sentido, se puede afirmar que los *modelos docentes habituales* están sustentados por un *modelo epistemológico ingenuo* (Brousseau, 1987) que, como el modelo popular, aparece a los sujetos de la institución como *la manera incuestionable y transparente* de describir las matemáticas.

Otra de las consecuencias importantes de este modelo epistemológico abusivamente simplificador consiste en que, al ignorar el componente irreductiblemente matemático de los fenómenos de *difusión y comunicación* del conocimiento matemático, separa de una manera radical la *actividad matemática* de la *enseñanza de las matemáticas,* lo que refuerza la pervivencia del enfoque pedagógico.

Pero existen muchos argumentos para rechazar el modelo popular[10] . En efecto, como dice Guy Brousseau, el modelo popular no permite considerar como actividades matemáticas de pleno derecho:

- Las reorganizaciones de los saberes matemáticos, destinadas a posibilitar su difusión social y su estudio.
- Las reformulaciones que faciliten el acceso a nuevas conjeturas y nuevos problemas matemáticos (Brousseau, 1994).

En consecuencia, la asunción absoluta del modelo popular obligaría a la comunidad matemática a considerar que dichas actividades no son "verdaderas matemáticas"[11] , en flagrante contradicción con la convicción unánime de la propia comunidad.

4. La doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas

Una vez consumado el fracaso de la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática, emerge la *Didáctica de las Matemáticas* que se constituyó, desde el principio,

[10] El propio Thurston, en total desacuerdo con la naturaleza del trabajo matemático que se desprende del DSTP, propone la elaboración de un modelo alternativo que ponga el acento en que el trabajo del matemático consiste en hacer avanzar la comprensión humana de las matemáticas y en mejorar la comunicación de dicha comprensión.

[11] Incluso se pondría en tela de juicio que las reorganizaciones llevadas a cabo por Euclides e, incluso, por el grupo Bourbaki, fuesen "verdaderas matemáticas".

sobre el postulado de la *necesidad de hacerse cargo, de forma integrada, de lo "pedagógico" y lo "matemático"*. Éste es el rasgo que caracteriza inicialmente a la Didáctica de las Matemáticas en relación a las restantes disciplinas, como la Historia y la Epistemología de las Matemáticas, que pertenecen al mismo universo que la didáctica y comparten un mismo objeto de estudio. Con más precisión, propongo caracterizar la Didáctica de las Matemáticas, en el ámbito de la Antropología de las Matemáticas, como la *disciplina cuya manera específica de tomar en consideración "lo matemático" consiste en integrarlo con "lo pedagógico"*.

Ésta sería, por tanto, la primera ruptura que permite que emerja la Didáctica de las Matemáticas como una nueva disciplina: la *ruptura con la Pedagogía*. Se trata de una ruptura muy explícita y que difícilmente puede pasar desapercibida. Pero esta ruptura va indisolublemente unida a otra que es menos evidente pero que no es menos importante: se trata de la ruptura con el modelo epistemológico ingenuo del saber matemático y, en particular, con el *modelo popular* de las matemáticas que es predominante en las instituciones escolares. De hecho, veremos que es imposible integrar "lo matemático" y "lo pedagógico" sin cuestionar, a la vez, la naturaleza de "lo matemático". Una de las diferencias básicas entre los distintos enfoques en Didáctica de las Matemáticas consiste, precisamente, en la forma particular en que cada uno de ellos lleva a cabo esa doble ruptura mediante la *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático*. Mostraré que las diferentes formas de "didactificación" pueden comportar cambios importantes en la amplitud del objeto de estudio la Didáctica de las Matemáticas y hasta en la naturaleza de los fenómenos que deben tomarse en consideración.

Simplificando mucho las cosas, postulo que existen, esencialmente, dos maneras diferentes de llevar a cabo este proceso de integración o *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático* que se corresponden con los dos Programas de Investigación que aparecen en cierta reconstrucción racional del desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas[12]. En lo que sigue describiré brevemente las características específicas de ambos Programas o enfoques en Didáctica de las Matemáticas, enunciaré sus hipótesis básicas en relación al problema de la Educación Matemática y esquematizaré la respuesta que da cada uno de ellos a dicho problema.

4.1. Ruptura con la Pedagogía: La respuesta del Programa Cognitivo al problema de la Educación Matemática

Históricamente el nacimiento del Programa Cognitivo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas estuvo determinado explícitamente por la insuficiencia manifiesta de la noción general de *"aprendizaje humano"* para abordar el Problema de la Educación Matemática y la necesidad de modelizar el "aprendizaje *matemático* del alumno". Precisamente, la forma particular de integrar "lo pedagógico" y "lo matemático" –que constituye el rasgo común a todas las teorías didácticas después de la ruptura con la Pedagogía– se lleva a cabo en el

[12] Utilizaré la reconstrucción racional (Lakatos, 1971), de la evolución de la Didáctica de las Matemáticas que se describe en Gascón (1998) y que, en cierta forma, expresa mi propio punto de vista respecto a la naturaleza de nuestra disciplina. Partiendo de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, –como objeto de investigación básico de la Didáctica de las Matemáticas– postulo la existencia de dos ampliaciones sucesivas de dicha problemática que modifican progresivamente su objeto primario de investigación dando origen, respectivamente, a dos Programas de Investigación (Lakatos, 1978b) en Didáctica de las Matemáticas: el Programa Cognitivo y el Programa Epistemológico.

Programa Cognitivo tomando como objeto primario de estudio el citado *aprendizaje (y el conocimiento) matemático del alumno y, más recientemente, las prácticas docentes del profesor de matemáticas.*

Dicha estrategia de modelización-integración empieza por considerar los fenómenos didácticos como fenómenos esencialmente *"cognitivos"* en el sentido de la psicología cognitiva. Esta identificación se refleja en el interés por modelizar la estructura de las *concepciones del alumno* (Lesh y Landau, 1983) y, más recientemente, *las concepciones del profesor* (Thompson, 1992). A continuación se intentan relacionar las concepciones del profesor con las *prácticas docentes* que éste realiza efectivamente en el aula y, por último, reaparece la necesidad de considerar la especificidad del aprendizaje *matemático* del alumno lo que proporciona una nueva dimensión matemática a dichos fenómenos.

Tenemos, en resumen, que en el Programa Cognitivo la integración de lo pedagógico y lo matemático se produce cuestionando la presunta transparencia así como la presunta suficiencia de "lo pedagógico" (entendido en el sentido clásico) y modelizándolo de tal manera que comporta, de hecho, una *ampliación* de lo "pedagógico-cognitivo" para incluir componentes "matemáticos"[13].

Con estos presupuestos, la respuesta del Programa Cognitivo al problema de la Educación Matemática se fundamenta en una hipótesis básica:

> **Hipótesis del Programa Cognitivo:** El problema de la Educación Matemática puede ser abordado y resuelto a partir del análisis de ciertas características individuales de los sujetos (actitudinales, cognitivas, metacognitivas, motivacionales, lingüísticas, etc.) relativas a su relación con los objetos matemáticos. Por tanto, para tratar dicho problema, la Didáctica de las Matemáticas debe construir y contrastar empíricamente modelos: (a) De la estructura cognitiva asociada a un concepto; (b) Del desarrollo del pensamiento matemático del sujeto[14].

Partiendo de esta hipótesis, que suele estar implícita puesto que no se discute, las respuestas iniciales del Programa Cognitivo al problema de la Educación Matemática son múltiples y están dispersas en la bibliografía[15] . Podemos encontrar, sin embargo, al menos en las respuestas de los últimos desarrollos de dicho Programa, un elemento común que gira en torno a la noción de *"pensamiento matemático flexible"*.

Esta noción puede construirse a partir de otras más primitivas que Tall toma de diferentes fuentes[16]. Dichas nociones son las de *"procesos"* mentales *(o sistemas de acciones*

---

[13] En la línea de ampliación del conocimiento pedagógico incluyendo componentes matemáticos, Schoenfeld (2000, p. 247) destaca como origen de un nuevo programa de investigación los trabajos de Lee Shulman (1986 y 1987) alrededor de la noción de "conocimiento pedagógico del contenido" ("pedagogical content knowledge").

[14] Así, por ejemplo, Ed Dubinsky elabora su Teoría APOS (Asiala et alt, 1996) a partir de la reformulación del mecanismo de la abstracción reflexiva de Piaget, para aplicarla a las matemáticas "avanzadas" y considera que: "La teoría APOS trata de describir el desarrollo, en la mente del alumno, de la comprensión de un concepto matemático". (Dubinsky, 2000, p. 61) Por su parte, Alan H. Schoenfeld considera, análogamente, que elaborar una "teoría de la mente" es uno de los objetivos principales de la Investigación en Educación Matemática (Schoenfeld, 2001).

[15] Puede rastrearse, por ejemplo, en Schwarzenberger y Tall (1978); Tall y Vinner (1981); Tall (1991 y 1994); Vinner (1983 y 1991) y Dubinsky (1991a y 1991b).

[16] Inicialmente de Piaget (1972) y, posteriormente, de trabajos que interpretan la obra de éste, como son los de Dubinsky (1991a y 1991b), Sfard (1989 y 1991) y Harel y Kaput (1991).

interiorizados) y *"conceptos"* producidos por la *"encapsulación"* de procesos. Los *conceptos* así obtenidos son *objetos* sobre los que puede aplicarse, a su vez, un *sistema de acciones* que puede ser de nuevo interiorizado y dar lugar a un *proceso mental* de nivel superior susceptible de ser, de nuevo, *encapsulado* en un *concepto* de orden superior y así sucesivamente. Gray y Tall (1994) denominan *"procept"* a la combinación de *proceso y concepto* (producido por la encapsulación del proceso), y subrayan que los dos aspectos de un "procept" son representados conjuntamente por un mismo símbolo matemático, poniendo así de manifiesto la *naturaleza dual* de los objetos matemáticos y el papel que juega el *simbolismo matemático* en la encapsulación (de procesos en objetos) (Tall, 1996).

En la misma dirección, Dubinsky pretende elaborar una teoría general del conocimiento matemático y su adquisición para aplicarla, muy especialmente, a la educación matemática universitaria (Dubinsky, 1996). Uno de los objetivos de esta teoría es el de aislar pequeñas porciones coherentes (esquemas) de la compleja estructura de *objetos y procesos* que constituye el *conocimiento matemático de cada individuo* y proporcionar así descripciones *explícitas de los esquemas* y de las posibles relaciones entre ellos. Cuando se hace esto para un *concepto* particular, se tiene una *descomposición genética del concepto* que representa sólo un *camino razonable* (no único ni obligatorio) que los estudiantes pueden utilizar para construir el concepto. Para elaborar una descomposición genética de un concepto matemático se tienen en cuenta las dificultades de los estudiantes para construir dicho concepto y, una vez elaborada dicha descomposición genética, se utiliza para *guiar el diseño de la instrucción.*

Así, por ejemplo[17], en el caso del concepto *"función"*, el estudiante puede tener una *concepción de la función como* ***acción*** (esto es, como una acción sobre objetos que se transforman en otros objetos). Se trata de un *esquema muy estático* que identifica una función con una "fórmula". Este esquema permite, por ejemplo, calcular la imagen de un número real concreto y escribir la función derivada de una función polinómica, pero esta concepción de la función como "acción" no permite entender el concepto general de "diferenciación" y su aplicación a funciones más complejas como, por ejemplo, las definidas a trozos. Para ello es necesario que el estudiante tenga una *concepción de la función como* ***proceso***, lo que requiere que haya *interiorizado el sistema de acciones* sobre objetos que se transforman en otros objetos. Se obtiene así un esquema *más potente y más dinámico* del concepto de función. Pero existen multitud de actividades matemáticas (especialmente, pero no únicamente, en matemática "avanzada") que requieren que el esquema de función sea construido todavía a un nivel superior en el cual la función *no sea sólo un proceso interiorizado*, sino el resultado de una *encapsulación* que permita tratarlo como un *objeto* singular al que se le pueden aplicar procesos para obtener nuevos objetos. En este punto Dubinsky indica que, para ayudar a los estudiantes a llevar a cabo la encapsulación de la función-proceso y construir la función-objeto, puede utilizarse la *representación gráfica de la función.*

Entre las actividades matemáticas que requieren que el estudiante haya construido una *concepción de la función como* ***objeto*** podemos citar la resolución de cualquier problema cuya solución pueda ser una función como, por ejemplo, resolver una integral indefinida o, en general, cualquier tarea que requiera aplicar un operador a una función para obtener otra función.

[17] Este ejemplo está presentado, con ligeras modificaciones, en Dubinsky (2000).

Concepción como Acción $\xrightarrow{\text{Interiorizar}}$ **Concepción como Proceso** $\xrightarrow{\text{Encapsular}}$ **Concepción como Objeto**

Pero, en general, el desarrollo del pensamiento matemático requiere que el *esquema* del concepto de "función" del estudiante, al igual que sus esquemas de los conceptos de "derivada", "integral" y "límite", entre otros, contemple simultáneamente ambas características (como *proceso* y como *objeto*).

> **Respuesta del Programa Cognitivo al problema de la Educación Matemática:** Las nociones matemáticas básicas son ejemplos de *"procepts"*. El desarrollo del pensamiento matemático requerirá, por tanto, desde el principio, la suficiente *flexibilidad* para manipular un mismo símbolo ya sea como representante de un proceso que actúa sobre determinados *objetos*, o de una entidad singular a la que se le pueden aplicar otros *procesos* para obtener nuevos *objetos*. La potencia del pensamiento matemático avanzado radica, precisamente, en la *utilización flexible de la estructura dual* de los objetos matemáticos que está posibilitada, en parte, por la *ambigüedad* de la notación que se utiliza. La *rigidez* de los procedimientos estandarizados que caracterizan el pensamiento matemático elemental (y, aún más, el pensamiento espontáneo, "prematemático") constituye, por tanto, el principal *obstáculo cognitivo* que dificulta a los estudiantes entrar en la disciplina matemática y explica muchos de los *errores conceptuales* que cometen.

En resumen, la dificultad de una tarea matemática dependerá, desde el punto de vista del Programa Cognitivo, de la *complejidad de las construcciones mentales* que dicha tarea requiere (*interiorización* de un sistema de acciones para construir un proceso mental, *coordinación* de procesos, *encapsulación* de un proceso para construir un objeto, *reversión* de un proceso, etc.) y, simultáneamente, del grado de *flexibilidad de los esquemas mentales* correspondientes.

4.2. Ruptura con el modelo popular de las matemáticas: La respuesta del Programa Epistemológico al problema de la Educación Matemática

El Programa Epistemológico de Investigación en Didácticas de las Matemáticas surgió de la convicción de que el origen del problema de la Educación Matemática está en las propias matemáticas. El nacimiento del Programa Epistemológico[18] constituye una respuesta a la insuficiencia manifiesta de los modelos epistemológicos de las matemáticas, incluyendo los modelos elaborados por los epistemólogos de las matemáticas, para abordar el Problema de la Educación Matemática.

[18] Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau y, en especial, los que tratan sobre la "epistemología experimental", constituyen el germen del Programa Epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990.

El cuestionamiento de la transparencia de lo "matemático" y la asunción inequívoca de que *el misterio está en las propias matemáticas*, comporta que se tome la *actividad matemática* como objeto primario de estudio, como nueva "puerta de entrada" del análisis didáctico. Por tanto, la forma particular de integrar "lo pedagógico" y "lo matemático" –que constituye el rasgo común a todas las teorías didácticas después de la ruptura con la Pedagogía– se lleva a cabo en el Programa Epistemológico mediante el *cuestionamiento* y la *ampliación* de lo que consideraba *"matemático"* en el modelo popular de las matemáticas.

La primera de las ampliaciones de "lo matemático" estuvo protagonizada por la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) que incluyó como parte integrante de los conocimientos matemáticos las condiciones de su utilización en situación escolar. Pero a medida que se iba desarrollando el Programa se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución productora del saber matemático. Aparecieron así los fenómenos de *transposición didáctica* (Chevallard, 1985) y, como una consecuencia natural, la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD). En ésta se toma como objeto primario de investigación la *actividad matemática*[19].

Tenemos, en resumen, que la integración o didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático se produce en el Programa Epistemológico cuestionando y ampliando radicalmente lo "matemático".

Hipótesis del Programa Epistemológico: El problema de la Educación Matemática puede ser abordado a partir del análisis de las *prácticas matemáticas* que se llevan a cabo en las diferentes instituciones (no sólo docentes). Por tanto, para tratar dicho problema, la Didáctica de las Matemáticas debe construir y contrastar empíricamente: (a) Un modelo *epistemológico general* de las matemáticas y modelos locales de sus diferentes ámbitos; (b) Modelos de la *génesis y el desarrollo* de las organizaciones matemáticas en cada una de las instituciones.

Esta hipótesis provoca una *matematización*[20] *del problema de la Educación Matemática (y lo despersonaliza situándolo a un nivel institucional*, relativamente independiente de la voluntad, *la formación, la motivación*[21] y las restantes características individuales de los sujetos de las instituciones.

[18] Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau y, en especial, los que tratan sobre la "epistemología experimental", constituyen el germen del Programa Epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990.

[19] En los últimos desarrollos de la TAD dicho modelo se articula alrededor de la noción de organización (o praxeología) matemática y didáctica y constituye el núcleo firme de dicha teoría en su versión actual. Las primeras formulaciones y ejemplificaciones de dichos modelos se encuentran en Chevallard (1999); Chevallard, Bosch y Gascón (1997); Gascón (1998) y Bosch y Chevallard (1999).

[20] Puesto que el análisis científico de las prácticas matemáticas requiere elaborar modelos epistemológicos nuevos de los diferentes ámbitos de las matemáticas (así como un modelo epistemológico general). Esto no puede hacerse sin llevar a cabo reorganizaciones de los saberes matemáticos para que puedan ser reconstruidos en las diferentes instituciones y difundidos entre ellas. Dichas reorganizaciones deben ser consideradas como una actividad matemática genuina..

[21] Así, por ejemplo, cuando se pretende resolver el "problema de la Educación Matemática" apelando básicamente a la "formación de los profesores" y a la "motivación de los alumnos" se vuelve a caer en el mito pedagógico que, resurgiendo de sus cenizas, vuele a proponer una "solución" repetidamente fracasada.

El Programa Epistemológico, por el contrario, propone abordar el problema partiendo de la necesidad de explicar las restricciones que sufren las organizaciones matemático-didácticas en las diferentes instituciones[22] y en el tránsito entre ellas. Sólo así será posible proponer, de manera fundada, modificaciones de los *sistemas de enseñanza de las matemáticas* que incidirán de manera profunda sobre la "formación de los profesores", la "motivación de los alumnos" y sobre otros muchos aspectos del sistema. Es claro que una propuesta de este tipo requiere, entre otras cosas, un desarrollo suficiente de la *investigación didáctica*[23] .

Por lo tanto, la respuesta del Programa Epistemológico al problema de la Educación Matemática deberá iniciarse analizando las características de las organizaciones matemáticas y didácticas que existen en las diferentes instituciones y, en particular, en las instituciones escolares. Describiré a continuación, muy sucintamente, algunos resultados obtenidos por la TAD en esa dirección y que pueden considerarse como la respuesta provisional de esta teoría al problema de la Educación Matemática.

A. La ***organización matemática escolar*** *esconde la verdadera disciplina matemática* y, por lo tanto, dificulta el que los estudiantes "entren" en dicha disciplina (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 129-134). Citaré cuatro aspectos o dimensiones de la disciplina matemática que están bastante ausentes en la *matemática escolar*.

(1) Se olvidan las *cuestiones problemáticas* a las que la organización matemática responde y que, por tanto, constituyen las "razones de ser" de dicha organización. Así, la actividad de resolución de problemas, por ejemplo, no se presenta como un medio para responder a cuestiones relativas a cierta problemática que se pretende estudiar, sino como un fin en sí misma.

(2) Se ignora el papel del *razonamiento matemático plausible o conjetural*, los "patrones" que rigen dicho razonamiento (Polya, 1954) y, por tanto, su función complementaria del *razonamiento deductivo*. Por esta razón las fases exploratorias de la actividad matemática (formulación de hipótesis, búsqueda de contraejemplos, elaboración de estrategias, tanteo de técnicas, etc.) quedan muy debilitadas puesto que se dejan a la responsabilidad casi exclusiva del alumno, sin ningún tipo de institucionalización.

(3) No se respetan suficientemente las *leyes que rigen el desarrollo interno de las técnicas matemáticas*. Esto provoca una clasificación "temática" de los problemas, muy pormenorizada e independiente del desarrollo de las técnicas y de sus interconexiones, lo que provoca la aparición escolar de microuniversos matemáticos aparentemente aislados (Bosch y Gascón, 1994).

(4) El discurso *"tecnológico-teórico"*, esto es, el discurso matemático que justifica e interpreta el trabajo técnico, *no se integra en la práctica matemática* para hacerla más comprensible y eficaz. Se echa en falta un *cuestionamiento de la práctica matemática que se realiza*: no se cuestiona la justificación de las técnicas matemáticas que se utilizan; ni la interpretación de los resultados que proporcionan; ni su alcance o ámbito

---

[22] En este punto no debe olvidarse que la comunidad matemática nuclear, esto es, la comunidad de investigadores en matemáticas, también debe considerarse como una institución.

[23] Para un análisis sistemático de las relaciones entre la "formación de los profesores" y la *"investigación didáctica"*, ver Chevallard (2000).

de aplicabilidad; ni su pertinencia para llevar a cabo una tarea determinada; ni su eficacia; ni su economía[24].

B. La ***organización didáctica escolar***, esto es, la forma de organizar el estudio de las matemáticas por parte de las instituciones docentes, *no permite desarrollar todas las dimensiones de la actividad matemática*. En particular, se echa en falta un dispositivo didáctico que permita vivir con normalidad al "*momento del trabajo de la técnica*" y su función integradora de los momentos "*exploratorio*" y "*tecnológico-teórico*" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 286-290).

Respuesta del Programa Epistemológico al problema de la Educación Matemática:
La *alienación matemática* de los alumnos (y, en general, de los ciudadanos) es el resultado de un complejo conjunto de fenómenos que transcienden a las instituciones docentes y se reflejan en algunas características de las *organizaciones matemáticas* y *didácticas* escolares. Dichas características, en la medida que dificultan que los estudiantes "entren" en la disciplina matemática y en la medida que impiden desarrollar funcionalmente todas las dimensiones de la actividad matemática, pueden ser consideradas como las "causas próximas" del fenómeno. La respuesta del Programa Epistemológico, en este nivel "próximo", consiste en proponer modificaciones de las organizaciones matemático-didácticas escolares fundadas en el análisis de las prácticas matemáticas institucionalizadas. Dichos análisis se sustentan en determinados modelos epistemológico-didácticos de referencia que la propia didáctica debe elaborar.

5. Una responsabilidad científica ineludible de la comunidad matemática

La evolución del problema de la Educación Matemática muestra que éste ha ido cambiando de naturaleza:

(a) Empezó siendo considerado como un problema *pedagógico*.

(b) Con la emergencia de la Didáctica de las Matemáticas se convirtió inicialmente en un problema *cognitivo-matemático*.

(c) Y ha acabado siendo un problema con un *componente irreductiblemente matemático*. Lo matemático[25] se ha hecho *denso en lo didáctico*.

---

[24] Ante la creciente "*alienación matemática*" de los alumnos, el sistema de enseñanza responde mediante la eliminación de las presuntas causas de dicha alienación. Dado que la cultura psicopedagógica dominante identifica dicha causas con "el rigor, la abstracción y la exigencia excesiva de la disciplina matemática", se suprimen los objetivos a largo plazo y todo trabajo sistemático que pueda aparecer como "rutinario", "repetitivo" y, por tanto, "aburrido". Se potencia el "aprendizaje instantáneo" y se atomiza el proceso de estudio convirtiéndolo en una sucesión de "anécdotas" presuntamente "interesantes" o "motivadoras". El resultado final, paradójico, es la *desconcertación* absoluta de los alumnos y un aumento constante de la "alienación matemática" que se pretendía evitar (Gascón, 1999a).

[25] Hay que recordar que en el modelo epistemológico de las matemáticas que propone el Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, amplía la noción de lo "matemático" en relación, por ejemplo, al modelo popular de las matemáticas y, también, en relación a los modelos epistemológicos del Euclideanismo (en el sentido de Lakatos). En Gascón (2001) se describen con cierto detalle las sucesivas ampliaciones del problema epistemológico (y de lo que se considera "matemático" en cada modelo epistemológico) y, en particular, la originada por la confluencia entre éste y el problema didáctico.

Es cierto que la pervivencia del enfoque pedagógico ha limitado históricamente la participación de los matemáticos en la resolución del problema de la Educación Matemática, pero la progresiva matematización del mismo ha devuelto a la comunidad matemática nuclear la posibilidad de *integrarlo entre sus objetos de estudio*. De hecho, la comunidad matemática es la única que, en última instancia, está legitimada para hacerse cargo del *control científico* de los fenómenos que emergen en la *difusión*, la *utilización* y la *transposición institucional* de las organizaciones matemáticas.

Aunque dichos fenómenos no pueden ser reconocidos como genuinamente "matemáticos" en aquellas instituciones en las que la primacía del *modelo popular* (DSTP) de las matemáticas todavía lo impide –porque se identifica la actividad matemática con la mera producción de *definiciones*, *conjeturas*, *teoremas* y *demostraciones*–, es evidente la necesidad de fundamentar matemáticamente su tratamiento, en lugar de juzgarlos únicamente mediante opiniones y argumentos extramatemáticos basados en el "sentido común". Así, por ejemplo, sería extraordinariamente valioso para el desarrollo del conocimiento matemático disponer de criterios matemáticamente fundados: para *analizar* las organizaciones matemáticas que viven en las diferentes instituciones, relacionando el proceso de construcción de las mismas (no necesariamente histórico) con la estructura en la que han cristalizado; para *reconstruirlas a partir de diferentes cuestiones problemáticas* y en función del tipo de práctica social que tenga que llevarse a cabo con ellas; para *reformularlas* de manera que faciliten el acceso a nuevas conjeturas y a nuevos problemas matemáticos; para *integrarlas en organizaciones matemáticas más amplias y complejas*; y para *estudiar los cambios* que se producen en las ellas cuando son transportadas desde una a otra institución, ya sea para ser estudiadas, para posibilitar su difusión o para ser utilizadas.

Esta "*matematización*" *de la problemática didáctica* responde, por tanto, a necesidades intramatemáticas y constituye una condición necesaria para que la comunidad matemática nuclear (de los investigadores en matemáticas) empiece a tomar en consideración los problemas "didácticos" como problemas científicos no triviales. Sólo asumiendo esta responsabilidad, la comunidad matemática podrá cumplir plenamente la *función científica y social* que se le ha encomendado.

Referencias bibliográficas

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.

BOSCH, M. y CHEVALLARD, Y. (1999): La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.

BROUSSEAU, G. (1987): Représentation et didactique du sens de la division, in G. Vergnaud, G. Brousseau et M Hulin (ed.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque du Sèvres, pp. 47-64, La pensée sauvage: Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1994): Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, ICMI Study 94Ê: Washington.

BROUSSEAU, G. (1998): *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, Eds.). La pensée sauvage: Grenoble.

CANTORAL, R. (1996): Una visión de la matemática educativa, en *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica: México, pp. 131-147.
CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.
CHEVALLARD, Y. (1991): *Didactique, anthropologie, mathématiques*, Postfacio a la 2ª edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Ed. La pensée sauvage: Grenoble.
CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.
CHEVALLARD, Y. (2000): La recherche en Didactique et la formation des professeurs: problematiques, concepts, problemes, *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome I, pp. 98-112, A.R.D.M.Ê: Caen. (Houlgate, 18-25 août 1999).
CHEVALLARD, Y. (2001): Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del SI-IDM*, Huesca. Recuperable en
CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.
DIEUDONNÉ, J. (1987): *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Hachete: Paris.
DREYFUS, T. (1991): Advanced Mathematical Thinking Processes, En David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht: Kluwer, pp. 25-41.
DUBINSKY, (1991a): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, pp. 95-126.
DUBINSKY, (1991b): The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics, en L.P.Steffe (ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, Springer-Verlag: New York.
DUBINSKY, E. (1996): Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria, *Educación matemática*, Vol. 8, nº 3, 25-41.
DUBINSKY, E. (2000): De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), 3/1, 47-70.
ERNEST, P. (1998): A Postmodern Perspective on Research in Mathematics Education, in Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Dordrecht: Kluwer, pp. 71-85.
FONSECA, C. y GASCÓN, J. (2000): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las organizaciones didácticas, XIV Jornadas del SIIDM, Cangas do Morrazo, abril del 2000. Recuperable en
FONSECA, C. y GASCÓN, J. (2002): Ausencia de Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).
GASCÓN, J. (1993): Una comunitat matemàtica escindida, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 8, 111-117.
GASCÓN, J. (1997): Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemática en secundaria a estudiar matemática en la universidad, *Suma*, 26, 11-21.
GASCÓN, J. (1998): Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.

GASCÓN, J. (1999a): La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación matemática*, 11/1, 77-88.
GASCÓN, J. (1999b): Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas, en Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 129-150.
GASCÓN, J. (2001): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4/2, 129-159.
GRAY, E. M. y TALL, D. (1994): Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *Journal for Researh in Mathematics Education*, 26, 115-141.
HAREL, G. y KAPUT, J. (1991): The role of conceptual entities and their symbols in building Advanced Mathematical Concepts, en Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, *Dordrecht: Kluwer, 82-94.*
KILPATRICK, J. (1992): A history of research in Mathematics Education, en Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan Publishing C.: New York, pp. 3-38.
LAKATOS, I. (1971): History of Science and its Rational Reconstructions, en R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.): *P.S.A.*, 1970, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, 8, pp. 91-135. Dordrecht: Reidel.
LAKATOS, I. (1976): *Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery* (J. Worrall and E. Zahar, Eds.). Cambridge University Press.
LAKATOS, I. (1978a): *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*, vol 2, Cambridge, University Press. [Trad. española: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza:Madrid, 1981].
LAKATOS, I. (1978b): *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press: Cambridge.
LESH R. y LANDAU M., eds., (1983): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press: New York.
PIAGET, J. (1972): *The Principles of Genetic Epistemology*, London: Routledge y Kegan Paul.
POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press: Princeton.
RUSSELL, B. (1948): *Human Knowledge: Its Scope and Limits*, Simon and Schuster: New York.
SCHOENFELD, A. H. (2000): Models of the Teaching Process, *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
SCHOENFELD, A. H. (2001): Objetivos y métodos de la investigación en Educación Matemática, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 4/1, 185-203. [Traducción castellana de Juan D. Godino del artículo publicado por Schoenfeld en el número de junio/julio de 2000 (vol. 47, nº 6) de *Notices of the American Mathematical Society*].
SCHWARZENBERGER, R. L. E. y TALL, D. (1978): Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.
SFARD, A. (1989): Transition from operational to structural conception: The notion de function revisited, *Proceedings of PME* 13, Paris, 3, 151-158.
SFARD, A. (1991): On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

SHULMAN, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
SHULMAN, L. S. (1987): Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform, *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
SIERPINSKA, A. y KILPATRICK, J. (edit.) (1998): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Dordrecht: Kluwer.
TALL, D. (1991): The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 3-21.
TALL, D. (1994): Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking, *Lecture at International Congress of Mathematicians*, Zurich.
TALL, D. (1996): Functions and Calculus, En A.J.Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer, 289-325.
TALL, D. y VINNER, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*. 12(2), 151-169.
THOMPSON, A. G. (1992): Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research, in D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127—146). Mac. Millan: New York.
THURSTON, W. P. (1994): On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30/2, 161-177.
VINNER, S. (1983): Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 239-305.
VINNER, S. (1991): The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 65-81.

Conferencias Especiales

La resolución de problemas y la vinculación con la práctica en la formación de matemáticos profesionales

Baldomero Valiño Alonso
Universidad de La Habana, Cuba.
bval@matcom.uh.cu

Resumen

En el trabajo se resumen los aspectos fundamentales de la conferencia especial que el autor desarrolló durante la 16ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en el ISPJAE de La Habana en julio de 2002. En dicha conferencia hizo una sucinta historia de la experiencia cubana en diseño curricular, con énfasis en el período que se inicia con la Reforma de la Enseñanza Superior realizada en Cuba en 1962, y expuso los principios y características esenciales del llamado Plan de Estudio "C" Perfeccionado de la Carrera de Matemática, actualmente vigente en las universidades cubanas, que basa su sistema educativo en la resolución de problemas profesionales y en la vinculación de los estudiantes con la práctica social en la cual se desempeñarán como profesionales. El autor es el presidente, desde 1988, de la Comisión Nacional de la Carrera de Matemática en la República de Cuba.

Introducción

La resolución de problemas constituye uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática en todos los niveles de enseñanza, particularmente a partir de que desde los años 80 del siglo pasado en la literatura científica acerca del tema se ha estado enfatizando la importancia de la formación y desarrollo de habilidades para el enfrentamiento de situaciones problemáticas, en los sistemas educativos que se estructuran sobre la base de las más diversas concepciones psicológicas y pedagógicas acerca del proceso de asimilación de los conocimientos.

Al mismo tiempo, en las concepciones acerca del diseño curricular de los programas y planes de estudio de las carreras universitarias, prevalece la tendencia a estructurar dichos programas de formación de profesionales a partir de objetivos bien definidos, que están determinados por el impacto social de la profesión y que en ultima instancia fundamentan su pertinencia en el ámbito social correspondiente.

En la más reciente etapa del perfeccionamiento continuo de las carreras universitarias de la escuela superior cubana, ambos presupuestos teóricos han sido tenidos en cuenta para la elaboración del plan de estudio de la carrera de matemática actualmente vigente en las universidades cubanas. Este nuevo plan de estudio es el resultado de las múltiples experiencias desarrolladas a lo largo de cuatro décadas intentando materializar el objetivo de formar a un profesional matemático dispuesto a cumplir objetivos de trascendencia social y científicamente capacitado para realizarlos y para hacer enriquecer la cultura matemática *nacional.*

Un poco de historia

La carrera de Matemática se crea como una entidad académica independiente en las universidades cubanas, como uno de los resultados más significativos de la Reforma de la Enseñanza Superior realizada en Cuba en 1962. Los antecedentes de esta carrera se remontan, sin embargo, a los tiempos de la secularización de la Universidad de La Habana en la primera mitad del siglo XIX, aunque la enseñanza de la matemática en los claustros universitarios se inicia desde la creación de una cátedra de Matemática en la Real y Pontificia Universidad de San Jerónimo de La Habana, en los primeros años posteriores a la fundación de dicha universidad en 1728. La creación de la Facultad de Ciencias en 1863 y la reforma posterior (y última) de la universidad durante la época colonial, acaecida en 1880, consolidarían la concepción de los estudios superiores de Matemática en íntima relación con los de Física. Con este enfoque de doctorado en ciencias físico-matemáticas, se mantendría durante la república en la Universidad de La Habana, una carrera cuyos egresados nutrirían los claustros de los institutos de segunda enseñanza y sólo en muy reducido número alcanzarían la cátedra universitaria. En esa primera época republicana reluce con brillo ejemplar la figura del Dr. Pablo Miquel y Merino, a quien podemos considerar, sin duda, el Padre de la Ciencia Matemática en nuestro país, por lo mucho que sirvió de inspiración para sus discípulos en la Universidad de La Habana, que todos sin excepción lo declaran su maestro. Entre ellos, alcanzaría mayor relieve el Dr. Mario O. González, sucesor del Dr. Miquel en la cátedra de Análisis Matemático, con una notable obra científica y pedagógica.

El triunfo de la Revolución Cubana en 1959 habrá de compulsar modificaciones radicales en la escuela superior que repercutirán también en la matemática y en la formación de los profesionales de esta ciencia. Reconociendo la importancia y la especificidad del quehacer pedagógico, en breve se crearían instituciones universitarias especializadas en la formación de los profesores de la enseñanza general media, mientras que para las facultades de ciencias se reservaba el objetivo de preparar al personal cuyo trabajo fundamental sería la investigación científica. En relación con la matemática, esto significaba la pretensión de formar a un profesional cuyo perfil no era ya únicamente el ejercicio de la docencia universitaria, sino también la aplicación de las matemáticas a la resolución de problemas de otras ramas del conocimiento y la práctica social. Esto, en las condiciones de una pobre tradición de investigación matemática, planteaba ante la universidad un reto: fundar las bases para la creación de una tradición de investigación científica en las ramas pura y aplicada de esta ciencia.

La colaboración fraterna y solidaria de matemáticos progresistas de América Latina y Europa, apoyados en el trabajo entusiasta y decidido de los estudiantes incorporados al movimiento de alumnos ayudantes, contribuiría a impulsar la carrera de Matemática en los primeros años de su creación. En ese contexto, se harían esfuerzos por vincular a profesores y estudiantes con importantes proyectos investigativos encomendados a la universidad, relacionados con problemas reales. Estudiantes y profesores se integrarán de este modo a equipos multidisciplinarios organizados para la resolución de problemas diversos en la agricultura, la minería, la industria azucarera, la salud pública y la planificación económica, entre otras esferas de actividad.

Esta concepción adquirirá un grado mayor de institucionalización académica en los primeros años de la década del 70, con la elaboración del primer plan de estudio “unificado” para todas las universidades cubanas, que posibilitaría la vinculación del estudio con el trabajo como expresión materializada del principio de la vinculación de la teoría con la práctica. La creación del Ministerio de la Educación Superior en 1976 contribuyó a la sistematización y perfeccionamiento de esta concepción en los nuevos planes de estudio y programas elaborados a partir de esa fecha. Sucesivos eslabones en la cadena del perfeccionamiento continuo de los planes de estudio y programas serían el plan de estudio "A" (vigente a partir del curso académico 1977/1978), el plan de estudio "B" (puesto en vigor en 1982/1983). Sin embargo, sucesivas evaluaciones realizadas revelaban la incapacidad de muchos egresados para resolver una serie de problemas profesionales comunes.

Había, pues, que plantearse una vez más la pregunta: ¿qué matemático necesita el país, teniendo en cuenta las tendencias actuales y perspectivas de la aplicación de las matemáticas en las más variadas esferas de la práctica social? Para ello, en 1988 se comenzó por determinar el conjunto de los problemas profesionales que estaban resolviendo los egresados en los centros de investigación y producción o servicios donde se desempeñaban como matemáticos, a través de una investigación que abarcó a más de 23 organismos de la administración central del estado.

El resultado de esta encuesta fue la caracterización del modo de actuación profesional del matemático de perfil amplio, mediante la definición de los problemas profesionales más comunes que tendría que afrontar el egresado en su vida laboral, lo que permitió definir el contenido de las distintas disciplinas e intentar una integración más efectiva entre ellas, mediante una organización en sistema de las actividades académicas, laborales e investigativas de cada año de formación. En ello jugó un papel fundamental la creación de una disciplina integradora, que bajo el nombre de "Práctica profesional del matemático" se propone como objetivo la simulación de la actividad profesional del matemático mediante el enfrentamiento de distintos problemas reales, a lo largo de todos los años de la carrera, hasta culminar con la realización de un trabajo de diploma en vínculo directo con alguna esfera de actuación profesional. Estas concepciones se materializaron en el Plan de Estudio "C" de la carrera de Matemática, que entró en vigor en el curso 1990/1991.

La puesta en práctica del plan de estudio "C", que vino a coincidir con el llamado "período especial en tiempo de paz" en nuestro país, no estuvo exenta de dificultades. Sin embargo, la mayor flexibilidad interna de las disciplinas de este plan y la concepción de la práctica laboral como una actividad fundamentalmente investigativa permitieron sortear la mayor parte de esas dificultades, en el contexto de una estabilidad curricular que no conocieron los planes de estudio anteriores. No obstante, en el plan de estudio "C" no pudieron ser evitados ciertos períodos de sobrecargas académicas, por la cantidad y diversidad de actividades estipuladas en los mismos, que hicieron aconsejable una revisión del plan y de los programas de sus disciplinas, con el propósito de perfeccionar su estructura y crear condiciones más favorables para el cumplimiento de sus objetivos generales.

Por otra parte, a partir de 1995 comenzaron a aparecer los planes de Maestría en Ciencias Matemáticas en todas las universidades cubanas, por lo que el logro de una flexibilidad mayor del contenido de las disciplinas del plan "C" se hizo no solo posible, sino también deseable. Al mismo tiempo, era necesario prepararnos para el enfrentamiento de los desafíos que plantea a los que nos ocupamos de la formación de matemáticos en Cuba, en este comienzo del tercer milenio: el impetuoso avance de la computación y de las nuevas tecnologías de la información, que provoca un fuerte impacto en la educación matemática, capaz de generar una verdadera revolución de las concepciones acerca de la forma y los métodos de enseñanza de las matemáticas y la disminución creciente de la motivación de los jóvenes por el estudio de esta carrera, lo que pone en peligro la continuación de los avances científicos logrados en nuestro país en el campo de las matemáticas, a partir del triunfo de la Revolución Cubana.

Estas circunstancias hicieron aconsejable y deseable la realización de una nueva versión del plan de estudio de la carrera de matemática, trabajo que fue llevado a cabo entre 1995 y 1998 por la comisión nacional de dicha carrera y que culminó con la presentación y defensa del proyecto elaborado ante el tribunal creado por el Ministerio de Educación superior en julio de 1998, lo que permitió comenzar su puesta en práctica en todas las universidades a partir del curso 1998-1999.

El plan de estudio 'C' perfeccionado de la carrera de Matemática.

En el nuevo plan de estudio se plantea el siguiente *objetivo fundamental*:

La carrera de Matemática tiene por objetivo fundamental la formación de un profesional de perfil amplio, con un alto nivel de conciencia socialista, técnica y científicamente capacitado para actuar de manera independiente y creadora en la resolución de una serie de problemas comunes que surgen en las más variadas esferas de la practica social, mediante la aplicación de los métodos y modelos matemáticos.

También fue perfeccionada la definición de los objetivos generales y por años de la carrera, así como el modo de actuación profesional del matemático de perfil amplio.

¿Cómo actúa el matemático de perfil amplio?

La actividad profesional del matemático de perfil amplio se puede caracterizar por las siguientes HABILIDADES PROFESIONALES:

1. Participar en la construcción de modelos matemáticos para la resolución de problemas reales, en colaboración con especialistas de otras profesiones.
2. Elegir los métodos matemáticos adecuados a la investigación de los modelos construidos.
3. Desarrollar la investigación de los modelos y los cálculos aproximados necesarios, auxiliándose para ello de los sistemas de programación matemática de uso profesional.
4. Analizar los resultados obtenidos y participar en la discusión colectiva conducente a la interpretación real de los mismos.
5. Asesorar a otros profesionales en la aplicación de modelos y métodos matemáticos.
6. Impartir cursos de matemática en el nivel superior de educación, habiendo recibido previamente la preparación pedagógica necesaria.

El cumplimiento de estas actividades puede dar lugar a la formulación de problemas teóricos de la ciencia matemática, cuya resolución implique un enriquecimiento de la misma, por lo que el matemático de perfil amplio está potencialmente preparado para enfrentarse a dichos problemas y perfeccionar y especializar su formación con el objetivo de resolverlos.

¿Cuáles son los campos de acción y las esferas de actuación del matemático de perfil amplio?

Siendo el objeto de trabajo de este profesional los modelos y métodos matemáticos, objetos de naturaleza abstracta con cuya ayuda se hace posible actuar transformadoramente sobre la realidad objetiva que pretenden modelar, podemos identificar los campos de acción de esta carrera con las distintas ramas de la ciencia matemática que forman parte de sus disciplinas académicas: Programación y Algoritmos; Análisis Matemático; Álgebra; Geometría y Topología; Matemática Numérica; Probabilidades y Estadística; Optimización; Ecuaciones Diferenciales; Teoría de Funciones de Variable Compleja; Medida e Integración y Análisis Funcional; Mecánica; Historia y Metodología de la Matemática y Práctica Profesional del Matemático.

Más difícil resulta delimitar las esferas de actuación de este profesional, ya que la naturaleza misma de la ciencia matemática hace posible su aplicación a la resolución de problemas que surgen prácticamente en todas las esferas de la producción material y espiritual de la sociedad. Al mismo tiempo, las formas de aplicación de la matemática en cada una de estas esferas tienen su especificidad, de donde resulta que los matemáticos que trabajan en las aplicaciones de la matemática a una esfera determinada de la realidad, ya por ese hecho adquieren una relativa especialización, hacen uso más frecuente de unos métodos matemáticos que de otros y se ven obligados también a asimilar el lenguaje inherente a la problemática de que se trate.

Estas circunstancias imprimen un carácter especial a la concepción del matemático de perfil amplio, que se debe entender como un profesional apto para resolver una serie de problemas comunes a varias esferas de actuación, pero al mismo tiempo investido de algunos elementos de especialización que lo hagan potencialmente capaz de adquirir posteriormente la especialidad requerida para la resolución de problemas más complejos.

¿Cómo se garantiza la formación del matemático de perfil amplio?

El plan de estudio "C" de la carrera de Matemática es el modelo teórico para la formación del matemático de perfil amplio. En la versión del plan "C" perfeccionado, nos hemos propuesto lograr una mayor independencia en el egresado, sobre la base de una formación más integral y flexible en la cual sus propias motivaciones e intereses sean la base de la determinación de una parte de los elementos constitutivos de su plan de formación.

Así, en cada disciplina se ha previsto un conjunto de asignaturas OBLIGATORIAS, en las que está contenida la información esencialmente necesaria para que el egresado pueda orientarse rápidamente en su ubicación real, en contacto directo con los problemas profesionales concretos. Al mismo tiempo, en cada disciplina se ha diseñado un conjunto de asignaturas OPTATIVAS, que el estudiante escogerá libremente, de acuerdo con sus intereses particulares y motivaciones.

Para lograr un adecuado balance entre las asignaturas obligatorias y optativas, se estimó el tiempo máximo disponible para todas las actividades en 30 horas semanales. Esto permite, a partir del tercer año de la carrera, que el estudiante tenga a su disposición fondos de tiempo suplementarios en cada período lectivo, que puede llenar, si lo desea, con otras actividades que complementan su formación humanística y cultural general, para lo cual puede, incluso, elegir otras asignaturas, llamadas FACULTATIVAS.

En la planificación de las acciones conducentes al logro de los objetivos de cada año de formación, se distinguen nítidamente dos etapas o niveles. La primera etapa, de adquisición de los conocimientos y habilidades correspondientes a los campos de acción, en la que se deberá alcanzar cierto grado de familiarización con las esferas de actuación del profesional, corresponde a los tres primeros años de la carrera. La segunda etapa, de consolidación y perfeccionamiento de los conocimientos y habilidades correspondientes a los campos de acción y adquisición de un conocimiento más profundo de una esfera de actuación determinada, transcurre durante el cuarto y el quinto años de la carrera.

En el desarrollo de las actividades académicas, laborales e investigativas que se diseñen para el cumplimiento de los objetivos correspondientes a cada etapa, tiene extraordinaria importancia la organización en sistema de las actividades de la disciplina integradora "Práctica profesional del matemático".

Comentarios finales

El plan de estudio "C" perfeccionado de la carrera de matemática está vigente en todas las universidades cubanas que imparten la carrera. Sin embargo, esto no significa que en todas las universidades la puesta en práctica del plan transcurra por idénticos procesos. Las diferencias van desde el diseño de las asignaturas optativas, hasta la vinculación de los estudiantes con las instituciones locales, que por ser tan diversas derivan en múltiples objetivos académicos e investigativos.

Otro aspecto del trabajo que se ha profundizado se refiere a la formación de valores. En tal sentido han jugado un importante papel los planes integrales de trabajo educativo que se han trazado las facultades para el logro de esos objetivos. En ellos se intenta organizar, hasta donde se pueda, el llamado "currículo oculto" de la carrera, en el cual tienen su reflejo las condicionantes sociales, culturales, políticas, ideológicas y económicas en las cuales transcurre el proceso docente educativo.

En conclusión, se va confirmando que esta nueva versión del plan de estudio está siendo una fuente de inspiración inagotable para el trabajo creador de todos los profesores encargados de la dirección del proceso docente educativo para la formación de los matemáticos que constituirán nuestro relevo en el siglo XXI. En ellos está nuestra esperanza de preservar la obra que hemos logrado realizar, de ellos depende su continuación y engrandecimiento.

Referencias bibliográficas

MES. (2001). Dirección de Formación de Profesionales, *Resúmenes de los Planes de Estudio C Perfeccionados*, Editora Política, La Habana, 239 páginas.

La representación de la ausencia por medio de una presencia: El cero

Cecilia Crespo Crespo
Universidad de Buenos Aires. Instituto Superior del Profesorado
"Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires. Argentina
ccrespo@sinectis.com.ar

Resumen

El pasaje de la unidad al cero, parece ser un paso intelectual sencillo, sólo si no nos detenemos a pensar acerca de las dificultades que involucran su comprensión. Existe una gran complejidad en este paso, tanto desde el punto de vista histórico como conceptual. La percepción de la relación entre el vacío, la nada y la necesidad de representarla no fue históricamente inmediata ni sencilla. La invención del cero estuvo muy lejos de ser evidente. Se propone una breve recorrida por la historia del surgimiento del cero y sus funciones, para lograr hacer más comprensibles las dificultades que presenta la comprensión de este concepto.

Introducción

El cero cumple tres funciones dentro de la matemática (Lizcano, 1993). La primera de ellas identifica la nada como número, con la misma jerarquía que cualquier otro número. La segunda, de carácter formal, consiste en que el cero aparece siguiendo a la unidad en el número que identifica a la base del sistema. Así, en un sistema de base 10, dicha base se escribe como 10 (uno- cero); en un sistema de base 2, dicha base también es el guarismo 10 (uno-cero) y así en cualquier base.La tercera función permite su utilización en un número para identificar la ausencia de cierto orden de unidades.

El vacío es una categoría muy especial: la creación del cero para ocupar el lugar vacío en un número expresado en notación posicional, *permite "significar una ausencia por medio de una presencia"* (Guedj, 1998).

La invención del cero se encuentra unida a la aparición del concepto de la *"nada"*. El hecho de que la aparición histórica del cero se llevara a cabo después de muchos siglos de que el hombre utilizara los números, se halla fuertemente unido a razones filosóficas. En la mente humana el concepto de *"nada"* es difícil de asumir.

El cero fue inventado por los indios e introducido en Occidente por los árabes. Con los indios aparece el cero con sus tres funciones: el lugar vacío en una columna de un número posicional, la nada y el número. *Shunya* es el nombre de la marca del vacío en lengua india: su primera representación fue un pequeño círculo en el vacío. La traducción correspondiente realizada por los árabes fue *sifr*, posteriormente traducido por Fibonacci al latín como *zephirum* (viento), que derivó en *zephiro*: cero. La llegada de esta última cifra; el *sifr,* dio origen a la palabra cifra para designar a toda la colección.

El cero en las distintas culturas

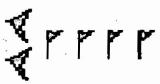
En el hombre primitivo surge el concepto de número a través de situaciones en las cuales en un principio sólo identifica la presencia de cantidades menores y mayores. Luego fue desarrollando la capacidad de contar, de agrupar todo tipo de elementos. también aprendió a valorar, evaluar y medir diversas magnitudes, a concebir y alcanzar números cada vez mayores. Para esto, sin duda, fue necesario desarrollar el pensamiento abstracto.

En algún momento alguien tuvo la idea de reemplazar los objetos por piedritas. Después surgió la necesidad de simbolizar estos números, dando paso de esta manera a las cifras.

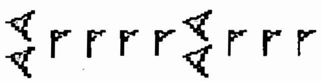
El cero en Babilonia

Hacia el siglo XVII a.C., el rey acadio Amurabi fundó Babilonia en la región del Asia Occidental denominada Mesopotamia y a partir de entonces se habla de la Cultura Babilónica. Los sumerios sentaron las bases del desarrollo de la matemática en esta región. Han llegado hasta nuestra época muchas tablillas de arcilla, en las que estos pueblos escribían con un estilete cuando la arcilla estaba fresca. Algunas se han conservado, proceden del antiguo imperio babilónico y están datadas entre aproximadamente 1800 a.C. y 1500 a.C. Uno de los rasgos notables de la matemática babilónica fue su sistema de numeración posicional y sexagesimal, o sea en base 60.

Utilizaban dos signos  y 
El primero representaba unidades y el segundo múltiplos de 10.

Por ejemplo  representa 24.

Sin embargo, como cada número se representa en sistema sexagesimal, se trata de un sistema de numeración mixto, donde las posiciones representan potencias de 60;

 representa $24 \cdot 60^1 + 23 \cdot 60^0$

Los babilonios no conocen el valor posicional del cero en un principio, lo cual conducía a ambigüedades en la interpretación de los números. Por ejemplo, el número anteriormente considerado, podía interpretarse, según el contexto como: $24 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60^0$

Para intentar superar esta dificultad, a veces dejaban un espacio vacío donde faltaba una potencia de 60. En una etapa posterior en el siglo VI a.C., aunque en una fecha que no se conoce con exactitud, los astrónomos y matemáticos babilonios incorporaron un símbolo para representar la omisión de una potencia de 60.

Este símbolo  denominado a veces "*doble clavo*" actúa como el cero en cuanto a su función posicional.

Muchos historiadores opinan que esta era la única función que cumplía el cero babilónico, sin embargo, llegó a ser utilizado por los astrónomos en su función operatoria.

El cero en la matemática china

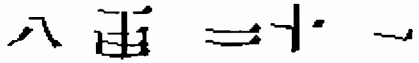
La historia de la civilización china se desarrolla de manera continua a lo largo de cuatro mil quinientos años.

En cuanto a los sistemas numéricos coexisten cuatro. Los números standard o modernos (utilizados desde el siglo III a.C.), los números oficiales (versión decorativa de los standard), los números comerciales (diseñados en el siglo XVI para escribir rápidamente) y los números con palitos (utilizados en la matemática y demás ciencias).

En el sistema standard, para representar números, los chinos utilizaron un sistema decimal con trece símbolos fundamentales: uno para cada uno de los dígitos no nulos, el 10, el 100 y el 1000. Estos símbolos aún son utilizados en la actualidad. Se trata de un sistema híbrido basado en reglas multiplicativas.

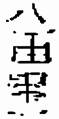
Por ejemplo: Para representar 821, se expresa:

$$8 \times 100 + 20 \times 10 + 1$$



En la notación tradicional, los símbolos se ordenan de arriba hacia abajo, en forma vertical.

Este sistema de numeración no necesita del cero, sin embargo a partir de la dinastía Ming se incorpora un ideograma para identificar ese hueco: el *ling*, que significa *gota de rocío* y que se conserva hasta la actualidad para significar que falta una potencia de 10 en un número. De esta manera si se quiere escribir 801, se encuentra:



en lugar de

Este no fue el único sistema de numeración que se usó en China. Allí, como también en Japón y Corea, los matemáticos conocieron bajo el nombre chino *suan zi* y el japonés

sangi, que significa *"cálculo por medio de fichas",* un sistema decimal posicional de características similares al nuestro, pero con algunas diferencias notables, como la de poseer 9 cifras:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Si se representaría 23, como: II III, se corre el riesgo de confundir dónde empieza el 3 y termina el 2 si no se separan lo suficiente ambas cifras, por lo que comenzaron a intercalarse cifras en distinta posición (vertical y horizontal) para las cifras contiguas de un número. Queda entonces 23 como: ‖≡. Pero aún faltaba solucionar el problema de la ausencia de una potencia de 10, pues simplemente durante mucho tiempo se dejó un hueco entre la cifra anterior. Las operaciones con números así representados se realizan en un tablero en el cual la ausencia de una potencia de diez en un número corresponde a un hueco vacío, denominado *wu*, en el tablero. Ese hueco actúa como un cero. Hacia el siglo XII, se comienza a llenar el hueco con un punto y posteriormente con una pequeña circunferencia.

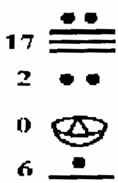
A través de esta representación, algunos historiadores ven influencias de la matemática india, aunque algunos sostienen la hipótesis de la influencia china en India y otros consideran que ambas invenciones fueron autónomas.

El cero de los mayas

En Centroamérica, la civilización maya alcanzó un gran nivel de desarrollo entre los siglos III y X. Los conocimientos aritméticos de los mayas se conocen a través de códices relacionados con la astronomía y la adivinación. Utilizaron un sistema de numeración mixto. El sistema de numeración maya, posee peculiaridades singulares y notables en América: es posicional y se caracteriza por la presencia y utilización del cero.

En su sistema de numeración más sencillo, heredado de los zapotecas y los olmecas, los símbolos básicos son un punto ●, que representa al 1 y una barra ▬, que representa al 5, símbolos que hacen alusión a un guijarro y a un cayado respectivamente. Con ellos representaban los números de 1 a 19 mediante adición, a través de la colocación de tantas barras y puntos como fuese necesario. Por ejemplo: 17 se escribe como: 

Los diecinueve símbolos así generados, forman a su vez parte de un sistema posicional en el cual se colocan las cifras una abajo de la otra, correspondiendo cada posición a valores veinte veces mayores que la inferior, salvo para la tercera posición, que en vez de corresponder a 20^2, multiplica al número correspondiente por 360. Esta anomalía relacionada con la medición de tiempo, impide hablar de sistema vigesimal y dificultó su operatoria. La incorporación de un tercer símbolo correspondiente al caparazón de caracola marina u ojo  permitía indicar las unidades faltantes. Por ejemplo:



representa: $6 \times 20^0 + 0 \times 20^1 + 2 \times 360 \times 20^0 + 17 \times 360 \times 20^1$

La función del cero en un número consiste en identificar la ausencia de cierto orden de unidades, no posee su valor cardinal.

El cero en Egipto

A menudo se ha dicho que el concepto de *cero* no puede encontrarse en el Antiguo Egipto; sin embargo algunos historiadores de la matemática creen ver un antecesor del concepto de cero en el símbolo que aparece a la derecha. Este símbolo era el utilizado para expresar las ideas de belleza completitud y perfección. Los sonidos consonantes de su nombre eran nfr.

símbolo nfr

En los planos para la construcción de los templos, palacios y grandes edificios aparecen líneas niveladoras horizontales para guiar la construcción. Para guiar la construcción de los diferentes niveles que quedarían bajo tierra utilizaban líneas niveladoras como referencia nombradas a partir del "nfr". De la misma manera, es posible encontrar este símbolo en las cuentas contables mensuales de la dinastía 13 del Reino Medio (año 1770 a.C.). En estos registros contables aparecen cuentas con doble entrada con columnas separadas para cada tipo de género. Al final del mes, la cuenta era equilibrada con un saldo igual a cero según puede verse en los símbolos nfr al final de varias columnas.

El cero en la India

Las cifras, en su notación brahmi, de 1 a 9 fueron inventadas en la India hacia el siglo III a.C., pero no aparecía ningún símbolo para el cero ni notación posicional, por lo que se complementaban con símbolos distintos para las sucesivas decenas. Se trataba de un sistema de base decimal aditivo. Esta notación evolucionó en las distintas épocas y regiones de la India, hasta llegar a ser posicional.

El registro escrito más antiguo del símbolo que asociamos con el cero (una pequeña circunferencia), data del año 876 a.C, por lo que se considera que lo conocían con anterioridad. El nombre sánscrito para el cero fue: *shunya*, que significa: vacío. El cero cobró su valor como número significante de la nada y de esta manera pasó a cumplir las tres funciones con que lo conocemos nosotros. Los grafismos utilizados para el cero indio fueron y aún siguen utilizándose: un pequeño círculo o un punto.

El papel de los árabes con respecto al sistema de numeración creado por los indios, se concentra en la difusión de estos conocimientos. Tras la conquista árabe, llega a Bagdag una misión diplomática india en 773. Los sabios árabes reconocieron el valor de la numeración india y la incorporaron a su bagaje intelectual. En obras árabes de la época comienzan a aparecer referencias a los números indios. Su uso se introduce a partir de entonces en Occidente, dando origen siglos después a una democratización del cálculo.

La aceptación en Occidente del sistema de numeración utilizado por los indios no fue inmediata. Llama la atención el lento proceso de consolidación del sistema numérico vigente: los primeros números escritos de los que se tiene constancia datan de hace unos 5000 años; recién en el 628, Brahmagupta hace aparecer en una de sus obras el sistema de numeración decimal como acabado; y este sistema fue plenamente aceptado en Europa después de la Revolución Francesa.

El cero, ¿es natural?

Algunas propiedades del cero son fácilmente determinables, por ejemplo, para contestar a la pregunta de si el cero es par o no, basta con tomar la definición de entero par y comprobar que el cero verifica es definición. Pero otras propiedades no son tan fáciles de definir. Algunos textos y docentes identifican al cero como número natural, otros no. Estos últimos consideran al uno como el primer número natural. ¿Cuáles están equivocados? ¡Ninguno! Se trata simplemente de una convención.

Quienes defienden la posición de que el cero no es un número natural, se basan en las dificultades que ocasiona la comprensión del concepto de cero. Históricamente, el primer conjunto numérico que la humanidad manejó independiente de la cultura fueron los números naturales utilizados para contar. En un principio estableció una relación uno a uno con pequeñas piedras y los objetos poseídos (animales) que quería representar. Luego representó con cuñas grabadas en tableros de arcilla como en el caso de los babilonios o con nudos en una cuerda como en los quipus utilizados por las culturas precolombinas. Casi todas las civilizaciones hace 2000 años manejaban los números naturales. Este conjunto numérico es el primero que todo ser humano maneja. Observemos como los niños en su primer acercamiento semiótico a las matemáticas lo hacen con las expresiones uno, dos, tres,... Nunca escuchamos un niño pequeño diciendo menos uno, tres cuartos, etc. Ellos están contando objetos. El aprendizaje de la idea de "nada" es dificultoso para ellos. En este acto de contar no aparece el cero.

Pero con estos números no se tomaban en cuenta todas las circunstancias de la realidad como por ejemplo, la situación de un préstamo o pérdida de un animal; no podía tirar la piedra porque el animal no había muerto, pues solo estaba en otro lugar, y no podía dejarla dentro de la bolsa, puesto que lo confundiría al momento del recuento. Este simple hecho le costó a la humanidad algunos siglos de trabajo, hasta llegar a construir los números negativos. Estos números sólo llegan a ser interiorizados por los niños entre los 11, 12 años.

Por otra parte quienes adhieren a la consideración del cero como natural, están pensando en los sistemas de numeración posicionales. Los símbolos que se utilizan en un sistema de numeración de cierta base son los dígitos desde cero hasta el valor de la base menos uno. Si se comienza desde el 0 y se le va sumando 1 sucesivamente, obtendremos todos los números naturales. Las definiciones formales de los números naturales, debidas a Bertrand Russell y a Giuseppe Peano , datan de fines del siglo XIX y principios del XX, y son estas definiciones las que fundamentan la consideración del cero como natural.

La construcción epistemológica de este elemento ha tenido sus dificultades y rupturas, es por eso que generalmente su aprendizaje presenta dificultades. De esta manera, ninguna de las dos respuestas acerca de si el cero es o no natural es incorrecta. Se trata de una convención. Cada respuesta tiene una fundamentación válida.

Una visión socioepistemológica de la aparición del cero

Algunas investigaciones afirman que *"el conocimiento matemático, aún aquel que consideramos avanzado tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas"* (Cantoral, 2001). Bajo tal óptica, la construcción social del conocimiento se articula a través de cuatro componentes fundamentales: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y los modos de transmisión por medio de la enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido llamada: acercamiento socioepistemológico.

El cero fue inventado en aquellos escenarios socioculturales en los que el imaginario colectivo y el tratamiento que éste hacía de las representaciones de ausencia, el vacío y las transiciones entre estados contiguos permitió la elaboración del cero como una representación dinámica particular.

En resumen, lo que se pretende bajo esta óptica, es mostrar, con esta presentación, cómo las matemáticas tienen en su construcción rupturas e inconsistencias, que han costado mucho esfuerzo teórico solucionarlas y que a su vez estas rupturas generan dificultades de aprendizaje en los individuos que pretenden aprenderlas y más aún cuando no se presentan los contenidos matemáticos de una manera gradual, secuencial y correlacionada, desconociendo las capacidades, necesidades y ritmo de aprendizaje de los individuos.

En el caso de los mayas, una característica de la mitología existente consistió en la ausencia de la dicotomía bien-mal. Se trató de una sociedad con fundamentos politeístas, con la existencia de divinidades en las que convergía el bien y el mal. El dios de la lluvia, también lo era de la fertilidad; representaba la vida, a través del agua, pero también la muerte, por medio de las inundaciones; tenía el poder de hacer nacer y de destruir. En Occidente, por el contrario se atribuía a Dios el bien y al demonio el mal.

Algo similar ocurrió en la India. El hecho de que fuera posible representar en lo divino la transición, permitió que la idea de nada pudiera ser simbolizada. El nombre dado por los indios al cero significó no sólo el vacío o la ausencia. La palabra *shunya* no fue inventada especialmente para la aritmética. Desde la antigüedad designaba el vacío; éste constituía una idea central en la filosofía mística budista, junto con las nociones de existencia y de pensamiento. El concepto de vacío fue muy estudiado y analizado en la India. Por esta causa, el cero, con todas sus funciones encontró campo fértil para su aparición. No fue *shunya* la única palabra utilizada para mencionar al cero. También se utilizó *bindu*, que significa "punto", en relación a su representación escrita.

En la India, la utilización del cero no sólo se restringió a la aritmética. Su incorporación en la cultura fue tan completa que trascendió a la literatura y la poesía. Aparecen textos en sánscrito en los que el término *shunya-bindu* es empleado a través de bellas referencias metafóricas. En el *Vasavadatta*, el poeta Subandhu, en el siglo VII, escribió:

"En el momento en que salía la Luna
y la noche se hacía menos oscura
era como si las estrellas, con los brazos cruzados
como lotos azules aún cerrados,
hubieran comenzado a su vez a brillar como
ceros (shunya-bindu) en el firmamento

Diseminadas en el espacio
por la vacuidad del Samsara
Dispersas en el azul oscuro
que recubre la piel del creador
quien ha calculado su número
sirviéndose de la Luna como tiza".

Referencias bibliográficas

Boyer, K. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Volumen 14. (pp. 64-75). México: Iberoamericana.

Crespo, C. (2002). El Cero: la representación de la presencia de la ausencia. En *Elementos de matemática*, Vol. XVII, nº 64. (pp. 14-20). Buenos Aires: CAECE.

Gheverghese J., G. (1996). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid: Pirámide.

Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Ediciones Grupo Zeta.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras.* Madrid: Espasa Calpe.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Barcelona: Gedisa.

Russell, B. (1969). Definición de número. En Newman, James (Ed.), *Sigma, el mundo de la matemática.* Vol. 4. (pp.129-135). Barcelona: Grijalbo.

Zubieta, F. (1995). Los fundamentos de la aritmética según Peano. En *Mathesis* 11. nº 4 (pp. 371-382). México: UNAM.

El análisis de funciones y las concepciones alternativas que de ese proceso se generan

Crisólogo Dolores Flores
Centro de Investigación en Matemática Educativa;
Universidad Autónoma de Guerrero. México
cdolores@prodigy.net.mx; cdolores@prodigy.net.mx

Resumen

Este documento contiene los aspectos esenciales de una conferencia dictada por el autor en el marco de las actividades de la RELME 16 celebrada en la Habana, Cuba. El tema se refiere a las concepciones alternativas relativas al análisis de funciones en ambientes gráficos. En especial se analizan la importancia de esas concepciones en tanto procesos cognoscitivos que interfieren en los procesos de aprendizaje, las posibilidades de ser cambiadas por otras aceptables y su permanencia en la mente de los estudiantes a pesar de emplear diseños instruccionales para removerlas.

Introducción

La gran mayoría de los Planes y Programas del nivel medio superior (Howson, 1991; IBERCIMA, 1992; NCTM, 2000; SEP/SEIT/DEGTI/COSNET, 1988), también llamado preparatoria, bachillerato o preuniversitario, incluyen el tema del análisis de funciones elementales. Tal importancia radica principalmente en que en él se sintetiza uno de los objetivos primordiales de la matemática de las variables que se estudia en ese nivel. Los conceptos, relaciones y procedimiento relativos a las funciones, a sus límites, su continuidad y sus derivadas, fueron creados para poder analizar el comportamiento de las funciones. No tiene sentido poder sólo calcular límites de funciones, poder determinar su continuidad o poder calcular derivadas, si no se es capaz de utilizar e integrar estas herramientas para analizar el comportamiento de las funciones. Como las funciones modelan procesos de cambio, es necesario para el estudio de esos procesos, indagar si crecen o decrecen, cómo y cuánto crecen o decrecen, qué tan rápido lo hacen, cuáles son sus puntos máximos o mínimos (Dolores, 2000).

Desde nuestro punto de vista, para estudiar el proceso de la variación de las funciones es importante precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Los primeros indican cómo cambia una función y los segundos indican cuánto cambian. Las funciones pueden cambiar de maneras muy distintas, unas pueden ser crecientes, otras decrecientes, otras no crecen ni decrecen, unas crecen uniformemente, otras lo hacen en forma variada, etc., estas cualidades por sí solas algo dicen sobre su comportamiento, se complementan con los aspectos cuantitativos. En primer lugar los cambios pueden ser apreciados mediante *comparaciones*. Se sabe que un cuerpo en su caída libre en superficie terrestre (regida por la función $s(t) = 0.5gt^2$) avanzó 14.7 m. entre 1 y 2 segundos porque, en $t = 1$ recorrió 4.9 m y $t = 2$ recorrió 19.6, por tanto, $s(2)\ \ s(1) = 19.6\ \ 14.7 = 4.9$. No se puede saber si aumenta o disminuye una magnitud si no se comparan al menos dos de sus estados. Ya que la variación posee la categoría de proceso entonces está compuesta de estados sucesivos. Entre un estado y el que le sigue, o cualquier otro, pueden darse los cambios. Este incremento, o disminución, de la distancia se obtiene con una *diferencia*, del estado final menos el estado inicial.

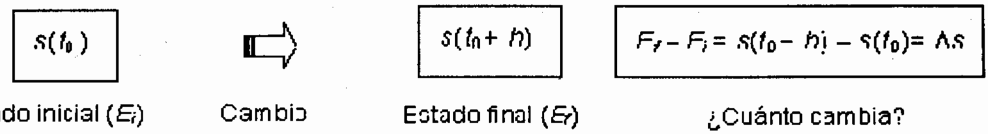


Figura 1

El modelo matemático básico para medir la variación es por lo tanto la *diferencia*. Las fórmulas de las funciones permiten determinar con precisión los valores de correspondencia de las variables y las diferencias entre ellos permiten cuantificar lo que cambian. Con las diferencias se puede analizar el comportamiento de las funciones. Por ejemplo: si $f(x + h)$ $f(x) > 0$ (para todo x perteneciente al intervalo $(x, x + h)$, y $h > 0$ preferentemente pequeño) entonces $f(x)$ crece; si $f(x + h)$ $f(x) < 0$ (bajo las mismas condiciones anteriores) entonces $f(x)$ es decreciente; si $f(x + h)$ $f(x) = 0$ entonces $f(x)$ no crece ni decrece en ese intervalo. Estas desigualdades, que en el fondo representan las comparaciones entre las ordenadas, permiten determinar cuánto cambia $f(x)$ e inferir cómo cambia. Estas relaciones son más evidentes si se utilizan representaciones geométricas:

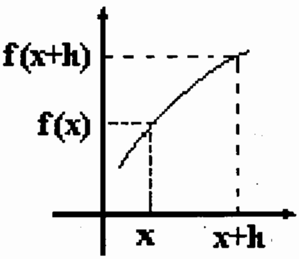


Fig. 2: Como: $f(x + h) - f(x) > 0$; entonces: $f(x)$ crece

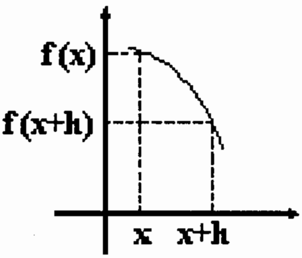


Fig. 3. Como: $f(x + h) - f(x) < 0$; entonces: $f(x)$ decrece

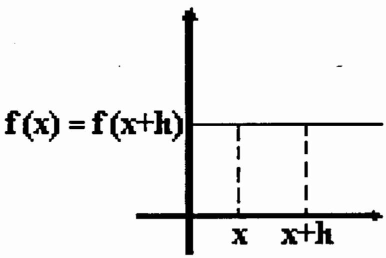


Fig. 4. Como: $f(x + h) - f(x) = 0$; entonces: $f(x)$ es constante

2. Planteamiento de la problemática

Varios investigadores han descubierto que cantidades importantes de estudiantes manifiestan varias dificultades en leer e interpretar gráficas de funciones (Wainer, 1992; Mc Dermot, Rosenquist y Van Zee 1987; Leinhardt *et al* (1990), etc). Por nuestra parte, varias dificultades hemos encontrado también en nuestros trabajos (Dolores, 1998), por ejemplo al presentarles la gráfica y la fórmula de la función: $s(t) = 5t^2$, t 0 (que de manera aproximada da la distancia de recorre un cuerpo en caída libre) a 112 estudiantes de bachillerato que recién habían terminado su curso de Cálculo Diferencial, y preguntarles por la velocidad del cuerpo en $t = 1$, más del 74% dieron como respuesta: 5 m/s. Contestaron dando el valor de la función en $t = 1$, sólo el 8% dio como respuesta: 10 m/s; este dato es indicativo de que la mayoría de estudiantes no relaciona a la derivada con la velocidad pata un $t0$, en cambio la asocian con la ordenada $s(t_0)$.

La interpretación de las gráficas requiere de poner en juego el pensamiento visual, pero muchos estudiantes son renuentes a utilizarlo según lo señalan Einsemberg y Dreyfus (1991). Los estudiantes, incluso los profesores, prefieren el trabajo algorítmico sobre el pensamiento visual pues este último requiere dé poner en juego procesos cognitivos superiores que los que demanda el pensamiento algorítmico. Por eso nuestros profesores de matemáticas de Cálculo Diferencial a pesar de que utilizan gráficas cartesianas para la enseñanza de las funciones y el análisis de su comportamiento, privilegian sólo la determinación de los puntos máximos y mínimos por medios algebraicos, dando por hecho que la determinación de estos puntos en las gráficas son cuestiones triviales.

3. Concepciones alternativas

Como ya señalé en los párrafos anteriores varias de las interpretaciones y concepciones que se generan por parte de los estudiantes como producto de la *visualización* de las gráficas y los significados que les atribuyen no son congruentes con los significados que se aceptan en matemáticas. Esta falta de congruencia causa dificultades y conflictos en la comprensión y aceptación de los significados, por ello han recibido varias denominaciones: errores, errores sistemáticos, preconcepciones, ideas previas, concepciones espontáneas, concepciones erróneas o concepciones alternativas.

El término *error* enfatiza la inconsistencia entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento científico aceptado. Las *preconcepciones* se caracterizan por aquel tipo de conocimiento precientífico formado por las experiencias cotidianas y que se arraiga fuertemente en la mente de los estudiantes. Por nuestra parte utilizamos los términos *concepciones de los estudiantes* y *concepciones alternativas* de la manera como los caracterizan Confrey (1990), Mevarech y Kramarsky (1997), en este sentido el término *concepciones de los estudiantes* se utiliza para denotar aquél tipo de conocimiento de los estudiantes que es acorde con el con el significado aceptado y *concepciones alternativas* para describir el conocimiento que difiere con aquél que debiera ser aprendido.

Las concepciones alternativas pueden ser generadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje previos y ser resistentes al cambio en condiciones digamos tradicionales de enseñanza. Por tanto su remoción o más bien dicho el cambio conceptual es un verdadero reto para los profesores e investigadores en el campo de la educación matemática.

4. Concepciones alternativas en profesores y estudiantes

En los profesores de cálculo del bachillerato hemos encontrado una gran variedad de concepciones alternativas (además de las aceptables), cuando hacen lecturas sobre el comportamiento de funciones a través de sus gráficas (Dolores y Guerrero, 2002). En este trabajo de investigación planteamos el análisis del comportamiento de funciones, buscando que establecieran la relación entre la propiedad variacional dada en forma analítica y las gráficas. Establecer este tipo de relaciones trae aparejados muchos procesos cognoscitivos, uno de los más notorios consiste en descifrar los significados del lenguaje analítico y la búsqueda de una correspondencia con sus representaciones gráficas. También requiere de pasar en el sentido que lo señala Duval (1998) de un sistema de representación analítico a un sistema de representación gráfico y viceversa.

Los resultados que arrojó esta investigación se describen de manera sintética a continuación. Una cantidad significativa asocia la condición: $f(x+h)f(x) = 0$, con f continua y $h>0$ preferentemente *pequeño*, con los puntos de corte de la gráfica con el eje de las x, es decir con las x donde $f(x) = 0$. Análogamente existe tendencia a asociar la condición: $f(x+h)f(x)>0$, con la región donde la gráfica de la función está por arriba del eje de las x, región donde se cumple que $f(x)>0$, y $f(x+h)f(x)<0$ con la región donde la gráfica de la función está por debajo del eje de las x, región donde se cumple que: $f(x)<0$.

Los profesores parecen no diferenciar entre condiciones de comportamiento y condiciones de ubicación de la gráfica en el plano cartesiano. La mayoría asocia consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva, dadas simultáneamente y en forma verbal-escrita, con las regiones correspondientes de las graficas, sin embargo, asocian las condiciones creciente y negativa (dadas en la misma forma) por un lado, y decreciente y negativa por otro, con aquellos sectores de la gráfica donde sólo es positiva y negativa respectivamente. Para ellos las condiciones de crecimiento y *positividad* o decrecimiento y *negatividad* de la función parecen ser condiciones concomitantes.

En otra investigación realizada con estudiantes del bachillerato hemos encontrado concepciones alternativas semejantes a las encontradas en los profesores. Sólo que a los estudiantes las preguntas no les fueron planteadas del lenguaje analítico al gráfico, sino que las mismas preguntas fueron planteadas utilizando el lenguaje coloquial. Por ejemplo, a los profesores se les planteó la siguiente pregunta: ¿Para qué x, $f(x+h)f(x)>0$, con $h>0$? En cambio a los estudiantes se les preguntó así: ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? Desde el punto de vista matemático las preguntas son equivalentes. Es importante hacer notar que los dos conjuntos de personas cuestionadas eran ajenos entre sí, pues los estudiantes no habían recibido clase de aquellos profesores ni siquiera los conocían pues estudian y trabajan respectivamente en lugares distantes. Estos resultados nos permiten plantear dos hipótesis básicas: ¿Los significados gráficos atribuidos al lenguaje variacional podrían ser independientes del sistema semiótico? o ¿Los significados atribuidos a los términos *creciente* y $f(x+h)f(x)>0$ (expresión que indica que: $f(x+h)f(x)$ es positivo) y *positivo* (análogamente con los términos *decreciente* y *negativo*) guardan una relación de concomitancia? Estas preguntas serán objeto de próximos estudios.

5. Sobre la estabilidad y cambio de concepciones alternativas

Una vez detectadas las concepciones alternativas la pregunta frecuente que plantean los profesores radica en que si esas concepciones son estables o pueden ser removidas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Existen varias respuestas al respecto. Confrey (1990) señala que:

a) Antes del estudio formal, las personas sostienen firmemente sus sistemas de creencias descriptivas y exploratorias.

b) Estos sistemas de creencias difieren de lo incorporado dentro del currículo normal.

c) Ciertas constelaciones de estos sistemas de creencias muestran una consistencia que se remarca a través de edades, habilidades y nacionalidades.

d) Estos sistemas de creencias son resistentes al cambio a través de la enseñanza tradicional.

Pozo (1996) es coincidente con estas posiciones, sin embargo señala las condiciones en las que es posible un cambio conceptual:

a) El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética con la teoría alternativa del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir.
b) Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas.
c) A partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del alumno es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

Desde la década de los setentas en la pedagogía soviética se había ya planteado la Enseñanza Problémica, (Majmutov, 1983) como una teoría en la que se concibe que, el desarrollo de la actividad cognoscitiva es posible mediante el enfrentamiento y superación de las contradicciones en el proceso de enseñanza. La contradicción se concibe como una fuerza motriz de la enseñanza problémica en general y del proceso del *aprendizaje problémico* en particular, con la condición de que adquiera un carácter interno, que se haga una contradicción en la conciencia del propio escolar, en su personalidad en general, y que él tome conciencia de ésta como una dificultad. Esta teoría es coincidente con la planteada por los autores citados en los párrafos anteriores, además es una forma posible de encarar las concepciones alternativas y desarrollar el pensamiento de los estudiantes.

Investigaciones recientes (Sinatra y Pintrich, 2003) señalan los defectos comunes de los enfoques pasados respecto del cambio conceptual intencional. Estos enfoques sobre la investigación sobre el cambio conceptual desde la educación de la ciencia y desde las perspectivas de la psicología del desarrollo cognitivo se enfocaron en detallar la estructura de las representaciones del conocimiento existentes en los aprendices, y los medios por los cuales los profesores y los métodos instruccionales podrían facilitar cambios en esas concepciones. Ellos afirman que ambas perspectivas sugieren que si los aprendices reconocen y se vuelven concientes del conflicto entre su conocimiento existente y la concepción científica, el cambio conceptual es posible. Sugieren que la pedagogía del cambio conceptual es un asunto de colocar a los estudiantes en circunstancias que iluminen los puntos en conflicto. Sin embargo, argumentan que el conflicto cognitivo y un involucramiento profundo a menudo son insuficientes para inducir el cambio; el cambio a menudo no ocurre, incluso en situaciones diseñadas para promover la reestructuración del conocimiento, debido a características del aprendiz tales como la motivación, la resistencia afectiva, y las creencias de los aprendices. Aunque recientemente ambas tradiciones de investigación del cambio conceptual han comenzado a reconocer el rol de estas características, ambas no enfatizan suficientemente el grado en que éstos son *factores de control* en el proceso de cambio.

Estos últimos hallazgos nos advierten que los cambios conceptuales no son procesos determinados sólo por el hecho de que los estudiantes entren en conflicto cognitivo y reestructuren su conocimiento, sino hay que considerar los factores como la motivación, las resistencia afectiva y las creencias. Por nuestra parte creemos que un acercamiento hacia estos problemas desde una perspectiva integral y sistémica podría dar respuestas acera de los factores de control en el proceso del cambio conceptual. Estos acercamientos en el terreno de la investigación pueden ser posibles bajo la perspectiva socioepistemológica. Hacia ese rumbo se encaminan nuestros futuros trabajos.

Referencias bibliográficas

Confrey J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Review of research in Education.* Vol. 16. Pp. 3-56

Dolores C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Hitt F. Editor. Grupo Editorial Iberoamérica. Pp. 257-272

Dolores, C. (2000). La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Academia*; Vol. 2 No.20, Universidad Autónoma de Sinaloa

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Ed. Fernando Hitt, Grupo Editorial Iberoamérica

Ensimberg T. & Dreyfus T.(1991). On the reluctance to visualize in mathematics. *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* A project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of the Mathematical Association of America. Zimmerman W. and Cunningham S. Editors; pp. 25-27

Howson, G. (1991). *National Curricula in mathematics*. England: The Mathematical Association, University of Southampton.

IBERCIMA (1992). *Análisis comparado del Currículo de Matemáticas (Nivel Medio) en Iberoamérica* . Madrid: Mare Mostrum Ediciones Didácticas S.A.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein M.(1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* Vol. 60. Pp. 1-64

Majmutov. M.I. (1983). *La enseñanza problémica.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba. Pp. 46-56

Mc Dermot L., Rosenquist M., an Zee E. (1987). Student's difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics, *American Journal of Physics* Vol. 55. Pp. 503-513.

Mevarech Z. & Kramarsky B. (1997). From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 32 Núm. 3. pp. 229-263

NCTM (2000). Principles and Standards for Scholl Mathematics. Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. S.A.E.M. THALES

Pozo, J. I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Ediciones Morata, S.L.

Ríbnikov K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Editorial Mir Moscú.

SEP, SEIT, DEGTI, COSNET, (1988). *Programas Maestros del Tronco Común del Bachillerato Tecnológico.* México: SEP, SEIT, DEGTI, COSNET.

Sinatra, G. & Pintrich P. (2003). The Role of Intentions in Conceptual Changue Learning. En *Intencional Conceptual Changue.* Edited by G. Sinatra y P. Pintrich. Laurence Erlbaum Associates Publishers. Pp. 1-18

Wainer H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educationa l Researcher* Vol. 21, pp.14-23

La matemática en el contexto de las ciencias: Fase didáctica

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional, México
patypoli@prodigy.net.mx

Resumen

La matemática en el contexto de las ciencias es una línea de investigación que reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren, está constituida por cuatro fases: la curricular, la didáctica la epistemológica y la cognitiva. En este artículo se presenta la fase didáctica. Esta fase incluye una estrategia didáctica (denominada matemática en contexto) que presenta conocimientos integrados a los alumnos a partir de una situación problémica de otras disciplinas, que al tratar de resolverla el estudiante se encuentra con la necesidad de tener nuevos conocimientos, lo cual da apertura a que el estudiante esté interesado en otros tópicos matemáticos.

Para lograr la vinculación de la matemática con otras ciencias se describe un proceso metodológico a través de seis de las etapas de la matemática en contexto. Con esta estrategia el modelar matemáticamente está presente todo el tiempo, por lo que se presentan los resultados de una investigación que caracteriza y clasifica a los modelos matemáticos. Asimismo, los modelos son un elemento común a la matemática en contexto y a la resolución de problemas, por lo que se muestran las diferencias sustancias entre ambas estrategias.

Introducción

La matemática en el contexto de las ciencias es una propuesta que reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren, aborda cuatro fases: la curricular, la didáctica, la epistemológica y cognitiva. En este documento se presenta la fase didáctica, que incluye a la matemática en contexto, una estrategia didáctica que presenta conocimientos integrados a los alumnos a partir de una situación problémica de otras disciplinas, que al tratar de resolverla el estudiante se encuentra con la necesidad de tener nuevos conocimientos, lo cual da apertura a que el estudiante esté interesado en otros tópicos matemáticos; como por ejemplo cuando resuelve un circuito eléctrico y se encuentra con una ecuación que le es desconocida, para la cual requiere de conocimientos nuevos de ecuaciones diferenciales (Camarena, 1987). En otras publicaciones se ha descrito en qué consiste esta estrategia didáctica de forma tal que el lector puede recurrir a tales artículos, como por ejemplo Camarena (1995, 1999, 2001).

También se ha demostrado a través de investigaciones experimentales que esta estrategia didáctica facilita la transferencia del conocimiento y favorece la construcción del conocimiento en el alumno a través de aprendizajes significativos, en la terminología de Ausubel, lo que permite que los conocimientos sean duraderos y no volátiles, al mismo tiempo que el muchacho se encuentra motivado hacia las asignaturas de matemáticas que poseen sentido para él.

Por otro lado, con la matemática en contexto, de manera simultánea, al tiempo que la matemática cobra significado a través de la vinculación con otras disciplinas, la misma matemática dota de significados a las demás ciencias que modela y representa (Camarena 1987). En esta ocasión el trabajo se enfoca a presentar un proceso metodológico de vinculación de la matemática con otras disciplinas; este proceso se generó a lo largo de casi 20 años de desarrollar la línea de investigación denominada *la matemática en el contexto de las ciencias.*

Fundamento

La matemática es una materia con un alto índice de reprobación, elemento que es un síntoma de la problemática que la matemática representa para los discípulos. Es un hecho el poco interés que tienen los estudiantes por esta rama de la ciencia, ya que no ven de manera inmediata su aplicación, ni el objeto de tener que cursarla; en buena medida, un elemento que afecta, es la desvinculación que existe entre los cursos de matemáticas y las demás asignaturas de la carrera en donde se imparten estos cursos (Camarena 1984, 1987).

La matemática en el contexto de las ciencias se fundamenta en los siguientes paradigmas educativos (Camarena 1984):

Con los cursos de matemáticas el estudiante poseerá los elementos y herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera, es decir, las asignaturas del área de matemáticas no son una meta por sí mismas sino una herramienta de apoyo a la carrera en estudio, sin dejar a un lado el hecho de que la matemática debe ser *formativa* para el alumno.

La manera natural como se observan los fenómenos de la naturaleza y se despierta el interés en las ciencias es a través de la integración de los conocimientos.

Metodología de vinculación de la matemática con otras ciencias

La matemática en contexto como estrategia didáctica posee varias modalidades de llevarse a cabo y dentro de estos modos hay diversas variantes. Una primera modalidad es presentar, dentro de los cursos de matemáticas, contenidos matemáticos vinculados con otras ciencias y, otra es la de la enseñanza de las ciencias; esta última corresponde a la etapa denominada fase didáctica (Camarena, 1987, 1993, 2000) (o matemática en contexto) de *la matemática en el contexto de las ciencias* .

La primera modalidad es una buena aproximación a la matemática en contexto. Cabe mencionar que una aproximación a la primera modalidad (o una burda aproximación a la matemática en contexto) es dar aplicaciones de la matemática que se imparte en clase.

Las dos modalidades incluyen etapas metodológicas por las se deberá pasar, las cuales se describen en breve. La primera modalidad puede ser implementada por un solo profesor. Mientras que la segunda requiere de un equipo de personas para su logro.

Cabe mencionar que esta última modalidad de estrategia se ha experimentado con asignaturas aisladas de la Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional, obteniéndose resultados prometedores.

A continuación se presentan las etapas metodológicas por las se deberá pasar en la estrategia didáctica de la matemática en contexto. Es decir, el proceso metodológico que es requerido para establecer la vinculación de la matemática con las demás ciencias (Camarena, 1987, 1995, 1999, 2000).

La matemática en contexto como estrategia didáctica posee varias etapas (Camarena, 1999):

1.- Planteamiento del problema de las disciplinas del contexto.

2.- Determinación de las variables y de las constantes del problema.

3. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelaje y su solución.

4.- Determinación del modelo matemático.

5.- Solución matemática del problema.

6.- Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.

7.- Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto.

Si se elimina la tercera etapa, lo que queda es un proceso semejante al que describe Polya a través de sus cuatro etapas para la resolución de problemas. Polya le denomina "comprender el problema" a la primera etapa, mientras que en la matemática en contexto esto se refleja en la primera y segundas etapas. La segunda etapa de Polya se refiere a "idear un plan", elemento que se correlaciona con la cuarta etapa de la matemática en contexto, la referente a elaborar el modelo matemático. Le llama "llevar a cabo el plan" a su tercera etapa, Polya, y se relaciona con la quinta etapa de la matemática en contexto. La sexta y séptima etapas de la matemática en contexto son equivalentes a la cuarta etapa de Polya, la que corresponde a "examinar la solución".

Así, las seis etapas (1, 2, 4, 5, 6 y 7) de la matemática en contexto son las que establecen la vinculación de la matemática con las demás ciencias. Según las etapas mencionadas, el modelaje o modelo matemático, es una de las etapas de la matemática en contexto. Mas no es cualquiera de las etapas, se puede decir que es una etapa central, en el sentido de que sin ésta, no se logra la matemática en contexto.

Las diferencias entre el modelaje o modelos matemáticos y la matemática en contexto estriba en el hecho de que los modelos matemáticos se desarrollan de cualquier problema, ataña o no a la realidad, mas la matemática en contexto se refiere a problemas reales del área de estudio del alumno. La matemática en contexto toma el problema lo resuelve e interpreta la solución en el mundo de la disciplina del contexto, el modelaje se refiere a encontrar la representación matemática del problema, es decir, solamente a modelar el problema.

Los modelos matemáticos en la ingeniería

Por la relevancia de los modelos matemáticos en la fase didáctica de *la matemática en el contexto de las ciencias* a continuación se muestran los resultados de una investigación en donde se caracteriza y clasifica a los modelos matemáticos en el área de la ingeniería, véase el cuadro de este documento.

Para iniciar, se tiene que la matemática en ingeniería es un lenguaje, ya que casi todo lo que se dice en la ingeniería se puede representar a través de simbología matemática (Camarena, 1990).

Es más, el que se represente a través de la terminología matemática y se haga uso de la matemática en la ingeniería, le ayuda a la ingeniería a tener carácter de ciencia por un lado y por el otro, le facilita su comunicación con la comunidad científica de ingenieros (Camarena, 1993).

Dentro del conocimiento de la ingeniería, se tienen problemas de la ingeniería, asimismo, se tienen objetos de la ingeniería que para su mejor manejo o referencia se les representa matemáticamente (por ejemplo: una señal eléctrica del tipo alterno sinusoidal, la señal es el objeto de la ingeniería el cual se representa a través de la función (Camarena, 1993): f(t) = A sen (t+)), y también se tienen situaciones que se pueden describir a través de la simbología matemática (por ejemplo: el condensador de carga q=q(t) estaba totalmente descargado al inicio del problema, esta situación se puede representar matemáticamente, tomando en cuenta que al inicio del problema t=0 y que la carga es una función del tiempo, como (Camarena, 1987): q(0)=0).

<table>
<tr><th colspan="6">CARACTERIZACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Modelaje de objetos de la ingeniería</td><td colspan="4">Modelaje de problemas de la ingeniería</td></tr>
<tr><td colspan="2">La clasificación está en función del uso que le da la ingeniería</td><td colspan="4">La clasificación está en función de las áreas cognitivas de la ingeniería</td></tr>
<tr><td>Modelos estáticos</td><td>Modelos dinámicos</td><td>Modelos de primera generación</td><td>Modelos de segunda generación</td><td>Modelos de tercera generación</td><td>Modelos de cuarta generación</td></tr>
</table>

CUADRO. Clasificación de los modelos matemáticos en ingeniería

De los tres casos mencionados los que caracterizan a los modelos matemáticos, como los concibió la investigación, son los objetos y los problemas, así la definición es: *Un modelo matemático es aquella relación matemática que describe objetos o problemas de la ingeniería.*

Cuando los modelos matemáticos describen objetos de la ingeniería, éstos dan origen a modelos de tipo dinámico o estático. Los modelos dinámicos son relaciones matemáticas que constantemente, por las necesidades de la ingeniería, requieren de modificaciones matemáticas. Los modelos estáticos son relaciones matemáticas que describen a un objeto de la ingeniería como si fuera un "apodo", es decir, matemáticamente no se hace nada más. Como se puede observar de esta clasificación, en modelos estáticos y dinámicos, ésta está en función del uso que se le da en la ingeniería, por lo que es obvio que un modelo dado podrá ser dinámico en alguna especialidad de la ingeniería, mientras que en otra podrá ser estático. Como se puede ver de este punto, es importante conocer la ingeniería en donde el docente labora para determinar los elementos de la clasificación, al igual que se menciona en la enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería a través de la matemática en contexto.

Cuando los modelos matemáticos describen problemas de la ingeniería, éstos se pueden clasificar en modelos de primera generación (Camarena 2001), los cuales se obtienen de datos experimentales de la ingeniería, como por ejemplo determinar la ley de Ohm (Camarena, 1987); también se incluyen en este tipo de modelos los *fenómenos de la ingeniería* como la carga de un condensador, la caída libre de un cuerpo, el movimiento de un péndulo, etc. Si se hace uso de estos modelos de primera generación para construir nuevas relaciones, a estás se les denomina modelos de segunda generación, a su vez, éstos generan a los de tercera generación y éstos últimos a los de cuarta generación.

Los modelos y la estrategia didáctica

Como es sabido, la estrategia didáctica de la matemática en contexto, también llamada la enseñanza de las ciencias (como un todo), entre los paradigmas educativos que la sustentan está el de los conocimientos integrados. Esto significa que como estrategia didáctica conlleva de manera implícita el presentar a los alumnos los conocimientos de la carrera de estudio de forma integrada, es decir, los cursos se imparten de forma interdisciplinaria, sin distinguir cursos específicos de las ciencias básicas, sin que esto implique que no haya espacios dedicados específicamente al estudio de cada una de las ciencias básicas. En el momento de modelar, como se describió en el apartado anterior, se modelan o matematizan problemas, situaciones y objetos. Esto marca una diferencia sustancial con la estrategia didáctica de la resolución de problemas (Santos, 2000), ya que, por un lado, ahí solamente hay problemas y, por el otro lado, el carácter interdisciplinario que posee la matemática en contexto no siempre está presente en la resolución de problemas.

Experiencias en el aula con la matemática en contexto

Se comentarán dos experiencias que muestran las ventajas de la estrategia didáctica de la matemática en contexto.

En la primera experiencia se montó un experimento en donde fue impartido un curso sobre el análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas y electromagnéticas al grupo A, mientras que de forma simultánea el mismo tema se impartió en el grupo B de forma tradicional.

Las evaluaciones, bajo un mismo instrumento de evaluación, de ambos grupos al finalizar los cursos no fueron tan diferentes, se consideró que la diferencia no era significativa, aunque cabe mencionar que el grupo A (el que recibió la matemática en contexto) obtuvo mejores calificaciones que el grupo B, quien recibió un curso tradicional.

Se les hizo un seguimiento a ambos grupos y después de dos semestres, cuando cursaban la asignatura de Comunicaciones I: análisis de señales (la materia del contexto), los resultados fueron asombrosos, los alumnos del grupo A manejaban con destreza la representación de las señales en términos de la serie de Fourier, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, e interpretaban las características de las señales a partir de las expresiones matemáticas sin dificultad (se podría decir que con familiaridad).

Por su parte, el grupo B tuvo un comportamiento igual que todos los demás estudiantes que están en el mismo semestre de la carrera y dos semestres atrás cursaron el tema de análisis de Fourier, es decir, para ellos la herramienta matemática parece que nunca la han recibido, las características de las señales no podían predecirlas, es decir, tal parecía que no tenían las bases que se suponía les debería brindar su curso de matemáticas sobre el análisis de Fourier y los conocimientos sobre señales que proporcionaban sus cursos básicos de la ingeniería.

La segunda experiencia relata un suceso muy particular que se presentó en la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Campus Zacatenco del Instituto Politécnico Nacional, resulta que a los profesores de la academia de matemáticas que atienden a los estudiantes de la carrera aludida se les invitó a participar en una investigación que buscaba aplicar la metodología Dipcing (Camarena, 1984, 2002) para elaborar programas integrales de estudio de las ciencias básicas para carreras de ingeniería, a través de la cual en una de las etapas se analizan los libros de texto que llevan los estudiantes en los cursos propios de la ingeniería.

El propósito de analizar los textos de la ingeniería es el de detectar qué herramienta matemática es la que se necesita y cuáles son las aplicaciones que requiere la ingeniería acerca de la matemática.

A través de este análisis los docentes determinaron las aplicaciones de la matemática a la ingeniería, de forma tal que los participantes en la investigación, el 97 % del total de profesores de matemáticas (casi 70 profesores), quedaron sensibilizados acerca de la necesidad de dar aplicaciones de matemáticas en la ingeniería cuando impartían sus clases.

Esta situación se mantuvo durante seis años de forma tal que los alumnos de estas generaciones sabían que los temas que estudiaban en matemáticas tenían aplicaciones en sus materias de la ingeniería, si no conocían con precisión la aplicación por lo menos sí sabían en qué asignatura debería de ser aplicada. Dicho de otra forma, se inició con la matemática en contexto en una de sus formas más primitivas.

Así, cuando un profesor de ingeniería no aplicaba la matemática los estudiantes les reclamaban. Cabe mencionar que una buena parte de los docentes de ingeniería, en particular de las especialidades de la ingeniería, no acostumbraban emplear la matemática, esta situación que vivieron los docentes de ingeniería durante casi seis años, los llevó a solicitar a los profesores de la academia de matemáticas que les dieran cursos de matemáticas, es decir, que los actualizaran, para no tener problemas con sus alumno. Como es evidente esta acción conduce a elevar la calidad de la educación en esta carrera en particular.

Conclusiones

Como se puede mirar de las experiencias descritas, el presentar, por lo menos, ejemplos de aplicación de la matemática en los cursos que uno imparte conduce a la motivación de los estudiantes ante esta materia y mejorar en su aprovechamiento escolar.

Es un gran adelanto en vías de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje el que se tome en cuenta la matemática en contexto. Si se observan las memorias de eventos que abordan la educación matemática o la matemática educativa, conforme avanzan los años se incorporan más estudios que abordan la matemática en contexto.

Referencias bibliográficas

Ausubel David P., Novak Joseph D. y Hanesian Helen (1990). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Camarena G. Patricia, (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena G. P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Edit. ESIME-IPN.

Camarena G. Patricia, (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería*. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Camarena G. Patricia, (1999). *Hacia la integración del conocimiento: Matemáticas e ingeniería*. Memorias del 2° Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, México.

Camarena G. Patricia, (2000). *Reporte del proyecto de investigación titulado: Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. P. (2001). *Reporte del proyecto de investigación titulado: Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. P. (2002). *Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería*. Revista: Innovación Educativa, Vol. 2, Núm. 10, septiembre - octubre (primera parte) y Núm. 11, noviembre - diciembre (segunda parte). México.

Polya G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Santos, T. Manuel, (2000). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Serie Didáctica, lecturas, 2ª edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México. p. 31-46.

Teorías y Concepciones de la Matemática Educativa: una puesta en práctica en un curso de Cálculo Diferencial

Víctor Martínez Luaces
Universidad de la República - Montevideo. Uruguay
victorml@eiffel.fing.edu.uy

Resumen

La intención de este trabajo es presentar algunas teorías y concepciones de la Matemática Educativa y su implementación concreta en cursos de Cálculo Diferencial en una y varias variables.

Se expondrán algunas ideas de la Resolución de Problemas, Investigación - Acción, Constructivismo Social (Teoría de Aprendizaje de Vigotsky) y algunos elementos de Ingeniería Didáctica. De todas estas teorías, se mencionan diversos ejemplos, implementados en los cursos de la Universidad de la República (Montevideo, Uruguay), entre los años 1995 y 2002.

La exposición estará complementada con la presentación de resultados, y a partir de los mismos se obtendrán conclusiones y se formularán recomendaciones.

Introducción

En este trabajo no se realizará una exposición detallada de las teorías seleccionadas, sino simplemente una breve mención de lo que se considera más relevante en cada una y a posteriori se presentarán ejemplos de implementación de las mismas en el aula.

La selección se realizó teniendo en cuenta un criterio de aplicabilidad y afinidad con el equipo docente.

La sección siguiente, se dividirá en tres partes: Constructivismo Social, Resolución de Problemas e Investigación –Acción. También se irán intercalando algunos elementos de Ingeniería Didáctica que se entendieron más relacionados con los ejemplos que se expondrán. Con relación a ésta última, se utilizará reiteradamente el concepto de Transposición Didáctica (Chevallard, Y, 1995), ya que se presentarán problemas provenientes de otras asignaturas y de situaciones de la vida real que requieren un trabajo de adaptación para su presentación en el aula. Se trata entonces de un trabajo docente extremadamente difícil, que no se reduce al proceso de selección del material de enseñanza en una clase en particular.

Teorías seleccionadas y ejemplos concretos

a) Constructivismo Social: Si bien Vigotsky no era un matemático educativo, sus teorías, mucho más generales, tienen una amplia aplicabilidad y de hecho han servido de inspiración a diversos trabajos e incluso tesis doctorales en esta área.

Una de las ideas que más han sido utilizadas por los investigadores en Matemática Educativa, es la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), la cual se define como “la distancia entre el nivel de desarrollo actual determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces” (Vigotsky, L. S., 1978).

Veamos entonces un ejemplo concreto de cómo se ha llevado a la práctica esta teoría: Cuando los estudiantes ingresan a la Facultad de Química ya han visto en el último año de la enseñanza media, el cálculo Diferencial en funciones de una variable, cualquiera sea la orientación del pre-universitario que cursaron. Por otra parte, del punto de vista químico, las leyes de los gases (Ley de Boyle, Ley General de los Gases, etc.), se ven habitualmente en los cursos de 3° año de la enseñanza secundaria (i.e., cuando los alumnos cuentan con 14 o 15 años de edad) y se vuelven a ver con mayor profundidad en los cursos pre-universitarios. En definitiva, tanto la parte química como la parte matemática vinculada a estos temas forman parte del nivel de desarrollo actual de los estudiantes que ingresan a la Facultad de Química. Sin embargo, si se les pide por ejemplo, que interpreten el hecho de que la derivada de la presión respecto a la temperatura, (para un gas ideal a volumen constante) es positiva, no saben hacerlo. Es más, se han hecho experiencias que muestran que los alumnos tienen cierto nivel de conocimientos, pero no pueden por si solos utilizarlos para resolver problemas muy elementales. Por ejemplo, en el caso recién mencionado, es fácil ver que la derivada es positiva y resultaría obvio vincular esto con el hecho de que la presión se incrementa al aumentar la temperatura (a volumen constante). Aquí estamos ante un ejemplo concreto de un nivel de desarrollo potencial al cual los estudiantes no acceden por si solos, pero son capaces de lograrlo con la ayuda de un docente o incluso de un compañero más avanzado (Martínez Luaces, V., en preparación).

Este y otros ejemplos han sido objeto de una transposición didáctica (Chevallard, Y., 1991) para crear una ZDP que permita a los estudiantes resolver problemas y al mismo tiempo adquirir conceptos y procedimientos.

b) Resolución de Problemas: Se ha escrito mucho sobre la Resolución de Problemas (Schöenfeld, Gaulin, etc.). Algunos de estos trabajos se han tomado como base para la producción científica en esta misma línea de investigación educativa (Martínez Luaces, V., 1997).

Como dice Schöenfeld, es posible que en un curso orientado hacia la resolución de problemas, la cantidad de contenidos efectivamente dictados sea menor, pero esto queda compensado y justificado por una mayor calidad de los mismos (Schöenfeld, 1983).

Se inició el trabajo en esta línea, en una primera instancia, en los cursos de Ecuaciones Diferenciales y en una proporción algo menor, en los cursos de Estadística. Posteriormente estas experiencias fueron extendidas a cursos de postgrado y de educación permanente.

Más adelante, se comenzó la extensión de estas experiencias a los cursos de Cálculo Diferencial. La cantidad de alumnos en estos cursos (unos 600 al año), la mayor cantidad de docentes involucrados – con formaciones muy diversas- y las diferencias que necesariamente imponen cinco carreras distintas, hicieron mucho más difícil la puesta en práctica de estas ideas en este tipo de cursos. Por esta razón, mientras estuvo en vigencia el plan anterior (que proponía un ciclo básico común para las cinco carreras involucradas), sólo se pudo hacer algunas experiencias piloto, por ejemplo:

i. En uno de los tres teóricos si bien se daban los mismos contenidos que en los otros dos, cada vez que se ejemplificaba un concepto o la aplicación de un teorema o una técnica se recurría a un pequeño problema de origen químico o físico, luego de una tarea de transposición didáctica que lo hiciera apropiado para un curso de 1° semestre. Esto tuvo dos efectos importantes, en primer lugar al ser todas las clases de asistencia libre los estudiantes migraban hacia este teórico que contaba con más alumnos que los otros dos juntos. En segundo lugar, en la evaluación docente las diferencias entre los resultados obtenidos por éste teórico y los otros dos, resultaron estadísticamente muy significativas. Esto se comprobó tanto con técnicas estadísticas usuales como utilizando Análisis Multivariado (Gómez, A., Martínez Luaces, V., 2002). En resumen, este teórico actuó como un disparador del cambio que finalmente se concretaría en el nuevo plan de estudios.

ii. Se realizaron actividades extracurriculares tendientes a solucionar el problema de las diferencias en formación de los docentes. Por ejemplo se hizo un minicurso de Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones a problemas químicos y también dos seminarios de Optimización en donde se trataron problemas de Química y de Ciencias Económicas.

iii. Se realizaron diversos asesoramientos a industrias y entes estatales, que si bien mayoritariamente se orientaban hacia la Estadística, de todas maneras fueron acercando al personal a los problemas reales.

iv. Se realizaron trabajos de Investigación integrando equipos multidisciplinarios, fundamentalmente orientados hacia las áreas de Estadística y Ecuaciones Diferenciales, pero que de algún modo planteaban aplicaciones interesantes que también podían ser utilizadas parcialmente en los cursos de Cálculo Diferencial.

Tomando como base todo lo anteriormente citado, se fue construyendo un banco de problemas, ampliamente utilizado en los cursos de segundo año (Estadística, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico) y en menor medida en los de primer año, en particular los de Cálculo Diferencial e Integral.

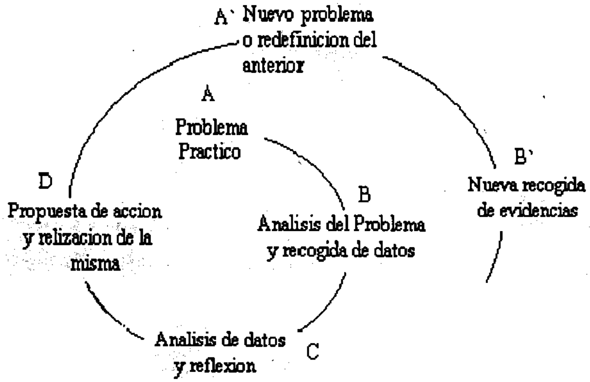
Una vez puesto en práctica el nuevo plan, se logró separar los cursos de Matemática y Física para las distintas carreras, lo que permitió en cada curso tener un alumnado más homogéneo. Uno de los cursos creados en este nuevo plan fue el codificado como Matemática 103 módulo II, para las carreras de Químico Farmacéutico y Bioquímico clínico. Este curso, cuyo temario contenía únicamente Cálculo Diferencial en varias variables, fue organizado exclusivamente sobre la resolución de problemas.

Las clases eran teórico-prácticas, con una muy breve introducción teórica antes de abordar los problemas relacionados con el teórico desarrollado (por ejemplo, los basados en Regla de la Cadena). Estos problemas eran resueltos por los estudiantes en grupos de 2 o 3 integrantes y el docente funcionaba como facilitador, pasando sucesivamente por las mesas de trabajo de los distintos grupos.

La evaluación se hizo también exclusivamente sobre la base de resolución de problemas de origen no – matemático a lo cual los estudiantes reaccionaron muy positivamente. Es más, en una encuesta sobre distintos tópicos (opinión sobre el nuevo plan, sobre los cursos, los docentes, el curso a distancia, etc.), lo que los estudiantes de Químico Farmacéutico y Bioquímico Clínico encontraron como cambio más significativo fue justamente este cambio de enfoque, de evaluación, de modalidad de enseñanza, etc. en Matemática 103, módulo II (Martínez Luaces, V. et al., 2001).

c) Investigación – acción: La Investigación – Acción tuvo sus orígenes en autores como Lewin, Kemmis y Carr, etc., pero en lo referente a nuestras experiencias, hemos optado por seguir muy especialmente la recopilación hecha por Contreras (Contreras, J., 1995).

Según este autor, la Investigación – acción puede ser representada o esquematizada mediante la siguiente espiral:



La misma comienza con el planteo de un problema que surge de una disonancia entre lo que se entiende como deseable y la práctica actual (Etapa A). Esto lleva a una segunda etapa, que corresponde a la recogida de datos y obtención de información importante para resolver el problema (etapa B). En una tercera etapa, la información es analizada (etapa C), para finalmente realizar una propuesta de acción (etapa D). Sin embargo, es posible que luego de este proceso aparezcan nuevos problemas o se produzca una re – definición de los mismos (etapa A'), dando lugar a un nuevo ciclo en la espiral de la Investigación – Acción.

Esta fue exactamente la metodología seguida en el curso de Matemática 103 módulo II, cuya versión final (hasta el momento) es la que se comentó en el literal anterior. En efecto, cuando se creo la asignatura Matemática 103, denominada "Matemática para Farmacia y Bioquímica" se armó exclusivamente sobre la base de temas de Álgebra y de Estadística (imprescindibles para otras materias como Física I, Química Analítica I, II y II, etc.). No se incluyeron temas de Cálculo Diferencial en varias variables, pues se entendió que en principio, con lo que los alumnos sabían de Cálculo Diferencial en una variable (de cursos anteriores), ya era suficiente. Esto creó una disonancia, ya que el Departamento de Fisicoquímica entendió que en esas condiciones no era posible dictar el curso de Termodinámica (Fisicoquímica I). Se pasó entonces (etapa B) a recabar información de distintas fuentes, en particular del propio Departamento de Fisicoquímica, de la Comisión de Seguimiento de las carreras de Químico Farmacéutico y de Bioquímico Clínico, de la Unidad de Educación, etc. Una vez analizada esta información (etapa C), se decidió crear un segundo módulo dentro de Matemática 103 (el actual módulo II), con sólo tres créditos, dedicado exclusivamente a estos temas.

En el curso presencial, dictado en Montevideo, donde la Facultad de Química tiene su edificio, este módulo se dio conjuntamente con otras dos materias de otras dos carreras. En cambio, en el curso a distancia, en la ciudad de Salto, no había estudiantes matriculados en esos otros cursos, por lo que surgió una nueva disonancia y por lo tanto, un nuevo problema a resolver (etapa A'). Luego de consultar a las autoridades, alumnos, etc. (etapa B') y de evaluar las posibles soluciones, analizando ventajas y desventajas (etapa C'), se resolvió preparar un repartido de problemas, especialmente armado para el curso a distancia. También se resolvió enviar dos profesores a trabajar sobre ese repartido con los alumnos de Salto (etapa D').

Increíblemente, pese a ser esta una solución propuesta "sobre la marcha", funcionó mucho mejor que el curso principal dictado en Montevideo. Más aún, los alumnos de Salto se mostraron muy conformes (Martínez Luaces, V. et al, 2001) y en contraposición los estudiantes de Montevideo, solicitaron a través de una nota de más de 50 firmas que se hicieran profundas modificaciones, realizando comentarios muy críticos sobre el curso y los docentes. Quedó de este modo planteado un nuevo problema a resolver (etapa A'').

Para abreviar la exposición no entraremos en los detalles de este nuevo ciclo de Investigación – acción, pero si vale la pena comentar que la propuesta de acción (etapa D'') fue para el año siguiente, la separación del módulo II, en principio con los mismos repartidos de problemas y profesores que habían obtenido resultados exitosos en Salto.

Si bien la respuesta fue satisfactoria, al separar el módulo II, se dispuso de un tiempo mayor y por lo tanto los repartidos armados el año anterior para Salto, pasaron a resultar insuficientes (etapa A''') y esto llevó a ampliarlos con nuevos problemas (etapa D'''), que resultaron de la transposición didáctica de situaciones provenientes de otras asignaturas (Chevallard, Y., 1991).

Los muy buenos resultados obtenidos finalmente con esa nueva propuesta, llevaron a la Comisión de Seguimiento de la carrera de Bioquímico Clínico a solicitar a la Cátedra de Matemática varios cursos de segundo nivel, para que los alumnos puedan realizar en forma opcional. Dos de estos cursos (Matemática 201, "Optimización" y Matemática 202, "Estadística Avanzada") comenzarían a dictarse próximamente y seguramente darán origen a nuevas espirales de Investigación – Acción antes de llegar a sus formas "definitivas".

La misma comienza con el planteo de un problema que surge de una disonancia entre lo que se entiende como deseable y la práctica actual (Etapa A). Esto lleva a una segunda etapa, que corresponde a la recogida de datos y obtención de información importante para resolver el problema (etapa B). En una tercera etapa, la información es analizada (etapa C), para finalmente realizar una propuesta de acción (etapa D). Sin embargo, es posible que luego de este proceso aparezcan nuevos problemas o se produzca una re – definición de los mismos (etapa A'), dando lugar a un nuevo ciclo en la espiral de la Investigación – Acción.

Esta fue exactamente la metodología seguida en el curso de Matemática 103 módulo II, cuya versión final (hasta el momento) es la que se comentó en el literal anterior. En efecto, cuando se creo la asignatura Matemática 103, denominada "Matemática para Farmacia y Bioquímica" se armó exclusivamente sobre la base de temas de Álgebra y de Estadística (imprescindibles para otras materias como Física I, Química Analítica I, II y II, etc.). No se incluyeron temas de Cálculo Diferencial en varias variables, pues se entendió que en principio, con lo que los alumnos sabían de Cálculo Diferencial en una variable (de cursos anteriores), ya era suficiente. Esto creó una disonancia, ya que el Departamento de Fisicoquímica entendió que en esas condiciones no era posible dictar el curso de Termodinámica (Fisicoquímica I). Se pasó entonces (etapa B) a recabar información de distintas fuentes, en particular del propio Departamento de Fisicoquímica, de la Comisión de Seguimiento de las carreras de Químico Farmacéutico y de Bioquímico Clínico, de la Unidad de Educación, etc. Una vez analizada esta información (etapa C), se decidió crear un segundo módulo dentro de Matemática 103 (el actual módulo II), con sólo tres créditos, dedicado exclusivamente a estos temas.

En el curso presencial, dictado en Montevideo, donde la Facultad de Química tiene su edificio, este módulo se dio conjuntamente con otras dos materias de otras dos carreras. En cambio, en el curso a distancia, en la ciudad de Salto, no había estudiantes matriculados en esos otros cursos, por lo que surgió una nueva disonancia y por lo tanto, un nuevo problema a resolver (etapa A'). Luego de consultar a las autoridades, alumnos, etc. (etapa B') y de evaluar las posibles soluciones, analizando ventajas y desventajas (etapa C'), se resolvió preparar un repartido de problemas, especialmente armado para el curso a distancia. También se resolvió enviar dos profesores a trabajar sobre ese repartido con los alumnos de Salto (etapa D').

Increíblemente, pese a ser esta una solución propuesta "sobre la marcha", funcionó mucho mejor que el curso principal dictado en Montevideo. Más aún, los alumnos de Salto se mostraron muy conformes (Martínez Luaces, V. et al, 2001) y en contraposición los estudiantes de Montevideo, solicitaron a través de una nota de más de 50 firmas que se hicieran profundas modificaciones, realizando comentarios muy críticos sobre el curso y los docentes. Quedó de este modo planteado un nuevo problema a resolver (etapa A'').

Para abreviar la exposición no entraremos en los detalles de este nuevo ciclo de Investigación – acción, pero si vale la pena comentar que la propuesta de acción (etapa D'') fue para el año siguiente, la separación del módulo II, en principio con los mismos repartidos de problemas y profesores que habían obtenido resultados exitosos en Salto.

Si bien la respuesta fue satisfactoria, al separar el módulo II, se dispuso de un tiempo mayor y por lo tanto los repartidos armados el año anterior para Salto, pasaron a resultar insuficientes (etapa A''') y esto llevó a ampliarlos con nuevos problemas (etapa D'''), que resultaron de la transposición didáctica de situaciones provenientes de otras asignaturas (Chevallard, Y., 1991).

Los muy buenos resultados obtenidos finalmente con esa nueva propuesta, llevaron a la Comisión de Seguimiento de la carrera de Bioquímico Clínico a solicitar a la Cátedra de Matemática varios cursos de segundo nivel, para que los alumnos puedan realizar en forma opcional. Dos de estos cursos (Matemática 201, "Optimización" y Matemática 202, "Estadística Avanzada") comenzarían a dictarse próximamente y seguramente darán origen a nuevas espirales de Investigación – Acción antes de llegar a sus formas "definitivas".

Resultados

Los resultados de estas propuestas han sido múltiples y muy variados, por lo que aquí sólo mencionaremos una breve reseña de los mismos.

A mediados de los años 90 se comenzó a llevar a cabo una evaluación docente, sobre la base de un cuestionario de 25 preguntas, que los alumnos respondían de manera anónima. Los resultados de la misma, analizados en un artículo de la revista Números (Martínez Luaces, V., 1998) muestran claramente el éxito de las propuestas aquí mencionadas frente a grupos testigo en los que se mantuvo el esquema tradicional.

Algo completamente análogo sucedió con los cursos de Educación a distancia (Martínez Luaces, V. et al., 2001), que comenzaron en 1999. Más recientemente, se obtuvo algo similar en las encuestas de Calidad de Enseñanza, procesadas utilizando Análisis Multivariado.

Del punto de vista institucional, los éxitos antes mencionados llevaron a crear nuevas materias en el área de Matemática, tanto materias opcionales (Optimización y Estadística Avanzada), como cursos de postgrado (EDP: Aplicación a la Ingeniería Química, para la

Maestría en Ingeniería Química) o de Educación Permanente (Tratamiento de Datos, Control de Calidad, etc.).

Finalmente, algunos comentarios de los alumnos ante cuestionarios abiertos o semi-abiertos demuestran claramente lo que hasta el momento se ha conseguido. Algunos ejemplos son las siguientes frases registradas en los cuestionarios antedichos:

"...ahora le encuentro utilidad a la matemática..."

"...no resuelven todo, guiando la resolución..."

"...todas las materias deberían ser como esta..."

Estas y otras frases de los estudiantes nos muestran, tal vez más que los resultados estadísticos, cuál es su opinión respecto al trabajo realizado y a la necesidad de continuar trabajando en la misma dirección.

Conclusiones

Varias ideas, teorías y concepciones de la Matemática Educativa se pueden llevar a la práctica siempre que se dan ciertas condiciones. En todos los casos, el equipo docente es el elemento fundamental que condiciona o no el éxito de la propuesta (por decirlo en términos químicos, es el "reactivo limitante" en todo el proceso)

Cabe preguntarse entonces: ¿por qué puede fallar el equipo docente en propuestas educativas de este tipo o similares?

En primer lugar hay un factor esencial: la comodidad. Es más cómodo no innovar. Los cursos tradicionales no serán los mejores, pero si los más fáciles de dar.

En un segundo lugar, cabe mencionar ciertos factores socio-económicos y organizativos. Por ejemplo, en Uruguay es sumamente común el fenómeno del multiempleo, i.e., los docentes corren de una institución para otra a realizar unas pocas horas de clase en cada una. En otros casos, hay instituciones (públicas y privadas) donde la investigación no es un objetivo importante. En resumen, algunos docentes no reflexionan sobre su práctica educativa, muchas veces por falta de tiempo y en muchos otros casos por falta de interés institucional.

Sin embargo, hay que reconocer que aún en aquellos lugares donde las dedicaciones horarias son altas y la investigación está favorecida, hay quienes optan por no realizar este tipo de actividades, a veces por desinterés hacia los temas educativos y a veces por carencias de formación. Finalmente, no faltan los casos en los que existe admiración por un modelo equivocado (todavía hay docentes que insisten en escribir notas "Bourbakianas" y luego seguirlas al pie de la letra, con gran preocupación por el rigor y la formalidad y muy escaso interés por los temas didácticos).

De todo lo anterior surge claramente la necesidad de contar con un buen equipo docente. Construir un equipo docente lleva años, pero, sin embargo, se desintegra muy fácilmente. Por eso, dada la inestabilidad frente a los estímulos externos (mejores retribuciones, mejores condiciones de trabajo, etc.), se hace imprescindible estar formando continuamente nuevos profesores, independientemente de que tengan o no buenas posibilidades de ingresar de manera efectiva.

Como se ha visto en trabajos anteriores (Martínez Luces, V., 1998), existe una fuerte correlación entre la formación de los docentes y su manera de enseñar.

Es importante remarcar que al hablar de la formación de los docentes, nos referimos a todos sus diversos aspectos: la formación en Matemática, la formación didáctico-pedagógica y la formación en la disciplina (Física, Química, Ingeniería, Economía, etc.), para la cual se enseña la Matemática como asignatura de servicio.

Todos estos aspectos de la formación son importantes y como se dijo anteriormente, de alguna manera constituyen el "reactivo limitante" de cualquier propuesta educativa.

El plan de estudios puede ser muy bueno, los medios tecnológicos pueden ser muy modernos, los salones pueden ser muy amplios y funcionales, pero si el equipo docente no funciona, todo eso no alcanza. Además, para que el equipo funcione no basta con la buena voluntad de sus integrantes. Por el contrario, su formación es fundamental.

Sin una buena formación, el docente no hace más que trasladar sus propias dudas e inseguridades a sus alumnos.

Referencias bibliográficas

Contreras, J. (1995). La investigación en la acción. *Cuadernos de pedagogía* 224. pp. 8 – 19.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique. Pp. 44 – 45.

Gómez, A. y Martínez, V. (2002). Evaluación docente utilizando Análisis Multivariado, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Martínez, V. et al (2001). Distance learning in Uruguay: Two different experiences. *Proceedings Third Southern Hemisphere Symposium on Undergraduate Mathematics*, Delta´01

Martínez, V. (1998). Matemática como asignatura de servicio: algunas conclusiones basadas en una evaluación docente, *Números. Revista de didáctica de matemáticas 36.* 65 – 74.

Martínez, V. (1997). Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas. *Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Martínez, V. (en preparación). Una experiencia de Investigación – Acción en un curso de Cálculo Diferencial.

Schöenfeld, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical Problem solving. *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press.

Vigotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The Development of Higher Psychological Processes*, USA: Harvard University Press.

Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo

Marcela Ferrari Escolá
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – *IPN*. México
mferrari@mail.cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se presenta una investigación realizada en torno a la ruptura entre la presentación aritmética y funcional de los logaritmos en el discurso matemático escolar. La misma se enmarca en el acercamiento socioepistemológico y pretende analizar y sentar bases para el diseño de situaciones didácticas que busquen dotarlos de significado. En este sentido se desarrollan las tres etapas identificadas en el devenir de los logaritmos en objeto a ser enseñado, mismas que sustentan la hipótesis epistemológica que presentamos para su discusión.

Introducción

Este artículo busca profundizar en la construcción social del conocimiento matemático partiendo de la necesidad de reorganizar la obra matemática con base en la reconstrucción de significados y pensando a la matemática como una actividad humana, por tanto cultural e históricamente determinada, como aspectos básicos a tener en cuenta al estudiar un fenómeno didáctico.

Abordaremos en particular a los logaritmos como noción matemática que deviene en una poderosa herramienta a la par que obtiene el estatus de objeto dentro de una rigurosa estructura teórica matemática. Sin embargo, su tratamiento en el ámbito escolar se limita a la axiomatización y algoritmia lo cual produce un vaciamiento de significado y por tanto una considerable debilidad en la estabilización de esta noción en la estructura cognitiva de los estudiantes.

Efectivamente, la función logaritmo es una noción muy particular pues logra adecuarse y ser modelada en distintos marcos y modelar a su vez, entre otros, ciertos fenómenos físicos o de crecimiento. Se la puede reconocer en cada uno de estos contextos gracias a un elemento en común, la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, esencia misma de la función logaritmo. Sin embargo, sus variadas representaciones la convierten en un concepto de difícil manipulación, no es evidente que en todas sus representaciones subyazga, como integradora, la relación entre progresiones. Consideramos que esta falta de transparencia, ausente también en el discurso matemático escolar, es quizás la causa de que sea una noción tan resistida cognitivamente.

La revisión bibliográfica realizada nos permite localizar una dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky (1991, 2000), supeditan la construcción del logaritmo al de función y aquellos que, como Confrey (1995, 2000), la subordinan a operatividad aritmética. Por nuestra parte, cuestionamos estas ideas pues pensamos que mediante una dialéctica entre ambas posturas e introduciendo como eje la relación entre progresiones mencionada, se podría integrar los diferentes significados con los que hoy por hoy se topan los estudiantes y profesores reduciendo sus posibilidades de construir esta noción como objeto.

En este sentido consideramos que la incorporación explícita de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, como la esencia misma de los logaritmos, propiciaría una integración, quizás más efectiva y por tanto más robusta, de esta noción como función al vincular sus distintas representaciones apoyándonos para ello en los usos que de la misma se efectúan. A su vez, consideramos que una revisión a profundidad de los elementos que podrían propiciar la construcción de la función logaritmo aportaría elementos a la problemática, tan extensa y exhaustivamente abordada en investigaciones de nuestra disciplina, respecto a la estabilización de la noción de función.

Marco Teórico

Para desarrollar nuestro trabajo nos apoyamos en la ingeniería didáctica como metodología de investigación incorporando a las dimensiones ya abarcadas por la misma, la *sociocultural*, reforzando así la mirada sistémica a los fenómenos didácticos abordados. Por tanto, presentamos el análisis preliminar, primera fase de toda ingeniería didáctica en el cual intentamos dar una visión del desarrollo de los logaritmos centrándonos fundamentalmente en las dimensiones didáctica, epistemológica y sociocultural del mismo, siendo esta última la que evidencia nuestro acercamiento teórico y extensión de esta metodología.

Adherimos al acercamiento socioepistemológico como paradigma y marco para nuestro trabajo, el cual considera como necesidad básica dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. (Cantoral & Farfán, 2000, p. 189)

Nos interesa establecer consistentemente las pautas para un posterior diseño de situación didáctica en torno a la "dislexia"[1] en el aprendizaje de la noción de función logaritmo producto de la no construcción de dicho concepto en el ámbito escolar. En otras palabras nos estamos refiriendo a la ausencia de significados que la función logaritmo presenta en los alumnos, debido al salto que se percibe entre su introducción a la enseñanza como una potente herramienta facilitadora de operaciones en un acercamiento netamente aritmético y su posterior aparición en la enseñanza superior como una función definida mediante la integración de la hipérbola equilátera.

Otros antecedentes sobre la función logaritmo.

De trabajos como Trujillo (1995), Soto (1988), Confrey (1995, 2000), Lezama (1999), Ferrari (2001) y de exploraciones con profesores y alumnos, surge la necesidad de profundizar en la problemática de la enseñanza de los logaritmos. Por ejemplo, Confrey y Lezama identifican, como un obstáculo epistemológico, la enseñanza de estructuras multiplicativas

---

[1] Denominamos "*dislexia*" a la ruptura que se percibe en la presentación escolar de los logaritmos, ésta es, como facilitadores de operaciones en un primer acercamiento de corte numérico, y su posterior abordaje con todo el rigor de su tratamiento como función sin que medie entre ambos la construcción de los mismos.

desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación a la hora de generalizar hacia el carácter funcional de las exponenciales y de allí inferir relaciones con los logaritmos a través de funciones inversas sin mayor detenimiento en ello. Así mismo, Sierpinska (1992) cuestiona la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición, pues el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que no hemos encontrado, en el discurso matemático escolar, elementos que permitan el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.

Por otro lado, de la exploración que realizara Trujillo (1995) respecto a la interconexión entre la relación de las progresiones aritmética y geométrica y la noción de los logaritmos y exponenciales como funciones, surge la absoluta ausencia de argumentos de los entrevistados, estudiantes recién egresados del nivel medio superior, para intuir tal cosa. Si bien todos reconocen las progresiones aritmética y geométrica y logran determinar el patrón de comportamiento de cada una de ellas, ninguno logra establecer una relación entre ambas. Las respuestas reportadas al momento (Trujillo, 1995) giran en torno a que: *ambas forman parte de los números reales*; o *ambas son progresiones*; o *no hay una operación que las vincule pues en una se suma y en la otra se multiplica*. Se observa además, que esta falta de vinculación entre las progresiones les inhibe generar argumentos en el contexto gráfico, lo cual confirma que ven a ambos objetos como entes aislados y por tanto, no dan indicios de un pensamiento funcional en el sentido de Farfán (1997) respecto a la relación entre las mismas, no reconocen sus características logarítmicas.

A su vez, se encontraron (Trujillo, 1995) las mismas concepciones en los profesores de nivel medio superior entrevistados, sólo uno de tres reconoció las funciones logaritmo y exponencial como la relación entre las progresiones propuestas, distinguiendo explícitamente la base y graficando ambas funciones, aunque de manera convencional, es decir, recordando la forma de las curvas exponencial y logarítmica sin construirlas desde las progresiones dadas.

Las distintas concepciones que docentes y alumnos logran construir en torno a relaciones funcionales y las diferentes representaciones de las mismas, reportadas como elementos que dificultan la apropiación de este concepto (Ceballos, 1996), contrastan con la absoluta carencia de argumentos y representaciones a la hora de trabajar con logaritmos. A éstos, se los presenta como el número al que se debe elevar la base para obtener cierto número, relacionándoselos luego con la función exponencial, mediante la inversa y con su definición dada en términos de una integral indefinida.

Consideraciones sobre los logaritmos en el discurso matemático actual

De la revisión de libros de texto de álgebra y cálculo surge la paupérrima significación dada a los logaritmos. Los mismos aparecen en los libros de álgebra como:

> El logaritmo, para una base dada, de un número es el exponente que indica la potencia a la que debe elevarse la base para obtener el número.

En tanto que en los libros de cálculo podemos encontrar:

La función logaritmo es inversa de la función exponencial.

$$\boxed{\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, x > 0}$$

Para luego de definirlos de manera que raya en lo axiomático proponer una exacerbada algoritmización, donde el objetivo pareciera ser el logro del uso de esta poderosa herramienta sin mayor significación. Esto provoca el uso erróneo de los mismos, no es raro encontrar en la práctica cotidiana desarrollos como:

$$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b} \qquad \text{o} \qquad \ln(a+b) = \ln a + \ln b$$

donde el uso abusivo de la propiedad distributiva como mecanismo de resolución nos da cuenta de la falta de significación de esta partícula "ln" como función.

Consideraciones sobre la epistemología de los logaritmos

En este trabajo partimos de la premisa que la matemática es una construcción humana, un producto social y cultural, consideramos que todo objeto matemático, para consolidarse como tal, necesariamente pasa por varias etapas o momentos. Comienza por ser utilizado sin mayor conciencia de su presencia, siendo manipulado, extendido, formulado, dotado de representaciones y significados más precisos hasta ser insertado en una teoría con características propias. En estas ideas, las cuales surgen de pensar como aplicables al aprendizaje de la humanidad las situaciones de aprendizaje desarrolladas por Brousseau en su teoría de las situaciones didácticas, basamos nuestro análisis de los datos recogidos en nuestra indagación epistemológica.

Efectivamente, si tomamos como eje central en el desarrollo de los logaritmos, las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, que sustentaron su definición como objeto matemático facilitador de operaciones en el siglo XVII, podemos distinguir tres grandes momentos en el devenir histórico de los logaritmos. Podemos observar así, un primer momento de los *logaritmos como transformación*, definidos y enmarcados en el registro numérico en el cual, pese a que no habían sido aun formalmente definidos, pues estamos refiriéndonos a siglos anteriores al XVII, se explora esta relación en busca de extender el rango de los números y de facilitar los cálculos que por la magnitud de las cifras involucradas demandaban tediosas y complicadas operaciones. Es un momento de exploración de posibilidades, de uso de lo que ya se conoce y de enfrentamiento con las limitaciones propias de las herramientas matemáticas puestas en juego, es por tanto una etapa de *acción* si nos valemos de la analogía propuesta.

Deviene luego un momento de definición de la noción, de extensión y caracterización de la misma en otros registros y contextos en donde la relación entre las progresiones se torna fundamental. Así, se descubren las características de los logaritmos en el contexto geométrico, esto es, su asociación con una curva que posee subtangente constante. Se construye su gráfica la cual no fue producto de la tabulación de sus valores. Se encuentra su cuadratura superando las deficiencias del patrón hallado para la cuadratura de las funciones potencia cuando se trata del exponente -1. Se los utiliza para describir fenómenos de la naturaleza como la caída de cuerpos en medios resistentes o la propagación de las ondas sonoras. Se logra su desarrollo en serie de potencias lo que posteriormente le conferirá el status de función. Así, distinguimos a esta etapa como aquella de los *logaritmos como modelizadores* en la cual se los identifica en cada lenguaje utilizado, se los caracteriza en los distintos contextos conocidos y se establecen las relaciones entre ellos.

Por último, consideramos que con los esfuerzos por incorporarlos a la estructura teórica siguiendo ideas de rigor y purismo matemático, de descontextualización y abstracción, se los escinde de sus orígenes convirtiendo a los *logaritmos en un objeto teórico*. Se les dota de una definición formal, lejana a la publicada por Napier como la relación espacio-velocidad de dos puntos moviéndose con velocidad constante uno y decreciente en progresión geométrica el otro. Se los incorpora en el cuerpo teórico matemático como la inversa de la función exponencial, y como aquella función que convierte un producto en una suma. Se conserva la esencia de los logaritmos, no así su relación explícita con las progresiones y otras características que han desaparecido del léxico escolar.

Discusión

Entran en juego, en esta visión sociocultural de la matemática a la que adherimos, variables sociales y culturales, las que deberán fungir como cristales para comprender los avances y retrocesos, los obstáculos y las maneras de superarlos, las argumentaciones y los consensos en este aprendizaje de la humanidad, particularmente en el desarrollo de los logaritmos.

De nuestra indagación epistemológica concluimos entonces que en una primera instancia se pueden distinguir, bajo nuestra óptica, seis etapas en el desarrollo de los logaritmos, a saber: *de exploración algorítmica, numérica utilitaria, gráfico-geométrica, de analiticidad, de simbolización, de formalismo* a las cuales, desde una perspectiva más global encuadramos en los tres momentos ya mencionados.

Concluimos entonces, que los objetos matemáticos aparecen en tanto se actúe sobre ellos, son una construcción sociocultural, por cuanto nacen al seno de una comunidad específica, respondiendo a cuestionamientos particulares pero que se van abstrayendo y escindiendo de sus orígenes para devenir en objetos universales, despersonalizados y atemporales. Las discusiones, las confrontaciones, la comunicación de los mismos hace que evolucionen, que adquieran status en una estructura teórica en tanto sean aceptados y exista un consenso. Los logaritmos, como toda producción humana, no están libres de estas consideraciones y creemos que este trabajo es una pequeña muestra de ello.

Los libros de texto, en general, no rescatan argumentaciones geométricas respondiendo quizás a la pérdida de status de esta rama de la matemática en el discurso escolar. El argumento que prevalece en ellos es el de función inversa como relación entre las funciones exponencial y logarítmica lo cual inhibe verlas como funciones por sí mismas, diluyendo un poco su autonomía funcional. La exacerbada utilización de ejercicios en los que se propone explorar sus dotes como facilitadores de operaciones, en su condición de transformación, y como la primitiva de una integral, que nos deriva implícitamente a la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo, refuerza el pensamiento algorítmico empobreciendo y fraccionando su significado matemático.

Consideramos entonces, que la "dislexia" en el aprendizaje de la noción logaritmo es producto de su enseñanza, de la priorización de una presentación axiomática y de una exacerbada algoritmización en los dos momentos en que aparece explícitamente en el discurso matemático escolar, esto es, en su primer acercamiento como potente herramienta facilitadora de operaciones en los últimos semestres de bachillerato; y en su reaparición, semestres después en la enseñanza superior, como una función definida como la primitiva de la hipérbola equilátera, siendo requisito para ello conocer el Teorema Fundamental del Cálculo. La ausencia en el discurso matemático escolar de elementos que funjan como nexos entre ambos momentos da pauta de la no construcción, en el ámbito escolar, de esta noción y por ende, de la absoluta falta de significados en torno a ella que los alumnos pueden adquirir.

Nuestra visión del devenir de los logaritmos como objetos de saber nos lleva a proponer una hipótesis epistemológica, de construcción de conocimiento: incorporar en los diseños la relación entre progresiones aritméticas y geométricas como sistema logarítmico puede dotar de significado a estas nociones y facilitar el tránsito de la operatividad a la funcionalidad de los mismos.

Referencias bibliográficas

Confrey, J. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in mathematics education 26*(1), pp. 66-86

Confrey, J.& Dennis, D. (2000). La creación de los exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), pp. 5-31.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25. pp. 85-106.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), pp. 47-70.

Farfán R. M. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ceballos, T. (1996). *El* concepto de función y su relación con la proporción. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría. AES. DME Cinvestav-IPN.

Lezama, J. (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav- IPN, México.

Sierspinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* . EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25. pp. 25-58.

Soto, E. M. (1988). Una experiencia de redescubrimiento en el aula: Acerca de los logaritmos de los números negativos y los orígenes de la variable compleja. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Trujillo, R. (1995). Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav- IPN. México.

Reflexión de nuestras epistemes como eje transversal en procesos de estudio de matemática educativa. Ilustraciones

Leonora Díaz Moreno
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación - Chile
leonorad@entelchile.net

Resumen

Este trabajo es una reflexión analítica sobre facetas de una episteme subyacente a dos estudios en matemática educativa, a saber, una investigación protagónica: profesores, dentro de un curso de actualización docente que abordan sus prácticas y una experiencia de metacognición grupal mediada: estudiantes de Pedagogía en Matemáticas que analizan sus procesos de entendimiento del concepto derivada.

Para efectos de este trabajo concebimos episteme como un modo histórico-epocal de entender el mundo, a sí mismo y a los otros; por lo tanto, la episteme incluye tanto procesos como objetos. Entre las dimensiones de una episteme para la época postmoderna se pueden considerar: la relación sujeto-objeto-sujeto (así como fue la relación sujeto-objeto para la época moderna); la relación sujeto-sujetos, es decir, el mundo social; la relación con el otro o los otros (relaciones cara a cara); las racionalidades (la cognitivo-instrumental versus la comunicativa). Luego, una episteme postmoderna está en condiciones de entender los procesos, a diferencia de la episteme moderna que privilegia su foco de atención a los resultados.

Facetas de Epistemologías de la Modernidad y Postmodernidad[1]

Las epistemologías moderna y postmoderna difieren en que la primera trata, básicamente, de la díada sujeto-objeto; y la segunda visualiza, en cambio, una tríada interactiva: sujeto-objeto-sujeto. Dentro de la epistemología de la Modernidad, el sujeto va hacia el mundo externo a "conocer" la "realidad"; el resultado más evidente de esta postura son los cuerpos de saberes de las ciencias fácticas o experimentales. En cambio, desde la epistemología de

[1] Nos entendimos y construimos hasta ahora desde la matriz de distinciones primarias "paradigma de base" de la modernidad (Echeverría, 1986). Representó lo que nos parecía incuestionable, el núcleo de nuestra obviedad y la estructura primaria de nuestra mirada y disposición hacia las cosas. Esa matriz nos definió lo que es real, nuestra capacidad de conocimiento como humanidad, el sentido de la existencia y las posibilidades de la acción humana, los criterios de validez argumental así como la estructura de nuestra sensibilidad. La nueva auto-comprensión de la modernidad convierte en objeto de reflexión crítica sus supuestos ilustrados: el dualismo mente-cuerpo; la separación radical de sujeto y objeto; la centración en un sujeto consciente y cognoscente, estableciendo a la actividad del conocimiento como la fundamental; la conciencia como entidad rectora fundamental; el conocimiento como representación o "modelo" de la realidad objetiva; una supuesta función notarial para el lenguaje; y, la opción analítica, según la cual la división en componentes más simples no afecta la naturaleza de lo analizado. Nos encontramos entonces ante la emergencia de un paradigma de base alternativo al de la modernidad, el que, en consonancia con su propia celebración de la diversidad, se muestra como un conjunto de postmodernismos diferentes, cada uno de los cuales teoriza el significado de la postmodernidad de distintas maneras. Quienes creen que estamos experimentando una ruptura total con la modernidad, utilizan el término postmodernidad para señalar una configuración cultural completamente nueva que tiene sus propias características distintivas y exclusivas. Lo que reconocen tanto las continuidades como las discontinuidades entre la época moderna y la postmoderna, la postmodernidad no indica tanto que la modernidad haya tocado a su fin, como que ha entrado en una nueva fase.

la postmodernidad, el sujeto "conoce" no sólo la "realidad" externa, sino que busca "conocerse" (intrasubjetividad, por ejemplo, mediante la metacognición) y busca "conocer" a otros y "conocer" con otros (intersubjetividad); una de las corrientes epistemológicas que ejemplifica esta postura es el constructivismo radical. La postura postmoderna involucra a los otros, es decir, al mundo social.

Sobre la base de experiencias de estudio cuyos protagonistas son estudiantes, docentes e investigadores-mediadores, nos interesa reconocer facetas de epistemes que pudiesen estarse expresando en esas experiencias, con el ánimo de hacer explícitas esas miradas epistémicas en nuestro quehacer disciplinar y, al mismo tiempo, explicitarlas como objeto de reflexión crítica para hacerlas más transparentes en sus posibilidades y limitaciones.

Dos Experiencias de Estudio

Docentes: Investigación Protagónica

El método de la investigación protagónica (Vera, 1985) colabora a la comprensión así como a la intervención en el aula de matemática. Genera espacios de conversación para reflexionar sobre las propias prácticas, a la luz de propuestas teóricas como de las ideas y retroalimentación que pueden ofrecer los pares, con el propósito de determinar alternativas para abordar el proceso didáctico de la matemática en vistas a incrementar la calidad de nuestra enseñanza y de los aprendizajes.

El trabajo de Investigación Protagónica (op. cit., 1985) se estructura en tres momentos de reflexión. Cada uno aporta elementos diferentes y complementarios al diseño y rediseño de las prácticas didácticas de los participantes:

Reconstrucción del episodio. Se reconstituye el episodio a través de una descripción detallada que incorpora: a) Factores externos: se describe todo lo que es explícito y visible. Adicionalmente se contextualiza; b) Factores internos: se incorpora la subjetividad del profesor comprometido en el episodio. Se busca aquí sus representaciones, sus razones para actuar como actuó y también sus aspectos afectivo-emocionales.

Interpretación del episodio. Cada grupo se pregunta sobre el fenómeno didáctico matemático, buscando las lógicas que lo provocaron. Se aborda en esta etapa una primera identificación de representaciones tanto del protagonista como de los participantes respecto de: i) Los estilos de enseñanza, el rol del docente; ii) Los modos de aprender de los estudiantes, el rol del estudiante; y, iii) El saber matemático involucrado en el episodio. Adicionalmente los docentes formulan hipótesis sobre las situaciones.

Alternativas de acción y de racionalidad. Seguidamente los docentes construyen racionalidades alternativas en lo pedagógico y/o en lo didáctico. Entonces formulan alternativas de acción: a) Para el docente; b) Para el estudiante; y, c) Respecto del saber matemático: Nociones nucleares, modos de enseñarlas, modos de aprenderlas. Diseños y rediseños didácticos.

Este tipo de investigación sitúa el proceso -de indagación e intervención transformadora en la historia-, en un enfoque de espiral autorreflexiva. Entiende la actividad humana de la educación como un conjunto de interacciones constituidas por los distintos actores sociales que se relacionan entre sí por medio de patrones culturales, discursos, representaciones y normas que los trascienden. Interacciones que movilizan una red de significaciones sociales que dotan de sentido a las acciones de los sujetos individuales, comprometiendo en este proceso, pensamientos, representaciones, sentimientos y acciones. Asume como idea central que, la separación institucionalizada entre el saber y la acción (como división del trabajo entre investigadores e investigados, o entre investigadores y educadores-educandos) ha de ser superada; y que la transformación de la acción se realiza por medio de la autotransformación crítica de cada uno de los actores, a la que se arriba por medio del mismo proceso de investigación (Carr y Kemmis, 1988).

En la praxis común - mayéutica grupal, mayéutica en el sentido socrático de la palabra - cada uno rescata su propio saber y experiencia y el saber y la experiencia del otro. En la dialéctica de la interacción y de la tarea compartida, todos y cada uno son protagonistas de su alumbramiento como sujetos del conocer. Este diálogo grupal mediado posibilita la conceptualización, el logro de un nivel simbólico que integra el plano de la experiencia pero también lo supera. Se elabora así un marco referencial común para la acción. Reconocemos a este proceso formando parte de una investigación-acción, que puede instalarse de modo permanente en la dinámica del profesorado.

Estudiantes: Reflexión "Entendiendo la Derivada"

En el marco de un rediseño curricular de una carrera de Pedagogía en Matemática según acentos de constructivismo y profesionalidad temprana de la reforma en nuestro país, los estudiantes cursan la asignatura de Pensamiento Analítico o Cálculo Inicial en su primer año lectivo. Esta actividad curricular considera como eje articulador la reflexión metacognitiva del estudiantado, la que debe ser registrada periódicamente en una bitácora personal, como estrategia pedagógica de parte de un docente mediador intencionado a la "zona de desarrollo próximo". Por su parte, el curso cuenta con dos textos guía elaborados desde la perspectiva del Programa del Pensamiento Variacional "Una introducción a la derivada a través de la variación" de (Dolores (2000, Editorial GEI, México) y "Elementos del Calculo" de Salinas, Alanís, Escobedo, Garza, Pulido y Santos (2001, Editorial GEI, México).. El autor Crisólogo Dolores –en el enfoque de la variación como eje rector del cálculo – busca hacer patente como aspecto esencial a la derivada, la medición de cambios relativos en un instante, por medio de razones entre cambios. Por su parte, el diseño del texto de los autores Salinas y otros persigue familiarizar al estudiantado con el dominio de problemas que aborda el Cálculo y con las ideas fundamentales que subyacen a su análisis como a su solución. Sobre estas bases, la asignatura sensibiliza al estudiantado a la reflexión intra e interpersonal así como a la problematización y construcción significativa de los conceptos centrales del cálculo.

Dos de los estudiantes Comunicación Breve "Propuesta de Estudio para Entender la Derivada en el Calculo Inicial". (González y Paredero, RELME 16, La Habana, 2002) describen parte de su proceso a partir de un episodio vivido en el curso:

'Nos abocamos a estudiar las estrategias que usamos con el fin de entender el concepto de derivada del cálculo inicial y también damos a conocer algunos problemas de entendimiento surgidos a partir de este estudio. Lo hacemos sobre la base de lo ocurrido en un episodio de estudio al que llamamos "Entendiendo la Derivada"'

Sobre la base de ese episodio y con el apoyo de la docente-mediadora intencionada a la Zona de Desarrollo Próximo de los estudiantes –en adelante los protagonistas- estos procedieron a revisar cómo y cuáles fueron sus relaciones con el objeto de estudio "La Derivada", a propósito de la interacción con sus pares. Reconstruyen una "borrascosa" noche de estudio compartido. Cada uno de ellos defendía a ultranza una u otra de las facetas más recurridas en la enseñanza de este concepto. Embargaba la emoción de ofuscación o rabia juvenil a los protagonistas, quienes relataron como el grupo terminó esa noche prácticamente dividido entre los que vislumbraban unas facetas y los que defendían otras. La mediación guía a los protagonistas a identificar en lo ocurrido en esa noche de estudio compartido, sus monólogos sujeto-saber y su contraste con los de sus pares, esto es, interacciones sujeto-saber-sujeto, a lo que comentan:

"¡cual fue nuestra sorpresa al darnos cuenta que todas las definiciones poseían contenidos distintos de lo que podía ser la Derivada! por esto el concepto se nos confundía aún más(...)

Nos comienza entonces, a atraer la idea de que los conceptos matemáticos pueden ser susceptibles de la subjetividad de la visualización humana, de lo cual surge la pregunta ¿tendrá la Derivada una única definición?

Reconocen la influencia de sus pares para gatillarles este proceso reflexivo:

"Sería relevante, según nuestro punto de vista, mencionar los distintos tipos de estudiantes que estuvimos esa noche estudiando para nuestro preexamen de derivada y las influencias de estos..."

En el curso del proceso de investigación, critican y reelaboran la naturaleza de lo entendido:

"Entonces comenzamos a analizar nuestras metacogniciones y llegamos a la comprensión de que la derivada no es un simple concepto sino que la entendemos como un megaconcepto al que podemos llegar abordándolo desde un conjunto de registros (...) para visualizar entonces distintas facetas que lo componen (...)"

Construyen una estrategia de estudio para el aprendizaje de la derivada y la ponen al servicio de otros:

Luego del episodio "entendiendo la derivada" nos dimos cuenta que nuestra comprensión del concepto de derivada ya era algo mucho mayor de lo que imaginamos al inicio de nuestro estudio,
no obstante que muchas cosas aún escapaban a nuestro entendimiento...

Desde este análisis hemos identificado lo que podemos resumir en la siguiente tabla:

Concepto	*Registro*		*Faceta*
DERIVADA	*Numérico*		*Número*
	Físico		*Velocidad instantánea*
	Analítico	*Propiamente tal*	*Razón instantánea de cambio*
		Algebraico	*Expresión algebraica a evaluar en un punto*
		Geométrico	*Pendiente de la recta tangente*

A modo de cierre, resumimos - en la siguiente tabla - nuestra reflexión analítica sobre facetas de una episteme subyacente a estos dos estudios descritos, la investigación protagónica de docentes y la reflexión metacognitiva mediada de los estudiantes.

Tabla epistemes en dos experiencias de estudio

Área y Sujetos	Actualización docente: profesores estudian sus prácticas	Formación en pregrado: estudiantes reflexionan sus entendimientos
Objetos de estudio	Episodios de interacción estudiante-docente	Sus procesos de entendimiento del concepto de derivada
¿Cómo son estudiados?	Objetivan reconstruyendo contexto y factores internos (emociones, racionalidad pedagógica, representación de la conducta del otro); Formulan hipótesis, usando teoría para iluminar de forma práctica aspectos significativos del episodio; Elaboran alternativas	Revisan cómo y cuáles fueron sus relaciones con el objeto de estudio y con sus compañeros de estudio
¿Qué construyen los protagonistas?	Interpretaciones para el episodio; Interpretaciones de situación; Alternativas de racionalidad pedagógica; Alternativas de acción pedagógico-didácticas	Construyen una estrategia para el estudio de la derivada y la ponen al servicio de otros.
¿Qué resignificaciones y nuevas prácticas elaboran?	Reconstruyen la trama de relaciones y las lógicas sociales, institucionales y personales que sustentan la interacción pedagógica; Visualizan nuevas prácticas. Avanzan desde la racionalidad cognitiva instrumental a la racionalidad comunicativa.	Resignifican el concepto de derivada como un megaconcepto. Valorizan los entendimientos de los pares
¿Qué epistemes se reconocen a la base de procesos y objetos de estudio?	Tríadas Sujeto-Objeto-Sujeto Relación con el(los) otro(s): dialógica, de exotopía (el otro externo autónomo), democracia psicosocial entre los sujetos. Relaciones especulares (el mediador refleja el habla), inducción a la tolerancia de polifonía de voces Proceso abierto a distintas posibilidades De la racionalidad cognitiva instrumental a la racionalidad comunicativa. Racionalidad para el mundo subjetivo.	Tejido de díadas Objeto-Sujeto y tríadas Sujeto-Objeto-Sujeto Relación con el(los) otro(s): Maduración a posteriori de las potencialidades de construir espacios de estudio compartidos en que no se persiga la asimilación, ni la identificación sino relación dialógica, de exotopía (el otro externo autónomo), democracia psicosocial entre los sujetos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1997). Matemática Educativa. *Serie Antologías*, N° 1, Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría Crítica de la Enseñanza. La Investigación-Acción en la Formación del Profesorado*, Martínez Roca, Barcelona.

Cordero, F. (2001). La incidencia de la socioepistemología en la red de investigadores en matemática educativa. Una experiencia. *Serie Antologías*, N° 1, Clame, Red de Cimates, México.

Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Memoria doctoral. Facultad de Educación. PUCCH. 1999. Santiago de Chile.

Díaz, L. (marzo, 1996). La Derivada. Concepciones de Alumnos y Recomendaciones para su Enseñanza. *Estudio realizado para el Proyecto Dicyt N° 08-9492 BS*, Una Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje de Conceptos de Ciencias Básicas para Alumnos de la USACH, Vicerrectoría de Investigación y Desarrollo, USACH.

Díaz, L. (enero, 1996). Aprendizajes: Representaciones de Alumnos y Docentes. *Estudio realizado para el Proyecto de Docencia N° 15.16.00-2.67-3*, Vicerrectoría de Docencia y Extensión, USACH.

Echeverría, R. (1986). El búho de Minerva. *Proyecto Interdisciplinario de Investigación en Educación.* Santiago de Chile.

Vera, R. (1985). Orientaciones Básicas de los Talleres de Educadores. *Dialogando N° 10*, Red Latinoamericana de Investigaciones Cualitativas de la Realidad Escolar.

Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados

Francisco Cordero Osorio

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

fcordero@mail.cinvestav.mx

Resumen

Lo social en la didáctica de la matemática ha logrado datos relevantes sobre la construcción del saber matemático y su ingreso al sistema didáctico. Con ello, se han marcado directrices para entender la complejidad del conocimiento matemático escolar y la articulación con las actividades y prácticas del humano para conocer. Se ha entendido lo que el humano organiza está fuera de la estructura matemática pero es fundamental para que ésta se desarrolle, de ahí la importancia del papel que debe desempeñar la reconstrucción de significados y de argumentos en el sistema didáctico.

Introducción

Cuando el conocimiento matemático es analizado en el sistema didáctico se alcanzan dimensiones diversas, seguramente por la complejidad que se le confiere a éste. Lo social es una de estas dimensiones que ha venido a reformular y ampliar las problemáticas, visiones y perspectivas de la matemática educativa. En ese sentido, el propósito de este artículo es mostrar una socioepistemología del conocimiento matemático, la cual brinda una aproximación teórica cuya tesis primordialmente plantea dar cuenta del conocimiento a través de las prácticas sociales de los grupos humanos que lo posibilitaron, y la transformación de estas prácticas cuando existe una intencionalidad para que el saber matemático ingrese al sistema didáctico. Para ello, se convino considerar tres aspectos: la naturaleza de la problemática, las prácticas de los grupos humanos y el desarrollo de las prácticas en el sistema didáctico. En el primero se señala, que en el sistema didáctico el conocimiento matemático es eminentemente una construcción social. En el segundo se explica, que las prácticas son todos los aspectos y formas de la actividad humana que transforma realmente los objetos, resignificando el conocimiento y que esto es lo que realmente sucede en el sistema didáctico. Y en el tercero se plantea, que son las prácticas, como una respuesta a la problemática, las que tienen que ser desarrolladas en el sistema didáctico y no en si los conceptos.

Naturaleza de la problemática

Para entender la problemática y su naturaleza es necesario considerar las demandas sociales a la matemática educativa, y el estatus del conocimiento en los sistemas educativos. Así, por un lado, se puede decir que los profesores de matemáticas demandan métodos para enseñar mejor, y por el otro lado, el sistema educativo, desafortunadamente, ha favorecido el nivel utilitario del conocimiento matemático. En ese sentido, las relaciones didácticas han quedado inmersas en actividades de servicio, más que en actividades de pensamiento y de cultura. No es difícil percibir que las concepciones de los estudiantes y profesores de la matemática están del lado de lo utilitario del saber. Es algo así como enseñar a leer y escribir para que las personas respondan a los menesteres de sus vidas cotidianas, mas no para que cambien con el fin de lograr un mundo mejor, es decir, un alfabetizado no necesariamente es un lector funcional que tiene el requerimiento de incorporar la lectura a su vida para transformarla.

Uno de los objetivos fundamentales de todo sistema educativo en el mundo es la formación de cuadros capaces de responder a las demandas de sus sociedades. Las formas para lograrlo dependen de los marcos culturales, de las prácticas sociales y de las historias de las instituciones. Cada sociedad tiene que reconocer sus condiciones, recursos y posibilidades, establecer sus estrategias, medios y escenarios, formular acciones y teorizar (hacer conocimiento) para trazar orientaciones y entender lo que se desarrolla. La formación de cuadros tendrá que estar inmersa en campos del conocimiento que cubran todos los factores de desarrollo humano. Es por ello, que los grupos humanos que intervienen en los campos de conocimiento tendrán que hacer sus propias organizaciones que reflejen sus pensamientos, resignificaciones y argumentaciones, que formulen sus intenciones, sus direcciones y que alcancen los consensos requeridos.

Para lograr tal objetivo, se necesita alcanzar los estatus del conocimiento escolar que están en los planos de lo funcional y de lo social, es decir, que el conocimiento se integre a la vida para transformarla y se resignifique permanentemente en la vida. La matemática escolar no ha logrado tal cometido.

¿Cómo explicarle a la demanda social que la suma y la resta responden a situaciones de cambio y que, en correspondencia a la actividad humana, se hará más compleja esa suma y esa resta reconstruyendo significados para atender situaciones de variación continua hasta llegar a elaborar la analiticidad de las funciones, si no logramos sacarlo del conocimiento utilitario? Pero aún más grave ¿cómo explicarle si no sabemos qué actividades humanas han posibilitado el conocimiento matemático?

Si se lograran dichos estatus para la matemática escolar (lo funcional y lo social), las demandas sociales obligarían cuestionamientos como: ¿qué es el conocimiento matemático?, ¿cuáles son las formas de conocer propias de la matemática?, ¿cómo se construye?, ¿cuáles son las diversas formas de construcción?, ¿cuál es la actividad matemática?, y ¿cuáles son las actividades humanas o prácticas sociales que permiten el desarrollo del conocimiento matemático?, todas ellas, en contra parte de los cuestionamientos acerca de los métodos para enseñar mejor matemáticas.

Las prácticas de los grupos humanos

Cualquier grupo humano realiza actividades de comunicación como una necesidad que depende de su organización, de su historia y de su cultura para que tomen diferentes grados de avance y desarrollo, de tal suerte que generen conocimiento. Ello ha permitido al alfabetizado convertirse en un lector funcional (Guevara, 2002). Así, el lenguaje es un conocimiento que surge de la necesidad y actividad de comunicación. Si la demanda social fuera formar lectores funcionales en contraparte del lector utilitario, sin duda el foco de atención estaría en el desarrollo de las actividades de comunicación en el sistema educativo, y no en si, en las actividades de lenguaje.

En el marco de esta similitud se pueden entender ciertas dificultades acerca del desarrollo de las estructuras y de los conceptos matemáticos en el sistema didáctico. Por ejemplo, la suma, $a+b=c$; las enésimas derivadas en la serie de Taylor, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!}+\ldots$;

la suma de funciones, $f=g+h$ y las ecuaciones diferenciales lineales: $ay'+y=f$, aparecen en el currículo y en diferentes niveles escolares. Sin embargo, a priori, no se sabe cómo están relacionados, ni mucho menos que éstas tuvieran carácter funcional. Una experiencia escolar (nivel básico) de la suma, $a+b=c$, no tendría por qué dar cuenta del Cálculo (nivel superior), sobre todo si ésta queda en el nivel utilitario. Asimismo, la suma de funciones $f=g+h$, en la experiencia escolar (nivel medio), no tendría que dar cuenta de la estabilidad de ecuaciones diferenciales, $ay'+y=f$ (nivel superior). Sin embargo, todos estos conceptos y estructuras, a pesar de la situación mencionada, pueden vivir aislados entre ellos en el sistema didáctico, de ahí sus dificultades.

Haber considerado la actividad matemática como el modelo de construcción matemática, ha llevado a formular epistemologías que, en el mejor de los casos, ha ayudado a tener cierto entendimiento de los conceptos y sus desarrollos, pero dificilmente logra establecer relaciones funcionales que conjunten o unifiquen dichas estructuras y conceptos a lo largo del sistema educativo.

Ahora bien, si se anteponen las actividades o prácticas sociales a estos conceptos para entender su ingreso al sistema didáctico (ver figura A), la acción misma, da señales de que no es el estudio en sí mismo de las estructuras y conceptos quien logrará las relaciones funcionales, sino el de las prácticas. Siendo así, todos los procesos escolares deberán ayudar a resignificar y argumentar hasta alcanzar dichas relaciones.

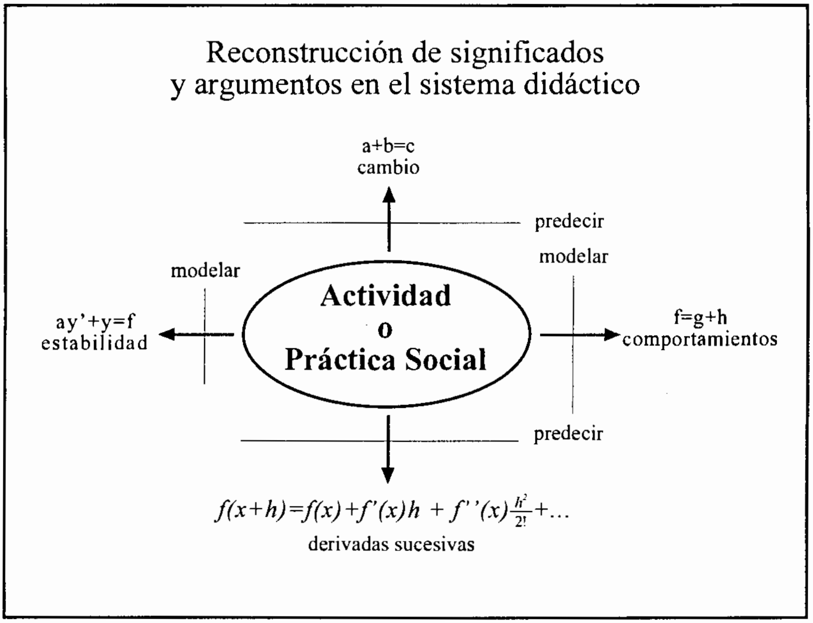


Figura A

En el marco de estas consideraciones las estructuras y conceptos son situaciones que se resignifican a través del desarrollo de las prácticas sociales. Existen investigaciones que dan cuenta de este hecho (ver por ejemplo, Farfán, 1997; Cantoral, 2001; Cordero, 2002).

La suma $a+b=c$, es una situación de cambio que será resignificada hasta alcanzar la analiticidad de las funciones. La serie de Taylor $f(x+h)=f(x)+f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!}+\ldots;$ significa las derivadas como sucesivas y simultaneas y no como la iteración de las enésimas derivadas (González, 1999). Estas resignificaciones son el resultado de ciertas prácticas sociales como lo es la predicción (Cantoral, 2001). El desarrollo de ésta pudiera lograr la relación funcional en el sistema educativo, puesto que se pueden diseñar situaciones donde la predicción sea el argumento que permita generar la resignificación de lo que varía para cantidades discretas y continuas, estableciendo procedimientos cada vez más complejos para expresar cantidades que se transforman y que fluyen: desde un juego de canicas para predecir un nuevo monto de canicas $a+b=c$ (a es la cantidad que se transforma a la cantidad c y b es la variación) hasta predecir la posición de un móvil con respecto al tiempo ($f(t)$ es la posición inicial y $f(t+h)$ es la nueva posición, y $f'(t)h$ es la variación).

Asimismo, la suma de funciones $f=g+h$ significa una situación de comportamiento local y global que tendrá que ser resignificado hasta alcanzar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales $ay'+y=f$, por medio de la modelación o bien graficación como una práctica social (Cordero, 1998 y 2001). Los diseños de situaciones sobre transformación de funciones están compuestos de argumentos de graficación (comportamiento tendencial) que generan resignificados del comportamiento gráfico estableciendo procedimientos cada vez más complejos de los parámetros de las transformaciones: traslaciones de gráficas, linealidad del polinomio, asíntota de las funciones y estabilidad de las ecuaciones diferenciales (Rosado, 2002), (Cordero, 2002b) y (Domínguez, 2001).

Entonces, si la demanda social fuera formar "matemáticos funcionales" en contraparte del "matemático utilitario", sin duda el foco de atención estará en el desarrollo de las prácticas en el sistema didáctico. Consecuentemente, el modelo de construcción estará basado en las prácticas sociales, el cual formulará socioepistemologías de la matemática.

El desarrollo de las prácticas en el sistema didáctico

Se ha explicado la naturaleza de la problemática y el papel que desempeña las prácticas de los grupos humanos, en esencia se ha dicho que se parte del hecho social, en el que cualquier grupo humano se vale de prácticas para generar conocimiento. El desarrollo de éstas depende de la organización, de la cultura y de la historia de los grupos humanos. En ese sentido, estas prácticas son todos los aspectos y formas de la actividad humana que transforman realmente (materialmente) los objetos, resignificando así al conocimiento. La resignificación quiere decir que el conocimiento, el pensamiento es un aspecto necesario de la actividad, pero un aspecto tal que por sí mismo no modifica el objeto, sino se requiere de la práctica. Asumir este hecho social lleva a formular a la problemática de la enseñanza de la matemática como una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Ambas de naturaleza y funciones distintas, sin embargo la segunda requiere interpretar y reorganizar a la primera. Entonces se requiere del estudio de las resignificaciones en los diferentes niveles escolares para rehabilitar categorías del conocimiento matemático que provienen de la actividad humana (Cordero, 2001 y 2002a).

El planteamiento anterior ha llevado a desarrollar una línea de investigación que incorpora cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento: la dimensión epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural. A estas componentes en conjunto y trabajadas en forma sistémica se le llama aproximación socioepistemológica (Cantoral y Farfán, 1998). La hipótesis consiste en considerar la actividad humana como el lugar donde encontraremos la fuente de la reorganización de la obra matemática y del rediseño del discurso matemático escolar.

Esta formulación creará una nueva base de entendimientos y construcciones donde la fuente de abstracción se encuentra en un ámbito de la actividad humana. Las categorías tendrán un carácter funcional del conocimiento matemático (Cordero, 2002a). Esto es, una vez que se identifiquen las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático requieren ser reinterpretadas para ser integradas al sistema didáctico, pues requieren de la intencionalidad para que se desarrollen en las condiciones del sistema. Para ello, se construye la situación donde la práctica se transforma en el argumento, como el eje o núcleo para generar el conocimiento matemático que responda a la situación (ver figura B) (Buendía, 2002).

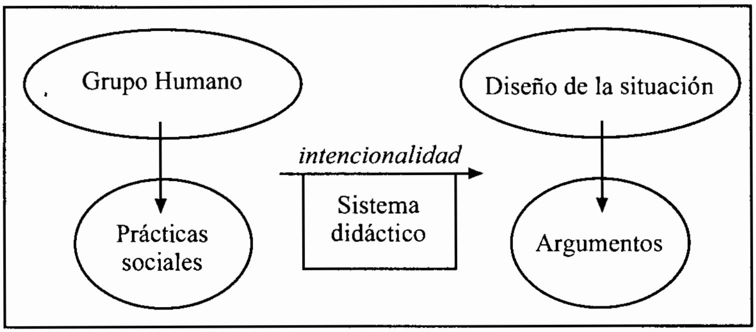


Figura B

Lo social innegablemente reformula y amplía la problemática, la visión y la perspectiva de la matemática educativa. Por ejemplo, se ha percibido que el papel de la graficación en el conocimiento matemático es una práctica social y en consecuencia genera la siguiente investigación.

La investigación. Se ha visto en los ámbitos escolares y no-escolares la necesidad de graficar para entender los datos de ciertas situaciones, pareciera que graficar no sólo es competencia de la cognición, sino que es una práctica social que ha permitido generar cierto conocimiento matemático. En ese sentido investigamos en ciertos ambientes gráficos escolares los procesos de construcción que están con relación a la modelación y el uso de las herramientas matemáticas. Para ello, hemos elegido, por una parte, las transformaciones de funciones y por otra, el uso de calculadoras graficadoras y sensores. Las transformaciones nos permitirán entender el desarrollo de la graficación, y la tecnología nos permitirá entender los aspectos y formas de la actividad humana que transforman o resignifican las relaciones funcionales que entran en juego en los ambientes gráficos.

Para llevar a cabo esta tarea se han formulado los siguientes proyectos de investigación que se encuentran en diferentes niveles de avance.

Proyectos de investigación

1. Una epistemología de la periodicidad a través de la actividad humana. Se pretende explicar que la predicción como práctica social resulta ser un argumento para construir lo periódico.
2. Las resignificaciones en la modelación. Se pretende caracterizar a la modelación como una práctica social a través de situaciones de variación y cambio.
3. Las argumentaciones en las transformaciones de funciones cuando se ponen en juego los dos momentos del desarrollo de función: curva y relación funcional. Se formulará una epistemología de la transformación de funciones donde se confronte la concepción de curva y función, para diseñar la situación didáctica.
4. Las argumentaciones en la modelación del movimiento del resorte: la ecuación diferencial de segundo orden y la función "continua a trozos". Formular la epistemología para modelar el movimiento del resorte donde se confronten las concepciones de continuidad euleriana y moderna para establecer la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial, para diseñar la situación didáctica.
5. Las argumentaciones de la simetría de los parámetros de las transformaciones de funciones: las funciones algebraicas y trigonométricas. Formular la epistemología de la transformación de funciones donde se confronten las interpretaciones (los pensamientos) de las funciones algebraicas y trigonométricas.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2002). *Una epistemología de la periodicidad a través de la actividad humana.* Memoria predoctoral. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, (no publicada).

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon Número monográfico.* Revista de la SAEM (Thales). Núm. 42, Vol. 14(3) España, 353-369.

Cordero, F. (2002a). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cordero, F. (2002b). Reconstrucción de significados en contextos interactivos: las gráficas de las funciones en la organización del cálculo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica, Volumen 15, Tomo 2, 815-820.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* International Thomson Editores, Vol. 4, Número 2, 103-128.

Domínguez, I. (2001).Algunas construcciones de comportamientos asintóticos sinoidales en estudiantes de precálculo y cálculo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica, Volumen 14, 318-3325.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Guevara, G. (2002). *Lecturas para maestros.* Cal y arena, México.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en escena en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. México (no publicada).

Rosado, P. (2002). La variación, la aproximación y la transformación, como marco de reconstrucción de significados de la derivada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica, Volumen 15, Tomo 1, 114-119.

Pensamiento matemático avanzado

Modelo didáctico alternativo para la ecuación de la recta

Carlos H. Saavedra y Patricio Rosen R

CCH.UNAM. México

cahesa@hispavista.com

Resumen

El presente trabajo introduce el Principio de Cavalieri en el tratamiento de un tema de matemáticas a nivel bachillerato. Aunque el trabajo de Cavalieri se publicó en 1635, el conocimiento de su principio, es un buen pretexto para introducir el tema que aquí se aborda, tratando de servir como una estrategia de aprendizaje novedosa, en el salón de clases. Lejos de querernos rebelar contra la apreciación tradicional sobre el trabajo de Cavalieri, hacemos la presente propuesta didáctica que pretende simplificar el tratamiento del tema *Ecuación cartesiana de la recta*, que de otra manera parece tedioso o más complicado en su tratamiento tradicional en el salón de clase, con alumnos del nivel medio superior. La forma tradicional de abordar el tema de *Ecuación cartesiana de la recta*, en el nivel medio superior, es a través del tratamiento del concepto de *pendiente de una recta.* No obstante, en el presente trabajo se enfrenta su abordaje con el único auxilio de la fórmula para calcular el área de un triángulo cuando se conocen de él las coordenadas de sus tres vértices y la aplicación del *Principio de Cavalieri*, visualizando este último, a través de la movilidad que nos proporciona el software *GEOMETER.*

Introducción

La investigación sobre los procesos cognitivos a partir de los años setentas, indujo, de manera significativa, a forjar el marco conceptual. El cual está sustentado en las teorías de la información, la inteligencia artificial, la psicolingüística, etc. Este soporte ha inferido nuevas conceptualizaciones acerca de la representación y naturaleza del conocimiento y la adquisición de habilidades por los estudiantes, así como de otros fenómenos como la memoria el aprendizaje significativo, la resolución de problemas, el significado y la comprensión y producción del lenguaje matemático (Aguilar, 1982; Hernández, 1991).

Una de estas líneas de investigación, dentro de la corriente cognitiva, ha sido la del aprendizaje del discurso escrito, que al mismo tiempo ha derivado en el diseño de procedimientos tendientes a modificar el aprendizaje significativo de los contenidos conceptuales, así como mejorar su comprensión y recuerdo. Se pueden identificar, fácilmente, dos líneas fundamentales de trabajo, a partir de la década de los setentas:

La aproximación impuesta, consiste en realizar modificaciones o arreglos en el contenido o estructura del material de aprendizaje, y

La aproximación inducida, que se aboca a entrenar a los alumnos en el manejo directo y por sí mismos de aquellos procedimientos que le permitan aprender con éxito de manera autónoma (Levin, 1971; Shuell, 1988).

En el caso de la aproximación impuesta, las "ayudas" que se proporcionan a los alumnos pretenden facilitar intencionalmente un procesamiento más profundo de la nueva información, y son planeadas por el docente, el planificador, el diseñador de materiales o incluso el programador de software educativo o por aquellos grupos de profesores que construyen estrategias de enseñanza.. De esta manera, se podría definir *estrategia de enseñanza* como los procedimientos o recursos utilizados por el agente de enseñanza o mediador para promover aprendizajes significativos (Mayer, 1984; Shuell, 1988; West, Farmer y Wolf 1991).

Por otra parte la aproximación inducida, comprenden una serie de "ayudas" internalizadas en el lector, éste decide cuándo y por qué aplicarlas, y constituyen estrategias de aprendizaje que el individuo posee y emplea para aprender, recordar y usar la información.

Estos dos tipos de estrategias de enseñanza y aprendizaje, se encargan de promover aprendizajes significativos a partir de los contenidos escolares. En el primer caso el énfasis se pone en el diseño, programación, elaboración y adecuación de los contenidos a aprender por vía oral o escrita, la cual es tarea del diseñador o del docente; y en el segundo caso la responsabilidad recae en el aprendiz.

Estrategias de aprendizaje

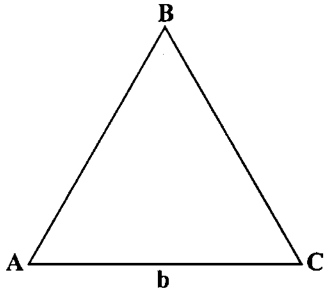
En alguna de las clasificaciones existen las *estrategias para activar (o generar) conocimientos previos y para establecer expectativas adecuadas en los alumnos.* Son aquellas estrategias dirigidas a activar los conocimientos previos de los alumnos o incluso a generarlos cuando no existan. En este grupo podemos incluir también a aquellas otras que se concentran en el esclarecimiento de las intenciones educativas que el profesor pretende lograr al término del ciclo o situación educativa. La activación del conocimiento puede servir al profesor en un doble sentido: para conocer lo que saben los alumnos y para utilizar tal conocimiento como base para promover nuevos aprendizajes.

También existen las *estrategias para promover el enlace entre los conocimientos previos y la nueva información que se ha de aprender.* Son aquellas estrategias cuyo propósito fundamental es crear o potenciar enlaces adecuados entre los conocimientos previos y la información nueva que ha de aprenderse, asegurando con ello el logro de un aprendizaje significativo. De acuerdo con Mayer (op. cit.) a este proceso de integración entre lo "previo" y lo "nuevo" se lo denomina: construcción de "conexiones externas".

El desarrollo del pensamiento en la clase

Otra forma de promover o fomentar el pensamiento de nuestros estudiantes es alentar el análisis, la resolución de problemas y el razonamiento en los cursos regulares del currículo. David Perkins y otros (Perkins et. al. , 1993) afirman que es posible hacerlo si los maestros crean en sus aulas una *cultura del pensamiento.* Esto significa que haya un espíritu de curiosidad y pensamiento crítico un respeto por el razonamiento y la creatividad y la expectativa de que los estudiantes aprenderán y comprenderán. En un aula así, la educación se ve como aculturación, un proceso amplio y complejo de adquisición y comprensión de los conocimientos. Todos aprendimos el lenguaje por ser miembros de un grupo cultural; también aprendimos formas de relacionarnos, normas de conducta y muchas otras reglas y procedimientos complicados por vivir en una cultura que favorece ciertos conocimientos y valores. Así como nuestra cultura familiar nos enseña lecciones sobre el uso del lenguaje; la del aula puede enseñar lecciones sobre el pensamiento al proporcionar *modelos* del bien hacer, ofrecer *instrucción directa* en procesos de pensamiento y animar su *práctica* mediante las *interacciones* con los demás.

Veamos de que manera ocurriría en un aula:



ACTIVIDAD 1

Considérese el siguiente triángulo ΔABC que se muestra en la figura.

Sin modificar la base $AC = b$.

¿Cómo podrías incrementar el área del triángulo?

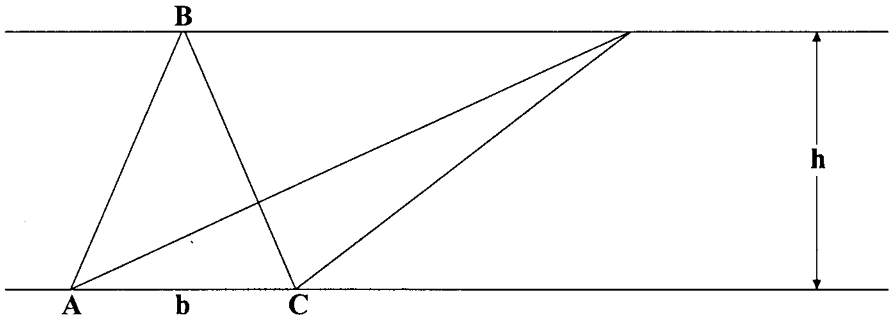
Después de cierto tiempo, debemos esperar que el alumno ofrezca la respuesta que: *incrementando los lados* AB *y* BC

Y la justificación es que el área de un triángulo depende de la base y la altura, si la base no se modifica, entonces para incrementar el área (dejando fija la base), bastará con aumentar la altura. Y esto último se logra incrementando la longitud de los otros dos lados (AB y BC)...? Entonces...

¿Podríamos afirmar que:

> *Si en un triángulo cualquiera, no se modifica la longitud del lado que se considera como base, al incrementar la longitud de los otros dos lados, se verá incrementada el área del triángulo original.* **?** Y esto debido, tal vez, al hecho que el perímetro si se ve aumentado, al aumentar la longitud de dos de sus lados, manteniendo el tercer lado constante.

Para aclarar esta cuestión, considérese la siguiente figura:



Se observa claramente que existen dos triángulos: $\Delta\Delta ABC$ y $\Delta AB'C$

- Ambos con la misma base: $b = AC$
- Los dos lados que no son la base fija, fueron incrementados: $AB' > AB$ y $B'C > BC$
- El perímetro del ΔABC es mayor que el perímetro del $\Delta AB'C$

Sin embargo...

- Los dos triángulos tienen la misma área.

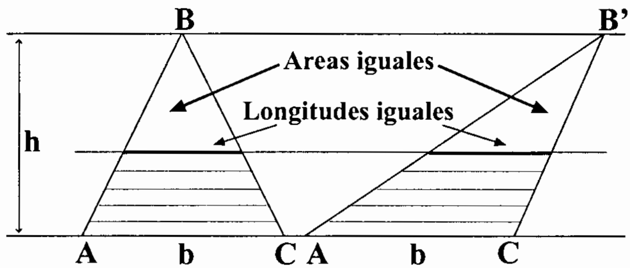
Entonces ¿qué pasó?

En el siglo XVII **Bonaventura Cavalieri** enunció su...

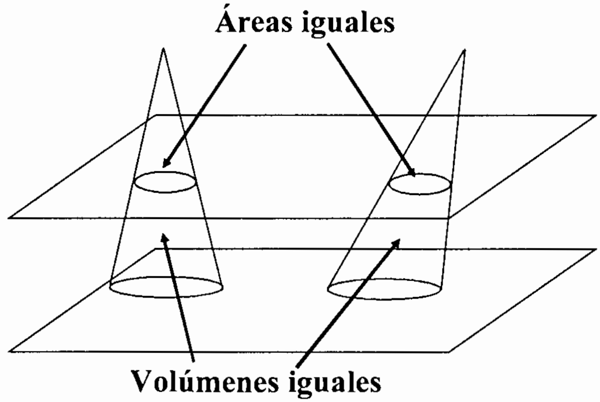
Principio:

"Si dos figuras planas están contenidas entre dos rectas paralelas y poseen la propiedad que las secciones de ellas, cortadas por cualquier recta paralela a las anteriores, siempre son de la misma longitud, entonces las áreas son iguales"

La siguiente figura ilustra lo anterior



De manera análoga, el principio de Cavalieri se puede generalizar para sólidos



El cual se puede expresar como...

"Si dos sólidos están contenidos entre dos planos paralelos y poseen la propiedad que las secciones de ellos, cortados por cualquier plano paralelo a los anteriores, siempre son de la misma área, entonces los volúmenes son iguales"

ACTIVIDAD 2

Considere el triángulo ABC, cuyos vértices están dados por las siguientes tres parejas de coordenadas cartesianas A (0, 0); B (3, 0) y C (2, 4). Para determinar su área lo podemos realizar de al menos, dos formas:

Primera (Por Geometría Plana): A = (1/2)b·h = (1/2)(3)·(4) = 6 u²

Segunda (Por Geometría Analítica):

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{matrix}\right\| =$$

A=6u²

ACTIVIDAD 3

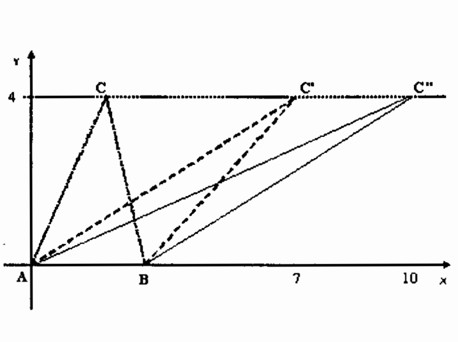
Si ahora modificamos el tercer vértice a C'(7, 4), dejando fijos los otros dos, obtendremos:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{matrix}\right\| = A=6u^2$$

Si posteriormente modificamos nuevamente el tercer vértice a C''(10,4) obtendremos

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \end{matrix}\right\| =$$

A=6u²

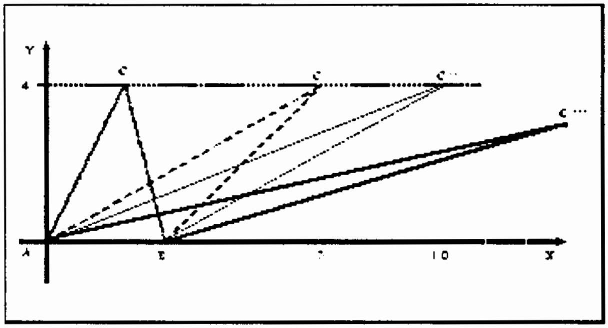


Esto significa que no importa que tan retirado de la base esté ubicado el tercer vértice con tal de que se encuentre sobre una recta paralela a ella, se conserva el área. De hecho para disminuir el área, sin modificar la base, bastará con ubicar al tercer vértice sobre una recta paralela a la base, pero más cercana a ella.

Por ejemplo moviendo al vértice C'''(12, 3), se obtendrá como área:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 12 & 3 & 1 \end{vmatrix}=$$

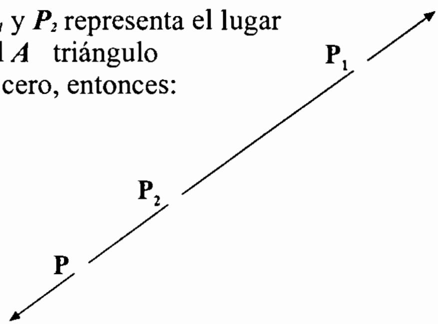
$A=4.5\ u^2$



Ahora, considérense dos puntos en el plano cartesiano, cuyas coordenadas son dadas, $\boldsymbol{P_1(x_1, y_1)}$ y $\boldsymbol{P_1(x_2, y_2)}$. Posteriormente considérese un tercer punto ***P(x, y)*** cualquiera, con la única condición que se encuentre ubicado en la misma recta a la que pertenecen los dos puntos dados. Entonces el área del triángulo formado por estos tres puntos es igual a cero. Dado que se trata de un triángulo degenerado, debido a que los tres puntos son colineales y por ende, su área es igual a cero.

Entonces la línea recta ***L*** que pasa por los puntos $\boldsymbol{P_1}$ y $\boldsymbol{P_2}$ representa el lugar geométrico de los puntos ***P(x, y),*** tales que el área del *A* triángulo degenerado, formado por los puntos ***P1, P2*** y ***P,*** vale cero, entonces:

$$L = \{P(x, y) / A = 0\}$$



$$\text{Y como A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esto significa que

$$x1\,(y_2 - y) - y_1\,(x_2 - x) + 1(x_2\,y - x\,y_2) = 0$$

$$x_1\,y_2 - x_1\,y - y_1\,x2 - y_1\,x + x_2\,y - x\,y_2 = 0$$

$$y(x_2 - x_1) - x_2\,y_1 = x(y_2 - y_1) - x_1\,y_2$$

Sumando en ambos miembros el término $x_1\,y_1$, y reagrupando tenemos

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)}$$

La ecuación cartesiana de la recta.

Conclusión

La enseñanza de habilidades y procesos como el razonamiento, la metacognición, estrategias de aprendizaje, la resolución de problemas y la creatividad, dicta cambios en el salón de clase, en donde se incluye la estructura física, el rol del profesor, el rol de los alumnos y su interacción. La clase tradicional con sus pupitres en hileras fijas viendo el "show"del profesor como único emisor de conocimiento, con los alumnos mirando pasivamente cómo el profesor se desempeña al frente del grupo y único acaparador del pizarrón, pensando que todos sus alumnos lo siguen en el aprendizaje con el mismo ritmo de enseñanza que marca su dominio de información que vierte con el gis en la pizarra; no ayuda a desarrollar el pensamiento de sus alumnos.

La escuela del siglo XXI debe incluir muebles móviles que permitan la actividad en grupos pequeños. En este ambiente el profesor es el mediador entre el conocimiento y los alumnos y es el facilitador de las actividades que fomentan la comunicación entre alumnos y profesor y entre alumnos y alumnos. El profesor hace preguntas que inducen pensamientos y que fuerzan a los alumnos a reflexionar y responder con afirmaciones, pensamientos y preguntas de ellos mismos. También permite hacer aclaraciones usando la pizarra, motivado por las inquietudes y preguntas de los alumnos, sin apoderarse de ella por mucho tiempo.

La mayoría de los profesores no tenemos demasiada experiencia en este tipo de actividades, por lo que deben recibir ayuda con programas instruccionales; deben aprender a utilizar las respuestas de los alumnos para extender sus procesos de razonamiento.

Referencias bibliográficas

Aguilar, F (1982) Una experiencia de aprendizaje por investigación directa del medio. *Revista de Educación.*

Hernández, R (1991) *El conocimiento compartido.* Barcelona

Levin, E (1971). Causal atributions in mathematics and reading. *Journal of Experimental Education,* 58 (3), 197-213.

Mayer, R (1984). Task motivation and mathematics achievement in actual task situations. *Learning and instruction*, 3, 133-150.

Perkins, P et al (1993) *Reasoning and problem solving*. Boston; Allyn & Bancon.

Shuell, W (1988) Variables affecting students intrinsic motivation for school mathematics. *Learning and instruction,* 3, 281-298.

West, Farmer & Wolf (1991) *Learning human skil.* London, Heinemann.

Análisis preliminar para el diseño de una propuesta de situaciones matemáticas, para construir algunos significados de las funciones exponencial y logarítmica.

Miguel Romero Flores, Juan M. Camacho Hernández, Santiago Lucas Martínez, Marcela Ferrari, Gustavo Martínez, Apolo Castañeda.

UAEH- CINVESTAV- CICATA, México

campeon6mx@yahoo.com jmch_iboxford@hotmail.com santiagolucasmx@yahoo.com

Resumen

Esta investigación dará continuidad a los trabajos realizados sobre la utilización de las progresiones aritméticas y geométricas en la construcción de algunos significados sobre las funciones exponencial y logarítmica. En efecto, en el trabajo de Trujillo (1995) se reporta que existe cierta dislexia entre la presentación aritmética y funcional de los logaritmos en el discurso matemático escolar. En tanto que, para Ferrari (2001) el abordaje de los logaritmos es axiomático ya que no existen elementos en el discurso escolar que suavicen el pasaje de lo aritmético a lo analítico. La metodología de investigación implementada es "la ingeniería didáctica".Consideramos que la propuesta de las situaciones matemáticas, que presentaremos, puede resultar satisfactorio para que nuestros estudiantes transiten de lo aritmético a lo funcional, con mayor familiaridad y confianza.

Introducción

Esta investigación pretende dar continuidad a los trabajos realizados por anteriores investigadores sobre la utilización de las progresiones aritméticas y geométricas para construir algunos significados de las funciones exponencial y logarítmica. Esta propuesta busca obtener algunos argumentos para romper la dislexia entre los enfoques aritmético y funcional producida en la enseñanza de los logaritmos, haciendo uso de algunas situaciones matemáticas que puedan vincularlos.

Si recurrimos a algunos antecedentes Ferrari, (2001) hace un rescate epistemológico sobre logaritmos y exponentes diciendo "*Dando un hojeada a la historia, encontramos que los logaritmos y las exponenciales han estado estrechamente vinculados, desde sus albores como nociones matemáticas, surgidas a principios del siglo XVII*"

Marco teórico

La presente investigación retoma además de las posturas de Piaget, la "*Teoría de Situaciones Didácticas*" expuesta por Brousseau. Esta teoría, contemporánea a los inicios del constructivismo, busca proponer con bases científicas, experiencias que propicien un aprendizaje significativo en los alumnos. El proceso es complejo, pero de gran valía cuando se logra dar buena dirección al proceso de la enseñanza.

De acuerdo con Brousseau (1986), dentro del aula generalmente se presenta una *génesis ficticia* en el discurso escolar (expuesto por el profesor, los libros, instituciones, etc.), en el cual se aíslan las nociones y propiedades de las actividades que les dieron origen, sentido, motivo y utilización (Ferrari, 2001). Esto significa que los conocimientos se deforman al ser impartidos a los alumnos, descontextualizándose de sus orígenes históricos, dejando atrás el sentido o diseño, la cuestión para la cual fueron creados o concebidos (Chevallard, 1995).

Brousseau en su teoría de *Situaciones Didácticas,* busca explicar la trascendencia de la enseñanza como actividad didáctica, estudiando la naturaleza de los fenómenos que ocurren dentro del aula y del proceso enseñanza-aprendizaje con respecto a la matemática, tomando en cuenta los conocimientos impartidos, la forma en la cual se enseñan, la forma mediante la cual aprenden los alumnos y las posibles restricciones bajo las cuales se llevan a cabo en el campo de la educación.

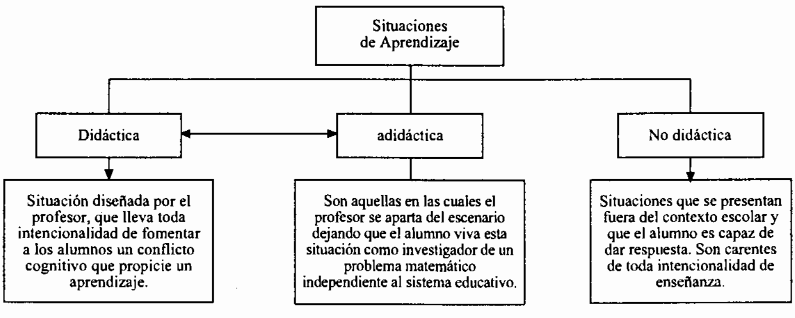
El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrio. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta cuando se apropia del conocimiento (Brousseau, 1986).

En la *enseñanza tradicional*, el profesor solamente imparte los saberes sin esperar una respuesta específica por parte de los alumnos. Esta situación es contradictoria a la postura de Brousseau, quien establece que en el proceso de enseñanza, se requiere de la participación activa del alumno, quien ha de manifestar una respuesta emitida al interactuar éste frente a un objeto de conocimiento.

Consideramos que la devolución es la esencia del acto de comunicación entre profesor y alumno frente a un objeto de conocimiento, produciéndose la misma en ambos sentidos. Así, es el acto mediante el cual es el profesor le devuelve al alumno la responsabilidad de su propio aprendizaje, le delega la exploración, la búsqueda, la necesidad de hallar respuestas y de avanzar de manera tal que esto sea aceptado quizás sin ser percibido por el mismo. A su vez, el alumno al involucrarse con el problema, devuelve al profesor el papel de mediador entre los saberes sociales y los producidos en el aula, gestionándose así, el proceso de aprendizaje de ambos (Ferrari, 2001).

Lezama (1999) considera en sus estudios, la necesidad que tienen los docentes de proponer una situación matemática, que le permita dotar al conocimiento que se desea impartir, de un significado propio y útil, además de que el alumno se percate de que el conocimiento adquirido pueda ser utilizado en la resolución de otros problemas. Toda situación debe tener como objetivo primordial que el alumno interactúe con el conocimiento de estudio, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías y que retome los que más le son útiles y aplicables a su entorno.

A interpretación nuestra, Brousseau considera que se presenta un efectivo proceso *enseñanza-aprendizaje*, cuando el alumno además de haberse apropiado del conocimiento mismo, es capaz de emplearlo en otros contextos que le auxilien a resolver situaciones que se le presenten fuera del ámbito escolar. O como menciona Ferrari, en momentos donde no haya intencionalidad. A este tipo de situaciones se les conoce desde la perspectiva de Brousseau como *Situaciones Adidácticas*. Sin embargo, es necesario hacer notar las diferencias básicas entre las diferentes situaciones que considera Brousseau en su teoría:



Metodología de investigación

Se empleará como metodología de investigación "la ingeniería didáctica" considerando en el presente trabajo el análisis preliminar para el diseño de una situación matemática así como su análisis a priori, enfocándonos en la triada del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos.

La ingeniería didáctica (instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que permite desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, trata de considerar la complejidad del proceso enseñanza – aprendizaje en situación escolar). En el caso particular de la metodología de investigación se caracteriza por construir sus productos a partir de un esquema experimental apoyado en realizaciones didácticas en clase en base a la concepción, realización, observación y análisis de situaciones de enseñanza; aprovechando también los registros de los estudios de casos, considerando que la validación es interna, fundamentada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).

Las fases primordiales que participan en la elaboración de una ingeniería didáctica son cuatro y se enlistan a continuación:

- Análisis preliminar.
- Diseño de una situación didáctica (matemática) y su análisis a priori.
- Experimentación.
- Análisis a posteriori y validación.

Este trabajo comprenderá las dos primeras fases de la ingeniería didáctica, se precisarán las hipótesis epistemológicas y didácticas para el diseño de una situación.

Análisis preliminar

En este análisis, después de definir los objetivos específicos de la investigación, se analizan de una forma sistémica, la triada del sistema didáctico así como sus relaciones.

Dentro del presente análisis se debe considerar: el conocimiento matemático que se desarrolla en las escuelas, su devenir del saber (componente epistemológico); las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y los obstáculos que deben enfrentar y superar para adueñarse de las nociones puestas en escena por la situación implementada (componente cognitiva), como vive el contenido matemático dentro de la escuela y los efectos que ocasiona (componente didáctica).

Confrey (1995) y Lezama (1999) identifican, como un obstáculo epistemológico, la enseñanza de estructuras multiplicativas desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación a la hora de generalizar hacia el carácter funcional de las exponenciales y de allí inferir relaciones con los logaritmos a través de funciones inversas.

Trujillo (1995) realizó una exploración respecto a la interconexión entre la relación de las progresiones aritméticas y geométricas y las nociones de los logaritmos y exponenciales como funciones. Las respuestas reportadas giran en torno a que: ambas progresiones forman parte de los números reales, o ambas son progresiones, o no hay una operación que las vincule pues en una se suma y en la otra se multiplica.

En las indagaciones epistemológicas se pueden distinguir tres etapas del desarrollo de los logaritmos, tomando como eje central la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas, argumento utilizado por Napier para su primera definición.

Como primer momento, consideramos a los *logaritmos como transformación,* se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentando regresar a la aritmética (empleando sólo sumas y restas). En un segundo momento el de los *logaritmos modelizadores*, en esta etapa se determinan sus características geométricas y logran pertenecer a un discurso matemático de principios del siglo XVII, se les dota de una gráfica en el nuevo registro "algebraico geométrico". En un tercer momento que corresponde a la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes. (Ferrari, 2001).

En la etapa de los logaritmos como modelizadores y en la cual se cultivaran tantas representaciones y significados de los mismos, no se explota en la escuela prevaleciendo en ella una presentación axiomática de éstos conceptos. La forma de tratar a las funciones logaritmo y exponencial que se baraja en el aula de nuestros días, haya su sustento en la etapa de los logaritmos como objetos teóricos, en la cual se le ha escindido completamente de sus orígenes. Ferrari, M. (2001). Por experiencia personal como docentes, nos percatamos que en las escuelas en que laboramos no aparecen en los programas los logaritmos, únicamente se usa como herramienta en cursos de cálculo diferencial e integral, lo sustentaremos posteriormente mejor.

Diseño de la situación didáctica (matemática) y su análisis a priori.

En la ingeniera didáctica, esta fase corresponde a elegir las variables didácticas que serán controladas y la forma en que serán manipuladas, también se elaboran hipótesis de trabajo, es decir los resultados de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, considerar lo que harán los alumnos para resolver esta situación (predecir su comportamiento y la forma de conducirse).

Determinadas las variables didácticas y establecido el objetivo (caracterizado el obstáculo que se desea confrontar) se diseña la situación matemática en si misma que sea capaz de crear un medio propicio para el alumno y pueda entrar al juego, que se sienta desafiado para poder apropiarse del saber considerado, cabe hacer mención que esto depende del contrato didáctico que surja entre maestro y alumno.

A continuación mencionamos las hipótesis que sustentaran la línea que seguirá el presente trabajo junto con aquellos elementos que nos hacen pensar en ello.

Hipótesis:

- ¤ El tomar en cuenta las progresiones aritméticas y geométricas puede enriquecer la construcción escolar de las funciones logaritmo y exponencial.
- ¤ El diseño de situaciones matemáticas apoyados en el estudio y análisis de las progresiones aritméticas y geométricas (tanto en la función exponencial como logarítmica) pueden establecer un enlace entre la naturaleza aritmética y funcional de estas nociones.

En la actualidad los exponentes y los logaritmos, presentan el problema de que su enseñanza se ha vuelto axiomática solo se les utiliza como una definición, en un sin número de operaciones para la solución de ejercicios o como una herramientas matemáticas (en su parte operatoria), esta forma de utilizarles pensamos que difícilmente puedan proporcionar un aprendizaje significativo. Si revisamos el surgimiento y evolución de éstos últimos se percibe la idea de la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas como esencia de los logaritmos, lo cual dentro del discurso escolar no existe o no se maneja como tal. Se puede decir también que la presencia y el empleo de éstos se está perdiendo en los programas de estudio del nivel medio superior, así como en el aula (principalmente en bachilleratos y preparatorias pertenecientes al plan SEP) debido a la creencia que el uso de la tecnología suple su enseñanza.

En nuestra manera de ver, creemos que existe una separación entre la forma como visualizamos a los exponentes y a los logaritmos en cuanto a lo aritmético y lo funcional (como un variación), es decir no existe una relación entre los valores numéricos, por ejemplo los asignados mediante una calculadora y su representación funcional, es decir no encontramos que el discurso matemático escolar propicie su relación o conexión.

Es por ello que consideramos pertinente pensar en realizar una serie de situaciones matemáticas enfocadas en las progresiones aritméticas y geométricas pueda fortalecer este tránsito y crear un puente que fortalezca dichas concepciones dentro del discurso escolar , de esta forma establecer un enlace entre lo aritmético y funcional.

Trujillo (1995) realiza exploraciones sobre la interconexión entre la relación de las progresiones aritmética y geométrica y las nociones de los logaritmos como funciones. Estos resultados reportan que la falta de vinculación entre las progresiones inhibe a los alumnos generar argumentos en el contexto gráfico, por lo que ven a ambos como entes aislados dando indicios de un pensamiento funcional respecto a la relación entre las mismas, no reconocen sus características logarítmicas.

Confrey (1995) y Lezama (1999) identifican, como un obstáculo epistemológico, la enseñanza de estructuras multiplicativas desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación a la hora de generalizar hacia el carácter funcional de las exponenciales y de allí inferir relaciones con los logaritmos a través de funciones inversas.

Para Ferrari (2001) el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos es axiomático ya que no existen elementos en el discurso escolar que suavicen el pasaje de lo aritmético a lo funcional en el tratamiento de este concepto.

Discusión

Las distintas concepciones que docentes y alumnos logran construir en torno a relaciones funcionales y las diferentes representaciones de las mismas, reportadas como elementos que dificultan la apropiación de este concepto, contrastan con la absoluta carencia de argumentos y representaciones a la hora de trabajar con logaritmos.

En el caso de los logaritmos, *la transposición didáctica, a la que inevitablemente todo concepto es sometido antes de ser introducido al aula, ha destazado los logaritmos, los ha convertido en objetos útiles que deben ser manipulados con soltura sin necesidad de dotarlos de significado.* Toda transposición genera una nueva epistemología del concepto, y en el caso de los logaritmos, esta comienza a producirse y reflejarse en los textos y en su tratamiento desde el siglo XVIII.

"Nuestra visión del devenir de los logaritmos como objetos de saber, nos lleva a proponer como hipótesis epistemológica, de construcción de conocimiento, la incorporación en el diseño de las nociones de progresión aritmética y geométrica y su fuerte vinculación con los logaritmos. Creemos que son elementos que pueden resultar útiles, al igual que en el desarrollo histórico de los logaritmos, para facilitar el pasaje desde las características aritméticas de esta noción hasta las funcionales permitiendo la exploración en distintos registros y su correspondiente vinculación". (Ferrari, 2001).

En base a los comentarios de (Ferrari, 2001), que tanto alumnos como profesores del nivel medio superior no tienen los argumentos y representaciones necesarias para encontrar la vinculación que existe entre las progresiones aritméticas y geométricas, con los exponentes y los logaritmos, los cuales los ven como entes aislados y como consecuencia sin indicios de pensamiento funcional, Vislumbramos que es necesario investigar sobre las progresiones aritméticas y geométricas y su relación con los logaritmos y exponenciales como medio de fortalecer la idea de funcionalidad de las mismas.

Consideramos interesante retomar conceptos ya trabajados en el pasado por Agnesi (vinculando la construcción geométrica de segmentos con las progresiones aritméticas y geométricas en cuya relación encontramos la naturaleza de los logaritmos), Newton (modelizando la caída de un cuerpo en un medio viscoso) y Galileo (en sus análisis sobre el estudio de la caída libre).

Creemos que la propuesta de situaciones matemáticas que se diseñarán basándonos en la relación entre progresiones aritméticas y geométricas naturaleza primigenia de las funciones logaritmo y exponencial puede resultar satisfactorio para que los estudiantes transiten de lo aritmético a lo funcional, con mayor familiaridad y confianza, lo que puede permitir un mejor entendimiento y dominio de estas nociones.

Referencias bibliográficas

Agnesi, M. (1748). Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana. *Libro Secondo del Calcolo Differenziale* (2 tomos).

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México; Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica

Brousseau,G.(1986). Fondements et methodes de la didactique des mathematiques, Recherches en *Didactique des Mathematiques* 7(2), pp.33-115.

Chevallard, Y.(1995). La *Transposición didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Confrey, J. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in mathematics education* 26(1),pp. 66-86.

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de Maestría no publicada, Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav IPN, México.

Lezama, J. (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Trujillo, R. (1995). Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN, México.

Un asistente matemático en la enseñanza de la resolución de ecuaciones no lineales por el Método de Punto Fijo

Y.Montero, M. Astiz, P.Medina, S.Vilanova, M. Rocerau, M.Vecino
Universidad Nacional de Mar del Plata – Argentina
ymontero@mdp.edu.ar mastiz@mdp.edu.ar

Resumen

Este trabajo describe una experiencia realizada en un curso de Análisis Numérico dictado en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Mar del Plata (Argentina). La posibilidad de dictar clases en un laboratorio que cuenta con un número de computadoras que es apenas superado por la cantidad de alumnos permite promover un ambiente interactivo, de reflexión y experiencias que dan lugar a un verdadero aprendizaje significativo. En particular el programa Derive, conforma un importante recurso para mejorar las estrategias didácticas que sin dudas posibilitan lograr los objetivos propuestos.

Introducción

"La computación de alta velocidad ha revolucionado al análisis numérico como un arte y ha dado enormes ímpetus a su desarrollo como una ciencia."

Anthony Ralston

Este trabajo relata la experiencia en un curso de Análisis Numérico dictado en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Mar del Plata.

La posibilidad de desarrollar actividades en un laboratorio que cuenta con veinte computadoras y con una cantidad de alumnos que apenas supera ese número permite desarrollar clases en un marco interactivo en el cual participan el docente, el alumno y la computadora.

La introducción de los medios tecnológicos puede y debe tener repercusiones no sólo en cuanto a la manera de enseñar matemática, sino también en cuanto a la propia selección de los contenidos por las posibilidades que ellos brindan. Utilizando de forma apropiada las computadoras pueden introducirse sin mayores dificultades en las propuestas curriculares, problemas que requieran grandes cantidades de cálculo y se vinculen con la vida real, como así también, con respecto a algoritmos iterativos y representaciones gráficas.

"Gracias a las posibilidades que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel), en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración. Estas experiencias matemáticas son fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el papel fundamental que deben jugar los diseñadores de currículo y los profesores en el diseño e implantación de situaciones didácticas que, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y más potente. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico." (Gomez, 1997)
Los alumnos tienen dificultad para llegar a comprender la esencia del Análisis Numérico, pues es una asignatura que tiene características propias que la diferencian de otras materias

que se dictan en la carrera de Matemáticas; en efecto, en él no existen siempre "verdades" aplicables a todos las situaciones y la pertinencia o no de utilizar distintas herramientas para resolver un problema depende fuertemente del contexto en el cual se va a utilizar. Esto implica que deben desarrollarse otras habilidades para resolver problemas; heurísticas diferentes a la que el alumno está acostumbrado.

Es en esto que la computadora, y principalmente un programa como Derive, proporcionan un importante recurso para observar gráficamente el comportamiento de los métodos, con sus correspondientes interpretaciones geométricas y analíticas, y la ventaja de poder realizar distintas experiencias en un tiempo relativamente corto abarcando la mayor cantidad de casos posibles (según el tema tratado). De esta manera se produce un ambiente de estudio, análisis teórico de las situaciones y experimentación numérica, donde el intercambio de opiniones entre los docentes y los alumnos es fluido y sumamente provechoso.

Sin embargo, resulta evidente que los resultados, desde el punto de vista del aprendizaje del sujeto, dependen no solamente del funcionamiento del programa, sino también del cuidado con que el profesor seleccione y diseñe las situaciones y los problemas que el sujeto debe resolver con la ayuda de los programas (Gómez, P., Fernández, F., 1997).

Objetivos

Los objetivos que se plantearon en el desarrollo de esta experiencia fueron: usando como recurso las posibilidades numéricas y gráficas de la computadora, y a través de la interacción del docente, el alumno y la computadora, preparar al alumno para que se capaz desde lo general de:

- Realizar el análisis de problemas de situaciones concretas de dificultad media.
- Llevar la situación a un modelo matemático
- Elegir un método adecuado para su resolución

y desde lo particular de:

- Incorporar técnicas iterativas que conducen a la solución de la ecuación f(x)=0 trabajando con su ecuación equivalente g(x)=x
- Analizar la convergencia y divergencia de cada transformación o despeje y efectuar comparaciones con sentido crítico
- Analizar las condiciones de convergencia
- Discernir sobre las ventajas y desventajas de la aplicación del método

Entorno de trabajo

El tema: El tema seleccionado es el método de Iteración de Punto Fijo para la resolución de ecuaciones no lineales. El resolver una ecuación no lineal es una situación que al alumno se le presenta con relativa frecuencia, por lo tanto comprende con claridad la necesidad de encontrar un algoritmo para su resolución. Es un tema que no necesita mayores conocimientos previos y permite integrar conceptos de Cálculo Numérico, Análisis Matemático elemental y Geometría Analítica. Involucra importantes conceptos:

- Generación de sucesiones mediante un proceso iterativo
- Convergencia o Divergencia de dichos procesos
- Análisis del error en la evaluación de la función

- o Estrategias para la terminación de un proceso iterativo

El programa: Derive es un programa de los llamados "friendly" (amistoso, simpático), en el argot informático. Su propósito es la resolución de cálculos matemáticos de carácter general y la graficación de funciones, pero sin la potencia de otros programas matemáticos específicos. Su ventaja es estar basado en menús tipo árbol, por lo que en poco tiempo el usuario es capaz de manejarlo (Paulogorrán, 1994).

El Derive ofrece un entorno en el cual es posible crear imágenes visuales (muchas veces agobiante para los alumnos sin herramientas computacionales) que permite interpretar y conjeturar sobre los resultados obtenidos (Berry, 1993). Satisface algunos requerimientos de tipo general para la experiencia a desarrollar: graficación sencilla, aplicación de zoom, cursor gráfico, visor de coordenadas, superposición de gráficos, resolución de cálculos algebraicos.

Los alumnos: La experiencia se desarrolló en un curso de segundo año de las carreras de Prof. y Lic. en Matemática que contaba con 30 alumnos. Para éstos es una novedad que la clase se dicte íntegramente en el Laboratorio de Informática, utilizando los instrumentos clásicos (tiza, pizarrón, etc.) únicamente para algunas directivas generales.

El aula: La Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata contaba, al momento de la experiencia, con un Laboratorio de Informática con 20 PC tipo Pentium en Red 32 Mega de Memoria y con Multimedia, 5 impresoras chorro de tinta color y 2 scanner de mano. El laboratorio permanece abierto 8 horas diarias, este tiempo se reparte entre el dictado de asignaturas asistidas por computadoras y horas donde los alumnos pueden acceder a las máquinas para trabajar independientemente con la asistencia técnica de un encargado.

Los docentes: El cuerpo docente a cargo de la experiencia estuvo compuesto por dos docentes, el profesor de la asignatura quien diseñó la propuesta metodológica y un auxiliar que trabajó junto al profesor durante las clases frente a los alumnos. Es importante destacar que este mismo cuerpo docente está trabajando en la asignatura hace al menos 10 años y por lo menos tres (3) con esta metodología.

Metodología de trabajo en el aula

Durante el desarrollo del curso de Análisis Numérico, se promueve que los alumnos puedan:

- o Formular hipótesis, dar soluciones y corregir las propias respuestas;
- o Hacer uso consciente de estrategias para la resolución de problemas;
- o Respetar y hacer respetar las diversas estrategias de razonamiento;
- o Desarrollar y verificar su propias ideas, a través de formas apropiadas de acción, comprobando el efecto de su pensamiento en la computadora;
- o Reconocer el error como parte de la construcción del conocimiento;
- o Vivenciar la rigurosidad del pensamiento lógico;
- o Valorar la eficacia de la tarea sistemática y ordenada, así como de un buen grado de concentración y perseverancia.

Se intenta instalar en el laboratorio una dinámica de trabajo a partir de la resolución de problemas y con una modalidad de discusión e intercambio, promoviendo en los alumnos, el aprendizaje por descubrimiento, dado por la búsqueda del camino para solucionar determinados problemas, a partir de necesidades e intereses. Los alumnos se enfrentan a situaciones en forma individual o a lo sumo de a pares, en un ambiente donde el intercambio y la interacción, que sin duda favorece la socialización de la inteligencia individual, permite la coordinación de distintos puntos de vista.

El método de Iteración de Punto Fijo se presenta (promoviendo la intuición a través de la visualización gráfica en computadora), se describe y analiza desde el punto de vista teórico (propiedades de convergencia) y desde el punto de vista práctico (eficiencia computacional). Los alumnos utilizan distintos procedimientos para encontrar la solución del problema, ya que el camino de resolución no se fija previamente. Después se discute lo obtenido por cada alumno o grupo, se confronta y comparan los resultados.

El docente es el encargado de organizar el trabajo de la clase, favorecer el análisis, la confrontación y la vinculación con los conceptos teóricos. Además debe alentar los proyectos realmente posibles en cada momento, evitando la frustración ante propuestas demasiado ambiciosas.

Desarrollo de la clase: Para comenzar a tratar el tema, se hace observar a los alumnos que la resolución de una ecuación del tipo f(x)=0 (1) es equivalente a resolver la ecuación x=g(x) despejando x de la ecuación (1).

A continuación se les presenta el método de iteración de punto fijo explicando el algoritmo y bajo qué condiciones este método permite hallar la raíz de una función f(x).

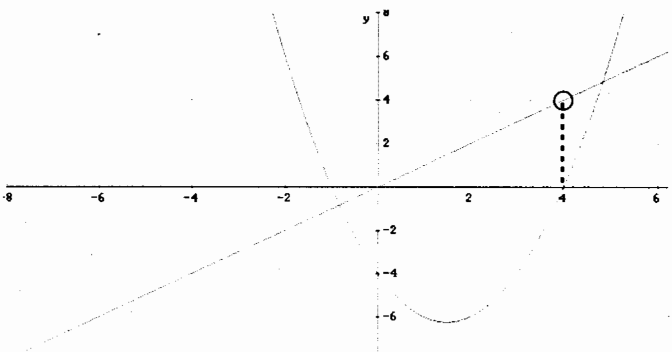
Si bien, determinada la función g(x), no tienen problema para utilizar el algoritmo (lo hacen mecánicamente), sí tienen dificultades en interpretar cómo la sucesión que van obteniendo se aproxima a la solución.

Para resolver esta cuestión, se propone entonces una forma de trabajo que sin la ayuda de la computadora sería sumamente tedioso o casi imposible de llevar adelante.

A modo de ejemplo, se presenta un caso sencillo para su tratamiento: la ecuación $f(x)=x^2-3x-4=0$

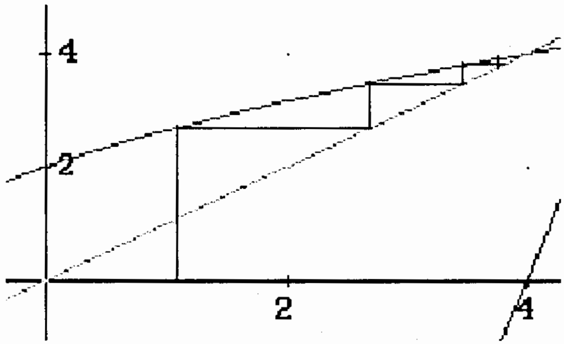
y se propone el siguiente despeje: $x = \sqrt{3x+4}$ y que realicen la gráfica de las tres funciones involucradas, obteniendo:

Inmediatamente por observación, advierten que la raíz de la función f(x) coincide con el valor de x intersección entre la recta y=x y la función g(x).



A partir de aquí se trata de ver cómo se genera la sucesión aproximante y qué significa gráficamente. En el primer ejemplo calculan los términos uno a uno (posteriormente utilizan las función ITERATES del DERIVE), observando el gráfico seleccionan un valor inicial próximo a la raíz.

Una vez que obtienen una sucesión de valores, observan en el gráfico, con la orientación del docente, qué significa cada término que se obtiene como $x_1=g(x_0)$, $x_i=g(x_{i-1})$



A continuación se solicita a los alumnos que propongan otros despejes para la misma ecuación dada y obtengan la aproximación de la solución. Surgen entre ellos alternativas como: $x=4/(x-3)$, $x=(x^2-4)/3$, disparadoras del análisis de la convergencia del método.

Queda claro para ellos que no todas las alternativas de despeje conducen a que el método sea convergente y que en uno de los casos la sucesión aunque converge es oscilante. Aparece entonces la necesidad de analizar cuáles son las condiciones que deben darse para obtener una solución.

Se demuestra en forma teórica que si $|g'(x)|<1$ en un intervalo (a,b), g(x) está definida en dicho intervalo y la raíz de f(x) pertenece al mismo, tomando cualquier valor inicial x_0 en (a,b), la sucesión definida por $x_i=g(x_{i-1})$ (i=1,2...), converge a la solución buscada.

Conociendo ahora la condición de convergencia, analizan esto gráficamente sobre el ejemplo inicial con cada una de las funciones g(x) despejadas, observando el comportamiento de la función derivada de g(x) alrededor de la raíz de f(x) para determinar en forma más sencilla si el despeje realizado es o no adecuado para hallar la solución.

Por último se presenta a los alumnos una serie de funciones de diversa complejidad para que hallen sus raíces utilizando el método de punto fijo, analizando gráfica y analíticamente las variantes de ecuaciones equivalentes y sus diferentes comportamientos, la convergencia (monótona u oscilante) o divergencia de las sucesiones halladas según el despeje realizado

Consideraciones finales

Sin duda el método inductivo es una herramienta poderosa para la enseñanza de la matemática, en particular para la enseñanza del análisis numérico. Sin embargo, a pesar de que esta afirmación es ampliamente compartida, no siempre es llevada a la práctica. Tal vez la sobrecarga de tareas, el tiempo limitado de clases o principalmente la falta de un lugar equipado adecuadamente con computadoras sean algunas de las razones que provocan esta situación.

Después de esta experiencia queda claro que promover un ámbito de trabajo basado en la discusión, la reflexión y la visualización gráfica y potencialidad para el cálculo que ofrece la computadora, posibilita la obtención de logros muy difíciles de conseguir en clases tradicionales.

Es generalizado que en una asignatura como Análisis Numérico se presentan dificultades ya que los alumnos están acostumbrados a trabajar con "precisión" y se desconciertan cuando deben resolver situaciones donde existe cierto grado de incertidumbre. Cuando se trabaja con computadoras, estas dificultades quedan aún más expuestas. Por otra parte, sienten inseguridad cuando deben elegir el procedimiento o método más conveniente para la solución de un problema, para lo que deben poner en juego su intuición, su experiencia y sus conocimientos teóricos.

Con respecto al método de Punto Fijo no les resulta intuitivo a priori interpretar que el mismo se basa en la solución de una ecuación no lineal determinando la intersección de dos funciones y=x e y=g(x). Y más dificultad aún se evidencia cuando deben seleccionar convenientemente la función g(x) y determinar la convergencia de la sucesión que se genera para cada una. Esto requiere cierta habilidad, ingenio y un claro conocimiento conceptual del método y por sobre todo del comportamiento de las funciones.

Esta experiencia nos mostró que si bien en un principio son reacios a utilizar recursos gráficos para encontrar condiciones de partida para un problema determinado o análisis y verificación de condiciones de convergencia de una sucesión, porque su costumbre es trabajar desde lo analítico, a medida que logran analizar gráficamente cada una de las situaciones, les resulta mucho más sencillo interpretar el método conceptualmente y desarrollar análisis teóricos. Sin duda, esta situación posibilita al docente enfrentar a los alumnos con mayor cantidad de problemas a estudiar y de mayor calidad.

Referencias bibliográficas

Berry, J.& Graham, E. and Watkins, A. (1993). *Learning mathematics through DERIVE*. Ellis Horwood, Chichester.

Dahlquist, G. (1974). *Numerical Methods*. EEUU, Pretince-Hall, Inc.

Gerald, C. F. (1978). *Applied Numerical Analysis*. Canadá, Addison-Wesley Publishing Company.

Gómez, P. (1997). Tecnología y Educación Matemática. En Rev. *Informática Educativa. Uniandes-LIDIE*. Vol 10, Nro. 1, pp 93-11.

Gómez, P. y Fernández, F. (1997). Graphics calculators use in Precalculus and achievement in Calculus. En *PME Proceedings of the 21th PME Conference*. Lahti: University of Helsinki.

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (515-556). N.Y., Macmillan

Kutzler, B. y Kokol-Voljc, V. *Introducción a DERIVE 5. OEG*. Austria.. Edición Española. DERISOFT, c.b. Valencia, España.

Paulogorrán, C. y Pérez C. (1994). *Cálculo Matemático con Derive para PC*. Madrid, Ra-Ma.

Plybon, B. (1996). *An Introduction to Applied Numerical Analysis*. EEUU, PWS-Kent

Ralston, A. (1970). *Introducción al Análisis Numérico*. México, Limusa-Wiley S.A.

Stoer, J. y Bulirsch, R.(1980). *Introduction to Numerical Analysis*, NY, Springer-Verlag.

La matemática para la formación de un ingeniero: ¿cuál es?

Beatriz Deiros Fraga y Regla M. Calderón Ariosa
Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería Mecánica.
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (ISPJAE). Cuba
bdeiros@mecanica.ispjae.edu.cu margara28@yahoo.es

Resumen

Los ingenieros durante su preparación y después en su vida profesional utilizan los métodos de la matemática clásica. El estilo usual de exposición de la matemática está influenciado por la elaboración de los fundamentos lógicos de esta ciencia, lo que en ocasiones dificulta la comprensión de conceptos y procesos de gran utilidad para el ingeniero. Por ello, en muchas ocasiones los profesores de las asignaturas de la especialidad llevan a sus alumnos sus propias ideas de cómo usar el aparato matemático y cuales son los procedimientos más sencillos por cuyo intermedio se pueden dominar los métodos que necesita el ingeniero.

Entonces se tienen varias interrogantes a responder, entre ellas: ¿Cuales son los objetivos de la matemática en ingeniería? ¿Cuales son las habilidades sobre las cuales se debe trabajar? En este grupo de discusión se profundizará en las interrogantes anteriores, y en general en los elementos que intervienen en el diseño de una asignatura de Matemática para ingeniería, así como en aquellos que deben atenderse durante el desarrollo del proceso docente y que inciden favorablemente en la actitud de los estudiantes de ingeniería hacia el estudio de las asignaturas de matemática y en su formación profesional.

Introducción

En nuestros días resulta necesario diseñar las disciplinas no para la simple acumulación de conocimientos, sino para que contribuyan a garantizar formas de pensamiento y de adquisición independiente de esos conocimientos a partir de los elementos esenciales que los relacionan con los ya estudiados y de la aplicación de métodos generales. En tal sentido, resulta imprescindible realizar transformaciones en la enseñanza tradicional. La educación superior debe lograr en el estudiante la capacidad de "aprender", es decir, la tarea de la universidad no consiste en dar una gran cantidad de conocimientos sino enseñar al alumno a pensar, a orientarse independientemente. Para ello es necesario organizar el proceso de enseñanza aprendizaje de modo tal que impulse el desarrollo de esta capacidad.

Es conocido que muchos de los logros que se producen, en el campo de la ingeniería, están respaldados por teorías matemáticas de alto nivel, que, desde luego, no han estado ajenas al impetuoso auge de la computación. La tecnología computarizada, que progresa de un modo acelerado, permite en un breve plazo lograr la aplicación de conceptos matemáticos a problemas de ingeniería. Por eso se dice que, en la actualidad, la ingeniería está altamente matematizada.

Ello explica que el estudio de las matemáticas resulte priorizado en los planes de estudio de las carreras de ingeniería y es objeto de atención por parte de organizaciones y eventos internacionales sobre la enseñanza de la ingeniería.

En la literatura relacionada con el tema (D'Attelis, 1993; Letelier, 1993) se señala la necesidad de considerar el "como se enseña", tanto o más que el "que se enseña", con el objetivo de que la matemática se convierta en un recurso educativo de mayor eficacia en la enseñanza de la ingeniería y se resalta la necesaria vinculación de la matemática a las ciencias de la ingeniería, proponiendo la conveniencia de darle un carácter más creativo (y no reproductivo) a la educación matemática de este tipo de enseñanza.
En este trabajo se profundiza en los elementos que intervienen tanto en la etapa del diseño de una asignatura de Matemática como en los que deben atenderse durante el desarrollo del proceso docente y que pueden incidir favorablemente en la actitud de los estudiantes de ingeniería hacia el estudio de las asignaturas de matemática y de manera positiva en su formación profesional.

Objetivos, contenidos, habilidades e indicaciones metodológicas

Es frecuente encontrar en la literatura reportes acerca de problemas con la articulación entre la enseñanza media y la superior, en particular en el caso de la disciplina matemática, la que necesita de un dominio adecuado de los conocimientos y habilidades precedentes para poder enfrentar con éxito los nuevos contenidos. Sin embargo, las dificultades no se limitan a la entrada del estudiante al nivel universitario. En el caso de los estudiantes de ingeniería, se confrontan también dificultades entre los contenidos y el enfoque de la matemática que recibe un estudiante en los primeros años de la carrera y el tratamiento brindado a esos mismos aspectos por los profesores de la especialidad.

A lo anterior hay que añadir que el estudiante que ingresa a una carrera de ingeniería espera, desde sus inicios, una formación académica en esa dirección, por lo que en muchas ocasiones rechaza un enfoque de la matemática de corte tradicional o no está preparado para aceptarla. Los más capaces logran adquirir el aporte que ella les brinda para su formación. Otra gran cantidad aprueban a pesar de todo, sin haber alcanzado un adecuado nivel de asimilación (Rodríguez,1991). Otro grupo finalmente suspende la asignatura o abandona los estudios. Una vía para encontrar solución a estas dificultades parece estar relacionada con el diseño de la disciplina y de cada una de las asignaturas que la componen, así como del enfoque con el que se desarrolle el proceso docente.

La Didáctica deja claro que los objetivos constituyen los fines o resultados previamente concebidos a lograr por los estudiantes, por lo que deben jugar una función rectora. A partir de ellos se define el Sistema de conocimientos correspondiente; las orientaciones para el trabajo del docente de ingeniería quedarían inconclusas, si no se incluyen en el diseño de la disciplina y de las asignaturas, las habilidades generales del quehacer matemático.

En su tesis doctoral, la Dra. Herminia Hernández (1989) presenta su Sistema Básico de habilidades matemáticas. Como integrantes de dicho Sistema Básico se encuentran, entre otras, las habilidades: Definir, Demostrar, Identificar, Interpretar. Otros trabajos (Camarena, 2000) le conceden gran importancia a la habilidad de Modelar en las carreras de ingeniería.

Resulta necesario seleccionar aquellas que participan, de manera sobresaliente, tanto en la formación del ingeniero como en su quehacer cotidiano, entre las que podemos destacar las siguientes: Interpretar, calcular, algoritmizar, graficar, modelar y optimizar. El trabajo con estas habilidades contribuye a que, durante la formación matemática del profesional, se vayan estableciendo los hilos que unen las teorías matemáticas y los problemas profesionales.

En efecto, para un ingeniero es muy importante:

1. Trabajo con gráficos. Los ingenieros usan los gráficos para representar el comportamiento de muchas magnitudes y fenómenos; ellos deben ser capaces de interpretarlos y usarlos en su quehacer cotidiano.
2. La interpretación del concepto de derivada como “razón de cambio”. Magnitudes de trabajo sistemático como velocidad, calor específico, etc. así lo patentizan.
3. La interpretación del concepto de “integral” como suma para poder usarla en el cálculo de diversas magnitudes físicas, como momentos, etc.
4. La habilidad de expresar en lenguaje matemático (modelar matemáticamente) fenómenos y procesos de la realidad.
5. La habilidad de interpretar los resultados obtenidos, identificando las limitaciones que corresponda.
6. La habilidad en el empleo de tablas.
7. La habilidad para el empleo de las NTIC.

En el programa de la asignatura Matemática I, que se imparte en el primer año de la carrera de Ingeniería Mecánica del ISPJAE, se ponen de manifiesto las ideas que se han ido expresando en el trabajo.

Los objetivos finales que se persiguen con esta asignatura de 96 horas son los siguientes:

- Que los estudiantes interpreten los conceptos de función, límite, continuidad, derivada diferencial, derivada parcial, derivada direccional y gradiente e integral indefinida y comprendan como ellos reflejan características de fenómenos y procesos de la realidad.
- Que los estudiantes apliquen los conceptos del cálculo diferencial y de la integral indefinida para interpretar modelos ya creados y en algunos casos para modelar problemas sencillos de índole geométrico, físico o técnico.
- Que los estudiantes apliquen los teoremas y métodos del cálculo diferencial para analizar el comportamiento de funciones, así como para resolver diferentes problemas modelados con los conceptos esenciales que se estudian en las asignaturas.

El Sistema de conocimientos de esta asignatura incluye los siguientes tópicos: Funciones. Límite y continuidad. Propiedades del límite y de las funciones continuas. Derivada y diferencial. Teoremas fundamentales del cálculo diferencial. Derivada parcial, derivada direccional. Diferencial total. Gradiente. Función compuesta. Función implícita. Extremos de funciones. Extremos condicionados. Integral indefinida. Métodos de integración Si se compara este listado de contenidos con lo que aparece en otros programas, es probable que no se diferencie de lo que se recoge en muchos de ellos. Por ello lo anterior debe completarse con la definición de las habilidades generales que serán objeto de trabajo en el curso.

Sistema de habilidades.

- Obtener e interpretar las propiedades analíticas y geométricas de una función de una o varias variables, especialmente para funciones dadas en forma explícita, aplicando los conceptos, teoremas, propiedades y métodos del cálculo diferencial.
- Resolver problemas sencillos e índole física, geométrica o técnica (vinculado con la especialidad) aplicando las interpretaciones geométricas y físicas del concepto de derivada

y de integral indefinida.

- Resolver problemas sencillos de estimación de errores aplicando la interpretación del concepto de diferencial como linealización del incremento de la variable dependiente.
- Resolver problemas sencillos de optimización que puedan ser interpretados como la búsqueda de extremos condicionados o no de una función dada en forma explícita aplicando los conceptos, teoremas, propiedades y métodos del cálculo diferencial.
- Calcular integrales indefinidas aplicando métodos de integración y/o usando las tablas de integrales.

Para la mejor orientación del desarrollo del propio proceso docente, a continuación se relaciona el conjunto de indicaciones metodológicas que, unido a lo anterior, conforman y definen el modo de actuar del profesor de matemática en el aula de ingeniería.

Indicaciones metodológicas.

1. Debe trabajarse sistemáticamente en la formulación de modelos matemáticos de situaciones que se vinculen con problemas del perfil mecánico, con situaciones relacionadas con sus estudios anteriores (fundamentalmente de física y geometría), o incluso con otras relacionadas con la vida cotidiana.
2. Se promoverá la interpretación de modelos matemáticos ya creados, mediante el empleo de las teorías y los conceptos que se estudian en la asignatura
3. Siempre que sea posible se presentarán ilustraciones y/o interpretaciones gráficas de problemas, definiciones y teoremas.
4. Se promoverá el uso de las herramientas informáticas desde la matemática. En las clases que se desarrollan con el asistente matemático DERIVE, se concederá relevancia a la necesidad de dominar los conceptos y procesos vinculados con el tema tratado y de interpretar siempre los resultados obtenidos (Deiros, 2000).
5. El examen final se realizará con el uso de Tablas matemáticas. Esto debe tenerse en cuenta, fundamentalmente, en las clases de métodos de integración.
6. Las orientaciones anteriores se tendrán en cuenta en la confección tanto de las pruebas parciales como del examen final.

El desarrollo del proceso docente teniendo en cuenta lo antes expuesto, conduce a que la matemática no resulte fuera de contexto, al mantenerse un estrecho vínculo no solo con el resto de las asignaturas de la carrera sino también al relacionarse positivamente con el modo de actuación de la futura profesión del estudiante. Con ello se amplia el aporte de la matemática a la formación del ingeniero.

Conclusiones

La enseñanza de la matemática debe contribuir a que el estudiante de ingeniería se desarrolle con una visión del mundo que favorezca la formación de un pensamiento productivo, creador y científico. El propio contenido de la matemática como disciplina de estudio, los principios de su estructuración, la metodología de introducción de nuevos conceptos, teoremas y procedimientos, son elementos que pueden y deben influir positivamente en este sentido. Sin embargo, este aporte real que la matemática puede hacer a la formación del ingeniero, muy a menudo queda oculto para los estudiantes; los temas tratados en las clases pueden parecer muy abstractos y los profesores se desgastan en el logro de habilidades que poco tributan al perfil que nos ocupa.

Desarrollar el proceso docente vinculado a las asignaturas de matemática procurando que los profesores presten atención no sólo a los contenidos declarados en el Programa de la asignatura, sino muy especialmente a los objetivos que se persiguen y a las habilidades que se pretenden desarrollar en función del colectivo hacia quien va dirigido, constituye una excelente guía para promover el interés del alumno por el estudio de la asignatura y para contribuir a la formación del profesional de ingeniería desde el inicio de sus estudios universitarios.

Algunas conclusiones del trabajo del Grupo

Coordinadora: *Beatriz Deiros Fraga (Cuba)*

Participaron:

Regla M. Calderón Ariosa (Cuba)
Lourdes Hernández Rabell (Cuba)
Patricia Camarena Gallardo (México)
Fernando Cajas (Guatemala)
Claudia Muro Urista (México)
Alexander Bell Mejía (México)

1. Los participantes han trabajado en la problemática de la matemática en ingeniería y coinciden en que la matemática en ingeniería cumple con funciones diferentes a las correspondientes a los otros niveles educativos y perfiles de estudios.

2. Hace más de 10 años que en este evento académico se han estado presentando investigaciones acerca de la matemática en ingeniería, por lo que se considera necesario que el tema tenga un espacio propio dentro de la RELME.

El tema que nos ocupa no se ajusta a ninguno de los 22 campos de investigación que se listan para clasificar los trabajos de las RELME, y es necesario que se incluya uno más: *Matemática para ingeniería*

Referencias bibliográficas

Camarena G., P. (2000). Los Modelos matemáticos y el contexto de la ingeniería. *Acta Latinoamericana de matemática Educativa*. Volumen 13.

Deiros F., B. y Álvarez S., J.(2000). La informática en la enseñanza del calculo para ingenieros: algunas experiencias. *Acta Latinoamericana de matemática Educativa*. Volumen 13.

D'Attelis, C. E. (1993). Acerca de la enseñanza de las Matemáticas en carreras de ingeniería. *Revista Iberoamericana de enseñanza de ingeniería*, UPADI.

Hernández, H. (1989). *El perfeccionamiento de la enseñanza de la matemática en la educación superior cubana. Experiencia en el Álgebra Lineal*. Tesis Ph D., La Habana.

Letelier, M. A.(1993). La enseñanza de las Matemáticas en carreras de ingeniería. *Revista Iberoamericana de enseñanza de ingeniería*, UPADI.

Rodríguez, T. (1991). *Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina matemática superior*. Tesis Ph D, La Habana.

Reconstrucción de significados de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Anatolio Reyes Reyes y Francisco Cordero Osorio.
Instituto Tecnológico de Toluca y Cinvestav-IPN, México.
reyes_dos@hotmail.com fcordero@mail.cinvestav.mx

Resumen

En este trabajo presentamos un proyecto de investigación cuyo propósito fundamental es establecer una reconstrucción de significados de la ecuación diferencial $y'' + b\,y' + c\,y = f$ a través de una situación de una situación de transformación. Ésta consiste en identificar patrones de comportamiento de la solución *y(x)* en relación con la función f, al variar los coeficientes b y c de la ecuación diferencial e interactuar en los contextos algebraico y gráfico.

Nuestra hipótesis de investigación consiste en que el *comportamiento tendencial de las funciones* es el argumento que tendrá que construir el estudiante en la situación de transformación, el cual posibilitará la reconstrucción de significados de la ecuación $y'' + b\,y' + c\,y = f$ y de la propiedad de estabilidad al interactuar en los contextos algebraico y geométrico.

Nos proponemos diseñar situaciones con la intención de generar los argumentos en el estudiante. Nuestro análisis se fundamentará sobre discusiones en grupo y sobre actividades de trabajos escritos.

Introducción

La privilegiación del contexto algebraico en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ha favorecido la creencia en los estudiantes de que existe una "receta" que permite la integración algebraica de cada tipo de ecuación. Esta preferencia es propiciada por los textos de ecuaciones diferenciales y por los cursos tradicionales que imparten los profesores de matemáticas. Sin embargo, con el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y el adelanto de la tecnología, particularmente de las calculadoras graficadoras, estos dominios han cambiado. No obstante, la enseñanza no ha sido influenciada por esta evolución, sino ha quedado centrada en el contexto algebraico.

En este artículo se presenta un avance de un proyecto de investigación que toma en cuenta la problemática mencionada, cuyo propósito es formular una reconstrucción de significados de la ecuación diferencial $y'' + b\,y' + c\,y = f$ a través de una situación de transformación. Ésta consiste en identificar patrones de comportamiento de la solución en relación con la función , al variar los coeficientes b y c de la ecuación diferencial e interactuar en los contextos algebraico y gráfico. Estudiantes de Cálculo serán la fuente para la recolección de datos de la investigación.

Antecedentes

En la actualidad con el fortalecimiento de la matemática educativa como disciplina científica han surgido diversos marcos teóricos cuya intención es fundamentar explicaciones de la construcción del conocimiento matemático. Estas explicaciones giran en torno a la naturaleza de la construcción del conocimiento matemático y su ingreso al sistema didáctico. Así, el foco de interés de los marcos teóricos respectivos está en la actividad matemática y la cognición de los individuos relacionados con la adquisición de los conceptos matemáticos y el desarrollo de actividades.

En ese sentido, la problemática fundamental del proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas consiste en una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Como ambas son de naturaleza y funciones distintas, entonces la labor del matemático educativo es teorizar sobre cómo interpretar y reorganizar la obra matemática. Esto permite precisar elementos teóricos que contribuyen a la reconstrucción de significados de procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares. La reconstrucción de significados es la base donde aparecen categorías que posibilitan la reorganización de la obra matemática. La fuente ha sido la producción del conocimiento, al crear epistemologías modelizadas por la actividad matemática. Sin embargo, la reconstrucción de significados compone categorías del conocimiento matemático que no sólo son resultado de la actividad matemática, sino también de la actividad humana. La fuente se transforma, por el contrario, en considerar primeramente al humano haciendo matemáticas, en lugar de considerar la producción matemática hecha por el humano. En algún sentido es la forma de hacer conocimiento el punto de interés. Para ello se requiere formular epistemologías modelizadas por la actividad humana que ayuden a habilitar esas categorías del conocimiento matemático en la matemática escolar (Cordero, 2001).

Un modelo de este tipo de categorías es la noción de *comportamiento tendencial de las funciones* que se ubica en el plano de la modelización matemática y el uso de las herramientas matemáticas. Así, por ejemplo, la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales pudiera ser reorganizada a través de una situación de transformación donde el comportamiento tendencial de las funciones sea el argumento que posibilite la reconstrucción de significados y procedimientos necesarios para tal fin.

Existen investigaciones relacionadas con el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que nos muestran cómo este objeto matemático es presentado en los libros de texto (Benítez, 1993): definición, problema de valor inicial y de frontera, clasificación, ecuación auxiliar, métodos de resolución y aplicaciones, formato que utilizan los profesores en su actividad docente. Sin embargo existen reportes recientes (Cordero y Solis, 1997, 1998, 1999) que han estudiado cómo los estudiantes pueden comprender y hacerse de las herramientas para habilitar de significado a la solución de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Problemática

El proyecto de investigación se sitúa en la matemática universitaria, específicamente en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. La enseñanza de este objeto matemático, en la actualidad, está centrada en los contextos algebraico y analítico (Benítez, 1993), obstaculizando la transición del contexto algebraico al gráfico y viceversa.

Un curso tradicional de ecuaciones diferenciales pone atención a los métodos cuantitativos, principalmente en el tema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, donde con base en estos métodos se clasifican tipos de ecuaciones diferenciales, primero considerando coeficientes constantes y después coeficientes variables, mostrando los diferentes métodos de resolución y posteriormente enseñando las aplicaciones.

Los textos de ecuaciones diferenciales favorecen los métodos analíticos, pues presentan una estructura teórica que sustentan estos métodos sistemáticos de resolución, donde las soluciones son expresadas por medio de fórmulas algebraicas exactas, explícitas o implícitas, expansiones en serie de potencias y expresiones integrales, esta perspectiva propicia el contexto algebraico,

El privilegio del contexto algebraico ha dejado en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha imagen de este campo. Muchos de los estudiantes están convencidos que existe una "receta" que permite la integración algebraica de cada tipo de ecuación diferencial y el objetivo de investigación en este campo es completar el libro de recetas existente.

Sin embargo, desde el punto de vista epistemológico, sabemos que la naturaleza de estos dominios ha cambiado con el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y el auge de la tecnología: particularmente de las calculadoras graficadoras. Estos espacios han enfocado la atención tanto en los métodos cuantitativos como en los cualitativos. Pero, la enseñanza no ha sido influenciada por este progreso, si no que ha quedado centrada en el contexto algebraico (Artigue, 1995).

No obstante, existen elementos didácticos, fundamentados en investigaciones previas, que ponen en juego relaciones entre dos grandes contextos: *el algebraico y el gráfico.* Las relaciones se generan a través de considerar nociones de comportamiento de las funciones con cierta tendencia (de ahí la estabilidad de las ecuaciones diferenciales). Se enfatiza la atención en las soluciones cualitativas, propiciando un intercambio permanente entre ecuación y gráfica.

Pregunta de investigación

En esta dirección, formulamos nuestras preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son los argumentos y las construcciones mentales que requieren hacer los estudiantes para el entendimiento de la estabilidad de la ecuación diferencial $y'' + by'+cy=f$?
- ¿Qué clase de problemas deben ser considerados para que el estudiante los resuelva y en qué contextos deben ser aplicados?
- ¿Qué significados es posible reconstruir con relación a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes a través de la situación de transformación, en contextos interactivos de los estudiantes?

Hipótesis

Nuestra hipótesis de investigación consiste en que el *comportamiento tendencial de las funciones* es el argumento que tendrá que construir el estudiante en la situación de transformación, el cual posibilitará la reconstrucción de significados de la ecuación y de la propiedad de estabilidad al interactuar en los contextos algebraico y geométrico.

Marco teórico

La investigación se basa en una aproximación socioepistemológica cuyo interés principal es estudiar las prácticas sociales, la actividad humana del conocimiento matemático. Para ello, Cordero (2001), propone formular una epistemología que modele la organización social de un grupo que interactúa para hacer conocimiento matemático. La argumentación proporciona bases a tal formulación, de alguna manera es la expresión de la organización social, de la práctica y de la actividad humana. Es por eso que la argumentación debe componerse de significados, procedimientos y de los niveles cognitivos de los que intervienen. Y para establecer relaciones con el sistema didáctico, la argumentación tendrá que ser un marco de referencia para las situaciones de enseñanza y aprendizaje. En este último punto, nos proponemos diseñar situaciones con la intención de generar los argumentos en el estudiante. La reconstrucción de significados y los procedimientos que se desprenden de éstos dependerán de las experiencias de los que participan. Esta posibilidad obligó a mirar las teorías reificacionistas. En particular las construcciones mentales de Dubinsky, (1991 y 1996): acciones, *procesos, objetos y esquemas* (Teoría APOE). En la teoría APOE, la descomposición genética es un modelo de cognición que describe las construcciones mentales que un individuo pudiera hacer para lograr el entendimiento de un concepto matemático. Además, tiene un mecanismo que permite revisar la descomposición genética iteradamente hasta lograr una explicación satisfactoria del entendimiento del concepto, acorde a lo establecido en la investigación. Un propósito de esta teoría es entender el conocimiento matemático, es decir, *entender los aspectos constructivos del conocimiento y su contribución a los aspectos metodológicos en la instrucción, esto es, comprender las maneras en las que un estudiante construye conceptos o adquiere habilidades para enfrentar y resolver problemas...* (Asiala, et al,1996).

Sin embargo, por la naturaleza de la teoría APOE la descomposición genética esta compuesta de construcciones mentales que hacen referencia a un concepto matemático. Esto obliga a considerar como marco de referencia del concepto los objetos y las relaciones que entran en cuestión.

Las definiciones de los conceptos matemáticos son objetos principales que componen el marco de referencia. De alguna manera las descomposiciones genéticas son descomposiciones de las definiciones de los conceptos matemáticos que ayudan a entender cómo y de qué están construidas. Así, el marco de referencia puede ampliarse si consideramos explícitamente la reconstrucción de significados de los conceptos matemáticos que suceden en contextos interactivos del aula y de ahí formular la descomposición genética.

La reconstrucción de significados de los conceptos matemáticos que emergen en contextos interactivos del salón de clases, pueden ser un marco de referencia para formular la descomposición genética. Entonces una reconstrucción de significados en contextos interactivos pudiera ser estudiada a través de *significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos* que aparecen en las interacciones escolares (Cordero, 2001). En conjunto, estos cuatro elementos componen una situación del concepto y puede ser la base para una descomposición genética.

A continuación describimos estos elementos:

- Significados *son los símbolos en un sistema que se construye y se usa en la interacción,*
- Procedimientos *son las operaciones comunes inducidas por los significados.*
- Procesos y objetos *son las diferentes construcciones mentales que aparecen en los procedimientos, y*
- Argumentos *son los organizadores del contenido que entran en juego en la situación, presentado en diferentes versiones para convencer.*

La situación del concepto es una epistemología del mismo; donde los cuatro elementos que la componen están recíprocamente relacionados. Nuestro propósito es desarrollar una descomposición genética basada en esta epistemología.

Método de investigación

Se parte de una descomposición genética con fundamento en la epistemología. Esta descomposición genética es una hipótesis. Se diseña una situación para ser puesta en escena, se analiza lo obtenido y se confronta con la hipótesis. Como conclusión se ofrece una descomposición genética revisada. Para tal fin, se establecen las siguientes etapas:

- Análisis teórico de la epistemología: Se formula la epistemología de la organización social a través de los cuatro elementos: *significados, procedimientos, procesos y objetos, y argumentos.* Se toma como base para proponer la descomposición genética inicial o hipotética.
- Diseño de instrucción: fundamentándose en el análisis anterior se diseña una situación y su tratamiento instruccional, para posteriormente recolectar datos de un análisis clínico y observar los resultados del diseño, y
- Revisión del análisis teórico: revisión y/o entendimiento más profundo de la epistemología para actualizar la descomposición genética, la cual puede desembocar en la repetición de otro ciclo.

Estas tres componentes tienen como propósitos:

- Aumentar el entendimiento propio de cómo se realiza el aprendizaje de las matemáticas,
- Fomentar una pedagogía apoyada en lo anterior para utilizarla en la enseñanza de las matemáticas en el nivel escolar universitario,
- Desarrollar una base de información y técnicas de asesoramiento de acuerdo a la epistemología y pedagogía asociadas al concepto, y
- Explicar la relación entre los tratamientos instruccionales y el análisis teórico.

La situación de transformación

Una situación de transformación es un marco de referencia donde se presenta la reconstrucción de significados en contextos interactivos y consiste en establecer soluciones de ecuaciones diferenciales lineales con comportamiento tendencial. La construcción establece la tendencia y el patrón de comportamiento. El argumento es determinar relaciones entre las ecuaciones y gráficas (Cordero, 1998).

La situación de transformación esta vinculada con los conceptos matemáticos que requieren de un contexto que aluda al comportamiento de las funciones cuando el comportamiento tiene cierta tendencia, así por ejemplo, la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, es un concepto que hace referencia a un comportamiento de la función que tiene cierta tendencia.

Una epistemología de la estabilidad, puede desarrollarse a través de cuatro elementos, que a saber son:

- Significados: *Patrones de comportamiento de la solución de la ecuación diferencial.*
- Procedimientos: *Variación de los coeficientes de la ecuación diferencial.*
- Procesos y objetos: *Una ecuación diferencial lineal es una relación entre funciones que determina comportamientos.*
- Argumentos: C*omportamiento tendencial de las funciones*

La estabilidad de una ecuación diferencial lineal en el marco de esta epistemología obliga a estudiar:

- Los patrones de comportamiento de la solución que tiene una ecuación diferencial. Estos patrones corresponden a fórmulas analíticas y formas específicas de las gráficas. Sobre estos patrones se construyen los significados de la estabilidad.

- Los significados producen procedimientos como variar los coeficientes de la ecuación diferencial para buscar comportamientos que coincidan con el comportamiento que significa estabilidad.
- La construcción de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales lleva a la concepción de que una ecuación diferencial es una relación entre funciones que determina comportamientos (Cordero, 1998,2001), por lo cual habrá diferentes construcciones mentales, de acuerdo a la experiencia del estudiante, como procesos y objetos.
- La construcción del argumento que ayude a construir la estabilidad de las ecuaciones diferenciales en general y a reorganizar la estabilidad de la ecuación diferencial $y'' + by'+cy=f$. El argumento *comportamiento tendencial de las funciones* confronta los diferentes significados y posibilita la generalidad.

La situación de transformación de la ecuación diferencial $y'' + by'+cy=f$ pretende relacionar la solución analítica con su comportamiento gráfico, así el estudiante reconstruirá un significado de la solución $y(x)=y_h(x) + y_p(x)$ con relación al comportamiento tendencial de su gráfica. La reconstrucción del significado consiste de dos aspectos: *identificar la propiedad de estabilidad y establecerla como argumento.*

La estructura de la ecuación diferencial, la solución analítica y su comportamiento gráfico son un apoyo para la reconstrucción de significados de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Discusión

En la didáctica actual, aun encontramos énfasis en los aspectos formales y rigurosos, evadiendo los aspectos epistemológicos y cognitivos que competen a los conceptos matemáticos. Una característica de esta didáctica es que toma los conceptos matemáticos como objetos ya hechos, sin considerar que dichos conceptos pueden ser construidos por el estudiante como una herramienta funcional que le permita debatir ante diversos tipos de situaciones. En definitiva necesitamos de una reorganización de la matemática, requerimos de rediseñar el discurso matemático escolar, y esta es la tarea de la matemática educativa.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. P. Gómez (Ed.) pp. 97-140. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Asiala, M. & Brown, A. & Devries, D. & Dubinsky, E. & Mathews, D. and Thomas, K. (1996). A framework for research and the development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education* 2(6), pp. 1 – 32.

Benítez, L. (1993). Significación de los objetos matemáticos centrado en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Tesis de maestría (no publicada). Cinvestav-IPN. México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 4, Num. 2. pp. 103-128.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y Análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número 1, 56-74.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. Vol. 8, No. 3, pp. 24 – 40. Grupo Editorial Iberoamérica.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in avanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.). *Avanced Mathematical Thinking*. Cap. 7 , pp. 96 – 126. Mathematics Education Kluwer Academic Publisher.

Solís, M. (2000). Comportamientos gráficos y analíticos en las explicaciones de los estudiantes: situaciones con ecuaciones diferenciales. En R. Farfán (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Clame. Vol. 13, pp. 110-117. Grupo Editorial Iberoamérica.

Solís, M. (1996). Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales. Memoria predoctoral (no publicado). Cinvestav-IPN. México.

Solís, M. y Cordero, F. (1999). Comportamientos gráficos y analíticos en la visualización de las ecuaciones diferenciales. En R. Farfán (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Clame. Vol. 12 Tomo 1. pp. 29-33. Grupo Editorial Iberoamérica.

Solís, M. y Cordero, F. (1998). Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales. En R. Farfán (Ed.). *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. pp. 69 – 73. Bogotá, Colombia: Clame. Grupo Editorial Iberoamérica.

Una epistemología de la periodicidad a través de la actividad humana. La predicción como argumento.

Gabriela Buendía Abalos y Francisco Cordero Osorio
CINVESTAV-IPN, México
buendiag@hotmail.com fcordero@mail.cinvestav.mx

Resumen

En este reporte presentamos una epistemología de la periodicidad a través de la actividad humana, la cual toma en cuenta las prácticas sociales en las que se involucra un estudiante para construir dicha noción. En particular, presentamos el diseño de una secuencia que pretende mostrar cómo la predicción es una actividad humana que hace patente el tipo de regularidad presente en la gráfica de un movimiento y provoca una reconstrucción de significados. Al confrontar los diversos significados de regularidad, el alumno podrá estar en posición de construir el concepto de periodicidad. Este elemento se une al desplazamiento lineal y a la dualidad instante-periodo para ir conformando una socioepistemología de la periodicidad.

Introducción

La aproximación socioepistemológica en la investigación en Matemática Educativa busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas por medio de cuatro componentes fundamentales del conocimiento matemático: se incorpora al estudio de la epistemología del conocimiento, la dimensión cognitiva, la didáctica y todo esto, dentro de la dimensión sociocultural (Cantoral, 2000).

Al incorporar la dimensión sociocultural, la epistemología que se genera reconoce la actividad humana como organización social en la que se construye conocimiento y el interés de la socioepistemología, como aproximación teórica, radicará en cómo desarrollar las prácticas sociales. Estas prácticas sociales son las actividades en las cuales se involucra el hombre de tal manera que, a través de ellas, transforme realmente a los objetos.

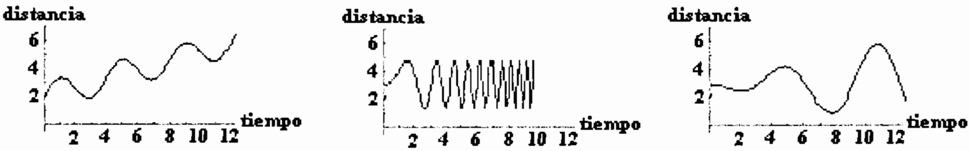
De esta manera, las epistemologías generadas brindarán explicaciones en función de las características propias del humano al hacer matemáticas en contextos socialmente organizados. Esto implica necesariamente enfocarse y reconocer los recursos, versiones, argumentos y la construcción de consensos acerca de cierto contenido matemático que necesariamente se dan en los contextos interactivos de los estudiantes. Las definiciones de los objetos y la adquisición del objeto matemático dejan de ser, por consecuencia, nuestro foco de interés para centrarnos más bien en las actividades alrededor de su construcción. Es decir, en las prácticas sociales y herramientas necesarias para construir al objeto.

Para ello, hemos buscado antecedentes que orienten hacia dichas actividades. Nuestra búsqueda ha mostrado prácticas sociales que favorecen la construcción de la noción de periodicidad así como elementos que surgen de ellas. En particular, mostraremos cómo la actividad de predecir, es una práctica que ayuda a que el estudiante construya la noción de periodicidad.

Un diseño: la predicción y lo periódico

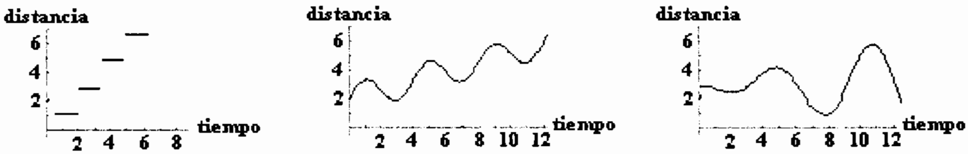
El diseño de esta situación está basado en una revisión epistemológica que hemos realizado alrededor de lo periódico. Se parte de la necesidad de describir un movimiento que se lleva a cabo en el tiempo con la finalidad de manipularlo.

La situación presenta gráficas de movimientos tanto periódicos como no periódicos y, en particular, aquéllas cuyo comportamiento periódico entra en conflicto con la propiedad periódica. Estas últimas tienen la característica de que, dado que el proceso con el cual se construyeron es periódico, entonces el resultado tendría que ser periódico. (Shama, 1998).

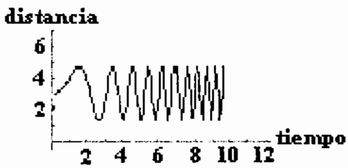


La regularidad es una característica presente en las ocho gráficas que componen la primera secuencia; sin embargo, ésta se presenta de tres maneras distintas:

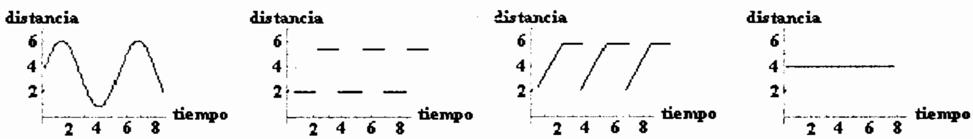
a) Regularidad sólo en el tiempo



b) Regularidad sólo en la distancia (específicamente, rango acotado)



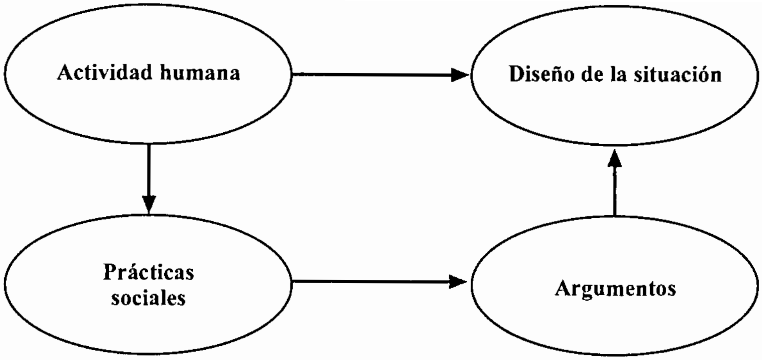
c) Regularidad en ambos



Una vez que el estudiante ha descrito las gráficas anteriores en un contexto distancia-tiempo, se le pide que las agrupe por semejanzas y diferencias. En este momento, uno podría esperar que un criterio de agrupación fuera la periodicidad. Sin embargo, esta es una característica que suele no estar presente en el discurso del alumno ni en el del profesor.

De hecho, históricamente funciones típicamente periódicas, como las trigonométricas, fueron estudiadas sin hacer explícita su periodicidad. No había (Katz, 1987) nada para que el tipo de regularidad presente en un movimiento fuera una característica sobresaliente o determinante. De manera similar, ocurre para el estudiante.

Sin embargo, llega un momento en el que el interés radica en poder describir un movimiento manejando al tiempo como la variable dependiente y poder así, predecir la posición del móvil en cualquier tiempo. Euler, inmerso en esta actividad, vislumbra la necesidad de hablar entonces de lo periódico de las funciones trigonométricas. Así, podemos entonces reconocer a la actividad humana como fuente de construcción de conocimiento.



Una vez que se reconocen a las prácticas sociales como parte de la actividad humana que genera conocimiento, entonces es necesario llevarlo al aula y analizar qué sucede en este contexto socialmente organizado. Para ello, se diseña una situación que permita ver cómo la predicción, como práctica social, es el argumento para construir lo periódico.

En la segunda secuencia que conforma nuestra situación, sigue estando presente la descripción del movimiento; sin embargo, esta descripción está enfocada a la predicción. Se le pide al alumno que prediga, en cada una de las gráficas anteriores, la posición del cuerpo en un tiempo determinado ($t = 231$). Esto pretende hacer explícito el tipo de regularidad que presenta cada gráfica pues el modelo predictivo que se decida utilizar dependerá en gran parte de ello.

Dada la identificación que puede realizarse de algunas de las gráficas con la función seno, se espera que, en algunos casos, la predicción se realice analíticamente por medio de la sustitución en la función del valor pedido de tiempo; sin embargo, dado que no todas las gráficas presentadas son del tipo sinusoidal, tendrá que llevarse a cabo un análisis de la regularidad que presenta la función. Es así como los significados del alumno acerca de dichos comportamientos regulares entran en juego.

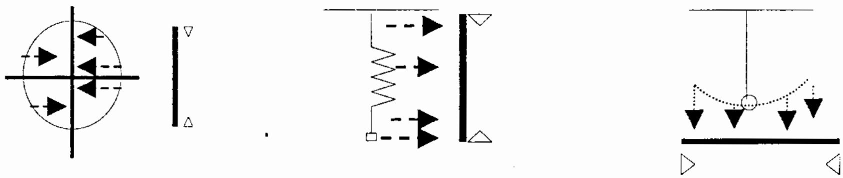
Estos significados generarán los procedimientos que lleve a cabo el alumno y la regularidad que presenta el movimiento a través del tiempo y la regularidad en el rango serán los argumentos relevantes. La conjunción de ambos tipos de regularidad lleva a darle a esas funciones un estatus especial en cuanto al modelo predictivo utilizado. Se podrá hablar, entonces, de una unidad de análisis que permita predecir la posición del móvil en cualquier tiempo. Esta unidad de análisis mínimo es el periodo.

North (1983) menciona la existencia de sistemas que no son nada en un instante lo cual implica "abandonar el instante" como unidad de análisis. Esto sucede sólo en los fenómenos periódicos, en los que no es suficiente analizar un instante para darnos cuenta de la naturaleza periódica del movimiento. Entonces, la unidad de análisis tendrá que sufrir el cambio del instante al periodo y, de esta manera, todos los instantes quedan abstraídos en el periodo. Una vez conseguido este cambio, nuestro sistema de referencia volverá a la dualidad instante-periodo pero ahora bajo la forma "periodo-todo" pues para entender la naturaleza de un fenómeno periódico habrá que pasar continuamente del periodo al todo y viceversa. Es más, es necesario mantener una visión de instante pues lo que suceda en cada instante del periodo sucederá en cada instante de los demás períodos; es necesario entonces una relación dialéctica instante-periodo característica de la periodicidad.

Así pues, la predicción provoca una reconstrucción de significados acerca de la regularidad de un movimiento que favorece la construcción de lo periódico. Por ello creemos que la predicción, en esta situación, es el argumento para lo periódico pues pareciera que sólo cuando el alumno se enfrenta a la necesidad de predecir, la periodicidad de la función es relevante.

Una socioepistemología de la periodicidad

El propósito de esta investigación es elaborar una socioepistemología de la periodicidad; esto es, una epistemología a partir de la actividad del alumno al hacer matemáticas. Anteriormente (Buendía y Cordero, 2001), se había reportado la existencia del desplazamiento lineal como un elemento importante en la construcción del concepto de la periodicidad. Este desplazamiento se refiere al conjunto de las proyecciones verticales que pueden hacerse en tres movimientos típicamente periódicos: el resorte, el péndulo y el movimiento circular.



Así, resulta relevante cómo los tres movimientos tienen algo en común: que pueden ser descritos a través de un desplazamiento lineal y para que éste exista tendremos que analizarlo en todo su periodo de manifestación; es decir, no es un argumento puntual, sino que se manifiesta en todo el periodo.

Por otra parte, la situación presentada en este documento pretende informar acerca de la predicción como una actividad del alumno y como un argumento para que construya la noción de periodicidad al involucrarse en dicha situación.

Así, la predicción es una práctica social que permite la construcción de lo periódico y evidencia la existencia de elementos, como el comportamiento, que pertenecen más que a una estructura matemática, a las actividades alrededor de la construcción del conocimiento. En la situación presentada, la predicción es el argumento que permite también darnos cuenta de herramientas, como el desplazamiento lineal y la dualidad instante-periodo, que el alumno utiliza en su práctica como individuo.

Vemos cómo en ningún momento se está partiendo de la definición de periodicidad porque, aunque no se le está negando, no resulta ser un marco de referencia suficiente para pensar en lo periódico. Es decir, existe un contenido matemático pero se está pretendiendo una reconstrucción de significados en términos de elementos propios de la actividad humana. La predicción y el comportamiento periódico son parte de dicha actividad. Habría entonces que favorecer el desarrollo de este tipo de prácticas sociales.

Comentarios finales

En este reporte hemos presentado una secuencia diseñada bajo una visión socioepistemológica, en la que se pretende mostrar a la predicción como un elemento importante para la construcción del concepto de periodicidad. La epistemología propuesta, a partir de la cual fue diseñada la secuencia, parece advertir acerca de elementos, como las prácticas sociales, que bajo algún otro marco teórico no hubieran tenido la relevancia con la cual se presentan.

Las experiencias que hemos tenido al aplicar esta situación a alumnos y profesores de diversas instituciones educativas de nivel medio superior y superior permiten realizar una evaluación acerca de la socioepistemología propuesta. Esta evaluación es de tipo interno ya que se basa en una confrontación continua entre la epistemología propuesta y la revisada.

Es ahora necesario continuar con diseños que permitan aportar nueva evidencia acerca de los elementos de dicha epistemología y que, a su vez, aporten nuevos elementos para enriquecerla.
Es importante mencionar que no hemos abordado todos los casos posibles de funciones periódicas. Trabajamos el caso donde la función periódica presenta un rango acotado, pero no, el caso de rangos no acotados, como la tangente. La razón principal para ello, es que hemos trabajado gráficas distancia-tiempo en las que el comportamiento de la distancia sea fácilmente descrito a través de algún desplazamiento que se realice. Un comportamiento asintótico, como la tangente, generaría una problemática distinta, que por el momento, no hemos abordado aún.

Referencias bibliográficas

Buendía. G. y Cordero, F. (2001) Una epistemología del concepto de periodicad a través de la actividad humana. Artículo aceptado para su publicación En *Actas de la 15 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Buenos Aires, Argentina.

Callahan, J; Cox,D; Hoffman, K; O'Shea, D; Pollatsek, H. Senecnal, L. (1992). Periodicidad. En *Calculus in context*. Mc Millan 413-158.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula*. México: Paidós Educador

Cantoral, R. (2000) Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 13*. México: Grupo Editorial Iberoamérica 54-62

Cordero, F (2001) La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.4(2),103-128

Cordero, F y Martínez, J. (2000) La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. *Actas de la 14 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Panamá.

Katz, V (1987) The Calculus of the Trigonometric Functions. *Historia Mathematica* (14) 311- 324

North, A. (1983) La matemática como elemento en la historia del pensamiento. En *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Tomo 1. España: Editorial Grijalbo.

Shama, G.(1998) "Understanding Periodicity as a Process with a Gestalt Structure." En *Educational Studies in Mathematics* Vol. 35 (pp. 255-281)

Convergencia de sucesiones, niveles de Van Hiele y su repercusión en el lenguaje

María de los Ángeles Navarro Domínguez y Pedro Pérez Carreras
Universidad de Sevilla y Universidad Politécnica de Valencia
manavarro@us.es   pperezc@upv.es

Resumen

El objeto de esta comunicación es describir una visualización del proceso de convergencia de una sucesión de números reales enmarcada en el modelo educativo de van Hiele. Como herramienta de trabajo para la determinación de los niveles de razonamiento de van Hiele, utilizamos la entrevista semiestructurada. Dado que el lenguaje utilizado por los estudiantes constituye un factor primordial en este modelo educativo, se incluyen las transcripciones parciales de algunas entrevistas. Este tipo de aproximación ha sido utilizado con anterioridad para estudiar otros conceptos básicos de Análisis.

1. Introducción

El modelo de van Hiele proporciona una descripción del proceso de aprendizaje postulando la existencia de niveles de pensamiento que no se identifican con niveles de habilidad computacional y que, en nuestro trabajo, clasificaremos como nivel 0 (predescriptivo), nivel 1 (de reconocimiento visual), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación y relación) y nivel 4 (de deducción formal), aunque este último no será estudiado, dada la afirmación del propio van Hiele sobre este nivel como difícilmente detectable y sólo de interés teórico. Así la aplicación de este modelo a una materia concreta necesita del establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados, que permita la detección de los mismos. Para que el trabajo pueda ser considerado dentro del modelo de van Hiele tales niveles 1) deben ser jerárquicos, recursivos, secuenciales; 2) deben ser formulados detectando el progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual; 3) las pruebas de cualquier tipo que se diseñen para su detección deben recoger la relación existente entre nivel y lenguaje empleado en cada uno de ellos; y 4) el diseño debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

El modelo de van Hiele se aplicó inicialmente a conceptos geométricos en niveles elementales de los cursos de educación primaria, hasta que aparecieron en los últimos años las tesis doctorales de los profesores J. L. Llorens (1994), P. Campillo (1998), A. de la Torre (2000), C. M. Jaramillo (2000) y P. Esteban (2000), mediante los cuales se demostró la posibilidad de extender el modelo a conceptos del Análisis Matemático que se estudian en los programas de los últimos años de Secundaria y primer año de Universidad. Estas tesis han demostrado que un buen diseño de entrevista de carácter socrático, en el contexto del modelo de van Hiele, permite detectar el nivel de razonamiento de un alumno con respecto a un determinado concepto matemático. Una propiedad de los niveles de van Hiele es que cada nivel tiene un lenguaje específico, hasta tal punto que las distintas capacidades de razonamiento que van unidas a cada uno de los niveles se manifiestan de manera notoria en la expresión verbal y en el significado que se da al vocabulario utilizado.

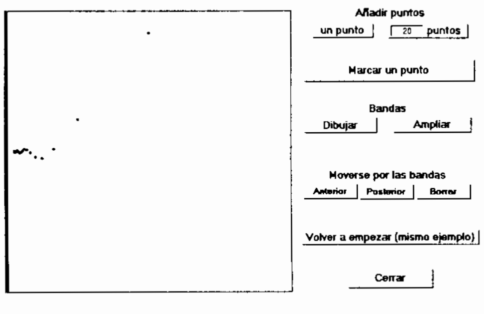
En Navarro & Pérez (preprint) presentamos una propuesta metodológica para introducir el concepto de límite de una sucesión de números reales. Tratamos en él el problema de crear en el alumno una imagen visual adecuada del proceso de convergencia.

Para el diseño de la propuesta entrevistamos a veintiséis alumnos, siguiendo el esquema propuesto por Jaramillo & Campillo (2001). Nos referiremos a dichos alumnos por una numeración que puede entenderse como arbitraria con objeto de mantener su anonimato.

El objeto de esta comunicación es describir el método de visualización usado durante la entrevista a la que nos referimos en el apartado anterior, y exponer los descriptores de los niveles de van Hiele relativos al proceso de convergencia de una sucesión de números reales. Dado que el lenguaje constituye un factor muy importante en la determinación del nivel de razonamiento de los alumnos, y que nuestra intención era que los estudiantes expresaran su propia definición de límite de una sucesión convergente, presentamos también una descripción del lenguaje utilizado por algunos de los entrevistados en relación con el nivel de razonamiento que alcanzaron cada uno de ellos.

2. Visualización

Creemos que es conveniente introducir los conceptos de sucesión y de límite de una sucesión convergente de una forma intuitiva asociada al uso de la tecnología informática de la que disponemos, pues la capacidad de los ordenadores actuales permite al alumno conectar sus intuiciones de tipo geométrico con algunas ideas, particularmente problemáticas, relacionadas con el concepto de infinito. Para plasmar en imágenes la visualización elegida hemos utilizado, como asistente matemático, la pantalla interactiva que mostramos. Su uso no depende en absoluto del programa con el que ha sido diseñada, la versión 5.3 de Matlab, con el objeto de que el alumno no tenga que preocuparse de obtener la más mínima información del mismo.



En el cuadrado de la izquierda aparece la representación de la sucesión correspondiente al ejemplo estudiado. La pantalla es interactiva en el sentido de que el alumno podrá utilizarla, como una herramienta, sin más que picar con el ratón en los distintos botones que están situados a la derecha y que indican cual es la operación que realizan. De esta forma él mismo añadirá puntos a la imagen (de uno en uno o la cantidad que, previamente, haya indicado), la ampliará en la zona que desee (dibujando una banda horizontal que delimita el cuadrado que se quiere ampliar) y podrá marcar en la línea azul los puntos que, según sus propias conjeturas, podrían ser el límite de la sucesión considerada.

No utilizamos, en ningún momento, la nomenclatura y notación propias de las sucesiones de números reales. El alumno no verá ninguna fórmula y, por supuesto, el lenguaje utilizado será lo más coloquial posible. Para ello visualizaremos las sucesiones como nubes de puntos en el plano, cuyas abscisas tienden a un límite y cuyas ordenadas son las que representan la sucesión. Con idea de que el alumno no tenga ideas preconcebidas, las nubes de puntos que manejamos serán introducidas como las pisadas de un animal invisible. El límite de la sucesión, si es que existe, vendrá dado por un punto en el segmento cuya abscisa es el límite de las abscisas de la sucesión y que el alumno entenderá como el punto hacia el que camina el animal y que identificará como el punto de estabilización de la nube. La variable épsilon de la definición de límite será traducida en términos de anchura de una banda horizontal centrada en el límite de tal manera que la desigualdad final puede expresarse diciendo que todos los puntos de la nube están dentro de la banda a partir de un cierto lugar o, mejor, que el número de puntos exteriores a la banda es finito. Debemos insistir en que las variables y nombres matemáticos no deben ser pronunciados en ningún momento de la exposición.

La conclusión a la que hemos llegado es que la visualización utilizada hace que el alumno se sienta inclinado a manejar por sí mismo, de una forma intuitiva, nociones y razonamientos de tipo infinito, que tradicionalmente han supuesto un obstáculo en la adquisición de este concepto. Por otra parte esta visualización creemos que contribuye a la formación de un concepto-imagen adecuado para la noción de límite de una sucesión convergente

1. Niveles y descriptores

La realización de entrevistas clínicas nos permitió observar la presencia de distintos niveles de razonamiento en la construcción mental del proceso de convergencia de una sucesión que realiza el estudiante. Tales niveles pueden ser detectados a partir de las características comunes que presentan las distintas formas de resolver las cuestiones planteadas, y a partir del análisis de la evolución que se produce en el lenguaje que los alumnos van empleando a lo largo de la entrevista.

Cada alumno utilizará los recursos propios de su nivel y el estudio de este comportamiento es el que nos ha permitido hallar los descriptores de cada nivel de razonamiento en relación con el concepto estudiado:

Nivel 0

Un alumno que esté en el nivel 0 debe reconocer que un punto no tiene dimensiones y que un segmento está formado por una cantidad infinita de puntos. Cualquier segmento se puede dividir en dos partes iguales y el resultado de esta división siempre son dos segmentos. El proceso de división sucesiva del segmento en dos partes iguales es un proceso que nunca acaba, es decir, es potencialmente infinito.

Nivel 1

1.1. Una característica del alumno de nivel 1 es su reconocimiento de que las nubes de puntos son procesos potencialmente infinitos que se generan ordenadamente de una forma determinada. Si un punto es posterior a otro entonces debe estar situado en una posición más cercana a la línea azul.

1.2. Observan globalmente las imágenes, y llegan a la conclusión de que las nubes de puntos que se les muestran pueden tener distintos tipos de comportamiento.

1.3. Usan las bandas como herramienta para delimitar la parte de la imagen que quieren ampliar y usan ampliaciones sucesivas para estudiar el comportamiento de las nubes de puntos. El uso de ampliaciones es para ellos una herramienta que les permite ver la disposición de los puntos en las zonas en que estos se acumulan y por tanto les permitirá hacer aproximaciones de tipo visual cada vez más precisas.

1.4. Para buscar el punto de estabilización de una nube sólo tendrán en cuenta las características físicas que presenta la nube globalmente. Se fijarán en propiedades tales como la disposición simétrica de los puntos o la trayectoria recta que describen. Para la mayoría de estos alumnos los primeros puntos de la nube son importantes con respecto a su comportamiento, porque son los que les permiten apreciar estas características más claramente.

1.5. No manejan en sus razonamientos datos o propiedades ajenos al aspecto de la nube, por este motivo no llegan a percibir la utilidad del aumento/no aumento del número de puntos que se sitúan fuera de una banda. Algunos alumnos llegan a intuir de forma implícita la información que les proporciona este dato, pero si no han llegado a reconocer perfectamente lo que es una nube de puntos y todas sus características, no llegarán a manejarlo explícitamente y no podrán avanzar en su nivel de razonamiento.

1.6. Con respecto a la definición de punto de estabilización que dará un alumno de nivel 1, siempre hará referencia al aspecto global de la nube, a la forma que tiene y al lugar al que se dirigen los puntos.

(Diferenciación del nivel 2) El alumno de nivel 1 que no ha llegado a nivel 2 utiliza las bandas como una herramienta que le sirve para ampliar la imagen pero no utiliza el número de puntos que hay fuera de estas bandas. Para hacer conjeturas más fiables usarán ampliaciones sucesivas sin utilizar otra información que la meramente visual. El alumno de nivel 2, en cambio, llegará a reconocer el número de puntos que quedan fuera de las bandas como una propiedad de las nubes de puntos que le aporta información acerca de su comportamiento, y que le permite hacer conjeturas cada vez más fiables acerca de la posición del punto de estabilización de una nube, si es que existe.

Nivel 2

2.1. El alumno que comienza a razonar en el nivel 2 reconoce que las nubes de puntos están formadas por distintas partes y que no todas ellas le aportan la misma información.

2.2. Reconocen que los puntos que determinan el comportamiento de la nube son los últimos que van apareciendo en la imagen y prescinden de los primeros al estudiarlas.

2.3. Reconocen el punto de estabilización de una nube como aquel punto de la línea azul hacia el cual se dirigen las pisadas, asocian su existencia a la unicidad de tal punto y ambas cosas con la existencia de un único pico en la nube.

2.4. Reconocen que si el número de puntos que se sitúan fuera de una banda deja de aumentar entonces cabe la posibilidad de que la nube de puntos se estabilice y, en este caso, el punto de estabilización será interior a esta banda.

2.5. Reconocen que si el número de puntos que se sitúan fuera de una banda continúa aumentando indefinidamente, entonces la nube de puntos no se estabiliza en un punto interior a la banda considerada.

2.6. Comprenden que si una nube se estabiliza en un punto el número de puntos exteriores a una banda que lo contenga, no puede seguir aumentando indefinidamente.

2.7. Observan la conveniencia de trazar bandas cada vez más estrechas para encontrar el punto de estabilización, y algunos intuyen que todo lo que podemos obtener utilizando imágenes son aproximaciones del punto. Este será uno de los descriptores del nivel 3 que está implícito en el razonamiento de los alumnos de nivel 2 pero solamente si progresan en su nivel serán capaces de incorporarlo a su definición y a sus razonamientos.

2.8. No será capaz de pensar en cualquier banda sino en bandas concretas. En este nivel no se observa la necesidad de un proceso infinito de trazado de bandas cada vez más estrechas para caracterizar el punto de estabilización de una nube.

2.9. No es capaz de dar una definición de punto de estabilización que incluya el término "cualquier" y por esto, en su definición, incluirá que el número de puntos exteriores a una banda que lo contenga debe ser finito. En general en su definición enumerarán las propiedades que han observado y pensarán que si estas se verifican en una o varias bandas esto ya es suficiente para caracterizar al punto de estabilización de una nube.

2.10. **(Diferenciación del nivel 3)** El alumno de nivel 2 hará sus razonamientos con bandas concretas. No reconoce el carácter dinámico del proceso de trazado de bandas y, por tanto, no será capaz de hacer un razonamiento más general que incluya "cualquier banda". A la hora de caracterizar el punto de estabilización de una nube dirá que "... es un punto tal que si se traza una o varias bandas centradas en él el número de puntos que se marcan fuera es finito...". El alumno de nivel 3 será capaz de hacer razonamientos generales que incluyan el carácter dinámico del proceso de trazado de bandas. En su definición se referirá de forma genérica a bandas que pueden ser cada vez más estrechas o, si alcanza un grado de razonamiento más alto, cualquier banda.

Nivel 3

3.1. Observa que si se quiere caracterizar el punto de estabilización de una nube será necesario un proceso dinámico de trazado de bandas, en las que el número de puntos que se marcan fuera sea finito, y reconoce la necesidad de que este proceso sea infinito. Ante la imposibilidad física de completarlo recurrirá a imponer la condición en una banda cualquiera lo cual le asegurará que todas las bandas del proceso infinito, que no puede completar, también la cumplen.

3.2. Es capaz de dar una definición de punto de estabilización informal pero correcta.

3.3. Es capaz de negar su definición para afirmar que el punto que se encuentra marcado, en las nubes que se le muestran, no es el punto de estabilización.

3.4. El grado más alto de razonamiento que, en mi opinión, se puede alcanzar con este guión es el del alumno que da una definición del siguiente tipo o similar: "El punto de estabilización es aquel que cumple la condición de que el número de puntos de la nube exteriores a cualquier banda, que esté centrada en el punto de estabilización, debe ser finito". En las aplicaciones será capaz de negar su definición para decirnos que los puntos que le marcamos no son puntos de estabilización porque existe, al menos, una banda en la que el número de puntos exteriores es infinito.

3.5. Otra de las características que nos indicarán que el alumno ha llegado al grado más alto de razonamiento dentro de este nivel será que reconozca la necesidad de una definición de punto de estabilización que no se base en manipulaciones de tipo visual sino que sea de tipo formal.

Nivel 4

El alumno que llegue a este nivel de razonamiento no solo verá la necesidad de una definición formal sino que será capaz de enunciar una definición formal coherente con la definición de tipo visual que habrá verbalizado en el nivel anterior.

4. Análisis del lenguaje

A medida que el nivel de razonamiento del alumno va aumentando se observa un refinamiento progresivo en su lenguaje y hay que resaltar el esfuerzo que realizan para utilizar un vocabulario más preciso. Obsérvese la diferencia existente en el lenguaje del alumno número 12 en dos momentos distintos de la entrevista cuando, en ambos, intenta explicar por qué cree él que el número de puntos exteriores a una cierta banda deja de aumentar.

En un primer momento nos dice: *"Porque...al aumentar puntos, uhm... la diferencia entre cada uno de los puntos será menor, entonces si hemos cerrado la banda... es que no sé...no sé como decir."* Poco después se expresa de la siguiente forma: *"Porque...como he dicho antes, los puntos van encaminados hacia un punto y su dispersión es menor."*

Este mismo alumno nos da una primera definición de punto de estabilización de la siguiente forma: *"La definición de un punto de estabilización de una nube creo que sería ehm...el punto alrededor del cual la franja que tracemos siempre...tendrá dentro todos los...infinitos números."* Al pedirle que aplique esta definición para deducir, en un ejemplo concreto, si el punto marcado es el punto de estabilización o no lo es, el alumno observa su error y progresa en su nivel de razonamiento. Ante esto se le indica que cambie su definición si lo cree conveniente. Esta es su nueva definición: *"Es el punto alrededor del cual, la franja que tracemos siempre va a contener... siempre tendrá fuera un número finito de puntos. Esa franja se podrá hacer más pequeña, cada vez más."* El lenguaje utilizado en esta ocasión es más refinado y preciso que el de la primera. Apenas transcurren cinco minutos entre los momentos en que da la primera y la segunda definición, sin embargo el progreso en su nivel de razonamiento produce también una notable mejora en el lenguaje y las expresiones utilizadas.

A lo largo de la entrevista también se aprecia que, dependiendo del nivel de razonamiento en el que se encuentre el alumno, se da un significado distinto a las mismas palabras. Esto se pone de manifiesto claramente cuando se le pide que dé una definición de punto de estabilización de una nube. Para los alumnos que están en el nivel 1 de razonamiento una definición es una descripción de las características que son capaces de distinguir visualmente. Cuando se les pide que den una definición de punto de estabilización las respuestas que se obtienen son todas del mismo tipo.

Así, por ejemplo, el alumno número 21 lo define como *"El punto de encuentro de todos los puntos"*. De igual forma el alumno número 11 responde *"Pues... el punto hacia el cual se aproximan..."*, y, ante nuestra insistencia, nos especifica: *"Por la aproximación de los puntos de la nube...Cuando los puntos de la nube nos vayan definiendo digamos...más o menos una trayectoria, que no estén dispersos, en el momento que...que comiencen a definir una trayectoria que más o menos se ve claramente hacia donde va pues diríamos que el final de ese camino, más o menos, sería el punto de estabilización".*

La situación con el alumno número 26 es parecida: *"El punto donde se acercan los demás puntos de la imagen esa... de la nube."*

Para los alumnos de nivel 2 definir significa enunciar las propiedades que han reconocido. En particular a la hora de dar una definición de punto de estabilización de una nube mezclarán las propiedades de tipo visual que han observado, con la propiedad de que el número de puntos que queda fuera de una banda centrada en el punto de estabilización, deje de aumentar al añadir puntos a la nube. Veamos algunos ejemplos de este tipo:

El alumno número 22 nos da la siguiente definición: *"Es aquel... podríamos decir que es aquel punto en el que por muy estrecha que sea la banda que esté alrededor pues... siempre todos los puntos que estén en la trayectoria del camino del animal nunca van a salir de esa banda, siempre se van a ir acercando a ese punto"*. Después de una serie de preguntas observa que la definición que ha dado no es suficiente para describir su idea de punto de estabilización y nos da una nueva: *"El punto de estabilización es aquel en el que, por muy estrecha que sea la banda que establezcamos, el número de puntos que quedan fuera es finito y el interior sería infinito pero no... no... el número de puntos fuera se estabiliza"*. En las siguientes preguntas se detecta que este alumno cree que con una sola banda (aunque muy estrecha) es suficiente para determinar el punto de estabilización. Cuando dice "... por muy estrecha que sea la banda..." lo que hace es describir el tipo de banda que él desea usar, no está describiendo ningún proceso de trazado de bandas cada vez más estrechas, simplemente describe una propiedad que relaciona el punto de estabilización con la cantidad de puntos que hay dentro o fuera de una determinada banda.

El alumno número 19 da como definición *"Aquel punto al que... un punto que si... tal que si... trazamos dos líneas en... tre... una superior a él y otra inferior a él, sean todo lo pequeñas que sean, siempre va a haber un número infinito de puntos entre ellas"*. Después de algunas preguntas más este alumno también observa que las propiedades que ha enumerado son insuficientes para describir la idea que él tiene de punto de estabilización de una nube y entonces da una nueva definición: *"Sería un punto tal que si se traza una banda entre dos... puntos... uno superior a él y otro inferior, habría infinitos puntos fuera de la banda, n... dentro de la banda, perdón, y un número finito fuera."*

Cuando intentan dar la definición, los alumnos de nivel 3 se esfuerzan en buscar propiedades que caractericen de forma unívoca al punto de estabilización. Han observado previamente que el trazado de bandas concretas, aunque les permita dar una buena aproximación, no caracterizará al punto y esto les lleva a buscar propiedades de tipo más general. Esta búsqueda hará que comiencen a abstraer los conceptos de nube de puntos y de punto de estabilización y las relaciones que les unen. Veamos algunos ejemplos:

Comencemos por el alumno número 10, que en un principio se expresa de la siguiente forma: *"Cualquier... el punto en el que se ha trazado una franja... cualquier franja alrededor suya, fuera de la franja quedan un número finito de puntos"*. El esfuerzo realizado por el alumno para generalizar su razonamiento se observa en una de las aplicaciones cuando se le pide que aplique su definición para decir si un punto es el punto de estabilización de una cierta nube. Al observar que no lo es intenta negar su definición de la forma más general que se le ocurre: *"Por que el número de puntos... cuando nosotros le damos a añadir... porque...!vamos a ver!... Porque para cualquier franja que hemos cogido el número de puntos... exteriores a la franja es infinito."*

El alumno número 17 expresa su definición diciendo: *"Es el punto por el cual...cualquier banda que se centre en él va a tener siempre un número finito de puntos fuera".* Posteriormente, a lo largo de los ejemplos de aplicación que se le proponen, niega su definición correctamente dos veces para indicar que un cierto punto no es el punto de estabilización de la nube que se le muestra. La primera, *"Según mi definición este punto no es,...porque si pongo una banda así de chica creo que fuera de la banda no hay un número finito".* Más adelante, en otro ejemplo, vuelve a repetir su razonamiento de la siguiente forma: *"No, porque si le pongo una banda centrada en él siempre van a aumentar los puntos de fuera."*

Referencias bibliográfícas

Campillo, P. (1998). *La Noción de Continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele.* Tesis.

Campillo, P. y Pérez, P. (1998). La Noción de Continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele, *Divulgaciones Matemáticas*, 6, No. 1, 69-8.

De la Torre, A. F. (2000). *La Modelización del Espacio y del Tiempo: Su Estudio Via el Modelo de Van Hiele.* Tesis.

Esteban, P. (2000). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele.* Tesis.

Jaramillo, C. M. (2000). *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele.* Tesis.

Jaramillo, C. M. y Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 9, n.1, pp. 65-84.

Llorens, J. L. (1994). *Aplicación del Modelo de Van Hiele al Concepto de Aproximación Local.* Tesis.

Navarro, M. A. y Pérez, P. (preprint). *Hacia un concepto imagen adecuado de la noción de convergencia vía el asistente matemático.*

Pérez, P. (2000). *Matemática asistida por ordenador, Cálculo Infinitesimal.* Editorial U.P.V.

Concepciones acerca de la noción de límite

Joffre Mayela Hernández y Martín Andonegui Zabala
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad Pedagógica, Barquisimeto Venezuela
joffrih@yahoo.com.ar y ioritz@hotmail.com

Resumen

El presente estudio tiene como objetivo fundamental determinar las concepciones de los estudiantes de Educación Superior acerca de la noción de límite. Para ello, se clasificaron las diferentes concepciones que aparecen a lo largo de la historia (Edwards, 1979) y se relacionaron con una serie de obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1985). De este modo pudieron determinarse catorce posibles tipos de concepciones acerca de la noción de límite. Para el estudio se elaboró un instrumento conformado por catorce ítems, aplicado a una muestra de 59 estudiantes –de semestres iniciales y avanzados- seleccionados al azar en dos Universidades de Barquisimeto (Venezuela). Las respuestas y sus justificaciones fueron organizadas y analizadas revelando que los estudiantes reconocen la definición formal de límite; sin embargo, no existe consistencia en las concepciones de los alumnos pues, al momento de resolver un problema, utilizan la concepción que más se adapte al ejercicio; además, las concepciones predominantes son las del límite como una aproximación, como un movimiento físico y como un valor inalcanzable.

Antecedentes

La construcción de la noción de límite se presenta como una de las dificultades más evidentes en el aprendizaje del cálculo. Para los estudiantes el significado de límite varía de acuerdo a la situación; de hecho, son capaces de resolver problemas, de completar ejercicios sin tener el conocimiento de la definición formal. Cabe destacar que la mayoría de los conceptos matemáticos siempre son enseñados en referencia a conocimientos previos, y en el caso del límite, el alumno tiene algunas ideas, intuiciones, imágenes y conocimientos que provienen de experiencias personales. Este conocimiento no desaparece con una definición formal; más bien ésta es modificada y adaptada a la concepción personal del alumno. La formalización de este concepto en educación superior se basa en este significado; los estudiantes continúan confiando en su conocimiento previo después de analizada la definición formal. Por tal motivo es preciso conocer las concepciones de los alumnos que ya estudiaron la noción de límite con el fin de analizarlas como obstáculos cognitivos y generar vías para superar estos últimos.

Diversos autores (Sierpinska, 1985; Cornu, 1991; Williams, 1991; Tall, 1992; Sierra y otros, 2000; Szydlik, 2000) expresan que las dificultades de comprensión del concepto del límite que presentan los alumnos son difíciles de superar, aun cuando este concepto es considerado como central para el análisis matemático y aún cuando medien esfuerzos didácticos por lograrlo.

La razón de este problema radica en dos factores. Por un lado, la complejidad del propio concepto de límite. Por otro lado y en correspondencia con lo anterior, están las creencias o concepciones que los alumnos adquieren intuitivamente a partir de su experiencia de interacción con la realidad y con las ideas, o como consecuencia de los procesos de aprendizaje a los que son sometidos formalmente.

Los autores se refieren a este segundo aspecto con diversas expresiones, aunque en el fondo comparten las ideas: "concepto-imagen" (Tall, Vinner, 1981; Dreyfus, Vinner, 1989): imágenes mentales asociadas a las expresiones utilizadas para la introducción de un tema; "modelos expresados" (Robert, 1982): componentes del concepto, representaciones desarrolladas en la mente del alumno; "concepciones espontáneas" (Cornu, 1983): intuiciones, imágenes y conocimientos a partir de su experiencia diaria; "creencias sobre contenidos y sobre fuentes de convicción" (Szydlik, 2000): presunciones personales acerca de la naturaleza de la realidad, criterios que el sujeto considera pertinentes; "obstáculos epistemológicos" (Bachellard, 1987; Sierpinska, 1985): elementos esenciales e inevitables del conocimiento a construir y que pueden hallarse en el desarrollo histórico de tales conceptos, así como en los procesos de construcción individual de los mismos.

La referencia a lo histórico resulta fundamental y esclarecedora. El cuadro siguiente muestra lo que podría considerarse como el desarrollo histórico de la noción de límite (Edwards, 1979):

Eudoxo de Cnido (c.408-c.355 a.C.)	- Método de Exhaución - Horror al Infinito
Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.)	- Método de Compresión - Precursor de las técnicas de los indivisibles. - Horror al Infinito
Kepler (1571-1630) Cavalieri (1598-1647)	- Uso del método de los indivisibles - Oculta el papel de los procesos de paso al límite
Fermat (1601-65)	- Máximos y Mínimos aplicando $\frac{f(x+e)-f(x)}{e} \sim 0$ - No asegura que *e* sea pequeño, ni que debe tomarse el límite cuando *e* se aproxima a cero.
Wallis (1616-1703)	- Arithmetica Infinitorum - es usado de un modo algebraico. - Concepto aritmético de límite de una función como un número al que se aproxima la función de modo que la diferencia entre este número y la función puede hacerse menor que cualquier cantidad fijada de antemano y que se anularía cuando el proceso se continuara hasta el ∞.
Newton (1642-1727)	- Método de fluxiones - Uso de indivisibles, infinitesimales - Oculta el límite del cociente de diferenciales
Leibniz (1646-1716)	- Cálculo Infinitesimal - Oculta el uso de límite
Euler (1707-83)	- Concepto de función - El concepto de límite permanece oculto
D'Alembert (1717-83)	- Método para hallar las rezones 1ª y última de las fluxiones de Newton - Límite como aproximación e intraspasable
Cauchy (1789-1857)	- Cambio de definición de infinitesimal - Formula continuidad y diferenciabilidad en términos de límite
Weierstrass (1815-97)	- Concepto formal de límite $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < \lvert x-a \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x)-L \rvert < \varepsilon$

En cuanto al análisis de los obstáculos epistemológicos presentes en los procesos de construcción del concepto de límite en los alumnos, Sierpinska (1985) presenta estas categorías de obstáculos:

1. Horror infiniti (horror al infinito)
2. Ligados a la noción de función
3. Geométricos
4. Lógicos
5. Derivados del uso del símbolo.

Análisis de los resultados

Partiendo de estos antecedentes, se realiza este estudio (Hernández, 2000) en el que se pretende determinar las diferentes concepciones de los estudiantes de Educación Superior de Barquisimeto (Venezuela) acerca de la noción de límite y analizar los obstáculos epistemológicos presentes en tales concepciones. Para ello se seleccionó una muestra de cincuenta y nueve (59) alumnos –todos ellos con un primer curso de Cálculo aprobado- de dos de las principales universidades de Barquisimeto, configurada así:

Instituto	Alumnos - Semestre	Nº de Pruebas Aplicadas	Total
UPEL	Iniciales (4)	7	15
	Superiores (7)	8	
UCLA-Ciencias	Iniciales (2)	10	17
	Superiores (7)	7	
UCLA-Agronomía	Iniciales (2)	16	27
	Superiores (8)	11	
Total			59

UPEL: Universidad Pedagógica, Instituto Pedagógico de Barquisimeto
UCLA: Universidad Centrooccidental Lisandro Alvarado

El instrumento aplicado a los alumnos consistía en una primera parte (I) en la cual se le pedían los datos de identificación del estudiante y dos ítems con los cuales se pretendía obtener información acerca del conocimiento personal de la noción de límite. La segunda parte (II) del instrumento estuvo conformada por doce ítems relativos a situaciones en las que el alumno debía utilizar el concepto de límite para responder a cuestiones de carácter teórico o para resolver (con su correspondiente justificación) algunos ejercicios de cálculo de límite. Para el análisis de los datos se diseñaron tablas de frecuencia y porcentajes en las cuales se presentaba el número de respuestas obtenidas por cada ítem.

A continuación se presenta una tabla en la que aparece el número promedio de respuestas obtenidas en cada parte de la prueba (I y II), desglosado por categorías de estudiantes:

Parte	UPEL-I	UPEL-S	Total	Cs-I	Cs-S	Total	Agr-I	Agr-S	Total
I, F	5	7	12	8.5	4.5	13	10	9.5	19.5
I, %	71.4	87.5	80.0	85.0	64.3	76.5	62.5	86.4	72.2
II, F	2.9	6.3	9.2	5.9	6.3	12.2	5.8	5	10.8
II, %	41.7	78.1	61.1	59.2	89.3	71.6	35.9	45.5	39.0
T/E	7	8	15	10	7	17	16	11	27

F: Frecuencia promedio; I: Alumnos de semestres iniciales; S: Alumnos de semestres avanzados; Cs: UCLA-Ciencias; Agr: UCLA-Agronomía; T/E: Totales de estudiantes

El porcentaje global de ítems respondidos por toda la muestra es de 57.4%. Así, pues, casi la mitad de los ítems –en promedio- quedó sin responder. Y en cuanto al índice de respuestas por universidades, es relativamente bajo, particularmente en el caso del Decanato de Agronomía de la UCLA, donde los alumnos dejaron de contestar tres de cada cinco ítems de la Parte II. También se observa que, para toda la muestra, es mayor el porcentaje de respuestas dadas por los alumnos de semestres avanzados (69.2%) que de los semestres iniciales (48.1%).

Luego se procedió a estudiar las respuestas dadas por los estudiantes a cada ítem del instrumento, para lo cual se realizó un análisis cualitativo mediante la evaluación de las justificaciones presentadas por los alumnos en sus respuestas. Se trató de ubicarlas en alguno de los posibles criterios de concepción de límite, de acuerdo con la siguiente tabla de referencia:

Código	Concepción
1	- Formal: uso de y ; referencia a los entornos de ambas variables.
2	- Dinámica: referencia a movimientos de las variables, indistintamente de que se alcance o no el límite.
3	- Límite como cota, valor máximo infranqueable.
4	- Valor inalcanzable
5	- Predominio del infinito potencialmente actual: el límite se alcanza “en el infinito”
6	- Aproximación susceptible de hacerse tan exacta como se desee; proceso de inducción incompleta.
7	- Monótona Estática: después de cierto término, todos tienen igual valor.
8	- Transferir al límite las propiedades de los elementos.
9	- Transferir procedimientos algebraicos finitos a cantidades infinitas.
10	- Intentar el uso de alguna fórmula; entender el límite como valor de la función en el punto.
11	- Interpretaciones de carácter geométrico.
12	- Existencia de dos procesos diferenciados, uno por cada variable.
13	- Uso incorrecto de los cuantificadores.
S/J	- Sin justificación
N/C	- No contestó

Los resultados de este análisis llevaron a la construcción de la siguiente tabla, referida a la utilización de las diversas concepciones de límite (1 a 13) en cada uno de los ítems (I-1 a II-12) (la X en cada casilla indica presencia de la concepción en el ítem correspondiente):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I-1	X	X	X	X		X				X	X		X
I-2	X	X				X							
II-1	X	X	X			X							
II-2	X	X	X			X							
II-3	X												
II-4				X	X								
II-5												X	
II-6										X			
II-7		X		X		X						X	
II-8		X		X		X	X						
II-9						X							
II-10				X	X								
II-11	X	X				X				X	X		
II-12	X									X			

En esta tabla se puede observar que en 10 de los 14 ítems propuestos, los alumnos utilizaron varias concepciones para dar las respuestas a cada uno de los ítems, lo que indica que el formato del ejercicio determina el uso de la concepción; en otras palabras, "despierta" la concepción a utilizar. También se puede afirmar que las concepción 8 (transferir al límite propiedades de los elementos) se utilizó aisladamente y la concepción 9 (transferir procedimientos algebraicos) no se utilizó en ningún ítem.

Dada la variabilidad en el uso de las concepciones por ítem y por alumno en este estudio, se consideró como alumnos consistentes a aquellos que usan un mismo criterio de concepción en al menos un 50% de sus respuestas. Los resultados de clasificar a los alumnos desde esta perspectiva –consistencia en el uso de las concepciones- se presentan en la siguiente tabla:

Alumnos	Consistentes	Inconsistentes	N/C	Total
Fr	7	31	21	59
%	11.9	52.5	35.6	100

N/C: alumnos que dejaron sin responder más de la mitad de los ítems del instrumento.

Se puede observar que el número de alumnos inconsistentes es mayor (52.5%); esto indica que la mayoría de los alumnos utilizan varias concepciones al momento de resolver cualquier problema, sin ninguno que predomine, mientras que un 11.9% de los alumnos mantienen una concepción predominante dentro de la variabilidad de sus respuestas.

A modo de conclusión

Puede decirse que los resultados obtenidos en este trabajo ratifican los presentados por otros autores (Sierpinska, 1985; Mamona-Downs, 1990; Williams, 1991; Dibut y otros, 1996; Sierra y otros, 2000; Szydlick, 2000), en cuanto a que:

1. El enfoque centrado en el análisis de los obstáculos epistemológicos, elaborado desde una perspectiva histórica, resultó correcto y útil.
2. Existe diversidad de criterios de concepción de límite por parte de los estudiantes. Estos aplican varias concepciones para resolver los distintos problemas planteados. También se evidencia que el formato del ejercicio es el que estimula el uso de la concepción: de acuerdo con el ejercicio se utiliza la concepción que se crea conveniente.
3. En la mayoría de las tareas exigidas en los ítems propuestos, los estudiantes utilizan simultáneamente, en cada uno de ellos, varias concepciones de límite.
4. La definición formal de límite es reconocida como verdadera por la mayoría de los estudiantes (79,7%); pero cuando se trata de seleccionar espontáneamente la concepción que se estima como verdadera o práctica, la selección de la definición formal queda reducida a un 25% de la muestra.
5. Las concepciones utilizadas con más frecuencia en la resolución de problemas resultaron ser:
   - Concepción 2: Dinámica: referencia a movimiento de las variables, indistintamente de que se alcance o no el límite.
   - Concepción 4: Valor inalcanzable.
   - Concepción 6: Aproximación susceptible de hacerse tan exacta como se desee; proceso de inducción incompleta.
   - La concepción formal apenas se hace presente en la resolución de las tareas exigidas por los ítems.
6. El uso de estas concepciones lleva a concluir que uno de los obstáculos epistemológicos presentes en el estudiante es la ausencia del concepto de infinito actual.
7. Se destaca la incapacidad de los alumnos para responder el instrumento, incapacidad manifestada en el gran número de ítems sin respuestas, lo que evidencia dificultad en la comprensión de la noción de límite, aún después de la exposición del tema en el aula.
8. También se destaca la inconsistencia de las respuestas de los sujetos, puesta de manifiesto al resolver tareas referidas al mismo ejercicio presentado en distintos formatos.

Referencias bibliográficas

Bachellard, G. (1987). *La formación del espíritu científico*. México, Siglo XXI.

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles à l'apprentissage de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4.2, 236-268.

Cornu, B. (1991). Limits. En: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, Kluwer Academic Press, pp.153-166.

Dibut, L., Quiñones, F., Concepción, E., Colarte, T. (1996). El concepto de límite de una función en un punto mediante un hipertexto. *Revista EMA*, Vol.2, N1, 37-48.

Dreyfus, T., Vinner, S. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366.

Edwards, C.H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York, Springer Verlag.

Hernández, J.M. (2000). *Concepciones de los estudiantes de Educación Superior acerca de la noción de límite*. Barquisimeto, Maestría Interinstitucional de Matemática.

Mamona-Downs, J. (1990). Pupil's interpretations of the limit concept: a comparison study between greeks and english. *PME XIV*, pp. 69-76.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3.3, 307-341.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6.1, 5-67.

Sierra, M., González, M.T., López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y COU sobre límite funcional y continuidad. *RELIME*, Vol. 3, N° 1, 71-85.

Szydlik, J.E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 258-276.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. En: E. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 495-511. New York, MacMillan.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Williams, S.R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 219-236.

Pensamiento geométrico

Evaluación de la enseñanza de la Geometría utilizando un software asistente de Geometría

Ana Cecilia Rojas Torres y Martín Andonegui Zabala

Universidad Pedagógica Experimental Libertador,
Instituto Pedagógico de Barquisimeto Venezuela

anacrojas@hotmail.com ioritz@hotmail.com

Resumen

El trabajo evalúa desde una perspectiva constructivista el proceso de enseñanza de la asignatura Geometría I -utilizando el software Cabri Géomètre II- desarrollado con docentes en formación de la especialidad de matemática de la Universidad Pedagógica, Instituto Pedagógico de Barquisimeto (Venezuela). Se diseñaron instrumentos para recabar información sobre los siguientes aspectos: estrategias instruccionales utilizadas en el aula de clase y en el laboratorio de computación, diseño de la planificación del curso, y uso de procedimientos e instrumentos de evaluación. Analizada la información correspondiente, se llegó a concluir que, respecto a las estrategias utilizadas en el proceso de instrucción, se manifiesta el uso apropiado de algunas de ellas, como la formulación de preguntas insertadas y el procesamiento de respuestas. También se infieren deficiencias en la formulación de objetivos e insuficiencias en propuestas de descubrimientos. En la planificación se detectaron imperfecciones, al no ser dirigida a la construcción de conocimientos conceptuales y procedimentales que promuevan el aprendizaje significativo de los contenidos tratados. Con relación a las estrategias evaluadoras, se constata el buen uso de las técnicas y tipos de evaluación.

Antecedentes

En los últimos años, distintos autores han reconocido que el proceso de enseñar matemática no consiste solamente en el trabajo que realiza el docente en el aula, sino que se refiere también "a aquellos otros factores que intervienen y hacen posible que la matemática se enseñe y aprenda; estos factores son por ejemplo, el diseño y el desarrollo de planes y programas de estudio, los libros de texto, las metodologías de la enseñanza, las teorías del aprendizaje, la construcción de marcos teóricos para la investigación educativa" (Moreno y Waldegg, 1992, p.7).

De acuerdo con estas opiniones, la enseñanza de la matemática rompe los habituales esquemas de trabajo abriendo puertas que permiten hacer de esta disciplina una combinación de la matemática, la pedagogía y la didáctica general (Mora, 2000), dejando atrás las prácticas legendarias de la enseñanza de la matemática fundamentadas en la repetición de los contenidos por parte de los estudiantes, las cuales generan varios problemas, como lo afirma Morcote (1994, p.16): "Diversos estudios en algunos países permiten afirmar que, en un alto porcentaje, algunos de los más notables problemas de la Educación Matemática en todos los niveles son:

- Desmotivación del alumno hacia el aprendizaje de las matemáticas.
- Altas tasas de mortalidad académica.

- El fracaso en matemáticas produce un deterioro de la autoimagen de los alumnos perdedores.
- El temor a las matemáticas crea un obstáculo para el adecuado y oportuno desarrollo del pensamiento y, en consecuencia, de la personalidad.
- Se evalúan resultados, ante la falta de estrategias para evaluar procesos.
- El estudio de las matemáticas como acto mecánico y memorístico.
- La metodología más usual presenta al profesor "dictando clase" o exponiendo, y a los alumnos copiando o aprendiendo para un examen".

Atendiendo a la preocupación que genera en la comunidad de educadores de matemática esta lista de dificultades en el quehacer educativo, ha surgido la tendencia a enfocar la enseñanza desde un punto de vista constructivo. Desde esta perspectiva, "el aprendizaje no consiste en una mera copia, reflejo exacto o simple reproducción del contenido que debe aprenderse, sino que implica un proceso de construcción o reconstrucción en el que las aportaciones de los alumnos desempeñan un papel decisivo" (Coll, 2000, p. 19).

El enfoque constructivista considera que todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de estructuras cognoscitivas anteriores. La tarea del educador consistirá en diseñar y presentar situaciones que, apelando a las estructuras anteriores que sus discípulos poseen, les permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas relaciones asociadas a él (Moreno y Waldegg, 1992). En el constructivismo, el individuo no se limita a registrar la información que le llega del mundo exterior, sino que la transforma, ya que la recibe y la organiza de determinada manera según los esquemas mentales que posee; por ello se sostiene que la información que recibe la persona no tiene significado en sí misma, es él quien le otorga un determinado significado; por eso el aprendizaje escolar debe ser un proceso de construcción del conocimiento y la enseñanza se debe concebir como una ayuda a ese proceso de construcción (Coll, 2000).

Para realizar este tipo de enseñanza se necesitan diversas estrategias y herramientas que faciliten y estimulen la construcción del aprendizaje por parte de los estudiantes. Una de estas herramientas es el computador con un Software Educativo adecuado que, mediante la visualización de las estructuras matemáticas relacionadas con un concepto, permita la mejor interpretación del mismo. Sobre este particular Yábar y Estebe (1996, p.113) opinan que "la aparición de los ordenadores en las clases ha motivado el creciente interés por el desarrollo de la capacidad de representación visual. Se ha comprobado que existe una influencia de las representaciones visuales tanto sobre las representaciones simbólicas como sobre los procesos de abstracción". A este respecto, el software Cabri Géomètre II es considerado como una herramienta pertinente para enseñar Geometría, y es utilizado en diversas instituciones formadoras de docentes en Matemática.

Respecto a la matemática en general –y a la geometría en particular-, el papel de la pedagogía debe ser el de propiciar las condiciones que impulsen a los alumnos a construir las nociones necesarias para llegar a establecer relaciones lógicas inmersas en los conceptos matemáticos (Morcote, 1994). De hecho, a través de la historia se han originado diversos estudios matemáticos por la vía de construcciones de significados según la experiencia de los científicos en una determinada sociedad, como es el caso de la geometría egipcia, que se inició con problemas de medidas y añadió luego la necesidad de usar ciertas figuras mediante procesos constructivos -haciendo representaciones gráficas y esculturales-, y consiguió así resultados geométricos y aritméticos encontrados a partir de mediciones y sistematizaciones de ensayos y errores.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, resulta pertinente evaluar la enseñanza de la geometría impartida a los estudiantes de Docencia en Matemática, considerando que a esta asignatura, en los niveles de Educación Básica y Diversificada, se le da un escaso tratamiento que incide en la falta de madurez matemática de los alumnos (Planchart, 1990; Orellana y Moya, 1993). Estos futuros profesores serán agentes multiplicadores, y por ello deben adquirir los conocimientos, mediante el desarrollo de procesos y capacidades cognitivas que garanticen el aprendizaje efectivo de los contenidos geométricos.

La investigación: Objetivos y metodología

A este respecto, la investigación que se presenta es de carácter descriptivo evaluativo, ya que determinó y evaluó las estrategias utilizadas por una profesora en la enseñanza de la Geometría I utilizando el software Cabri Géomètre II. Se trata de un estudio de caso, referido a un curso de estudiantes de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica, Instituto Pedagógico de Barquisimeto (Venezuela), cursantes de la asignatura Geometría I -geometría euclídea referida a los tópicos de segmentos, ángulos, paralelismo y perpendicularidad, polígonos en general, triángulos y cuadriláteros.

Ahora bien, para la evaluación de la enseñanza de una asignatura desde una perspectiva constructivista, se deben considerar las estrategias docentes relativas a la planificación, a la instrucción y a la evaluación, realizadas a lo largo del curso. De aquí que los objetivos del estudio fueron:

- Analizar el proceso de planificación de los contenidos del programa de Geometría I.
- Analizar las estrategias instruccionales utilizadas en la enseñanza de la Geometría I utilizando el software Cabri Géomètre II.
- Analizar el proceso de evaluación del aprendizaje de la Geometría I utilizando el software Cabri Géomètre II.

En el estudio se utilizaron diversos instrumentos para alcanzar los objetivos propuestos. Para cumplir con los requerimientos del análisis del proceso de planificación de los contenidos del programa, se efectuó una revisión exhaustiva de toda la planificación de la asignatura, dirigida a la selección de los contenidos y la concordancia de cada tema con las actividades realizadas en clase, en la que se consideraron los lineamientos constructivistas descritos por Sánchez (1999):

- La situación presentada por la profesora.
- La representación que el alumno hace de esa situación
- La negociación que se llevará a cabo entre la profesora y el alumno
- Las transformaciones que sufrirá la situación presentada.
- El ajuste de ideas que se experimentará
- El refinamiento que sufrirán los conceptos
- La construcción de significados que se llevará a cabo.

Para analizar las estrategias instruccionales se utilizó como instrumento la siguiente tabla de clasificación de las estrategias de enseñanza según el proceso cognitivo elicitado (Díaz y Hernández, 1999):

Proceso cognitivo en el que incide la estrategia	Tipos de estrategia de enseñanza
Activación de los conocimientos previos	Objetivos o propósitos Preinterrogantes
Generación de expectativas apropiadas	Actividad generadora de información previa
Orientar y mantener la atención	Preguntas insertadas Ilustraciones Pistas o claves tipográficas o discursivas
Promover una organización más adecuada de la información que se ha de aprender (mejorar las conexiones internas)	Mapas conceptuales Redes semánticas Resúmenes
Potenciar el enlace entre conocimientos previos y la información que se ha de aprender (mejorar las conexiones externas)	Organizadores previos Analogías

Además se aplicaron sendos instrumentos de opinión a los estudiantes y a la docente, en cuyas respuestas se manifestaba su apreciación acerca del desempeño de la profesora y su juicio acerca de la asignatura.

Con relación al análisis de la evaluación se elaboraron tres instrumentos. Con el primero se indagó acerca de las técnicas de .evaluación utilizadas (informales, semiformales, y formales). Con el segundo, los tipos de evaluación (inicial o diagnóstica, formativa, y sumativa). El tercero sirvió para comprobar los modos de evaluar los diferentes tipos de contenidos desarrollados en el curso, de acuerdo con la siguiente guía (Barberà, 2000):

Tipos de contenidos	Posibles Instrumentos
Conceptuales	Mapas conceptuales, Cuestionarios cerrados con redes sistémicas, Analogías, Pruebas escritas variadas
Procedimentales	Observación, Evaluación por ayudas, Portafolios, Generación de preguntas, Investigaciones y proyectos
Actitudinales	Diario de clase, Libreta de matemáticas, Entrevistas

Después del análisis e interpretación de los datos se llegó a las siguientes conclusiones en cuanto al proceso de enseñanza desarrollado en el curso de Geometría:

En cuanto a las estrategias instruccionales, la profesora utilizó estrategias instruccionales constructivistas en los siguientes aspectos:

- En la activación de conocimientos previos y la generación de expectativas apropiadas, al referirse a contenidos estudiados en actividades anteriores, relacionándolos constantemente con los que se veían posteriormente.
- El uso constante de preguntas insertadas tanto en el aula de clase como en el laboratorio de computación orientó y mantuvo la atención de los alumnos en la mayoría de las actividades, al igual que el uso de ilustraciones y pistas tipográficas.
- En la construcción del conocimiento conceptual por parte de los alumnos fue acertada

su actuación en la formulación de preguntas y en el procesamiento de respuestas.
- La utilización de los errores se llevó a cabo de una manera productiva.
- Permitió el desarrollo de los conocimientos por parte de los alumnos en el aula de clase y en el laboratorio de computación, dejándoles espacios de tiempo en los ejercicios que se elaboraban.
- En la construcción del conocimiento procedimental, presentó suficientes ejercicios hipotéticos tanto en el aula como en el laboratorio de computación.
- En la construcción del conocimiento actitudinal, la profesora desarrolló constantemente paneles de discusión y elementos motivadores que inducían a los estudiantes a mantener una actitud positiva frente al desarrollo de la clase.

La profesora presentó deficiencias en el uso de estrategias instruccionales constructivistas en los siguientes aspectos:

- Respecto a la activación de conocimientos previos y a la generación de expectativas apropiadas, no formuló los objetivos o propósitos de los contenidos a tratar, al igual que no utilizó preinterrogantes tanto en el aula de clase como en el laboratorio de computación.
- En el aula, en ocasiones, las actividades se desarrollaban lentamente y, por ello, algunos estudiantes se distraían con facilidad perdiendo la atención de la clase.

En el aspecto relativo a la promoción de una organización más adecuada de la información que se ha de aprender, la ausencia del uso de resúmenes, mapas conceptuales y redes
- semánticas, así como las deficiencias en el uso de contraejemplos y situaciones imposibles, y en la variedad de representaciones conceptuales tanto en el aula como en el laboratorio de computación, no permitió mejorar el establecimiento de conexiones internas de la información a aprender.
- Fueron insuficientes las propuestas de descubrimiento presentadas a los alumnos, además del manejo inapropiado de las pocas oportunidades en que planteó situaciones para que los estudiantes construyeran el conocimiento conceptual utilizando estrategias de descubrimiento.
- En cuanto a la manifestación del conocimiento adquirido en el uso del Cabri Géomètre II, no aprovechó las herramientas que ofrece el software en la verificación de propiedades de los objetos en estudio, con el fin de orientar las demostraciones analíticas de los teoremas. También hubo deficiencias en la asignación de ejercicios propuestos, hecho que se presentó tanto en el aula como en el laboratorio de computación, lo que no permitió a los alumnos indagar en más conocimientos y madurar los contenidos ya estudiados.
- No presentó a los alumnos suficientes ejercicios de aplicación en la vida diaria; también hubo deficiencias en la relación concepto-producto y práctica en los realizados en el aula de clase. Tampoco fue suficiente la variedad de procesos de resolución de cada uno de los ejemplos y/o ejercicios desarrollados en clase, lo cual se reflejaba directamente en la actuación de los alumnos, quienes desarrollaban de la misma manera las asignaciones propuestas por la profesora.
- No utilizó estrategias como las analogías y los organizadores previos para potenciar

el enlace entre conocimientos previos y la información que se ha de aprender, lo cual no permitía a los alumnos tener una visión global del contexto en el cual se han de insertar los contenidos a aprender, así como disminuía la capacidad para trasladar la información nueva a otros ámbitos fuera del aula de clase.

En cuanto a la planificación de los contenidos, la actuación de la profesora no presentó características constructivistas. En escasas oportunidades las situaciones presentadas estaban dirigidas a orientar a los alumnos en procesos autónomos de aprendizaje, en los que pudieran presentarse transformaciones en las actividades propuestas que permitieran el ajuste de ideas y, con ellas, la construcción de aprendizajes significativos. Las propuestas de descubrimientos se observaron en pocas oportunidades en la planificación analizada.

En el uso del software Cabri Géomètre II en el laboratorio de computación se percibieron deficiencias muy marcadas en la planificación de las actividades, al no corresponder los contenidos dados en el aula con los trabajos en el laboratorio. Además se desaprovecharon en gran medida las herramientas que ofrece el software para realizar diversas representaciones conceptuales y procedimentales de los objetos geométricos con que se trabajó, siendo deficiente el establecimiento de conjeturas que permitieran al usuario convencerse de las propiedades y relaciones de los elementos en estudio, actividad que pudo haber orientado hacia las demostraciones y conclusiones analíticas, fortaleciendo así las construcciones del conocimiento matemático.

En relación con los procedimientos e instrumentos de evaluación, la profesora utilizó de manera constructivista las técnicas informales y semiformales, con excepción de la asignación de tareas a realizar fuera del aula de clase o del laboratorio de computación. En el uso de técnicas formales eligió las más apropiadas (pruebas tipos test, pruebas de ejecución y lista de cotejo), considerando la naturaleza de los contenidos y el hecho de trabajar con estudiantes universitarios.

En cuanto a los tipos de evaluación, el uso hecho por la profesora de la evaluación formativa y sumativa presenta las características de la evaluación constructivista, al evaluar constantemente los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales; sin embargo, presentó fallas al no utilizar la evaluación diagnóstica, desconociendo así cuáles eran los conocimientos que los alumnos tenían de los contenidos en estudio, lo que no ayudaba a utilizarlos como base para el proceso de aprendizaje.

A pesar del buen uso general de las técnicas y tipos de evaluación, no se observó en los estudiantes una actitud de reconocimiento y de valoración con relación a aprender cómo aprenden, aspecto esencial en los objetivos de la evaluación constructivista. Este hecho puede atribuirse a la falta de una planificación orientada hacia las construcciones y los descubrimientos que promuevan conocimientos conceptuales y procedimentales generadores de aprendizajes significativos.

Referencias bibliográficas

Barberà, E. (2000). Los instrumentos de evaluación en matemáticas. *Aula de Innovación Educativa*, 93-94, Julio-Agosto, 14-17.

Coll, C. (2000). Constructivismo e Intervención Educativa. En: *El Constructivismo en la práctica*, p. 11-32. Caracas, Laboratorio Educativo.

Díaz, F., Hernández, G. (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México, M^c Graw-Hill.

Mora, D. (2000). *La Didáctica de la Matemática*. Caracas, La Cosecha de Tebas. Centro de Investigaciones Educativas, Universidad Central de Venezuela.

Morcote, O. (1994). El constructivismo en la enseñanza de las Matemáticas. *Enseñanza de la Matemática*. Vol. 3, N° 3, 16-19.

Moreno A. L. Y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. *Educación Matemática*, Vol. 4, N° 2, 3-8.

Orellana, I. De, Moya, A. (1993). *La enseñanza de la Matemática en la Educación Básica y Media Diversificada y Profesional en Venezuela*. Barquisimeto, UPEL-IPB.

Planchart, E. (1990). Realidad de la enseñanza de la matemática en la EB y MD y P en Venezuela. *Acta Científica Venezolana*, 41, 279-282.

Sánchez, J. (1999). *Construyendo y aprendiendo con el computador*. Santiago de Chile, Centro Zonal Universidad de Chile.

Yabar M. J. Y Estebe, P. (1996). *Integración curricular de los recursos tecnológicos en el área de Matemáticas*. Barcelona, Oikos-Tau.

Análisis de los procesos deductivos en Geometría

Dones Gregorio Colmenárez Tovar y *Martín Andonegui Zabala*
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto Venezuela
ioritz@hotmail.com donescolmenarez@hotmail.com

Resumen

Este estudio tiene como objetivo primordial iniciar el análisis de los procesos deductivos en geometría utilizados por los docentes en formación en la especialidad de matemática. Para ello se analizaron el concepto y las funciones de la demostración, tanto en el ámbito de la matemática como en el de su enseñanza. En este marco se elaboró un instrumento conformado por 22 ítems, el cual fue aplicado a 26 estudiantes seleccionados al azar. Los datos fueron analizados a partir de la elaboración de tablas de frecuencias y porcentajes. Los resultados obtenidos revelaron poco éxito en los alumnos, fundamentalmente cuando se requiere construir una figura geométrica como soporte para la demostración. Además, las situaciones geométricas parecen resultarles más abstractas que las de la vida diaria. También se observó que los estudiantes presentan serias dificultades para concatenar los argumentos en la elaboración de demostraciones. Sin embargo, tienen claro el papel validador de la demostración en la construcción del conocimiento matemático.

Antecedentes acerca de la demostración

Dentro del cuerpo actual de los conocimientos matemáticos y desde una perspectiva epistemológica, la demostración ocupa un lugar central, ya que representa el procedimiento de validación de tales conocimientos y, como tal, caracteriza explícitamente la matemática en relación con otras ciencias experimentales. A este respecto, resulta ilustrativa la referencia de Dieudonné al afirmar que un matemático es alguien que ha publicado al menos la demostración de un teorema no trivial. Sin embargo, una revisión histórica de esta disciplina deja ver que no siempre se han manejado los mismos criterios de rigurosidad para "definir" una demostración, es decir, para considerar como válida una demostración. Arsac (1987) destaca la ausencia de estudios precisos sobre los problemas de forma y de lenguaje relativos a la demostración desde una perspectiva histórica.

Estas breves consideraciones previas obligan a clarificar el significado de la demostración matemática. A este respecto, puede resultar procedente la distinción que Balacheff (citado por Arsac, 1987) hace entre los conceptos de explicación, prueba y demostración. Por *explicación* entiende un discurso que tiene por objetivo hacer inteligible el carácter de verdad -presente en el que explica- de una proposición o de un resultado. Las razones sugeridas en el discurso pueden ser discutidas, aceptadas o rechazadas. Se denomina *prueba* a toda explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser objeto de un debate promovido por la exigencia de determinar un sistema de validación común para los interlocutores. Ahora bien, en el seno de la comunidad matemática sólo pueden aceptarse como pruebas las explicaciones que adopten una forma particular. Las *demostraciones* son pruebas constituidas por una serie de enunciados organizados de acuerdo a determinadas reglas.

De un modo similar, Duval (1999) distingue entre los procesos de argumentación y demostración. El primero coincide con el que Balacheff denomina explicación. Por su parte la demostración está fundamentada en argumentos de carácter heurístico y no retórico, cuya validez proviene del status teórico de axiomas, definiciones y teoremas, fijado previamente y aceptado unánimemente por la comunidad contemporánea de matemáticos.

En el ámbito de la educación matemática la demostración también se considera como un objeto matemático trascendente, que ha ido ganando el interés de los investigadores, por ser una herramienta privilegiada de validez matemática y porque son evidentes los fallos de los alumnos, tanto en la ponderación de su necesidad validadora como en su comprensión y construcción (Hanna, Jahnke, 1996; Godino, Martínez, 1997).

Estos dos últimos autores consideran la demostración matemática como objeto institucional y personal. Como objeto institucional, la demostración es portadora de distintos significados, según sea el contexto de referencia y de práctica –la vida cotidiana, la ciencia experimental, la lógica, la matemática profesional, la educación matemática-. Así, puede hablarse de diversos tipos de demostración matemática, en sentido amplio: informal, empírico-inductiva, deductiva informal, y deductiva formal. Como objeto personal, los autores destacan la construcción de diversos esquemas personales de demostración matemática en los alumnos.

En este mismo orden de ideas, De Villiers (1993) señala que, tradicionalmente, la función de la demostración ha sido considerada casi exclusivamente en términos de verificación (convicción o justificación) de lo correcto de una proposición matemática. La idea es que la demostración se utiliza principalmente para eliminar las dudas personales y/o las de los escépticos; una idea que ha monopolizado la práctica de la enseñanza y la mayor parte de las discusiones e investigaciones sobre su docencia. Sin embargo y según este mismo autor, las funciones de la demostración, sin orden específico de importancia y que deben ser tomadas en cuenta en el aula, son:

- Verificación (concerniente a la verdad de una afirmación).
- Explicación (profundizando en por qué es verdad).
- Sistematización (la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas).
- Descubrimiento (el descubrimiento o invención de nuevos resultados mediante el análisis de las restricciones impuestas en una prueba).
- Comunicación (la transmisión del conocimiento matemático).
- Autorrealización.
- Algoritmización y memorización.

Como resumen de las consideraciones anteriores, podemos acotar, con Martínez (1999, p. 2), que “la demostración matemática aparece como un objeto complejo, con variadas finalidades, con diferentes significados institucionales y personales, con cierto solapamiento semántico respecto a otros instrumentos validativos. Aparece sin un marco teórico suficientemente elaborado, capaz de integrar adecuadamente sus aspectos matemáticos y didácticos”.

Esta complejidad hace pensar que la adquisición de la capacidad de demostrar, por parte de los alumnos, responde a un proceso gradual, por etapas. Así, en el campo del desarrollo del razonamiento geométrico y para "demostrar" una propiedad, Van Hiele destaca que un sujeto puede verificar si se cumple en uno o varios ejemplos (nivel 2), o puede dar justificaciones de carácter general, referidas a toda una familia de objetos geométricos (nivel 3), o proponer una deducción formal (nivel 4) (Gutiérrez y Jaime, 1991).

De todas formas, las referencias apuntan a que el aprendizaje de la demostración es uno de los más difíciles para los alumnos. De hecho, las "demostraciones" aparecen como el área más desagradable para los alumnos de 17 años (Clements, Battista, 1992). Por su parte, Martínez (1999) reporta que, agrupada la muestra analizada en las dos fases de su investigación, sólo 186 de 622 estudiantes de nuevo ingreso a la educación superior (29.9%) alcanzaron un nivel básico de demostración matemática deductiva.

Específicamente en el campo de la geometría se puede reportar la aseveración de Vinner (citado por Tall, 1992), quien destaca cómo el recurso a la figura se presenta como un obstáculo de gran fuerza a la verdadera demostración en sentido formal, deductivo. A la misma conclusión arriba Noirfalise (1993). Por su parte, Senk (1989) llevó a cabo un estudio en el que pretendía establecer la relación existente entre los niveles de Van Hiele, los resultados en tareas de demostraciones geométricas escritas, y los resultados en actividades referidas a conocimientos geométricos (que no incluyeran demostraciones). Los resultados obtenidos reportan un 50% de éxito, aproximadamente, en ambos casos; también demostraron la existencia de correlaciones estadísticas significativas entre los resultados anteriores y la ubicación en los niveles de Van Hiele.

La investigación

En este estudio (Colmenárez, 2001) se analizaron los procesos deductivos en geometría, empleados por los docentes en formación en el área de matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto (Venezuela). Es de advertir que la investigación relativa al tema de la demostración es muy incipiente en este país y no se contaba con estudios locales previos de referencia.

La muestra estuvo conformada por 26 alumnos con cursos aprobados en geometría euclídea cuyos contenidos fundamentales son: ángulos, congruencia de triángulos, cuadriláteros, circunferencias, semejanzas de triángulos, y lugares geométricos, entre otros. El instrumento aplicado quedó estructurado en dos partes: la primera, en la que se presentaban los 10 primeros ítems de los 22 considerados; y la segunda, que estuvo conformada por 12 ítems, de los cuales 9 estaban referidos a tareas de demostración en geometría y 3, de opinión acerca de la demostración matemática en general.

Los aspectos a evaluar en los procesos deductivos empleados por los estudiantes –indagados en los 19 primeros ítems- estaban referidos a:

- La concatenación de argumentos: relativa a la presencia del orden correcto y al carácter deductivo de cada proposición en una demostración (C).
- El papel de la figura como soporte de la demostración: rol de la figura geométrica en cuanto objeto de estudio, argumentación y/o resultados a demostrar (F).
- Demostración como verificación: argumentar para hacer ver que el enunciado de la tesis es verdadero (V).
- Demostración vs. argumentación: uso de axiomas, teoremas y definiciones cuya

validez proviene de un cuerpo de conocimientos aceptados previamente, contra el uso de argumentos sin esa referencia teórica (DA).

- Criterio de autoridad: replicar una demostración dada por el docente en clase (A).

En la siguiente tabla se muestra la distribución de los ítems de acuerdo con estos aspectos:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
C	x	x	x	x		x	x	x	x	x				x	x	x	x	x	x
F	x		x		x								x						x
V			x		x								x						x
DA				x		x	x	x	x	x									
A	x																		

A continuación –y a modo de ilustración- se presenta uno de los ítems y la distribución de las repuestas de los estudiantes a dicho ítem:

"*Demostrar que al unir los puntos medios de dos lados de un triángulo se forma un segmento paralelo al tercer lado y que mide la mitad de este último*".

Tipos de respuesta	f	%
Respuesta correcta	1	3,8
Demuestra sólo una parte	3	11,5
Realiza una gráfica y no desarrolla la demostración	13	50
Realiza construcciones adicionales erradas	6	23,2
No responde	3	11,5
Totales	**26**	**100**

Se observa que sólo un (1) estudiante respondió correctamente este ítem. Se puede apreciar también que la mitad de los estudiantes sólo realiza una gráfica sin desarrollar la demostración, es decir, los estudiantes entienden el enunciado y lo traducen gráficamente, pero no dan ni intentan hacer la demostración, dejando entrever de alguna manera que la figura la sustituye.

Por otro lado, casi la cuarta parte (23,2%) de la muestra realiza construcciones que implícitamente consideran verdadero el enunciado de la proposición a demostrar; esto se debe quizás a que esta proposición se enuncia y se demuestra como un teorema en una de las asignaturas ya aprobadas por los estudiantes. Sin embargo queda claro que el recurso a la memoria no funcionó.

Para el análisis global, las categorías de respuestas previstas para los ítems de tareas de demostración fueron las siguientes –casi similares a las de Martínez (1999)-:

- Deducciones formales (DF)
- Deducciones informales (DI)
- Respuestas empírico inductivas: mero aporte de ejemplos o de figuras (EI)
- Respuestas deficientes (RD)
- No responden (NR)

Los porcentajes (redondeados) de las respuestas de la muestra –a los 19 ítems y en total-, distribuidos en sus respectivas categorías, se muestran en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	T
DF	4	35	81	19	4	4	42	11	8	4	4	-	4	-	23	4	4	8	73	17
DI	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	15	-	-	-	-	-	-	-	1
EI	50	-	-	19	4	23	4	8	8	8	-	-	27	-	-	-	-	-	-	8
RD	35	54	8	16	58	42	23	35	15	27	46	31	4	54	19	27	15	11	-	27
NR	11	11	11	46	34	31	31	46	69	61	50	54	65	46	58	69	81	81	27	47

En la siguiente tabla se muestran los resultados (en porcentajes) relativos a los aspectos a evaluar mediante los 19 ítems de tareas de demostración:

	Nº de Items	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas	No respondidas
Concatenación de argumentos: - dados desordenadamente - a construir previamente	 1 14	 34.6 20.3	 53.8 8.0	 11.5 71.7
Apoyo en la figura: - dada - a construir previamente	 6 7	 27.6 8.8	 32.0 35.1	 40.4 56.1
Demostración como verificación	4	40.4	25.0	34.6

A los datos anteriores hay que agregar la ausencia de argumentos explicativos, sin apariencia formal, en las respuestas de los alumnos. Ninguno de ellos se basó tampoco en argumentos de autoridad ("así lo demostró el profesor en su clase...") para validar los enunciados a demostrar.

Conclusiones

El análisis de los resultados presentados en las dos últimas tablas nos permite llegar a las siguientes conclusiones para el presente estudio:

- Sólo el 17% de la muestra utilizó deducciones formales en sus tareas de demostración, mientras que el 8% abogó por la figura como recurso validador. A destacar también que la cuarta parte (27%) intentó elaborar tales deducciones pero lo hizo deficientemente. Y, sobre todo, el alto porcentaje (47%) que no se sintió en capacidad de abordar estas tareas de demostración. En resumen, los resultados en nuestro medio parecen estar por debajo de los detectados por otros autores (Senk, 1989; Martínez, 1999).
- Las deducciones basadas en argumentos informales casi no tienen presencia en el estudio. Probablemente esto denota la convicción –entre los estudiantes- de su inutilidad en situaciones académicas.
- La diversidad en la distribución de los porcentajes para los diversos tipos de demostración en todos los ítems, hace resaltar la influencia de la variedad de las tareas a la hora de introducirse en procesos demostrativos.
- Las situaciones geométricas parecen resultar más abstractas que las de la vida diaria,

Referencias Bibliográficas

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 8-3, 267-312.

Clements, D.H., Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En: D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 420-464. New York, MacMillan.

Colmenárez, D.G. (2001). *Análisis de los procesos deductivos en Geometría. Caso: Docentes en formación en el área de Matemática de la UPEL-IPB*. Barquisimeto, Maestría Interinstitucional en Matemática.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, N° 26, 15-30.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J.D., Martínez, A. (1997). Meaning of proofs in Mathematics Education. En: E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th Internacional Conference of PME*, vol 2, pp. 313-321.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele. *Educación Matemática,* Vol. 3, Nº 2, p. 43-49.

Hanna, G., Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. En: A. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 877-908. Dordrecht, Kluwer.

Martínez Recio, A. (1999), *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* El Escorial, 1lI SIlDM.

Noirfalise, R. (1993). Contribution à la didactique de la démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9-3, 247-280.

Senk, S. (1989). Van Hiele levels and achievemertt in writing proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 309-321.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. En: D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 495-511. New York, MacMillan.

Incidencia de un software educativo en la evolución del razonamiento geométrico de estudiantes de educación superior

Elizabeth C. Graterol L. y Martín Andonegui Zabala
Universidad Pedagógica Experimental Libertador,
Instituto Pedagógico de Barquisimeto, Venezuela.
ioritz@hotmail.com

Resumen

El estudio tiene como principal propósito analizar la incidencia del desarrollo de un curso de Geometría que utiliza como herramienta instruccional el software educativo CABRI GÉOMÈTRE II, en la evolución del razonamiento geométrico de alumnos de Educación Superior. Tomando como base los niveles y fases del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, se realizó una categorización referente al grado de adquisición de un determinado nivel, en relación a la naturaleza de la tarea. Los resultados obtenidos en el análisis corroboraron las hipótesis de que el factor instruccional es necesario para el progreso entre etapas de aprendizaje y que existe lentitud en la maduración del razonamiento geométrico de los alumnos, a pesar de vivir experiencias de enseñanza estructuradas e intencionales. Además, el avance promedio es de una etapa y no se detectaron diferencias significativas entre los niveles en cuanto a los avances promedio en las etapas de aprendizaje. Se concluye que el modelo de análisis diseñado en el estudio parece pertinente, porque establece secuencias de etapas de aprendizaje adaptadas a la naturaleza de los ítems.

Antecedentes

Diversos estudios de carácter evaluativo realizados en Venezuela muestran que en los alumnos existen carencias en la capacidad de razonamiento geométrico. Entre tales estudios destacan el Diagnóstico relativo al nivel de conocimientos en Matemática en alumnos que egresaron del Ciclo Básico Común (9° grado de Educación Básica) en el año 1984 -el cual reporta que según las dificultades encontradas, el área de Geometría es considerada como crítica (Silva y Orellana, 1984)- y el reciente informe presentado por el Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (SINEA) -el cual muestra que en el análisis de las respuestas de los alumnos se refleja una gran deficiencia en cuanto a la interpretación de las características de figuras planas y en la identificación de los cuerpos geométricos, así como en el dominio de las relaciones espaciales (ME, 1999)-.

Lo antes descrito ratifica la aseveración presentada por Orellana y Moya (1992), quienes señalan que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la Educación Básica, Media y Diversificada venezolana, está llena de una "tediosa labor de cálculos aritméticos que desarrollan muy pocas destrezas y escasa capacidad de razonamiento" y que "el escaso tratamiento de la Geometría incide en la falta de madurez matemática de los alumnos y en su poca capacidad de razonamiento" (p.72, 84). Por otro lado, Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992) señalan que el alumno no está familiarizado con los procesos de abstracción y de razonamiento necesarios en la adecuada manipulación de conceptos geométricos (comprensión e interpretación).

Tomando en consideración lo anterior, se hace necesaria la revisión de elementos que optimicen la enseñanza de la Geometría. A tal respecto se plantea que entre las principales metas que deben alcanzarse con las nuevas tendencias en la enseñanza de la Geometría está la de propiciar el desarrollo del razonamiento lógico.

El razonamiento geométrico

Describir el razonamiento geométrico de un alumno no resulta tan fácil. Se han hecho algunos intentos al respecto. Entre ellos figura el modelo de razonamiento de van Hiele. Esta teoría describe las formas de razonamiento de los estudiantes de geometría. Aunque puede pensarse que el tipo de razonamiento es el mismo en cualquier parte de las matemáticas propias de las distintas áreas (Aritmética, Álgebra, Geometría, etc.), lo cierto es que se hallan algunas diferencias al abordar cada una de ellas (Jaime, Gutiérrez, 1995).

El modelo de van Hiele establece cinco niveles de razonamiento, los cuales se denominan "visualización o reconocimiento", "análisis", "clasificación o deducción informal", "deducción formal", y "rigor". El alumno, ayudado por diseños instruccionales apropiados, se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico (visualización) hasta el último (rigor), aunque pocos alumnos son capaces de alcanzar este nivel.

Además no puede dejar de observarse que el uso del computador en el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje cada día se hace más notable, debido a que constituye una valiosa herramienta a través de la incorporación de paquetes educativos que se utilizan de manera didáctica en las actividades escolares. Existen diversos paquetes educativos con propósitos muy bien definidos, como lo es el caso del CABRI GÉOMÈTRE II en la enseñanza de la Geometría. Este software permite planificar actividades para los estudiantes que tienen la finalidad de descubrir teoremas y resolver problemas a través de la exploración de las propiedades de configuraciones geométricas o para justificar la solución de un problema. "Pensar visualmente...parece ayudar al estudiante de cualquier edad a resolver un problema" (Mouses, 1992, p.65).

Esta visión es más difícil de transmitir por medio de construcciones hechas con lápiz y papel (Fritzler, 1997).

Hasta ahora se han presentado algunas ideas en torno a la naturaleza y características del razonamiento geométrico, su concreción en el modelo estructural de van Hiele, y la incidencia que sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría puede tener el uso de materiales interactivos, particularmente los que utilizan el formato del computador.

Es importante señalar que, además de lo acotado anteriormente, parece conveniente tomar en cuenta la orientación de las clases de Geometría hacia la aplicación de las Fases que deben cumplirse para obtener la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes y lograr el avance de un nivel de razonamiento a otro o en el mismo nivel, al ir cubriendo dichas fases (Jaime, Gutiérrez, 1995).

Existen reportes de investigaciones que han estudiado el progreso en el razonamiento geométrico de diversos alumnos, incluso por largos períodos de tiempo. Un ejemplo de esta naturaleza es el de Pyshkalo (citado por Hoffer, 1983), que reporta un progreso en los niveles de razonamiento geométrico, impulsado por una adecuada instrucción ajustada a las fases propuestas en el modelo de van Hiele. Es de hacer notar que en estos estudios y en otros de alcance más limitado (Cfr. Clements, Battista, 1992), el progreso al que se alude, casi siempre viene expresado y medido en forma de avance de un nivel a otro, o de consecución de determinado nivel. No existen casi referencias con relación al posible progreso dentro de un mismo nivel.

Dentro de este reducido grupo, se pueden mencionar dos estudios llevados a cabo por los mismos autores (Jaime, Gutiérrez, 1990; Gutiérrez, Jaime, Fortuny, 1991), en los que abordaron el problema de graduar, para cada alumno, el avance dentro del mismo nivel de razonamiento geométrico. Los autores plantean como hipótesis que la adquisición, por parte de un alumno, de un nivel de razonamiento, no acaece repentina sino progresivamente. Y que esa progresión marca diferencias en el "grado de adquisición" de un determinado nivel. De esta forma, se señala que el progreso puede ser reconocido por el modo como los estudiantes utilizan los tipos específicos de razonamiento propios de ese nivel.

Los autores proponen cinco intervalos para calificar los distintos grados de adquisición: Ausencia de adquisición, grado de adquisición bajo, grado de adquisición intermedio, grado de adquisición alto, y grado de adquisición completo. Para evaluar el intervalo al que podría remitirse a un alumno al desarrollar determinada actividad, los autores proponen una tipología relativa a las posibles respuestas que puede dar.

Este paradigma alternativo para evaluar el grado de adquisición o de progreso dentro de un nivel fue aplicado por los autores en dos oportunidades. Una, con una muestra de 19 estudiantes del bachillerato español, de 15 y 16 años de edad. Los contenidos evaluados se referían a tópicos de geometría plana: triángulos, cuadriláteros y polígonos en general (Jaime, Gutiérrez, 1990). Y otra, con una muestra de 50 estudiantes (41 docentes de primaria en formación y 9 alumnos de 8° grado). Los tópicos evaluados se referían todos a geometría espacial (Gutiérrez, Jaime, Fortuny, 1991). En ambos casos, los ítems propuestos estaban ubicados en distintos niveles del modelo.

El estudio: Objetivos y metodología

Tomando en cuenta las consideraciones realizadas, se realizó el presente estudio con el fin de evaluar la incidencia del desarrollo de un curso de geometría -que utiliza como herramienta instruccional el software educativo CABRI-GÉOMÈTRE II- en la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes de Educación Superior. Se consideró pertinente hacer un análisis previo y posterior al curso para determinar el nivel de razonamiento geométrico en ambas oportunidades y así poder comparar los niveles de razonamiento inicial y final de los alumnos consultados.

Para ubicar a cada sujeto no sólo en el nivel, sino también en su "grado de adquisición" del nivel, se consideró adecuado tomar en cuenta la naturaleza de la tarea (reconocimiento, construcción, explicación (análisis), demostración y medidas), el tópico particular al que se refiere la tarea (ángulos, paralelismo, polígonos, rectas, triángulos, entre otros) y, finalmente, una categorización de la etapa o grado de adquisición del nivel (de 0 a 4), relativa a la naturaleza de la tarea y a los distintos niveles de logro en su realización.

Tomando en cuenta estos criterios, se establece la siguiente matriz descriptiva referente al grado (etapa) de adquisición de un determinado nivel de razonamiento geométrico:

Naturaleza	0	1	2	3	4
Reconocimiento	No saben del tema	- No percibe todas las categorías de clasificación posibles de una figura (como cuadrado, rombo, rectángulo). - Lenguaje inadecuado (incorrecto)	- No percibe todas las categorías de clasificación posibles de una figura (como cuadrado, rombo, rectángulo). - Lenguaje adecuado.	- Reconocimiento completo de algunas figuras, pero no todas las posibles. - Lenguaje adecuado.	- Reconocimiento: - Completo de cada figura. - De todas las figuras posibles. - Lenguaje aducuado.
Construcción		- Construcciones erróneas o incompletas. - No existe dominio conceptual.	- Construceión con instrumento inadecuado. - Existe comprensión conceptual	- Construcción deficiente, con uso adecuado de instrumentos. - Existe comprensión conceptual.	- Construcción correcta, con uso adecuado de regla y compás. - Uso de notación pertinente (si procede). - Existe comprensión conceptual. 0
Explicación (análisis)		- Conceptos incorrectos por inclusión de alguna propiedad inadecuada, o por exclusión de alguna propiedad necesaria.	- Explicación incompleta. - Uso de sólo una figura como respuesta, sin argumentos formales.	- Explicación correcta. - Existe comprensión conceptual. - Lenguaje inadecuado, no matemático.	- Explicación correcta. - Lenguaje matemático adecuado. - Existe comprensión conceptual.
Demostración		- Referente conceptual incorrecto. - Argumentar sobre características de la figura (forma, medida, posición...)	- Referentes conceptuales parciales - (demostración incompleta).	- Referente conceptual pertinente. - Deficieneias en la concatenación argumental: Exceso, ausencia, saltos...	- Demostración correcta. - Referente conceptual pertinente. - Pasos justificados y precisos.
Medidas (Expresiones aritméticas)		- Referente conceptual incorrecto. - Medida directa sobre la figura.	- Referente conceptual adecuado. - Error en la incorporación a la "fórmula", de los elementos pertinentes del problema.	- Error de cálculo (en la aplicación de la expresión correcta). -Referente conceptual adecuado.	- Medida correcta, basada en referente conceptual adecuado.

Fuente: Martín Andonegui, Elizabeth Graterol, 2001

El estudio se enmarca dentro de los parámetros de una investigación explicativa de naturaleza de estudio de caso. La población que se tomó para la realización del estudio estuvo formada por los estudiantes de Educación Superior pertenecientes a la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto (Venezuela), en el año 2001. Se seleccionó una muestra representada por 17 alumnos –docentes en formación- cursantes de la asignatura Geometría I, ubicada en el segundo semestre de la especialidad de Matemática.

En el instrumento aplicado a la muestra en dos oportunidades de prueba (pre y post), se caracterizó cada ítem tomando como referencia: su contenido, la naturaleza de la tarea propuesta, y el nivel de razonamiento (según el modelo de van Hiele) en que se ubicó su resolución cabal, respectivamente.

La información obtenida mediante la aplicación del instrumento en el caso del pretest y luego en el caso del postest, se sintetiza en la siguiente tabla que contiene la descripción de los ítems según su Nivel, Naturaleza, Contenido, Tratamiento en el curso y variación en las etapas de aprendizaje:

	Nivel	Naturaleza del ítem	Contenido del ítem	Tratado en el curso	Ubicación promedio en la etapa (de 0 a 4)		
					Pretest	Postest	Variación
1a	1	R	A	Sí	1.6	2.8	1.2
1b	1	R	P	Sí	1.7	1.8	0.1
1c	1	R	F	No	1.1	1.5	0.4
2	2	E	R	Sí	1.0	1.5	0.5
3	2	M	A	Sí	1.3	3.5	2.2
4	2	E-C	T	Sí	1.5	2.1	0.6
5	3	E	C	No	1.0	0.6	-0.4
6	1	R	F	Sí	1.3	2.7	1.4
7	2	C	T	Sí	0.8	2.0	1.2
8	2	C	L	Sí	1.1	1.4	0.3
9	2	C	L	Sí	0.4	1.6	1.2
10	4	D	T	Sí	1.0	1.8	0.8
11	2	C	T	No	0.9	0.9	-
12	3	C	T	Sí	0.8	1.7	0.9
13	3	E	T	Sí	0.5	2.4	1.9
14	2	E	C	No	2.5	2.2	-0.3
15	2	C	C	No	1.1	1.4	0.3
16	4	D	B	Sí	0.2	1.1	0.9
17	2	C	A	Sí	0.9	2.1	1.2
18	4	D	T	Sí	0.3	0.5	0.2

Los códigos utilizados en las columnas son:

Contenido del ítem:	Naturaleza del ítem:
A: Ángulos. P: Paralelismo R: Rectas. L: Perpendicularidad. T: Triángulos. F: Figuras (en general). B: Bisección de segmentos. C: Cuadriláteros.	R: Reconocimiento C: Construcción. E: Explicación (Análisis). D: Demostración M: Medidas

Conclusiones

El análisis de los datos obtenidos mediante el estudio permite establecer las siguientes conclusiones:

- Se hace evidente en el estudio que el factor instruccional se halla presente en el progreso entre etapas de aprendizaje y que en su ausencia no se produce tal progreso, con lo que se corrobora en el estudio la hipótesis que al respecto formula van Hiele.
- Se confirma la hipótesis que plantea la lentitud en la maduración del razonamiento geométrico de los alumnos, a pesar de vivir experiencias de enseñanza estructuradas e intencionales. En el estudio se tiene que, en promedio, la muestra se hallaba inicialmente en la etapa 1 de aprendizaje –en los diversos niveles en los que se encuentran los ítems– y que después del proceso de enseñanza pasó a la etapa 2.
- Desde la perspectiva de la naturaleza de los ítems, se obtuvo un destacado avance en el ítem relativo a Medida (efectuada en referencia a fórmulas-expresiones aritméticas), que corresponde a dos etapas de aprendizaje. En los ítems de otra naturaleza (reconocimiento, construcción, explicación, y demostración) el avance fue de una etapa.
- No se detectaron diferencias significativas entre los niveles, en cuanto a los avances en promedio en las etapas de aprendizaje; en todos ellos el avance es aproximadamente de una etapa: De la 1 a la 2 para los niveles 1, 2 y 3, y de la 0 a la 1 para el nivel 4.
- El mayor grado de avance se produce en el tema de Ángulos, en el que el promedio de los alumnos pasa de la 1ª a la 3ª etapa de aprendizaje. Los progresos de una sola etapa se presentan en los tópicos de Rectas, Perpendicularidad, Triángulos, Figuras en general, y Bisección de segmentos; en este último caso el tránsito va desde la etapa cero a la etapa uno. No se detectó avance en los contenidos referentes a Paralelismo y Cuadriláteros.
- Este estudio del avance en promedio de etapas de aprendizaje, según el contenido de los ítems, refleja también que el curso no produce efectos de transferencia de aprendizaje de unos tópicos a otros, probablemente porque los tópicos de geometría se perciben y manejan aislados, separados unos de otros.
- El avance en promedio en la categoría Reconocimiento -después de la instrucción- se sitúa en el uso de un lenguaje adecuado; pero los alumnos no perciben todas las categorías de clasificación posibles de una figura, con lo que no logran llegar al reconocimiento completo de algunas figuras.
- El avance en promedio en la categoría Construcción -después de la instrucción- se ubica en las construcciones con instrumentos inadecuados, con comprensión conceptual de la tarea. Pero el grupo no llega siquiera a la realización de construcciones deficientes con uso adecuado de instrumentos.
- El avance en promedio en la categoría Explicación (análisis) -después de la instrucción- abarca las explicaciones incompletas con uso de sólo una figura como respuesta, sin llegar siquiera a la explicación correcta con lenguaje inadecuado, no matemático.
- El avance en promedio, en la categoría Demostración –después de la instrucción- se sitúa en la argumentación sobre características de la figura (forma, medida, posición) con un referente conceptual incorrecto; no llega a abarcar la etapa de demostración incompleta con referentes conceptuales parciales.

- El uso del software CABRI GÉOMÈTRE II como herramienta instruccional en el curso, tal como fue planificado y ejecutado, no muestra incidencia en la evolución del razonamiento geométrico de los alumnos en estudio.
- Son muy pocos los alumnos que logran llegar a la máxima etapa de aprendizaje (etapa 4); se tiene por ejemplo, que en los ítems de naturaleza explicación, de 170 posibles respuestas que se obtienen al agrupar todos los tratados en ambas oportunidades de prueba, sólo 12 ítems están ubicados en dicha etapa.
- Finalmente, puede concluirse que el modelo de análisis diseñado en el estudio es considerado pertinente, porque ratifica las hipótesis generales sobre la instrucción, y establece secuencias de etapas de aprendizaje adaptadas a la naturaleza de los ítems.

Referencias bibliográficas

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En: D.A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 420-464. New York, MacMillan.

Fritzler, (1997). Triángulos y Cuadriláteros Inscritos en un Círculo. Una aplicación del Software Educativo "Cabri Géomètre". Notas de clase. *Educación Matemática*, Vol. 9, Nº 2, 116 – 122.

Graterol, E. (2001). *Incidencia de la administración de un curso de Geometría, que utiliza como herramienta instruccional el software educativo Cabri Géomètre II, en la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes de Educación Superior (Caso UPEL - Barquisimeto)*. Barquisimeto, Maestría Interinstitucional en Matemática.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the van Hiele Levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 237 – 251.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele – Based Research. En: R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* p. 205–227. New York, Academic Press.

Jaime, A. & Chapa, F. y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de Triángulos y Cuadriláteros: Errores e Inconsistencias en Libros de Texto de E.G.B. *Epsilon*, Nº 23, 49 – 62.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Un estudio de los grados de adquisición de los niveles de van Hiele en los estudiantes de Escuela Secundaria. *PME 14*, Vol. II, 251-258.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1995). *El Grupo de las Isometrías del Plano*. Madrid, Síntesis.

Silva, M. y Orellana I. (1984). *Diagnóstico del Nivel de Conocimientos en Biología, Ciencias de la Tierra, Física, Uso Instrumental del Lenguaje, Matemática y Química, en Estudiantes que Egresan del Ciclo Básico Común de Educación Media.* Año Escolar 1983-1984. Caracas, OPSU-CENAMEC.

Análisis de los contenidos geométricos de los libros de texto de Matemática de Educación Básica a la luz de los planteamientos teóricos del modelo de Van Hiele

Jenny Pérez Yánez y Martín Andonegui Zabala
Universidad Pedagógica Experimental Libertador,
Instituto Pedagógico de Barquisimeto. Venezuela.
jennypyanez@hotmail.com ioritz@hotmail.com

Resumen

El modelo de Van Hiele aporta una descripción del proceso de aprendizaje de la Geometría postulando la existencia de unos niveles de pensamiento, que suponen unas formas peculiares de razonar. Para este trabajo se extrajeron los principales descriptores característicos de cada nivel de razonamiento geométrico y se operacionalizaron a través de cuatro tipos de instrumentos que recogen los datos de los contenidos específicos de los textos en cada grado. La muestra estuvo constituida por 24 libros de texto de Matemática de Educación Básica (grados 1 a 9), de uso frecuente en el sistema educativo venezolano. Los resultados obtenidos confirman el desarrollo de niveles de razonamiento geométrico, desde el nivel 1 (visualización) hasta el nivel 3 (deducción informal) en los contenidos presentes en los textos analizados, a excepción de los contenidos de triángulos y rectas, que se desarrollan hasta el nivel 4 (deducción formal). También reflejan que, en general, los contenidos geométricos presentes en la colección de textos analizados siguen un patrón bastante consistente y que el nivel de razonamiento requerido se incrementa gradualmente, obteniéndose un progreso de los niveles presentes en la secuencia ascendente de los textos.

Antecedentes

Los graves problemas detectados en el aprendizaje de la matemática en el nivel básico se han hecho evidentes, recientemente y una vez más, en el informe presentado por el Sistema Nacional de Medición y Evaluación de Aprendizaje (SINEA, 1998), el cual evaluó las competencias que poseen los alumnos de tercero, sexto y noveno grado de la Educación Básica venezolana en esta área. En particular, en los contenidos de Geometría, los alumnos obtuvieron un nivel de no logro.

Estos resultados posibilitan una profunda reflexión acerca de la actuación diaria del docente y fundamentalmente sobre la metodología empleada en el aula, los recursos que utiliza y su incidencia en el aprendizaje de la geometría.

Entre estos recursos ocupa un lugar predominante el libro de texto La mejora de los resultados en el aprendizaje de la geometría, es un objetivo que lleva a plantearse si el uso del libro de texto facilita al docente y al alumno la posibilidad de desarrollar el razonamiento geométrico.

Entre los pasos que se han dado para ayudar al docente a comprender situaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría, figura la aportación de Pierre y Dina van Hiele, conocida en el ámbito mundial con el nombre de Modelo de van Hiele, en el cual se describe cómo evoluciona la forma de razonar de los estudiantes en geometría y da pautas para la organización de las clases, en orden a conseguir un desarrollo efectivo de la capacidad de razonamiento geométrico de los alumnos.

Según este modelo, el razonamiento geométrico se desarrolla en una secuencia de niveles, en la que cada nivel es un refinamiento del anterior y está caracterizado por un lenguaje particular, por unos símbolos y unos métodos de inferencia específicos. Debido a las particularidades de cada nivel, la instrucción es más efectiva si está cuidadosamente dirigida a cada uno de ellos. Los niveles se pueden clasificar como: Nivel 1(de Reconocimiento Visual), Nivel 2 (de Análisis), Nivel 3 (de Clasificación y Relación), Nivel 4 (de Deducción Formal) y Nivel 5 (de Rigor) (van Hiele, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1996). Es importante subrayar que el progreso en la comprensión de los conceptos geométricos siempre se produce desde el primer nivel y de manera ordenada, a través de los niveles siguientes. Para que los estudiantes se desempeñen adecuadamente en uno de los niveles avanzados deben haber dominado los niveles previos. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles ya que cada nivel lleva asociado un lenguaje y el paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua y pausada.

Partiendo de esta conceptualización, se analizaron los contenidos geométricos presentes en los libros de texto de matemática de Educación Básica a la luz de los planteamientos teóricos del Modelo de van Hiele. Es necesario destacar que no existen en el medio escolar venezolano libros de texto dedicados exclusivamente al área de la geometría. Los tópicos propios de este campo se hallan esparcidos en los textos escolares de matemática de los diferentes grados. Sin embargo, es posible establecer precisiones en relación a lo que podría esperarse del tratamiento de los temas geométricos en tales textos generales.

Son muchos los aspectos a considerar a la hora de elaborar o evaluar un texto de geometría. Por esta razón, para plantear el análisis correspondiente se tomaron como referencias las proposiciones de van Dormolen (1986) y van Hiele (van Hiele, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1996; Fuys et al., 1988), así como las de otros autores (Noirfalise, 1993; Prendes, 1996; Martínez y Porras, 1998).

Partiendo de los planteamientos de van Dormolen (1986), en los textos relativos a geometría deberían resaltar los puntos focales destacados por el autor:

- Los elementos nucleares: expresiones generales a ser aprendidas como conocimiento en sus diversos tipos: teóricos, algorítmicos, lógicos, metodológicos y comunicativos.
- Los elementos no nucleares: ejemplos, explicaciones, ejercicios, problemas.
- El tratamiento del contenido geométrico de un modo consistente, claro y genuino.
- El ajuste al paso del proceso de aprendizaje en sus fases globales: preparación y motivación, presentación y asimilación del contenido nuevo, consolidación y aplicación de lo aprendido.
- La presencia de una secuencia progresiva en el tratamiento de los diversos tópicos geométricos considerados en los textos; presencia a considerar no sólo en cada texto, sino en posibles colecciones de los mismos.
- El manejo del lenguaje en sus diversos niveles (demostrativo, relacional y funcional, en lo que sean posible según el nivel de grado escolar considerado), modalidades (escrito, visual) e intencionalidades (descriptiva, procedimental).
- La medida en la que el texto puede ser manejado de manera autónoma por el alumno.

Noirfalise (1993), por su parte, expresa que el análisis de un texto de geometría debe dirigirse a la búsqueda de las regularidades presentes en los modos de funcionamiento del saber geométrico allí presente. Esto implica dirigirse no sólo al discurso, sino también a lo que él denomina otros objetos paramatemáticos, tales como las figuras y construcciones geométricas (con regla y compás), y los enunciados de resultados. Esta llamada de atención sobre figuras y construcciones ha sido formulada también por otros autores. Entre ellos, Martínez y Porras (1998) previenen acerca del riesgo de la presentación ostensiva de las nociones geométricas en los textos elementales, es decir, del riesgo de convertir los dibujos en el propio objeto de estudio de la geometría, olvidando que la figura no es tanto la representación de un objeto, sino del espacio ocupado por el mismo y que, por tal razón, las figuras deben ser entendidas como fórmulas dibujadas a las que es preciso dotar de significado geométrico.

Desde otra perspectiva, Prendes (1996) también llama la atención sobre la importancia de las imágenes (en general) al interior de los textos y de su relación con el discurso escrito, y sugiere que su análisis no debe reducirse a su configuración gráfica, sino alcanzar también la vertiente de su funcionalidad didáctica.

Como puede apreciarse por lo expuesto hasta ahora, son muchos los aspectos a considerar a la hora de elaborar o de evaluar un texto de geometría. Es en este contexto en el que se inserta la posible evaluación de tales textos desde la perspectiva del modelo teórico de van Hiele.

La investigación

Este estudio se enmarcó dentro de la modalidad de investigación descriptiva. La muestra estuvo constituida por 24 libros de texto de Matemática de Educación Básica (grados 1 a 9) de los más usados en los centros educativos del área metropolitana de Barquisimeto Venezuela). Se escogieron así textos de tres editoriales -Excelencia, Santillana y Educación Básica 1- consideradas por su reconocida trayectoria en la enseñanza de la matemática y su disponibilidad en el mercado.

Se utilizaron cuatro tipos de instrumentos -uno para cada nivel de razonamiento- representados por matrices de recolección de datos. En las filas de estas matrices se especificaron los descriptores característicos de cada nivel de razonamiento; y en sus columnas, los diversos contenidos correspondientes a cada grado. Como ejemplo, indicamos los descriptores del Nivel 1 (Visualización):

- Manejan objetos reales observados globalmente y como unidades.
- Identifican figuras o relaciones geométricas
  - En dibujos
  - En conjuntos determinados.
  - Con orientaciones variadas.
  - De objetos físicos que rodean al alumno.
- Describen figuras geométricas por su aspecto físico.
- Diferencian o clasifican con base en semejanzas y diferencias físicas globales entre ellos.
- Crean formas:
  - Usando papel cuadriculado, papel isométrico, geoplanos, etc.
  - Construyendo figuras con fósforos, palillos, plastilinas, ...

- Utilizan vocabulario geométrico para hablar de las figuras o describirlas, acompañado de otros términos de uso común que sustituyen a los geométricos.
- Trabajan con problemas que pueden ser resueltos por la vía de la manipulación de objetos concretos.
- Presentan actividades de manipular, colorear, doblar, cortar y modelar figuras.

Los contenidos de los nueve grados son los siguientes: Ubicación en el espacio (A), Cuerpos geométricos (B), Polígonos en general (C), Ángulos (D), Triángulos (E), Cuadriláteros (F), Circunferencias y círculos (G), Simetrías (H.1), Traslaciones (H.2), Rotaciones (H.3), Homotecias (H.4), Área de figuras planas (I), Volumen de cuerpos sólidos (J), Rectas (K), y Vectores (L).
En cada casilla de estas matrices se evaluó la presencia del correspondiente descriptor –total (T) o parcial (P)-, o su ausencia (N).

Conclusiones

El análisis de los datos obtenidos permite establecer las siguientes conclusiones:

- Los resultados obtenidos confirman el desarrollo de niveles geométricos desde el nivel 1 (visualización) hasta el nivel 4 (deducción formal) en los contenidos de los textos analizados, tal como se puede observar en.la siguiente tabla:

Tabla 1. Presencia de los niveles en los textos de cada grado

Niveles	Grados								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	x	x	x	x					
2		x	x	x	x	x	x	x	x
3					x	x	x	x	x
4								x	x

Fuente: Jenny Pérez, 2001

- Obsérvese que la presencia del nivel 1 llega hasta 4to grado, que el nivel 2 abarca desde 2do hasta el 9no grado, que en 5to grado se presentan las primeras propuestas relativas al nivel 3 de razonamiento, y que el nivel 4 apenas se asoma en los dos últimos grados.

- Los contenidos geométricos presentes en la colección de textos analizados siguen un patrón bastante consistente, y el nivel de razonamiento requerido se incrementa gradualmente.

- Sí hay progreso en el tratamiento de los temas al pasar en los textos de un grado a otro, como se observa en la siguiente tabla:

Tabla 2. Porcentaje de presencia de los descriptores de cada nivel en los textos de cada grado, por editoriales (1, 2 y 3) y en promedio (Pr)

Grados	Nivel 1				Nivel 2				Nivel 3				Nivel 4			
	1	2	3	Pr*	1	2	3	Pr*	1	2	3	Pr*	1	2	3	Pr*
1	66	85	72	74												
2	68	66	58	64	37	17	47	34								
3	56	83	73	71	53	42	58	51								
4	74	77	64	72	82	75	72	76								
5					96	96	96	96	59	56	63	59				
6					81	81	92	85	50	42	57	50				
7**					89	93		91	54	52		53				
8**					87	84		86		49		49		25		25
9**						89		89	56	61		59	62	32		47

Fuente: Jenny Pérez, 2001

* Las columnas Pr contienen los valores promedios correspondientes a los 3 textos, en cada grado y nivel.

** En 7mo, 8vo y 9no grado sólo se dispuso de los textos 1 y 2

- Los descriptores propios de cada nivel aparecen con su máxima presencia del siguiente modo:

- los del nivel 1: 1er grado (texto 2), 3er grado (texto 2) y en 4to grado (texto 2).
- los del nivel 2: en 5to grado en los tres textos.
- los del nivel 3: en 5to grado (textos 1 y 3) y en 9no grado (texto 2)
- los del nivel 4: en 9no grado (texto 1)

- Los niveles predominantes en los textos de cada grado son:

- el nivel 1, en los textos de 1er a 3er grado
- el nivel 2, en los textos de 4to a 9no grado.

Esto indica que para la comprensión de la mayor parte de los contenidos geométricos presentes en los textos analizados bastaría con ubicar a los estudiantes en el nivel 2 de razonamiento geométrico.

- Desde el punto de vista de los textos que se manejan destacan los siguientes grados críticos:

- 1er grado, ya que el nivel 1 alcanza en él, en promedio, su valor máximo de presencia
- 4to grado, porque en él se produce el cambio de predominio del nivel 1 al 2
- 5to grado, por la máxima presencia que alcanza en este grado el nivel 2 (en

todos los textos) y el nivel 3 en el texto 1

- 9no grado, por marcar pauta en el inicio del desarrollo del nivel 4.

- Hay razonamientos simultáneos o alternativos en dos niveles, por lo que el paso de un nivel a otro se produce continua y pausadamente en algunos grados, en especial de la primera (grados 1 a 3) a la segunda (grados 4 a 6) etapa de Educación Básica, que desarrollan niveles 1 y 2, y en la segunda y tercera (grados 7 a 9) etapas de Educación Básica, que desarrollan niveles 2 y 3.- Los contenidos geométricos presentes en los libros de texto de Matemática de la primera, segunda y tercera etapa de Educación Básica, a excepción de los contenidos de triángulos (E) y rectas (K), se desarrollan secuencialmente desde el nivel inicial o básico (visualización) hasta el tercer nivel (deducción informal).
- Los contenidos de triángulos (E) y rectas (K) son los únicos que se desarrollan desde un nivel 1(visualización) hasta el cuarto nivel (deducción formal).
- En 8vo grado de Educación Básica se altera el orden de adquisición de los niveles en los contenidos referidos a vectores (L), rotaciones (H.3) y traslaciones (H.2), ya que de entrada estos contenidos se sitúan en un nivel 2 sin antes desarrollar aspectos referidos al nivel 1. Igualmente ocurre con el tema de áreas (I) en 5° grado y de volúmenes (J) en 6° grado. Este tratamiento contradice el supuesto teórico de que para alcanzar un nivel de razonamiento, es necesario haber adqüirido los anteriores.
- Se pierde proximidad en la secuencia de niveles en algunos contenidos, particularmente en los de simetría (H.1) y de rectas (K), que se presentan muy temprano en un nivel 1 ó 2 y luego de 3 ó 4 años son retomados nuevamente.
- En el 9no grado de Educación Básica, algunos contenidos están referidos a un nivel 4 de razonamiento geométrico, ya que desarrollan algunos de los descriptores propios de este nivel, pero no lo hacen cabalmente; es decir, se establecen demostraciones resueltas formal pero mecánicamente, ya que no permiten adquirir una visión global para demostrar un resultado de diferentes formas a partir de premisas distintas.
- Los descriptores propios de los tres primeros niveles, menos desarrollados en los textos analizados, son:

a. En el Nivel 1:

- Identificar figuras o relaciones geométricas en conjuntos determinados o con orientaciones variadas.-
- Crear formas usando geoplanos, papel cuadriculado o isométrico.
- Construir figuras con materiales diversos.
- Trabajar problemas que pueden ser resueltos por la vía de la manipulación de objetos concretos.

b. En el nivel 2:

- Descubrir propiedades de figuras específicas, empíricamente, y formular generalizaciones acerca de propiedades de figuras mediante comprobaciones.

c. En el nivel 3:

- Seguir razonamientos geométricos buscando en ellos algunos pasos que falten.
- Descubrir nuevas propiedades usando razonamientos deductivos.
- Trabajar y discutir situaciones que presentan proposiciones y sus inversas.

- Suministrar situaciones para dar más de una explicación o aproximación.

- En cuanto al nivel 4 de razonamiento geométrico, en los textos analizados sólo se desarrollan aspectos relativos a crear demostraciones a partir de un sencillo conjunto de axiomas, usando frecuentemente un modelo para sustentar los argumentos.
- Los textos analizados carecen de actividades instruccionales para ayudar a los estudiantes a desarrollar niveles altos de razonamiento geométrico.

Referencias bibliográficas

Fuys, D. & Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph N°3*. Reston, NCTM.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid, Síntesis.

Martínez, R. y Porras, M. (1998). La presentación ostensiva de las nociones geométricas en los textos de la escuela elemental. *Revista Educación*, Vol. 10, N°3, Diciembre, 8-24.

Noirfalise. R. (1986). Contributión à l'étude didactique de la démonstratión. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13-3, 229-256.

Otte, M. (1986). What is a text?. En: B. Christiansen et al. (Eds), *Perspectives on Mathematics Education*, p. 173-203. Boston, D. Reidel, Publ.

Prendes, M. (1996). Análisis de imágenes en textos escolares. *Revista de Medios y Educación*, N° 6, Enero, 15-39.

SINEA (1998). *Informe para el docente*. Caracas, Ministerio de Educación, Oficina Sectorial de Planificación y Presupuesto.

Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En: B. Christiansen et al. (Eds), *Perspectives on Mathematics Education*, p. 141-171. Boston, D. Reidel, Publ.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*. London, Academic Press.

Pensamiento variacional

La noción de convergencia mediada por visualización

Ricardo Cantoral y Flor Rodríguez
Cinvestav – IPN, México.
frodrig@mail.cinvestav.mx

Resumen

El presente estudio parte del supuesto de que la visualización es una forma de desarrollar el pensamiento matemático. Proyectamos la investigación hacia una ingeniería didáctica, por la cual se generen procesos de visualización recurriendo a la capacidad de una herramienta tecnológica.

El propósito didáctico es proporcionar al estudiante un medio para dirigirlo hacia el significado de convergencia de sucesiones de funciones a partir de procesos recursivos. Apoyamos la investigación sobre el contenido del teorema del punto fijo, el cual afirma que existe solución única de la ecuación cuando f satisface ciertas condiciones. Pretendemos formar en el estudiante la noción de convergencia expuesta en dicho teorema, enfocando la atención en el papel que juegan las nociones de punto fijo y derivada en él.

Introducción

En el análisis numérico es de fundamental importancia tratar con tópicos como la teoría del caos y los fractales, temas de los cuales se nutre esta investigación a pesar de no ser enseñados propiamente en el aula. El contenido principal que comprende dicha rama de las matemáticas refiere al comportamiento de sucesiones que son generadas a partir del trabajo de la iteración de funciones, lo cual implica que sea la convergencia o divergencia de sucesiones estudiada bajo este régimen, tema que es de fundamental importancia en el ámbito educativo. Así, nos damos a la tarea de estudiar el tema de la convergencia y divergencia de sucesiones posicionándonos en el análisis numérico.

Una de las variables que se encuentra tanto en los fractales como en la teoría caótica es que tratan con sistemas impredecibles aunque los sistemas tienen componentes predecibles. La predicción, del latín *praedicere* significa conjeturar algo que ha de suceder, esquemáticamente este hecho puede caracterizarse en:

PREDICCIÓN $\begin{cases} \text{DETERMINISTA} \\ \text{INDETEMINISTA} \end{cases}$

Esta clasificación nos lleva a indagar sobre una pregunta de corte didáctico: *¿Cómo los estudiantes podrían predecir la convergencia o divergencia de una sucesión recurrente utilizando estrategias de visualización?*

Para contestar a la pregunta, estamos convencidos que la tecnología favorecerá el desarrollo de procesos de visualización dentro de la temática que estamos trabajando, Devaney (1990) asegura que el proceso de *iteración* que pertenece a un aspecto de los sistemas dinámicos es imposible trabajar sólo con lápiz y papel, pero que es extremadamente fácil trabajar la iteración con calculadora o computadora.

El Teorema del Punto Fijo

Se sostiene que una de las propiedades más importantes y más comunes para justificar los métodos iterativos es el Teorema del Punto Fijo de una Contracción. Tal teorema afirma que dada una función F, ésta tendrá un único punto fijo de convergencia, es decir, que habrá un valor de x tal que $F(x)=x$.

Algunos libros de análisis numérico generalmente lo presentan como:

Teorema del Punto Fijo de una Contracción.

Sea $F(x)$ una función continua definida en algún intervalo $a \le x \le b$, tomando sus valores adentro del mismo intervalo, $a \le F(x) \le b$. Supóngase que para alguna constante se tiene,

$$|F(x)-F(y)| \le K\,|x-y|$$

para todo x,yen este intervalo. Entonces F tiene un único punto fijo a.

Este punto fijo se puede calcular como el límite,

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

donde,

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

empezando con cualquier punto entre como el valor inicial de la iteración.

Estudiando detalladamente el teorema se puede deducir el siguiente resultado:

Corolario

Si $F(x)$ es continuamente diferenciable en algún abierto que contenga al punto fijo ξ, y si$|F'(\xi)| < 1$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ de modo que la iteración de punto fijo con $F(x)$ converge siempre que$|x_0 - \xi| \le \varepsilon$.

Observemos que para predecir la convergencia es suficiente la condición $|F'(\xi)| < 1$ sin embargo ésta se utiliza hasta la práctica del cálculo del punto de convergencia, sin dar explicación del por qué es así. Esperamos contra restar este hecho dando cuenta de la importancia que tiene la condición de diferenciabilidad planteada en el corolario y sin embargo no se hace explicita en el teorema, de tal forma que el estudiante visualice la condición en un contexto gráfico aplicándola a la pred icción que realice de convergencia o no – convergencia de alguna sucesión.

Visualización y tecnología

elementales matemáticos y en el dominio de éstos en el nivel medio superior y superior, los cuales subyacen para el aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados. Es decir, asumimos que los estudiantes no están familiarizados con los conceptos básicos como para dominarlos y darles uso en el tratamiento de conceptos matemáticos avanzados.

En este sentido, consideramos un concepto elemental y básico el de derivada de una función el cual se sabe lo es en el nivel superior para estudiantes que llevan estudios a fines con matemáticas, sin embargo éste se reporta débil en algunas investigaciones. Cantoral y Mirón (2000), reportan que existe ausencia de significado del concepto de derivada y para un robustecimiento de tal noción plantean la hipótesis de que es en el contexto interactivo donde el estudiante será capaz de reconstruir significados de la derivada a partir de la identificación de patrones gráficos.

Por lo tanto, discurrimos que existe una ausencia de significado sobre el papel que juega la derivada en el teorema del punto fijo de una contracción.

Al respeto del punto fijo, Sierpinska (1994) reporta que hay dificultad sobre tal noción cuando se les pide a los estudiantes obtener el punto fijo de funciones a trozos. Esta es una de las razones por las que pretendemos empezar por un reforzar tal noción.

Fundamentalmente, intentamos dar explicación a las siguientes preguntas que son el eje central del planteamiento de la secuencia a implantar:

¿Cómo pueden los estudiantes predecir, cuándo una serie es convergente o divergente?

¿Cómo la visualización habilita ciertas abstracciones en la cognición del estudiante de tal forma que éste es constructor de su propio conocimiento?

Estas dos preguntas podemos congregarlas en una sola y que tomaremos como pregunta de investigación:

¿Si la visualización es una forma de desarrollar el pensamiento matemático, entonces la visualización de un estudiante le permite a éste predecir cuándo una sucesión es convergente o divergente?

En particular, indagamos a la visualización para que permita establecer relaciones sobre el contexto analítico y el contexto gráfico de tal forma que se reformule el papel implícito que juega la pendiente de la recta tangente en el teorema del punto fijo. Ubicamos a la visualización del lado de la actividad humana como una práctica social que conlleve al estudiante a su propia construcción de conocimiento. De esta manera la hipótesis que asumimos es que:

La visualización es una parte esencial de la inteligencia humana, y por lo tanto el desarrollo visual que ocurre a partir de una aproximación fenomenológica para el aprendizaje de las matemáticas puede dar al estudiante un mejor entendimiento de los contenidos matemáticos.

Para emprender sobre lo anterior, hacemos uso del recurso tecnológico, concretamente la calculadora con capacidad gráfica una herramienta útil en la práctica educativa. Respecto de la tecnología, se han encontrado investigaciones en las cuales se enfatiza que la tecnología tratada adecuadamente en una situación de enseñanza puede favorecer a los aprendizajes, sin embargo, reconocemos que ello no siempre es así.

Soportes teóricos

Tomando en cuenta que la intencionalidad en esta investigación es de tipo didáctico se asume que la reconstrucción de significados es la parte medular para dirigir al estudiante hacia un entendimiento de la noción del concepto de convergencia. Por lo tanto, la necesidad de generar interacciones entre estudiante, investigador y saber será una variable a controlar desde la perspectiva de la aproximación socioepistemológica, ya que en este sentido, se asume que reorganizar el discurso matemático escolar dirige la atención hacia la reconstrucción de significados y ésta provee de categorías del conocimiento matemático con relación a la actividad humana.

El marco teórico que sustenta esta investigación es la Teoría de Situaciones Didácticas cuyo pionero es Guy Brousseau, ésta sostiene que el conocimiento de un individuo se genera a partir de las abstracciones que él hace del medio, adaptando su conocimiento al mismo medio. La teoría de situaciones didácticas, busca crear, consolidar y relacionar un conjunto de conceptos tales que su utilización permita el estudio de los fenómenos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La vinculación entre la problemática planteada en un inicio y el marco teórico de referencia, se establece debido a que la aproximación socioepistemológica sostiene que las actividades y prácticas sociales son las que producen conocimiento, en este caso, la visualización como práctica social será utilizada para predecir una propiedad visual, a saber, la inclinación de la tangente. Esto aunado a la teoría de situaciones didácticas la cual sostiene que el modelo que se plantea del sistema que entra en juego para la comunicación del conocimiento matemático (interacciones entre los sub – sistemas: alumno, profesor y medio) debe permitir la descripción de aquellos tipos de relaciones humanas pertinentes en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, a partir de que el alumno construya su conocimiento mediado de sus propias experiencia y de sus interacciones con el entorno como factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios.

La situación diseñada se establecerá con base en la Ingeniería Didáctica en tanto que ésta es la metodología que se seguirá para guiar las experimentaciones en clase. En esencia, contemplamos las fases que considera Farfán (1997):

- Un análisis preliminar de la situación a abordar involucrando tres componentes: la componente didáctica; la componente epistemológica; y la componente cognitiva.
- El diseño de la ingeniería didáctica y la elección de variables macro y micro didácticas que van a ponerse en juego.
- La puesta en escena y análisis de resultados.

Lo anterior permite establecer una vinculación de las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social, mismas que son componentes de la aproximación sistémica en la cual tiene origen nuestra investigación, a saber, la aproximación socioepistemología.

Consideraciones finales

Esperamos contribuir con la investigación que estamos llevando de tal forma que se vea favorecida una metodología de enseñanza – aprendizaje del objeto matemático convergencia. Primordialmente, la aportación va dirigida a vigorizar la postura que desde nuestra perspectiva asumimos de la visualización. En otras palabras, buscamos que la premisa principal: la visualización es una forma de desarrollar el pensamiento matemático hacia aprendizaje significativo, vaya en pos de su implantación en el ámbito educativo.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. et al. (1995) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica. SA de CV.

Berger, M. (1998) "Graphic calculators: an interpretative framework" in *For the Learning of mathematics. An international Journal of Mathematics Education.* 18_2 p. 13-20.

Brousseau, G. (2000) " Educación y didáctica de las matemáticas" en *Educación Matemática* 12_1 pp. 5-38

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000) "Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica" En Relime

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* Prentice – Hall.

Conte y de Boor. (1974) *Análisis numérico elemental.* Mc Graw-Hill de México, SA de CV. 2ª Ed.

Davis, P. (1993) "Visual theorems". *Educational Studies in Mathematics* 24, pp 333-344.

Devaney , R. (1990) *Chaos, fractals, and Dynamics. Computer experiments in mathematics.* Department of Mathematics. Boston University. Boston, Massachusetts. Addison – Wesley Publishing Company

Farfán, R. (1997) *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica, SA de CV.

Henrici, P. (1977) *Elementos de análisis numérico.* Ed. Trillas. Biblioteca de Matemáticas Superior.

Lewis, P. (1990) " A Fractal Curriculum" in *Seeing Beauty in Mathematics.* pp. 107 – 121. EDC. Newton, Mass.

Mandelbrot, B. (1992) "Fractals and the rebirth of experimental mathematics". Foreword to: Peitgen, H.-O.,Jurgens, H., & Saupe, D. *Fractals for the Classroom* 1. New York: Springer - Verlag

Porter, M. (1981) *Introducción a los métodos numéricos.* 2° Coloquio del Departamento de matemáticas. Cinvestav- IPN. Oaxtepec, Morelos.

Sierpinska, A. (1992) "On understanding the concept of function" en *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy.* Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds)

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. *Mathematical Association of America*, Notes No. 19.

Pensamiento numérico

El dominio de las operaciones de adición y sustracción con fracciones

Carmen Valdivé Fernández y Martín Andonegui Zabala
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y
Universidad Pedagógica, Barquisimeto Venezuela
florca17@hotmail.com y ioritz@hotmail.com

Resumen

El presente estudio tiene como propósito determinar el efecto de la estrategia constructiva diseñada y aplicada para aprender a resolver operaciones de adición y sustracción con fracciones. Surge como una secuencia del trabajo de Vargas (2000) quien implementó una estrategia de diversificación de contextos representacionales para la enseñanza del concepto de fracción al mismo grupo experimental, trabajando con los contextos parte todo continuo, expresión verbal, a/b, expresión decimal, porcentaje, parte todo discreto, y recta numérica. La estrategia constructiva aplicada para las operaciones consistió en 9 sesiones de clase, en las que se relacionaban los diversos contextos de una fracción. Los resultados de este estudio demuestran que hubo riqueza de transferencia de contexto, presente en el desempeño de los alumnos del grupo experimental. La más frecuente fue la fracción como a/b, seguida de la expresión decimal. Todo esto ratifica la propuesta teórica de Duval (1993), de que la coordinación entre los registros (espontaneidad en la actividad de conversión y potencia de las transferencias alcanzadas por este grupo en el trabajo de Vargas) produjo rapidez en las actividades de tratamiento.

Antecedentes

La estrategia metodológica constructiva diseñada y aplicada en este estudio se elaboró tomando en cuenta el contenido de varios autores, entre los que podemos destacar Resnick (1987), de quien se consideró el análisis sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos, análisis que estima relevantes los tipos de esquemas protocuantitativos de la parte y el todo, ya que permite a los niños entender estas relaciones -y por ende, la composición aditiva-, crear estrategias que los involucran en el conteo, y llevarlos a adquirir el concepto de adición y sustracción de una manera natural, por lo que estos esquemas pueden ser utilizados posteriormente en la enseñanza del concepto de fracción y de las operaciones con ellas. Igualmente se consideró el trabajo de Carpenter y Moser (1983) atinente a los niveles de estrategias para la adición y sustracción -tal como lo hace Resnick (1983)-, a saber:

a) Estrategias basadas en el uso de los dedos, de objetos físicos
b) Estrategias basadas en el uso de secuencias de conteo
c) Estrategias basadas en el recuerdo de resultados básicos

Por su parte, Mosquera (1995) cita una serie de investigadores que han centrado su atención en el estudio de los procesos de conteo y sus implicaciones en el desarrollo de los conceptos de adición y sustracción tal como lo hizo Resnick (1983), a saber: Houliham y Ginsburg en 1981, Moser y Carpenter en 1982, Secada, Fuson y Hall en 1983, Ibarra y Lindval en 1982, Behr y Wheeler en 1981. Estos autores destacan el proceso evolutivo del conteo de

los niños así como la habilidad que poseen éstos para resolver problemas de adición y sustracción antes de cualquier estudio formal.
En el campo de las fracciones no existen parámetros tan claros como los descritos anteriormente para el concepto de número y las operaciones de adición y sustracción; existe una marcada complejidad en la construcción conceptual del concepto de fracción y por ende el de las operaciones con ellas. Los niños necesitan de experiencias que construyan sobre su conocimiento informal de las fracciones, antes de ser instruidos en los símbolos o representaciones del concepto de fracción.

Sin embargo, Sánchez y Llinares (1988) encuentran que la interpretación más natural para los conceptos de suma y resta con fracciones (similar a la asimilación natural de las operaciones de adición y sustracción con números naturales), es el aspecto medida caracterizado a través de la relación parte todo, sugiriendo utilizar el modelo de la recta numérica para vincular las interpretaciones parte todo, medida, y fracción como símbolo (número). Teniendo en cuenta la familiaridad entre algunas interpretaciones y algunas operaciones es conveniente secuenciar el uso de las fracciones unitarias y el contar, a través de situaciones problemáticas.

Así mismo, siendo una fracción un número, se han de considerar las sugerencias de Greenes, Schulman y Spungin (1993) sobre las habilidades relativas al sentido del número que deben desarrollarse en el niño (sus usos, su adecuación, sus relaciones, la estimación) ya que ellas se pueden trasladar a la enseñanza del concepto de fracción, utilizando la estrategia propuesta por Sánchez y Llinares (1988) y ampliada por Vargas (2000), quien -en concordancia con Duval (1993)- aplica actividades cognitivas ligadas a la semiosis como lo es la actividad de conversión, que permite transformaciones entre diversos registros, bajo el supuesto de la necesidad de coordinar diversas representaciones semióticas (al menos dos) que debe manifestarse en:

a) La rapidez en las actividades de tratamiento
b) Espontaneidad en la actividad de conversión
c) La potencia de las transferencias

Vargas (Andonegui y Vargas, 2002; Vargas, 2000) condujo un estudio sobre la aplicación de una estrategia denominada "Diversificación de los contextos representacionales de una fracción" a estudiantes de 6° grado con edades comprendidas entre 11 y 13 años. Esta estrategia contemplaba los siguientes contextos representacionales:

a) Parte todo continuo (PTC)-Expresión Verbal (EV)- Expresión simbólica (a/b)
b) Expresión decimal
c) Porcentaje (%)
d) Parte todo discreto (PTD)
e) Recta Numérica

El autor enfatizó el trabajo con objetos concretos y prestó atención particular a la traslación entre las diferentes representaciones, tomando en un primer momento como eje los modelos concretos y luego, en una segunda fase, los diagramas. Inició la secuencia de instrucción con el contexto parte todo continuo, expresión verbal escrita y expresión simbólica. Realizó divisiones de un todo (hojas de papel) en partes iguales según el siguiente orden de fracciones:

a) La familia de medios, cuartos y octavos
b) Luego haciendo dobleces, construye la familia de los tercios, sextos y novenos
c) Finalmente, la familia de quintos y décimos.

Vargas también hizo énfasis, en la primera parte, en las traslaciones concreto-forma oral. Utilizó luego los diagramas con el mismo esquema de la familia de los medios, tercios y quintos, construyendo estas series con ejemplos que rebasaran la unidad, utilizando el conteo. Igualmente realizó actividades de reconstrucción de la unidad y de modificación de citas perceptuales que permitieran afianzar en el niño el dominio de la relación parte todo continuo. Para introducir el contexto expresión decimal, utilizó la relación parte todo y las características de nuestro sistema de numeración decimal. Para el porcentaje, recordó el cálculo de porcentaje y la representación de porcentajes en forma gráfica como parte de un total, haciendo posteriormente las transferencias a otros contextos ya estudiados.

Para el contexto parte todo discreto, utilizó las mismas estrategias que implementó en el contexto parte todo continuo, empleando los niños del salón de clase como conjunto unidad. Finalmente, para la fracción como punto en la recta numérica, se apoyó en el recurso de la recta numérica (regla graduada) y en la idea de medida. Se tomaron rectas numeradas y cada segmento unidad se dividió en partes iguales (tres, cuatro y cinco).

Una vez aplicada esta estrategia al grupo experimental, éste logró superar al grupo al que se aplicó la estrategia tradicional, aún en los ítems relativos a los contextos parte todo continuo y símbolo, que eran comunes a ambas estrategias (tradicional y diversificación de contextos), corroborando con esto lo planteado por Duval (1993), pues se logró la conceptualización de la fracción debido al uso de los registros de representación, y a la realización de actividades de tratamiento y conversión. Sin embargo, la estrategia tradicional no desarrolló las habilidades necesarias para abordar los ítems donde había que aplicar el concepto de fracción.

La investigación

El presente estudio (Valdivé, 2000) surge como una extensión del trabajo de Vargas (2000), utilizándose la misma población (29 alumnos de sexto grado de una escuela básica de Cabudare, Venezuela, con edades comprendidas entre 11 y 13 años) para el desarrollo de la estrategia constructiva diseñada para enseñar a sumar y restar fracciones.

La secuencia de instrucción se desarrolló siguiendo las teorías de la Estrategia Didáctica Mediadora, pues toma las propuestas teóricas de la teoría cognoscitiva de procesamiento de información, el constructivismo, la psicología humanista y la neurociencia (Ruiz, 1988).

Así mismo se tomó como elemento directriz una estrategia instruccional propuesta por Szczurek (1978), en la cual se plantea como útil una secuencia en espiral ya que los objetivos a alcanzar están de tal forma entrelazados que es difícil profundizar en cualquiera sin referencia a los otros; es decir, es importante tener un despliegue de contextos representacionales del concepto de fracción para comprender más aún las operaciones con ellas.

También se tomaron en cuenta los aportes de Flores (1994) quien menciona algunas condiciones necesarias para potenciar la enseñanza constructiva y, finalmente, un análisis didáctico efectuado en relación al constructivismo (García y García, 1989; Neale, Smith y Johnson, 1990; Stanbridge, 1990) con el fin de articular una alternativa metodológica para la enseñanza.

La Estrategia Metodológica Constructiva utilizada en este estudio para resolver problemas de adición y sustracción con fracciones aplicando transferencia de contextos se operacionalizó en dos fases: la primera se desarrolló en mes y medio antes de aplicar el tratamiento y cubrió una sesión de clase de 2 horas para aplicar el pretest y 5 semanas para reconstruir la estrategia. En estas semanas se consultó al profesor titular del grado acerca de la secuencia de los objetivos de las otras asignaturas que se iban a desarrollar paralelamente al tratamiento y las demás actividades planificadas para el grado.

En la segunda fase (mes y medio después) se desarrolló la estrategia constructiva durante 9 sesiones de clases de 2 horas cada una. El objetivo de la primera sesión fue realizar transferencias entre los contextos representacionales de una fracción, utilizando material concreto y la secuencia del trabajo de Vargas (2000). Esta primera sesión permitió poner a los alumnos a trabajar con material concreto, a ser cooperadores, a plantearse hipótesis, a liberar sus actitudes frente a la matemática, a contrastar sus ideas y las opiniones que hicieron posible resolver el problema planteado en la clase. También sirvió de base para concretar el diseño de la estrategia constructiva por parte de la investigadora, ya que esta forma de trabajo permitió diagnosticar que el contexto como recta numérica generó conflictos, pues hubo dificultades cuando hicieron la transferencia (les costó escoger el segmento unidad y hacer las mediciones); y que el contexto como expresión decimal presentó dificultad al realizar la división del numerador por el denominador para hallar la expresión decimal de una fracción.

Las ocho sesiones de clase restantes consistieron en resolver situaciones problemáticas del campo experiencial del alumno (conocimientos previos) que plantearan adiciones y sustracciones con fracciones, de igual denominador primeramente y luego con diferentes denominadores, donde se relacionaran los diversos contextos de una fracción y que permitiesen la traslación de un contexto a otro. Las fracciones que se escogieron para los problemas fueron aquellas que tuvieran sentido para el alumno, es decir, que utilizaran en la vida diaria; además, fracciones donde los denominadores fueran primos entre sí, y otras donde uno fuese múltiplo del otro, excluyéndose el caso en el que los denominadores no son múltiplos ni primos entre sí.

Al término de la instrucción se aplicó una prueba final compuesta por diez ítems. Sirvan de muestra los siguientes:

> *Item 4*. Andrés pintó la cuarta parte de una pared y José el 50% de la misma pared. ¿Qué porcentaje de pared pintaron entre los dos? Realiza un dibujo para representar tu respuesta.
>
> *Item 6*. En el día de ayer le dediqué ¾ de hora a la lectura, a la matemática 0.5 horas, y a la escritura las dos terceras partes de una hora. ¿Cuánto tiempo invertí en las tres clases?

Resultados

Los resultados obtenidos por los 29 alumnos del grupo experimental se presentan en la siguiente tabla:

Item	C	%	I	%	O	%
1	20	68,9	6	20,6	3	10,3
2	24	82,7	3	10,3	2	6,9
3	18	62,1	11	37,9	0	0
4	28	96,5	1	3,4	0	0
5	22	75,8	5	17,2	2	6,9
6	21	72,4	6	20,6	2	6,9
7	26	89,6	0	0	3	10,3
8	17	58,6	9	31	3	10,3
9	25	86,2	4	13,8	0	0
10	13	44,8	14	48,8	2	6,9

C: respuestas correctas **I:** respuestas incorrectas **O:** respuestas omitidas

Además, se presentan en la siguiente tabla las frecuencias de las diversas transferencias de contextos que dieron los alumnos del grupo experimental, por ítem:

Contextos/Items	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Sìmbolo (a/b)	4	1	16	0	15	0	6	7	19	2	70
Expresiòn Decimal	4	0	2	0	6	8	0	0	1	0	21
%,a/b y PTC	0	0	0	7	0	0	11	0	0	0	18
a/b y Exp. Dec.	12	0	0	0	0	0	0	0	5	0	17
% y PTC	0	0	0	16	0	0	0	0	0	0	16
a/b y %	0	10	0	01	0	0	0	0	0	3	14
PTC	0	0	0	4	0	0	5	0	0	4	13
PTD	0	1	0	0	0	8	0	4	0	0	13
%, a/b y PTD	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	9
%	0	1	0	1	0	3	0	0	0	4	9
a/b y PTD	0	0	0	0	0	0	2	4	0	0	6
% y PTD	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	4
a/b y PTC-EV	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	4
Pto. en la Recta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Totales	20	24	18	28	22	21	26	17	25	13	214

Conclusiones

Los resultados de este estudio demuestran que hubo riqueza de transferencia de contextos, presentadas en las respuestas de los alumnos del grupo experimental. La más frecuente fue la fracción como símbolo (70 veces), seguida de la expresión decimal (21 veces). Se pudo detectar que la expresión decimal sólo se asocia como respuesta con el símbolo (17 veces) y no lo hace con ningún otro contexto, ni siquiera con el de porcentaje, a pesar de su aparente afinidad.

La investigación arrojó que ningún alumno utilizó la transferencia hacia el contexto fracción como punto en la recta para dar la respuesta en ningún problema, de lo que se infiere que este contexto debe plantearse en su enseñanza de manera diferente, o bien no es en esta edad o grado donde deba mediarse, ya que implica nociones de geometría (conmensuración), área casi ignorada en el aula. Se pudo detectar que el algoritmo habitual –en el contexto simbólico- no funciona, porque no se enseña en relación con algún contexto socio-cultural y, así, el alumno no llega a la resolución de los problemas.

Este estudio demostró que la Estrategia Constructiva logró que el estudiante sea un sujeto activo en el proceso enseñanza-aprendizaje, ya que logró seleccionar los contextos representacionales de una fracción en cada uno de los problemas del instrumento, recordar el concepto de fracción en cada uno de ellos, integrar y organizar para combinarlos y poder resolver la suma o resta que se les estaba planteando, dando la fracción suma o diferencia en el contexto que para él tenía significado, aún cuando no se le estuviese pidiendo en el problema. Así mismo, el alumno demostró ser cooperativo, creativo, participativo y crítico cuando pudo vincular contextos que aparentemente no se relacionaban en los diversos problemas; cuando transformaba el material concreto (fichas, bandas de papel, tarjetas, rectas numéricas) al cortar, doblar y pegar las partes en que se fraccionaban algunas unidades, para conseguir el que más se adecuaba a su respuesta; y, finalmente, cuando al dar estas respuestas lo hacía en diversos contextos, mostrando con ello la comprensión del concepto que se estaba mediando. De este modo, se ratificó la propuesta teórica de Duval (1993) de que la coordinación entre los registros (espontaneidad en la actividad de conversión y la potencia de las transferencias alcanzadas por este grupo en el trabajo de Vargas) produjo rapidez en las actividades de tratamiento.

A nivel del docente, la implementación de la estrategia logró mostrar lo relevante que es en la enseñanza de las operaciones con fracciones, la hipótesis sobre qué enseñar (mediar), qué aprender (construir), y tomar en cuenta que en el aula se trabaja con los conocimientos personales (experiencias) de los alumnos, al escoger problemas donde tengan sentido las operaciones con fracciones y no ejercicios aritméticos (½ + 5/9) que no se le presentan en la vida cotidiana.

Se recomienda complementar la estrategia presentada, con actividades de tipo algorítmico una vez se haya comprendido el concepto de suma y resta de fracciones, a fin de que el estudiante tenga las dos modalidades de estrategia y pueda desenvolverse ante cualquier situación que se le presente en la vida diaria escolar. También se sugiere seguir esta investigación, utilizando fracciones en las que los denominadores no sean múltiplos ni primos entre sí, a fin de completar el diseño. Por último, se recomienda indagar acerca de la transferencia de la fracción decimal a porcentaje, ya que en las respuestas dadas por los alumnos no se asocian estos contextos, a pesar de su aparente afinidad.

Referencias Bibliográficas

Andonegui, M., Vargas, A. (2002). Los sistemas de representación semiótica en el aprendizaje del concepto de fracción. En: C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 15, Tomo 1, pp. 201-206.

Carpenter, T., Moser, J. (1983). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts. En: R. Lesh, M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, pp. 7-39. New York, Academic Press.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives,* 5, 37-65. Strasbourg, IREM.

Flores, R. (1994). *Hacia una Pedagogía del Conocimiento.* McGraw-Hill, Colombia.

Garcia, J.E., Garcia, F..F. (1989). *Aprender investigando.* Sevilla, Díada.

Greenes, C., Schulman, L., Spungin, R. (1993). Developing sense about numbers. *Arithmetic Teacher*, 40, 5, 9-28.

Mosquera, J. (1995). *Investigación en Matemáticas Básicas. Selecciones del Arithmetic Teacher, Research into Practice.* Caracas, Autor.

Neale D. C., Smith D., Johnson V.G. (1990). Implementing conceptual change-teaching in primary science. *The Elementary School Journal,* 91, 2, 109-131.

Resnick, L. B. (1983). Learning complex concepts: The case of decimal fractions. *Paper presented at the 24th annual meeting of the Psychonomies Society*. PS, San Diego.

Resnick, L. B. (1987). Learning to understand arithmetic. En: R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology, Vol. 3,* p. 41-95.

Ruiz, C. (1988). La Estrategia Didáctica Mediadora: Una alternativa para el desarrollo de procesos en el aula. *Investigación y Posgrado,* Vol. 3, N° 2, 57-73.

Standbridge, B. (1990). A constructivist model of learning used in the teaching of junior science. *The Australian Science Teachers Journal*, 36, 4, 20-28.

Sanchez, V. Y Llinares, S. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid, Síntesis.

Szczurek, M. (1978). *La Estrategia Instruccional. Trabajo que propone un modelo para planificación de la Estrategia Instruccional*. Autor, Mimeo.

Valdivé, C. (2000). *El dominio de las operaciones de adición y sustracción con fracciones*. Maestría Interinstitucional en Matemática (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto.

Vargas, A. (2000). *Efecto del uso de la diversificación de contextos representacionales en el aprendizaje del concepto de facción.* Maestría Interinstitucional en Matemática (Trabajo de Grado). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto.

Pensamiento algebraico

Una experiencia didáctica referente a la introducción del tema Ecuaciones en educación básica

Milagro Hernández y Martín Andonegui Zabala
Instituto La Salle y Universidad Pedagógica, Barquisimeto, Venezuela
ioritz@hotmail.com

Resumen

El trabajo presenta los resultados de la aplicación de una estrategia constructiva para la introducción del tema de las ecuaciones, que toma en cuenta el paso de lo aritmético a lo algebraico y de lo concreto a lo abstracto, que se centra en la actividad y creatividad del alumno, y que considera el uso de diferentes sistemas de representación en la resolución de las ecuaciones (tanteo sistemático, uso de la balanza, despeje en contexto simbólico). El modelo se aplicó a una sección de 6° grado de Educación Básica, integrada por 25 alumnos de 11 y 12 años, de una escuela pública de Barquisimeto (Venezuela). Se desarrolló a lo largo de seis sesiones de 90 minutos cada una. Los resultados evidencian que la estrategia implementada resultó exitosa; también resultó motivadora y promotora de la creatividad y la participación. En cuanto a los aprendizajes evidenciados durante la experiencia, cabe destacar que los alumnos reconocen el carácter bidireccional que tiene el signo de la igualdad en álgebra y la equivalencia de los miembros de una ecuación, identifican la incógnita en una ecuación como un número desconocido, e interpretan ese número como solución de la ecuación; también, que llegan a dotar de significado al algoritmo convencional de despeje.

Antecedentes

Entre los temas a desarrollar en el currículo matemático el álgebra constituye uno de los obligados tópicos a estudiar teniendo como su antecesora la aritmética. El paso de la aritmética al álgebra es causa de dificultades y frustraciones en las matemáticas escolares, ya que antes de iniciarse en el álgebra, el alumno sólo ha estudiado una matemática en la que prevalece el dominio de expresiones aritméticas. En cambio, los nuevos conceptos algebraicos le exigen el dominio de un lenguaje algebraico, abstracto, que requiere del manejo de algunos elementos conocidos por él -pero hasta ahora en términos aritméticos-; pero además el álgebra, a diferencia de la aritmética, implica el uso de símbolos y convenciones a las cuales el alumno no se ha enfrentado anteriormente. En este sentido, Filloy y Rojano (1984), Booth (1988), Gallardo y Rojano (1989), Sfard (1991), Kieran (1992), Socas y Palarea (1997), entre otros, mencionan que algunas de las dificultades que tienen los alumnos de distintos niveles de grado respecto a los conceptos algebraicos se encuentran en las diversas interpretaciones que hacen del uso de las letras (incógnita, variable), los convenios de notación, los diferentes uso del signo igual, la naturaleza de la respuesta, y otras similares. Fernández (1997, p.87) expresa que "el nivel sintáctico, elemento esencial en el álgebra, es la principal causa de las dificultades asociadas al uso de la notación formal, sobre todo para los escolares que después de una larga trayectoria aritmética por la enseñanza infantil y primaria, tienen que abordar en secundaria nuevas reglas sintácticas algebraicas, contradictorias muchas veces, con las aritméticas. Un ejemplo es el uso de la yuxtaposición para indicar la posición de la multiplicación: en álgebra escribimos *ab* para indicar a x b, lo que representa una fuente de error en el aprendizaje, porque no puede aplicarse al producto de números". Al respecto, Kieran (1992) predice que se cometerán errores en el uso de cadenas de concatenación porque los estudiantes continuarán usando la interpretación previa (de la aritmética), y señala errores como concluir que $x = 6$ a partir de $4x = 46$, obviando que en el álgebra tal escritura denota multiplicación.

En este mismo orden de ideas, Booth (1988) afirma que para estimar los procedimientos requeridos en el proceso de transición de la aritmética al álgebra, primero estas relaciones y procedimientos deben ser comprendidos dentro del contexto aritmético; pues de no ser así su aprendizaje en álgebra se vera afectado, por lo que el alumno podría incurrir en errores.

La transición de la aritmética al álgebra no es sencilla, pues como se ha dicho, entre otras cosas requiere de un proceso que involucra un cambio en las concepciones conocidas por el estudiante, y esto debido a que tanto la estructura como el razonamiento algebraico son de naturaleza diferente a los de la aritmética. Los alumnos que se inician en álgebra tienen que desarrollar operaciones sobre símbolos y dar un nuevo significado a las acciones que se realizan con tales símbolos, determinadas por reglas muchas veces contradictorias con las aritméticas. Algunos cambios conceptuales involucrados en el paso de la aritmética al álgebra se ubican alrededor de.la naturaleza de los valores simbólicos, de las interpretaciones del signo igual, y de tener que afrontar problemas con nuevos procedimientos para resolverlos así como para denotar e interpretar los resultados.

Por otro lado, algunas corrientes psicológicas (Da Rocha, 1997) coinciden en afirmar que los estudiantes de matemática, al iniciarse en álgebra, necesitan trabajar con modelos y representaciones concretas de los conceptos y principios matemáticos antes de que ellos puedan comprender significativamente las formas matemáticas, abstractas y simbólicas, que corresponden a tales representaciones o modelos. Estas aseveraciones se apoyan en resultados teóricos según los cuales los estudiantes aprenden mejor las ideas y los conceptos cuando se les permite que lo descubran a través de experiencias relacionadas con el mundo físico o el entorno socio-ambiental, o manipulando modelos representativos de dichas ideas y conceptos, pues estos modelos contribuyen a darle sentido a los símbolos y al vocabulario abstracto de la matemática; además, los procesos se hacen así más significativos.

El tema de las ecuaciones (ecuaciones lineales de primer grado, con una incógnita, en N) es el primer tema algebraico que se presenta a los estudiantes en los programas vigentes de Matemática de Educación Básica en Venezuela. Además, es un tema recurrente en los contenidos programáticos de matemática, en todos los niveles educativos.

En el presente trabajo (Hernández, 2001) se consideró la posibilidad de diseñar y aplicar una estrategia instruccional para la introducción del mencionado tema que tomara en cuenta el paso de lo aritmético a lo algebraico, de lo concreto a lo simbólico, y en la que se aprovecharan las potencialidades del conocimiento aritmético ya dominado por los alumnos, para introducirse en el modo de pensar algebraico (Mason, 1996).

Estrategia que, basada en el hecho de que en el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra convergen una diversidad de variables, que de alguna manera van a afectar la comprensión y rendimiento de los estudiantes, tendiera a superar el esquema tradicional de la enseñanza, centrado en el docente como dador de clases y en el alumno como un receptor pasivo de la información que transmite el docente. Por esta razón, se tomaron como ideas fundamentales que:

-El alumno aprende a través de su participación activa en la construcción de su aprendizaje.

-El docente es mediador en el proceso de enseñanza aprendizaje, por lo que induce en el alumno:

-La compresión del significado e importancia de lo aprendido.

-La anticipación de las posibles respuestas ante situaciones nuevas.

-El contenido específico y sus exigencias.

-El nivel de abstracción implícito y la dificultad del aprendizaje.

Ahondando en el tema, la propuesta presentada en este trabajo pretendía crear condiciones favorables al desarrollo del aprendizaje significativo y de la creatividad. Es decir, se esperaba que el alumno desarrollara su capacidad lógica aplicando el razonamiento matemático; usara un lenguaje claro y preciso; defendiera sus puntos de vista utilizando argumentos concluyentes; adquiriera gusto por la matemática; usara adecuadamente el formalismo matemático; aceptara la posibilidad de cometer errores y los utilizara para crecer intelectualmente.

Para terminar de caracterizar la estrategia aplicada, y sustentándose en los estudios mencionados anteriormente acerca de los errores y dificultades en álgebra, este modelo instruccional enfrenta deficiencias referidas a la falta de insistencia en los conceptos de ecuación y solución de la ecuación, y a la desconexión entre los aspectos conceptuales y operativos. Deficiencias mencionadas por Andonegui (1997), quien subraya que las mismas conllevan a que el aprendizaje del algoritmo de resolución sea mecánico, y al subsiguiente fracaso a la hora de aplicarlo. Para subsanar estas deficiencias, el autor sugiere el uso de diferentes sistemas o esquemas de representación en la resolución de las ecuaciones.

Desarrollo de la experiencia

Caracterizada la estrategia instruccional en los términos expuestos hasta ahora, se procedió a desarrollarla con un grupo experimental formado por una sección de Sexto Grado de Educación Básica, sección integrada por 25 alumnos de edades comprendidas entre 11 y 12 años, de una escuela pública de Barquisimeto (Venezuela).

El modelo instruccional tiene como premisa fundamental la actividad de construir ecuaciones .Se inicia, pues, sugiriendo a los alumnos la construcción de ecuaciones a partir de una identidad aritmética (por ejemplo: $3 . 5 - 2 = 3 + 2 . 5$). Luego se esconde un número tras una figura, invitando al alumno a encontrar dicho número por la vía del tanteo sistemático; después, la figura es sustituida por una letra (incógnita). En este proceso, se destaca la acción de “construir identidades y ecuaciones”. A partir de los ejercicios anteriores se establecen los conceptos de ecuación y también se da significado a la solución de una ecuación.

Para proceder a la resolución de ecuaciones, en un principio se trabaja por la vía del tanteo sistemático, tratando para ello de “colocarse en la cabeza del que construyó la ecuación”. Después, se recurre a un soporte concreto, la balanza (representada física o gráficamente). Apoyándose en este soporte, se inicia al alumno en el proceso de despeje de la incógnita -

atendiendo a las restricciones que el modelo impone, adecuadas al contexto matemático de 6º grado-. Posteriormente –y a partir de los procesos de despeje desarrollados con el recurso de la balanza- se procede con las operaciones algebraicas de despeje, las cuales imponen la manipulación de símbolos y números en combinación con las operaciones aritméticas.

La estrategia instruccional se desarrolló en 6 sesiones de clase, cada una con una duración de 90 minutos. Cada sesión se planificó teniendo en cuenta un objetivo específico. La relación de tales objetivos es la siguiente:

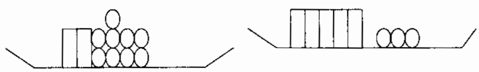
1. Construir identidades aritméticas
2. Dar el concepto de incógnita y resolver ecuaciones por la vía del tanteo sistemático
3. Resolver ecuaciones del tipo Ax + C = Bx + D usando el método de la balanza
4. Mostrar el proceso de despeje, utilizando símbolos
5. Establecer el algoritmo para el despeje de la incógnita en una ecuación
6. Consolidar el algoritmo para el despeje de la incógnita en una ecuación.

Como complemento, cada sesión de clase culminaba con la entrega de una Hoja de Ejercicios -relativos a las actividades desarrolladas en la sesión- para ser resueltos en el aula, y cuya posterior evaluación servía como punto de partida para la siguiente sesión. Finalizadas las seis sesiones, en la clase inmediatamente posterior se llevó a cabo la evaluación final del proceso.

Como muestra del tipo de actividades desarrolladas, se presenta un segmento de la planificación de la Cuarta Sesión, cuyo objetivo era "Mostrar el proceso de despeje, utilizando símbolos": Se propone resolver la ecuación: 2x + 9 = 5x + 3

Se utilizarán dos procedimientos de despeje: en el lado izquierdo, el método de la balanza; y en el derecho, el correspondiente procedimiento de despeje, usando símbolos:

Balanzas **Símbolos**

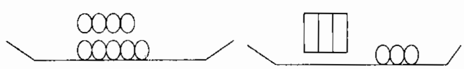


$$2x + 9 = 5x + 3$$

Quitar 

Restar 2x en ambos miembros

$$2x - 2x + 9 = 5x - 2x + 3$$

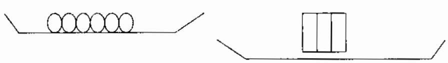


$$9 = 3x + 3$$

Quitar 

Restar 3 unidades en ambos miembros

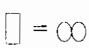
$$9 - 3 = 3x + 3 - 3$$



$$6 = 3x$$

$$\frac{6}{3} = x$$

De donde:



$$\boxed{2 = X}$$

Durante este proceso se hacen las siguientes preguntas:

¿Cuántos elementos se pueden quitar cada vez, sin perder el equilibrio?

¿Qué operación aritmética se asocia con quitar?

¿Cómo puedo verificar que las nuevas ecuaciones que voy obteniendo son correctas?

¿Qué operación final realizo para encontrar el valor de x? ¿Por qué?

¿Cómo verifico que el valor numérico despejado es la solución de la ecuación?

Las preguntas tienen como objetivo conducir a los alumnos a deducir las operaciones que realizan y en qué momentos del proceso, así como a controlar este proceso".

Resultados

Entre los resultados obtenidos podemos destacar los que muestra la siguiente tabla, relativa a los porcentajes promedio de las respuestas de los alumnos a las seis Hojas de Ejercicios propuestas en el aula –una al final de cada sesión-:

Hoja N°	N° de ejercicios	R. correctas	R. incorrectas	Sin responder
1	11	72.7	24.3	3.0
2	17	39.9	24.3	35.8
3	5	80.0	14.2	5.8
4 B	4	86.9	10.7	2.4
4 S	4	48.8	22.6	28.6
5 B	2	87.5	-	12.5
5 S	2	87.5	-	12.5
6	3	63.5	17.5	19.0

4 B, 5 B: Ejercicios a resolver, vía balanza 4 S y 5 S: Los mismos ejercicios, vía simbólica

Del análisis de estos datos puede inferirse que hubo ciertas dificultades al finalizar las sesiones 2 (Dar el concepto de incógnita y resolver las ecuaciones por la vía del tanteo sistemático) y 4 (Mostrar el proceso de despeje, utilizando símbolos), superadas en sesiones posteriores. En cuanto a las respuestas a la Hoja 6, hay que hacer notar que en dos de las tres ecuaciones propuestas –y sin ejercitación previa- se incluyó el signo –, con la idea de crear intencionalmente un obstáculo cognitivo; sorprendentemente, 48% de los alumnos resolvieron correctamente ambas ecuaciones.

En cuanto a la evaluación final, la siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Ítem	Ecuación	R. correctas (%)	R. incorrectas (%)	Sin responder
a	$9 + x = 16$	100.0	-	-
b	$4x + 3 = 3 + 9x$	72.3	22.7	-
c	$3x + 26 = 8x + 6$	72.3	22.7	-
d	$6x - 4 = 2x + 16$	31.8	40.9	27.3
e	$25x + 80 = 180 + 5x$	40.9	36.4	22.7
f	$14 - 3x = 5x - 2$	63.6	31.8	4.6

El análisis de estos datos permitió establecer como conclusiones que el porcentaje de respuestas correctas es mayor si las ecuaciones sólo presentan signos de adición (ítems a, b, c); y que existe cierta dificultad para resolver ecuaciones con algún signo de sustracción (ítems d, f), así como las que presentan números relativamente grandes (ítem e).

También resulta de interés la siguiente tabla, que presenta el porcentaje de respuestas correctas e incorrectas asociadas al método utilizado:

	R. correctas			R. incorrectas		
Ítem	Balanza	Símbolo	Tanteo	Balanza	Símbolo	Tanteo
a	13.6	9.1	77.3			
b	45.5	27.3	4.5	13.6	9.1	
c	45.5	27.3	4.5	13.6	9.1	
d		27.3	4.5	9.1	31.8	
e		31.8	9.1	9.1	22.7	4.5
f		63.3		13.6	13.6	4.5

Obsérvese el predominio del método de tanteo para resolver la ecuación *a*, así como el de la balanza para las ecuaciones *b* y *c*, y el de despeje simbólico para las restantes. Particularmente llama la atención el éxito relativo (63.6%) obtenido en la resolución de la ecuación *f*, habida cuenta de la presencia de signos negativos en ella.

Conclusiones

Como conclusiones generales podemos establecer, además:

1 La estrategia implementada resultó exitosa, como se evidencia en el desarrollo de las sesiones de aula, así como en los resultados de las hojas de ejercicios y de la evaluación final. También se considera motivadora y promotora de la participación de los alumnos, al ofrecer diversas maneras de trabajo: en grupo, pasar a la pizarra, resolución de hojas de ejercicios en grupo e individualmente. Es innovadora y favorece la creatividad, brindando al alumno diversas vías para la resolución de ecuaciones. Permite la interacción permanente alumno–docente y alumno-alumno. Destaca este último punto, pues se observó la integración efectiva de los alumnos en grupos, así como la ayuda de los más adelantados hacia otros con alguna dificultad en la comprensión del tema.

2. Se logra que el estudiante sea un sujeto activo en el proceso, cuando selecciona de los procedimientos estudiados aquel que se adecua a la ecuación que se le plantea.

3. La estrategia puede considerarse efectiva por cuanto permitió a la mitad de los alumnos superar el obstáculo cognitivo de la introducción del signo negativo en las ecuaciones.
4. En cuanto a los aprendizajes evidenciados durante la experiencia, cabe destacar:

   -Los alumnos reconocen el carácter bidireccional que tiene el signo de la igualdad en álgebra, ya que al construir ecuaciones parten de una igualdad.
   -Reconocen la equivalencia de los miembros de una igualdad, aun cuando se involucran números y letras, y advierten la diferencia entre estos últimos
   -Los alumnos identifican la incógnita en una ecuación como un número desconocido e interpretan ese número como solución de la ecuación.
   -Los alumnos reconocen la convención establecida entre un número y la incógnita cuando están escritos así: 4x, tal como se demostró en la resolución de ecuaciones.
   -Los alumnos identifican las operaciones y sus inversas.
   -Resuelven con éxito las ecuaciones cuyas soluciones son 1 (uno) y 0 (cero).

5. Los resultados de este estudio demuestran que hubo transferencia del método de la balanza al de despeje simbólico.

Referencias bibliográficas

Andonegui, M. (1997). *Esquemas de representación en la resolución de ecuaciones de primer grado*. Valencia, II Congreso Venezolano de Educación Matemática, mimeo.

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En: A.F. Coxford (Ed.), *The ideas of Algebra, K-12*, p. 20-32. Reston, NCTM.

Da Rocha, J.T. (1997). Lenguaje algebraico. Un enfoque psicológico. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, Octubre, 25-38.

Fernández, F. (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, Octubre, 75-91.

Filloy, E., Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought. En: J.M. Moser (Ed.), *Prfoceedings of VI PME-NA*, p.51-56. Madison, University of Wisconsin.

Gallardo, A., Rojano, T. (1989). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9.2, 155-188.

Hernández, M. (2001). *Una propuesta didáctica para la introducción del tema ecuación en Sexto Grado de Educación Básica*. Barquisimeto, Maestría Interinstitucional en Matemática (Trabajo de grado).

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En: D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 390-419. New York, MacMillan.

Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de la generalidad. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, Julio, 7-21.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Socas, M., Palarea, M.M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, Octubre, 7-24.

Modelos matemáticos

Los biomodelos y su impacto en la educación superior agropecuaria

Lucía Fernández Chuairey, Caridad Walkiria Guerra y Yolanda Sabín Rendón
Universidad Agraria de La Habana, Cuba.
lucia@unah.edu.cu o chuairey@yahoo.com

Resumen

En la actualidad se incrementa la necesidad de los investigadores de utilizar Modelos Matemáticos para describir procesos biológicos y productivos. Otra problemática es la búsqueda de nuevas formas en la enseñanza de la Matemáticas cuando se imparte para otra especialidades, donde existe poca motivación al sentirlas desvinculadas de sus intereses como profesionales. A partir de estos antecedentes y el estado actual de la temática La Universidad Agraria de La Habana desarrolló a partir de 1994 un proyecto de investigación que unido a la participación en otros proyectos y el uso de software especializados fomentan una cultura del uso de la Modelación Matemática. El desarrollo científico-técnico-metodológico alcanzado posibilitó el perfeccionamiento de la Matemática Superior y la Bioestadística, se introdujo una adecuada interpretación matemático - biológica en temas del Cálculo Diferencial e Integral, se elevó el nivel científico-técnico de docentes, investigadores y especialistas al incorporar metodologías y procedimientos en maestrías, diplomados y asesorías a otros proyectos de investigación, que requieren de conocimientos avanzados en este campo.

Introducción

Una de las características fundamentales de la época actual está la necesidad de poseer sólidos conocimientos en las Ciencias Básicas y en particular en la Matemática por el papel que ocupa en el desarrollo del pensamiento lógico y abstracto, por lo que se hace imprescindible ampliar las investigaciones en la esfera de la Matemática Aplicada, que vinculada con los Modelos Matemáticos, el Cálculo Diferencial e Integral, desarrollo de software especializados, algoritmos de cálculo, y la experimentación, logran una mayor eficiencia en la investigación, lo que eleva la productividad y soluciona problemas complejos .

La tendencia en el uso de la Matemática Aplicada es creciente y su fuerza motriz estriba en las necesidades del desarrollo de las investigaciones, que va aparejado a los avances de la sociedad y es más intensa aún a partir de la década del 90, con el perfeccionamiento y desarrollo de la Informática.

En las Ciencias Agropecuarias la Modelación Matemática se vincula con procesos biológicos, técnicos y productivos, lo que permite, comparar, predecir e ir a la búsqueda de soluciones óptimas. Según Fernández et al (2000) los modelos que describen dichos procesos se construyen mediante la observación, formulación de hipótesis, diseño, verificación de los resultados experimentales y otros aspectos muy vinculados con las diferentes etapas del método científico. Del Pozo y Fernández, (2001) valoran el papel de los modelos matemáticos como un medio de obtener conocimientos científicos, cuya veracidad se comprueba en el curso de la práctica social.

El objetivo del presente trabajo es mostrar las experiencias alcanzadas en la introducción a la docencia de pre y postgrado del tema de Modelación Matemática en el ámbito agropecuario.

La introducción de modelos matemáticos en planes y programas de este estudio de pre y post grado requirió de un trabajo metodológico, con el fin de establecer una correspondencia entre el lenguaje matemático y el biológico, así como abarcar un conjunto de aspectos que recorren un amplio espectro de las Matemáticas desde el Cálculo Diferencial hasta la Matemática Numérica y la Estadística Matemática, lo que permitió establecer vínculos con otras disciplinas de las carreras agropecuarias

Necesidad de introducir Modelos Matemáticos en la enseñanza de pre-grado

Uno de los problemas de la enseñanza de la Matemática cuando se imparte para otras especialidades es la poca motivación de los estudiantes al sentir esta disciplina desvinculada de sus intereses como profesionales, además de existir dificultades en el aprendizaje de conceptos correspondientes a esta ciencia por su nivel de abstracción.

Por tal motivo a partir de un proyecto de investigación desarrollado en la Universidad Agraria de La Habana se introdujo en la docencia de pregrado una interpretación matemático – biológico en el Cálculo Diferencial e Integral en contenidos como asíntotas, extremos, puntos de inflexión, ecuaciones diferenciales, integral definida entre otros. El Departamento de Ciencias Básicas cuenta con una gama de ejercicios basados en problemáticas reales, ajustados a la docencia con el rigor del lenguaje biológico tradicional.

El estudio del crecimiento revierte gran importancia en las Ciencias Biológicas, ya que constituye una regularidad, además tiene la característica de ser un proceso dinámico, y en la mayoría de los casos responde a modelos no lineales y asintóticos. Por tal motivo se toma descripción de esta ley biológica como ejemplo para mostrar la utilización de las herramientas matemático – estadísticas.

Los datos y el enfoque para la aplicación, se tomó de un experimento desarrollado por los investigadores en áreas de la Universidad:

Ejemplo: De un experimento en aves, se conoce el peso vivo promedio (g) durante 35 semanas dadas por (X_1,Y_1); (X_2,Y_2).................(X_{35}, Y_{35}) y se desea conocer la dinámica de crecimiento de las mismas con respecto al tiempo, así como algunos indicadores como son: edad en que se produce la máxima tasa de ganancia, peso promedio en la madurez , etc.

Procesamiento y análisis de la problemática

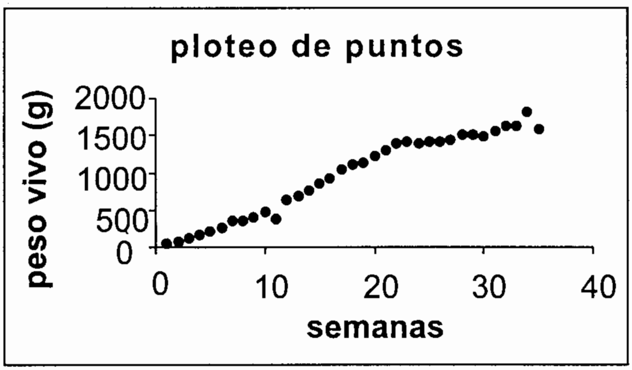
Esta problemática da paso a la introducción del Análisis de Regresión a partir de la experimentación, así como las vías que permiten encontrar la expresión matemática que responde a las características del proceso. Para ello es necesario:

- Ploteo de puntos para analizar tendencia de datos
- Selección del tipo de modelo ajustado
- Ajuste del modelo, con el apoyo de un software apropiado.
- Descripción del proceso a partir del modelo obtenido.

La figura 1 muestra la tendencia del crecimiento de las aves durante las 35 semanas teniendo asociado el modelo Logístico que fue el que logró el mejor ajuste, conjuntamente con otros tres modelos como el lineal simple, el de Brody y el de Von-Bertalanffy.

Una vez determinado el modelo y estimado sus parámetros se comienza la descripción del proceso mediante el uso de las siguientes herramientas matemáticas.

- **Dinámica de crecimiento**. A partir de la propia función en la figura 2.
- **Primera Derivada.** Permite obtener posibles extremos e intervalos crecimiento. Por otra parte se pueden determinar las ganancias instantáneas y por tanto la dinámica de la tasa de ganancia en el período analizado, en la tabla 1 se muestran estos resultados de la semana 9 a la 19.
- **Punto de inflexión.** A partir de lo mostrado en la figura 2, el estudiante puede analizar y explicar los cambios en la forma de la curva, de convexa a cóncava. La respuesta está relacionada con cambios en la tasa de ganancia y la existencia de un punto de inflexión, que representa el momento donde se alcanza la máxima ganancia, luego, el **punto de inflexión** es un máximo de la primera derivada y biológicamente está asociado a **la pubertad** y es de vital importancia en las investigaciones , ya que es donde el animal empieza a rendir económicamente.
- **Tasa de madurez**: Esta se refiere a la tasa de crecimiento relativa al peso maduro (relacionada con el parámetro k que aparece en la figura1). Se plantea que grandes valores de k indica madurez temprana y valores pequeños de k indica madurez tardía
- **Asíntota :** La asíntota en este modelo es PV=A (A es un parámetro del modelo) y representa la media del peso maduro, es decir la media del peso a la madurez

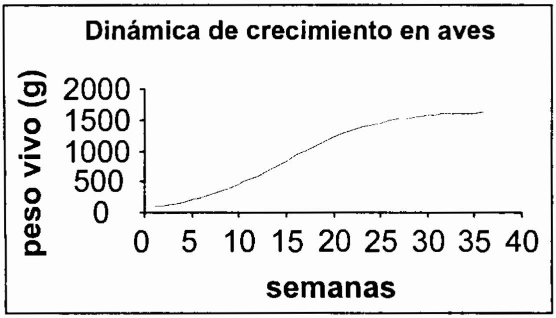


$$PV = \frac{A}{(1 - be^{-kt})}$$

Figura 1. Ploteo de los puntos y modelo Logístico que responde a una curva asintótica y sigmoide, propiedades necesarias para la descripción del crecimiento.

Tabla 1. Resultados de la tasas de ganancias de las semanas 9-16

semanas	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tasas de ganancias g/semanales	60.19	66.3	71.87	76.5	79.98	81.95	82.31	81.01	78.16	73.97	68,75



$$PV = \frac{1636.95}{(1 - 19.32e^{-0.2013t})}$$

Punto de inflexión (14.7, 818.47)
Asíntota PV = 1636.95

Fig.2. Representación gráfica del **crecimiento** en aves a partir del modelo de regresión

En este proceso se pudo apreciar que **la** respuesta conlleva el ajuste de un modelo no lineal lo cual está presente en muchas situaciones de procesos biológicos y agropecuarios por lo que se hace necesario la valoración del especialista conjuntamente con la del matemático para tener en cuenta los elementos más relevantes y su valoración.

Se describen en forma similar otros procesos como son: Crecimiento alométrico que relaciona el comportamiento de la parte de un organismo con respecto al todo, una vez obtenido el modelo se puede determinar el momento óptimo del sacrificio del animal dependiendo del objetivo económico. Se incluyen estudios de puesta de huevo, respuestas de rendimientos de los cultivos ante la aplicación creciente de fertilizantes, Curvas de lactancias, en los cuales se estima picos de producción, así como producciones totales y parciales a partir de la integral definida, es decir área bajo la curva, entre otros. Existe una amplia gama de aplicaciones de estos modelos en estas ramas, lo cual se corrobora por las numerosas publicaciones científicas existentes, una muestra fue reportada por Fernández (1996).

En el orden didáctico, esto contribuye a incentivar la motivación de los estudiantes por las Ciencias Matemáticas al lograrse una mayor vinculación de su contenido teórico con los procesos biológicos de objeto de la profesión y posibilita una mejor calidad de las capacidades profesionales, en tanto que se incorporan herramientas matemáticas en el modo de actuación profesional.

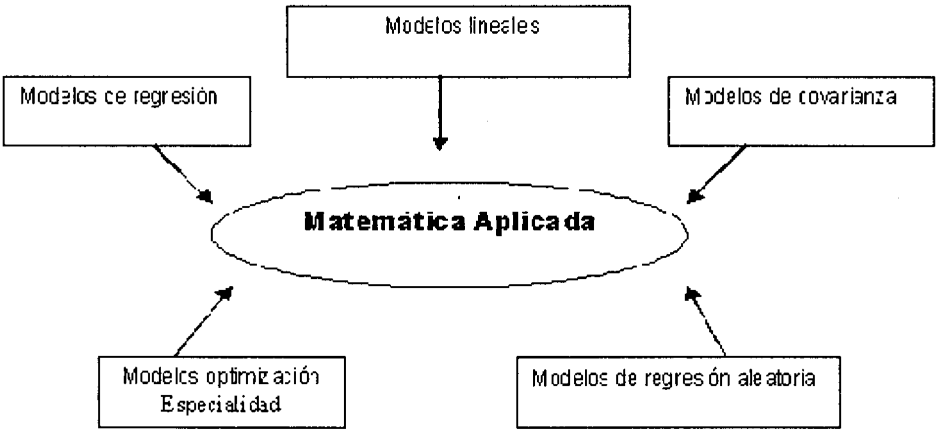
Por otra parte se fomenta una cultura del uso de la Matemática con la integración del tema en diferentes disciplinas, donde se puede lograr una formación más eficientes del profesional en la medida en que los conocimientos básicos de la disciplina Matemática estén más vinculados y sean retomados por otras disciplinas.

Necesidad de introducir Modelos Matemáticos en la enseñanza de Post grado

Paralelamente a la problemática anterior, los retos del presente milenio, requiere de una labor eficiente en la organización y desarrollo de la investigación científica y el conocimiento que esta genera, a lo cual puede contribuir en gran medida la aplicación consecuente de modelos estadísticos, con el apoyo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

El departamento de Ciencia Básicas, ante la necesidad creciente de los investigadores, de adquirir nuevos conocimientos científicos en áreas avanzadas de la Modelación Matemática, la Estadística y la Computación, ha desarrollado un grupo de acciones relacionadas con: conferencias especializadas, introducción de estos temas en estudios de maestrías en Producción Animal, Medicina Veterinaria Preventiva, Producción Rumiantes, Ciencia Agrícola, Reproducción, así como en cursos de post grado. Se propuso (Guerra et al 2000, 2002) un sistema de superación profesional que incluye los diplomados sobre: Modelos Matemáticos y Estadísticos aplicados a la gerencia académica e investigativa y otro sobre Biomodelos.

La participación de profesores de Matemática en otros proyectos de investigación relacionados con: Procesos de producción de leche (Fernández et al 2001a, b) , disposición espacia de plagas, entre otros, mantienen un reto constante por el continuo desarrollo científico –técnico y actualmente se trabaja en diferentes líneas como muestra el esquema 1



Esquema 1 Modelación Matemática Aplicada a procesos biológicos y productivos

Por otra parte con frecuencia se recoge en la literatura científica y docente muy pocos aspectos que avalen las cualidades de los modelos estadísticos, principalmente de regresión tanto en el orden teórico como en lo práctico, así como no se expresan sus posibilidades descriptivas, explicativas o predicativas en el contexto de la situación dada. Para contribuir al realismo, precisión y generalidad en la aplicación de los modelos estadísticos de regresión y otros, algunos (Guerra et al, 2001) teniendo en consideración criterios aportados por diferentes autores (Méndez, 1993; Peña, 1994; entre otros) y paquetes estadísticos ponen a consideración y describen los siguientes aspectos en la selección de modelos estadísticos:

1. Métodos de ajuste de los modelos.
2. Error estándar de los estimadores de los parámetros.
3. Coeficiente de variación de los estimadores.
4. Límites de confianza de los parámetros.
5. Test de redundancia de los parámetros.
6. Análisis de Varianza relacionado con el modelo en cuestión.
7. Coeficiente de determinación R^2 y R^2 ajustado por los grados de libertad.
8. Suma de Cuadrados y Cuadrado Medio Residual.

9. Error estándar de estimación.
10. Test de falta de ajuste del modelo.
11. Análisis del efecto del uso de transformaciones en el modelo.
12. Diagnóstico y tratamiento de la multicolinealidad en modelos de regresión lineal múltiple.
13. Validación de las predicciones del modelo.

    Estadístico PRESS (Suma de Cuadrados del Error de Predicción).
    Estadístico CMEP (Cuadrado Medio del Error de Predicción).
    Estadístico Cp de Mallows.
    Coeficientes de Correlación entre los resultados predichos y los reales.
    Análisis de la precisión de las estimaciones.

14. Análisis de los residuos:
    Normalidad (Test de Shapiro-Wilks, Kolmogorov-Smirnov, etc.)

    Autocorrelación (Test de Rachas, Signos, Durbin-Watson, χ^2 de independencia, Ljung y Box)
    Homocedasticidad (Gráficos de los residuos, test de Cochran, Bartlett y Hartley).
    Otros estadísticos relacionados con los residuos que aparecen en los paquetes estadísticos, así como gráficos.

Esta temática se enriquece con las investigaciones de los cursistas de pregrado (cursos diurno y para trabajadores) en trabajo científico estudiantil y mayormente en postgrado en tutorías y asesorías de tesis de doctorado y maestrías y en los servicios científicos que se prestan, lo que representa un reto para la Educación Superior en el presente milenio.

Conclusiones

Los resultados obtenidos con la introducción de la Modelación Matemática vinculados a procesos biológicos han permitido dar un salto cualitativo en la formación y superación de profesionales e investigadores, en la investigación científico técnica y los servicios científico - técnico en el ámbito agropecuario

Referencias bibliográficas

Del Pozo, P. P. y Fernández, L. (2001) El Papel de la modelación y la simulación en la investigación de las ciencias agropecuarias. *Revista de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas*, Universidad de Nariño RECYM. : 101-120. ISSN 0124-0285.

Fernández, L. (1996) *Modelos que describen la Dinámica de los procesos biológicos en las Ciencias Agropecuarias*. Tesis de maestría en Matemática Aplicada a las Ciencias Agropecuarias. UNAH.

Fernández, L. & Martínez A. y Del Pozo, PP. (2000) Modelación Matemática y Método Científico, su impacto en las Ciencias Agropecuarias. *Revista de Ciencias Técnicas Agropecuarias*. Volumen 9 número 3 y 4/ 2000. pp. 63-60.

Fernández, L. & Menéndez, A. & Guerra, W. and Suárez, M. (2001a) Estimation of the standard lactation curves of the Siboney de Cuba breed for their use in lactation. *Cuban Jornal of Agricultural Science*, 35(2): pp. 93-97.

Fernández, L. & Menéndez, A. & Guerra, W. y Suárez, M.: (2001b) Modelado de la curva de lactancia en el Siboney de Cuba con pesajes individuales y efectos incluidos. *CD Publicaciones ALPA*. Noviembre 2001. ISBN 959-7164-03-5.

Guerra, W. & De Calzadilla, P., Josefina. (2000) *El Modelo Estadístico en el Sistema de conocimiento de la Estadística en el nivel superior agropecuario*. DICT, UNAH.

Guerra, W. & Cabrera A y Fernández, L. (2001) Aplicación de criterios para la selección de modelos estadísticos en la investigación científica. *Revista Cubana de Ciencia Agrícola*. En proceso de publicación.

Guerra, W. y Fernández, L. (2002) Propuesta de un sistema de superación profesional sobre métodos estadísticos. *Revista de Ciencias Matemáticas*. Vol. 2. .

Méndez, R. I. (1993) Uso y abuso de la Estadística en la investigación. *Tópicos de Investigación y Postgrado*. III(2):3-8.

Peña, D. (1994). '2. Modelos lineales y series temporales' en *Estadística, Modelos y Métodos*, Alianza Editorial, S.A., Madrid, España.

Resolución de problemas

Aprender matemáticas en la escuela primaria en Cuba, utilizando las potencialidades del programa audiovisual.

Aida María Torres Alfonso.
Idelfonso Ramírez Suárez.
Departamento Matemática.
Universidad Central de las villas.
Cuba.

Maria Luz Carrazana saavedra.
Rossana Virginia Canalda Benítez.
Esc.Primaria "Marcelo Salado".
Santa Clara.
Cuba

aida@uclv.edu.cu

Resumen

Es una realidad que el programa audiovisual dirigido a complementar la educación y preparación cultural de profesores y estudiantes en las escuelas en Cuba, ha ampliado su alcance y se ha diversificado en los últimos cursos escolares. Pero teniendo una profunda conciencia de que la dirección del país nos ha puesto en las manos medios imprescindibles para contribuir en corto tiempo a la calidad y transformación de la educación, en este trabajo se esboza cual sería el papel del programa audiovisual para trabajar la motivación en la solución de problemas, lográndose que tanto profesores como estudiantes, no solo valoren la utilidad social de esta actividad sino que se interiorice la significación que puede tener para los escolares el desarrollo de su pensamiento lógico y su propia personalidad.

Introducción

La capacitación del hombre para la solución de problemas es un punto muy discutido en el mundo pues se considera una actividad de gran importancia en el proceso de enseñanza aprendizaje que debemos concebir en este siglo XXI. En este sentido se comprende cada vez con más claridad que no se trata de que en la escuela se "depositen" contenidos en los alumnos como si se tratara de recipientes, sino de desarrollar sus capacidades para enseñarlos a aprender.

En nuestras aulas universitarias se forma el futuro profesional, el cual debe poseer habilidades y hábitos, basados en una esfera especializada del conocimiento. Pero diferentes experimentos pedagógicos realizados demuestran que estas habilidades no se están logrando totalmente y que a veces los estudiantes de las universidades no tienen dominio de las formas de pensamiento lógico que deben desarrollarse desde la escuela primaria.

Esta situación es real pero salvable, en el sentido de que está en la capacidad creadora y activa de los educadores la posibilidad de transformarla, por lo que el problema ***es enseñar a aprender***, es decir, hay que impartir métodos y técnicas de trabajo mental y desarrollar en el estudiante capacidades del pensamiento y del trabajo independiente. En otras palabras, no se puede separar el saber del saber hacer, porque ***saber siempre es saber hacer algo***, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer.

El trabajo propone una forma de utilizar; el programa audiovisual: medios tecnológicos que el país ha proporcionado por igual en escuelas de los diferentes niveles de enseñanza: televisores, videos, computadoras; con el objetivo de contribuir en corto tiempo a una mayor calidad y transformación de la educación; en la necesaria formación matemática que debemos desarrollar en edades tempranas, esbozando cuál sería el papel del mismo para trabajar la motivación en la solución de problemas.

Desarrollo

Variadas son las investigaciones que han abordado la temática de la resolución de problemas desde la enseñanza Primaria hasta la Universitaria, con diversidad de enfoques y resultados. Fundamentaremos nuestras propuestas didácticas partiendo fundamentalmente de los resultados obtenidos por el Grupo: "Aprende a resolver problemas aritméticos", del Proyecto TEDI: Técnicas de Estimulación del Desarrollo Intelectual del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, de Cuba.

Según Campistrus y Rizo (1998) las investigaciones demuestran que existen muchas dificultades en los alumnos para resolver problemas en general, teniendo entre las causas de este fenómeno unas muy importantes relacionadas con la metodología de su tratamiento. Por lo general los procedimientos metodológicos que se dan están dirigidos a acciones del maestro, es decir una **metodología de enseñanza** y no está dirigida a la búsqueda de procedimientos de actuación para el alumno.

Para alcanzar las metas propuestas con los profesionales que necesitamos en el siglo XXI, no basta perfeccionar la enseñanza en los centros universitarios, debemos lograr que los estudiantes desde que reciben los primeros conceptos, desarrollen las habilidades esenciales para su ulterior utilización, por lo que es preciso trabajar desde la enseñanza primaria con una estimulación directa, evitando que el propio maestro indique como se encuentra la solución de un problema especifico o ayudando a "clasificar" los mismos por sus palabras claves, cuestión esta que no logra desarrollo del pensamiento lógico, ni algorítmico en los niños. Otra de las barreras que existe para enseñar a resolver problemas, es que cuando se concibe su ejecución dentro del salón de clases, los mismos se utilizan en función de desarrollar habilidades de cálculo y la graduación de sus dificultades es deficiente.

El presente trabajo propone diseñar situaciones didácticas en el aula que contribuyan a la necesaria transformación del proceso de enseñanza aprendizaje en el nivel primario: creando la necesidad de concebir la enseñanza de las matemáticas como una Enseñanza Basada en Problemas según Rivero O. 2000 entrando en contacto con todos los elementos que intervienen en esta estrategia didáctica y sus múltiples relaciones: maestro, estudiantes, familia, comunidad y diseño instruccional (programa, materiales didácticos, actividades de aprendizaje, contenidos, sistema de evaluación, trabajo de grupos cooperativos)

Para todo ello, es necesario que el profesor sea un creador, un guía que estimule a los estudiantes a aprender, a descubrir y sentirse satisfecho por las capacidades desarrolladas, lo cual puede lograrse si aplica correctamente la enseñanza problémica, pues precisamente sus funciones son:

- Garantizar que, paralelamente a la adquisición de conocimientos, se desarrolle un sistema de capacidades y hábitos necesarios para la actividad intelectual.
- Propiciar la asimilación de conocimientos al nivel de su aplicación creadora y que no se limite al nivel reproductivo.
- Enseñar al alumno a aprender, pertrechándolo de los métodos del conocimiento y del

pensamiento científico.

- Contribuir a capacitar al educando para el trabajo independiente al adiestrarlo en la revelación y solución de las contradicciones que se presentan en el proceso cognoscitivo.
- Promover la formación de motivos para el aprendizaje y de las necesidades cognoscitivas.
- Contribuir a la formación de convicciones, cualidades, hábitos y normas de conducta.

Como se observa este método de enseñanza contribuye al cumplimiento del sistema de principios didácticos, al carácter científico, a la vinculación de la escuela con la vida, refuerza el carácter dirigente del profesor, la actividad independiente del alumno y el carácter consciente y activo del alumno en el del proceso de aprendizaje.

Papel del Programa Audiovisual para trabajar la motivación en la solución de problemas en la Enseñanza Primaria.

En el proceso de formación de motivos para la solución de problemas no basta con lograr que el alumno comprenda y valore la utilidad social de esta actividad sino que es necesario que interiorice la significación que puede tener en el desarrollo de su propia personalidad y realice las valoraciones personales sobre esa significación: Campistrus y Rizo (1998). Lo que al no lograrse de forma espontánea, solo porque el alumno reiteradamente resuelva problemas, debe hacerse estructurando el conocimiento del alumno diseñando actividades docentes verdaderamente motivantes para él. Nuestra propuesta consiste en usar el video, como uno de los medios con que cuenta cada una de las escuelas primarias en Cuba, como recurso didáctico en el aula según Abraira C, Alexander M y Aida T (2001) En el caso de la Educación Primaria, pudiesen ser: el video - apoyo, el programa motivador y también el monoconceptual.

Debemos proporcionar a los maestros el uso de materiales didácticos basados en las nuevas tecnologías, y diseñados por o para ellos, teniendo en cuenta siempre la experiencia de los mismos y sus necesidades educativas, así como las principales dificultades que en el aprendizaje de las matemáticas, confrontan sus alumnos. Pudiendo tener los mismos, efectos profundos tanto en los contenidos de los currículos de las matemáticas como en las actividades que se realizan en clase. Estos materiales deben ser concebidos teniendo en cuenta los siguientes principios:

- Lograr la interdisciplinariedad en cuanto a los temas a resolver, teniendo en cuenta el resto de las asignaturas que el niño está recibiendo en ese momento.
- Ajustarse a la realidad que le es significativa al niño.
- Proponer situaciones desde las cuales el niño y el profesor puedan formular problemas y resolverlos.
- Utilizar la Historia tanto de la Matemática como de la Patria y sus principales acontecimientos

La experiencia cubana del uso de videos educativos en otras asignaturas, el reconocimiento de éxito por parte de estudiantes, profesores y la sociedad en general, de conjunto con los estudios teóricos anteriormente referidos, nos hacen proponer algunos de los temas donde se pueden trabajar con materiales didácticos, con el objetivo de lograr la motivación hacia la resolución de problemas matemáticos:

1. Tabla Financiera del Banco Central de Cuba.
2. Búsqueda de datos geográficos interesantes.
3. Problemas que requieran de datos históricos.
4. Describir espacios de tu entorno con las figuras geométricas y sus características.
5. Desde la ética y la Educación Formal, formular problemas.

Estos son algunos ejemplos donde podemos, con el uso de los medios audiovisuales lograr la motivación en los niños, no solo por la matemática, sino también por nuestra Historia y fomentar en ellos valores en función de su formación integral.

Conclusiones

Coincidiremos que cuando el estudiante se enfrenta a la solución de problemas en esta enseñanza, lo hace ante ejemplos que deben aprender a resolver con un mínimo de esfuerzo y la máxima probabilidad de éxitos, con un uso racional de su labor intelectual. Sin embargo, en la experiencia cubana siempre lo hace a una problemática social o cotidiana, es decir, él debe representar en su mente, pudiéndolo ahora además, visualizar lo que se le está planteando y el objetivo es enseñarlo a traducir esa situación al lenguaje matemático y resolverlo. De mucha utilidad para lograr este empeño lo será el uso óptimo de los medios que disponemos en las aulas y es por eso que nuestra propuesta concibe no solo la posibilidad de videos educativos elaborados al respecto, sino de materiales que pudiesen ser elaborados por los propios maestros aprovechando las potencialidades que ofrece el propio programa.

Es por eso, que teniendo en cuenta la variedad de problemas que pueden ser planteadas al estudiante proponemos crear situaciones didácticas en el aula donde el alumno sea el agente activo y el proceso de aprendizaje se enriquezca, teniendo un papel muy creador el maestro, el cual debe estar preparado para asimilar estas nuevas tecnologías, desde el punto de vista pedagógico, que es el verdadero reto. Para lo cual debemos diseñar también todo un sistema de preparación a distancia o presencial en dependencia de la ubicación geográfica de este maestro, teniendo en cuenta que en todas las escuelas primarias del país también el tendrá al menos una computadora.

Referencias bibliográficas

Abraira, C. (1999). Nuevas tecnologías para la educación matemática: una asignatura pendiente. *Educación en Ciencias, 8 (*III), pp. 44-50.

Abraira. C & Alexander M y Aida T. (2001). Uso del video como recurso didáctico en el aula. *COMAT 2001*, Matanzas, Cuba.

Campistrus L y Rizo, C. (1998). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación. Habana, Cuba.

Hing, R. (1999). *Conferencias de Educación Matemática Universidad EAFIT*, Medellín, Colombia.

Hing. R. y Aida, T (2000). Desarrollo de habilidades del pensamiento lógico, la modelación matemática y el pensamiento algorítmico en la enseñanza de la matemática en la escuela primaria. *Memorias de COMPUMAT 2000*, Manzanillo, Cuba.

Majmutov, M. I. (1983). *La Enseñanza Problémica*. La Habana, Ed Pueblo y Educación,

Más, S. (2001). Mayor alcance y diversificación del programa audiovisual. Extraído en prensa: *EL HABANERO DIGITAL*: http://www.elhabanero.cubaweb.cu Septiembre 2001.

Maz, A. (1999). Historia de las matemáticas en clase: ¿por qué?, ¿para qué? En I. Berenguer, J.Mª Cardeñoso y M. Toquero (eds.): *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad.* Granada: Sociedad Thales y Universidad de Granada. pp. 205-210.

Rivero, O (2000). Aprendizaje basado en problemas, una alternativa. Extraído de la revista Digital *Contexto Educativo.*

La resolución de problemas en la formación de profesionales matemáticos en Cuba.

Baldomero Valiño Alonso   *Julián Bravo Castillero.*

Universidad de La Habana. Facultad de Matemática y Computación. Cuba.

bval@matcom.uh.cu   jbravo@matcom.uh.cu

Resumen

En este trabajo se presentan las experiencias desarrolladas con el objetivo de contribuir a la formación de habilidades para la resolución de problemas en estudiantes de primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática. Concretamente, se presenta la propuesta de actividades a desarrollar dentro del contexto de la asignatura "Seminario de Problemas I", con la que se inicia el programa de la disciplina "Práctica Profesional del Matemático", existente en el plan de estudio de la carrera en las universidades cubanas desde el curso 1990 – 91 (Plan de Estudio "C" de la carrera de Matemática). Uno de los propósitos del curso es recorrer, a partir de problemas físicos, geométricos, algebraicos, etc., diferentes etapas de la investigación matemática desde la formulación del problema; la obtención del modelo matemático (por ejemplo, determinar las raíces de una ecuación); los métodos de resolución (exactos y aproximados: numéricos y/o analíticos) y su implementación computacional; la utilización de técnicas para verificar la corrección de los resultados obtenidos (compatibilidad con las unidades de magnitud, estudio de casos límite, etc.) y su interpretación. Otro objetivo importante que persigue este curso es contribuir al desarrollo de hábitos de investigación científica mediante la orientación de un trabajo de curso sobre aspectos de la vida y obra de algún matemático. La exposición y defensa de los resultados de sus búsquedas, ante el colectivo de estudiantes, permite desarrollar sus habilidades de expresión oral y su formación cultural en la especialidad.

Antecedentes de la disciplina

Los antecedentes históricos de la disciplina "Práctica Profesional del Matemático" se remontan a los primeros años de la década de los sesenta cuando, pretendiendo dar cumplimento a los lineamientos trazados por la Reforma de la Educación Superior de 1962, se hacen los primeros intentos de lograr una vinculación efectiva de los estudiantes de matemática con la problemática social, con el objetivo de ampliar el espectro de posibilidades de utilización de este personal altamente calificado, que ante de 1959 encontraba su realización profesional, fundamentalmente, en el ejercicio de la docencia secundaria y universitaria. Primero en forma esporádica y luego con mayor frecuencia, comienzan a participar los estudiantes de Matemática, conjuntamente con sus profesores, en distintas tareas de investigación y desarrollo, en colaboración con profesionales de otras carreras. Un ejemplo de estas actividades, en la que hubo una participación masiva, fueron las tareas previas y la capacitación y el procesamiento de datos del censo de población y vivienda realizado en Cuba en 1971.

Un momento decisivo en el proceso de integración de los estudiantes universitarios a la producción y a la investigación fue el curso 1971-72, a partir del cual se generalizó la vinculación del estudio con el trabajo en todas las carreras de la universidad de La Habana y, un poco después, en las restantes universidades. Los estudiantes de Matemática se vinculan en esta etapa a distintas dependencias de organismos estatales y centros de investigación y de educación superior.

El régimen de estudio-trabajo tuvo su base oficial en el primer plan de estudio unificado de Matemática, que entró en vigor en las tres universidades cubanas en el curso académico 1973-74. En el curso 1975-76 comienza una nueva adecuación de dicho plan, incrementando las horas semanales de las semanas lectivas en primero y segundo años, la práctica de producción comienza a desarrollarse a partir del tercer año y se fija como forma de culminación de los estudios, el trabajo de diploma.

Al crearse en 1976 el Ministerio de Educación Superior, se emprende de inmediato la tarea del perfeccionamiento de los planes y programas de estudio de la Educación Superior. En el curso 1977 – 78 se ponen en vigor el plan de estudio "A" para la carrera de Matemática, con las especializaciones "Matemática Pura", "Estadística Matemática" e "Investigación Operacional". La duración de los estudios se fija en cinco años, con cinco semestres en tronco común, prácticas de elevación de la calificación y especializada en tercero y cuarto años y el trabajo de diploma como forma de culminación de la especialidad.

En el plan de estudio "B" de Matemática, vigente desde el curso 1982-83, desaparecen las especializaciones que existían en el plan "A" y se plantea el objetivo fundamental de la formación de un matemático de perfil amplio. Sin embargo, en la práctica no siempre se lograba la realización de un sistema de tareas que contribuyeran a la formación de las habilidades de aplicación y generalización de los conocimientos teóricos desarrollados por las diferentes disciplinas del Plan.

En el plan de estudio "C" (1990 – 91) adquiere mayor relevancia el objetivo de formación de un profesional de perfil amplio, por lo que se comienza por definir el concepto de matemático de perfil amplio, cuya actividad profesional se caracteriza por la aplicación de los métodos y modelos matemáticos ya conocidos a la resolución de problemas reales surgidos en las diferentes esferas de actuación, la elaboración de nuevos métodos cuando los ya conocidos no sean aplicables, la modelación matemática de situaciones diversas que forman parte del objeto de otras profesiones, la utilización de los algoritmos de cálculo que posibiliten la utilización de las programotecas existentes o mediante el diseño de los algoritmos de cálculo elaborados para la utilización práctica de esos modelos, la asesoría a otros profesionales de estas materias y su enseñanza en el nivel de educación superior. Todas estas tareas pueden dar lugar al planteamiento de problemas de índole puramente teórica, cuya solución implique nuevos aportes al conocimiento matemático.

La disciplina de la "Práctica Profesional del Matemático" se crea en el plan de estudio "C" para materializar esos objetivos de la formación del futuro matemático, integrando en una sola disciplina los aportes de las restantes disciplinas de la carrera a la resolución de problemas de aplicación e investigación, para los cuales se requiere frecuentemente la utilización de diversos métodos y algoritmos que son objeto de estudio de distintas disciplinas. En esta disciplina se conjugan actividades académicas, laborales e investigativas que intentan modelar el conjunto de tareas profesionales que deberá asumir el egresado en su vida laboral.

En la nueva versión del plan "C" (1998 – 99), ver [1], se han introducido ligeros cambios en el programa de la disciplina, con el objetivo de fortalecer la concepción de perfil amplio en la formación del matemático. Las prácticas laborales e investigativas comienzan a desarrollarse desde el primer año, de manera que su desarrollo y organización puedan conjugarse con los seminarios de problemas y los seminarios especializados. Además, las asignaturas optativas se incluyen dentro de este programa (al igual que en el anterior se incluían los cursos especializados optativos) para dejar constancia del número de tales asignaturas que cada estudiante está obligado a cursar en la carrera.

Nuestro principal propósito es someter a su consideración y análisis el sistema de conocimientos y la metodología empleada, para lograr cumplimentar los objetivos propuestos en la primera asignatura que constituye la disciplina "Práctica Profesional del Matemático", la cual es precisamente "Seminario de problemas I", con el fin de enriquecerlos y perfeccionarlos.

Objetivos de la asignatura:

Seminario de problemas I se imparte durante 32 horas lectivas del segundo semestre del primer año de la carrera. Los objetivos generales educativos e instructivos a cumplir según establece el programa de la disciplina son:

1. Consolidar la concepción científica del mundo, y en particular el objeto de la ciencia matemática, mediante la investigación referativa de datos históricos acerca de alguna de las teorías que se estudian en las restantes disciplinas del año o sobre la biografía de los matemáticos que las crearon.
2. Aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas en las asignaturas Álgebra I, Análisis Matemático I, Geometría Analítica y Programación de Algoritmos, para la resolución de problemas especialmente diseñados que contribuyan a completar y profundizar dichos conocimientos, mediante el trabajo independiente de los estudiantes.
3. Adquirir hábitos de búsqueda de información científica en bibliotecas, centros de información, vía Internet, etc., relativas a los problemas propuestos en el seminario y a ejercitarse en el uso de la literatura auxiliar, tanto en la lengua materna como en idioma inglés.
4. Desarrollar habilidades de expresión oral mediante la exposición y defensa de los resultados de sus búsquedas, ante el colectivo de estudiantes.

Contenido de la asignatura:

El programa analítico no es rígido y cada profesor tiene la libertad de seleccionar un sistema de conocimientos para cumplimentar estos objetivos. Los contenidos seleccionados son, por temas:

i) Problemas geométricos y físicos que conducen a la solución de ecuaciones algebraicas.

ii) Introducción a los métodos iterativos. Extracción de raíces cuadradas por el método de aproximaciones sucesivas. Aplicación del método de aproximaciones sucesivas a la extracción de raíces con exponente natural. Método de iteraciones.

Significado geométrico del método de iteraciones.

iii) Método de cuerdas. Método de cuerdas perfeccionado. Método de Newton para la solución aproximada de las ecuaciones algebraicas. Significado geométrico del método de Newton. Elección de las primeras aproximaciones. Método combinado para resolver las ecuaciones. Criterio de convergencia del proceso de iteraciones. Rapidez de convergencia del proceso de iteraciones. Aproximaciones sucesivas en la geometría.

iv) Noción sobre los métodos de perturbación para la solución de ecuaciones algebraicas dependiente de un parámetro pequeño.

Desarrollo metodológico

1. Desde el primer encuentro después de declarar los objetivos y características del curso, se recomienda la orientación de un Trabajo Investigativo sobre datos históricos acerca de alguna de las teorías que se estudian en las restantes disciplinas del año o sobre la biografía de los matemáticos que las crearon. La entrega de los Trabajos de Curso pudiera señalarse para la semana 13 (el curso consta de 16 semanas) con el objetivo de que las correspondientes defensas se realicen durante las subsiguientes semanas mediante presentaciones orales ante el colectivo de estudiantes.

2. También desde el primer encuentro se proponen algunos problemas geométricos y físicos que conducen a la solución de ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, **Problema (A)** Dividir un segmento $\overline{AB}$ en la razón media y extrema (es decir, en los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ tales que $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CB}$). Respuesta: $x^2+lx-l^2=0$, donde x representa la longitud del segmento $\overline{AC}$; **Problema (B)** Dividir el ángulo α en tres partes iguales. Respuesta: $4x^3-3x-\cos\alpha=0,\ x=\cos\frac{\alpha}{3}$ Recordar que este es uno de los tres problemas clásicos de la matemática griega, que se debían resolver con regla y compás. Trisección del Ángulo, Duplicación del Cubo $(x^3=2l^3)$, Cuadratura del Círculo $(x^2=\pi r^2)$. Para mayor documentación, consultar, por ejemplo [2] páginas 268 – 286. **Problema (C)** Una piedra se deja caer en un pozo. Hállese la profundidad del pozo, si se conoce que el sonido provocado por la caída de la piedra se ha captado T segundos después de topar la piedra el fondo del pozo.

Respuesta: $\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=T$, siendo v la velocidad del sonido, g la aceleración de la gravedad y x la profundidad del pozo. Observar que el cambio $\sqrt{x}=y$ transforma la ecuación irracional en $\frac{y^2}{v}+\sqrt{\frac{2}{g}}y-T=0$. La solución de este problema es

$x(t)=\left(\sqrt{\frac{2v^2}{g}+Tv}-v\sqrt{\frac{2}{g}}\right)^2$ importante resulta destacar las interpretaciones físicas de los casos límites de $x(t)$ cuando $t \to 0$ y $t \to +\infty$. **Problema (D)** (Aquiles y la Tortuga). Sea la distancia entre ambos 1000 pasos, la velocidad del primero de 10 pasos por segundo y la del segundo 1 paso por segundo. ¿qué tiempo demoraría Aquiles para alcanzar a la Tortuga?. Respuesta: Aquí la ecuación es $10t-t=1000$ donde t designa el tiempo buscado, $t = \frac{1000}{9}s = 111\frac{1}{9}\ s$.

. Los seminarios segundo y tercero son dedicados a la discusión y solución de los problemas propuestos, y a la introducción del método de aproximaciones sucesivas mediante los razonamientos del filósofo griego Zenón de Elea (≈-500), usados para "demostrar" la ausencia de movimiento en la naturaleza, a partir del problema de Aquiles y la Tortuga previa transformación del modelo en $t_{n+1}= 100+\frac{t_n}{10}$. Ilustrar que la sucesión $t_1= 100, t_2=110, t_3=111, t_4=111{,}1\ldots$ converge al valor exacto $t=111\frac{1}{9}$ Destacar que la clave del éxito, o sea de la convergencia radica en que el término $\frac{t}{10}$ es pequeño comparado comparado con t y mostrar que de lo contrario la sucesión no convergería a la solución buscada. Supongamos, por ejemplo, que Aquiles no compite con una tortuga lenta sino con un antílope cuya velocidad es de 20 pasos por segundo. En este caso la ecuación sería $10t-20t=1000$. La solución $t=-100$ indica que Aquiles y el animal se encontraban al lado hace 100 segundos y la diferencia entre ellos sólo va aumentar en lo ulterior. Aquí la ecuación análoga de "punto fijo" $t_{n+1}= 100+2t_n$, para $t_0=0$ conduce a una sucesión divergente $t_1= 100, t_2=300, t_3=700, t_4=1500,\ldots$ Aquí se manifiesta la necesidad de exigir ciertas condiciones a la función definida por el miembro derecho de $x = \varphi(x)$. A modo de un segundo ejemplo sobre el método de aproximaciones sucesivas para la resolución de ecuaciones se pudiera estudiar la ecuación $ax=b, \frac{1}{2}\leq a\leq 1$ mediante previa transformación a $(*) x_{n+1}=(1-a)x_n+b$. La justificación de la convergencia del método en este caso queda garantizada por la igualdad $\frac{b}{a} = \frac{b}{1-(1-a)} = \sum_{q=0}^{\infty} b(1-a)^q$ pues si designamos por x_n la suma de los n primeros términos de la serie geométrica convergente resulta la igualdad (*). Como ejercicio de tarea proponer la obtención de un "esquema iterativo" para calcular con la exactitud que se desee la raíz cuadrada de un número a.

. El cuarto seminario es dedicado a la extracción de raíces cuadradas por el método de aproximaciones sucesivas y a la fundamentación matemática de este proceso iterativo, siguiendo las ideas desarrolladas en las páginas 21-28 de [3]. De tarea se propone la confección de un programa capaz de calcular la raíz cuadrada de cualquier número positivo con la precisión deseada. En este punto se destaca la interpretación numérica del concepto de límite (sucesión de Cauchy) y su importancia como criterio de parada de los procesos iterativos. Además, se conduce (mediante ejercicios que conducen a la demostración de que el límite de la sucesión de los correspondientes errores $\alpha_n = x_n - \sqrt{a}$ converge a cero cuando $n \to +\infty$) a que los estudiantes demuestren la convergencia del correspondiente esquema iterativo y que concluyan la necesidad tener una aproximación inicial "adecuada", exigencias para la función que modela el miembro derecho de la ecuación de punto fijo $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ y un criterio de parada de dicho proceso iterativo.

5. El quinto seminario involucra la aplicación del método a la extracción de raíces con exponente natural. Esta investigación se orienta de tarea al finalizar el seminario 4.
6. Los seminarios 6 y 7 son dedicados a la generalización del método de iteraciones para ecuaciones más generales, su significado geométrico. El concepto de aplicaciones contraídas y su relación con el método de iteraciones.
7. Los seminarios 8 y 9 son dedicados al estudio del Método de cuerdas, Método de cuerdas perfeccionado, Método de Newton y sus correspondientes significados geométricos. Para este último Método se introducen criterios adecuados para la elección de las primeras aproximaciones. Criterio de convergencia del proceso de iteraciones y su rapidez de convergencia.
8. Los seminarios 10 y 11 son dedicados a la aplicación combinada de los métodos estudiados para resolver ecuaciones. Se orienta la confección de programas para el cómputo.
9. Los seminarios 12 y 13 son utilizados para introducir y ejercitar la noción del método de perturbaciones regulares y singulares con el objetivo de resolver ecuaciones algebraicas dependientes de un parámetro pequeño ε. Para este punto se siguen los primeros epígrafes de [4] donde sólo ecuaciones algebraicas de segundo grado, dependientes de parámetros pequeños, son investigadas, de manera que el estudiante puede notar la eficiencia de los métodos de perturbación comparando las soluciones aproximadas con las ya conocidas soluciones exactas.

Conclusiones

La selección del método de aproximaciones sucesivas como lineamiento básico para lograr los objetivos del programa está amparada por la gran importancia de este método en los fundamentos de importantes resultados teóricos que son básicos en otras disciplinas de la carrera. Por ejemplo, el teorema de punto fijo y el concepto de aplicaciones contraídas es vital para la demostración de los teoremas de existencia y unicidad del problema de Cauchy para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde se aplica el conocido método de las aproximaciones sucesivas de Picard.

El conocimiento de la existencia de métodos aproximados (numéricos y analíticos) de solución de problemas, desde el mismo primer año, contribuye a la formación de un matemático capaz de enfrentar situaciones prácticas cuyos modelos matemáticos, difícilmente puedan ser abordados por métodos exactos de solución. Este aspecto es esencial en la formación de un matemático de perfil amplio.

Referencias bibliográficas

Valiño, B. (1998). *Plan de Estudio "C" Perfeccionado. Carrera de Matemática.* Comisión Nacional de la Carrera de Matemática, La Habana.

Davidson, L. J & Reguera, R. & Frontela, R y Díaz, M. (1995). *Problemas de Matemática Elemental 2,* Pueblo y Educación.

Vilenkin, N.Ya. (1978). *Método de Aproximaciones Sucesivas*, Mir, Moscú.

Hinch, E.J. (1991). *Perturbation Methods*, Cambridge University Press.

Epistemología

Aplicación de la teoría de la actividad a la formalización de enunciados con lógica de predicados: un primer acercamiento

José Luis Ramírez Alcántara
Becario del CONACYT, México
Joseluis.Ramírez@campus.uab.es

Carmen Azcárate Giménez
Universidad Autónoma de Barcelona, España
Carmen.Azcarate@uab.es

Resumen

En este trabajo se describe una investigación en curso, en que se aborda una de las problemáticas que se presenta en los cursos de Lógica o Inteligencia Artificial, en el tema de representación del conocimiento, cuando se pide a los estudiantes formalizar enunciados del lenguaje común (natural) con el lenguaje de la Lógica de predicados. Se describen algunos de los errores identificados con alumnos del nivel superior y se aplica la Teoría de la Actividad para caracterizar la habilidad de traducir enunciados del lenguaje común (natural) a fórmulas bien formadas del lenguaje de la Lógica de predicados. Se propone una base de orientación que se deben usar al resolver los problemas de formalización (traducción) que se plantean en los cursos mencionados.

Introducción

En los cursos de Lógica e Inteligencia Artificial que se han venido impartiendo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Guerrero, el Instituto Tecnológico de Zacatepec y en el Centro Nacional de Desarrollo Tecnológico **(CENIDET)**[1] se han detectado ciertas deficiencias que los estudiantes presentan al abordar el tema de la representación del conocimiento con la Lógica de predicados.

Algunas de las dificultades observadas (en las consultas que los estudiantes hacían, en los ejercicios planteados en clase y en los resultados de los exámenes) fueron: desconocimiento de la simbología empleada y del significado de los cuantificadores y conectivos. También se identificaron los diversos tipos de errores que se cometen al traducir del lenguaje coloquial (escolarizado) a fórmulas bien formadas (FBF) tanto de la lógica de proposiciones como de predicados.

La formalización de enunciados del lenguaje natural con la Lógica proposicional, ha sido estudiando por Juárez [1996]. En su trabajo propuso una forma de desarrollar la habilidad para traducir del lenguaje escolarizado a FBF de la lógica proposicional.

En este trabajo retomaremos el fundamento teórico utilizado por el autor citado, en el párrafo anterior, y propondremos una forma de desarrollar la habilidad para traducir (formalizar) enunciados del lenguaje común (natural) FBF de la lógica de predicados.

Descripción del problema

El problema de la traducción o formalización de enunciados del lenguaje natural con el lenguaje de la Lógica de predicados se puede expresar de la siguiente forma: en primer

[1] Instituciones de educación superior de México.

lugar se requiere la identificación de cuantificadores, conectivos y predicados, así como el universo de referencia y posteriormente construir la FBF que se le asocia al enunciado.

Podemos decir que, en general, en el momento en que se aborda el proceso de traducción de enunciados a FBF de la lógica de predicados, los estudiantes ya tienen una experiencia previa con proposiciones y se trataba de hacer una analogía con el trabajo que habían realizado, sin embargo, los estudiantes comenten con mucha frecuencia diversos errores al traducir los enunciados.

A continuación se describen algunos de los errores que se han presentado al formalizar un enunciando como el siguiente:

> *" Toño, Miguel y Juan pertenecen al Club Alpino. Cada miembro del Club Alpino es un esquiador o un alpinista. A los alpinistas no les gusta la lluvia y cualquiera a quien no le guste la nieve no es un esquiador. A Miguel no le gusta cualquier cosa que a Toño le gusta y le gusta cualquier cosa que a Toño le disguste. A Toño le gusta la lluvia y la nieve"*[2].

los que destacan son:

- **La no identificación adecuada de los predicados.**

  Traducir: " A *Toño* le gusta la lluvia y la nieve"

  Traducción 1: *G= A Toño le gusta la lluvia.*

  N= A Toño le gusta la nieve.

  fórmula: G$\wedge$N

  Traducción 2: *G(x)= x le gusta algo.*

  No escribe la fórmula.

  Error: En la primera traducción no se identifica el predicado "gustar" como un predicado relacional, parece que prevalece la concepción de proposición. En la segunda traducción no se considera al predicado "gustar" como una relación entre objetos.

- **Una delimitación inapropiada del universo de los objetos asociados a los predicados que aparecen en un enunciado.**

  En el ejemplo anterior (primera traducción), no se distingue un universo de objetos. En la segunda traducción, el único universo de referencia para el estudiante es el conjunto de individuos: {Juan, Toño, Miguel}, y los objetos como lluvia, nieve etc. no se consideran.

- **Uso equivocado de conectivos al traducir expresiones que contienen los cuantificadores universal y existencial.**

[2] Este es uno de los ejercicios que se propusieron a los estudiantes de las tres instituciones mencionadas.

Traducir: Cada miembro del "Club Alpino" es un esquiador o un alpinista.

Traducción 1: *A= cada miembro del club alpino es un alpinista.*

E= cada miembro del club alpino es un esquiador.

fórmula: $A \vee E$.

Traducción 2: *MCA(x) = x es miembro del club alpino.*

A(x) = x es un alpinista.

E(x) = x es un esquiador.

fórmula: $\forall(x)\ [MCA(x) \wedge [A(x) \vee E(x)\ ]]$.

Error: No se utilizó la implicación para traducir el cuantificador universal.

Aplicación de la teoría de la actividad

Para resolver la problemática detectada, se debe plantear un sistema de ejercicios que propicie el desarrollo de la habilidad para traducir del lenguaje natural a FBF de la lógica de predicados.

Para estructurar el sistema de ejercicios, en una primera instancia, de acuerdo a la Teoría de la actividad, se debe caracterizar la habilidad en términos de las acciones que la componen y posteriormente describir los pasos que se deben ejecutar para realizar la traducción con éxito. A este conjunto de pasos es a lo que se llama una base orientadora de la acción (BOA). En ella se describe la idea completa del proceso de traducción. La BOA debe estar acompañada de un sistema de preguntas que permitan tanto la evaluación del proceso de traducción como su control.

Posteriormente se diseña el proceso de instrucción en el que se aplique la teoría de Galperin de asimilación por etapas.

En este trabajo se describirán: a) la caracterización de la habilidad a desarrollar, b) los pasos a realizar que permiten traducir con cierto éxito y c) un esquema de lo que puede ser el sistema de ejercicios

a) **La caracterización de la habilidad.**

La habilidad para traducir de lenguaje escolarizado a FBF de la lógica de predicados debe ser descrita por un lado en términos de su estructura interna y por otro en términos de su función de orientación didáctica (BOA).

La estructura interna refleja el sistema de habilidades más básicas en que se basa la habilidad de traducir. En nuestro caso la definición que empleamos es la propuesta por la Dra. Herminia Hernández [1993]:

> *"La habilidad de **traducir,** en Matemáticas, permite adaptar a un marco matemático (formal) el lenguaje escolarizado para luego, en un proceso reversible, traducirlo de nuevo a lenguaje escolarizado".*

El sistema de acciones que componen la habilidad se describe de acuerdo a una variación del esquema general para resolver problemas plantead por Polya, y es el siguiente:

- Comprender el enunciado.
- Analizar el enunciado.
- Representar los cuantificadores, conectivos y predicados.
- Construcción de la FBF.
- Verificar la fórmula de predicados obtenida:

Para **traducir** se deben **identificar** los elementos estructurales.

Identificar es distinguir el objeto de estudio matemático sobre la base de sus rasgos esenciales. En este caso los objetos, implícitos o explícitos, son: los predicados, los conectivos lógicos y los cuantificadores.

Traducir presupone primeramente **comprender el enunciado.**

La acción de **análisis del enunciado** se refiere a identificar el tipo de predicados, indagar el alcance de los conectivos y cuantificadores, tomando como referencias explícitas los signos de puntuación y el sentido global de los predicados.

En nuestro caso la habilidad de traducir también comprende la acción de **representar**, lo que significa asignar a los predicados, conectivos y cuantificadores identificados un símbolo estándar de la lógica de predicados y **verificar** que la fórmula resultante cumpla con la definición de fórmula bien formada.

Habiendo identificado y representado los cuantificadores, conectivos y predicados, se propone un primera FBF que modele el enunciado. Para su **construcción** se debe tomar en cuenta el alcance de los conectivos y las convenciones asociadas al uso de los cuantificadores. Además se debe dar una primera interpretación a cada oración del enunciado y proponer una fórmula para cada una de ellas.

La **verificación de la fórmula de predicados** obtenida se realiza tomando en cuenta: la agrupación de la fórmula resultante con las reglas de asociación de los conectivos y cuantificadores dadas en la definición de las FBF; revisar la agrupación de la fórmula en términos de su delimitación por paréntesis[3]. Y finalmente, comprobar que la FBF respete el sentido del enunciado original

[3] Mosterín nos dice que "los paréntesis son al lenguaje formalizado lo que las pausas al lenguaje hablado y los signos de puntuación al lenguaje escrito normal" [Mosterín, 1983].

b) **los pasos a realizar que permiten traducir con éxito**

La función de orientación didáctica (base orientadora de la acción) se describe en términos de las acciones y operaciones que se deben realizar y puede esquematizarse de la siguiente manera:

ACCIONES	OPERACIONES
COMPRENDER EL ENUNCIADO	-Leerlo varias veces. -Expresarlo con sus propias palabras. -Identificar: conectivos lógicos explícitos (y, o, si... entonces, no) e implícitos, cuantificadores implícitos o explícitos. -Si no están explícitos, busque alguna manera equivalente en que puede aparecer el conectivo o el cuantificador.
ANALIZAR EL ENUNCIADO	-Identificar los predicados de acuerdo a su sentido semántico. -Analizar el alcance de los conectivos y los cuantificadores tomando como referencias explícitas los signos de puntuación y el sentido global de los predicados.
REPRESENTAR LOS PREDICADOS, CUANTIFICADORES Y CONCETIVOS	- Rescribir los predicados haciendo explícita su asociación con los conectivos y cuantificadores, respetando su significado original. - Asignar símbolos estándar a los predicados (P, Q, R, S, T, PA, MA, etc.), a los cuantificadores ($\forall, \exists$) y a los objetos (elementos del universo). - Asignar símbolos estándar a los conectivos lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$).
CONSTRUCCIÓN DE LA FÓRMULA	- Agrupar predicados y conectivos, para construir la fórmula de predicados, de acuerdo con la definición de FBF.
VERIFICAR LA FÓRMULA DE PREDICADOS OBTENIDA	- Comparar la agrupación de la fórmula resultante con las reglas de asociación de los conectivos y cuantificadores dadas en la definición de las FBF. - Revisar la agrupación de la fórmula en términos de su delimitación por paréntesis. - Verificar que la FBF respete el sentido del enunciado original.

Como ya se indicó antes, en el proceso de aprendizaje se debe incluir el control de las acciones ejecutadas, por lo que, se requiere, además de la BOA, un sistema de preguntas que obliguen a realizar una evaluación constante y le permitan al estudiante reflexionar antes y después de cada acción realizada.

c) Un esquema del sistema de ejercicios

El sistema de ejercicios a construir debe estar orientado tanto en su dosificación como su complejidad por las acciones que se deben realizar en el proceso de traducción, por lo que se propone que se realicen ejercicios cuyo grado de dificultad se incremente de acuerdo al siguiente esquema (que no es único):

N	CARACTERISTICAS	EJEMPLOS
1	-Enunciados con un solo predicado (unario, binario)	-Este es un libro. -Gustavo es amigo de Miguel -Carlos está entre Juan y Teresa
2	-Enunciados con un solo predicado (unario, binario, ...) cuantificado existencialmente	-Existe un libro -Existe un mapa -Algun día.
3	-Enunciados con dos predicados	-Esto es un libro y es caro -Si esto es una mesa, entonces tiene un mantel. -Todos los humanos son mortales
4	- Enunciados cuantificados existencialmente o universalmente, que contengan a lo más dos predicados y un cuantificador	-Todos los de tercero son amigos de Miguel. -Algun estudiante de segundo es amigo de Miguel. ...
5	-Enunciados que contienena lo más un cuantificador implicito y dos predicados	-Los estudiantes de tercero tienen un promedio de 80. -No existe nadie que sea mago y no sea rico
6	-Enunciados con a lo más tres predicados y dos cunatificadores.	-En la biblioteca existe un libro de matemáticas que trata el tema de grafos ponderados. -Los días jueves no hay servicio de internet a menos que alguien lo solicite. -En toda pareja de vecinos existe algun envidioso.
7	-Enunciados con más de tres perdicados y dos cuntificadores dados tanto explícita como implícitamente.	-Todo lo que le gusta a Carlos le disgusta a Miguel y lo que le gusta Miguel le disgusta a Carlos. -Si x es un número entero, entonces existe un entero mayor que él. -Todo lo que depende de x depende de y. -Algunos ingenieros son amigos de cualquier contratista.
8	-Enunciados con más de tres predicados y dos cuntificadores, estos últimos pueden estar tanto implícitos como explícitos	-Juan, Pedro, y Carlos son alpinistas.A los alpinistas no les gusta la nieve. Los miembros delClub Alpino o son alpinistas o esquiadores.A Juan le disgusta todo lo que a miguel le gusta y a Miguel le disgusta todo lo que a Juan le gusta. A Pedro le gusta la nieve siempre y cuando no llueva

Con este esquema se puede construir un sistema de ejercicios con los cuales se debe trabajar para propiciar el desarrollo de la habilidad de traducir.

Lo que más importa, en la realización de los ejercicios, es que el estudiante use la BOA y las preguntas de control ya que a través de su aplicación sistemática se podrán asimilar las diferentes acciones cuya ejecución garantiza el éxito al traducir. El papel del profesor es mostrar el uso de la BOA y propiciar condiciones para que los estudiantes la empleen al resolver los ejercicios, además debe vigilar que se hagan las preguntas de control en cada fase del proceso de traducción.

Conclusiones

El haber podido caracterizar la habilidad para traducir del lenguaje escolarizado a FBF de la lógica proposicional y la BOA nos ha permitido comprender mejor la forma en que se debían estructurar los ejercicios de traducción y la manera de lograr que el estudiante realice su autocontrol en ese proceso.

La caracterización de la habilidad para traducir del lenguaje escolarizado a FBF de la lógica de predicados es la primera propuesta que se hace y en este momento se está experimentando tanto la BOA como el sistema de ejercicios. Aun nos falta afinar la caracterización e incluir en la BOA aquellos aspectos que resulten difíciles para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Amor, J. A. (1994). Sobre un curso de análisis lógico en *Educación matemática*, México, Vol. 6 No. 2, agosto, pp. 4 -15.

Brito, H. (1984). Habilidades y Hábitos: consideraciones psicológicas para su manejo pedagógico en *Revista Varona*, año VI, N° 13. pp. 53-60.

Cuena, J. (1986). *Lógica Informática*, México, Editorial Alianza, segunda edición.

Hernández, H. (1993). *Sistema Básico de Habilidades Matemáticas*, La Habana, Ministerio de Educación Superior, reporte interno, pp. 68.

Júarez, M. (1995). Tesis de maestría: *Diseño de un ejercitador para el desarrollo de habilidades lógicas básicas, para los alumnos del propedéutico de la maestría es Ciencias de la Computación del cenidet*, Fundación Arturo Rosenblueth, para el avance de la ciencia.

Jungk, W. (1981). *Conferencias sobre la enseñanza de la matemática,* Cd. Habana, Ministerior de educación, volúmenes 1 a 4.

Mosterín, J. (1983). *Lógica de Primer Orden*, Barcelona, Editorial Ariel.

Rich, E. y Knight, K. (1994). *Inteligencia Artificial*, Madrid, Mc Graw-Hill/Interamericana de España, segunda edición, traducción del Ingés: Pedro Antonio González Calero y Fernándo Trescastro Bodega.

Valverde, L. (1990). *Un método para contribuir a desarrollar la habilidad para fundamentar-demostrar una proposición matemática, tomando como base una asignatura de álgebra I de primer año de los I.S.P.*, Cd. Habana, Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas, Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", Ministerio de Educación, Cuba.

Estudio de la participación de la mujer haitiana en la enseñanza-aprendizaje de la matemática

Maxime Mesilas
Escuela Normal Superior de Puerto Príncipe, Haití
mmesilas@yahoo.fr

Valentina Badía
Universidad de La Habana, Cuba
valia@matcom.uh.cu

Resumen

En este trabajo se ilustran las ideas fundamentales sobre un proyecto de investigación que se ha diseñado para estudiar y profundizar en la temática de la relación de la mujer y la Matemática en Haití desde una perspectiva de género. Se brindan algunos antecedentes históricos relacionados con el objeto de estudio, se relacionan resultados preliminares de otras investigaciones similares realizadas en otros países y que han servido de inspiración y basamento teórico tanto para el diseño general del proyecto como para la confección de los materiales y la elección de los métodos que serán empleados en nuestra indagación.

Fundamentación

Una de las tendencias actuales de la investigación en *ciencia educativa*, es conocer cuales son los métodos apropiados para la transmisión y adquisición de conocimientos en la Enseñanza de la ciencia matemática.

En los últimos años, la investigación en *matemática educativa*, no se ha limitado al estudio de condiciones de aprendizaje de estudiantes individuales. Se aprecia que la enseñanza y aprendizaje de la Matemática adquiere significado a través de la interacción humana, toma lugar en instituciones, ejerce influencia en la vida de los estudiantes, incluyendo el desarrollo de su personalidad y se caracteriza por una gran complejidad.

Los estudiantes y profesores viven en sociedades con determinadas características socio-económicas, tecnológicas, políticas y culturales; pertenecen a géneros, grupos sociales y étnicos, hablan un idioma, están sujetos a hábitos, tradiciones; todo lo cual actúa como condiciones de frontera que influyen en la educación matemática.
Esto ha dado lugar a un creciente campo de interés, iniciado a comienzos de los años 80 sobre la influencias del género, sociales, culturales y lingüísticas en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Tradicionalmente, la mujer ha estado marginalizada de la creación científica y por muchos siglos de la Educación. La historia de las luchas por la emancipación de la mujer tuvo como uno de sus objetivos principales el reconocimiento de la ilustración femenina como derecho. La educación ha sido por siempre un fin esencial en la lucha de la mujer por su liberación. Las primeras demandas feministas en torno a la educación se hicieron bajo el argumento de que la mujer estaba mejor preparada si se ilustraba para educar a los hijos.

Con el decursar de la historia, al movimiento feminista le pareció ese argumento insuficiente y se lanzó a exigir nuevos derechos en torno a la Educación. Se reclamó su presencia en los espacios educativos como maestra de enseñanza media y universitaria.

La educación ha sido importante para la mujer en varios sentidos:

1) La educación ha sido un instrumento para las reivindicaciones de la mujer en pro de su emancipación. En torno a las demandas educativas se han movilizado y organizado a las mujeres.

2) La educación ha convertido a la mujer en un ser humano.

3) La ha preparado mejor para desempeñar sus roles familiares.

4) Y ha logrado que la mujer amplíe las posibilidades de interacción en otros espacios sociales. Ha sido el fenómeno determinante en la movilidad de la mujer del mundo doméstico al público.

En las últimas décadas, los investigadores han mostrado un interés especial en cuanto a la relación entre el género y el desempeño matemático de los niños en los grados superiores de la escuela elemental. Muchos estudios han mostrado que alrededor de los 13 años, los varones superan a las hembras en su desempeño y en sus actitudes hacia la Matemática.

En los intentos de explicar la ventaja masculina, algunos equipos de investigación se han referido a las diferencias biológicas entre los sexos, en particular, las hormonas, los genes y la organización del cerebro. Otros investigadores han propuesto modelos teóricos que incluyen un número de factores tales como el curriculum, la situación, el ambiente y la participación en cursos de ciencia afines a la Matemática. La literatura sobre las diferencias de sexo también ha considerado la posibilidad de que la superioridad masculina es debida a procesos psicosociales: creencias o estereotipos y contingencias sociales de reforzamiento. Debe señalarse que se han reportado investigaciones que muestran que las diferencias de género en el desempeño matemático, varían dentro de los países y de país a país.

En este contexto, es de gran actualidad la realización de estudios sobre el papel de la mujer haitiana en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, desde el punto de vista de género. Es decir, en este trabajo se profundizará sobre cuál ha sido la realidad educativa de la mujer haitiana con respecto al sistema de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Objetivo general de la investigación

Valorar la participación de la mujer haitiana en el sistema educativo en relación a la enseñanza de la Matemática en la década de los noventa del siglo xx.

Objetivos específicos

1. Estudiar la amplia bibliografía existente sobre el papel y la participación de la mujer en la Matemática en todos los niveles.
2. Analizar el papel de la mujer haitiana en su condición de profesora-estudiante en relación a la enseñanza de la Matemática en la década de los años noventa del siglo xx.
3. Explicar el valor que la mujer haitiana, en su calidad de estudiante le confiere al aprendizaje de la Matemática para su propia educación en la década de los años noventa.
4. Examinar los factores que influyen sobre las diferencias de género en Matemática: el ambiente del aula, la actitud de los maestros, la posición de los padres, la elección de las carreras y otros.

5. Examinar las diferencias de género como deficiencias o debilidades: visualización espacial, estrategias para resolver problemas, ansiedad matemática, temor al fracaso, etc.
6. Examinar las diferencias de género como fortalezas o ventajas desaprovechadas: aprendizaje cooperativo, imaginación, creatividad, conexiones y relaciones.
7. Caracterizar la muestra de estudiantes que participan en el experimento.
8. Valorar cualitativa y estadísticamente los resultados obtenidos.

Hipótesis

1) En la década de los noventa, la mujer continua marginada del sistema de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en Haití.

2) La marginalidad en la enseñanza de la Matemática de la mujer se expresa en:

   a) El bajo porcentaje de mujeres que enseñan Matemática.
   b) La desigualdad de sexo que subsiste en el sistema de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en detrimento de la mujer.
   c) Una automarginación del sistema de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Objeto de estudio

La mujer haitiana en el medio escolar.

Variables

1) Participación femenina en el sistema de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.
2) Sistema de enseñanza en Haití (específicamente la enseñanza de la Matemática).
3) Marginalidad.
4) Ocupación profesora–estudiante
5) Desigualdad de sexo.
6) Automarginación.

Diseño metodológico

Método de investigación

Nuestra investigación será sobre el género, más específicamente, tratará el caso de la mujer en el sistema de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Esta es una investigación de tipo social, pues la mujer es parte integrante de la sociedad haitiana. Por lo tanto, es una investigación analítico-descriptiva, exploratoria y que contendrá el estudio de casos. Proponemos describir y analizar cómo participa la mujer haitiana en el proceso docente de enseñanza-aprendizaje de la ciencia Matemática, en el nivel medio y superior de la educación durante la década de los noventa, en los roles tanto de estudiante como de profesora.

Unidades de estudio y decisión muestral.

Para ser más exactos en la acotación del objeto a investigar, las técnicas serán aplicadas en:

a) Dos escuelas secundarias de mujeres: una pública y una privada.
b) Dos escuelas secundarias de varones: una pública y una privada.

c) Dos escuelas secundarias mixtas: una pública y una privada.

Las escuelas escogidas están todas en la Capital, pues esta ubicación garantiza un mejor acceso a la información y a las propias escuelas. Por otra parte consideramos que las mismas pueden ser una muestra representativa de la situación en el resto del país.

La selección de escuelas públicas y privadas se debe a que se supone que existan diferencias curriculares y en los métodos de enseñanza.

Se ha escogido el nivel de enseñanza media pues es donde culmina la educación obligatoria en Haití. A ese nivel los estudiantes tienen que rendir un examen donde deben mostrar dominio de los conocimientos matemáticos adquiridos y acumulados durante la secundaria y sus resultados pueden ser una dimensión relevante para evaluar la relación mujer-aprendizaje en esta ciencia.

Por otro lado, los resultados del examen de Matemática en ese nivel, muestran las potencialidades que pueda tener el sujeto masculino o femenino para su desarrollo futuro como profesional de la Matemática. Es decir, este es un nivel decisivo para la formación vocacional futura hacia una o otra profesión.

El estudio se completaría con un análisis de la participación femenina en el nivel superior, por lo que serán han sido seleccionadas algunas facultades de la Universidad Estatal de Haití, tales como: los departamentos de Matemática y Física de la Escuela Normal Superior, la Facultad de las Ciencias y la Escuela de Estadística Aplicada. En todas estas facultades, los candidatos tienen que pasar un examen de ingreso, cuyos resultados pueden ser de gran utilidad en nuestro análisis.

Técnicas de recolección de información

Se utilizarán diferentes técnicas:

- Observación.
- Análisis de documentos.
- Cuestionarios.
- Entrevistas.

Actividades a realizar

A través del estudio de una serie de variables contextuales se intentará identificar situaciones que pueden estar relacionadas con las diferencias significativas de género en el desempeño matemático. Sabemos que el asunto de las diferencias de sexo en Matemática es muy complejo, es el resultado de la interacción de muchos factores y debe ser explorado desde diferentes perspectivas.

Una forma de averiguar el grado en el cual los estudiantes se suscriben a las ideas tradicionales sobre el papel de la Matemática en las vidas del hombre o la mujer, es formulándoles directamente preguntas relevantes al problema.

Las respuestas de los alumnos a las encuestas y los tests, así como sus reacciones y comentarios durante las clases, ofrecen una idea más o menos precisa del desempeño y de la actitud general hacia la Matemática.

Se ha trabajado en el diseño de las encuestas y tests, basándonos en: reportes de investigación de estudios similares realizados en otros países, análisis de la situación concreta en Haití, tests existentes para medir determinadas habilidades matemáticas. De modo que se piensan realizar las siguientes actividades:

1. Encuestas a alumnos sobre su percepción del asunto.
2. Encuestas a profesores sobre su percepción del estado de las cosas.
3. Entrevistas a profesores con largos años de experiencia docente.
4. Tests a alumnos para medir habilidades matemáticas tales como: visualización espacial, capacidad para resolver problemas, etc y preferencias por tópicos (Aritmética, Conjuntos, Algebra, Gráficos, Vectores, Trigonometría, etc.).
5. Análisis de programas de estudio para estudiar si existen diferencias programáticas si se trata de escuelas para hembras, varones o mixtas.
6. Análisis de la documentación sobre exámenes de ingreso para localizar diferencias por sexo en el desempeño matemático.
7. Análisis de documentación sobre el rendimiento académico para ubicar si hay diferencias significativas según el género.
8. Estudio longitudinal (en la medida de lo posible) para determinar a qué edades aparecen y desaparecen las diferencias.

Conclusiones

Este proyecto pretende estudiar la participación de la mujer haitiana en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática desde una perspectiva de género. Sabemos que el tamaño de la muestra, la duración y la naturaleza de la investigación son tales que no es posible llegar a conclusiones definitivas sobre cuál ha sido la realidad educativa de la mujer haitiana con respecto al sistema de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, pero permitirá dar los primeros pasos en el estudio de este interesante tema.

Referencias bibliográficas

Barnes, M. and Coupland, M. (1990). Humanizing Calculus: A Case Study in Curriculum Development. In *Gender and Mathematics*. 72-80.

Dunham, P. H. (1990). *Procedures To Increase the Entry of Women in Mathematics-Related Careers*. ERIC/SMEAC Mathematics Education Digest No. 3.

Hanna, G. & Kundiger, E. and Larouche, C. (1990). Mathematical Achievement of Grade 12 Girls in Fifteen Countries. In *Gender and Mathematics*. 87-97.

Kenschaft, P. (1991). Fifty-Five Cultural Reasons Why Too Few Women Win at Mathematics. In *Winning Women into Mathematics*. Mathematical Association of America, Washington.

Koblitz, A. H. (1994). Perspectivas históricas e interculturales sobre las mujeres en las Matemáticas. En : *Mujer y Ciencia. Investigación y Desarrollo*. Universidad de Puerto Rico. 23-32 .

Formación de Profesores

Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros

Otilio B. Mederos Anoceto y Aldo M. Ruiz Pérez
Universidad Central de las Villas. Centro de Estudios de Educación. Cuba.
oma8111@yahoo.es

Resumen

El objetivo principal de este artículo es ofrecer recomendaciones para estudiar los cuadriláteros convexos tomando como punto de partida las potencialidades que brinda la operación clasificación de conceptos. Tales recomendaciones surgen del análisis de varios trabajos que se han publicado relacionados con el tema y de la experiencia de los autores en la utilización de procedimientos adecuados para la realización de las operaciones con conceptos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en su país.

Introducción

Una revisión de los textos escolares y especializados pone al descubierto, que no son pocos los casos en que se cometen errores al utilizar la operación clasificación de conceptos y sobre todo, es muy común en algunos docentes, que siguen estos textos, apelar al término clasificar en casos en que no se está realizando tal operación. Estas insuficiencias pasan de profesores a alumnos y de unos textos a otros que utilizan los primeros como bibliografía. Por esta razón, existe la necesidad de que reflexionemos sobre la operación clasificación y la manera en que se debe proceder para utilizarla correctamente. Según Davídov (1981), "una de las tareas centrales de la enseñanza consiste precisamente en proporcionar a los niños el conocimiento de los **esquemas clasificatorios**, expresivos de la correlación de los conceptos en uno u otro dominio. Específicamente, en la enseñanza de la Matemática, muchas veces no se aplica la operación clasificación adecuadamente, ni se utiliza para tomar decisiones ante diferentes variantes de estudio de un concepto, como es el caso de los cuadriláteros. En el presente artículo, en su primera sección, se define la operación clasificación de conceptos y se da un conjunto de reglas que debe tenerse en cuenta al realizarla. En la segunda sección, se discute sobre el modo de aplicar adecuadamente esta operación al estudio de los cuadriláteros convexos; lo que permite ejemplificar las reglas, así como la importancia de seguirlas. En la tercera sección, se analizan los esquemas sobre cuadriláteros convexos de los textos actuales para la Enseñanza General en Cuba, al estudiar la factibilidad de su empleo para la clasificación de estas figuras y se dan sugerencias que pueden ayudar a los profesores en su labor.

1. La operación clasificación de conceptos

Debido a que el artículo puede tener como máximo seis páginas, se presentan en esta sección la definición y las reglas que deben tenerse en cuenta al realizar la clasificación de un concepto, sin explicaciones y justificaciones. Para un estudio m'as amplio puede verse Mederos y Martínez (1989).

1.1. Definición de la operación clasificación de conceptos.

Dado un concepto (E, C); un conjunto de colecciones de propiedades de elementos de E, $Pi=\{P_{ij}\}$, $i\in I$, $j\in J_i$(I y J_i son conjuntos), se llama criterio de clasificación de (E, C) si, y sólo si, la colección de conceptos (E_i, C_i) donde $C_i=C\cup P_i$, $i\in I$, es tal que $\{E_i\}$, $i\in I$, es una partición de E. Dado el criterio de clasificación $\{P_i\}$, $i\in I$; la operación que asocia al concepto (E, C) la colección $\{(E_i, C_i)\}$ se denomina clasificación de (E, C) según el criterio $\{P_i\}$, $i\in I$.

1.2. Reglas que deben tenerse en cuenta al realizar la clasificación de un concepto.

1. *La clasificación debe realizarse partiendo de un solo criterio $P=\{P_i\}_{i\in I}$*
2. *Se debe comprobar que* $E=\bigcup_{i\in I} E_i$
3. *Se debe comprobar que $E_j \cap E_k = \varnothing$ para todo j de $I\setminus\{k\}$ y para todo k de I.*
4. *La clasificación debe ser proporcionada.*
5. *La clasificación debe realizarse sin saltos.*

2. Estudio del concepto de cuadrilátero

El estudio de los cuadriláteros ha sido objeto de discusión, fundamentalmente en lo que respecta a la definición del concepto de trapecio. En el artículo de Maraldo (1980), se propone su estudio a partir de las definiciones:

1) **Cuadrilátero:** un polígono de cuatro lados.
2) **Trapecio:** un cuadrilátero en el cual, al menos un par de lados opuestos son paralelos.
3) **Paralelogramo:** un trapecio en el cual los dos pares de lados opuestos son paralelos.
4) **Rectángulo:** un paralelogramo con los cuatro ángulos rectos.
5) **Rombo:** un paralelogramo con los cuatro lados congruentes.
6) **Cuadrado:** (a) un rectángulo con sus cuatro lados congruentes, o
   (b) un rombo con los cuatro ángulos rectos.

y utiliza un diagrama clasificatorio del concepto de cuadrilátero basado en las definiciones anteriores.

En el comentario de Baker (1980) se señala, que la mayoría de los autores definen el trapecio como un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos, y que consecuentemente los trapecios no son paralelogramos ni estos últimos, trapecios. En la reflexión de Seydel (1980) se celebra el artículo de Maraldo; pero se señala que la definición de trapecio dada por éste es incorrecta. Se plantea, además, que en un examen de 24 libros de texto de Geometría se reveló que sólo 4 de ellos no especifican que un trapecio es un cuadrilátero con dos, y sólo dos, lados paralelos. Sin embargo, esta discusión no da suficiente luz sobre porqué tomar una u otra definición de trapecio. Por eso, en esta sección analizaremos el asunto desde la perspectiva de la clasificación de conceptos.

2.1. Análisis de las definiciones de Maraldo.

Con respecto a la operación clasificación se presentan las dificultades siguientes:

1. No se clasifica el concepto de cuadrilátero porque el complemento de la extensión del concepto de trapecio con respecto a la extensión del concepto de cuadrilátero queda sin definir. Esta dificultad se puede evitar planteando un criterio de clasificación adecuado que, siguiendo la idea de Maraldo, pudiera ser el conjunto formado por la siguiente propiedad y su negación: "tener al menos un par de lados opuestos paralelos"; y entonces llamar a todo cuadrilátero que satisface esta propiedad trapecio y a todo cuadrilátero que no la satisfaga, trapezoide. Se obtendría así la clasificación 1 del concepto de cuadrilátero. Esta clasificación satisface las reglas 1, 2, 3 y 5. Con respecto a la regla 4, el concepto de trapecio tiene una extensión más amplia que en otras clasificaciones del concepto de cuadrilátero, como por ejemplo la correspondiente a la idea de Bernklan.

2. No se clasifica el concepto de trapecio. El complemento de la extensión del concepto de paralelogramo con respecto a la extensión del concepto de trapecio no se define. Siguiendo la idea de Maraldo, el criterio de clasificación natural del concepto de trapecio es el conjunto formado por las siguientes propiedades: 1) "tener dos pares de lados opuestos paralelos" y 2) "tener un solo par de lados opuestos paralelos". Entonces el concepto de paralelogramo corresponde a los trapecios que satisfacen la propiedad 1), y a los trapecios que satisfacen la propiedad 2) hay que darles un nombre, que pudiera ser, trapecios no paralelogramos. Se tendría la clasificación 2 que también satisface las reglas 1,2, 3 y 5.

3. No se clasifica el concepto de paralelogramo. No se cumple la regla 2 porque el complemento de la unión de las extensiones de los conceptos de rectángulo y rombo, con respecto a la extensión del concepto de paralelogramo no corresponde a ningún concepto. La regla 3 no se cumple porque las extensiones de los conceptos de rectángulo y rombo tienen elementos comunes. Para lograr una clasificación de los paralelogramos se puede tomar como criterio, el conjunto de las colecciones $P_1 = \{P_{11}, P_{12}\}$, $P_2=\{P_{11}, P'_{12}\}$, $P_3=\{P'_{11}, P_{12}\}$ y $P_4=\{P'_{11}, P'_{12}\}$, donde P_{11} y P_{12} son las propiedades: "tener un ángulo recto[1]" y "tener todos los lados iguales", respectivamente y P'_{11} y P'_{12} sus correspondientes negaciones. Los paralelogramos que cumplen las dos propiedades, reciben el nombre de cuadrados; los que satisfacen sólo la primera, se nombran rectángulos no cuadrados, los que cumplen sólo la segunda, se llaman rombos no cuadrados y los que no cumplen ninguna de las dos propiedades, se nombran romboides. Se tiene así la clasificación 3. Esta clasificación cumple las reglas de la 1 a la 5.

En la clasificación 3 aparecen los conceptos no usuales de rombo y rectángulo no cuadrados; por tal razón, se recomienda que si se realiza esta clasificación, entonces se definan adicionalmente los conceptos de rectángulo y rombo y que se clasifiquen (clasificación 4) los rectángulos en cuadrados y rectángulos no cuadrados, y el rombo (clasificación 5) en cuadraos y rombos no cuadrados.

[1]Un paralelogramo tiene los cuatro ángulos rectos si, y sólo si, tiene un ángulo recto.

Recomendación 1: siguiendo la idea de Maraldo, recomendamos que para clasificar el concepto de paralelogramo se proceda de la manera que hemos explicado anteriormente, la cual se resume en la clasificación 1-5.

Recomendación 2: definir los conceptos de rectángulo, rombo y cuadrado como lo hace Maraldo y formular además la definición de romboide. Por otra parte, señalamos que con estas definiciones no se hace una clasificación del concepto de paralelogramo y que si se quisiera clasificar dicho concepto, se recomienda proceder de acuerdo con las clasificaciones 3, 4 y 5.

3. Estudio de los cuadriláteros en la enseñanza general en Cuba

Los cuadriláteros se comienzan a estudiar en la primaria mediante procedimientos sustitutivos de la definición como la indicación, la descripción y la comparación en los primeros grados hasta llegar a definirlos en los últimos. Sin embargo, es en el séptimo grado donde se dan, por primera vez, las definiciones de estas figuras con más rigor y donde se estudian sus propiedades más importantes. Los libros de texto actuales de Matemática para la Enseñanza General en Cuba, que se utilizan en todas las escuelas, fueron elaborados como resultado de las experiencias existentes antes de la introducción del llamado "plan alemán" en la década del 70, de los propios textos de la extinta RDA que se adaptaron para ser utilizados en Cuba, así como de la basta experiencia de los profesores, maestros e investigadores cubanos, y de las influencias de los textos de otros países. En este momento se está proyectando la elaboración de nuevos textos para la secundaria básica con vista a la aplicación de varias transformaciones educacionales en ese nivel, las cuales se extenderán posteriormente al preuniversitario.

En el texto para séptimo grado (Muñoz y otros, 1989), el concepto de cuadrilátero convexo se define como "polígono convexo de 4 lados". El estudio de los cuadriláteros se realiza utilizando las siguientes definiciones en el orden en que se exponen:

1) **Paralelogramo**: cuadrilátero convexo con los lados opuestos paralelos.
2) **Rectángulo**: paralelogramo con sus cuatro ángulos rectos.
3) **Rombo**: paralelogramo con sus cuatro lados iguales
4) **Cuadrado**: paralelogramo con sus cuatro ángulos iguales y sus cuatro lados iguales.

1) **Trapecio**: cuadrilátero convexo que tiene (al menos) un par de lados opuestos paralelos.
2) **Trapecio isósceles**: trapecio cuyos lados no paralelos tienen la misma longitud.
3) **Trapecio rectángulo**: trapecio que tiene dos ángulos rectos.
4) **Trapezoide**: cuadrilátero convexo que no tiene lados paralelos.
5) **Trapezoide simétrico**: trapezoide que tiene dos pares de lados consecutivos iguales.

Hay que señalar que la definición de trapecio isósceles no es satisfactoria desde el punto de vista lógico, pues le falta la propiedad de "tener sólo dos lados paralelos" antes de la propiedad que se especifica para los lados no paralelos.

En una parte de los textos revisados para la escritura de este artículo, el orden que se sigue coincide con el expuesto anteriormente; sin embargo a los efectos de la contribución que puede tributar la enseñanza de los contenidos sobre los cuadriláteros a la operación de clasificación de conceptos, somos del criterio que el estudio de los trapecios después de los paralelogramos, siendo estos últimos clases especiales de trapecios, presenta desventajas para cumplir con tal propósito.

Por otra parte, como los profesores no están atados a seguir precisamente el orden del libro, entendemos productivo exponer nuestras opiniones y experiencias al respecto, con el fin de que puedan ser valoradas tanto por los que hayan hecho alguna transformación al tema de los cuadriláteros en su labor docente como por los que no.

A manera de resumen en el texto (Muñoz y otros, p. 103-105) se exponen algunos esquemas sobre los cuadriláteros cuyas definiciones presentamos al inicio de esta sección.

3.1- Análisis del esquema correspondiente a los cuadriláteros convexos.

En la página 103 se presenta el esquema 1 donde en un primer nivel aparece el concepto de cuadrilátero convexo, y en un segundo nivel los conceptos de paralelogramo, trapecio y trapezoide. Este esquema no corresponde a ninguna clasificación del concepto cuadrilátero, pues no se cumple la regla 3, ya que la intersección de las extensiones de los conceptos de trapecio y paralelogramo es no vacía. Si se desea obtener una clasificación de este concepto utilizando el criterio que hemos propuesto en 2.1, habría que utilizar el esquema 2. Sería util en u ntercer nivelrealizar la clasificación la clasificación 2 de 2.1 para obtener un esquema 3 con tres niveles.

3.2- Análisis del esquema correspondiente a los paralelogramos.

En relación con los paralelogramos se expone esquema 4 con tres niveles. En el primer nivel el concepto de paralelogramo, en el segundo los conceptos de paralelogramo mas general y paralelogramos especiales. Aparecen en el tercer nivel, tomados a partir del concepto de paralelogramo especial, los conceptos de rectángulos, rombo y cuadrado. El primer nivel del esquema 4 no corresponde a ninguna clasificación del concepto de paralelogramo por las razones siguientes:

1) Los conceptos de "paralelogramo más general" y "paralelogramo especial" no aparecen definidos en el citado texto.
2) Es imposible dar una definición de estos conceptos de manera que sus extensiones no tengan elementos comunes, es decir, que se logre cumplir con la regla 3 y que se mantenga un sentido correcto de sus nombres.

El segundo nivel del esquema 4 no corresponde a ninguna clasificación del concepto "paralelogramo especial", aún en el caso que éste hubiera sido definido, pues las extensiones de los conceptos: rectángulo, rombo y cuadrado tienen elementos comunes. Esta insuficiencia se resuelve mediante las clasificaciones 3, 4 y 5 que hemos propuesto en 2.1 y teniendo en cuenta la recomendación 2. De esta manera se obtiene el esquema 5 con el concepto de paralelogramo en un primer nivel; y con los conceptos de rectángulo no cuadrado, cuadrado, rombo no cuadrado y romboide en un segundo nivel.

3.3- Análisis del esquema correspondiente a los trapecios.

Para los trapecios en el texto (Muñoz y otros, 1989) se emplea el esquema 6 con el concepto d trapecio en un primer nivel; y los conceptos de trapecio más general, trapecio isósceles y trapecio rectangulo en un segundo nivel. Este esquema no corresponde a ninguna clasificación del concepto de trapecio por las razones siguientes:

1) El concepto de "trapecio más general" no se ha definido ni es posible definirlo con sentido, de manera que su extensión no incluya a la extensión de los otros tipos de trapecio del esquema.
2) Los conceptos de trapecio isósceles y de trapecio rectángulo resultan del concepto de trapecio a partir de distintos criterios.

El esquema 6, para ser utilizado con la intención de presentar una clasificación del concepto trapecio, tiene también como dificultad el no considerar los trapecios isósceles en un nivel más bajo, pues ninguna figura de este tipo puede ser un paralelogramo. Esto lleva a la necesidad de buscar un criterio para clasificar los trapecios no paralelogramos, que pudiera ser el conjunto formado por la propiedad siguiente y su negación: "tener los lados no paralelos iguales". Entonces los trapecios que cumplen esta propiedad reciben el nombre de trapecios isósceles y los que no la tienen pudieran nombrarse trapecios no paralelogramos no isósceles. De esta manera se obtiene el esquema 7 en un primer del cual aparece el concepto de trapecio no paralelogramo, y en un segundo nivel los conceptos de trapecio isosceles y trapecio no isosceles. Integrando los esquemas 3, 5 y 7, se obtiene el 8 que satiface las regals de la clasificación.

El análisis del esquema corespondiente a los trapezoides realizado en (muñoz y otros, 1989) no se hace por limitaciones de espacio; asi como otras clasificaciones del concepto de trapecio.

Conclusiones

- La idea de Maraldo presenta presentan varias dificultades respecto a la clasificación de conceptos.
- Los esquemas que se proponen en el libro de texto actual para séptimo grado en Cuba no satisfacen los requerimientos para ser utilizados en la clasificación de los conceptos que en ellos se exponen.
- Las reflexiones realizadas en el presente artículo han estado dirigidas hacia el desarrollo de ideas que favorezcan una enseñanza-aprendizaje a favor de la operación clasificación de conceptos. Por eso, el análisis de los trabajos y textos que se utilizaron para reflexionar, se centró en este aspecto y no en otros, en los que pudieran tener utilidad.

Referencias bibliográficas

Baker, T. J. (1980). What's a trapezoid. Reader reflections, *Mathematics Teacher*. Mayo. Pág. 325.

Bernklan, D. (1980). Properties of Quadrilaterals, *Mathematics Teacher*. Mayo. Pág.325.

Davidov, V (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.

Maraldo, S. (1980). Properties of Quadrilaterals, *Mathematics Teacher*. Enero. Pág. 325.

Mederos, O. y M. Martínez (1988). Clasificación de las funciones elementales, *Revista Cubana de Educación Superior*, Volumen VIII, Número 3. Págs. 71-81.

Muñoz, F. y otros (1989). *Matemática séptimo grado*. La Habana, Editorial Pueblo y Educación.

Seydel, Ken. (1980). Properties of Quadrilaterals, *Mathematics Teacher*. Mayo. Pág. 325.

La evaluación como proceso de regulación en la formación de asesores de matemáticas

José María Cardeñoso y Pilar Azcárate Goded

Área de Didáctica de la Matemática. Univ. Granada y Univ. Cádiz. España.

josem@ugr.es. pilar.azcarate@uca.es

Resumen

La figura del asesor del profesorado en las diferentes áreas curriculares juega un papel fundamental en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta aportación trata sobre su formación y las formas de regular el desarrollo de los asesores como profesionales. Presentamos el marco de referencia desde donde se diseña un proceso formativo, los criterios de selección de los contenidos, que responden a los tres niveles de actuación del asesor y la propuesta metodológica, en la que se considera como eje organizador las problemáticas profesionales. En dicha organización se integra el proceso de evaluación como instrumento para su regulación. La estrategia básica que se utiliza para dicha regulación es la elaboración individual y grupal de un "Portfolio" que integra toda la información que se considera significativa para el seguimiento del desarrollo de los asesores en formación, tanto desde la perspectiva del formador como del futuro asesor.

El contexto

En la actual organización del sistema educativo español, la figura del asesor del profesorado en las diferentes áreas curriculares juega un papel fundamental en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje desarrollados en los niveles de primaria y secundaria. Nuestras reflexiones se dirigen hacia su formación y formas de regular su desarrollo como profesionales, centradas en un proceso de formación diseñado desde la intención de fomentar en los estudiantes-asesores, su capacidad de autonomía y su espíritu crítico e investigador.

La finalidad general de su formación es promover la capacitación de los estudiantes para el desempeño de las funciones de Diagnostico, Diseño y Desarrollo del currículo desde las diversas realidades de las aulas, que deberán caracterizar su labor profesional. Nuestro interés primordial será, ir proporcionando a los estudiantes suficientes elementos de juicio para poder valorar críticamente el alumnado, el currículum, el profesor, la enseñanza, el aprendizaje y los problemas que surgen en sus relaciones, todo ello referido a los aspectos concretos que conciernen al desarrollo del Área de Matemáticas.

Marco de referencia: estilos en el proceso de asesoramiento

Ante la diversidad de funciones y campos en los que el asesor debe desarrollar su labor, cabe plantearse la influencia que, a la hora de configurar su actuación, tiene el pensamiento y la formación del profesional del asesoramiento. Es decir, no todos los profesionales, cristalizan de igual forma su asesoría en los centros y mucho menos desempeñan las funciones antes reseñadas. Es, por tanto, necesario entender los diferentes estilos de asesoramiento existentes, al menos para que su interpretación pueda facilitarnos una hipótesis de progresión del conocimiento del asesor, y de su desarrollo como profesional en evolución.

Consideramos que el enfoque desde el que desarrolla su labor el asesor curricular en matemáticas, integrado en los centros educativos, se refleja en diferentes formas de actuar y plantear el proceso de asesoramiento con los profesores. En coherencia con nuestro propio modelo didáctico y nuestras formas de entender y caracterizar los posibles perfiles de los profesionales de la docencia, diferenciamos cuatro enfoques distintos a la hora de caracterizar la labor del asesor; enfoques que implican formas diferentes de entender e intervenir en el propio proceso de asesoramiento: tradicional; espontaneísta; tecnológico e investigativo (Cardeñoso, 2001). Estos modelos de asesoramiento, en cierta medida, son guardan relación con las tendencias señaladas en nuestros trabajos previos sobre modelos educativos (Carrillo y Contreras, 1995; Azcárate, 2001). Esta identificación está justificada pues, los asesores, en su labor profesional, actúan realmente como formadores de profesores y, las diferentes formas de desempañar su labor, reflejan su propia visión educativa, focalizada en el profesor y su actividad.

Desde esta perspectiva y contrastando con los modelos aportados por Moral (1998) en relación con los posibles estilos de asesoramiento, consideramos como correspondiente a una visión **tradicional** del asesoramiento, aquel que ésta autora identifica con el *tipo clínico o de intervención experta;* superado en nuestra hipótesis de progresión del desarrollo profesional de los asesores, por el modelo de corte humanista o asesoramiento de corte más **espontaneísta** y que reconocemos en el estilo de *asesoramiento tipo facilitador o asesoramiento a demanda*. En diferente sentido, pero también como estilo de asesoramiento superador de la postura tradicional, surge otro tipo de actuación más desde perspectivas de eficacia, reproduciendo antiguos cánones para este nuevo agente educativo caracterizando un **asesoramiento tecnológico** en el que reconocemos el corte eficientista y su perspectiva conductual en el que se nombra como estilo de *colaboración técnica*. Por último, como hipótesis de referencia en relación con la progresión en el desarrollo de los anteriores estilos señalados, surge el tipo de *intervención colaborativa crítica* que identificamos como un **asesoramiento de corte investigativo**.

En nuestro esquema de formación y desarrollo del asesor curricular de matemáticas, mantenemos estos modelos como indicadores que nos permiten reconocer las posibles diferencias entre las distintas tendencias profesionales y, a la vez, como instrumentos que nos pueden facilitar el reconocimiento, explicitación y evolución de los propios modelos de asesoramiento hacia modelos más acordes con los nuevos presupuestos educativos. Presupuestos que caracterizan una imagen del asesor como un colaborador crítico, autónomo y con independencia intelectual (Tejada, 1998) caracterizado por su buen hacer como asesor, capaz de generar y articular claramente un proyecto donde se establezcan necesidades y se desarrolle un determinado plan de actuación (Louis, 1992).

Nuestro propio diseño se identifica con el asesoramiento investigativo, donde concurre, como eje articulador, el principio investigativo y cuya visión colaborativa, crítica e ideológicamente argumentada, nos facilita el metanálisis sobre el papel del asesor curricular como agente educativo en desarrollo. Este marco conceptual nos es necesario para promover la necesaria transformación del rol del asesor, desde las tareas habituales que se les asocia: diagnóstico de casos, elaboración de programas, facilitación de recursos, etc.; hacia un nuevo papel centrado en acompañar el proceso de cambio que llevan los profesores de matemáticas en su centro, integrando nuevas prácticas docentes a través de procesos compartidos que hagan posible la negociación y el desarrollo de una visión común.

Propuesta de contenidos y organización metodológica

Los contenidos han sido seleccionados en respuesta a los conocimientos sobre los que consideramos que todo futuro asesor debe reflexionar y disponer de algunas respuestas imprescindibles para abordar su profesión con un determinado margen inicial. Así el programa de contenidos responde a la necesidad de conocer, por parte del futuro asesor:

- En un primer nivel, *al currículum matemático*; es decir, a la idea de promover el estudio y análisis de aquellos aspectos que consideramos necesarios que conozca un asesor en relación con el sentido y finalidad de la educación matemática y con el desarrollo del currículum matemático.
- En un segundo, *al profesor de matemáticas*; para ello nos centramos en aquellos aspectos que permiten caracterizar al profesor, su conocimiento y su profesionalidad en el desarrollo de su intervención en el aula, como instrumento para orientar la labor del asesor en relación con el profesor de matemáticas.
- Como último nivel, *la labor del propio asesor*; focalizado en el conjunto de conocimientos y las diferentes informaciones relacionadas con la propia profesionalidad del asesor, caracterizando su labor y las diferentes acciones que ha de desarrollar, a la hora de apoyar / acompañar a los profesores de matemáticas en sus procesos de desarrollo e innovación del currículo escolar.

En relación con la propuesta metodológica, ésta se organiza para gestionar las diferentes informaciones que configuran los tres niveles de contenidos presentados. Los conocimientos relativos a cada uno de ellos no van a ser tratados linealmente sino de forma integrada, pues si bien pensamos que gran parte de esas informaciones han de formar parte del conocimiento profesional del asesor, creemos que no pueden ser elaboradas, ni, por tanto, tratadas, como aspectos separados y aislados entre sí, sino como conocimientos interrelacionados que permiten abordar las complejas situaciones a las que se ha de enfrentar un asesor curricular.

Si admitimos que el conocimiento elaborado por todo profesional es un conocimiento generado en un contexto concreto y a través de unas determinadas actividades; es decir, si el conocimiento es producto de la propia actividad; tiene sentido que las estrategias formativas estén relacionadas con la actividad que han de desarrollar en su actuación como profesionales. Por tanto, en nuestra estrategia formativa, dirigida a formar asesores curriculares, hemos intentado respetar esta idea, buscando situaciones y problemas relacionados con la futura actividad que, como asesores, han de desarrollar en los centros educativos.

El objeto del proceso siempre será una mayor comprensión de los problemas relacionados con su labor como agente educativo y, en consecuencia, facilitar que accedan a nuevas formas de comprender la educación matemática y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Para ello, hemos considerado como eje de la organización del proceso metodológico, las problemáticas profesionales a las que debe enfrentarse un asesor de matemáticas; es decir aquellas que serán objeto de estudio en el proceso de asesoramiento al profesor de matemáticas. Estas problemáticas, por tanto, están vinculadas a las problemáticas que tienen los propios profesores de matemáticas al organizar, desarrollar y evaluar su labor educativa:

- ¿Qué finalidades tiene o debe tener la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Qué sabemos nosotros, profesores, sobre los tópicos del currículo matemático? ¿Qué es y cómo se organiza el conocimiento matemático escolar?
- ¿Cómo favorecer la evolución significativa y relevante de las ideas matemáticas de los alumnos?
- ¿Cómo regular el proceso de enseñanza/aprendizaje?, etc.

Estas problemáticas o campos de problemas los denominamos como Ámbitos de Investigación Profesional (Porlan y Rivero, 1998; Azcárate, 1999a; 1999b) y las denotamos como AIP. La razón de esta elección viene justificada por considerar al profesor como el centro del proceso educativo, ya que es él quien incide sobre el desarrollo del currículum y es sobre él que se enfoca la labor del asesor.

Son sus problemas los que orientan y dirigen los procesos de asesoramiento, problemas que, en general, giran en torno a los diferentes aspectos implicados en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Nuestra intención no es profundizar en su conocimiento de las matemáticas, sino promover en los futuros asesores interrogantes básicos sobre ellas, su naturaleza, su aprendizaje, su enseñanza y las características de la educación matemática como proceso constructivo y dinámico que configura el pensamiento del alumno.

En este sentido, las situaciones matemáticas propuestas en las aulas serán muy simples y sobre ellas y los interrogantes que susciten se discutirá y se analizará su posible resolución en contextos de pequeño grupo. Pero eso no es óbice para que su presentación nos permita entrar en problemáticas más complejas, como son las referidas al profesor y su posible actuación, cuestiones que afectan directamente al papel del asesor.

En cualquier caso, ambos aspectos son importantes a la hora de reflexionar sobre su futura labor como asesor, pues si bien analizar la actuación y problemas de los profesores es importante y decisivo, los aspectos relacionados con el currículo matemático son indispensables para llegar a comprender los problemas que el docente se ha plantear y resolver en el desempeño de su profesión.

En un proceso de esta naturaleza, parte vital de su funcionamiento es la implicación de los participantes, por ello hemos diseñado un proceso de regulación y seguimiento que nos permite incidir en el protagonismo de cada uno de los implicados y en la adaptación al propio devenir de su desarrollo.

El proceso de evaluación

Como ya hemos indicado, el plan de trabajo que hemos diseñado no tiene como pretensión un acopio de conocimientos novedosos sobre las matemáticas, los profesores de matemáticas o sobre la función profesional del asesor, sino que intenta establecer un proceso de sensibilización hacia un ámbito curricular generalmente problemático en las aulas (las matemáticas) y hacia unos procedimientos y estrategias profesionales adecuadas para la compleja labor de asesorar. En consecuencia, la evaluación del proceso de formación tiende más a valorar los esfuerzos que los logros y, por coherencia con nuestra visión procesual y compleja de la realidad educativa, es su papel regulador el que nos parece más deseable de lograr en este contexto.

En esta línea, consideramos que la evaluación del proceso nos puede dar información sobre los logros y los obstáculos que han ido afrontando y superando los futuros asesores. Desde esta perspectiva la evaluación se convierte en un verdadero proceso de investigación del proceso formativo y un instrumento imprescindible para su posible mejora.

La estrategia básica que utilizamos para su concreción en el aula es la elaboración individual y grupal de un "*Portfolio*". Este sistema global de valoración, como aprecian Kelly y Lesh (2000), es una estrategia idónea de seguimiento evaluativo en contextos formativos, de carácter comprensivo, que intenta superar perspectivas psicométricas y estadística en la formación de los Agentes Educativos. De las múltiples definiciones de este instrumento, consideramos conveniente presentar la de Margalef (1997:134), por la simplicidad y cantidad de información que aporta. Esta autora se refiere a este como *"una colección de documentos que refleja la actuación y productos realizados por el estudiante durante su proceso de aprendizaje dentro y fuera de la escuela"*. El portafolio puede contener una gran variedad de trabajos realizados por el alumno tanto en clase como en casa. Los trabajos que se incluyen reflejan las habilidades, nivel de desarrollo y condiciones ambientales del hacer del alumno.

Toda la información que se considera significativa para el seguimiento del desarrollo de los asesores en formación, se integra en el "Portfolio" (portafolio o carpeta del estudiante) donde es el propio estudiante el que ha de ir integrando sus interrogantes, comentarios, usos y aportaciones, así como las informaciones, valoraciones críticas y sugerencias del profesor/formador. Para que el portafolio adquiera su significado estas carpetas de trabajo no han de ser una recopilación de material, sino un conjunto de material trabajado:

- Reflexiones individuales y grupales sobre las cuestiones que se han suscitado en el análisis de las diferentes situaciones, vinculadas a la actividad matemática;
- Fichas de lectura individual del estudiante, donde se diferencie los datos de referencia del texto, la síntesis de las ideas del autor y sugerencias e ideas de interés;
- Informe sobre el contraste de la información documental, reflejando las ideas y pensamientos que suscita, opciones e ideas para su utilización como asesores;
- Ficha de análisis del trabajo del grupo en relación con las problemáticas profesionales planteadas en el aula que se han afrontado desde su papel de asesor;
- Ficha de síntesis reflejando el uso final que se dio a los textos en la elaboración del trabajo pretendido, tanto individual como grupal;
- Reflexiones recogidas en el *Diario de Aula* de la estudiante, relativa a las funciones posibles a desempeñar como asesor, explicitando su propia perspectiva teórica.

El uso de este instrumento se justifica como elemento necesario para que tanto el estudiante/asesor como el profesor/formador, obtengan una visión del proceso y no solamente de los logros obtenidos (Serradó y Azcárate, 2000). Hay que tener en cuenta que el estudiante ha trabajado diferentes cuestiones donde han variado las responsabilidades que asume, referida a forma de agrupamiento: individual, pareja, grupal y asamblearia, todas ellas forman parte del portfolio individual del alumno. Por otro lado las tareas no presenciales tienen componentes organizativas, creativas y reflexivas que no se han de olvidar, cuestión para la que, con independencia de los diversos informes que el estudiante ha de ir produciendo, tomaremos "el diario del estudiante" como referente básico y elemento reflexivo fundamental del portfolio. Esto nos permitirá conocer las fichas de lectura realizadas, los planes de trabajo adoptados y que, aunque se obtiene información basicamente descriptiva, nos facilita entender y valorar el proceso y la implicación temporalizada que el estudiante ha desempeñado.

Esta estrategia es complementada con otro instrumento válido para evaluar la adecuación de los criterios establecidos con anterioridad, el uso de la observación sistemática del proceso. La *observación* directa del trabajo del estudiante proporciona una información muy valiosa sobre su conducta y su función académica. Puesto que el aprendizaje tiene lugar a lo largo de todo el proceso de enseñanza y aprendizaje, la evaluación a partir de la observación se ha de llevar a cabo durante todo el proceso. El análisis y la observación sistemática del proceso nos permite valorar, tanto en el trabajo individual como el grupal, aspectos como, la capacidad *de fundamentar* las opiniones y tomar decisiones, *de reflexionar* acerca de las situaciones de enseñanza/aprendizaje, *de implicarse* en el trabajo, *de reconocer deficiencias, de autocrítica*, así como apreciar *la evolución* de las argumentaciones, en pequeño y gran grupo.

Un dato a considerar es la evaluación de la producción de los trabajos realizados en pequeños grupos, que nos permite una valoración del nivel alcanzado y del funcionamiento del propio grupo. Como reflejo del trabajo desarrollado durante el proceso formativo y como síntesis del trabajo realizado, se solicita la elaboración de un *Informe de Asesoramiento* a cada grupo de estudiantes, relativo a las necesidades pertinentes para orientar la evaluación, diseño y puesta en practica experimental de una unidad didáctica, argumentando desde qué enfoque caracterizan su papel de asesor. La valoración de los informes se realizan sobre la base de la reflexión sobre la riqueza de relaciones consideradas, el uso de la documentación trabajada en el curso, la pertinencia de la misma, en suma la complejidad de la respuesta, la temporalización de su plan de trabajo, el talante profesional adoptado y su coherencia con la documentación que utiliza para argumentar.

Entendemos que se ha de afrontar un seguimiento evaluativo de todo el proceso de enseñanza y de aprendizaje, así como el desempeño que se realiza de la docencia. Por ello se realizan diversas sesiones de reflexión, fundamentalmente al término de cada una de las temáticas tratadas en el aula (AIP) que nos permite incidir sobre el aspecto formativo y de regulación del sistema de aula, analizando las informaciones recogidas en los portafolios y los problemas y evoluciones que en ellos se detectan.

Desde este diseño de evaluación consideramos que facilitamos que los alumnos sean participes de su propio proceso de formación y que durante su desarrollo, piensen y reflexionen sobre aquellas temáticas y problemas que caracterizan a su futura profesión como asesores, otorgando sentido a los conocimientos e informaciones tratadas. Fruto de este trabajo son las diferentes aportaciones que nuestros alumnos han ido elaborando y presentando (López y Cardeñoso, 1999; Morales, 1999; Ruiz y Cardeñoso, 2001).

Como síntesis podemos afirmar con Nieto (1999: 331) que un asesor curricular *"se va configurando desde el desempeño de su propia practica y desde las aportaciones de la investigación que puedan manejar, un estilo de formación permanente propio, que va definiendo su proyecto particular de formación y que constituye, su tarjeta de presentación ante los profesores"*, en esta línea, nuestra opción consiste en potenciar la evolución del estudiante desde posturas inconscientes hacia la constitución de un estilo personal y profesionalmente potente para su futura tarea que asumir como asesor en un centro educativo.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1999a). Los ámbitos de investigación profesional (AIP) como organizadores del curriculum del profesor, en *Actas de del ProfMat 99*. Portimao: Associacao de Professores de Matemática, 121-134.

Azcárate, P. (1999b). El Conocimiento Profesional. Naturaleza, Fuentes, Organización y Desarrollo. *Quadrante*, 8, 111-138.

Azcárate, P. (2001). *El conocimiento profesional didáctico-matemático*. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Cardeñoso, J. M. (2001). Proyecto Docente *Asesoramiento Curricular en el área de Matemáticas*. Dto. Dca. de las Matemáticas. Univ. de Granada. Inédito.

Carrillo, J y Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones de los profesores sobre la matemática y su enseñanza. En *Educación Matemática*, 7(3), pp. (79-92).

Kelly, A.E. y Lesh, R. (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.

López, M. y Cardeñoso, J.M. (1999). El asesor curricular y el desarrollo profesional del profesor de matemáticas. En Berenguer, Cardeñoso y Toquero (Eds): *Investigación en el aula de Matemáticas. Matemáticas en la sociedad*. Granada. Universidad de Granada y Asociación THALES de Profesores de Matemáticas Andaluces.

Louis, K.S. (1992). Reestructuring and the problem of teachers' work. En A. Lieberman y K.J. Rehage (Eds.), *The changing contexts of teaching*. Chicago: University of Chicago Press, (139-156).

Margalef, L. (1997). Nuevas tendencias en la evaluación: propuestas metodológicas alternativas. *Bordón*, 49 (2), (131-136).

Moral Santaella, C. (1998). *Formación para la profesión docente*. Granada: Force

Morales, O (1999). El asesor curricular en el área de matemáticas. En Berenguer, Cardeñoso y Toquero (Eds): *Investigación en el aula de Matemáticas. Matemáticas en la sociedad*. Granada: Univ. Granada y Asociación THALES de Profesores de Matemáticas Andaluces.

Nieto, P. (1999). El trabajo de un asesor de educación secundaria en el área de matemáticas, en *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 2, 2; (330-338).

Porlán, R. Y Rivero, A. (1998). *El conocimiento de los profesores* . Sevilla: Diada.

Ruiz, J. Y Cardeñoso, JM (2001). Desarrollo profesional del profesor: el análisis didáctico del aula de matemáticas. En Berenguer, Cobo y Navas (Eds): *Investigación en el aula de Matemáticas. Retos de la educación matemática del Siglo XXI*. Granada: Universidad de Granada y Asociación THALES de Profesores de Matemáticas Andaluces.

Serradó, A. y Azcarate, P. (2000). El portafolio instrumento para la evaluación en la formación inicial del profesorado de secundaria. En actas de las *IX Jornadas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Cádiz: Servicio Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Tejada J. (1998). *Los agentes de la innovación en los Centros Educativos. Profesores, directivos y asesores*. Málaga: Aljibe

La enseñanza de la matemática con tecnología: un reporte

Francisco Javier Parra Bermúdez
Universidad de Sonora, México
fjparra50@hotmail.com

Ramiro Ávila Godoy
Universidad de Sonora, México
ravilag@hmo.megared.net.mx

Resumen

"SEC21" (Secundaria Siglo 21) es un proyecto cuyo propósito principal es integrar la cultura de las nuevas tecnologías informáticas a la escuela secundaria, utilizándolas como recursos para rediseñar la enseñanza. Este proyecto se enmarca dentro de las acciones contempladas tanto en el Plan Nacional de Educación 1995-2000, como en el correspondiente al periodo 2001-2006 de la Secretaría de Educación Pública de nuestro país.

Entre las acciones realizadas para poner en marcha el proyecto se desarrolla un programa de capacitación de los profesores a través del cual se pretende que conozcan la tecnología y los materiales a utilizar, así como el modelo de enseñanza y que, además reafirmen el dominio del contenido disciplinar.

El presente trabajo es un reporte preliminar de una serie de observaciones hechas sobre los efectos de dicho programa de capacitación en los profesores de Matemáticas de la Escuela Secundaria Técnica No. 1, de Hermosillo, Sonora, México.

La técnica utilizada para obtener información fue la observación participante y la entrevista.

Introducción

La televisión por satélite, el software didáctico, las redes informáticas, la tecnología multimedia y la interacción a distancia que hoy ya son tecnológicamente posibles, son los recursos que se pretende integrar para el rediseño de la enseñanza y en los procesos de aprendizaje.

El modelo de enseñanza que se está poniendo en práctica parte, entre otras consideraciones teóricas, de la premisa de que la tecnología que se emplea en el proyecto de Matemáticas permite promover nuevas y diversas formas de interacción cognoscitiva en el salón de clases: entre estudiantes, entre éstos y el profesor, entre la tecnología y los estudiantes y entre la tecnología y el profesor; formas que difieren de las que se pueden establecer en los salones de clase tradicionales debido, sobre todo, a la naturaleza de la retroalimentación a que da lugar el entorno computacional.

Desde luego que las nuevas tecnologías no deben verse como medios para llevar a cabo en el salón de clase, las mismas acciones que antes se realizaban sin ellas, pero tampoco deben concebirse como recursos capaces de sustituir la labor del maestro; por el contrario, el papel del maestro es ahora diferente pero mucho más importante.

Algunas consideraciones teóricas

El uso de la tecnología como mediadora en los procesos de enseñanza y aprendizaje permite diseñar situaciones didácticas que propicien el entrenamiento de ciertas habilidades cognitivas de forma más eficaz. Por ejemplo el principio de que para entender los conceptos matemáticos es necesario usarlos, puede actualmente ponerse en práctica diseñando situaciones problémicas que den lugar al uso de la calculadora o la computadora para explorar y obtener datos que le ayuden a construir los conceptos matemáticos involucrados.

El uso de la tecnología enriquece el tipo de situaciones didácticas que pueden diseñarse. Acordes al principio fundamental de que el conocimiento se construye y se construye a través de instrumentos; esto es toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos. El uso de la tecnología origina un replanteamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El modelo de enseñanza que se está utilizando en el proyecto SEC21 contempla el manejo de la tecnología en el aula como facilitadora de la enseñanza y estimuladora del aprendizaje, por lo que hay que considerarla como una poderosa herramienta y no como una sustituta del profesor.

Si los estudiantes no pueden experimentar directamente un cierto fenómeno físico, por ejemplo el movimiento de un proyectil, pueden en una calculadora o computadora mediante laboratorio virtual, simular dicho movimiento parabólico para proceder a analizarlo y utilizar dicho análisis para ayudar en la tarea de comprender los conceptos matemáticos involucrados.

Podemos mediante un sensor obtener inmediatamente resultados, por ejemplo la posición de un cuerpo con respecto al tiempo. Obtener los datos que sean necesarios, así como la gráfica de posición contra tiempo, a través del análisis estadístico que realiza el programa. Por lo que el trabajo mecánico y repetitivo le corresponde a la computadora y al estudiante y profesor el creativo, la discusión y el análisis de los resultados obtenidos con respecto a los conceptos matemáticos involucrados. De no ser así tendríamos que usar un flexo metro o papel encerado con chispómetro para hacer las mediciones de posición, cronómetro para el tiempo, registrarlos digamos cada segundo. Enseguida trazar en papel milimétrico una gráfica de posición contra tiempo y haciendo uso de análisis estadístico, encontrar la mejor curva que pasa por los puntos obtenidos. Por lo que el uso de la tecnología nos permite transitar de un conocimiento fragmentado a un conocimiento holístico.

Metodología

Las observaciones que aquí se reportan se hicieron utilizando la observación participante y la entrevista en forma de diálogo como técnicas para realizarlas. Se trabajó con siete profesores de la Escuela Secundaria Técnica No. 1. Las observaciones se hicieron en tres momentos diferentes:

a) En las sesiones del programa de capacitación dirigidas por un instructor nacional y que son de carácter intensivo y se llevan a cabo, aproximadamente tres veces al año. En estas sesiones para realizar las observaciones participamos como parte del grupo de profesores.

b) En sesiones de preparación para el uso de la tecnología en la enseñanza de temas específicos del programa de Matemáticas, en las cuales participamos como asesores.

c) En sesiones de clase con los estudiantes.

El período de observación comprende de septiembre del año 2000 a enero del año 2002.

Resultados

Enseguida se enlistan las primeras observaciones llevadas a cabo en el desarrollo del proyecto.

a) Los profesores han mostrado buen interés en trabajar con la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas, lo que se pone de manifiesto con su asistencia a las sesiones de preparación de las actividades, a pesar de que ello representa una carga adicional de trabajo.

b) Sin embargo no muestran la misma disposición para llevar a cabo sistemáticamente al aula las actividades preparadas para realizarse con los estudiantes. A pesar de la preparación que hacen de la actividad, no logran adquirir el nivel de confianza suficiente para llevarla al aula por iniciativa propia; sólo lo hacen esporádicamente y lo normal es que continúen impartiendo sus clases con los recursos didácticos tradicionales.

c) La introducción de paquetes computacionales y el uso de calculadoras y sensores en la enseñanza de la Matemática, así como la preparación de las actividades antes de llevarlas a cabo con sus alumnos, ha contribuido a la reflexión de su concepto de enseñanza de la Matemática y les ha permitido reconocer la necesidad de actualizarse, tanto en el dominio de la materia como en su práctica docente.

d) Se observa un cambio paulatino en los profesores en su forma de enseñar, no sólo consistente en explicar y dictar algunas definiciones a sus alumnos, sino que en permitirles exponer sus ideas e inquietudes, escucharlos en sus intervenciones, con lo que empiezan a concebirse más como guías de la actividad de aprendizaje, que como meros informadores del conocimiento.

e) Los profesores no han dado muestras, en las reuniones de trabajo que se han tenido, de preocupación por la forma en que pueden evaluar los avances de sus alumnos y calificar su desempeño en el aprendizaje de la Matemática, dado el cambio que se está dando en su enseñanza. Pareciera que la evaluación la conciben como una actividad independiente de la enseñanza.

f) Al observar el interés y las respuestas de sus alumnos, la motivación personal y el entusiasmo de la mayoría de los profesores ha aumentado, lo que se manifiesta cuando ellos mismos comentan la necesidad de preparar más actividades con distintos recursos didácticos con tecnología. En particular sugieren preparar actividades para llevarse a cabo haciendo uso del video, sin embargo esto no ha sido posible por la falta de estos videos ya grabados.

g) Los profesores muestran preocupación al considerar que el uso de la tecnología les afecta el avance en los programas de las materias.

Conclusiones

De las observaciones realizadas se pueden establecer algunas premisas a manera de conclusiones.

a) El éxito en la enseñanza de las Matemáticas utilizando el modelo propuesto en el proyecto, requiere que los profesores e instructores tengan un sólido dominio en la enseñanza y el contenido de la Matemática, lo cual puede lograrse con una capacitación sistemática.
b) Las actividades desarrolladas han servido para que los alumnos y profesores mejoren su concepción no sólo de la Matemática, sino de la ciencia en general.
c) Es necesario incluir sesiones de análisis y discusión sobre la forma de evaluar a los estudiantes y proponer criterios y técnicas para hacerlo con el propósito de que los profesores puedan percibir de manera más objetiva los avances que vayan logrando con sus alumnos.
d) Es importante aprovechar las experiencias adquiridas hasta ahora con el modelo para analizar los posibles cambios que puedan hacérsele para tratar de mejorarlo.
e) Debe promoverse y facilitarse la comunicación entre los profesores de las más de cincuenta escuelas en las que se está implementado el modelo en el país, pues de seguro que intercambiar experiencias entre profesores de diversas escuelas incidirá en un mejor desempeño de todos y los integrará de mejor manera al proyecto.
f) El modelo ha probado ser pertinente, pero requiere del apoyo no sólo institucional, sino también de profesores y padres de familia.
g) Es indudable que el modelo requiere mejoras y modificaciones y que éstas podrán hacerse a medida en que se sistematice la reflexión sobre la práctica que se realiza cada día. Reflexión que es necesario que se lleve a cabo en diferentes instancias y con la participación de los diferentes actores: profesores, alumnos, padres de familia, instructores, responsables nacionales, autoridades, etc.

Referencias bibliográficas

Enseñanza de la Física con Tecnología (EFIT). (2000). *Guía para el maestro*. México. S.E.P.

Jackson, P. (1990). *La vida en las aulas*. Morata. España.

Mayer-Smith, J. & Pedretti, E and Woodrow, J. (1997). Learning from Teaching with Technology: An Examination of How Teacher's Experiences in a Culture of Collaboration Inform Technology Implementation. *Annual Meeting of American Educational Research Association*, Chicago. U.S.A

Pedretti, E. & Mayer-Smith, J. and Woodrow, J. (1996). Students Perspectives on Teaching and Learning Ina Technology Enhanced Secondary Science Class-room. *Annual Meeting of the Canadian Society for Studies in Education*, St. Catherine, Ont.

Pourtois, J. y Huguette, D. (1992). *Epistemología e Instrumentación en Ciencias Humanas*. Herder. Barcelona, España Editorial

Rojano,T. & Moreno,L. & Bonilla, E. y Perrusquía, E. (1999).*The incorporation on New Technologies to School Culture, The Teaching of Mathematics in Secondary School*. Proceedings of Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of International Group for Psychology of Mathematics Education. Vol., 2. México. Pp. 827-832.

El concepto de función: su comprensión y análisis

Cecilia Crespo Crespo y Christiane Ponteville
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González".
Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires. Argentina
ccrespo@sinectis.com.ar chponteville@velocom.com.ar

Resumen

En la comprensión del concepto de función, básico y unificador en la matemática, las definiciones y representaciones constituyen elementos de fundamental importancia. Este trabajo, como continuación de una investigación realizada acerca de las concepciones que poseen los docentes y estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática, presenta una investigación llevada a cabo a través de cuestionarios y guías de trabajos prácticos que se centró en la conceptualización de ideas relacionadas con el concepto de función y su transposición didáctica. Tras analizar los conocimientos previos a cursar la materia Fundamentos de la Matemática, se procedió a realizar un enfoque histórico epistemológico del tema, tendiente a analizar las distintas concepciones que subyacen a la noción matemática de función, así como a la reflexión sobre su relevancia en la didáctica actual. Los resultados obtenidos a partir de las respuestas de los alumnos se complementaron a través del análisis de libros de texto de otras épocas y de la actualidad, y libros de historia y fundamentos de la matemática.

Introducción

Un concepto básico y unificador en la matemática es el de función. Existen incluso propuestas que vertebran cursos a partir de este concepto (NCTM, 1993). Las funciones desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones de la matemática a otras ciencias, y por lo tanto una herramienta poderosa para comprender a la matemática como ciencia aplicada, por medio de la modelización.

El aprendizaje del concepto de función figura como uno de los objetivos fundamentales en la enseñanza del cálculo. Son muchas las investigaciones que se han centrado en la problemática de la comprensión de este concepto desde distintas ópticas.

Por su parte, las representaciones se consideran esenciales para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas y adquieren fundamental importancia en el caso de las funciones (Rico, 2000). La noción general de representación es compleja y se la debe tener en cuenta muy especialmente para acceder al conocimiento de las conceptualizaciones realizadas.

El profesor de matemática, que enseña esta disciplina teniendo en cuenta tanto sus ideas acerca de la matemática como la manera de ser aprendida por sus alumnos, debe tener en claro las ideas relacionadas con la definición de función, sus características y representaciones. Los conceptos matemáticos que tiene un docente se vinculan directamente con los fundamentos de esta ciencia (Santos Trigo, 1993).

En este trabajo se presenta la continuación de una investigación realizada acerca de las concepciones que poseen los docentes y estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática (Crespo Crespo y Ponteville, 2001, 2002). La investigación fue realizada a través de cuestionarios y guías de trabajos prácticos y se centró en la conceptualización de ideas relacionadas con el concepto de función y su transposición didáctica. Tras analizar los conocimientos previos a cursar la materia Fundamentos de la Matemática, se procedió a realizar un enfoque histórico epistemológico del tema, tendiente a analizar las distintas concepciones que subyacen a la noción matemática de función, así como a la reflexión sobre su relevancia en la didáctica actual. Las fuentes utilizadas en esta etapa fueron principalmente libros de texto de otras épocas y de la actualidad, y libros de historia y fundamentos de la matemática.

Descripción de la experiencia realizada

En la primera etapa de nuestra investigación, relacionada con el concepto de función, se presentó a los alumnos del último año de la carrera de Profesorado de Matemática, un cuestionario en el que se les pidió que definieran función; a continuación, que la definieran sin utilizar elementos de teoría de conjuntos y finalmente la lectura e interpretación de un texto referido a las distintas representaciones que de una función pueden realizarse.

Sobre la base de las respuestas obtenidas, se abordaron en clase diversas caracterizaciones y definiciones de función presentes en textos de perfil histórico y la presentación de ejemplos particulares de funciones que permiten obtener sus características, más allá de las definiciones dadas por los alumnos en un principio.

La segunda parte de la investigación se orientó a conocer hasta qué punto unen los futuros docentes el concepto de función al de sus representaciones y la traducción entre ellas como herramienta para lograr en sus alumnos la interiorización del concepto de función.

Las respuestas obtenidas fueron posteriormente abordadas en la clase de Fundamentos de la Matemática para clarificar a través de ejemplos y de definiciones, las relaciones existentes entre las funciones y sus representaciones.

La definición de función

Las definiciones actuales de función que se manejan usualmente tanto en libros como en clases de análisis y cálculo, ponen una fuerte carga en el formalismo. Este hecho se pone de manifiesto en las respuestas que dan los alumnos.

La definición de función, en general se reduce en estas definiciones a un caso particular de relaciones, teniendo en cuenta en su formulación, el lenguaje de la teoría de conjuntos. A los alumnos les resulta muy difícil separar el concepto de función de la formulación formal de su definición.

La mayoría de las respuestas obtenidas en nuestra investigación se refieren a funciones numéricas, más particularmente a funciones de valores reales a valores reales.

Usualmente en los libros de texto se encuentran definiciones de función numérica como la siguiente:

> *Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A, exactamente un elemento, llamado f(x) de un conjunto B.*
> (James Stewart (1994). *Cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.)

Esta definición lleva implícito el conocimiento del concepto de relación y de conjunto y subconjunto de números reales.

> *Si a cada uno de los valores que puede tomar una magnitud variable x perteneciente a un determinado conjunto E, corresponde un valor único, finito y determinado de la magnitud y. Esta magnitud y recibe el nombre de función (uniforme) de x, o de variable dependiente determinada en el conjunto E; x se llama argumento o variable independiente.*
>
> (Demidovich, B. (1973). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. URSS: Editorial Mir. pp. 7).

Es notorio que aún en las definiciones que los libros llaman intuitivas, se hace uso de conceptos de la teoría de conjuntos, aunque no se las escriba formalmente:

Aproximación intuitiva

La idea fundamental en el concepto de función es que cada elemento del dominio tiene una y solo una imagen en el recorrido.

Definición

Una relación f entre elementos de un conjunto A y elementos de un conjunto B es una función de A en B si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $\forall x \in A \quad \exists y \in B \ / \ (x;y) \in f$

2. $(x;y) \in f \wedge (x;z) \in f \Rightarrow y=z$

Dominio de f: $D_f = A$

Recorrido de f: $R_f = \{y \ / \ y \in B \wedge \exists x \in A \ / \ (x;y) \in f\}$

> (Rabuffetti, Hebe (1972). *Introducción al análisis matemático. Cálculo I.* Buenos Aires: El Ateneo. pp. 43, 45).

Estas definiciones pueden dejar la visión de que la teoría de conjuntos es necesaria para definir el concepto de función. Esta visión, sin lugar a dudas se puso de manifiesto en la investigación realizada a través de las respuestas obtenidas de los futuros docentes. Sin embargo la noción de función fue utilizada y conceptualizada históricamente antes de la teoría de conjuntos. De ahí la pregunta que planteamos a nuestros alumnos con respecto a intentar definir función sin utilizar conceptos de teoría de conjuntos.

Históricamente, el concepto de función nació ligado a la idea de dependencia de cantidades variables en unión con el estudio del movimiento en época de Galileo Galilei y con la caracterización dada por Nicolás de Oresme: *"Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo* *podemos imaginar como una cantidad continua representada, por un segmento".* Esta concepción de carácter físico y geométrico antecedió a la noción cartesiana de dependencia numérica.

En el siglo XVII se hizo más común el uso de expresiones explícitas de funciones con el desarrollo del cálculo infinitesimal. Fue Leibniz en 1673 el primero en emplear el término "función" en el sentido actual. Su discípulo Jean Bernoulli escribió: *"Una función de una variable es definida aquí como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes*" La expresión "de alguna manera" significa que es expresable con operaciones matemáticas.

A Leonhard Euler se debe, además del uso de letras de función como f(x) para expresar el valor que la función f asocia a la variable x, la siguiente definición: *"Una función de una magnitud variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes".* Sin embargo esta definición de Euler es limitada, exige que la definición sea explícita.

Joseph Fourier en 1822 escribió: "Una función general f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitrario". Esta definición contempla singularidades, pero considera que el dominio es numerable ya que se trata de una sucesión.

En 1834, Nicolai Lovachevski exponía: *"La concepción general requiere que una función de x sea definida como un número dado para cada x, variando gradualmente con x. El valor de la función puede ser dado bien por una expresión analítica o por una condición que aporta un modo de examinar todos los números y elegir uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir y resultar desconocida".*

Según palabras de Peter Dirichlet de 1837: *"Dos variables x e y están asociadas de tal forma que al asignar un valor a x entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a y, se dice que 'y' es una función (unívoca) de x".*

Cien años más tarde, los Bourbaki formalizan el concepto de función definiéndola como una relación entre dos conjuntos.

En los libros de texto de principios de siglo XX, es posible encontrar definiciones de función que siendo correctas y equivalentes a la definición que encontramos en los textos actuales, no hacen uso de formalismos propios de la teoría de conjuntos.

Tanto la evolución histórica de la definición de función, como el análisis de las definiciones existentes en los libros de texto recién mencionados, otorgaron a los futuros docentes una visión del concepto de función que trasciende al formalismo que la expresa.

Funciones: distintas representaciones

La diferenciación entre un objeto matemático y sus representaciones es de gran importancia en la comprensión de un concepto. Existen distintas representaciones de un objeto, cada una de ellas es como una huella de ese objeto (Rico, 2000). La comprensión de un concepto permite manipular y procesar distintas representaciones de manera que los distintos modos de manipulación expresen, a su vez, diversas propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos e ideas representados.

En la educación elemental y media, se suele hacer hincapié en la importancia que tiene la expresión de funciones a través de distintos tipos de representación y la traducción entre las mismas. Podemos leer (Esteban, 1993): *"la adquisición del concepto de función se conseguiría tras dominar las transferencias que pueden realizarse entre las distintas expresiones o representaciones que de una función podemos efectuar"*. A continuación este autor presenta un tetraedro en cuyos vértices figuran: expresión algebraica, numérica, verbal y gráfica y cuyas aristas son flechas dobles entre los vértices.

Este texto fue presentado a nuestros alumnos, pidiéndoseles que lo comentaran. En su totalidad, adhirieron a la afirmación y justificaron comentando la importancia de representar las funciones a través de todas estas expresiones y de realizar la correcta traducción entre las mismas, y afirmando que el concepto de función es totalmente comprendido por los alumnos de educación media cuando éstos pueden construir para cada función el tetraedro correspondiente y realizar el pasaje por sus aristas, pasando de cada forma de representación a cualquiera de las otras. No obstante, reconocen que el riesgo que se corre a partir de las representaciones gráficas es hacer generalizaciones sobre la base de la apariencia gráfica, lo cual puede conducir a ideas equivocadas desde el punto de vista analítico.

El tema fue retomado por las autoras de esta investigación en clase de Fundamentos de la Matemática para analizar funciones de las que no se puede realizar representación gráfica, otras sin expresión algebraica e incluso funciones de las que no se puede determinar el dominio explícitamente.

Algunos de los ejemplos presentados en el aula con este fin fueron los siguientes:

> *La función de Dirichlet, definida en el intervalo [0, 1] asigna 1 a cada racional y 0 a dada irracional.*
>
> a. *Analícela desde el punto de vista clásico.*
>
> b. *¿De qué maneras puede representarse la función?*
>
> c. *Analice su continuidad.*
>
> *Sea f una función que a cada número real le hace corresponder la cantidad de cifras 3 que aparecen en la parte no entera de su representación en base 10.*
>
> a. *Analícela desde el punto de vista clásico.*
>
> b. *¿Cuánto vale la función en: 4, 1/4, 1/3, $\sqrt{2}\pi$,?*
>
> c. *¿Qué puede decir del dominio de esta función?*

A partir de la presentación de estas funciones y de las preguntas planteadas al respecto, fue posible extraer conclusiones interesantes que apuntaron a una mejor conceptualización del concepto de función.

La toma de conciencia de la existencia de funciones de las que no se puede realizar representaciones gráficas, de funciones cuyo dominio no es posible determinar y de funciones que no se puede saber si están o no definidas en un valor determinado, hicieron que los alumnos replantearan sus concepciones acerca de las distintas representaciones de las funciones y su importancia en la enseñanza. La relación existente entre las diferentes representaciones que pueden hacerse de una función permite la adquisición del concepto pero no siempre es posible en una función disponer de todas ellas.

Se trabajaron también a partir de estas ideas, cuáles son la habilidades que deben promoverse en los alumnos en relación con el concepto de función. Algunas de las ideas que surgieron son:

- Identificar relaciones funcionales del mundo real utilizando funciones
- Modelizar fenómenos y situaciones diversas por medio de funciones
- Operar con representaciones particulares de funciones (fórmulas, tablas, gráficos, diagramas, etc.)
- Realizar transferencias de una forma de representación a otra, siempre que sea posible
- Interpretar informaciones a partir de ciertas representaciones de las funciones
- Internalizar el concepto de función, extrapolando de las distintas representaciones
- Comprender la relación entre funciones y ecuaciones
- Describir propiedades locales y globales de las funciones (crecimiento, continuidad, continuidad, etc.)
- Comprender las funciones como objetos matemáticos
- Predecir el comportamiento de un función, según los datos suministrados

De esta manera el concepto de función constituye una idea que debe ir adquiriéndose a lo largo de toda la escolaridad, teniendo en cuenta los conocimientos de los que disponen los alumnos.

Conclusiones

La investigación realizada pone en evidencia el alto nivel de complejidad existente en el concepto de función y cómo ésta a veces permanece de manera inconsciente en los docentes, incluso cuando éstos reflexionan acerca de su enseñanza.

El abordaje histórico permitió la comprensión de este concepto, complementado por el análisis de diversos libros de texto en los que se enfoca la definición y el abordaje de las funciones desde distintos ángulos y con distintos lenguajes.

Algunas de las causas de las dificultades de la comprensión del concepto de función, se originan en las diversas concepciones y representaciones, en la sobrevaloración del formalismo en la enseñanza y en la presentación que realizan los libros de texto. Por otra parte, demasiado énfasis en la operatoria y algoritmización y el desconocimiento de la visión histórica de la evolución del concepto, promueven la confusión entre el concepto de función y sus representaciones.

En este trabajo se arribó a la conclusión de que si bien es importante para el desarrollo del pensamiento matemático, aprender a realizar traducciones de unas representaciones a otras, aprovechando que las funciones admiten varios registros de representación, es necesario tener conciencia de que no todas las funciones pueden expresarse a través de todos los tipos de registros. En la comprensión de este concepto intervienen las representaciones y es importante que el docente oriente a los estudiantes a reconocer cuáles son las representaciones acordes con la función planteada, cuándo puede una función expresarse a través de registros verbales, analíticos, tabulares, gráficas, etc.

Referencias bibliográficas

Crespo , C y Ponteville, Ch. (2002). Pensar la matemática para enseñar la matemática. En C. Crespo Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 15. (pp. 1163-1168). México: Iberoamérica.

Crespo , C y Ponteville, Ch. (2001). La influencia de las concepciones de los docentes y los estudiantes acerca de la matemática en la enseñanza de esta ciencia. *Presentado en la XXIV Reunión de Educación Matemática*. Unión Matemática Argentina. San Luis.

Durán, A. J. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* Madrid: Alianza Universidad.

Esteban, F. (1993). *Organización de la información. La representación-expresión.* Sigma 15, (pp. 41-45).

Gatica, N. et al. (2002). El concepto de función en los libros de textos universitarios. En C. Crespo Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 15. (pp. 131-136). México: Iberoamérica.

NCTM (1993). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Sevilla: SAEM *Thales*.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática.* http://www.ugr.es/local/seiem/1V_Simposio.htm

Santos T, L. M. (1993). La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. En *Mathesis* Vol IX n°4. (pp. 419-432) México: Universidad Autónoma de México.

Aprendizaje Cooperativo

Ideas, conceptos y experiencias sobre el aprendizaje cooperativo en clases de matemática

Herminia Hernández Fernández
Universidad de La Habana
Cuba
hthfl90839@yahoo.com

Ed Dubinsky
Georgia State University
EE.UU
edd@mes.kent.edu

Rogelio Acosta González
Centro Univ. de las Tunas
Cuba
rpacostaglez@yahoo.com.mx

Resumen

Profesores experimentados y noveles con alguna experiencia en el uso de aprendizaje cooperativo en sus clases de Matemática y aquellos que han mostrado algún interés en desarrollar este ambiente de aprendizaje en sus clases de matemática, encontraron un espacio de debate a partir de la presentación de las interrogantes siguientes:

- ✓ ¿Cómo el aprendizaje cooperativo satisface las necesidades de cooperación y de comunicación?
- ✓ ¿Aprender "juntos", en grupo, es sinónimo de aprendizaje cooperativo?
- ✓ ¿Cómo pueden ser utilizadas Hojas de Trabajo como una base de orientación y de posicionamiento en la Zona de Desarrollo Próximo ?¿Qué principios pueden regir su uso?
- ✓ ¿Hasta qué punto es posible enseñar / aprender matemática desde el aprendizaje cooperativo y cuáles son los "peligros" inherentes a este ambiente de aprendizaje?

Se presentan algunas experiencias en el uso de aprendizaje cooperativo en los EE.UU y en Cuba. En el caso de Cuba, presupuestos del enfoque histórico cultural y de la actividad sustentan la experiencia.

Nota introductoria

En esta mesa redonda se abordaron los aspectos que se relacionan en el resumen. Los dos primeros, conjuntamente con la sustentación teórica fueron abordados por la Dra. Hernández y los dos últimos por el Lic. Acosta y el Dr. Dubinsky respectivamente.

¿Cómo el aprendizaje cooperativo satisface las necesidades de cooperación y de comunicación?

Es un imperativo de la época prever que el profesional que se forma, cualquiera sea su perfil, pueda entre otras habilidades lograr:

- o Identificar, plantear y resolver problemas, que usualmente tienen un carácter multidisciplinario y donde para resolverlo se requiere de un trabajo de equipo.
- o Tomar decisiones y valorar sus consecuencias críticamente.
- o Interpretar el lenguaje del otro y hacerse entender en el propio. En síntesis, escuchar y saber comunicarse en forma oral y escrita.
- o Conjeturar, argumentar, fundamentar sus posiciones y criterios.
- o Asumir responsabilidad individual en la dinámica de un grupo o equipo de trabajo.

Cooperación en la clase de matemática[2]

Los estándares curriculares del NCTM recomiendan que los profesores abran espacios en el aula para que los estudiantes tengan la oportunidad de trabajar "juntos" para resolver problemas y de esta forma, comentar sobre el problema a resolver en el sentido de:

- Discutir estrategias de solución
- Relacionar el problema con otros que han resuelto anteriormente
- Pensar y discutir sobre el proceso completo para dar solución al problema

Los grupos pequeños constituyen un foro donde los estudiantes:

- Formulan preguntas
- Discuten ideas
- Cometen errores y aprenden de estos errores
- Aprenden a escuchar las ideas del "otro"
- Ejercen una crítica constructiva
- Escriben la síntesis de sus descubrimientos

Es casi imposible lograr el desarrollo de estas habilidades, sin introducir en el mayor número de disciplinas que conforman el proceso de formación profesional y muy en particular en la formación matemática, el aprendizaje grupal, en condiciones de aprendizaje cooperativo (AC). Este es un ambiente de aprendizaje que responde a las necesidades de cooperación y de comunicación.

¿Aprender "juntos", en grupo, es sinónimo de aprendizaje cooperativo?

La coincidencia en espacio y tiempo de un conjunto de individuos involucrados en una actividad común de aprendizaje, el trabajar "juntos" o el simple empleo de métodos o técnicas grupales participativas no resulta equivalente al llamado AC. Este implica transformaciones en el proceso y en las concepciones que lo sustentan. Usualmente se aplican técnicas grupales al margen del cuerpo teórico – metodológico que las sustenta.

En contraposición al proceso enseñanza /aprendizaje centrado en el profesor, se tiende a considerar la enseñanza EN grupo, centrada en el individuo. En esta el grupo actúa como medio o condición para el desarrollo individual. Los estudiantes trabajan "juntos", el grupo es condición necesaria pero no suficiente para lograr desarrollo individual y queda a un lado el desarrollo del grupo como tal. Por otra parte la enseñanza centrada en el grupo, implica trabajar CON el grupo y DESDE el grupo. Trabajar CON el grupo presupone la intención del profesor de modificar el grupo teniendo en cuenta las características individuales y los roles a desempeñar por cada uno de los miembros del grupo. Trabajar DESDE el grupo presupone trabajar EN grupo y CON el grupo. Ningún problema podrá serlo para el grupo, si no está en su Zona de Desarrollo Potencial (ZDP). El AC se asocia a la idea de trabajar DESDE el grupo.

Los presupuestos del enfoque histórico cultural según las ideas de L. Vigotsky y sus seguidores ofrecen un marco de referencia sólido y coherente a estos fines.

---

[2] Esta idea está traducida y adaptada de "How to use Cooperative Learning in the Mathematics Class". Artz,A y Newman, C. NCTM. 1993. U.S.A.

Aprendizaje cooperativo. Principales características desde el enfoque histórico cultural y de la actividad.

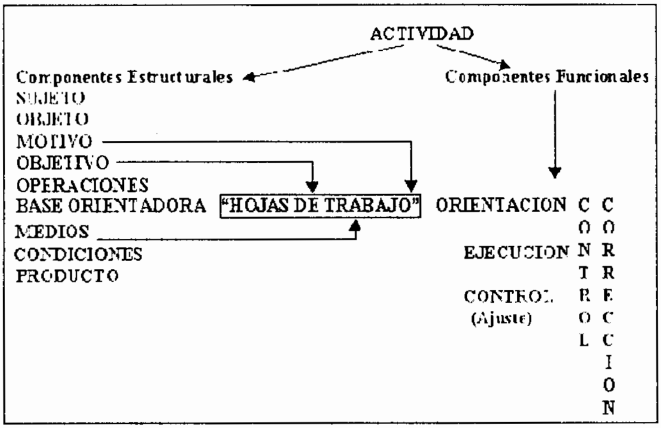
❑ Se va a entender APRENDIZAJE[3], como un proceso de construcción y reconstrucción (no solo de registro y de observación) por parte del sujeto que aprende de: conocimientos, formas de comportamiento, actitudes, valores, afectos y sus formas de expresión; que se producen en condiciones de interacción social en un medio socio histórico concreto, en dependencia del nivel de conocimientos que posea el sujeto, de sus intereses, estado de ánimo, actitudes y valores hacia diferentes esferas de la realidad social y personal; que lo conducen a su desarrollo personal y al intercambio y, en ocasiones, al desarrollo personal también de los sujetos con los cuales interactúa.

❑ A diferencia de las tendencias que incorporan los métodos grupales sin cambiar sustancialmente la concepción que subyace en su variante tradicional, el aprendizaje cooperativo (AC) bajo los presupuestos del enfoque histórico cultural y de la actividad, adopta las siguientes características:

- En el AC, el grupo deviene sujeto de su propia formación y sujeto de determinado tipo de actividad y no solo es objeto de trabajo del profesor. Es en el grupo donde se crea la trama concreta de las relaciones sociales mediante procesos comunes e interactivos.
- En el AC se producen cuatro procesos mutuamente influyentes: El aprendizaje Individual, el Proceso Grupal, el proceso de Enseñanza y el Aprendizaje Grupal
- El AC implica conocer del grupo: Su estructura, dinamismo, mecanismos de cambio, estrategias para su orientación y transformación, por parte del docente que asume funciones de orientador.
- La enseñanza, en un ambiente de AC, crea la Zona de Desarrollo Potencial (ZDP). La tarea de la enseñanza es poner en movimiento procesos internos de desarrollo que solo son posibles en la colaboración con los demás. La ZDP abre campo para el aprendizaje cooperativo. El grupo se convierte en agente movilizador, potenciador de esos procesos internos de desarrollo.
- La categoría desarrollo nos sitúa en una posición diferente en la comprensión y reinterpretación del fenómeno grupal, a partir del estudio de la dinámica del desarrollo del grupo en el proceso enseñanza/aprendizaje.

❑ La teoría de la actividad identifica en la categoría ACTIVIDAD, componentes estructurales y funcionales como se sintetiza en el cuadro que se presenta a continuación, donde se ubican las "Hojas de Trabajo". A la luz de esta teoría, éstas orientan la tarea a realizar por el estudiante en un momento determinado, es decir que cumplen un objetivo y al mismo tiempo constituyen una base de orientación para la acción del estudiante. Las Hojas de Trabajo por tema, constituyen un sistema que a su vez está regido por un sistema de principios.

[3] González, O. Aprendizaje e Instrucción, en CEPES, Curso Internacional. Compendio de Lecturas sobre Curriculum, Diseño, práctica y evaluación s/f.



¿Cómo pueden ser utilizadas Hojas de Trabajo como una base de orientación y de posicionamiento en la Zona de Desarrollo Próximo? ¿Qué principios pueden regir su uso?

Las Hojas de Trabajo constituyen un medio de trabajo a disposición del estudiante que, mediante una situación problemática lo induce a buscar por si mismo soluciones o aproximaciones a una conceptualización o a un procedimiento. Cada Hoja de Trabajo es portadora de actividades o tareas a resolver por el estudiante, de ahí que cada una tenga su objetivo o fin en si mismo. Al igual que en toda actividad humana, el estudiante en cada hoja realiza actividades de orientación, de ejecución y de control. Estas hojas de trabajo responden a un sistema de principios. Sean estos:

"Agotar posibilidades". Este principio está dirigido a agotar al máximo las posibilidades que sobre un objeto de conocimiento son asequibles y pertinentes al estudiante en un momento determinado.

"Aislar complejidades". Este principio está estrechamente vinculado al anterior. Siempre que se pueda anticipar un conocimiento, familiarizarse con él es oportuno hacerlo en evitación de plantear un conjunto denso de complejidades.

"Activación de conocimientos" Se propicia que el estudiante recupere de manera individual o por la interacción con los otros, la información instalada. Se concreta por medio de preguntas dirigidas a esa búsqueda, que constituyen a su vez una orientación en la actividad a realizar.

"Recurrencia". Expresa la intención y el hecho de recurrir reiteradamente a actividades realizadas y a conceptos o procedimientos a los cuales el estudiante ha arribado.

"Promoción y resolución de conflictos" el estudiante debe percatarse de que son insuficientes los recursos de que dispone para resolver un problema y de la necesidad de búsqueda y aprendizaje de otros conocimientos para ello. Se tiene en cuenta que las situaciones de conflicto individual y colectivas movilizan el aprendizaje y de hecho el desarrollo.

"Control y regulación". El control es inherente a toda actividad humana y exige de la regulación para intervenir, hacer ajustes, corregir.

En la experiencia que se presenta, los estudiantes han trabajado con Hojas de Trabajo, en Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable. Los estudiantes refieren que las Hojas de Trabajo les permiten un aprendizaje mucho más "amigable" y reconocen el efecto potenciador del grupo.

¿Hasta qué punto es posible enseñar / aprender matemática desde el aprendizaje cooperativo y cuáles son los "peligros" inherentes a este ambiente de aprendizaje?

Publicaciones refieren reiteradamente y demuestran que durante un curso desarrollado en un ambiente de aprendizaje cooperativo se "aprende mucho".

El tamaño del grupo no debe tener más de 3 ó 4 miembros. El profesor es determinante en la composición del grupo, con independencia de que también se consulte a los propios estudiantes sobre sus preferencias para integrarlo. Se deben conservar los mismos equipos a lo largo del curso, para facilitar que se forme el llamado "espíritu de cuerpo". Es importante que el profesor interiorice que él se comunica no solo con individuos sino con equipos y que casi todo el trabajo del curso se hace en los equipos. El grupo deviene sujeto de determinada actividad.

La evaluación del aprendizaje individual es en si una tarea compleja y la evaluación del grupo le incorpora una complejidad mayor. Al menos un examen se hace en equipo y cada miembro del equipo recibe igual calificación. Además, una vez durante el curso, el estudiante recibe dos calificaciones: Por una parte, su calificación individual y por otra, el promedio de las calificaciones de cada miembro del grupo. Hay criterios contradictorios al respecto pues hay quien considera injusto el afectar al estudiante por el rendimiento del grupo y porque esto de cierta manera estresa a los estudiantes, pues algunos sienten que sus rendimientos bajan por causa del grupo y otros se sienten culpables por no haber trabajado lo suficiente. Ahora bien, cuando se incrementa la calificación produce un impacto positivo porque entonces cada miembro se siente responsable del éxito del grupo y de cada uno de sus miembros.

Hay veces que el grupo no llega a funcionar bien por falta de tiempo para que el grupo se considere como tal. El sentido de pertenencia a un grupo se hace realidad - entre otras cosas- cuando el estudiante siente que la carga de estudio que el grupo genera vale la pena.

El aprendizaje cooperativo encierra una contradicción, es una forma de aprendizaje más eficaz pero a la vez su desarrollo encierra una mayor complejidad.

Se dice que es un aprendizaje más eficaz porque por ejemplo, hay procedimientos que resultan muy difíciles de aprender o problemas muy difíciles de resolver al margen del equipo. Sucede que un estudiante puede conocer un paso, otro estudiante otro paso y si cada quien expresa sus ideas, estas se socializan y se llega a producir el aprendizaje como resultado de la interacción de entre los sujetos. Téngase en cuenta que la mejor forma de entender es explicar.

A diferencia de Cuba, en los EE.UU prima la cultura de la "competencia", los estudiantes prefieren el trabajo individual, de ahí que resulte más complejo lograr el "espíritu de cuerpo" del grupo[4].

Hay veces que un miembro del grupo lo hace todo, mientras el resto no hace el esfuerzo por trabajar. Esto sucede cuando no se comparte el concepto de colaboración. La evaluación tal y como se ha descrito anteriormente puede contribuir a disminuir esta situación.

Referencias bibliográficas

Acosta, R. & Hernández, H. (1999). *Las Hojas de Trabajo como soporte de un Modelo de Aprendizaje Cooperativo del Análisis Matemático.* INNOED'99. Las Tunas. Cuba

Artzt,A. & Newman, C. (1993).*How to use Cooperative Learning in the Mathematics Class.* National Council of Teachers of Mathematics. U.S.A.

Castellanos, A.V. (1999). *El Sujeto Grupal en la Actividad de Aprendizaje : Una propuesta teórica.* Tesis doctoral en C. Psicológicas. CEPES. Universidad de La Habana. Cuba

Colectivo de Autores. (1998). *Los Métodos Participativos. ¿ Una nueva concepción de la enseñanza ?.* CEPES. Universidad de La Habana . Cuba

Galvis, A..*Educación Para El Siglo XXI Apoyada En Ambientes Interactivos, Ludicos, Creativos y Colaborativos.* Universidad de los Andes. Colombia. http://zeus.uniandes.edu.co/ inflidie. Tomado del compacto CREA (18/05/99)

Reynolds, B., Hagelgans,N., Schwingerdorf,K.;Vidakovic,D.;,Dubinsky,E.;Shahin,M.& Wimbish,G (1995).*A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics.* The Mathematical Association of America. MAA Notes Number 37. U.S.A.

Wells, G. (1999). The Zone of Proximal Development and its implications for Learning and Teaching. En *Dialogic Inquiry:Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education.* New York, Cambridge University Press. U.S.A

[4] Se va a identificar grupo con equipo, aunque conceptualmente puede haber diferencias entre ambos términos.

Técnicas participativas para estimar, esbozar y procesar datos

Amelia Arceo González.

Secundaria Básica "Rafael Orejón". Boyeros. Ciudad Habana. Cuba

Resumen

La escuela debe preparar a los jóvenes para enfrentar con éxito la solución de los problemas de la vida práctica y la sociedad.

Las nuevas transformaciones de la Secundaria Básica en Cuba están en correspondencia con ese propósito y para lograrlas, se imponen nuevos requerimientos en el orden metodológico y sobre todo un aprendizaje más activo.

Dichas transformaciones incluyen para la enseñanza de la Matemática el trabajo con tres habilidades que se añaden a las que con anterioridad se propiciaban en Secundaria Básica: Estimar, Esbozar y Procesar datos, por lo que representa un reto para los profesores de Matemática, la búsqueda de procedimientos adecuados que contribuyan a alcanzarlas.

La presente tesis propone un grupo de técnicas participativas, que pueden ser utilizadas en el marco de las nuevas transformaciones de la secundaria básica, para favorecer el desarrollo de las mencionadas habilidades en la enseñanza de la Matemática.

Introducción

Todo educador debe estar consciente de que elevar la calidad de la enseñanza significa la búsqueda constante de métodos que conduzcan a la eliminación del aprendizaje dogmático y reproductivo. La utilización de métodos acertados requiere poner en marcha ideas creativas, apropiadas para un aprendizaje activo, en el cual los alumnos resuelven problemas, a la vez que obtienen conocimientos más sólidos de manera más agradable y con una mayor independencia, al intentar buscar solución a las tareas que se le proponen.

En Cuba a partir del curso escolar 1999-2000, se inician nuevas transformaciones para la Secundaria Básica, que incluyen cambios en el enfoque metodológico general de las asignaturas y en los métodos y procedimientos para la dirección del proceso docente educativo. Las transformaciones de la Matemática en la Secundaria Básica, incluyen también la incorporación de las habilidades de procesar datos, estimar y esbozar figuras y modelos geométricos sencillos, por lo que constituye un reto para los profesores de Matemática, compatibilizar el empleo de los métodos idóneos, con el logro de dichas habilidades.

Todo ello presupone cambios en la manera de pensar del maestro, en su concepción metodológica del proceso docente educativo. Sobre ello Tolstoi planteó: "Todos los métodos son herramientas de aprendizaje, unas mejores que otras y seguramente algunas buenas, pero lo que importa, no está en la herramienta, sino en la mano que la maneja, no es el método, sino el maestro" (Tolstoi, 1980)

Es importante que los profesores de la Enseñanza General Media comprendan que las nuevas transformaciones de la Matemática en la Secundaria Básica, no están relacionadas con cambios sustanciales respecto a los contenidos que se deben abordar, sino que en esencia, se caracterizan por una nueva concepción de la asignatura, en la cual juega un importante papel el empleo de métodos, procedimientos y Técnicas Participativas.

Este trabajo pretende de forma modesta, realizar una pequeña contribución para ayudar al maestro de Matemática a transitar por el "cambio" que significaría la aplicación de las nuevas transformaciones de Secundaria Básica, brindándoles algunas Técnicas Participativas relacionadas con las habilidades que se incluyen en la enseñanza de la Matemática a raíz de dichos cambios que además le pueden servir como punto de partida, para generar nuevas ideas respecto a los procedimientos a emplear, a tono con estos cambios. En él se exponen los resultados de la tesis de maestría de la autora, cuyo OBJETIVO es proponer un grupo de técnicas participativas para ser utilizadas en la enseñanza de la Matemática, en el marco de las nuevas transformaciones de la secundaria básica, que favorecen el desarrollo de las habilidades estimar, esbozar figuras y procesar datos.

Desarrollo

El proceso Pedagógico sólo ejercerá su función reguladora o movilizadora de la actividad, si se despierta la motivación y el interés del alumno. Es por ello que se hace necesario tener las características psicológicas, las motivaciones e intereses, tanto del grupo como de cada uno de los individuos que lo componen, considerar los motivos por los cuales los alumnos realizan la actividad. La selección adecuada de una técnica participativa debe tener en cuenta también estos elementos.

La aplicación de las técnicas participativas requiere una preparación en la cual se defina ¿cuándo?, ¿cómo?, ¿por qué?, ¿para qué?, ¿hasta dónde? será aplicada, porque ella constituye el estímulo que propicia la participación activa y consciente de los alumnos en la adquisición de los conocimientos.

La autora considera las técnicas participativas como RECURSOS Y PROCEDIMIENTOS, acercándose a su carácter como ELEMENTO COMPONENTE DEL MÉTODO, lo que deviene como condición lógica de su definición, incluir este concepto en otro más amplio, el concepto de método.

De todo lo anterior se concluye que: LAS TÉCNICAS PARTICIPATIVAS CONSTITUYEN LAS VÍAS DE CONCRECIÓN DE LOS MÉTODOS PARTICIPATIVOS; ya que obedecen a los principios generales de estos, porque son adecuaciones de los mismos a situaciones concretas, de ahí su diversidad, su proyección y dinámica específica, en función de los objetivos, de las necesidades e intereses y de las características de los grupos en que se apliquen.

La propuesta presentada tributa al logro de las habilidades Estimar, Esbozar figuras y modelos geométricos sencillos y Procesar datos, que se incluyen ahora en los programas de la asignatura Matemática de 7mo, 8vo y 9no grado, a partir de las nuevas transformaciones de la Secundaria Básica.

Aunque el alcance de la tesis, comprende propiamente las Técnicas Participativas propuestas que se relacionan con dichas habilidades y su validación a partir del criterio de especialistas y de su concreta aplicación, la autora consideró oportuno realizar el seguimiento de cómo se desarrollaban estas habilidades en cada estudiante sin obviar que por supuesto, no solamente las Técnicas Participativas pueden influir en lograrlas.

Para ello consideró como fundamento, la teoría psicopedagógica sobre la formación de habilidades del Dr. Brito Hernández, basada en el referencial que ofrecen dos destacados psicólogos: S.L.Rubistein y A.N.Leonitiev, que consideran toda actividad humana una unidad estructural, por eso, las capacidades, habilidades y hábitos también lo son y llegan a manifestarse cuando se han sistematizado sus aspectos ejecutores esenciales, que son llamados invariantes funcionales.

En el trabajo fueron elaboradas por la autora un total de 10 Técnicas Participativas que pueden ser aplicadas para propiciar el desarrollo de las habilidades Estimar, Esbozar figuras y modelos geométricos y procesar datos, que favorecen el empleo de procedimientos lógicos, en el planteamiento y solución de problemas prácticos. Su empleo se corresponde con las nuevas transformaciones de la Secundaria Básica.

A continuación se describen con más detalles una de ellas.

TÉCNICA 4: Diseña tu aula.

Habilidades con que se relaciona: Estimar y procesar datos.

Objetivo: Establecer relaciones proporcionales entre la superficie que ocupan los diferentes objetos del aula, a partir de un diseño creado por los propios estudiantes.

Materiales: Cuadriláteros de diferentes tamaños y colores y una hoja de papel 30 x 40.

Descripción: Se explica a los estudiantes en que consiste la actividad. Se asocia a cada objeto del aula un cuadrilátero del tamaño que cada pareja considere, en dependencia de la superficie que ocupa sobre el aula, que ahora se supone que es la hoja de papel. Se escribe el nombre del objeto en el cuadrilátero asociado a este, por último se coloca sobre la hoja de papel para diseñar un modelo del aula confeccionado por cada pareja. Pueden incluirse otros elementos propuestos por ellos.

-- Pasado algún tiempo los estudiantes se ponen de pie y hacen un recorrido por el aula, observando todos los diseños presentado por las diferentes parejas.

--El profesor pide las opiniones al grupo de lo observado durante el recorrido, destacando la proporción entre las superficies que ocupan los objetos en cada diseño.

Análisis de los resultados

Para analizar los resultados de la aplicación de las Técnicas propuestas se valoraron los siguientes aspectos:

I.- Criterios de los especialistas.

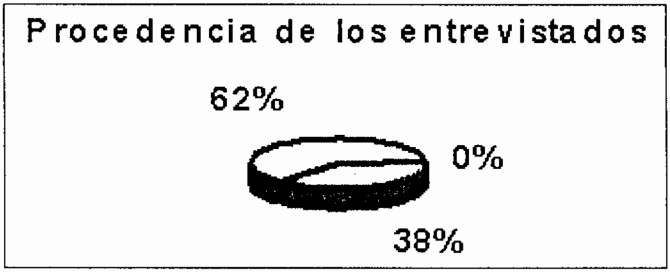
II.- Aceptación de los estudiantes.

A continuación se desarrollarán los mismos.

I- Sobre el criterio de los especialistas.

El conjunto de Técnicas elaboradas se presentó en una actividad metodológica con los profesores del Departamento de Ciencias de la Secundaria Básica "Rafael Orejón", con el objetivo de valorar sus ventajas y desventajas. El relator dirigió la discusión, en la cual a través de las opiniones de los equipos se arribó a conclusiones. En general hubo un consenso de aceptación por parte de los profesores con respecto a las Técnicas propuestas, las cuales consideraron en general interesantes.

Otra forma de validación de las Técnicas Participativas planteadas, se realizó a través de una entrevista, a una muestra de 13 profesores de Matemática de diferentes municipios de la Capital, 8 procedentes de los municipios relacionados con las nuevas transformaciones de la Secundaria Básica y 5 de los municipios no relacionados con ellas, para un 62 y 38% respectivamente.



A pesar de que el 30 % de la muestra no está a favor de las Técnicas Participativas, en general, la mayoría de los encuestados tiene una valoración positiva de las Técnicas presentadas, lo cual puede apreciarse en la gráfica.

II-Aceptación de los estudiantes.

Para conocer la aceptación de los estudiantes del grupo de 9no grado donde fueron aplicadas 6 de ellas, se aplicó un PNI (Ver anexo 4) cuyos resultados fueron:

Cantidad de estudiantes	35
Total de opiniones recogidas	96

Opiniones Positivas	68 para un 70,8 %
Opiniones Negativas	11 para un 11,4 %
Opiniones Interesantes	17 para un 17,7 %.

Sobre la base de lo objetivo declarado puede considerarse que la presente investigación cumplió su cometido, puesto que entre sus resultados aparece la creación de Técnicas Participativas para propiciar las habilidades de Esbozar, Estimar y Procesar datos, las cuales pueden ser incorporadas a la impartición de los programas correspondientes a las nuevas transformaciones en la enseñanza de la Matemática en la Secundaria Básica. La propuesta recoge un total de 10 Técnicas Participativas, asociadas a las mencionadas habilidades, según la siguiente descripción:

- Relacionadas con la habilidad de Esbozar: 40 %
- Relacionadas con la habilidad de Estimar: 10 %
- Relacionadas con las habilidades de Estimar y Procesar: 30%
- Relacionadas con las habilidades de Estimar, Esbozar y Procesar Datos: 20%

Además de recomendarlas para ser utilizadas en los 4 municipios capitalinos donde se desarrollan dichas transformaciones, pueden utilizarse en el resto de los municipios en los que no se han puesto en práctica todavía. Como las transformaciones presuponen un cambio en la concepción metodológica de la enseñanza de la Matemática, para la cual los maestros no están todavía listos, el uso de las Técnicas propuestas, podría contribuir a revolucionar el modo de conducción de las clases, lamentablemente, en general, tradicionales. Nótese que las Técnicas propuestas no se recomiendan para un grado en específico, puesto que con pequeñas adecuaciones, pudieran adaptarse a uno u otro grado, pero de cierta forma constituyen una guía para el maestro, que en ocasiones se pregunta, ¿cómo lo hago?

Referencias bibliográficas

Alvarez de Zayas, C (1996). *Hacía una escuela de Excelencia.* Editorial Academia. La Habana.

Ballester, S et al (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática.* Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad Habana.

Ballester, S. (1995). *Enseñanza de la Matemática y Dinámica de Grupo.* Editorial Academia, La Habana.

Ballester, S. (1995). *La Sistematización de los Conocimientos Matemáticos.* Editorial Academia. La Habana.

Bustillo, G. y Vargas, L. (1993). *Técnicas Participativas para la Educación Popular.* Editorial IMDC. AC. México.

Brito, H. (1989). Capacidades, habilidades y hábitos. Una alternativa teórica, metodológica y práctica. *Primer coloquio sobre inteligencia.* Facultad de Pedagogía. ISPEJV. La Habana.

Camayd, M. (1987). *Vías y Métodos para despertar el interés por la Matemática en el nivel medio*, *Inv*, en el ISP "José D' La Luz y Caballero. Holguín, Cuba.

Chivás, F. (1992). *En torno a la creatividad y la dinámica grupal.* Editorial Academia. La Habana.

Chivás, F. (1992). *Crear individualmente o en grupo.* Editorial Academia. La Habana.

Chivás, F. (1993). *La creatividad y sus implicaciones.* Editorial Academia. La Habana.

Documentos Normativos para las nuevas transformaciones de la Secundaria Básica. Programas. Programa director. Ciudad Habana. Curso 99- 00.

Danilov, M. A y Skalkin, M. (1980). *Didáctica de la escuela Media.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Gindice F, J del. (1984). Acción y creatividad en la Educación Básica. En *Perspectiva de la educación.* Volumen I Número 3, Lima, marzo.

Gutiérrez, F .E. (1976). *Pedagogía de la comunicación.* Editorial Costa Rica, San Josè Costa Rica.

Kovnikova T, et al. (1964). *Metodología de la labor educativa.* Editorial Grijalbo S.A. México DF.

Análisis de las concepciones del estudiante mediante la contextualización de la Serie de Fourier en fenómenos de transferencia

Claudia Rosario Muro Urista
Instituto Tecnológico de Toluca, México
claudiamuro@hotmail.com

Resumen

En este trabajo de investigación se hace referencia a una problemática de enseñanza y aprendizaje de la serie de Fourier en una escuela de ingeniería. Se considera que un factor que predomina en esta problemática es la desvinculación entre las áreas de la matemática y la especialidad. Para ello se propone, el contextualizar a la serie de Fourier en un fenómeno de transferencia de masa, propio del medio cultural en que se desarrolla un estudiante de ingeniería. Esperándose que mediante la integración de estas nociones, se presente un proceso de construcción de conceptos relacionados en este núcleo de formación. En esta perspectiva, la tarea de este trabajo, es el análisis de las concepciones del estudiante en el desarrollo de su conocimiento acerca de la serie de Fourier en el contexto indicado.

Introducción

La enseñanza y aprendizaje de la matemática en una escuela de ingeniería constituye una problemática que es motivo de investigaciones en el ámbito de la disciplina de la Matemática Educativa, dicha problemática es abordada a través de la matemática en contexto, dando origen a investigaciones cuya perspectiva es la contextualización de conceptos matemáticos en fenómenos físicos, con el fin de producir alternativas en la didáctica y cuyo propósito es el de mejorar el aprendizaje de la matemática.

Inmersa en este campo de investigación y en dicha a problemática, este proyecto se centra en el interés de analizar las concepciones del estudiante sobre nociones matemáticas contextualizadas particularmente, la serie de Fourier en vinculación con fenómenos de transferencia como fenómenos propios de la ingeniería, ante la exigencia del aprendizaje de la Matemática en la formación del futuro ingeniero y su desarrollo en la sociedad.

Objetivo

Resaltando la importancia de la conceptualización del estudiante de ingeniería referente a la serie de Fourier en los fenómenos de transferencia, que estriba en la necesidad de establecer vinculación entre conceptos matemáticos importantes en su especialidad, esta investigación tiene como objetivo, investigar la incidencia de la contextualización de la serie de Fourier en el aprendizaje del estudiante mediante el análisis de las concepciones en las diferentes etapas de su proceso cognitivo en la adquisición y desarrollo del conocimiento, con el análisis e identificación de las relaciones y transformaciones en cada una de las etapas o niveles de pensamiento que se establecen en la conceptualización de este concepto en dicho contexto.

Marco teórico

La investigación es sustentada en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, (Vergnaud, 1994). Aborda los fenómenos de aprendizaje bajo el enfoque del campo conceptual visto a través de la formulación de esquemas mentales en la adquisición y desarrollo de un concepto en la construcción del conocimiento (Vergnaud, 1990) considera como parte medular del aprendizaje matemático, la adquisición del concepto en el estudiante, mencionando que los conceptos se dotan de significado a partir de una variedad de situaciones, donde cada situación no puede ser analizada usualmente con la ayuda de un sólo concepto sino que precisa de varios de ellos, lo cual conduce al campo conceptual de cierta noción matemática.

La teoría de los campos conceptuales es una teoría basada en el constructivismo que es cognoscitivista. Busca proporcionar un marco teórico coherente y algunos principios básicos para el estudio del desarrollo y aprendizaje de la matemática, modelizando de una manera homomorfa el funcionamiento cognitivo del estudiante en el aprendizaje de una noción matemática.

De acuerdo a esta teoría, para el análisis de la adquisición y desarrollo del concepto de la serie de Fourier en el contexto de los fenómenos de transferencia, el concepto en el desarrollo del conocimiento debe darse a través de la interacción de varios aspectos dados por las diferentes relaciones que establece el estudiante en el tránsito de las diferentes etapas del pensamiento. De esta manera, en el propósito del entendimiento de la construcción del conocimiento, sobre esta noción matemática, es necesario estudiar de manera integrada el desarrollo simultáneo y coordínado de las diferentes relaciones y clasificaciones que se establecen en la comprensión y conceptualización de este concepto, los procedimientos que permiten llegar a él y los sistemas simbólicos y lingüísticos, mediante los cuales pueden ser representadas dichas relaciones y clasificaciones alrededor de este concepto.

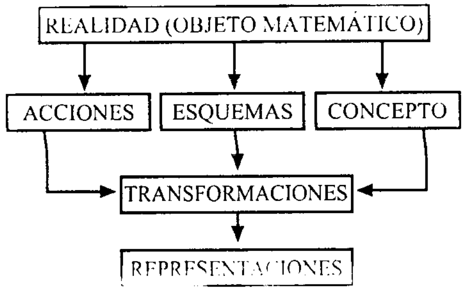
De esta manera, el análisis del cálculo relacional y clasificatorio que se establece en las etapas de construcción del concepto sobre la noción de la serie de Fourier en contexto, ayudará a ilustrar el proceso de adquisición del conocimiento, pretendiendo identificar claramente y como sea posible las tareas cognoscitivas que el estudiante emprende cuando construye el conocimiento y también las tareas que el estudiante enfrenta en los diferentes niveles del desarrollo del conocimiento, y sus interacciones por las diversas etapas de pensamiento, que de acuerdo a Vergnaud son las siguientes:1) **Las Acciones.** El estudiante acciona mediante una reacción a estímulos sobre el objeto matemático (la transformación se considera como una acción sobre el objeto matemático, estableciendo relaciones entre otros objetos. 2) **Los Esquemas.** Es el conjunto de representaciones que arrojan las acciones sobre el objeto matemático en estrecha relación, como una totalidad dinámica y funcional de la realidad del sujeto. 3) **Los Conceptos.** Es la relación entre las representaciones y las mismas representaciones y la realidad.

Es mediante las representaciones, que se puede analizar si el estudiante transforma una acción sobre el objeto matemático y si hay establecimiento de control sobre el mismo. Las representaciones permiten analizar las relaciones y clasificaciones que establece el estudiante de su realidad, lo cual se debe reflejarse en cada una de las etapas del proceso de construcción del conocimiento. Lo anterior se puede representar en la figura.

Metodología

Para el diseño de las situaciones de enseñanza, se toma como referencia el objetivo de la investigación y además, la experimentación del secado de una sustancia coloidal, cuya operación implica fenómenos de transferencia, de tal forma que el estudiante, en el tránsito de las diferentes etapas de construcción del conocimiento pueda vincular la serie de Fourier con el proceso de transferencia y así construya conocimiento de nociones matemáticas alrededor de este concepto. De esta manera la metodología que sigue esta investigación se divide en cuatro etapas

Proceso de construcción del conocimiento de acuerdo a Vergnaud



Etapa 1. Análisis de las acciones que establece el estudiante, a través del estudio de las representaciones que arrojan los resultados de la aplicación de las situaciones de enseñanza, con el propósito de esclarecer las relaciones y clasificaciones cuando el estudiante acciona y transforma el objeto matemático.

Etapa 2. Análisis de los esquemas mentales del estudiante, vistos a través de las acciones y transformaciones mediante sus representaciones en la construcción de conocimiento al establecer relaciones y clasificaciones de nociones matemáticas referentes a la serie de Fourier en el contexto de los fenómenos de transferencia respecto al experimento de secado.

Etapa 3. Análisis de las relaciones y clasificaciones que establece el estudiante en las anteriores etapas para la construcción del concepto de nociones referentes a la serie de Fourier y su conceptualización en el contexto de los fenómenos de transferencia. Así mismo, análisis de las relaciones entre una etapa y otra

Etapa 4. En la cuarta etapa se establecen los resultados en la investigación que deben corresponder al proceso cognitivo del estudiante en el tránsito por las etapas del conocimiento de acuerdo a la construcción del concepto de la serie de Fourier en los fenómenos de transferencia y las nociones matemáticas alrededor de esta.

Desarrollo

En el diseño de las situaciones, impera una parte experimental donde se lleva a cabo el secado de una sustancia coloidal. En el proceso sucede la transferencia del líquido de la sustancia a secar y la transferencia de calor hacia la misma sustancia, lo que a su vez permite la transferencia de moléculas del líquido hacia el exterior. Debido a que los fenómenos de transferencia son infinitos y periódicos, matemáticamente la serie de Fourier puede describir y significar dichos fenómenos. De esta forma, en base al experimento, se diseñan algunas cuestiones que ayudan al estudiante, no sólo a vincular nociones matemáticas referentes a la serie de Fourier en dichos fenómenos a través de su contextualización, sino que a construir conceptos matemáticos alrededor de este contexto y además al investigador le proporciona, luz en la interpretación del proceso cognitivo del estudiante para la conceptualización de este concepto matemático. Para la contextulización, el estudiante de ingeniería parte de un problema de secado, que es un problema real y de interés para el medio al que pertenece, determina las variables y constantes del problema, modela al problema en su matematización, da solución al modelo obtenido, interpreta dicha solución, significa al problema en base a esta interpretación y de esta manera construye el concepto de nociones matemáticas referentes al concepto en estudio en este contexto, transitando en el ambiente matemático y de la ingeniería y viceversa.

La implementación de las situaciones de enseñanza se realiza en tres sesiones por cada situación, en el Instituto Tecnológico de Toluca, México a dos equipos de tres estudiantes que cursan matemáticas IV y, cuyo plan de estudios incluye la enseñanza de la serie de Fourier, esto es, en las especialidades de ingeniería industrial y química.

Vale la pena describir el experimento de secado:

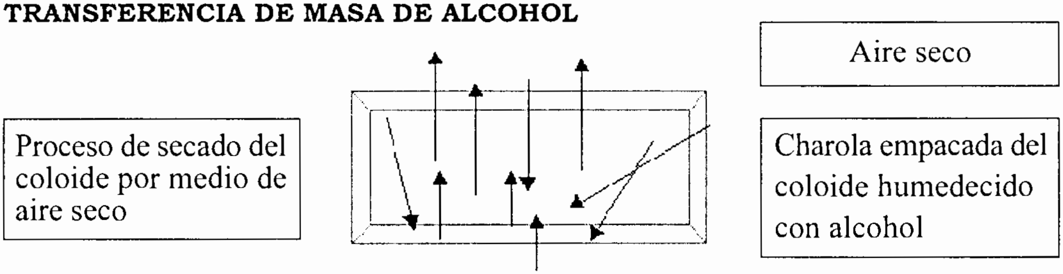
Se desea secar una sustancia coloidal humedecida con alcohol, el material se empaca en una charola con espesor y longitud considerable. La cara superior se expone a una corriente de aire y el alcohol se transfiere a través de la sustancia. Las moléculas de alcohol se transfieren a través de las moléculas del coloide hacia el exterior de la charola.

También es necesario mencionar que durante el secado, se desea tener un cierto perfil de concentración del coloide para que contenga propiedades óptimas para su uso comercial.

El experimento lo esquematizamos por medio de la siguiente figura.

EXPERIMENTO PROPUESTO

TRANSFERENCIA DE MASA DE ALCOHOL



Resultados generales

En el análisis del conocimiento y entendimiento de las construcciones mentales que sigue el estudiante en el desarrollo y adquisición del concepto de la serie de Fourier en el contexto referido, se ha intentado a través de los resultados de esta investigación, establecer la modelización cognitiva que involucra al estudiante, tanto en la comprensión de esta noción en dichos fenómenos planteada dentro de una problemática en la enseñanza y aprendizaje de la matemática como una noción dentro de una problemática de la misma ingeniería, al intentar establecer relaciones sustantivas en su medio, atendiendo así, una de las necesidades que plantea una escuela de ingeniería.

En esta perspectiva, el análisis de las relaciones y clasificaciones que establece el estudiante en las etapas del proceso cognitivo para la conceptualización del concepto de la serie de

Fourier en contexto, considera los siguientes aspectos:

- ¿Bajo qué parámetros se puede establecer el proceso cognitivo del estudiante cuando vincula, comprende y conceptualiza a la serie de Fourier en el contexto referido?
- ¿Cuáles son las variables que influyen en el proceso del conocimiento del estudiante en la conceptualización de esta noción matemática en el contexto de los fenómenos de transferencia desde el punto de vista cognitivo?
- ¿Cuál es el cálculo relacional que establece el estudiante en las etapas del proceso del pensamiento?
- ¿Cuáles son las relaciones entre una etapa y otra?

Sobre la base de estos aspectos, se han obtenido los siguientes resultados:

1. El proceso cognitivo del estudiante se analiza de acuerdo a las relaciones y clasificaciones y su relación entre ellas, esto lo establece el estudiante en la contextualización de la serie de Fourier en el proceso de transferencia cuando vincula y conceptualiza este concepto matemático.
2. Las variables que influyen durante las etapas del proceso de construcción de conocimiento son múltiples y variadas, de formas y niveles diferentes, y se evalúan mediante las transformaciones que sobre el objeto matemático cuando el estudiante actúa sobre él.
3. Algunas de las construcciones de conceptos de nociones referentes a la serie de Fourier en el contexto son las siguientes:
   - ✓ Cuando el estudiante vincula la concentración de la sustancia coloidal con una serie de Fourier que representa una función periódica de transferencia del líquido.
   - ✓ Cuando el estudiante percibe al fenómeno de transferencia como un fenómeno infinito de variación con respecto al tiempo y a la posición en vinculación con suma infinita de funciones sinusoidales

Conclusiones

En el intento del entendimiento de la construcción del conocimiento para la conceptualización sobre algunas nociones matemáticas de la serie de Fourier, esta investigación particularmente se interesa por analizar y establecer las etapas del proceso cognitivo que siguen.a la construcción de este concepto.

La conceptualización del estudiante acerca de la serie de Fourier en contexto, consiste en un conjunto de conceptos enmarcados en las relaciones y clasificaciones que establece el estudiante ante la contextualización de este concepto matemático y los fenómenos de transferencia

La noción de relación es una noción absolutamente general. El conocimiento consiste en gran medida de establecer relaciones y en organizarlas en sistemas. Así se han econtrado relaciones entre objetos en el espacio, entre cantidades físicas, entre fenómenos biológicos, sociales y sicológicos.

Referencias bibliográficas

Camarena P. (1995). *La Matemática en Contexto.* Novena reunión Centroamericana del Caribe Sobre formación de profesores e Investigación en Matemática educativa, Instituto Politécnico Nacional, México.

Camarena. P. (1999). *Hacia la Integración del Conocimiento: Matemáticas e Ingeniería.* 2° Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. ESIME-Zacatengo-IPN, México.

Muro, C. (2000). *La significación de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa.* Tesis de Maestría en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de las Matemáticas. México.

Muro, C. (2001). La contextualización de la serie de Fourier en la ingeniería. Ponencia. *V Reunión de Calidad en la Educación.* La Paz baja California Sur. México

Muro, C. (2001). Las representaciones del estudiante sobre la noción serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa. Ponencia. *XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Buenos Aires, Argentina.

Muro, C. (2001). Las invariantes operatorias en el conocimiento de la serie de la serie de Fourier en los fenómenos de transferencia. Ponencia. *Noveno Congreso Internacional de Investigación y Desarrollo Educativo en Educación Superior Tecnológica.* Querétaro, Querétaro. México.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In P. Nesher and J. Kilpatrick. (Ed.). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* pp.(14-30). Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1994). *El Papel del Enseñante a la Luz de los Conceptos de esquema y del Campo Conceptual* (Le role de l´enseignant á la lumiére des concepts de schéme et de champ conceptuel). París.

Educación continua en estadística dirigida a los aplicadores: Red PRESTA de Cuba

Mercedes Delgado
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría"
mdelgado@ind.ispjae.edu.cu

Luis Chang
Instituto de Investigaciones de la Industria Alimenticia
lchang_99_40@yahoo.com

Ismael Hernández
Instituto de Investigaciones de Geofísica y Astronomía
ismael@geoastro.inf.cu

Resumen

En Cuba se ha creado y consolidado una RED de profesionales aplicadores y docentes de la estadística desde el año 1998 que integra a más de 30 instituciones (25 Centros de Investigación y entidades de la producción y los servicios y 5 Universidades) con más de 90 afiliados de todo el país, conocido como el Grupo PRESTA. Esta RED ha tenido entre sus objetivos fundamentales la difusión de la estadística, la educación continua de esta materia entre los utilizadores de la estadística, el intercambio de documentación especializada, softwares estadísticos y materiales, la capacitación a través de seminarios, cursos y el debate sistemático en el grupo y la participación en eventos nacionales e internacionales, propiciando una mayor cultura de la estadística en Cuba. El presente trabajo muestra la experiencia alcanzada con la organización creada, la cual contribuye al proceso de internacionalización de la Estadística en Cuba y a la creación de una cultura en tal materia, facilitando el aprendizaje colectivo de la Estadística entre los profesionales y docentes. También se presenta una propuesta para la integración de esta RED a otros países latinoamericanos a través de la creación de un Centro de Referencia en Estadística.

Introducción

La estadística es una ciencia que forma parte de los planes de estudios de muchas carreras universitarias, variando el alcance, profundidad, tipos de métodos, objetivos y hasta los métodos de enseñanza aplicados en las diferentes carreras y en las distintas universidades en las que se enseña. A esta situación, de extensión masiva de esta materia, en las universidades se ha llegado producto de la necesidad creciente de su aplicación en la vida real. Respecto a esto último, es reconocido por todos en el mundo actual, la aplicabilidad cada vez mayor de la estadística y la utilidad de este conocimiento en los profesionales, incluso no graduados universitarios. Esta situación problémica genera la necesidad de establecer estrategias para lograr, que el que tenga que hacer uso de este campo del saber, cuente con los medios y recursos para comprender y aplicarlos.

La responsabilidad de esta compleja tarea no puede recaer sólo en los sistemas de enseñanzas de un país, a los que les toca una parte importante, sino también a la gran cantidad de instituciones que diariamente se enfrentan al problema. Esto condiciona la necesidad de integrar a ambos actores de una forma efectiva, no sólo desde el aula, donde se debe dotar al estudiante de un conocimiento preliminar y elemental para lograr una identificación más rápida del problema al que se enfrentará en un futuro y de esta forma poder identificar más fácilmente el método estadístico de solución, sino también desde el objeto en el que se genera la necesidad de su uso.

Lo que se pretende es buscar una organización que contribuya a una mayor difusión de la cultura estadística en aquellos que la utilizan, en dependencia de las características propias del entorno en el que se desea alcanzar esta cultura. El presente trabajo aborda la aplicación de una propuesta metodológica-organizativa dirigida a lograr el objetivo antes planteado en las condiciones de Cuba. Se parte de la identificación de las tendencias en el mundo en la enseñanza de la estadística, fundamentalmente posgraduada, de la experiencia acumulada del Programa PRESTA para América del Sur y culmina con la creación y funcionamiento del Grupo PRESTA en Cuba que funciona desde finales del año 1998.

Tendencias en la enseñanza de la estadística

A pesar de que existe una conciencia respecto a la aplicabilidad de la estadística, el conocimiento de esta ciencia está protegido en mayor medida por el mundo académico, con un papel destacado de las maestrías, especializaciones y doctorados (Jarrett, 1989). Respecto a la enseñanza de la estadística, lo que más se reporta es el contenido de lo que se debe enseñar, que a su vez es lo que sirve de guía para establecer los Programas de estudio en los diferentes niveles de la enseñanza. Con este análisis, no se pretende establecer una crítica, por la presencia de esta información, ya que una parte importante para la difusión de cualquier materia lo constituye la existencia de la misma. Lo que se desea es mostrar que se ha avanzado más en este sentido, y menos en la identificación de una forma ordenada de las necesidades en los que utilizan la estadística, que sirva de retroalimentación para la toma de acciones dirigidas a suplir esta necesidad. Tampoco, quiere decir que no existan experiencias que se hayan dirigido a cumplir tal objetivo. Los propios seminarios de actualización para determinados profesionales en estadística; las consultorías cuando se abordan con el principio de que los utilizadores asimilen y aprendan de forma continua al igual que los que enseñan acerca de las necesidades más frecuentes, sirviendo de fuente importante para introducir en los planes de estudio; los talleres o conferencias en estadística, en las que se establece un diálogo e intercambio de experiencias y se imparten cursos de actualización; las asociaciones de estadísticos que se crean; y los proyectos que se pueden acometer, tanto de investigación como de enseñanza de la estadística.

La consultoría es un tema de polémica, ya que no siempre se realiza de manera efectiva. Se ha reconocido tres roles del consultor: como ayudante, como líder o como colega (Hunter, 1981). Este autor recomienda el de colega, ya que es en el cuál se logra una comunicación y relación entre el que cliente y el consultor, jugando ambos papeles activo, pero se ha de tener en cuenta que sólo desde la óptica de la consultoría no se puede resolver el problema tan complejo de la integración entre los que utilizan y los que enseñan la estadística.

En España a inicios de la década del 90 se escribió sobre experiencias en la enseñanza de la estadística en las Escuelas Superiores de Ingeniería de Madrid, Barcelona y Valencia. En este artículo se hace un análisis de la situación de la enseñanza de esta materia, entre las que se pueden mencionar: la carencia de estadísticos competentes para trabajar sobre problemas reales, se enseña lo mismo que 40 años atrás sin la utilidad práctica, los profesores que enseñan la estadística no han utilizado la estadística para resolver problemas reales, necesidad del uso de software y de impartición de la Estadística en las restantes carreras.

El denominador común en las críticas es el carácter academicista, excesivamente teórico y lejano de la problemática real que tiene que afrontar el estadístico en su posterior actividad profesional. Para los estudiantes recomiendan una formación orientada hacia el "saber hacer", más énfasis en el aprendizaje de los alumnos, despertar motivación hacia los métodos estadísticos, todo lo cual requiere que el profesor se vincule a los problemas prácticos para que los pueda transmitir y enseñar (Peña, Prat y Romero, 1990).

La Asociación Internacional para la Educación Estadística (IASE) es una organización profesional que promueve la educación y la investigación en estadística. Entre las actividades que realiza se encuentran: la enseñanza de la estadística en los niveles de primaria, secundaria, institutos técnicos, preuniversitarios, y universidades, desarrollo y enseñanza de software de estadística, enseñanza de la estadística en negocios o industrias (incluye métodos de mejoramiento de calidad), entrenamiento en estadística a oficinas del gobierno y desarrollo de textos, materiales audio-visuales o planes curriculares. A pesar de que promueven todas las oportunidades para contribuir a las innovaciones y progresos en la educación estadística, el IASE reconoce que la prioridad en los momentos actuales, por su carácter deficitario, se dirige a mejorar los canales de comunicación entre los educadores estadísticos, quienes frecuentemente se encuentran aislados en términos profesionales, con el objetivo de crear redes, especialmente en los países en desarrollo.

La contradicción expuesta hasta aquí, está dada en que por una parte aumenta la aplicabilidad de la estadística y por la otra la especialización y el dominio de los métodos de estadística como una exclusividad de aquellos que la reciben a través de los estudios superiores, en las dosis que les suministraron y en los tipos de métodos que les enseñaron. Sucede, como tendencia en la actualidad que el conocimiento se está convirtiendo en paradigma con un carácter integral, multidisciplinario y multifuncional, que requiere de un trabajo en equipo. Pudiera pensarse que una solución al problema, sería el asignar un estadístico para suplir las necesidades en estos equipos, lo que consistiría en crear grandes multitudes de estadísticos, a los que también en un futuro sería necesario formarlos en la problemática real que se presenta y lo que provocaría enormes sumas de dinero para este tipo de formación. Otra solución sería, confiar plenamente en la formación que reciben los restantes profesionales en estadística en sus carreras, pero en ese caso quedaría obsoleta la enseñanza con la entrada de nuevos métodos o software estadísticos y tampoco se puede predecir con exactitud el campo y los requerimientos en estadística que necesitarán los futuros profesionales cuando se gradúen. Desgraciadamente, esta es la estrategia fundamental que se aplica en la actualidad potenciada por los cursos de postgrado, maestrías o especializaciones que se llevan a cabo en estadística para profesionales no estadísticos.

Centro de referencia de PRESTA en Cuba

PRESTA surgió como un Programa quinquenal de cooperación interuniversitaria, auspiciado por la Unión Europea en el área de la estadística aplicada, con la participación de 9 instituciones europeas, en beneficio de Universidades y Centros de Investigación de 10 países sudamericanos. De esa actividad resulta la red-PRESTA en la que participan más de 2000 estadísticos y profesionales "utilizadores" de métodos estadísticos, de América Latina y de Europa. La primera fase de PRESTA se inició en 1994 y concluyó en 1999, presentándose una propuesta para el 2000-2005 a través de la RED ALFA, consistente en la integración latinoamericana del Programa a través de la extensión a América Central y el Caribe y la consolidación de América del Sur.

Antecedentes en Cuba del Programa PRESTA (en forma de síntesis)

- En 1997 el Departamento de Matemática Aplicada (Mercedes Delgado) del Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (ISPJAE) contacta con la Coordinación Internacional de PRESTA en Bruselas, dado el carácter aplicado de este Programa y el objetivo de difusión de la cultura estadística.
- En noviembre de 1998 (15 días) realización del Seminario de Métodos Estadísticos Multivariados. Impartido por el Coordinador Eduardo Crivisqui, Germán Cabarcas y Gretel Villamonte en el ISPJAE a 30 profesionales (5 profesores y 25 utilizadores de distintos sectores, destacándose salud y biotecnología, geociencias y oficina de estadísticas y estudios demográficos).
- Desde Diciembre de 1998 hasta mayo del 2002 se han realizado más de 28 reuniones de seguimiento y consolidación del Grupo PRESTA en Cuba, alternando la sede de las reuniones entre los centros participantes (ISPJAE, Meteorología, MINSAP, Oficina Nacional de Estadísticas, Oficina Nacional de Recursos Minerales, Instituto Finlay, Centro de Inmunología Molecular, Centro Nacional Coordinador de Ensayos Clínicos, entre otros). Las reuniones se han fijado para el último viernes de cada mes. Se ha resuelto siempre un problema real con el apoyo de la estadística, se ha debatido y se toman acuerdos en cada reunión de carácter organizativo y metodológico. Por ejemplo se ha propuesto guía metodológica para la presentación homogénea de problemas, se cuenta con un inventario de la literatura estadística de los integrantes, se han avisado de eventos y revistas para publicar. En el II Encuentro Iberoamericano de Matemática Aplicada (junio/99) se organizó mesa redonda sobre difusión de la cultura estadística en Cuba. Se han impartido por el propio Grupo Presta de Cuba un curso de Análisis Exploratorio de Datos y se han efectuado varios encuentros de generalización de conocimientos como el de redes neuronales y el taller de Análisis de Datos (noviembre del 2000). Se han incorporado nuevos centros de investigación y productores (hay cerca de 30 en total) y tres Universidades nuevas (Habana, Villa Clara, Isla de la Juventud, ISPJAE y Ciencias Médicas en total), se ha designado una estructura compuesta por coordinador (Mercedes Delgado-ISPJAE) y tres secretarios (Instituto de Geofísica y Astronomía, Instituto de Investigaciones en Alimentación y Oficina Nacional de Recursos Minerales). Recientemente se obtuvo el primer CD del grupo con 54 libros de estadística en soporte digital y 3 software, que se distribuyó a los centros participantes, lo cual contribuye a la difusión de la estadística. Ya se está preparando el segundo CD.

Perspectivas y consolidación del Grupo PRESTA en Cuba

En la nueva fase de consolidación y extensión de PRESTA, se propone la creación de un Centro de Referencia en Cuba, con la realización de las siguientes actividades: Cooperación con Instituciones Cubanas a lo largo de todo el país (RED PRESTA Cuba), Cooperación con Instituciones Centroamericanas, Cooperación de Instituciones Sudamericanas, Organizar Jornadas de Estadística Aplicada en la región con docentes latinos y europeos, Organizar al menos 2 veces por año seminarios de capacitación destinados a profesionales cubanos y 1 seminario temático con docentes latinos y europeos.

Para lograr este objetivo, es importante destacar que Cuba cuenta con un potente desarrollo científico y técnico del recurso humano. Significa que desde hace algunos años se ha alcanzado un nivel destacado en muchos campos del saber no sólo reconocido en el país, sino también en el mundo. Al tener que estar presente la base estadística en cualquier investigación, ésta también se ha ido desarrollando. Sin embargo, en muchos casos de una forma aislada, es decir con el esquema tradicional explicado anteriormente en el que lo que más se logra es la especialización, maestrías o doctorados en el campo de la estadística y no una integración y una difusión masiva y organizada de esta materia.

Un listado sintético de las organizaciones que forman parte del Grupo PRESTA, evidencia la amplitud de campos del saber y el impacto que puede representar el contar con este centro. Estas instituciones son: ISPJAE, Universidad de Ciencias Médicas, Universidad de la Habana, Universidad Central de las Villas, Universidad de Isla de la Juventud, Instituto de Vacunas Finlay, Centro de Inmunología Molecular, Centro Nacional Coordinador de Ensayos Clínicos, Ministerio de Salud Pública, Instituto de Meteorología, Instituto de Geofísica y Astronomía, Instituto de Cibernética, Matemática y Física, Oficina Nacional de Recursos Minerales, Centro de Investigaciones del Petróleo, Centro de Investigaciones de la Laterita, GEOCUBA, Instituto Cubano de Investigaciones de los Derivados de la caña de azúcar, Oficina Nacional de Estadísticas, Centro de Estudios Demográficos, Instituto de Higiene y Epidemiología y el Instituto de Asistencia al Turismo. Se han integrado de forma directa, cerca de 70 personas correspondientes a todas estas instituciones.

Respecto a la organización se han planteado tres polos fundamentales de investigación: 1. Salud y biotecnología, 2. Geociencias y 3. Estadísticas, población y demografía (Ver Composición del Grupo PRESTA en la Figura 1); y se ha involucrado a las distintas zonas del país: Occidente, Central y Oriente.

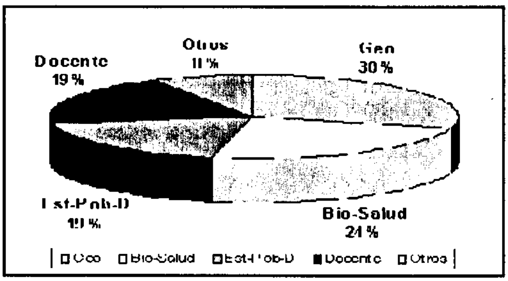


Figura 1. Composición del Grupo PRESTA en Cuba.

Se prevén tres etapas básicas por las que debe transitar el Centro de referencia: Creación, Consolidación y Extensión y mantenimiento. Actualmente pudiéramos decir que nos encontramos en la segunda, consolidándose un grupo de personas, instituciones e intereses a satisfacer, e incluso con necesidades por identificar. Esta es una de las acciones fundamentales que hemos llevado a cabo a lo largo de estos cuatro años. Como parte de la estrategia a seguir por el grupo se continua trabajando en la búsqueda de otras fuentes de financiamiento externo que propicien los recursos necesarios y una mayor integración en la región Centroamericana y del Caribe respecto a la estadística aplicada, lo cuál puede lograrse a través de proyectos internacionales. Justamente, en el marco del RELMEC se prevé puedan lograse convenios de colaboración que integren a otras universidades de otros países.

Conclusiones

Existe una contradicción evidente y cada vez más aguda entre la creciente aplicabilidad estadística y la exclusividad en la enseñanza de esta materia con un enfoque académico. Esta situación provoca la búsqueda irremediable de nuevas formas organizativas y tecnológicas para la enseñanza y difusión de la estadística hacia los utilizadores, que sirva de retroalimentación a los estudiantes o futuros utilizadores.

Los centros de referencias de estadística aplicada constituyen una posible vía organizativa que contribuyan al incremento de la tan necesaria cultura estadística, al integrar a los actores principales de la situación problémica presentada: los enseñadores y los aprendices, aunque ambos se entremezclan e intercambian sistemáticamente, ya que una clave para el éxito consiste en que los que enseñen, aprendan y viceversa.

Cuba cuenta con una experiencia del Grupo PRESTA de tres años de funcionamiento lo que significa que estamos en presencia de un grupo que se ha consolidado en la difusión de la estadística pero todavía hay mucho por hacer en la organización del propio grupo, como en la incorporación de otras entidades interesadas. Se espera que podamos contar con un financiamiento externo que contribuya a que esa experiencia se difunda también a otras regiones como América Central y el Caribe.

Referencias bibliográficas

Crivisqui, E. (1998-99). *Apuntes de curso, debates, conferencias recibidas en Cuba y Brasil sobre PRESTA, funcionamiento y perspectivas.*

Hunter, W. (1981). La práctica de la estadística: el mundo real es una idea cuya hora ha llegado. *La práctica de la estadística.* Universidad de Wisconsin, pp 123-133, Diciembre.

Introduction to IASE. (1999). International Association for Statistical Education, IASE Executive Committee. IASE Review, November, 1997. *INTERNET,* http://www.stat.ncsu.edu/info/iase/english.html.

Jarrett, J and Kraft, A. (1989). *Statistical Analysis for Decision Making.* Alllyn and Bacon.

Peña Daniel, Albert Prat y Rafael Romero. (1990). La enseñanza de la Esatadística en las Escuelas Técnicas. *Estadística Española.* Vol. 32 Núm 123, pp 147-220, España.

Programme de Recherche et d'Enseignement en Statistique Apliquée. (1995). Programa Quinquenal de Cooperación entre Universidades Europeas y Sudamericanas en materia de Métodos Estadísticos aplicados a las Ciencias Humanas. *Laboratoire de Méthodologie du Traitment des Données. Université Libre de Bruxelles,* http://www.ulb.ac.be/assoc/presta/esp.html.

Gráficas y Funciones

El problema de la función inversa a la luz del teorema del tubo fluorescente

Norberto Rossi y Gloria Suhit
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Bahía Blanca. Argentina
gsuhit@criba.edu.ar

Resumen

Con el objeto no de introducir al estudiante universitario a la noción de función inversa sino de reorganizar ideas, darle significado a unas y resignificar otras (es decir, ayudarlo a *aprehender* el concepto) se elaboró un razonamiento, basado en ideas previas del alumno, que concluye en el Teorema del Tubo Fluorescente. Este Teorema permite, a partir del gráfico de una función biyectiva, obtener el de su inversa de un modo más sencillo y seguro que el de los textos tradicionales y, simultáneamente, aporta un claro mensaje conceptual.

El cambio en la percepción del tema (en el 75 a 80% de los estudiantes) y la seducción de la inversa "instantánea" son superados por la idea (desde ahora evidente) que una función y su inversa son expresiones de una misma relación observada desde distintos puntos de vista.

Introducción

De las muchas dificultades observadas en alumnos del primer año de Universidad, con respecto a la noción de inversa de una función biyectiva uniforme, surgió la inquietud de encontrar una forma de sintetizar el tema, con un lenguaje simple, en una propuesta que resultara atractiva para el estudiante y, al mismo tiempo, le aportara un sólido contenido conceptual.

Esta idea nació en el aula, del trabajo con los alumnos, y se fue depurando a lo largo de varios cuatrimestres hasta adquirir la forma definitiva que aquí se presenta.

El objeto *no es introducir* el tema al estudiante sino reorganizar sus ideas previas, dándole significado a algunas de ellas y resignificando otras; es decir, ayudarlo a *aprehender* el concepto.

Desarrollo

Frecuentemente los estudiantes saben que si una función $y = f(x)$ (de aquí en adelante cuando mencionemos una función estaremos haciendo referencia a una función uniforme y biyectiva) vincula los valores x del dominio con los correspondientes y de su imagen, la función inversa ($f^{-1}(x)$) relaciona estos valores y con los originales valores x; también saben que los gráficos de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el plano cartesiano son simétricos con respecto a la recta de ecuación $y = x$. Esta es la presentación clásica en los libros de texto ((Anton, 1977; Larson, 1989; Stewart, 1998)). Sin embargo si se les pide a esos estudiantes que grafiquen $f^{-1}(x)$, dado el gráfico de $f(x)$, se obtienen resultados muy variados: el concepto "simétrico con respecto a la recta de ecuación $y = x$" no resulta tan obvio ni tan simple de usar, además el vínculo entre la función y su inversa no parece ayudar mucho.

Más adelante los problemas reaparecen: ¿por qué un estudiante que conoce el gráfico de la función $y = tg(x)$ no es capaz de inferir el valor de $\lim_{x \to +\infty} arctg\ (x)$? El comportamiento tendencial de la función no le dice nada sobre el de su inversa. Solo si "recuerda" el gráfico de $y = arctg\ (x)$ llegará a la respuesta correcta.

Nuestra estrategia para solucionar estos inconvenientes consta de varios pasos:

1. ¿Qué es el gráfico de una función?

El gráfico de una función es un conjunto de puntos en el plano cartesiano. Cada punto vincula un valor del eje x con otro del eje y. El conjunto de todos los puntos del gráfico da la relación de todos los valores x del dominio de $f(x)$ con sus correspondientes valores y de la imagen.

2. ¿Qué punto del plano cartesiano permitirá relacionar un valor del eje y con su correspondiente valor sobre el eje x?

Sin mucho trabajo los alumnos llegan a la conclusión que el punto que relaciona un valor y con el valor x asociado es el mismo que usamos para vincular x con y en el gráfico de $f(x)$. La extensión del razonamiento anterior.a todos los valores de y lleva a la siguiente conclusión: Si cada punto que vinculaba un x con un y (gráfico de $f(x)$) es el mismo que vincula cada y con su correspondiente x (gráfico de $f^{-1}(x)$), entonces ¡el mismo gráfico corresponde a y!

3. Contradicción:

Se sabía que los gráficos de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ deben ser simétricos con respecto a la recta de ecuación $y = x$, pero ahora decimos que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ tienen el mismo gráfico. ¿Dónde está el error?

4. La contradicción es solo aparente.

Es correcto pensar al gráfico de $f(x)$ (figura 1) como el gráfico de $f^{-1}(x)$, pero cuidando el detalle que ahora el dominio de la función aparece sobre el eje vertical (eje y) y la imagen en el eje horizontal (eje x); por lo tanto, no es nuestra forma habitual de "ver" una relación funcional. Deberíamos tratar de mirar el gráfico con el dominio (valores de y) sobre un eje horizontal y la imagen (valores de x) sobre uno vertical. Esto se puede lograr rotando el plano cartesiano original noventa grados en sentido antihorario (figura 2). Ahora la imagen se representa correctamente (vertical y con la numeración creciente hacia arriba); el dominio está en el eje horizontal, pero la numeración crece hacia la izquierda y no hacia la derecha como clásicamente la ubicamos. Este problema se soluciona si rotamos la hoja del gráfico para mirarla a trasluz, conservando el eje x vertical y el eje y horizontal, pero ahora creciente hacia la derecha (figura 3). Recién ahora estamos viendo el gráfico de $f^{-1}(x)$ del modo habitual, llegando a comprobar (cambiando de nombre a los ejes: la x por y en el vertical y la y por x en el horizontal) que resulta simétrico con respecto a la recta de ecuación $y = x$ con el gráfico de $f(x)$, cuando ambos se representan en un mismo plano cartesiano.

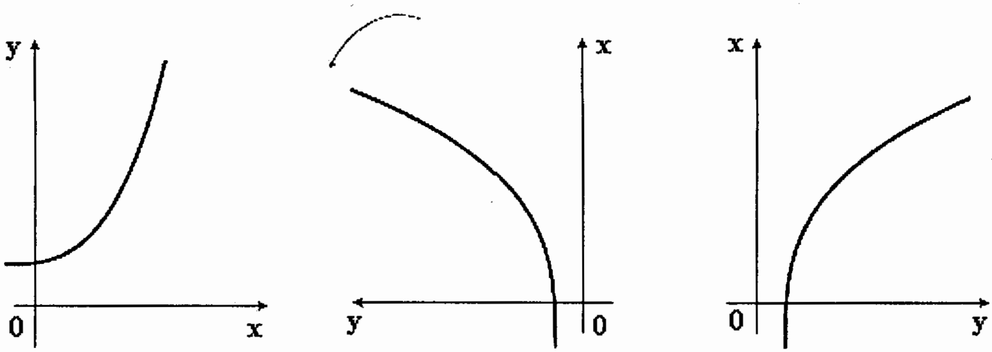


Figura 1 Figura 2 Figura 3

5. El Teorema del Tubo Fluorescente.

Dado el gráfico de una función $y = f(x)$ sobre una hoja de papel, el gráfico de la función inversa es el mismo de $f(x)$, pero visto a trasluz con el eje x en posición vertical (creciente hacia arriba) y el eje y en posición horizontal (creciente hacia la derecha).

Aclaración: En nuestra Universidad la iluminación artificial es de tubos fluorescentes.

Observación: Existe una *única* forma de mirar el gráfico original a trasluz conservando un eje creciente hacia arriba y el otro creciente hacia la derecha (la detallada en el teorema).

6. Conexiones.

El gráfico de una función biyectiva $f(x)$ y el de su inversa $f^{-1}(x)$ coinciden, pero este último debe ser visto moviendo el eje y a la ubicación del eje x y, del mismo modo, el eje x a la posición original del eje y. Esto equivale a rotar todo el plano cartesiano sobre la recta de ecuación $y = x$, produciendo un gráfico para $f^{-1}(x)$ simétrico con el de $f(x)$ con respecto a dicha recta. El resultado final de esta rotación es lo que se observa mirando el gráfico original a trasluz como se explicó anteriormente.

Discusión de resultados

Esta experiencia casi siempre se ha llevado a cabo con grupos pequeños de alumnos (no más de 8 o 10) trabajando con lápiz y papel. En pocas ocasiones se realizó con tiza y pizarrón para grupos más numerosos (25 a 30 alumnos). Las diferencias observadas fueron grandes: el impacto producido al girar una hoja y, a partir del gráfico de una función, hacer "aparecer" el de su inversa fue imposible de reproducir en el pizarrón (aunque los alumnos realizaran sus propios gráficos con lápiz y papel).

También se presentan diferencias (como cabía esperar) en función de la carrera que cursa el estudiante: mayor comprensión y aceptación en los de ingeniería y algo menor en los de carreras menos afines con las herramientas y razonamientos matemáticos.

Aún considerando estas diferencias, la mayoría de los estudiantes participantes en esta experiencia (75 a 80%) cambia significativamente su percepción del tema, algunos muy rápidamente y otros luego de un tiempo de elaboración.

Lo que resulta evidente en todos (jóvenes de una época vertiginosa) es la seducción que ejerce la inversa "instantánea", sin esfuerzos, "con solo pulsar una tecla" (mejor todavía, en este caso, sin pulsar ninguna). Pero lo esencial de la propuesta va mucho más allá: la idea que una función y su inversa son expresiones de una relación observada desde distintos puntos de vista trasciende a la simplicidad de la "técnica operativa". Y si alguien olvida cuál es ese nuevo punto de vista y omite el trabajo de repetir el razonamiento paso a paso, el nombre de "Teorema del Tubo Fluorescente" se lo recuerda.

Su utilidad continúa; enunciados como, por ejemplo:

"la inversa de una función continua es continua"

"la inversa de una función estrictamente monótona (creciente o decreciente) es una función estrictamente monótona (creciente o decreciente)"

adquieren el carácter de obvios, más allá del valor de las demostraciones formales.

Conclusiones

El hecho que un argumento tridimensional (girar una hoja para mirar un gráfico a trasluz) complemente o sustituya favorablemente a un argumento bidimensional (simetría con respecto a la recta de ecuación) para comprender un problema eminentemente bidimensional (la relación entre $y = f(x)$ y su inversa) resulta, en principio, llamativo. Una explicación (extraída de nuestra propia experiencia) es que realizar gráficos en el plano, simétricos con respecto a ejes no horizontales o verticales, es una tarea que requiere cierta "habilidad geométrica" que los estudiantes no han desarrollado en las etapas previas de su formación; en cambio girar el plano cartesiano tridimensionalmente no aparece como un obstáculo porque "pensar en tres dimensiones" es natural para la mente humana. Esto consolida el beneficio conceptual: el mismo gráfico = la misma relación entre las variables x e y, solo cambia el punto de vista.

Con estas certezas y el aporte de ideas superadoras (Cordero, 2001), pero con claras coincidencias en la estrategia de razonamiento, una evolución de esta experiencia será el diseño de una situación didáctica que permita al estudiante (por sí mismo) asignar significados y descubrir relaciones para construir su propio conocimiento de la función inversa.

Referencias bibliográficas

Anton, H. (1977). *Cálculo y Geometría Analítica*. México: Limusa.

Cordero, F (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa IV* (2), 103-128.

Larson, R. y Hostetler, R. (1989). *Cálculo y Geometría Analítica*. España: McGraw-Hill / Interamericana.

Stewart, J. (1998). *Cálculo*. México: International Thomson Editores.

La significatividad didáctica para la aprehensión del concepto de función en la carrera licenciatura en economía.

Dámasa Martínez Martínez

Universidad Central de Las Villas. Cuba.

damasa@cei.uclv.edu.cu

Resumen

Desde diferentes concepciones psicopedagógicas aparece en la actualidad la importancia del aprendizaje significativo para la educación escolar, concepto que no tiene una significación única y es utilizado para resolver los problemas educativos de diferente naturaleza. En el trabajo se reflexiona acerca de aspectos del concepto de aprendizaje significativo, mostrando su utilidad para el análisis y reflexión psicopedagógica y desarrollando su connotación didáctica.

Los cursos de Matemática que se imparten en la Licenciatura en Economía requieren de la comprensión de diversos temas, en particular del concepto de función. El estudio de este concepto resulta importante debido a que es imprescindible para la comprensión de conceptos como límite, continuidad, derivadas, etc. y para la solución de problemas específicos del área económica. En el trabajo se exponen consideraciones para lograr la significatividad didáctica en el estudio del concepto de función en el curriculum del economista y su aplicación práctica en el primer año de esta carrera en la Universidad Central de Las Villas.

Introducción

Las matemáticas que se enseñan en el ámbito universitario, exigen una comprensión profunda de conceptos y en particular el concepto de función es fundamental para el desarrollo de esta disciplina. El objetivo principal de su enseñanza es que los estudiantes sean capaces de distinguir entre sus diferentes usos y los puedan aplicar en materias de su especialidad.

Este concepto es uno de los más importantes debido a su naturaleza unificadora y modeladora y es considerado como uno de los puntos centrales en los currículos escolares de las universidades; sin embargo, es un concepto complejo que genera diferentes niveles de abstracción y significados, su importancia se debe a que es imprescindible para la comprensión de conceptos como límite, continuidad, derivadas e integrales, etc. y para la solución de problemas específicos del área económica.

Diversas investigaciones apuntan hacia que en la actualidad persisten elementos negativos de una "enseñanza tradicional", que se evidencia en que los docentes enfatizan la transmisión y reproducción de los conocimientos; centran ellos la actividad, no propiciando la reflexión y la comunicación; muchas veces se presenta descontextualizado de la realidad, lo que no propicia su aplicación práctica; controlan atendiendo al resultado, no al proceso para llegar al conocimiento o la habilidad; absolutizan el método de trabajo con el libro de texto de manera "esquemática"; se centran en lo instructivo por encima de lo educativo, entre otros elementos.

En nuestra opinión, una de las causas de lo expresado hasta aquí, radica en la insuficiente sistematización teórica en la Pedagogía y la Didáctica, lo que ha traído como consecuencia que no siempre se tenga una posición teórica-metodológica que oriente a su trabajo diario.

El modelo educativo tradicional se centra en el profesor, en la actualidad se trabaja en modelos educativos que no se centren en el profesor, tampoco en los alumnos como se llegó a proponer en algunos modelos de tipo activo, sino en el aprendizaje mismo. Este deberá ser propiciado por el profesor, implicando en ello todo su conocimiento. Desde esta perspectiva, se entiende, que el trabajo del profesor es propiciar que sus alumnos aprendan.

Gimeno Sacristán, J. en el libro Lecturas de aprendizaje y enseñanza de Ángel Pérez Gómez (1995), plantea:

Parece incuestionable el hecho de que la teoría del aprendizaje ha de ser una de las bases fundamentales de la práctica pedagógica de forma inexcusable, y que tales bases deben integrarse por lo tanto en la propia teoría de la enseñanza. La pedagogía tradicional, la teoría y práctica educativa, se mantuvo al margen del desarrollo científico psicológico en general y de la teoría del aprendizaje en particular.

Y coincidimos cuando más adelante señala que el aprovechamiento de un modelo teórico sobre el aprendizaje habrá de hacerse desde un modelo didáctico de la enseñanza en que tenga cabida el modelo sobre el aprendizaje..

No es cuestión de trasladar un elemento teórico (teoría del aprendizaje) a una acción práctica (la enseñanza), debe lograrse una integración de la teoría del aprendizaje en la teoría de la enseñanza y que esta sea la que guíe la acción. Los modelos teóricos de la enseñanza deben considerar la interrelación entre: la sociología, la psicología y la didáctica. Esta última es el núcleo básico a considerar en la interrelación con las dos anteriores y dentro de la misma hay que estudiar los siguientes elementos junto a sus interrelaciones: Objetivos, Contenidos, Métodos, Medios y Evaluación.

En consecuencia se han propuesto y trabajado en diferentes tipos de aprendizajes, en particular el aprendizaje significativo, pero, ¿qué es realmente el aprendizaje significativo y cómo propiciarlo? En el trabajo exponemos elementos de esta teoría que fundamentan las reflexiones sobre cómo orientar la práctica docente, y lo que consideramos constituye la significatividad didáctica.

Por lo que pretendemos dar respuesta a la pregunta, *¿Cómo lograr la significatividad didáctica para la aprehensión del concepto de función en la carrera de Licenciatura Economía?*

Los conceptos de aprendizaje significativo y de significatividad didáctica.

Desde diferentes concepciones psicopedagógicas aparece en la actualidad la importancia del aprendizaje significativo para la educación escolar, se enfatiza en que sólo los aprendizajes significativos contribuyen a lograr el desarrollo personal de los alumnos.

Coll, C. (1997) argumenta que las ideas que aparecen en el uso actual del concepto de aprendizaje significativo cuentan con numerosos antecedentes en la historia del pensamiento educativo. Plantea como ejemplos, los siguientes: primero los movimientos pedagógicos renovadores de principios del siglo XX, que tienen sus raíces en el pensamiento de Rousseau y que más allá de las diferencias comparten el principio de autoestructuración del conocimiento, ven al alumno como el verdadero agente y el responsable último de su propio proceso de aprendizaje; en segundo lugar menciona el aprendizaje por descubrimiento desarrollada en los años sesenta del siglo anterior y las propuestas pedagógicas que defienden el principio de que el alumno adquiera el conocimiento por sus propios medios, o como afirma Bruner en su conocido trabajo sobre el acto de descubrimiento, "mediante el uso de su propia mente" y en tercer lugar cita las propuestas pedagógicas inspiradas en el principio fundamental de los métodos activos: comprender es inventar o reconstruir por invención.

Además refiere otros dos antecedentes que se encuentran en tradiciones de pensamiento diferentes de las anteriores: los estudios sobre la curiosidad epistémica y la actividad exploratoria en el marco de las teorías de la motivación y la concepción humanística del aprendizaje

Estos antecedentes que se mencionan, que no son todos, pero muestran que existen concepciones distintas no siempre compatibles, del aprendizaje escolar y de la manera de ejercer la influencia educativa.

Cuando se habla de aprendizaje significativo equivale a poner el proceso de construcción de significados como elemento central del proceso de enseñanza aprendizaje, el alumno aprende un contenido cualquiera si es capaz de atribuirle un significado. También puede recibir el conocimiento sin atribuirle significado alguno, es lo que sucede cuando el alumno emplea los conocimientos de forma memorística y es capaz de repetirlos o utilizarlos sin entender en absoluto lo que está diciendo o haciendo.

Existe un aspecto que es conveniente aclarar; la mayoría de las veces, el alumno es capaz de atribuirle solo significados parciales a lo que aprende, implica que tienen significados distintos el profesor y los alumnos, y que no pueden utilizar los conocimientos con igual extensión y profundidad. Por lo que la significatividad del aprendizaje no es una cuestión de todo o nada, y entonces es más adecuado proponernos que los aprendizajes que llevan a cabo los alumnos sean en cada momento lo más significativos posibles. Esto enfatiza el carácter dinámico del aprendizaje escolar y orienta la dirección en que debe actuar la enseñanza para que los alumnos profundicen y amplíen los significados que construyen.

¿Qué quiere decir exactamente que el aprendizaje sea significativo?

Una respuesta es la que proporcionan Ausubel y sus colaboradores, plantean que el **aprendizaje es significativo** cuando se pueden establecer relaciones sustantivas y no arbitrarias entre lo que aprendemos y lo que ya conocemos, luego son más o menos significativos en dependencia de la mayor o menor riqueza y complejidad de las relaciones que sean establecidas.

Como cita Coll, C. (1997), en términos piagetianos, el **aprendizaje es significativo** si puede integrarse a los esquemas que ya se poseen de comprensión de la realidad; implica igualmente una acomodación, una diversificación, un enriquecimiento, una mayor interconexión de los esquemas previos. Al relacionar lo que ya sabemos con lo que estamos aprendiendo, los esquemas de conocimientos se modifican y, al modificarse adquieren nuevas potencialidades como fuente futura de atribución de significados.

Por lo planteado, este tipo de aprendizaje tiene **valor funcional,** en el sentido que es útil; puede ser utilizado para generar nuevos aprendizajes.

No siempre el aprendizaje es significativo, las **condiciones** que exige su realización no son siempre fáciles de cumplir. Ausubel y sus colaboradores han planteado que, para lograr aprendizajes significativos es necesario que se cumplan tres condiciones:

1. **Significatividad epistemológica**

Que el conocimiento presentado tenga una estructura interna organizada, que sea susceptible de dar lugar a la construcción de significados. Los conceptos que el profesor presenta siguen una secuencia lógica y ordenada. No sólo importa la estructura interna del contenido sino también la forma en que es presentada.

2. **Significatividad psicológica**

Se refiere a la posibilidad de que el alumno conecte el conocimiento presentado con los conocimientos previos, ya incluidos en su estructura cognitiva. Los contenidos son comprensibles entonces para el alumno.

3. **Actitud favorable del alumno**

Es necesario que el alumno quiera aprender, este es un componente de disposiciones emocionales y actitudinales, donde, el profesor sólo puede influir a través de la motivación.

Es de señalar que este concepto de significatividad del aprendizaje destaca la importancia del conocimiento previo del alumno y de sus procesos de pensamiento frente a la concepción tradicional y habitual de que el aprendizaje depende en gran medida de la influencia del profesor y de la metodología de enseñanza utilizada.

No obstante, no es recomendable absolutizar la significatividad psicológica en este sentido pues como ha evidenciado Wittrock(1986), citado por Coll, C.(1997), es sus estudios sobre procesos de pensamiento del alumno, junto al conocimiento previo existen otros procesos psicológicos que actúan como mediadores entre la enseñanza y los resultados del aprendizaje, a saber, sus expectativas ante la enseñanza; sus motivaciones, creencias, actitudes; las estrategias de aprendizaje que es capaz de utilizar, etc. Por lo que además de los conocimientos previos, tenemos la percepción que tienen o atribuyen los alumnos del nuevo material de aprendizaje y a la propia actividad de aprendizaje.

La motivación de un alumno ante una actividad es el resultado de una serie de procesos, la manera como el profesor presenta la tarea y la interpretación que hacen los alumnos en función de factores como *autoconcepto* académico, sus hábitos de trabajo o estudio, sus estilos de aprendizaje, etc. Es de destacar el carácter dinámico de esta interpretación en el sentido en que se forma y se modifica en el transcurso de la actividad de aprendizaje.

Si se acepta la construcción de significados en el proceso de enseñanza aprendizaje, este tiene una orientación determinada por las formas culturales, y tiene lugar en un contexto de comunicación interpersonal que trasciende los procesos de pensamiento de los alumnos. En este sentido la construcción del conocimiento es orientada a compartir significados, y en esta construcción progresiva de significados compartidos, el profesor guía el proceso haciéndolos participar en tareas que les permitan construir significados cada vez más próximos a los que poseen los contenidos del curriculum escolar. En este proceso se debe atender a la significatividad epistemológica y psicológica.

"La dicotomía tantas veces enunciada, entre la significatividad epistemológica de los conocimientos (su correspondencia con la lógica disciplinar) y la significatividad psicológica de los mismos (su proximidad a los esquemas e intereses de los alumnos), queda superada al introducir una tercera dimensión integradora: su **significatividad didáctica**" (Porlán, R. 1993)

Todo lo planteado muestra que este concepto de significatividad didáctica es un instrumento útil y valioso para el análisis y reflexión psicopedagógica, además que brinda aportes a la teoría, diseño y práctica de la enseñanza.

Significatividad didáctica para la aprehensión del concepto de función en la carrera de Licenciatura Economía

Analizamos la forma de propiciar aprendizajes significativos en la introducción del concepto de función real en la carrera Licenciatura en Economía.

En primer lugar debemos conocer los conocimientos previos que poseen los alumnos, para lo que se lleva a cabo un **diagnóstico**, que no podemos considerar solamente un test en que evaluemos los conocimientos precedentes, para ello se hizo también un estudio de las líneas directrices, mediante las cuales se organiza la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria y media, estas se dividen en dos grupos: desarrollo de contenidos matemáticos esenciales y desarrollo de capacidades mentales específicas y generales.

Dentro de las del primer grupo se encuentra: *correspondencia, transformación, función*. Se realizó su estudio en Martínez, D. (1998), el que permitió arribar a la conclusión que el trabajo que se realiza con las funciones es fundamentalmente para desarrollar el pensamiento numérico en los estudiantes, además, con pocas aplicaciones prácticas.

En el segundo grupo tenemos: *base conjuntista.* Se realizó su estudio en Martínez, D. y Peña, A. (2001) el que permitió concluir que los conjuntos no se encuentran dentro de los contenidos matemáticos, sólo se trabaja de manera indirecta y los estudiantes muestran un desconocimiento de sus representaciones, relaciones y operaciones; de similar manera ocurre con los dominios numéricos y, por tanto, con la definición conjuntista de función que reciben en el décimo grado de la enseñanza general.

Por los análisis realizados se llegó a las conclusiones siguientes:

1. Se hace necesario clarificar y contextualizar el concepto de función, en específico el de función real de variable real.
2. Antes de comenzar con el estudio del concepto de función, realizar un estudio del concepto de conjunto y elemento, relaciones entre conjuntos, operaciones, representaciones y conjuntos numéricos, precisando las propiedades de los números.

Para clarificar el concepto y contextualizarlo, se analizó un estudio epistemológico del concepto de función real. Como conclusión del mismo se propone la definición conjuntista para el estudio de este concepto en la carrera.

Teniendo en consideración: la significatividad didáctica (este estudio epistemológico y el diagnóstico entre otros); lo relacionado con el tratamiento de conceptos matemáticos dado en Mederos, O.(1990) y con el concepto de función en particular dado en Martínez, D. (1998); lo relacionado con las representaciones del concepto de función estudiado por Gatica, N. y Tauber, L. (2001), se realiza el diseño para la aplicación práctica del estudio del Tema I de Funciones que se estudia en la asignatura de Matemática I, en la carrera de Licenciatura en Economía.

Para ello se precisaron los objetivos, se sugirió un orden determinado de los contenidos, en estos los métodos a emplear y los medios que se utilizan y el control y evaluación a emplear.

Para lo anterior se tuvo en consideración, los siguientes principios normativos:

- ✓ Propiciar actividades que favorezcan articulación con los medios de expresión,visualización y **representación** matemática que utilicen varios registros.
- ✓ Introducir **funciones económicas** sencillas, de forma gradual, a continuación mostramos un ejemplo:

  El costo total de producir q unidades de un bien es una función lineal. Suponga que el costo c de producir 10 unidades es de 40 pesos y el de 20 unidades es de 70, determine la función que relacione c con q y represéntela gráficamente. Encuentre el costo de producir 35 unidades.

- ✓ Realizar un adecuado estudio de las **operaciones con conceptos:** definición y clasificación, de acuerdo con la especialidad de Economía.
- ✓ Potenciar las aplicaciones de los conceptos a **problemas de la especialidad** y a la interpretación de los mismos, en específico análisis de puntos de equilibrio.
- ✓ Utilizar un **asistente matemático** para realizar ejercicios en los cuales se analicen propiedades de funciones, utilicen al menos dos registros de representación y apliquen a problemas económicos, potenciar el análisis e interpretación de cada resultado.
- ✓ Emplear la evaluación formativa, que tiene un carácter eminentemente procesal, tal modalidad es orientadora, dinámica y, marcha paralelamente con los objetivos o propósitos que pautan la instrucción; se propone el cumplimiento de las funciones: diagnóstica, orientadora y motivadora.

Este diseño se aplicó en el primer año de la carrera Licenciatura en Economía en la Universidad Central de Las Villas durante los tres últimos cursos escolares, obteniéndose resultados satisfactorios en general, aunque en los grupos de estudiantes los resultados de aprobados en un test al finalizar el tema se obtuvo 62,7%, 70,5% y 65,7%. Los estudiantes se motivaron por el estudio y estaban conscientes de las dificultades presentadas, además de la forma de resolverlas.

Lo analizado forma parte de una estrategia didáctica para el estudio del concepto de función en la disciplina de Matemática para esta carrera.

Conclusiones

Se analizó lo que representa el aprendizaje significativo, se planteó qué se entiende por significatividad didáctica y se evidenció que es un instrumento útil y valioso para el análisis y reflexión psicopedagógica, además que brinda aportes a la teoría, diseño y práctica de la enseñanza.

De este estudio se derivó implicaciones didácticas, se aplicó al estudio de la introducción del concepto de función en la carrera Licenciatura en Economía, llegándose a determinar que se debe:

- Comenzar con un diagnóstico que precise los contenidos precedentes que poseen los alumnos y permita formular los objetivos a lograr, en consecuencia con lo anterior.
- Adoptar una organización lógica de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales en consecuencia con el estudio epistemológico del concepto de función, la formación de conceptos matemáticos y lo relacionado con las representaciones en Matemática.
- Integrar lo anterior y lo conocido de la teoría y práctica en la enseñanza de la Matemática para derivar los principios normativos que diseñen la la acción y conduzcan su desarrollo.

Referencias bibliográficas

Alvarez de Zayas, C. (1989). *Fundamentos teóricos y metodológicos de la Dirección del proceso docente educativo en la Educación Superior Cubana.* La Habana: MES

Ausubel, D. P.(1968) *Educational Psychology*. New York.

Coll, C.(1997) *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Editorial Paidós Educador. México.

Programa de la disciplina Matemática (Licenciatura en Economía, especialidad Ciencias Empresariales) Cuba. Ministerio de Educación Superior

Haeussler, E. y Richard, P (1996). *Matemática para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la vida*. Editorial Prentice Hall. Mexico.

Gatica, N. Y Tauber, L. (2001). Representación y comprensión del concepto de función. *XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Buenos Aires.

Martínez, D. (1998). *Estudio del concepto de función en la formación de profesores*. Tesis de maestría. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Cuba

Martínez, D. (2001). *El aprendizaje significativo. Una aplicación en el estudio del concepto de función real en la carrera de Economía.*

Martínez, D. y Peña, A. (2001). Estudio del concepto de conjunto. *Conferencia Científica de Profesores*. Universidad Pedagógica "Félix Varela". Villa clara.

Mederos, O. et al. (1990). El concepto y algunas operaciones sobre la base de los mismos, *Revista Cubana de Educación Superior*, Volumen X, Número 1.

Sydsaeter, K. y Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Editorial Prentice Hall. España.

Pérez, A. y Almaraz, J. (1995). *Lecturas de aprendizaje y enseñanza*. Fondo de Cultura Económica. México.

La importancia de las representaciones semióticas de funciones reales en la resolución de problemas de cálculo integral

Laura García Quiroga *Rosa Vázquez Cedeño*
Universidad Autónoma de Nuevo León, México; Universidad de Camagüey, Cuba
site@prodigy.net.mx rosaaliciav@yahoo.com.mx

Resumen

En este trabajo se describen las dificultades que tienen los estudiantes de ingeniería en FIME-UANL, al representar una Función Real en diferentes sistemas semióticos en la resolución de problemas, lo cual influye decisivamente en temas posteriores como es el de Cálculo Integral.

La constatación se realiza mediante la aplicación de un test científico que evidencia el cambio de registros como la dificultad fundamental. La fundamentación teórica del trabajo se basa en la noción semiótica de registros llevado al plano matemático. Se hace una propuesta en la enseñanza de la matemática para aportar al aprendizaje del tema de funciones, que toma como fundamental la introducción de tareas y acciones relacionadas con el tránsito entre representaciones semióticas y así contribuir a la posibilidad de resolver problemas en el Cálculo Integral.

Introducción

El Cálculo Integral es parte esencial de las herramientas matemáticas, necesarias en el estudio para desarrollar las bases de la ingeniería así como está presente en la Física, Química, etc. Y en general en la propia Matemática. Es por esto que en la FIME de la UANL se desarrollan estos contenidos, del Cálculo Integral, con una dosis fuerte de abstracción y generalización en sus programas. Constituyendo esto, una de las barreras fundamentales que en el ámbito del aprendizaje es determinante en los alumnos, constatándose que en general no se llega a adquirir, en una buena parte de los mismos, el nivel de desarrollo necesario para lograr un cumplimiento exitoso en la resolución de problemas relacionados en el tema objeto de análisis.

En tales circunstancias el problema objeto de investigación en el presente artículo son: las deficiencias que presentan nuestros estudiantes para la resolución de problemas dentro del área del Cálculo Integral. Indagando dentro de los conceptos matemáticos fundamentales del tema, aquellos para los cuales la barrera cognoscitiva de los estudiantes es mayor para su asimilación.

Fundamentos de análisis

Un estudio preliminar de los conceptos básicos del Cálculo Integral nos lleva a encontrar causalidad para la correcta asimilación del tema integrales a lo concerniente al concepto de función.

Es este concepto, tanto para este tema como en otros relativos a las matemáticas, un fundamento que a este nivel requiere del desarrollo mental del alumno sobre la base de la abstracción y generalización de manera consecuente, de forma que pueda aplicar el mismo en situaciones concretas, así como su representación a través de diferentes elementos del lenguaje: algebraico, numérico y gráfico como fundamentales. Esta multiplicidad de representación introduce en el proceso deficiencias en el aprendizaje de los alumnos y que necesitan de tratamiento para que sean superadas.

La necesidad del concepto de función, al igual que otros conceptos matemáticos es el emplear distintas representaciones para la apropiación del mismo en toda su complejidad. Lo que corroboran algunos investigadores como: C. Javier, J. Kaput, G. Golding, E. Castro, I. Romero, F. Ruiz, que son citados por R. Luis (2000); y en lo que el propio autor apoya citando a R. Duval. "sostiene la necesidad de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático y establece que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente llamados físicos..."

Lo que contribuye a la integración de los entes matemáticos como aspectos representativos de relaciones dadas en la realidad social.

Añadiéndose en dichas representaciones de las relaciones involucradas, el incremento de los niveles de generalización y abstracción para comprenderlas e interpretarlas.

Se pone de manifiesto, desde el punto de vista teórico la importancia de la formación en los alumnos de las habilidades necesarias para la representación en los distintos sistemas semióticos de los entes matemáticos.

Estas representaciones se caracterizan según sus registros. La noción de registro es una noción semiótica. Un registro está constituido por signos, en el más amplio sentido de la palabra: trazo, símbolo, icono, figura, etc. Estos signos están asociados, de manera interna, según los lazos de pertenencia a una misma red semántica y, de manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones, estas reglas son propias de la red semántica considerada.

La autora Ismenia G. (1992) se apoya citando a I. Guzmán quien opina que un registro se caracteriza por un sistema semiótico, es decir, por sus signos propios y la manera en que estos se organizan. De modo que podemos entender un registro como un medio de expresión o de representación. Un registro tiene la posibilidad de expresar o de representar un objeto, idea o concepto no necesariamente del ámbito matemático.

Tomando en consideración el registro algebraico, constituido por el sistema semiótico del álgebra relativo a las funciones reales y el registro gráfico está constituido por el sistema semiótico asociado al plano, provisto de un sistema de referencia rectangular.

En la práctica diaria se observa que el alumno utiliza el registro algebraico con muy pocas conexiones con los otros; el gráfico y las tablas de valores se utilizan como soporte, pero no se explota lo que cada uno puede aportar en representaciones concretas del concepto en cuestión.

Se pone de manifiesto, desde el punto de vista teórico, la importancia de la formación de los alumnos de las habilidades necesarias para la representación en los distintos sistemas semióticos, de los entes matemáticos.

La necesidad de constatar en los estudiantes de FIME-UANL, en los dos primeros años de ingeniería, las deficiencias en la correspondencia semiótica entre los registros algebraicos y gráficos, dio origen a la aplicación de un test científico relacionado con los contenidos fundamentales que se asocian al concepto de función.

En el mismo, se consideran dos tipos de tareas, las internas de cada registro y las de pasajes entre ellos. Duval, por su parte citado por Ismenia G. (1992) menciona que el pasaje entre registros se refiere a la confrontación de dos representaciones de un mismo objeto, a la conversión congruente entre registros de representación.

El test científico diseñado por la necesidad de constatar las dificultades al concepto de función, enfrenta tareas internas al registro algebraico, numérico y al gráfico; referidas a pasajes entre los registros, del algebraico al gráfico y viceversa, donde se tiene un análisis de cada pregunta. Éste fue aplicado a una muestra de 433 alumnos de los cuales acreditaron, calificados sobre 70, una cantidad de sólo 69, habiendo realizado un análisis de cada respuesta.

Análisis de Resultados

El análisis del test deja en evidencia que el cambio de registros es la gran dificultad que encuentran los alumnos, sobre todo cuando el pasaje es del registro gráfico al algebraico. Esta misma dificultad se encontró en Francia, en torno a funciones al respecto de pasajes entre registros, con estudiantes entre edades de 14 y 16 años. (Ismenia Guzmán, 1992.)

El que la dificultad se encuentre en alumnos de distinta madurez establece que el carácter de esta dificultad no es de orden conceptual, sino de orden conductual, está relacionada con una falta de sensibilización o de experiencia de los alumnos con problemas que involucran estos cambios de registro de expresión.

El excesivo privilegio del registro algebraico, hecho innegable en todos los diseños de aprendizaje actualmente en práctica, y la ausencia de otros registros en la práctica es perjuicio para los alumnos, ya que no tienen la posibilidad de sensibilizarse con problemas que exigen articular dichos registros.

Las respuestas que han dado los alumnos dejan establecido que la articulación es un objetivo que no se está tomado en cuenta por los actuales diseños de instrucción. El registro gráfico es utilizado, en general, con carácter ilustrativo o de soporte.

El hecho sorprendente de que los alumnos universitarios fracasen en sus repuestas por no poder interpretar datos en un gráfico muestra dos aspectos del comportamiento de los alumnos:

- La falta de práctica o la no-manipulación en el trabajo con gráficos.
- Incapacidad para enfrentar situaciones no habituales.

Nos damos cuenta que los alumnos resuelven problemas de una complejidad cognoscitiva superior cuando han sido preparados y sin embargo, frente a situaciones no habituales sencillas, no reaccionan con el éxito esperado.

Uno de los obstáculos en la posibilidad de resolver problemas de Cálculo Integral es la falta de una conversión congruente entre registros de representación del concepto de función. Se piensa que esto es frecuente debido a que el aprendizaje de este concepto ha seguido una didáctica tradicional.

Propuesta metodológica

La tendencia más general que se difunde es la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más que la transferencia de contenidos. La matemática es una ciencia en la que para algunos el método predomina sobre el contenido, es saber hacer. Se concede gran importancia en el estudio de la psicología cognitiva lo referido a los procesos mentales de resolución de problemas.

La adquisición de un concepto matemático radica en la actividad que se puede realizar en las diferentes representaciones; implica actividad en un registro (tratamiento metodológico), posteriormente realizar una coordinación entre los diferentes registros (pasaje o conversión), enfrentar la no congruencia entre registros encaminado a construir la estructura cognitiva, hasta lograr reconocer el objeto matemático en sus diferentes representaciones. Por ejemplo, es inconveniente acceder al concepto de función sólo por medio de una definición, es necesario tener actividad con las diferentes representaciones; el algebraico, tablas, gráficos y el lenguaje natural; tal actividad indica creación, tratamiento, y pasaje o conversión entre registros de representación.

El método más utilizado para promover el aprendizaje activo es la enseñanza a través de la resolución de problemas, aplicando en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento en la misma, tratando de que el alumno manipule los objetos matemáticos; active su capacidad mental; ejercite su creatividad y su autonomía.

Cuando en un tema matemático se hace la aplicación de la resolución de problemas podría surgir mediante una propuesta de la situación problémica de la que surge el tema (aplicaciones, modelos, histórico, etc..), promoviendo el trabajo independiente de los estudiantes, familiarizar al estudiante con la situación y sus dificultades, elaborar estrategias posibles, ensayos diversos por los estudiantes, uso de herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados), elección de estrategias, ataque y resolución del problema, reflexión del problema, formalizar según sea, generalizar, nuevos problemas (contra ejemplos), sistematizar, etc..

Se recomienda un tratamiento metodológico para tratar el tema de Funciones, donde sean planeados los tipos de problemas; las actividades a las cuales queremos enfrentar al estudiante sin que falten aquellas donde se promueve el trabajo independiente del estudiante; el uso de la conversación heurística con el estudiante; el material didáctico a utilizar para facilitar y optimizar exposición así como integrador del conocimiento.

Propuesta 1.- Un objeto se lanza desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial vo= 29.4 m/seg. Expresar la función velocidad con respecto al tiempo e interpretarla, esbozar la altura como función con respecto al tiempo y deducir la misma.

Una forma en la que el maestro inicie la conversación con el alumno podría ser la siguiente:

¿Qué tipo de movimiento se tiene?... ¿cuál es la función velocidad?, esperando una respuesta como ***rectilíneo uniformemente acelerado..., v(t) = vo – gt,*** *en situación contraria inducirlo, no dándoles la respuesta, de manera que lleguen a ella.*

¿Al sustituir la velocidad al cabo de cero segundos, cómo quedaría la función velocidad?..., *se espera que de alguna manera se mencione* ***v(t) = 29.4 – 9.8t.***

Se trata de que el estudiante analice las características de la función y su relación con la gráfica (confrontación del registro algebraico al gráfico) por lo que una forma de introducir podría ser

¿Qué tipo de función tenemos?..., ¿de qué grado?..., ¿cómo la representarían gráficamente?, *se espera una respuesta como* ***es de primer grado...., una línea recta,*** *en situación contraria, se insiste en no dar la respuesta sino inducir a ella.*

Con solo dos puntos de una recta podemos trazarla, ya se sabe que la v(0) es igual a...?*(esperar a que el estudiante conteste)* ***y que el tiempo en la velocidad de cero m/seg. es?*** *, las respuestas que se esperan son* ***v(0) = 29.4 m/seg. ......,*** *esperándose la realización del cálculo en forma independiente del tiempo* ***29.4 – 9.8t = 0, t = 3 seg.***

Lo que significa que tendremos los puntos A =(0,29.4) y B = (3,0) para realizar el trazo de la gráfica, quedando de la siguiente manera mostrada en la figura 1:

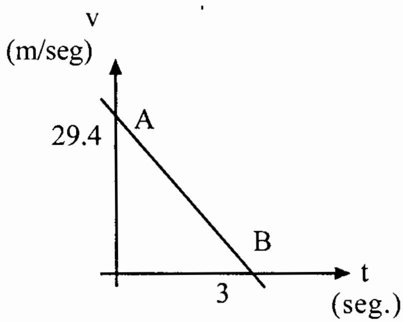


Figura 1

¿Cómo es la velocidad entre 0 y 3 seg. positiva o negativa?, se espera que se diga **positiva**
.

¿Qué significa para la altura la disminución de la velocidad?, quizás digan **al detenerse el objeto se alcanza la altura máxima.**

¿Cómo representan la altura como función?, pueden decir diversas maneras y adecuamos a **h(t).**

¿Qué representa para la h(t) estar en el punto A y en el punto B de la figura 1?, se esperan diversos comentarios entre los cuales, **en el punto de partida se tiene una h(0) = 0 y al cabo de 3 seg. alcanza su altura máxima.**

¿Lo que significa que la altura crece?, se espera "si"

¿Cómo es la velocidad de 3 seg. en adelante?, se espera **negativa**

¿Qué características tiene la h(t) de 3 seg. en adelante?, sus comentarios pueden ser, **la altura disminuye después de los 3 seg. hasta llegar al suelo a una altura de cero.**

¿Lo que significaría que la altura decrece?, esperando un "**si**", si esto último no resulta inducir a que el estudiante lo haga.

¿Cómo esbozarían el recorrido del objeto?, se espera que ellos dibujen algo parecido a lo que se muestra en la figura 2.

Pudiendo esbozar también h(t) de la manera que se muestra en la figura 2:

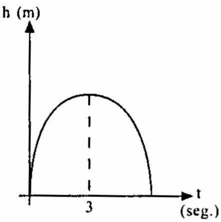


Figura 2

Se hace el inicio de una confrontación gráfica a la algebraica, la cual podría ser:

¿Con qué tipo de expresión algebraica podemos relacionar la parábola?, esperando escuchar **con la expresión cuadrática,** situación contraria inducir.

¿Cuál es su forma general?, esperando **$y = ax^2 + bx + c$**, si no, inducir.

Relacionando con las variables físicas?, podría decirse **$h(t) = vot - (½)gt^2$**, caso contrario inducir.

¿Cómo la expresaríamos para nuestro caso particular?, se espera **$h(t) = 29.4t - (½)(9.8)t^2$**

Podría calcularse la altura máxima o cualquier otra durante el recorrido. . .

<u>**Propuesta 2.-**</u> Al tratar funciones sencillas racionales e irracionales por ejemplo:

$$y=\frac{1}{x};y=\frac{3}{x-2};y=\sqrt{x}$$

Es conveniente establecer una conversación heurística con el estudiante, cuestionarlo al respecto de los valores que puede tomar la variable **x** (dominio), en estos casos hay que llevar el cuestionamiento que para el dominio, el campo de número reales se restringe. Además de hacer una serie de cuestionamientos para que a partir del dominio se obtenga el recorrido de la función (imagen) de hablar y cuestionar al alumno de la función para articular el registro algebraico – gráfico, después de graficar como de muestra en las figuras 3, 4 y 5 respectivamente, por medio de esta conversación llevar al estudiante a establecer una conexión entre el registro gráfico – algebraico.

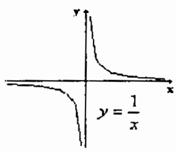


figura 3

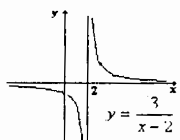


figura 4

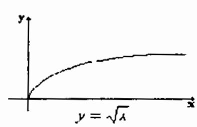


figura 5

Con este método de enseñanza podemos hacer aportaciones importantes al tema de Función así como a las matemáticas en general, de este modo se tendrá en el Cálculo Integral aumentar la posibilidad de resolver problemas.

Conclusiones

Se ha mostrado la necesidad de que los maestros que enseñan Funciones hagan una confrontación de los registros de representación algebraico, gráfico, numérico, mediante un tratamiento metodológico.

Se propone enseñar a través de la Resolución de Problemas, organizar actividades, utilizar la conversación heurística para tal confrontación ya que de este modo se estará estimulando y desarrollar el trabajo independiente en el estudiante.

Al estar propiciando el trabajo independiente en el estudiante se desarrollarán capacidades y habilidades en el estudiante y así, en el Cálculo Integral como en otros cursos aumentarán las posibilidades de resolver problemas.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1998). Registros de representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. Investigaciones en *Matemática Educativa II*. Université Louis Pasteur de Strsbourg, Frace Ed. Hitt F.. Editorial Iberoamericana, pp. 173-201.

Fridman, Lev, M. (1995). Metodología para Resolver Problemas de Matemáticas. *Didáctica*. Grupo Editorial Iberoamérica.. México, D.F.

Guzmán, M. De. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos. *Para la Educación la Ciencia y la Tecnología*. http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm#B. p. 6-13.

García, Q., L. (1999). *Propuesta Didáctica. Tratamiento Metodológico para el Tema de Función en F.I.M.E.* San Nicolás de los Garza, N.L.

Guzmán, I y Consigliere, L. (1992). Algunas dificultades de aprendizaje detectadas en alumnos de Cálculo Diferencial. Instituto de Matemáticas Universidad Católica de Valparaíso. *Revista de Educación Matemática*. Vol. 4. No. 1. Abril 1992. Grupo Editorial Iberoamérica. p. 54-63.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. (Soporte Electrónico) http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm. IV Simposio SEIEM (Huelva 2000).Universidad de Granada. España.

Santos, L. M. (1996). Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Lecturas Didácticas. Grupo Editorial Iberoamérica. Julio de 1996. México, D.F

Godino, J. M. y Recio, Á. *Un Modelo Semiótico para el Análisis de la Relación entre Pensamiento, Lenguaje y Contexto en Educación Matemática.* (Soporte Electrónico) http://www.sectormatematica.cl/educmatem/semiotico.htm.

Cristóbal, E. C. (1999). Acerca de las Representaciones Semióticas Utilizadas en el Álgebra Lineal. *Memorias del VII simposio internacional en educación matemática.* W., Elfriede. Octubre 1999, cd. De México, p.198.

El polinomio de Lagrange: Un ejemplo de visualización

Felícitas Morales A y Ricardo Cantoral U.
Cinvestav, IPN. México
fmorales@mail.cinvestav.mx

Resumen

Este reporte es el resultado de un doble proceso. Por una parte de un interés surgido en el Seminario de Pensamiento Matemático y por otro de la inquietud por compartir una propuesta didáctica para la enseñanza de un tema en particular. En este enfoque alternativo, el profesor podría dejar de ser el emisor del conocimiento y el estudiante su receptor. Investigaciones recientes de la matemática educativa, ponen en evidencia que el proceso de enseñanza aprendizaje trasciende al mero acto de transmitir un saber. Desde el acercamiento teórico de la *socioepistemología*, consideramos que la visualización aplicada al tratamiento escolar de una noción juega un papel preponderante en la formación de conceptos y procesos matemáticos entre los alumnos. La intención del póster fue la de mostrar un ejemplo concreto de cómo puede enriquecerse un enfoque educativo si se incluye una situación de aprendizaje en la que se haga uso de la visualización del concepto. En este caso, presentamos una situación en la que el estudiante esté en condiciones de llegar, mediante sus propias nociones y de la movilización de habilidades de visualización, a una construcción del *Polinomio de Lagrange* que pasa por *N* puntos.

Introducción

Según puede extraerse de la literatura especializada, básicamente existen dos formas clásicas de entender la enseñanza de la geometría; una, la geometría vista como la ciencia del espacio y la otra, la geometría entendida como una estructura lógica. Existe sin embargo, un cierto consenso al considerar esas dos visiones relacionadas, pues algunos niveles del desarrollo del pensamiento requieren de la geometría como ciencia del espacio para con base en ellas, desarrollar la visión de la geometría como una estructura lógica. De manera que sí pensamos en la geometría como la ciencia del espacio, podemos ocuparnos de contestar preguntas que nos permitan describir como es que los niños, los jóvenes, los adultos perciben su entorno, o bien saber que códigos usan para descifrar y procesar información visual. Estas preguntas han preocupado a los investigadores de la matemática educativa desde hace algunas décadas.

Estos acercamientos plantearon la necesidad de construir nociones nuevas que dieran cuenta de la forma en que las personas se relacionan con su espacio, y surgen así nociones como la de Visualización y percepción espacial. Ello condujo a explorar la clase de las habilidades visuales que se necesitan para aprender geometría. Más recientemente, también se ha incrementado el interés por estudiar la geometría en ambientes computacionales.

Desde la perspectiva de Piaget, se exploró la concepción del espacio que desarrollan los niños, así como la noción de geometría que se desarrolla entre ellos al describir las actividades representacionales del espacio. Esto fue entendido como la imagen mental del espacio real, en la cual los niños actúan, donde las representaciones mentales no son solamente evocadas por la memoria, sino mediante una reconstrucción activa de un objeto en un nivel simbólico. En este sentido las investigaciones estuvieron interesadas en las transformaciones mentales del espacio real en el espacio de representaciones del niño; en aquellos atributos de los objetos reales que son invariantes bajo esas transformaciones y cómo ellos cambian con la edad. De acuerdo con la teoría de Piaget las primeras transformaciones del niño son aquellas que conservan los atributos topológicos de los objetos, tales como interior o exterior de un conjunto, frontera de un conjunto, conexidad o apertura y cerradura de las curvas. Sólo después, según las investigaciones piagetanas, el niño esta capacitado para transferir a su espacio representacional atributos euclidianos, de los objetos, tales como la longitud de las líneas o tamaños de los ángulos. Es ahí donde se representan ideas sobre la conservación de la longitud, el área o el volumen de los objetos geométricos.

Acerca de la visualización

Una cuestión importante, ligada a la percepción espacial que no sólo se reduce a la geometría, trata de la visualización en matemáticas, de la cual se puede decir surge de la necesidad de construir nociones nuevas que dieran cuenta de cómo las personas se relacionan con su espacio, esto condujo a exploraciones de las habilidades visuales necesarias para su aprendizaje. En este sentido es importante resaltar que la visualización se entiende no como el simple acto de "ver"; sino como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar , documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje de quien aprende.

Por otro lado, realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, pero exige también el uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivénciales. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diferentes representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado y sobre todo, de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados. (Cantoral y Montiel, 2001)

En este sentido se trata de un proceso mental muy útil para distintas áreas del conocimiento matemático y científico. En matemáticas se utilizan diferentes representaciones que requieren de la visualización; por ejemplo, las propiedades de la inclusión en la teoría de conjuntos; suele hacerse uso de dibujos, en el análisis de las funciones también es usual manejar representaciones visuales para describir propiedades como la paridad (x) (x), la periodicidad (x) $(x\ \ k)$, o la traslación de funciones y $(x\ \ a)$, y $(x\ \ a)$, etc.

Presentamos enseguida un ejemplo en el que se enriquece un enfoque educativo al incluir una situación que atiende a la visualización de un concepto, en ella, el estudiante puede llegar por medio de conceptos sencillos y elementos de visualización a una construcción del polinomio de Lagrange que pasa por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2),, (x_n, y_n).

Desarrollo de la situación

1. Suponemos dos rectas como las que se ilustran a continuación:

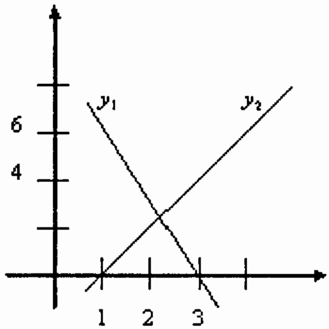


Figura 1

De la gráfica podemos ver que y_1 pasa por los puntos (1, 6) y (3, 0), proponemos entonces que $y_1 \;\; k(x \;\; 3)$ pero vemos que cuando $x \;\; 1$, $y_1 \;\; 6$ Entonces $6 \;\; k\,(1 \;\; 3)$ de donde $k \;\; 3$ y por lo tanto $y_1 \;\; 3(x \;\; 3)$. Para el caso de la recta y_2 que pasa por (1, 0) proponemos $y_2 \;\; k(x\;1)$, pero vemos que cuando $x \;\; 3$, $y_2 \;\; 4$ Entonces $4 \;\; k\,(3\text{-}1)$ de donde $k \;\; 2$ y por lo tanto $y_2 \;\; 2(x - 1)$.

2. ¿Qué pasa si sumamos y_1 con y_2? Veamos:

$y_1 \;\; y_2 \;\; 3(x3) \;\; 2(x1)$ Por lo que obtenemos una tercera recta que llamaremos y_3 ó bien $y_3 \;\; \text{-}x$ 1. Reflexionando un poco sobre y_3 podemos ver que cuando $x \;\; 1$, y_3 toma el valor de 6 y cuando $x \;\; 3$, y_3 toma el valor de 4; es decir, la recta resultante pasa por los puntos (1, 6) que es el punto superior de y_1 y (3, 4) que es el punto superior de y_2.

3. Queremos teniendo en cuenta la observación del párrafo anterior y siguiendo un procedimiento similar, construir parábolas que pasen por puntos no alineados y fuera del eje x. Es decir, tratar de construir una función que pase por puntos cualquiera: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) donde x_1, x_2, x_3 sean diferentes de cero y diferentes entre sí, con la misma condición para y_1, y_2, y_3. En una gráfica la distribución de puntos se vería así:

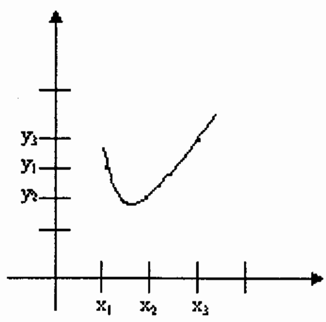


Figura 2

De acuerdo a lo propuesto tendríamos que construir primero parábolas que pasen por dos puntos sobre el eje x y uno fuera. Tendríamos tres casos posibles a analizar:

Caso I

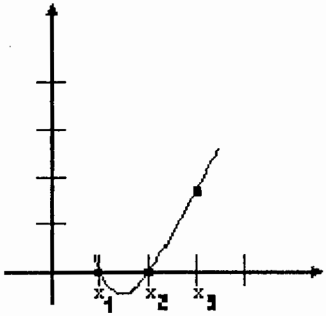


Figura 3

Ya que x_1 y x_2 son raíces de la parábola, proponemos $_1(x)$ $k(x\ \ x_1)(x\ \ x_2)$ donde k tendría que ser tal que satisfaga (x_3, y_3) así: $_1(x_3)$ $k(x_3\ \ x_1)(x_3\ \ x_2)$ y_3. Entonces es fácil ver que:

$$k=\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad \text{Por lo que } f_1=y_3\ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Caso II

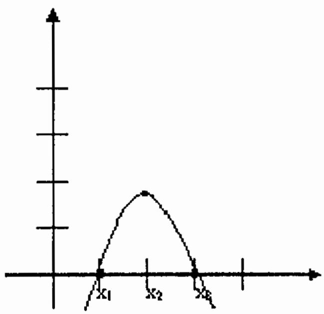


Figura 4

En este caso proponemos $_2(x)$ $k(x\ \ x_1)(x\ \ x_3)$ donde k tendrá que ser tal que se cumpla (x_2, y_2); así $_2(x)$ $k(x_2\ \ x_1)(x_2\ \ x_3)$ y_2. Entonces vemos que:

$$k=\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad \text{Por lo que} \quad f_2=y_2\,\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

Caso III

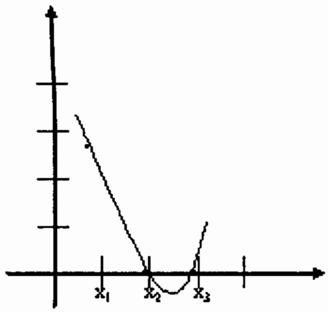


Figura 5

De la misma manera: $_3(x)$ $k(x \ x_2)(x \ x_3)$ y $_3(x_1)$ y_1 Entonces:

$$k = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \quad \text{Por lo que} \quad f_3(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

La parábola buscada que pasa por (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) se formará de la suma de las tres anteriores:

$$f(x) = f_3(x) + f_2(x) + f_1(x) \quad \text{O bien:}$$

$$f(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Siguiendo esta idea podemos generalizar el método para expresiones de mayor grado, de tal forma que podamos llegar a una generalización y construir el polinomio deseado, usando los resultados que ya obtuvimos. De esta forma podemos construir por ejemplo el polinomio que pasa por cuatro puntos:

$$f(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$+ y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

Expresando la función anterior de una forma más general:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{4} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

El patrón de comportamiento de la función buscada queda claro al estudiante y puede ser extendido hasta el polinomio que pasa por N puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2),, (x_n, y_n).

$$P(x)=\sum_{i=l}^{n} y_i \prod_{\substack{j=l \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

El cual es conocido como el polinomio de interpolación de Lagrange.

A modo de conclusión

El estudio de las gráficas y sus propiedades no siempre fue como hoy lo conocemos, en la antigüedad se estudiaban sólo aquellas gráficas de las que se tenia conocimiento mediante medios geométricos o físicos (tales como las cónicas y las curvas mecánicas); sin embargo, no estaban relacionadas en ese entonces con propiedades algebraicas. Cuando surge tal relación entre la geometría y el álgebra aparece lo que se denomina Geometría Analítica, siguiendo este proceso más tarde se intenta estudiar la geometría con el cálculo surgiendo así la geometría diferencial.

Sin embargo a partir de la relación que se establece entre funciones y figuras geométricas, se empieza a desarrollar entre los matemáticos preguntas: ¿Dada una función es posible asignarle una gráfica? ¿Cuál? O bien ¿existen gráficas que pasan por cualquier punto del plano?; de estos cuestionamientos, surge primero la pregunta: ¿Dados tres puntos no colineales en el plano es posible hacer pasar la gráfica de una polinomial?

Surgieron entonces diferentes soluciones a tales preguntas, personajes como Newton, Lagrange y Taylor dieron cuenta de ello a lo largo de su obra. La solución que diera Lagrange hoy lleva su nombre y sigue gozando de notable reputación al nivel de las aplicaciones de la matemática. Una inquietud naciente al interior de la comunidad de matemática educativa es la de investigar cómo es que las soluciones dadas al mismo problema por Newton y Taylor están efectivamente relacionadas entres sí.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones visualización y pensamiento matemático,* México, Prentice Hall.

Cantoral, R. y Farfán, R. et. al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Editorial trillas.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral R. (2001), Notas de clase, *Seminario del pensamiento matemático*; México, Departamento de Matemática Educativa, , Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Tecnología Avanzada

Construcción de un laboratorio numérico-algebraico en hojas electrónicas "Excel".

Ma. Beatriz Gómez Talancón y Alfredo Salazar Díaz

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Cuernavaca

begomez@campus.mor.itesm.mx jsalazar@campus.mor.itesm.mx

Resumen

En este trabajo se presenta un Laboratorio Numérico-Algebraico que los alumnos construyen en un curso de Matemáticas II de preparatoria. Para su construcción, diseñan seis salas interactivas de trabajo en un libro Excel, extrapolando en cada una de ellas un algoritmo algebraico que comúnmente se realiza con lápiz y papel.

Introducción

La construcción del Laboratorio es una de las actividades que los alumnos realizan en equipo, en el curso de Matemáticas II, PM95200 el cual se rediseñó en el semestre agosto-diciembre de 1997 y que se imparte en el Campus Cuernavaca, bajo el Nuevo Modelo Educativo del Tec, desde el semestre enero-mayo de 1998 hasta la fecha. Los alumnos al construirlo tienen la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos en el curso de Sistemas de Información, PS95100, de extrapolar algoritmos algebraicos de un contexto a otro y de poner en juego su creatividad. Al utilizarlo, tienen la ventaja de contar con una herramienta computacional, generada por ellos mismos, que les agiliza la obtención de resultados numéricos.

Descripción de las actividades y estrategias

El Laboratorio Numérico-Algebraico lo construyen los alumnos en equipo, conforme se van abordando, en el curso, los temas que se manejan en cada una de las seis salas de trabajo interactivas que lo constituyen. La actividad consiste en construir en un libro Excel las seis salas de trabajo (una en cada hoja) con las características particulares que se les indica para cada una de éstas. En cada sala, se extrapola un algoritmo algebraico específico que comúnmente se trabaja con lápiz y papel, con el propósito de que al utilizarla, se agilice la obtención de resultados numéricos de tal manera que el alumno pueda centrarse en el análisis e interpretación de los mismos, en lugar de perder de vista lo que realmente están buscando por lo laborioso de los algoritmos realizados. Por ejemplo, cuando se efectúa sucesivamente la división sintética para encontrar las soluciones de las Funciones Polinomiales, la cantidad de operaciones que se realizan, pueden provocar que el alumno pierda de vista lo que realmente está buscando y en consecuencia no logre interpretar de la matriz resultante los indicadores que lo conducen a encontrar todas las soluciones de la función.

Para la construcción de cada sala existe un documento en la plataforma Lotus/Notes, (plataforma en la cual se encuentra el curso), el cual incluye el objetivo de la actividad, las indicaciones para su construcción, los criterios de satisfacción, el algoritmo algebraico que debe contener y los recursos necesarios para llevarla a cabo. En este último punto, lo único que se requiere es con una computadora con el Excel instalado.

Los algoritmos que se extrapolan a las hojas de cálculo son: en la Sala 1. "Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables", el algoritmo de la regla de Cramer para encontrar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables; en la Sala 2. "Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con tres Variables", el algoritmo de la regla de Cramer para encontrar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con tres variables: en la Sala 3. "Coordenadas del Vértice de una parábola", la fórmula para determinar las coordenadas del vértice de una parábola que surge de completar cuadrados; en la Sala 4. "Soluciones de la Función Cuadrática", la fórmula general para encontrar las soluciones de una cuadrática; en la Sala 5. "El Discriminante $b^2 - 4ac$" y en la Sala 6. "Soluciones de la Función Polinomial", el algoritmo de la división sintética.

Cada sala debe contener como mínimo: título, instrucciones para su uso, el algoritmo extrapolado y el nombre de los integrantes del equipo. En relación con su diseño, se les sugiere a los alumnos que sean creativos.

Sobre lo que sucede cuando los alumnos construyen el Laboratorio se puede comentar lo siguiente:

a) En todas las ocasiones que se ha llevado a cabo ésta actividad, son varios los alumnos que necesitan del apoyo de sus compañeros o del profesor para lograr extrapolar las fórmulas o algoritmos algebraicos a las hojas electrónicas de cálculo, dado que no recuerdan la forma como se trabajan las funciones matemáticas en Excel. Para superar este problema, nos hemos coordinado con los profesores de Sistemas para que cuando trabajen con los alumnos en primer semestre las funciones del Excel, incluyan en sus ejemplos y ejercicios las fórmulas y algoritmos que tendrán que extrapolar en Matemáticas II para la construcción de su Laboratorio.

b) Varios equipos, sobre todo en los que hay uno o varios alumnos con buen manejo del Excel, logran construir Laboratorios que además de tener todos los elementos requeridos, cuentan con diseños novedosos, en los cuales el color, tipos de letra, dibujos alusivos al tema, graficadores, comprensión adecuada de la forma de extrapolar los algoritmos a la hoja electrónica, ponen de manifiesto sus conocimientos computacionales, su comprensión de la estructura matemática de los algoritmos, su ingenio y su creatividad.

Sobre lo que sucede cuando los alumnos utilizan el Laboratorio se puede comentar lo siguiente:

a) Las Salas 1 y 2 son utilizadas por los alumnos, en el curso, principalmente para comprobar los resultados que han obtenido por los métodos de suma y resta, igualación y sustitución, con lápiz y papel, de sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres variables respectivamente.

b) Las Salas 3, 4 y 5 les permite a los alumnos analizar, comparar y relacionar los resultados numéricos con el comportamiento de la gráfica de las funciones cuadráticas. Por ejemplo: en que lugar se localizan las coordenadas del vértice de la parábola, en que valores de "x" la gráfica cruza o toca el eje de las abscisas, como se comporta la gráfica de la función cuando las raíces son reales, cuando son de multicidad doble, o cuando son complejas, etc.

c) La Sala 6, les permite centrarse en el análisis de la matriz resultante para encontrar todas las soluciones de un polinomio con a lo más dos raíces complejas.

La sala 6, por su utilidad y efectividad puede considerarse la de mayor riqueza didáctica, en esencia, facilita a los alumnos la obtención de las raíces de cualquier polinomio con la única restricción de que no tenga más de dos raíces imaginarias. En esta sala los alumnos trabajan con las funciones polinomiales propuestas en los Ejercicios 25, 26, 27 y 28 del curso. Dichas funciones están cuidadosamente seleccionadas de manera que la dificultad se vaya incrementando gradualmente. Se inicia con funciones cuyas raíces son valores enteros, después con funciones cuyas raíces son valores enteros y fraccionarios, en seguida con funciones con una raíz irracional o de multicidad doble o triple y finalmente se trabaja con funciones que tengan dos raíces complejas, además de otras de otro tipo. Para la realización de los Ejercicios 25, 26, 27 y 28, se les solicita a los alumnos que introduzcan de una en una, las funciones propuestas a la Sala 6, en un intervalo en el que puedan determinar los valores de x donde se localizan la Cota Inferior y la Cota Superior de las raíces del polinomio.

Una vez que las determinan tienen que imprimir la matriz resultante para llevarla a clase para su análisis con el resto del grupo.

En esta actividad los alumnos tienen la oportunidad de interaccionar con el Laboratorio Numérico-Algebraico, con algunos cálculo realizados por ellos mismos con lápiz y papel y con el Laboratorio Gráfico, en este último pueden observar el comportamiento de las gráficas y su relación con los valores numéricos obtenidos.

La construcción y uso del Laboratorio, ha sido implementado en el curso de Matemáticas II de preparatoria, desde 1998, no solo por profesores del Campus Cuernavaca, sino también por profesores de los Campus que han adoptado el curso rediseñado. Algunos de los Campus que lo han adoptado son: Guadalajara, Sonora, Aguascalientes y Toluca.

Conclusiones y recomendaciones

Construir el Laboratorio y utilizarlo en los temas para los cuales fue diseñado, ha conducido a los alumnos a realizar una actividad matemática distinta e innovadora que les ofrece la ventaja del uso de la tecnología. Si dicha tecnología es utilizada en forma apropiada se puede contribuir a la creación de un micro ambiente en el que la construcción del conocimiento pueda efectuarse con más facilidad.

Por lo anterior, es recomendable explorar nuevas formas de integración de la computadora en la enseñanza de las matemáticas y aprovechar su gran potencial como simulador, procesador matemático, procesador geométrico, generador de información, etc.

Referencias bibliográficas

Balderas E. (1992). Aprendizaje de conceptos del cálculo mediante la graficación en computadora. *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Vol. 2*, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca Mor., México. D. F.

Chávez, H. y Hitt F. (1993). Estructuras, modelos y procesos cognoscitivos sobre la visualización en la enseñanza del Cálculo Diferencial usando la microcomputadora. *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación* pp. 111-139, Edición de Filloy/Herrera/Hitt, Departamento de Matemática Educativa del

CINVESTAV del IPN, México D. F.

Espíndola, J. (2000). *Reingeniería Educativa, México,* Editorial Pax

Gómez, B (1998. Matemáticas II, PM95200, Lotus Notes, Learning Space, Campus Cuernavaca, ITESM. http://cursosmodelo.sistema.itesm.mx/lspace/va/curmod/morpm200/schedule.nsf

Anexos

1. Instrucciones para la construcción de la Sala 1 "Solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables"
2. Ejercicio 25. Cota inferior y cota superior de las raíces de un polinomio
3. Ejercicio 26. Raíces racionales

LABORATORIO NUMÉRICO-ALGEBRAICO

SALA 1

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Tiempo estimado: 1 hora

Objetivo: Construir con tus compañeros de equipo, la Sala uno del Laboratorio Numérico-Algebraico, extrapolando el algoritmo de la regla de Cramer (por determinantes) a una hoja electrónica de cálculo Excel, para encontrar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Requisitos: La sala debe contener como mínimo: el título, la definición de "Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por el método de Cramer", instrucciones de uso de la sala, el nombre de su equipo y el algoritmo extrapolado. En la construcción de la sala pueden utilizar elementos creativos, por ejemplo, color, diferentes tipos de letra, dibujos alusivos al tema, etc. También pueden incluir un espacio donde se grafiquen los sistemas de ecuaciones que se estén trabajando en la sala.

El algoritmo es:

Si

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

Entonces la solución del sistema esta dada por:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c^1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a^1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

II. Una vez que tengan su sala, prueben que funciona correctamente, encontrando en ella las soluciones de los sistemas de ecuaciones realizados algebraicamente en clase y extraclase (Ejercicios 12 y 13 respectivamente)

III. Cada integrante del equipo debe tener su propio disket con la copia de la Sala I del Laboratorio Numérico-Algebraico.

IV. La calificación de esta sala se promedia con las calificaciones obtenidas en las demás tareas extraclase de este periodo y dicho promedio representa el 20% de la calificación del parcial.

COTA INFERIOR Y COTA SUPERIOR DE LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO

Ejercicio 25

Tiempo estimado 50'

Objetivo: Como resultado de este ejercicio se espera que impriman para su análisis las matrices resultantes de introducir los datos de los polinomios que se les indican, en la Sala 6 del Laboratorio Numérico-Algebraico.

Instrucciones:

En la Sala 6 del Laboratorio Numérico-Algebraico:

1) En equipo, encontrar la cota superior y la cota inferior de las siguientes funciones polinomiales

a) $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$
b) $x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = 0$
c) $4x^3 - 7x - 3 = 0$
d) $3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$
e) $2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$
f) $3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6 = 0$
g) $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
h) $8x^4 + 6x^3 - 51x^2 + 11x + 6 = 0$
i) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$
j) $4x^4 - 8x^3 + 19x^2 + 2x - 5 = 0$
k) $6x^5 + 19x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 19x + 6 = 0$
l) $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$

2) Individualmente, Imprimir cada una de las matrices resultantes y llevarlas al salón de clase para su análisis, el próximo miércoles

RAICES RACIONALES.

Ejercicio 26

Tiempo estimado 50'

Objetivo: Se espera que en este ejercicio encuentres todas las raíces de los polinomios propuestos e imprimir las matrices resultantes de las funciones polinomiales que se te indican.
Instrucciones:

Utilizando el teorema de las raíces racionales:

1) Encontrar las posibles raíces racionales de los siguientes polinomios
2) Comprobar en la sala 6 del Laboratorio Numérico-Algebraico, cuáles de ellas sí son raíces del polinomio
3) Ordenar el intervalo entre las cotas del polinomio, incluyendo los valores enteros y racionales de menor a mayor e imprimir las matrices de los ejercicios a, c y d.
4) Determinar los ceros encontrados
5) Reducir las ecuaciones, en el caso de que falten por encontrar ceros o raíces, a una cuadrática y encontrar por cualquier método las faltantes. Pueden utilizar la sala 4 del Laboratorio Numérico- Algebraico.

a) $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$
b) $x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = 0$
c) $4x^3 - 7x - 3 = 0$
d) $3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$
e) $2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$
f) $3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6 = 0$
g) $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
h) $8x^4 + 6x^3 - 51x^2 + 11x + 6 = 0$
i) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$
j) $4x^4 - 8x^3 + 19x^2 + 2x - 5 = 0$
k) $6x^5 + 19x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 19x + 6 = 0$
l) $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$

6) Individualmente, Imprimir las matrices de los ejercicios a, c y d, son necesarias para llevar a cabo la práctica 4 del Laboratorio Gráfico en la sesión 57

Desarrollando proyectos de investigación en Didáctica de las Matemáticas en Iberoamérica: uso de Internet.

Alexander Maz Machado — Univ. de Granada — España
Aida María Torres Alfonso — Univ. Central de Las Villas — Cuba
Francisco Boigues Planes — Univ. Politéc. de Valencia — España
fresasjun22@yahoo.com

Resumen

Analizamos las posibilidades de Internet para desarrollar las relaciones e interacciones en el colectivo de educadores matemáticos en Iberoamérica. Presentando una breve recopilación de sitios que son de gran utilidad en cualquiera de las fases del proceso de un proyecto de investigación así como el papel de la comunidad virtual que se viene fomentando. Ambos aspectos son ejemplificados, el primero con una búsqueda en la base de datos Teseo y el segundo con la participación latinoamericana, de manera virtual en un curso del Doctorado de Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada.

Introducción

El primer problema serio que suele encontrar quien se inicie en una investigación en Didáctica de las Matemáticas es definir un tema de estudio (más aún si es un investigador novel o en formación). Esta definición suele iniciarse con planteamientos demasiados generales, que luego hay que acotar. Una manera de hacerlo es consultando publicaciones relacionadas con ese tema; esto le mostrara como lo que a él le parece un problema es realmente un campo en el que caben numerosas preguntas, muchas mas de las que en un principio sospechaba. Para un investigador es fundamental estar bien informado sobre las publicaciones de su especialidad que van apareciendo y tener acceso a directo a las más importantes. Esto es el inicio de lo que llamamos revisión bibliográfica y debe proporcionar: "1) El marco de referencia conceptual de la investigación prevista; 2) La comprensión del estado de la cuestión; 3) Indicaciones para el enfoque, el método y la instrumentación de la investigación para el análisis de datos; 4) Una estimación de las probabilidades de éxito de la investigación planteada; 5) La información específica necesaria para formular las definiciones, los supuestos, las limitaciones y las hipótesis de la investigación." (Fox, 1981; p.146). Es muy importante esta fase de la investigación pues en gran medida de ella dependerán muchas decisiones sobre otras etapas en el proceso investigador, así como en su credibilidad (Winne, 1999).

Hasta hace poco tiempo para realizar esta revisión era necesario con contar con una gran y actualizada biblioteca con acceso a las revistas de impacto en el área, cosa poco fácil en la mayoría de países latinoamericanos; sin embargo el auge y desarrollo de Internet ha generado nuevos modos de acceder a esos documentos con fines educativos, informativos o de investigación (Blatt y otros, 1999).

Precisamos que las fases del proceso de investigación para las cuales podemos encontrar información relevante en Internet son las siguientes:

Antecedentes y estado de la cuestión sobre un tema: bases de datos, publicaciones electrónicas.

Difusión de resultados: congresos, conferencias, actas, publicaciones.

Lo anterior indica que Internet puede contribuir a expandir la comunidad latinoamericana de investigación, pues estimula el desarrollo de redes científicas, aplicaciones de avances didácticos, metodológicos o teóricos (Simco, 2000).

Presentamos algunos de estos recursos y las posibilidades que brindan en proyectos de investigación, así como las posibilidades de contribuir al fortalecimiento de la comunidad real de educadores matemáticos latinoamericanos.

Revisión bibliográfica: publicaciones y bases de datos.

Las revistas son actualmente el principal medio de divulgación de los resultados científicos. En Didáctica de las Matemáticas podemos consultar revistas publicadas en español, cuya consulta nos mantendrán al día en el avance de la investigación en España y países hispano americanos, asimismo muestran experiencias de enseñanza o diseño curricular, entre ellas tenemos: *Educación Matemática* (México), *Revista EMA* (Colombia), *Enseñanza de las Ciencias, Epsilon, Números, Suma* y *Uno* (todas españolas). En el ámbito internacional, actualmente hay tres revistas que se destacan claramente en calidad, teniendo como principal objetivo difundir la diversidad de puntos de vista, objetivos y métodos actuales de investigación en didáctica de las matemáticas (Gutiérrez y Maz 2000): *Educational Studies in Mathematics* (ESM), fundada por Hans Freudenthal en 1969, *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME), publicada por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, sociedad de profesores de matemáticas de EE.UU.) desde 1970 y Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM), creada en 1980 en Francia por iniciativa de un grupo de didactas de ese pais.

Otras revistas de calidad que tambien deben tenerse en cuenta son *Focus on Learning Problems in Mathematics, For de Learning of Mathematics* y de *The Journal of Mathematical Behavior.* También sería conveniente seguir la evolución de algunas revistas de nueva aparición como son: *Journal of Computers for Mathematical Learning* (IJCML, 1996) dedicada al mundo de la enseñanza de las matemáticas apoyada en medios electrónicos y *Journal of Mathematics Teacher Education* (JMTE, 1998) dedicada a los profesores de matemáticas, sus creencias, actividad profesional, formación inicial y permanente.

Hasta hace poco tiempo, la única forma de revisar el contenido de las revistas era dedicando interminables horas a leer, uno por uno, los índices de los ejemplares disponibles. En la actualidad las compañías editoras se han adaptado al auge de Internet y están sacándole el máximo de provecho, lo cual redunda en un gran beneficio para los investigadores donde los fondos bibliográficos de su departamento o universidad son escasos o faltan los más importantes

Editoriales con servidores en Internet:

http://www.nctm.org se encuentran los índices de JRME y las demás revistas publicadas por el NCTM

http://www.wkap.nl están los de ESM, IJCML, JMTE y demás revistas de la editorial Kluwer. Posibilita consultar los índices de numerosas revistas aunque no tengamos acceso físico a ellas.

Revistas electrónicas:

http://www.amstat.or/publications/jse *Journal of Statistics Education*

http://www.ex.ac.uk/local/PErnest *Philosophy of Mathematics Education Journal*

http://www.ugr.es/local/seiem *Boletín de la SEIEM*, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, iniciado en 1997 con tres números al año.

Han surgido al calor de las posibilidades de Internet; están publicadas y pueden ser leídas únicamente accediendo a su dirección electrónica, muestran sus artículos completos en la red.

Revistas con edición impresa:

Educational Studies In Mathematics, http://www.wkap.nl/journalhome.htm/0013-1954. Editada por Kluwer.

Journal Of Mathematics Teacher Education, http://www.wkap.nl/journalhome.htm/1386-4416. Editada por Kluwer.

The Journal for Research in Mathematics Education, http://www.nctm.org/jrme/. Es una revista oficial Del National Council of Teachers of Mathematics.

Recherches En Didáctictiqùes Des Mathématiques, http://www.labomath.univ-orleans.fr/ARDM/revue.htm. Es la revista científica de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques. Publica tres números por año, desde 1980, en inglés, francés y español.

Revista EMA, http://www.oei.es/n2577.htm. Universidad de los Andes. Colombia

Enseñanza De Las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas. Instituto de Ciencias de la Educación, http://blues.uab.es/rev-ens-ciencias/.

En estos casos se muestran sólo los títulos y los resúmenes Aunque es necesario inscribirse como suscriptor para leer sus artículos, podemos pedir que nos los envíen vía Internet.

Bases de datos:

http://www.emis.de/MATH/DI.html *Mathdi*, Versión electrónica del Zentralblat für Didaktik der Mathematik que incluye referencias y resúmenes de publicaciones de didáctica de la matemática desde 1976 extraídas de más de 350 revistas especializadas.

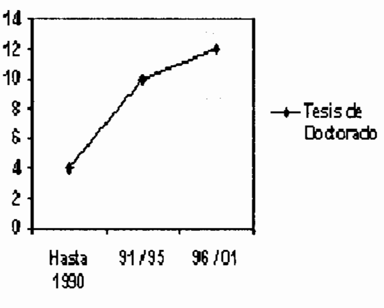
http://www.ericse.org/mathindex.html *ERIC*: Educational Resources Information Center, incluye referencias y resúmenes de publicaciones seleccionadas de revistas especializadas en temas de educación matemática.

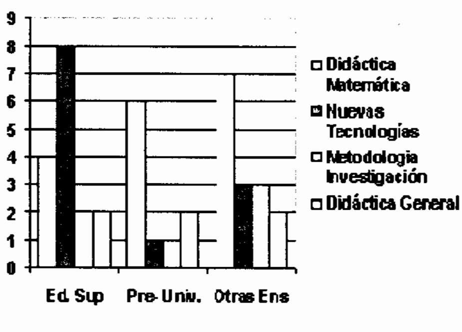
Son publicaciones periódicas compuestas por fichas con información sobre libros, artículos, actas de congresos, que se agrupan según diferentes criterios, la consulta a bases de datos proporciona numerosas referencias de publicaciones relacionadas con un tema de investigación.

http://www.mec.es/TESEO/teseo *Teseo,* del Consejo de Universidades Españolas, recoge y permite recuperar información acerca de las tesis doctorales leídas desde 1976, dando los principales datos del autor, titulo, universidad, año, director de la tesis y un resumen del trabajo. Las búsquedas se pueden hacer además por cualquiera de los 24 descriptores generales que están definidos en la base de datos.

Referiremos una primera aproximación a una búsqueda en esta Base de Datos: los resultados que exponemos, fueron obtenidos entre marzo y abril del 2002, considerando como descriptor fundamental: ***pedagogía: 2462,*** con ese gran número, era preciso acotar los temas que más nos interesaban y es por eso que continuamos nuestra reseña bibliográfica con descriptores mucho mas específicos: *Educación Superior: 130, Teorías Educativas: 190, Métodos audiovisuales en Pedagogía: 102 y Enseñanza programada: 31.* Resultando de marcado interés para los autores del trabajo 26 títulos relacionados con la Educación Matemática y el Uso de las Nuevas Tecnologías en la Enseñanza, de los cuales se consultaron sus resúmenes, autores y centros de realización.

Los gráficos que mostramos a continuación, nos permiten concluir que aunque son aún insuficientes los resultados investigativos obtenidos por la comunidad científica donde se suscribe esta referencia, se percibe un aumento en los últimos diez años en este tema y advertimos también que en los diferentes niveles de enseñanza, las prioridades investigativas son marcadamente diferentes, por ejemplo: en la Educación Superior sobresale el Uso de las Nuevas Tecnologías y en las enseñanzas precedentes la Didáctica de las Matemáticas. Deseamos convocar a la reflexión en cuanto a las posibilidades que nos brinda este tipo de consulta debido a su actualización constante y tanto el "estado de la cuestión" de nuestro proyecto como el método de investigación que hemos diseñado podemos mejorarlo en función de resultados que se han obtenido en el área, con lo que acercaríamos siempre un poco mas el abismo existente entre los resultados de nuestras investigaciones y el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así como proponernos ejecutar un proyecto similar a Teseo, pero con las tesis de Maestría y Doctorado que en Matemática Educativa se han realizado en América Latina; sin dudas contribuiría al desarrollo futuro de la comunidad investigadora iberoamericana.





Papel de la Comunidad Virtual Iberoamericana de Educación Matemática:

Considerando que una comunidad en términos de comunicación es cuando se comparte e intercambia información, por tanto existe la posibilidad de consolidar la Comunidad Iberoamericana Virtual de Educación Matemática (CIVEM), propiciando entre otras cuestiones:

- El debate académico en el ámbito iberoamericano respecto a temas teóricos y prácticos en los diferentes niveles y entornos de enseñanza aprendizaje

- El intercambio de experiencias referidas al diseño, uso y evaluación de nuevos medios didácticos (Lee, 2001).
- La organización de debates y otras actividades apoyadas en las posibilidades comunicativas de las redes.
- Difundir congresos, conferencias, seminarios, publicaciones impresas y/o electrónicas.
- Difundir proyectos y resultados investigativos en didáctica de las matemáticas.

A continuación se presentan algunos ejemplos que muestran cómo es posible utilizar la red Internet con fines investigativos.

UNIVERSIA.NET

Es un proyecto que se desarrolla en diez países iberoamericanos: Argentina, Brasil, Colombia, Chile, España, México, Perú, Portugal, Puerto Rico y Venezuela; en él participan más de 350 universidades. El objetivo es favorecer la difusión de la información universitaria, el desarrollo de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación, la innovación educativa y tecnológica y las plataformas de comunicación educativa e Interuniversitaria en el ámbito global iberoamericano. Su dirección electrónica es: http://universia.es/, desde allí se puede acceder a información sobre investigación, cursos, recursos y demás aspectos universitarios.

EDUMAT

Lista internacional de distribución de correo electrónico dirigido a los profesionales de la enseñanza de las matemáticas de todos los niveles educativos: Infantil, Primaria, Secundaria, Universidad, reafirmando su propósito de ser un espacio abierto de comunicación entre todos los profesionales interesados en el mejoramiento y progreso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, prestándole un especial interés a la introducción de la informática e Internet en las aulas de matemáticas en cualquier nivel. Surgida en noviembre del 1998 en el Departamento de les Ciències Experimentals i de les Matemàtiques de la Universidad de Barcelona cualquier tema relacionado con la educación matemática tiene cabida en EDUMAT: la etnomatemática, la historia de las matemáticas y su uso en la enseñanza, la filosofía y en la educación matemática, así como la matemática recreativa, entre otros: http://www.ub.es/edumat.

INDIMAT

Por iniciativa de la Junta Directiva de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) se crea en abril del 2000 un Foro de Discusión en Internet con el nombre de INDIMAT: Investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Está dirigido de manera abierta a los investigadores en ésta área y que estén interesados entre otros aspectos a:

- Conocer y analizar diversos enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas, contrastando las diversas nociones teóricas y opciones metodológicas que se proponen, así como sus implicaciones para la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Favorecer activamente la cooperación e intercambio entre investigación y docencia en todos los niveles educativos.
- Facilitar la discusión y difusión de los trabajos y proyectos que se elaboren por los

miembros suscritos al Foro entre la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas.

La suscripción a la lista y el envío de contribuciones se puede iniciar desde la propia página web de la SEIEM: http://www.ugr.es/local/seiem/, y desde la página web de INDIMAT: http://www.rediris.es/list/info/INDIMAT.html.

Un resultado concreto de este foro para la Comunidad Iberoamericana de Investigadores lo fue la posibilidad de participación virtual, por Internet, de conjunto con los participantes presenciales de un curso dentro del programa de doctorado Curso 2000-2001 del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada: *Teoría De La Educación Matemática*, impartido por el Dr. J. D. Godino; realizado de enero a junio del 2001.

Tanto los documentos como la forma de evaluación y los objetivos del curso pueden ser valorados en la página http://www.ugr.es/local/jgodino/; la metodología adoptada, permitió a los que comenzamos a recorrer estos caminos de la investigación en didáctica de las matemáticas ampliar horizontes de conocimientos, compartir criterios con profesionales de diferentes países de Latinoamérica: argentinos, dominicanos, brasileños, cubanos, venezolanos y colombianos.

Se espera que muchas otras experiencias de este tipo se desarrollen en un futuro no lejano para el fortalecimiento y desarrollo de la Comunidad Real de Investigadores en Educación Matemática en Iberoamérica.

En Internet existen muchos otros recursos y experiencias de gran utilidad para la investigación en Educación matemática en distintos niveles, todo esto al alcance de quien disponga una conexión a la red (Ruiz y otros, 2000).

Conclusiones

Estar conscientes de que las nuevas tecnologías por si solas no contribuyen a un desarrollo ascendente de nuestras investigaciones educativas, nos lleva a reflexionar en un uso correcto de los recursos que disponemos ya que en nuestro continente no están al alcance de todos pero que la Comunidad Universitaria Latinoamericana, en mejor posición que otras, tiene el deber de concebir y contribuir la ejecución de proyectos similares a TESEO y INDIMAT, donde salgan fortalecidos nuestros investigadores, sus resultados y la calidad de la enseñanza que es un objetivo común de todos.

Referencias bibliográficas

Fox, D. (1981). *El proceso de investigación en educación*. EUNSA: Pamplona, España.

Blatt, I.; Hartmann, W., y Voss, A. (1999). The use of the Internet in university teacher training. *The Internet and higher education*, 1(4) 305-315.

Gutiérrez, A. y Maz, A. (2001). Cimentando un proyecto de Investigación: La revisión de literatura. En P Gómez y L Rico (eds.). *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática: Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Universidad de Granada. Pp. 149-165.

Lee, M. (2001). Profiling students' adaptation styles in Web-based learning. *Computers & Education* 36, 121-132.

Ruiz, F.; Castro, E., y Godino, J. D. (2000). *Internet como herramienta y objeto para la investigación en didáctica de la matemática*. Ponencia presentada en el Cuarto Simposio de la SEIEM. Huelva, España.

Simco, G. (2000). An Introduction to the Internet 2. *The Internet and higher education*, 2(4): 265-268.

Winne, P. (1999). How to improve the credibility of research in education. *Issues in educaion*, V. 5, N 2. 273-278.

Sistema Didáctico de la disciplina Matemática con formato web en la carrera de Ingeniería Industrial

Milagros Horta Navarro
Universidad de Matanzas. Cuba
milagros.horta@umcc.cu

Resumen

El proceso de preparación de los especialistas no puede dejarse al azar, las disciplinas de las diferentes carreras se deben organizar de tal forma que exista una documentación de cada una de ellas que recoja materiales tan importantes como: **el programa analítico, las orientaciones metodológicas, los planes directores, los folletos auxiliares y las guías de estudio**, entre otras; utilizando los recursos que brinda la informatización. De esta forma se propicia que el claustro, no sólo del departamento, sino de la carrera en general, tenga acceso a la documentación que conforma las diferentes disciplinas de la especialidad, fluyendo más rápidamente la interdisciplinaridad, pues cada disciplina tiene acceso a las experiencias de otras, amén de la gran importancia que esta forma de organización brinda a los profesores noveles, los cuales a través de estos materiales podrán nutrirse de las experiencias obtenidas en cursos anteriores. Con el presente trabajo, pretendemos poner a consideración de otros colegas, el montaje de la disciplina **Matemática para Ingeniería Industrial** en un sitio web, la cual consta de cinco asignaturas, con la documentación respectiva de cada una de ellas así como de la disciplina en general.

Introducción

El organizar el proceso de enseñanza de la Matemática en la carrera de Ingeniería Industrial con el referencial teórico metodológico del enfoque histórico cultural y de la actividad, presupone partir de las características socioeconómicas, políticas y científico-técnicas de la época. Si se tiene en cuenta el notable y acelerado desarrollo que experimentan las NTIC en nuestros días, se explica la necesidad de introducirlas en este proceso bajo este enfoque.

Las NTIC pueden ser incorporadas al proceso docente con rasgos diferentes, lo mismo para fortalecer y hacer eficientes y efectivas las tendencias pedagógicas más actuales que centran su atención en la singularidad de cada alumno, estimular su crecimiento individual, poniendo énfasis en "aprender a aprender", "aprender a hacer", con un sentido humanista de la educación, como también pueden ser utilizadas en la organización del proceso docente educativo. Sobre la experiencia en la organización de un sistema didáctico de la disciplina Matemática para estudiantes de ingeniería Industrial utilizando las NTIC, trata el siguiente trabajo.

Desarrollo.

- **El Plan de Estudio, La Disciplina, La Asignatura**.

El Plan de Estudio.

Álvarez (1999) define que: *"El diseño del plan de estudio es el diseño de los componentes, las leyes y los eslabones, y es lo más importante del diseño curricular".*

La Disciplina

"El plan de estudio se estructura por medio de disciplinas como subsistemas de aquel, que garantizan la sistematización vertical de dicho plan de estudio. Estas son agrupaciones u organizaciones sistémicas de contenido que con un criterio lógico y pedagógico se establecen para asegurar los objetivos del egresado".

El programa de las disciplinas tendrá los tipos de problemas que se aprenden a resolver en el desarrollo de la disciplina, el objeto de estudio de la disciplina, los objetivos, que expresan integralmente lo que se quiere, lo que se aspira que el escolar sea capaz de dominar, así como el contenido, expresado de la manera más general, es decir, sin entrar en detalles.

La Asignatura

Según el mismo autor:

"La asignatura es un subsistema de la disciplina y expresa un ordenamiento lógico y pedagógico de contenido a ese nivel, subordinado a la disciplina.

La asignatura se debe estructurar por temas.

*El tema es la unidad organizativa del proceso docente educativo y asegura en su desarrollo un objetivo concreto. Esto implica la formación de una habilidad en los alumnos (*Álvarez (1999*))*

El tema se organiza sobre la base de un tipo o familia de problemas que el estudiante aprende a resolver y que posibilita la formación de la habilidad, el logro del objetivo.

Con respecto al contenido del programa de la asignatura Álvarez, (1999), plantea:

El programa de la asignatura contiene tanto los objetivos de ésta, que integra en un solo sistema, los objetivos de los temas, así como los contenidos de cada tema; una distribución tentativa del tiempo por tema, la evaluación parcial de cada tema y final de la asignatura; y los métodos más significativos para el aprendizaje de los temas.

El tipo de clase a desarrollar en cada tema se irá adecuando al objetivo del mismo, a la habilidad a formar, a los conocimientos a asimilar por parte de los alumnos.

Con respecto a la estructura del programa de la disciplina y de la asignatura este autor recomienda:

"El programa de una disciplina debe contener los elementos estructurales siguientes:

***Datos preliminares**. Se precisan el nombre de la disciplina, su ubicación, así como las formas de enseñanza en que se explica y el tiempo total de que dispone cada una de ellas y cada asignatura.*

***Fundamentación de la disciplina.** Breve reseña histórica de la enseñanza de la disciplina. Su objeto de estudio y el papel y lugar que desempeña en el plan de estudio.*

***Objetivos generales de la disciplina.** Derivados de los objetivos que comprende el plan de estudio.*

Contenido de la disciplina. *Se relacionan los sistemas:* ***Sistema de conocimientos, Sistema de habilidades, Sistema de valores.***

Indicaciones Metodológicas y de Organización de la Disciplina. *Estas indicaciones incluyen la caracterización de las asignaturas desde el punto de vista de las formas y los métodos de enseñanza..., los medios de enseñanza y la literatura docente..."*

"En el programa de la disciplina se consignará la ***bibliografía*** *que responde a las necesidades de éste."*

Y más adelante dice:

"El ***programa analítico*** *de la asignatura es el documento que, derivado del programa de la disciplina, elaboran los centros de Educación con el fin de precisar el desarrollo del proceso docente en el período, estableciendo los temas por unidades como subsistema de las asignaturas con los respectivos objetivos y contenido, así como la evaluación parcial"*

Según la resolución vigente en nuestro país (Resolución 41, La Habana, 1998) que norma los documentos que deben poseer las disciplinas y las asignaturas, estos deben ser:

-Plan de Estudio: Programa de cada disciplina, datos generales, fundamentación de la disciplina, objetivos generales educativos e instructivo, contenido de la disciplina: (Sistema de conocimientos, habilidades y valores a los que contribuye) e Indicaciones metodológicas y de organización de la disciplina (todo lo relacionado con el trabajo metodológico realizado por el colectivo de profesores de la disciplina).

-Programa de cada asignatura: Datos generales, objetivos generales educativos e instructivos, contenido por asignatura: Sistema de conocimientos, habilidades y valores a los que contribuye, textos básicos actualizados (título, autor, editorial, año de edición y cantidad de páginas) o los correspondientes sustitutos con igual información, Indicaciones metodológicas y de organización y Evaluación final.

Teniendo en cuenta las orientaciones mencionadas anteriormente con respecto a la organización de las disciplinas, el trabajo realizado por un grupo de profesores de la Universidad de Matanzas, y que tratamos de poner a su consideración, consiste en la experiencia de montar sobre una ***página web (Revista*** Giga Interactiva, No 2 y 3, 2000), el sistema didáctico de la disciplina Matemática para Ingeniería Industrial (Horta., 2000), éste tiene como objetivo:

1.Que los estudiantes puedan acceder, a través de la red, a toda la documentación de cada una de las asignaturas que conforman la disciplina Matemática para Ingeniería Industrial, para que conozcan: el sistema de objetivos de cada una de ellas, el sistema de habilidades, el sistema de valores, el sistema de evaluación, la relación de las temáticas, tratamiento metodológico, la preparación de cada una de las actividades docentes con sus respectivas formas de enseñanza, las orientaciones para el estudio y trabajo independiente, así como desarrolla cada una de las asignaturas los planes directores, de manera que vean las asignaturas de la disciplina como un todo, su relación entre ellas y los objetivos de cada una de estas como tributan en los de la carrera.

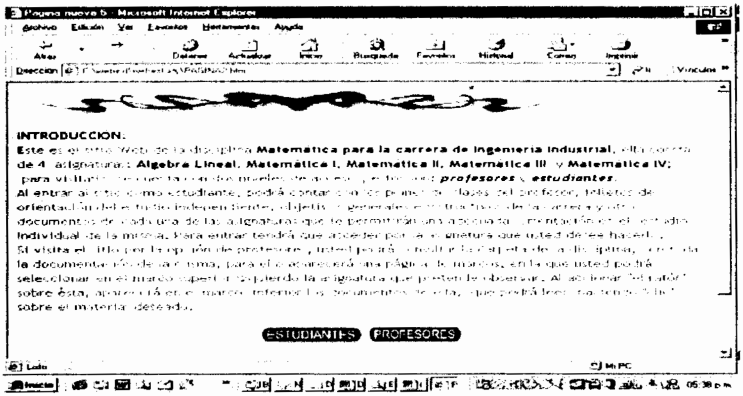
2. Lograr la interdisciplinaridad entre las asignaturas recibidas por los estudiantes de primer y segundo año de la carrera de Ingeniería Industrial con la disciplina Matemática para Ingenieros Industriales.

3. Que las instancias superiores puedan controlar y evaluar el trabajo realizado en la disciplina.

4. Que los profesores noveles u otros profesores interesados al respecto, posean un material de consulta de manera que puedan apreciar el trabajo metodológico del colectivo, que los ayude en su formación profesional.

Descripción del sitio web:

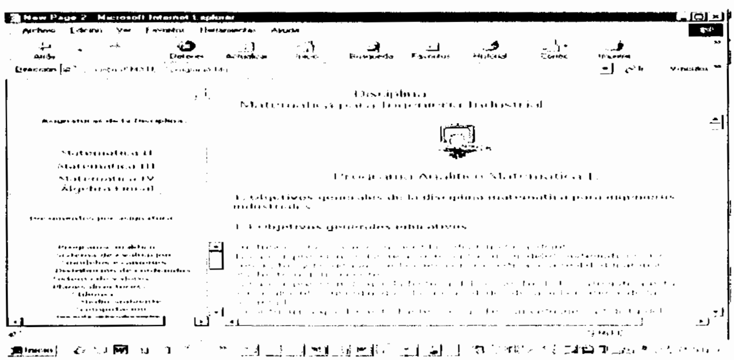
Éste presenta dos niveles de accesos: **Profesores** y **Estudiantes.**



Acceso Profesores:

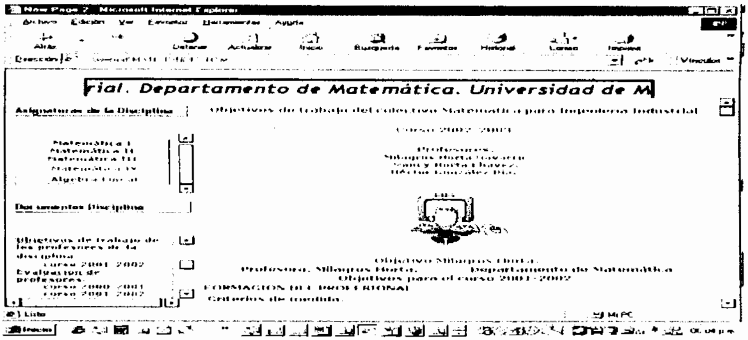
Al acceder al sitio por la opción de **Profesores**, aparece toda la documentación de la disciplina, que está elaborado en una página de marcos: en el marco izquierdo superior de la página principal aparecen cada una de las asignaturas que conforman la disciplina, al accionar el "mouse" sobre la asignatura que se quiera consultar; en la parte inferior de este marco aparecerá la documentación de la disciplina en cuestión, estos:

Sistema de objetivos, Sistema de habilidades, Objetivos del año que tributan en la carrera, esto es: como la asignatura tributa en los objetivos del año, Planes directores de idioma y computación (Estrategias que el profesor se traza para apoyar el dominio del idioma Inglés y la Computación).La preparación de la asignatura (con cada una de las temáticas, los objetivos particulares de cada clase y la forma de enseñanza).Los Materiales didácticos de la asignatura (en los que aparecen libros digitalizados de las asignaturas así como folletos de orientación del estudio Independiente y ayudas para trabajar con el Software DERIVE).



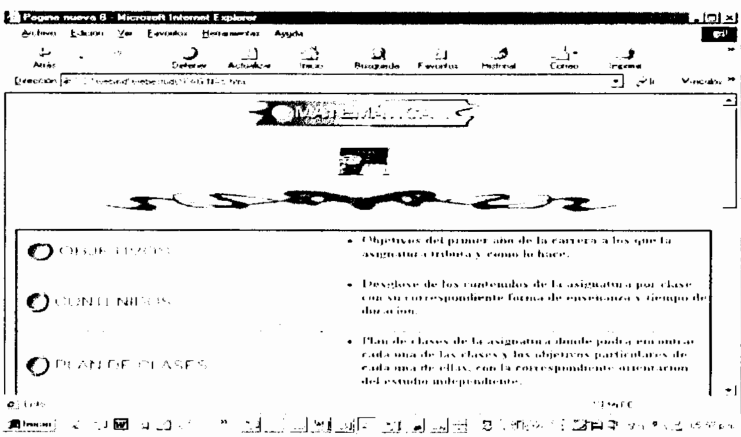
Se podrá acceder al material deseado dando "clic", en lo que se quiera observar y aparecerá en el marco derecho el documento en cuestión.

Para acceder a la documentación metodológica de la disciplina al accionar sobre la palabra disciplina Matemática, aparecerá en el marco principal todo el trabajo metodológico desplegado por el colectivo de profesores de la disciplina durante los diferentes cursos, donde se incluye entre otros: indicaciones metodológicas, controles a los profesores, evaluaciones de los profesores, objetivos de trabajo de cada docente, etc (a ésta página los estudiantes no tienen acceso).



Acceso Estudiantes:

Al entrar por **Estudiantes,** los alumnos de esta carrera podrán visitar una página diseñada con materiales de su interés de cada una de las asignaturas de la Disciplina, estos son: folletos de orientación para su auto preparación, distribución por temas de cada una de las clases, con la forma de enseñanza y objetivos específicos de cada una, el plan de clases del profesor, una biblioteca virtual con textos de actualidad, que no se encuentran en la biblioteca de la universidad, donde se abordan los contenidos de las diferentes asignaturas de la disciplina, algunos de estos importantes libros están en idioma inglés, lo que favorece el cumplimiento del plan director de idioma.



Los folletos de orientación para el estudio Independiente, son materiales con la intención de hacer más fácil la orientación en otros textos de los contenidos tratados en clase y constan de cientos de problemas de aplicación a otras asignaturas recibidas durante el curso.

Conclusiones

Este trabajo nos permitió organizar la documentación de la disciplina en formato web, cumpliendo con los objetivos propuestos por el colectivo de autores al proponerse este trabajo (Horta, M.):

- Logrando la interdisciplinaridad entre las asignaturas recibidas por los estudiantes de primer y segundo año de la carrera de Ingeniería Industrial con la disciplina Matemática para Ingenieros Industriales.
- Los estudiantes de esta especialidad cuentan con materiales que apoyan su estudio individual, conteniendo gran cantidad de ejercicios de aplicación de la asignaturas, y con la posibilidad que da esta técnica, de seguir enriqueciendo estos sistemas de tareas e interrelacionar cada contenido con contenidos de otras asignaturas que están disponibles en la red y que tienen relación con los contenidos matemáticos que se abordan en cada asignatura de disciplina.
- Las instancias superiores puedan controlar y evaluar el trabajo realizado en la disciplina accediendo a ésta a través de la Intranet de la Universidad.
- Los profesores noveles y otros profesores interesados al respecto, poseen un material de consulta de manera que puedan apreciar el trabajo metodológico del colectivo, que los ayude en su formación profesional.

Referencias bibliográficas

Álvarez de Zayas, C. M. (1999). *Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil amplio.* Las Villas. Editora Universidad Central de Las Villas.

MES. (1998). *Resolución 41*

Revista Giga Interactiva, No 2, 2000.

Revista Giga Interactiva, No 3, 2000.

Horta, M. Las disciplinas de Matemática en la ingeniería. Libro con formato Web, 2002, Universidad de Matanzas.

Red de Investigadores en Matemática Educativa: una experiencia en Educación a Distancia

Gabriela Buendía Abalos, Francisco Cordero Osorio y Liliana Suárez Téllez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN, México
buendiag@hotmail.com fcordero@mail.cinvestav.mx lsuarez@mail.cinvestav.mx

Resumen

La educación a distancia es, innegablemente, una demanda social que actualmente está en boga en los sistemas educativos del mundo, tal vez favorecida ampliamente por los modernos medios electrónicos de comunicación y de información. Diversas orientaciones de estudio atienden este hecho: La matemática educativa tendrá que definir su responsabilidad al respecto. En ese sentido, se presenta a continuación una visión, tomada de una experiencia, que tiene la finalidad de identificar los aspectos fundamentales que ayudarán a precisar el objeto de estudio. Tal visión consiste en señalar que la noción de Red, sui generis de las prácticas en esos medios, sea el escenario funcional donde se darán las situaciones de transformación del conocimiento, donde se entenderá al fenómeno didáctico y donde tendrán lugar las prácticas, las resignificaciones, los argumentos y las interacciones.

Introducción

Las experiencias de educación a distancia son diversas y datan en diferentes épocas. Por ejemplo, las caracterizaciones más comunes consisten en considerarla como un medio de información e instrucción versátil, como una práctica educativa que atiende o busca la masificación, o como un sistema educativo que depende de la tecnología (Montiel, 2001). Los escenarios donde se han llevado acabo las experiencias han sido de corte presencial, en otros momentos por medio de aulas virtuales y otros organizados por redes (Cordero, 2001b), (Benavides, 2002) y (Horta, et al, 2002). Sin embargo, a pesar de las diferentes experiencias, la educación a distancia está colocada en el plano utilitario, tal vez por su demanda social, para ofertar un servicio.

La matemática educativa como campo de conocimiento tendrá que definir su responsabilidad ante este hecho social. Tendrá que colocar a la educación a distancia en el plano funcional para explicar las situaciones de transformación del conocimiento y así identificar los nuevos fenómenos didácticos. La tarea no es simple, para ello se requiere de una organización y de establecer su función.

En este sentido se presenta una visión que marca las pautas para llevar acabo dicha tarea. Para lograr una explicación de ésta, se convino en tratar tres aspectos: Primero contextualizar la noción de Red como organización y visión, en segundo lugar, ejemplificar la noción de Red por medio de una experiencia de postgrado en educación a distancia, destacando el papel de la tecnología y el contenido matemático en la Red. Y tercero, señalar indicadores para hacer labores de incidencia.

Red, organización y visión

Uno de los objetivos fundamentales de todo sistema educativo en el mundo es la formación de cuadros capaces de responder a las demandas de sus sociedades. Las formas para lograrlo dependen de los marcos culturales, de las prácticas sociales y de las historias de las instituciones. Es por eso que cada sociedad tiene que reconocer sus condiciones, recursos y posibilidades, establecer sus estrategias, medios y escenarios, formular acciones y teorizar (hacer conocimiento) para trazar orientaciones y entender lo que se desarrolla. Así, la formación de cuadros tendrá que estar inmersa en campos del conocimiento que cubran todos los factores de desarrollo humano como son las ciencias exactas, humanas, de la salud, de la educación y de las artes. Es por ello, que dichos campos de conocimiento tendrán que hacer su propia organización que refleje su pensamiento, que formule su intención, su dirección y que alcance el consenso requerido por los grupos que la componen.

En este sentido se quiere ver, por un lado, a la matemática educativa como el campo de conocimiento y por el otro lado, a la educación a distancia como uno de sus objetos de estudio. La responsabilidad de la matemática educativa es identificar los fenómenos didácticos y los escenarios donde éstos suceden.

La conformación de grupos de investigación es fundamental en dicha tarea, pues son éstos quienes darán las líneas disciplinarias. Esto conlleva la necesidad de formular una escuela de pensamiento que permita el desarrollo disciplinario de la matemática educativa. Tendrá como función incidir tanto en la matemática educativa como en el sistema educativo y la conformación de un modelo de reproducción de la visión teórica, a través de un Programa de extensión que articule una red de grupos de investigadores capaces de llevar acabo las tareas de incidencia y de reproducción. Sin embargo, dichos grupos deberán ser comunidades de investigadores y profesores organizados a través del principio de la autogestión el cual favorece el reconocimiento de las comunidades, la negociación del conocimiento y la reconstrucción de significados a través de relaciones interactivas y dinámicas para alcanzar los consensos que ayudarán a desarrollar y evolucionar la disciplina (Cordero, 2001b).

La educación a distancia en su interpretación más genérica quiere decir que las intervenciones en los procesos para que se den las formaciones de los cuadros son a distancia. En ese mismo sentido su escenario pudiera ser la Red, pues por un lado, refleja la naturaleza que le compete a la distancia y por otro, es el plano donde se darán las intervenciones de los procesos de transformación, así como el desarrollo de las prácticas de los grupos organizados para generar conocimiento.

Tal concepción de Red puede ir encaminada por los siguientes aspectos: considerar la cooperación como ingrediente sustancial de la investigación, la red deberá contar con una organización acordada y un mecanismo de coordinación que impulse las interacciones de la comunidad de la red hacia un cierto objetivo común, deberá considerar investigadores individuales, grupos de investigadores e instituciones (Cordero, 2001b).

En ese sentido, la red busca conexiones estables o permanentes entre varios puntos y busca que esos puntos estén conectados entre sí por vínculos que irán en muchas direcciones, estableciendo un sistema complejo de interacciones (Conacyt, 1998). Es así, como el pensamiento de la matemática educativa se desarrollará. Entonces, se requiere acordar un complejo conjunto de programas y políticas para garantizar la integración de las diferentes regiones. El definir problemas de relevancia común y concordar maneras de enfrentarlos, el forjar grupos de trabajo y reflexión, posiblemente es un camino que hará avanzar hacia un desarrollo acelerado e incidir tanto en la disciplina como en el sistema educativo.

Una experiencia: la tecnología y el contenido matemático en la Red

La experiencia consiste, en primer lugar, en la creencia de formar cuadros de pensamiento capaces de responder ante los fenómenos didácticos de la matemática. En segundo lugar, se cree que estos fenómenos son de naturaleza social y en consecuencia el tercer aspecto, obliga a formular una tesis de pensamiento: la base de la reorganización del discurso matemático escolar no está en el desarrollo de las nociones, sino en el desarrollo de las prácticas sociales que han permitido a los grupos humanos generar el conocimiento matemático. A esta tesis se he convenido en llamarle aproximación socioepistemológica (Cantoral, y Farfán, 1998) y (Cordero, 2001a).

En el marco de estos tres aspectos se han construido Centros de Investigación en Matemática Educativa (Cimate) en México, dirigidos por grupos de investigadores que se formaron al cobijo de la aproximación socioepistemología (Cordero, 2001). Las actividades principales de estos centros es la formación de recursos humanos a través de programas de postgrados. Las investigaciones realizadas por estos centros, en general, están acotadas por los trabajos de tesis que cada uno de estos programas demanda. En algún sentido la socioepistemología aparece reflejada en los diferentes proyectos de tesis, en los diferentes programas de postgrado y en las producciones en la investigación (Véase, por ejemplo, Farfán, et al, 2001). Al hacer una síntesis de las temáticas planteadas en estas actividades se puede identificar diversas líneas de investigación que componen un panorama amplio: procesos de construcción social del conocimiento matemática avanzado, funcionamiento cognitivo y social del conocimiento matemática avanzado, diseño y estudio de la ingeniería didáctica para la matemática avanzada, construcciones mentales y modos de pensamiento de la matemática avanzada, construcción de recursos de la matemática para la ingeniería y educación a distancia.

Este panorama amplio aparece, en mayor o menor medida, en todos los Cimates, es decir, en diferentes regiones del país, a través de diferentes culturas e instituciones y, por ende, en diferentes demandas del sistema educativo. La pertinencia de las diferentes líneas de investigación que afrontan las demandas de la problemática ha requerido de una organización que articule las actividades de los Cimates, que determine las direcciones o rumbos a seguir sin perder la autogestión que demande el colectivo, que señale las intenciones en contraparte de las inercias y que alcance consensos.

Para lograr mayor claridad al respecto, a continuación se desarrolla un ejemplo que muestra cómo un curso de postgrado a distancia es sostenido por la tesis planteada y hace los recortes necesarios del contenido temático para alcanzar la coherencia del pensamiento planteado. Para ello se considera el papel de lo tecnológico y del contenido matemático en la Red.

La tecnología en la Red

De acuerdo con el propósito de constituir a la red como una organización independiente de participación que apunte hacia la autonomía, se ha fomentado el uso de una plataforma electrónica. Las formas de organización y comunicación de los integrantes de la Red han evolucionado con el uso de esta tecnología.

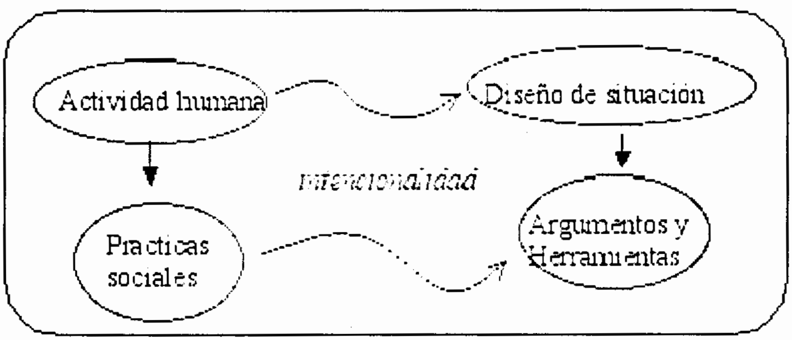
La plataforma llamada BSCW, Basic Support for Cooperative Work, está compuesta por un conjunto de programas que conforman un espacio de trabajo compartido a través de una interfase en Internet. En un primer nivel, permite la organización a través de la integración del correo electrónico, listas de correo, agendas de trabajo, foros de discusión y un espacio para la administración y el depósito de materiales. En otro nivel, proporciona un mecanismo de control de versión de los distintos documentos e interacciones que permite saber para cada versión quién la ha realizado, cuándo y en qué ha participado.

Con estas herramientas tecnológicas se ha logrado construir zonas de trabajo para tareas tales como la gestión de cursos distancia, el apoyo a cursos presenciales, un espacio para intercambio de documentos de interés nacional, comunicación entre directores y tesistas, el dictado de seminarios a distancia. Se ha logrado poner a disposición del entorno docente y científico alternativas que superan las limitaciones de tiempo y de distancia.

De forma particular, esta tecnología se usa en los cursos y seminarios a distancia de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Para instrumentar el curso "Naturaleza del Pensamiento Matemático" se aprovechó la plataforma para presentar los objetivos y los materiales, y organizar el trabajo de los estudiantes en buzones para depositar sus lecturas, discusiones, y dudas. Se aprovechó la herramienta para vincular las diferentes partes del sitio logrando buena funcionalidad. Una de las características de este curso fue la estrecha comunicación que se logró entre estudiantes y profesores en relación con los propósitos del curso, el desarrollo de las actividades y la retroalimentación continua. En términos generales, se contribuyó a generar una cultura donde surgen naturalmente una valoración de la escritura y de la lectura como formas de comunicación y apropiación de conocimientos.

El contenido matemático

La socioepistemología, como aproximación teórica, busca desarrollar las prácticas sociales ya que es en la actividad que desarrollan los individuos donde se reconstruyen significados. En esta actividad se consideran las herramientas que utilizan y los argumentos que ponen en juego. Una vez que se reconoce a la reconstrucción de significados como fuente de construcción de conocimiento, es necesario analizar cómo se hacen presentes esas prácticas sociales en la didáctica. Esto fomenta la creación de una escuela de pensamiento que vive en la Red.



Para el curso de Naturaleza del Pensamiento Matemático, se diseñaron tres situaciones cuyos contenidos matemáticos fueron la asintoticidad, la linealidad del polinomio y la periodicidad de las funciones. La base del diseño la constituye la epistemología del concepto, en particular, elementos extraídos de la actividad que realiza el humano en contextos interactivos alrededor de la construcción de dicho saber. Así, los recortes epistemológicos realizados en el contenido temático permiten alcanzar coherencia en el pensamiento planteado.

En la situación de asintoticidad, se parte de la existencia de un obstáculo epistemológico bajo el cual sólo se aceptan comportamientos asintóticos en los que una recta es tangente a la curva en un punto en el infinito. Se proponen actividades con relación a criterios de comparación entre gráficas con comportamientos asintóticos favoreciendo el reconocimiento de patrones algebraicos y geométricos más generales. El conocimiento del estudiante acerca de estos comportamientos se reorganiza y se puede, entonces, construir una nueva representación de lo que es una asíntota. De esta manera, se reconstruyen significados alrededor de la forma y rapidez del comportamiento asintótico.

La situación de linealidad del polinomio tiene la intención de mostrar a la parte lineal como algo intrínseco del propio polinomio que determina su comportamiento. Se propone en primera instancia, analizar el comportamiento en operaciones del tipo $f(x)$ + *recta* partiendo del caso donde $f(x)$ es una parábola y luego una cúbica. El estudiante resignifica la linealidad de un polinomio cuando logra establecer dicha propiedad como argumento en al describir su comportamiento gráficamente.

En el caso de la periodicidad, la situación que se plantea permite mostrar a la predicción como un argumento para construir lo periódico. El alumno, se enfrenta en primer término a la descripción de movimientos regulares tanto periódicos como no periódicos. Posteriormente, se le pide predecir estados futuros en dichos movimientos. En ese momento, se provoca una reconstrucción de significados acerca del tipo de regularidad que presenta un movimiento, lo cual permitirá la construcción de conocimiento alrededor de lo periódico. Lo que motiva esta resignificación es la predicción como práctica.

Es así como la reconstrucción de significados es el eje para la reorganización de la obra matemática. Esta es la base que permite crear una escuela de pensamiento cuando se trabaja en un entorno de Red.

Tareas de incidencia

En el marco del planteamiento anterior importa cuestionar cuál es la relación entre educación a distancia y la Red. La formación de cuadros es lo que las relaciona, pero para sostener dicha relación se requiere de la incidencia y de la reproducción de pensamiento que hace posible la formación.

Entonces, se deberá proponer una serie de acciones y propósitos que pudieran ayudar a conformar un Programa (Cordero, 2001) que haga posible la incidencia y la reproducción de la visión socioepistemológica en la Red como una fuente que permitirá el desarrollo de la disciplina.

El Programa deberá permanentemente vigilar los siguientes aspectos: consolidación de los grupos de investigadores, formación de recursos humanos y consolidación de la red.

Algunos de los objetivos del Programa pudieran ser: coordinar acciones de la red, generar un mecanismo de vinculación y reflexionar sobre posibles proyectos conjuntos.

Algunas intenciones: la red podría asesorar a las instituciones educativas, realizar estudios prospectivos para analizar el avance de la disciplina en el mundo y su efecto en la región, desarrollar proyectos conjuntos en temas claves para el futuro del sistema educativo y crear un fondo que apoye las actividades interactivas que surjan en la misma red.

Es por ello que se señala a la Red como uno de los escenarios principales de la educación a distancia donde se dan las situaciones de transformación del conocimiento, las actividades y prácticas, las resignificaciones, las argumentaciones e interacciones. Es, de acuerdo a esta reflexión, el sitio idóneo para entender a los fenómenos didácticos de la educación a distancia.

Referencias bibliográficas

Benavides, L. (2002). La capacitación a distancia: generador de zonas de desarrollo próximo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica. Vol. 15, Tomo 2, 1293-1298.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon Número monográfico*. Revista de la SAEM (Thales). Núm. 42, Vol. 14(3) España, 353-369.

Conacyt (1998). La ciencia en la integración latinoamericana. Ciencia y Desarrollo, Serie *Encuentros*, primera edición.

Cordero, F. (2001a). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* International Thomson Editores, Vol. 4, Número 2, 103-128.

Cordero, F. (2001b). La Incidencia de la socioepistemología en la red de investigadores en matemática educativa. Una experiencia. *Serie: Antologías Número 1.Programa Editorial: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa* (Cimate), 99-124.

Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G. y Castañeda, A. (2001). Educación a distancia: una experiencia en matemática educativa. Serie: *Antologías* Número 1.Programa Editorial: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa (Cimate), 293-312.

Horta, M., Marcet, M, Martinez. R., Horta, N., Herrán, M. y Garzón, W. (2002). Una experiencia, utilizando las NTIC, en el estudio individual de alumnos d cursos semipresenciales de Matemáticas para Ingenieros Industriales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica, Vol. 15, Tomo 2, 1299-1304.

BSCW. http://bscw.gmd.de

Montiel, G. (2001). Un estado del arte de la investigación en educación a distancia. Serie: Antologías Número 1.Programa Editorial: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa (Cimate), 213-224.

La informática en la docencia

Nancy Horta Chávez y Milagros Horta Navarro
Universidad de Matanzas. Cuba
nancy.horta@c.umcc.cu
Nancyhorta45@yahoo.es

Resumen

Debido a la diversidad de software profesionales, con vista a ser utilizado en la docencia, que se cuenta en la actualidad y los disímiles criterios que se dan sobre las ventajas o desventajas de uno u otro sin que se haya llegado a un consenso, y la necesidad de adiestrar al estudiante en la utilización de software que le sean útiles durante su vida como estudiantes y en su futura vida profesional, nos dimos a la tarea de tratar de escoger el o los más adecuados para impartir matemática para ciencias técnicas, a partir de determinados parámetros. En la parte experimental del trabajo investigativo, tomo como muestra dos grupos de estudiantes de Ingeniería Industrial durante dos cursos.

Introducción

El empleo de las nuevas tecnologías de la Informática y las Comunicaciones (NTIC) se inscribe como uno de los temas de más reciente prioridad manifestados por el hombre, en la actualidad, a escala mundial, es por tanto para nosotros, los profesores un imperativo que no se puede soslayar, el hecho de llevar esta tecnología a la docencia con la idea de elevar la eficiencia de la dirección del proceso docente y en la búsqueda por aportar a la enseñanza una base más científica y hacer más productiva la educación, eficiencia en el saber hacer, con una adecuada dosificación y programación de la enseñanza.

El proceso de la introducción de estas técnicas en la enseñanza no es sencillo pues no es un problema esencialmente tecnológico, este tiene que estar regulado fundamentalmente por requerimientos, características y leyes que permitan insertarse en los procesos educativos.

Como parte de esta tecnología están los software educativo, creado para ser utilizados en la docencia, pero la diversidad de ellos, los disímiles criterios que se dan sobre las ventajas o desventajas de uno u otro sin que se haya llegado a un consenso, y la necesidad de adiestrar al joven en la utilización de software que le sean útiles durante su vida como estudiante y en su futura vida profesional, nos ha llevado a realizar este trabajo, donde pretendemos determinar los software mas adecuados a este fin.

Teniendo en cuenta algunos requerimientos que consideramos, después de estudios realizados, debe tener un software dedicado a la enseñanza fue seleccionado un grupo de ellos con los cuales se pasó entonces a la parte experimental del trabajo investigativo, tomando como muestra dos grupos de estudiantes de Ingeniería Industrial durante dos cursos.

Desarrollo

En Cuba es cada vez más creciente la disponibilidad de máquinas computadoras lo que hace posible satisfacer la necesidad de determinar las condiciones óptimas de proyección y operación de las instalaciones industriales, determinantes en la calidad y eficiencia de los procesos productivos lo cual justifica la necesidad de incluir cada vez más en nuestra asignatura métodos de cómputos.

Estas asignaturas deben enfocarse hacia la resolución y formulación de problemas, luego, debe garantizarse que los estudiantes dominen las técnicas manuales y métodos computacionales, haciendo uso fundamentalmente de programas profesionales.

A partir de un análisis de los diferentes problemas que resuelve el Ingeniero Industrial, se seleccionaron un grupo que necesitan de herramientas numéricas para su solución.

Dentro de la Informática Educativa (I E) es de interés tratar lo relacionado con la enseñanza asistida por computadoras (EAC) y plantearse entonces, si utilizar la computadora como enseñanza o como medio de programación.

Existen diferentes enfoques de EAC, considerando que la resolución de problemas se puede considerar como la más amplia de aprendizaje y se espera, como norma, que los alumnos desarrollen estas técnicas mediante un proceso poco definido de ejemplificación y ejecución.

En este caso el aprendizaje está individualizado y el alumno crea un propio programa, lo cual le ayuda al desarrollo de técnicas generales de resolución de problemas y el estudiante empieza a concebir los errores como una fuente de aclaración y no como motivo de desesperación, la tendencia de este enfoque es el cognoscitivo de la enseñanza y el aprendizaje donde se conciben a los ordenadores como dispositivos para elaborar sistema de enseñanza que tratan al alumno como un ser que piensa y participa.

Los Software dedicados a la enseñanza deben incluir cuatro actividades fundamentales:

- Presentar la información.
- Guiar al estudiante.
- Practicar.
- Evaluar el aprendizaje.

A partir de aquí y después de realizar un estudio de los tipos de programa de instrucción basada en computadoras consideramos que los que cubren estos aspectos son:

- Tutoriales.
- Entrenadores.
- Simuladores.
- Juegos.

Tutoriales

Se encarga de presentar la información y guiar al estudiante en su aprendizaje inicial, es apropiado para presentar la información aprender reglas y principios, así como estrategias de solución de problemas.

Entrenadores

Son usados fundamentalmente para desarrollar la práctica. En esta fase se desarrolla la fluidez y la soltura requerida.

Simuladores

La simulación es una poderosa técnica que enseña sobre algún aspecto del mundo, imitándolo o replicándolo. Los estudiantes no solo se motivan por la simulación sino que también aprenden interactuando con ella de manera similar a como pudieran hacerlo en situaciones reales. En casi todos los casos, en la simulación también hay simplificación de la realidad al omitir o cambiar detalles.

El propósito es ayudar al estudiante a construir un modelo mental útil de parte del mundo, darle una oportunidad de probarlos sin riesgos y eficientemente y que aprenda realizando actividades en un contexto similar al real.

Juegos Instructivos

Los juegos al igual que la simulación proporcionan un medio ambiente para facilitar el aprendizaje, sin embargo, la característica distintiva de los juegos es que casi siempre proporcionan al estudiante un reto entretenido, con un componente instructivo.

En los Tutoriales Inteligentes es importante la representación del conocimiento a los cuales se les pide que además del conocimiento del dominio, tengan la experticidad en la enseñanza para manejar dicho dominio de acuerdo a los intereses y competencias de los estudiantes. Es precisamente, en esto, donde el método pedagógico es útil para los ingenieros del conocimiento con el fin de conocer los procesos cognitivos de los expertos. Además la didáctica se ocupa de la organización del conocimiento y su comunicación,.y esto también puede ser utilizado en la IA.

Basado en esto nos dimos a la tarea de clasificar cada uno de los programas de que dispone la UM.

Contamos con un programa específico de carácter docente, elaborado en nuestro departamento, diseñados de tal forma que permiten un desarrollo exitoso de los siguientes aspectos.

- La motivación de los estudiantes.
- Atención a las diferencias individuales.
- Control individual de los errores cometidos.
- Utilización en las evaluaciones.
- Aplicación y cumplimiento del sistema de principios didácticos.

De acuerdo a su diseño este programa puede clasificarse como un entrenador y ser usado para el estudio individual y autopreparación de los estudiantes, lo cual facilita la consolidación de lo estudiado.

Dentro de los programas matemáticos con que cuenta la UM tenemos: Mathematica, Derive, MatNum, TK Solver, MatLab, PolyMath.

- **Características del programa Mathematica**

La facilidad de su uso en todos sus entornos junto con la potencia y la capacidad numérica, gráfica y simbólica ha hecho que muchas de las Universidades del mundo escojan Mathematica para llevar a cabo la revolucionaria idea de los laboratorios matemáticos. En ellos un alumno de los primeros cursos puede, con un ordenador, relacionar, practicar y profundizar en aspectos matemáticos difíciles de tratar de manera teórica.

Algunas posibilidades del Mathematica son:

- Se pueden teclear operaciones simples o muy complicadas, devuelve resultados de forma análoga o como lo hace una simple calculadora de bolsillo.
- Permite realizar muchas operaciones que normalmente requieren la utilización de

funciones, o procedimientos especiales.

- Permite trabajar con expresiones simbólicas. Así, pueden sustituirse valores de la variable X no numérica, de forma tal que el sistema entiende y opera en forma simbólica.
- Una potente herramienta de cálculo simbólica.
- Permite dibujar en dos o tres dimensiones. Soporta animación.
- Lenguaje de programación de alto nivel.
- Incluye texto, gráficos, sonido, animación, etc.
- Otros programas pueden comunicarse con Mathematica, enviarle tareas y recibir resultados de las tareas realizadas.

En la U.M utilizado solo para la investigación y la enseñanza postgraduada, lleva mucho espacio en memoria para poder accionar y no se cuenta con el hardware necesario para ser usado en pregrado.

Características del programa Derive

Es un programa sencillo de usar y resulta ideal para principiantes.
Las nuevas versiones de Derive (Derive 3.0 y Derive XM,Derive for Windon) incorpora un extenso número de mejores más acorde con las plataformas hardware existentes hoy día en el mercado. La versión XM permite el uso y hasta 4 gigabytes de memoria extendidos para la resolución de problemas de tamaño profesional. También destaca la incorporación de instrucciones de pleno soporte de periféricas de impresión para el redireccionamiento de fórmulas. Ahora en su versión sobre Windon es mucho más aplicable a nuestros intereses. Este Software es fundamentalmente simbólico y tiene la posibilidad de programación de diferentes métodos.

Características del programa MatLab

Es un paquete orientado a científicos e ingenieros aunque inicialmente se trataba prácticamente de un análisis numérico, las nuevas versiones han ampliado sus capacidades en el tratamiento del Álgebra Matricial, la matemática simbólica y la extensión a las diferentes ramas de la ingeniería. Actualmente combina la potencia de una moderna interfaz de usuario con la posibilidad de crear gráficos en dos o tres dimensiones y la inclusión de una sofisticada biblioteca de técnicas o análisis matemático. Además los gráficos orientados a objetos permiten visualizar complejas superficies en tres dimensiones.

Entre los sistemas de cálculo simbólico, numérico y gráfico de la actualidad, uno de los más potentes es el MatLab.

MatLab es un sistema general de Software para la matemática y otras aplicaciones. Es usado por muchos investigadores, ingenieros y analistas, así como por estudiantes universitarios. Las aplicaciones de MatLab comprenden la mayoría de la áreas de la ciencia y tecnología. MatLab se apoya en las bibliotecas de programas Maple V, siempre que sea necesario acudir a cualquier comando o función de Maple desde MatLab se utiliza el comando Maple seguido de la Sintaxis correspondiente en el entorno Maple.

Características del programa TK Solver

Fue diseñado a mediado de la década del 80 siendo el primer Software dentro de la categoría de resolvedores de ecuaciones que sale al mercado. Por sus características es muy adecuado al trabajo ingenieril.

Características del programa PolyMath

Este Software es diseñado a principio de la década del 80 por Shackman y generalizado por CACHE Corporation para el uso de los estudiantes de ingeniería en la solución numérica de los problemas que se presentan en las diferentes asignaturas de la carrera.

Características del programa MatNum

A principio de la década del 90 este Software fue elaborado por ARTEDU, el mismo está siendo usado en la impartición de matemática numérica en varias especialidades de nuestro país.

Aplicación de los programas anteriores a la solución de problemas matemáticos.

Antes de realizar cualquier comparación que implica cálculo, es recomendable el análisis a partir de las características anteriores y teniendo en cuenta que cualquier Software que se vaya a utilizar debe cumplir con los siguientes requisitos:

1- Ser asequible a los estudiantes

2- Permitir la solución de problemas modelados por:

- Ecuaciones diferenciales.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Series.
- Ecuaciones integrales, diferenciales e integrodiferenciales.
- Determinación de raíces.
- Interpolación.
- Integración.
- Derivación.
- Búsqueda unidimensional de extremos.
- Sistema de ecuaciones algebraico lineales.

A partir de estos requerimientos se determinó que los programas antes mencionados respondían a estas exigencias, el Mathematica y el MatLab con algunas limitaciones dada la gran capacidad que necesitan en disco duro para ser instalados, así como que no pueden trabajar con menos de 8 MB de RAM.

Parte experimental de la investigación

Se comenzó la experiencia en el curso 2000-2001 y se hará extensivo al curso 2001-2002 se tomó como muestra dos grupos de Ingeniería Industrial, los cuales cuentan con 35 estudiantes en su totalidad.

Se realizó un análisis por estudiante teniendo en cuenta:

- Promedio obtenido en la enseñanza media.
- Resultados obtenidos en las asignaturas Matemática I y Matemática II.
- Resultados obtenidos en la asignatura computación.
- Interés por la computación de forma individual.
- Interés por la asignatura Matemática.

A partir de estos parámetros se formaron grupos de estudiantes, 6 en total, tres en cada grupo, que de forma homogénea contara con estudiantes con estas características y el resto, estudiantes medios que no se destacaron ni en una ni en otra.

Cada grupo trabaja con un Software diferente lo que ha requerido de un buen número de horas extras por parte tanto del estudiante como de los profesores para el adiestramiento, a partir de un manual de ayuda y lo más importante, horas ante el computador.

Los problemas planteados para resolver son los mismos para cada grupo trabajo.

El 54,2 % (19 estudiantes) tienen buenos resultados en Matemática y Computación por lo que los grupos fueron formados con al menos 3 estudiantes de estas características en cada uno. Ellos tienen la responsabilidad máxima en el proceso de aprendizaje del resto de sus compañeros y en la preparación para el uso del Software que le corresponde.

Después de cada clase, dedicamos un tiempo para intercambiar impresiones y recoger información sobre el uso de los software, atendiendo a:

- Si resuelve el problema planteado.
- Como se presenta la información.
- Como se piden los datos.
- Si se consideran guiados.
- Si los motiva.
- Se controlan los errores cometidos.
- Si pueden obtener una evaluación.
- Forma de dar la solución.
- Tiempo dedicado a cada problema.
- Necesidad de conocer el algoritmo de trabajo.
- Criterios generales.

Los resultados se recogen sistemáticamente con el fin de poder escoger un Software que responda a los intereses de este proceso docente-educativo donde su interés primario es utilizar el adecuado con la mayor eficiencia posible.

Toda la información recogida se va procesando sistemáticamente con vista a poder llegar a determinar qué softwares resultan los más adecuados, teniendo en cuenta que nuestro propósito es utilizar el más adecuado con la mayor eficiencia posible y que cumpla con los objetivos que nos hemos propuesto.

Por no concluir la experiencia hasta el 2001, no podemos dar conclusiones definitorias pero si nos atrevemos a plantear algunas conclusiones parciales.

Conclusiones

1. Se ha abierto paso a un nuevo enfoque de trabajo en el campo des Ingeniarías, donde se requiere del empleo de las técnicas de computación digital combinada con los métodos numéricos avanzados tanto para la descripción o estudio de fenómenos como para la simulación y optimización de los mismos, de modo que garantice una eficiente explotación de las instalaciones y la calidad requerida en la producción final, luego

es necesario utilizar .estas técnicas en la docencia con vistas a familiarizar al estudiante desde los primeros años con ellas.

2. El desarrollo de algoritmos computacionales requiere que los principios matemáticos jueguen un papel importante no solo para resolver los problemas sino también para formularlos.
3. El procesamiento y análisis de la información, el control integral de la calidad en su acepción más amplia, resolver con precisión los problemas técnicos que se presentan en su esfera de acción, la obtención de modelos matemáticos, el desarrollo de algoritmos de solución y de estrategias de simulación para el análisis de situaciones propias del ejercicio de su profesión que le permitan arribar a las mejores soluciones desde el punto de vista técnico económico requiere de un profesional con una sólida formación en las técnicas de computación.
4. Es el profesor desde cualquier especialidad el encargado de hacerle ver al estudiante la necesidad de dominar estas técnicas.
5. Consideramos que estamos aportando nuestro grano de arena a estos requerimientos del campo de las ingenierías.

Referencias bibliográficas

Barrera E. et al. (1990). Aplicación de un paquete de programas sobre Métodos Numéricos, *Revista Cubana de Educación Superior*, 10(3), 235-245.

Cuttip, B. M y Shacham, B. M (1994). Polymath. Numerical Computation. Package New Releace. Versión 3.0 CACHE, *News, Nº 3.*

Cheshire, F. D. *The Effect of Learning Computer Program Obstracts International.*

González A. et al. Enfoques de la enseñanza asistida por computadoras (E.A.C.). *Curso de Informática Educativa de CESofte* (Centro de estudios de software para la enseñanza).

Hernández R. et al. (1994). Forma novedosa de enseñar los métodos numéricos, *Revista Cubana de Educación Superior*, 14(2), 86-93.

Martínez, H. J. *Impacto del Computador en la enseñanza de la matemática*, Lectura.

Pérez, C. (1996). *Matemática Informatizada con MatLab*, RA-Ma. Editorial 6, Madrid.

La numerización de los fenómenos

Jaime L. Arrieta Vera
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.
j_arrieta@hotmail.com

1. Resumen

Aquí se reporta el diseño y puesta en escena de una secuencia bajo una perspectiva socioepistemológica. En la secuencia la estructuración discursiva entre las herramientas, los modelos y las realidades viene a ser central. El otro eje gira entorno a la tesis de que en el ejercicio de ciertas prácticas sociales usando herramientas es donde aparecen, se estructuran y se movilizan como argumento ciertas nociones matemáticas. En este caso alrededor de las prácticas que hemos llamado de "numerización de los fenómenos" se construyen como herramientas lo lineal, lo cuadrático y lo exponencial.

Introducción

La investigación que reportamos es parte de la investigación doctoral que desarrollo bajo la dirección de los doctores Ricardo Cantoral y Francisco Cordero. En este escrito se informa sobre el diseño y la puesta en escena de una secuencia bajo la perspectiva socioepistemológica.

La aproximación teórica que guía la presente investigación, es la perspectiva que desarrolla el grupo de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, que actualmente denominamos aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa, sintéticamente conocida como "Socioepistemología".

En un intento por presentar a esta perspectiva de forma sucinta Cantoral y Farfán (2001) propone la siguiente descripción.

"De esta forma la Socioepistemología hace énfasis en la naturaleza social en la actividad de la construcción, por parte de los actores sociales en contextos sociales concretos, de sus conocimientos y sus realidades. Esta énfasis en lo social, trastoca el sentido tradicional que se le ha otorgado a las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica".

Tres características son fundamentales en la perspectiva con la que se aborda la presente investigación.

1. La primacía de las prácticas sobre los objetos. Es en el ejercicio de las prácticas donde los artefactos son utilizados, son utilizados con intenciones situadas en un contexto, es decir, se interactúa con herramientas.
2. El carácter situado de dichas prácticas. El contexto viene a ser una componente inseparable de las prácticas. Esta inseparabilidad entre contexto y práctica está en contraste con el papel de las condiciones que facilitan o alteran las acciones.
3. El carácter discursivo en la construcción social del conocimiento, las interacciones. Los humanos participan en el mundo construyendo sus conocimientos, sus realidades y sus herramientas, interactúan con el mundo y con otros seres humanos.

De esta manera las secuencias que hemos diseñado no tienen su centro en los objetos *matemáticos en sí, sino en prácticas sociales a desarrollar en contextos argumentativos. Nuestra intención es la de proponer contextos argumentativos donde los actores, estudiantes y profesor, reproduzcan prácticas en donde se combina la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática.*

La elección de las prácticas a reproducir es guiada por dos criterios: son prácticas que se ejercieron en contextos históricos argumentativos y son prácticas que se ejercen, actualmente, por ciertas comunidades.

Le hemos llamado "***la numerización de los fenómenos***" a las prácticas que parten de la recolección de datos numéricos de un fenómeno para construir modelos numéricos y se toma como central su uso. Estas prácticas ponen en el centro el uso de modelos numéricos.

Así, las prácticas que se pretenden reproducir no sólo se han ejercido históricamente, sino que se ejercen actualmente en el plano profesional y de los problemas cotidianos, esta práctica es ejercida, por ejemplo, por ingenieros bioquímicos o economistas al utilizar los datos para predecir el comportamiento de un fenómeno.

A partir de la interacción con el fenómeno los estudiantes identifican las variables que intervienen en él, organizando los datos obtenidos en una tabla numérica. Se identifican las características distintivas de esta tabla y se efectúan predicciones con esta. Las formas de predicción serán de diversas formas y nos interesa privilegiar formas de predicción que nos permitan obtener un modelo algebraico (fórmula algebraica). Punteando los datos de la tabla e identificando las características de la gráfica obtenemos un modelo gráfico del fenómeno, hacen predicciones con la gráfica y discuten la validez y aplicación del método empleado. Por último, en esta secuencia, identificando los parámetros algebraicos con los geométricos establecemos una relación entre las fórmulas y las gráficas.

El contexto histórico argumentativo

Una forma de proceder, presente en los siglos XIV, XV y XVI para construir versiones de los hechos, es lo que llamamos inducción, y por inducción no nos referimos aquí a la inducción matemática, sino a la práctica que permite "anticipar" a partir de un fragmento de un fenómeno su comportamiento global.

Mediante la información y la experimentación en una cierta área puede "adivinarse" lo que puede ocurrir en una región nunca explorada por nadie. Se trata de algo un poco distinto de una exploración normal porque existen suficientes pistas en las zonas descubiertas para imaginar cómo será el territorio por descubrir.

Así, Newton, ante una situación que conocía de forma incompleta, fue capaz de "adivinar" las leyes agrupando ideas muy cercanas a hechos experimentales; la distancia entre las observaciones y las verificaciones no era muy grande.

De alguna forma Wallis practicaba la inducción informal o científica. Esto es, él visualizaba un patrón, verificaba una serie de ejemplos y después asumía que su regla era valida en tanto "no encontrara una sospecha por la que podía fallar" (Nunn, 1909-1911, citado en Dennis, D. y Confrey, J., 2000).

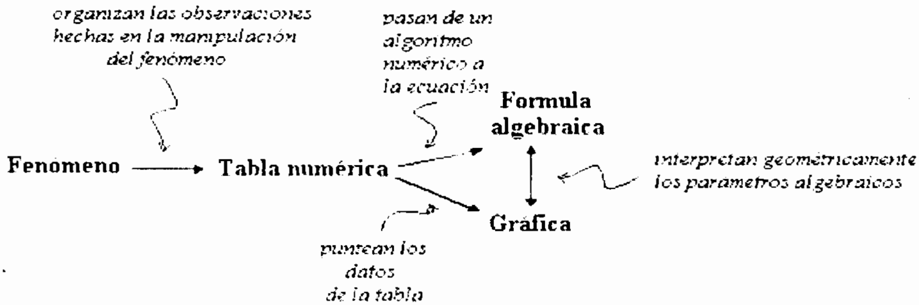
Wallis sostenía que él estaba tratado de desarrollar una teoría del conocimiento que fuera superior al análisis lógico de resultados conocidos. Afirmó que Fermat "trató de manera totalmente errada ese tratado (es decir, el *Arithmetica Infinitorum*) el cual no era tanto para mostrar un método de demostrar cosas ya conocidas como para mostrar una manera de investigación o hallazgo de cosas aún desconocidas" (citado en Nunn, 1909-1911, p.385).

Confrey y Dennis, (2000) mencionan que Wallis evoca abiertamente una aproximación empírica o heurística de la verdad matemática. Él se convence de la validez de sus matemáticas a través de una serie de conjeturas y confirmaciones. Sus argumentos centrales dependen de una coordinación de múltiples representaciones. Estas incluyen tablas numéricas, álgebra y geometría. Para Wallis una definición se vuelve razonable cuando emerge como un patrón en una representación, pero que también puede confirmarse a través de estar de acuerdo con otra. El que una idea sea razonable en un escenario nunca fue suficiente para Wallis. Sus primeras investigaciones, por lo general, se llevaron a cabo en el escenario de sucesiones numéricas y tablas. Después visualizaba una confirmación a través del álgebra y la geometría.

Los trabajos de Newton, Wallis y Galileo, entre otros, nos muestran una práctica que sería central en nuestras secuencias: a partir de la toma de datos de fenómenos construir modelos aritméticos (tablas) encontrando patrones de comportamiento y prediciendo sobre los fenómenos, construir otros modelos, a partir de los datos, y establecer una coordinación entre estos y los fenómenos, sus parámetros y las formas de predicción con cada modelo.

2. Esquema de las actividades en la secuencia

El esquema de las actividades de la secuencia es el siguiente



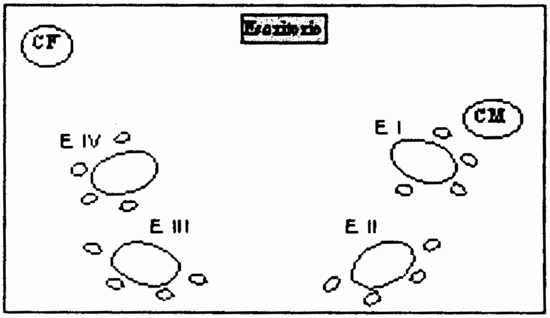
En este esquema se muestran las actividades que se desarrollan en esta secuencia. A partir de la interacción con el fenómeno los estudiantes identificaran las variables que intervienen en él, organizando los datos obtenidos en una tabla numérica. Se identifican las características distintivas de esta tabla y se efectúan predicciones con esta. Las formas de predicción serán de diversas formas y nos interesa privilegiar formas de predicción que nos permitan obtener un modelo algebraico (fórmula algebraica).

Punteando los datos de la tabla e identificando las características de la gráfica obtenemos un modelo gráfico del fenómeno, hacen predicciones con la gráfica y discuten la validez y aplicación del método empleado. Por último, identificando los parámetros algebraicos con los geométricos establecemos una relación entre las fórmulas y las gráficas.

Condiciones experimentales

Los participantes en esta actividad son cuatro equipos de cuatro estudiantes del tercer semestre de ingeniería bioquímica del instituto Tecnológico de Acapulco (con una edad entre 18 y 20 años). Es importante la buena comunicación entre ellos, esto es porque nos interesa la producción discursiva.

El arreglo experimental, contemplaría una cámara "móvil" (que capte los detalles en la discusión general y las discusiones en los grupos, pero especialmente el desarrollo de un equipo), una cámara fija (que capte el panorama general del aula), una grabadora por equipo (que capte las discusiones en el equipo) y material del aula (pizarrón, retroproyector, sensor de movimiento y de temperatura, y calculadoras graficadoras).



Esquema del montaje experimental

El montaje experimental se realiza en una aula, en este participan dos profesores, el profesor A y el B, y cuatro equipos de cuatro alumnos, Equipo I, II, III y IV. En cada mesa se instala una grabadora que recoge las conversaciones de cada equipo, además se tiene una cámara fija (CF) que capta el panorama general y otra móvil (CM) que capta las particularidades del desarrollo de la experimentación

En la conformación de los equipos, se considerarán las siguientes variables: edad, cursos tomados, grados, popularidad y personalidad. Nos interesaba que en los equipos haya un ambiente de participación, no se ejerzan posiciones de liderazgo por alguno de los miembros que inhibieran la participación de los demás integrantes. Por tanto los equipos se integrarán con estudiantes del mismo grado, con edades sin grandes variaciones, con calificaciones medias y sin limitaciones para expresar sus ideas.

Condiciones de las interacciones

Nuestro interés esta centrado en la interacción a diferentes niveles, los estudiantes interactúan en su equipo, interactúan con los demás equipos y con el profesor.

La mecánica de la actividad es la siguiente: se plantea una cuestión, los equipos construyen una posición al respecto, argumentando ampliamente, se debate, por los equipos, sobre las diferentes posiciones utilizando los argumentos que se construyen en torno a cuestión planteada.

Objetivos

El objetivo fundamental en el diseño de esta secuencia es construir un contexto argumentativo donde los estudiantes y profesor, interactivamente, en el aula, construyan argumentos, herramientas y significados a partir de la interacción con un fenómeno

Identificamos, pues, algunas actividades involucradas, dentro lo que llamamos actividades de modelación, que son el foco de nuestra atención:

Emplear recursos específicos y formas particulares para describir hechos, construyendo versiones de éstos.

Construir argumentos a través de conjeturas y confirmaciones, basadas en la inducción general.

Argumentar y validar versiones utilizando una coordinación de múltiples herramientas.

Desarrollar formas de predicción y argumentos de su validación.

Elaborar categorías descriptivas y explicaciones de nuevas experiencias utilizando conocimientos que tienen, derivados de otros contextos y frente a otras experiencias.

Secuencias

Las secuencias que se desarrollaran son tres:

- Elasticidad de resortes. La linealidad.
- La caída de los graves. Lo cuadrático.
- La ley de enfriamiento de Newton. Lo exponencial.

1. Elasticidad de resortes. La linealidad

Objetivo: en esta fase los estudiantes construyen y utilizan como herramienta, a la linealidad, en interacción con un fenómeno, la elasticidad de resortes.

Los estudiantes obtienen una connotación física de "variable": la variable distancia y la variable peso. Los estudiantes construyen un modelo numérico de la elasticidad de resortes, identificando las características de la tabla, utilizándola para predecir, e identificando los parámetros de esta tabla. Construyen la gráfica distancia – peso, como modelo gráfico del fenómeno, y el modelo algebraico. Establecen un esquema que coordina los diferentes modelos con el fenómeno, sus parámetros y las formas de predecir.

2. La caída de los graves. Lo cuadrático.

Objetivo: en esta fase los estudiantes construyen y utilizan como herramienta, lo cuadrático, en interacción con un fenómeno, la caída de los graves.

Los estudiantes obtienen una connotación física de "variable": la variable distancia y la variable tiempo. Los estudiantes construyen un modelo numérico de la caída de los graves, identificando las características de la tabla, utilizándola para predecir, e identificando los parámetros de esta tabla. Construyen la gráfica distancia – tiempo y la gráfica velocidad - tiempo como modelos gráficos del fenómeno y el modelo algebraico. Establecen un esquema que coordina los diferentes modelos con el fenómeno, sus parámetros y las formas de predecir.

3. La ley de enfriamiento de Newton. Lo exponencial

Objetivo: en esta fase los estudiantes construyen y utilizan como herramienta, lo exponencial, en interacción con un fenómeno, el enfriamiento de líquidos.

Los estudiantes obtienen una connotación física de "variable": la variable temperatura y la variable tiempo. Los estudiantes construyen un modelo numérico del enfriamiento de líquidos, identificando las características de la tabla, utilizándola para predecir e identificando los parámetros de esta tabla. Construyen la gráfica enfriamiento – tiempo y la gráfica temperatura - tiempo como modelos gráficos del fenómeno, y los modelos analíticos. Establecen un esquema donde coordinan los diferentes modelos con el fenómeno, sus parámetros y las formas de predecir.

Entre las evidencias que encontramos es la centración de los estudiantes en la regla de tres: Aplican la regla de tres indiscriminadamente. El argumento: se aplica regla de tres por que son cantidades proporcionales. Pero, las palabras "cantidades proporcionales" es una palabra del discurso escolar, no se tiene idea de lo que no es proporcional. La regla de tres siempre funciona, en la escuela siempre hemos visto problemas donde funciona.

La linealidad sólo se aprehende en la otredad, es decir en su confrontación con lo que no es ser lineal, de otra forma, se aplica la regla de tres indiscriminadamente, no se permite hacer la coordinación con otras versiones de la linealidad, la modelación de fenómenos es inaccesible, en general no se permite la construcción de argumentos.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. y Buendía, G. (2001) El diseño de situaciones desde la perspectiva de la actividad humana. Serie: *Antologías*. No. 1. Programa Editorial de la Red Nacional de Cimates.

Candela, A. (1999) *Ciencia en el aula. México*: Paidós Educador

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* Núm. 42, pp. 353-369, España

Cantoral, R. y Farfán, R. (2002). Sur la sensibilité a le contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 22, Núm. 2.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, núm. 2.

Varios

Evaluación del aprendizaje de las matemáticas

Regla Margarita Calderón Ariosa y Beatriz Deiros Fraga

Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (CUJAE). Cuba.

calderon@reduniv.edu.cu bdeiros@mecanica.ispjae.edu.cu

Resumen

Entre las principales deficiencias que se presentan en la actualidad en nuestra práctica educativa, relacionadas con el control y la evaluación, están considerar únicamente la evaluación del producto o resultado final, identificar control con calificación, con "dar una nota" y la realización del control en un sólo sentido (el del profesor). Existe una opinión bastante generalizada en cuanto a que los procedimientos de elaboración de pruebas, aplicación y calificación de las mismas son equivalentes al proceso de evaluar. En general se reduce el papel de la evaluación a una de sus funciones. Pero realmente, ***¿se evalúa en nuestra enseñanza?***, desde nuestro punto de vista este es un aspecto que requiere ser estudiado.

En el taller se analizó la problemática de la evaluación del aprendizaje y se consideraron algunas técnicas para la evaluación de los contenidos matemáticos. En ambas sesiones se emplearon técnicas participativas siguiendo la lógica de identificación de problemas, profundización en el conocimiento y propuesta de alternativas.

Introducción

La *"evaluación educativa"* es considerada como una actividad compleja ya que dentro del proceso educativo puede evaluarse prácticamente todo: aprendizajes, enseñanza, acción docente, contexto físico y educativo, programas, currículo, aspectos institucionales y otros.

Con relación a la evaluación del aprendizaje podemos señalar que, cuando analizamos los programas de matemáticas, en general se limitan a expresar el tipo de evaluación que se aplicará, es decir si la misma es escrita u oral, así como su clasificación en trabajos de control o pruebas parciales y finales, pero ***cómo evaluar*** no está presente. Por otra parte, no se considera la evaluación como parte integrante de un sistema, que contempla integralmente objetivos, contenidos, métodos, estrategias y medios de enseñanza, así como que a su vez la evaluación también constituye un sistema con sus características específicas.

En consecuencia existe una opinión bastante generalizada en cuanto a que los procedimientos de elaboración de pruebas, aplicación y calificación de las mismas es equivalente al proceso de evaluar, reduciendo el papel de la evaluación a una de sus funciones.

En la práctica docente ha predominado una concepción instrumentalista de la evaluación, en la que su función básica es estudiar los **resultados** del proceso educativo, convirtiéndose prácticamente sólo en una medición que finaliza con una asignación de notas o calificaciones.

En general, podemos plantear que los instrumentos o pruebas de control están dirigidos a comprobar qué saben los alumnos, se utilizan ejercicios reproductivos que sólo requieren una o dos destrezas y en su mayoría utilizan sólo pruebas escritas. Los exámenes que se toman, tienen el propósito de corregir los errores e insuficiencias del estudiante.

En la actualidad la tendencia predominante es utilizar combinadamente varios instrumentos y técnicas, se enfatiza en la necesidad de una mayor participación de los estudiantes, así como se promueve la subordinación del cómo a las demandas pedagógicas y regularidades del proceso de enseñanza aprendizaje.

Por todo lo anterior resulta necesario familiarizar a los docentes con algunas técnicas para la evaluación en Matemáticas que trasciendan el examen tradicional.

Objetivos

- Debatir la problemática de la evaluación analizando su función en la valoración del proceso de enseñanza y en el aprendizaje de los estudiantes.
- Analizar instrumentos y procedimientos para la evaluación del aprendizaje de las Matemáticas.

Contenidos

- La evaluación del aprendizaje.
- Instrumentos y procedimientos de evaluación. El examen. Otras técnicas para la evaluación del aprendizaje.
- Estándares de evaluación según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Metodología

El curso se organizó para realizarse en dos sesiones de una hora y media de duración, dirigido a docentes de matemática que trabajen en los niveles medio superior y superior.

La metodología a aplicar en el curso posibilitó promover una participación activa de los docentes en distintas tareas que permitieron reflexionar sobre la problemática de la evaluación del aprendizaje de las matemáticas y proponer algunas técnicas para la evaluación en su materia.

Se explicaron los objetivos, el contenido y la metodología para la realización del curso.

Primera sesión

Objetivos:

- Propiciar la reflexión sobre la problemática de la evaluación del aprendizaje que permita una profundización en el tema, esclareciendo conceptos básicos del mismo.

Contenidos:

- La evaluación del aprendizaje.
- Instrumentos y procedimientos de evaluación. El examen. Otras técnicas para la evaluación del aprendizaje.

Para comenzar se aplicó la Técnica concordar - discordar a través de un ejercicio de reflexión que permitió debatir sobre la evaluación del aprendizaje.

Se repartió a los participantes una hoja con las orientaciones. Se les pidió que la leyeran y respondieran individualmente **Sí**, si estaban de acuerdo con la frase; **No**, si no estaban de acuerdo con ella y **X**, si estaban de acuerdo cambiando alguna palabra que no varíe el sentido a la frase, sino que únicamente la haga más clara. En este último caso que añadieran o modificaran la palabra correspondiente.

Se les dio tiempo para hacerlo. Después, en equipos, discutieron sus respuestas, tratando de ponerse de acuerdo por consenso en sus afirmaciones o negaciones, fundamentando el por qué de las mismas.

En el plenario el coordinador del curso pregunta a cada equipo cual fue la respuesta grupal. Una vez planteada la primera respuesta se abre la discusión con todo el grupo. Cada equipo explica el porqué de su respuesta, fundamentándola. Todo lo anterior permitirá exponer los esquemas referenciales de los participantes, y al mismo tiempo se profundiza la visión que cada uno tiene acerca de la evaluación.

De la discusión se pueden resumir algunas de las características presentes en nuestra práctica educativa relacionadas con la evaluación del aprendizaje:

- La evaluación es parte del proceso de enseñanza aprendizaje
- Utilización de múltiples vías para realizar la Evaluación.
- Diferenciación entre evaluación – medición – calificación.
- Existe un predominio de la concepción cuantitativa de la evaluación.
- Evaluación conjunta de productos y procesos de aprendizaje.
- Énfasis en la evaluación de los resultados
- Se privilegia el examen escrito donde se plantean, en su mayoría, ejercicios reproductivos

Al discutir sobre estos aspectos, surgen entre otras, preguntas como las siguientes: ¿Calificar es sinónimo de evaluar?, ¿las calificaciones reflejan lo que el alumno sabe?, ¿se emplean diversas formas de evaluación?, ¿tienen rigor científico las pruebas e instrumentos de evaluación?

Se exponen, entre otras, algunas técnicas de evaluación como la observación, los mapas conceptuales, la autoevaluación, las pruebas a libro abierto, etcétera.

Tendencias actuales

- Utilización de múltiples vías
- Consideración del contexto y la singularidad de las situaciones educativas
- Uso complementario de métodos cuantitativos y cualitativos
- Empleo de técnicas que favorezcan la participación de los estudiantes
- Aproximación a las situaciones y tareas reales de estudio, de la profesión.

Segunda sesión

Objetivos:

- Analizar los estándares de evaluación de alumnos (del 4 al 7)
- Proponer una alternativa para la evaluación de un tema de contenido matemático.

Contenidos:

- Estándares de evaluación según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Se planteó el contenido relacionado con los estándares de evaluación según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) para la evaluación de los alumnos: Potencia Matemática, Resolución de problemas, Comunicación, Razonamiento, Conceptos matemáticos, Procedimientos matemáticos y Actitud Matemática.

Al realizar un análisis de las prácticas de evaluación en nuestras aulas con respecto a los estándares mencionados podemos señalar algunas insuficiencias:

La mayor cantidad de controles se limita a la resolución de ejercicios propuestos, en los que prácticamente se califica de forma mecánica su resolución, que concluye con la obtención del resultado, quedando relegada la comprobación e interpretación del mismo. No se evalúa la capacidad del estudiante para hacer preguntas, interpretar resultados y generalizar. No contempla la aplicación de diversas estrategias de resolución, ni la formulación de problemas y mucho menos la generalización de las soluciones.

Casi no se toma en cuenta la comunicación matemática en evaluaciones parciales y final, pues solo se considera como parte del procedimiento de la resolución de un problema. Se exige poco, en evaluaciones escritas, que los estudiantes expresen sus ideas utilizando el lenguaje matemático.

La evaluación de la capacidad que tienen los alumnos para razonar matemáticamente, se puede evidenciar parcialmente en algunas preguntas de control, generalmente las preguntas se enmarcan en la mecanización de su solución, lo cual desplaza los diferentes tipos de razonamientos que se deberían considerar en la evaluación de los conocimientos y habilidades matemáticas.

Si se considera, en el diseño de una prueba, preguntas destinadas a evaluar los conceptos matemáticos, algo que no es muy frecuente, los resultados evidencian la falta de solidez de los mismos. Esto se debe generalmente a deficiencias en la estructuración de los conocimientos durante el proceso de enseñanza y a la falta de costumbre de los alumnos de estudiar los conceptos teóricos de la matemática.

La evaluación generalmente se limita a la reproducción de los procedimientos desarrollados por el profesor. Pero el problema que se presenta en este aspecto, es la diferencia en la valoración que se le da en el momento de calificarlo, entre uno y otro profesor, debido a que no se han establecido previamente los indicadores para el control.

La actitud que presentan los estudiantes en general ante las matemáticas, es un problema que se constata desde la educación media y que se acrecienta en la universidad. Se ha convertido prácticamente en una tradición, conocida por los estudiantes, el hecho de desaprobar por lo menos en una de las asignaturas de matemáticas, lo cual predispone al estudiante a una actitud casi hostil hacia las matemáticas. A pesar de esta situación, normalmente la actitud matemática no está contemplada en los controles tradicionales como un elemento a considerar.

La segunda parte de la sesión consistió en la elaboración por parte de los asistentes al curso (de forma grupal) de una propuesta de evaluación en matemáticas considerando algunas de las técnicas abordadas y los estándares analizados.

Referencias bibliográficas

Calderón, R. M. y E. Fraga (2000). La Evaluación en Matemáticas: Valoraciones y Alternativas. En *Memorias del Evento Internacional INFOMADI*, CUJAE, Cuba.

Díaz Barriga, F. y G. Hernández (1998). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* Mc Graw Hill.

González, M. (2000) *Evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria.* Tesis de doctorado. Universidad de la Habana, Cuba.

NCTM (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática.* SAEM Thales.

Villarroel, J. (1990). *Evaluación Educativa: Estudio crítico - Alternativas de cambio.* Ecuador: Editorial Ibarra.

Funcionando con la computadora. Una experiencia con un asistente matemático

P. Medina, M Astiz., S. Vilanova, M.Oliver, M.Rocerau, G. Valdez, M.Vecino, E. Álvarez, Y. Montero

Universidad Nacional de Mar del Plata – Argentina

pmedina@mdp.edu.ar ; mastiz@mdp.edu.ar

Resumen

El presente trabajo describe una experiencia desarrollada con 10 alumnos en un taller optativo del Colegio Dr. Arturo Illia de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina).

El taller tuvo como objetivo ofrecer a los alumnos una forma de trabajo para que, utilizando la computadora como herramienta, sean capaces de determinar e interpretar funciones que explican situaciones problemáticas. Este tema se seleccionó de entre los temas que el programa de la asignatura Matemática determina para cursos de noveno año de la enseñanza general básica (14-15 años)

Para el logro del objetivo se utilizó el software DERIVE entendiendo al mismo como un entorno de exploración, como una ayuda para visualizar e interpretar.

Introducción

Esta comunicación presenta una experiencia realizada bajo la modalidad taller con alumnos de 14-15 años del colegio Dr. Arturo Illia de la Universidad Nacional de Mar del Plata. En el mismo se trabajó la modelización de problemas a través de funciones, utilizando como soporte fundamental la computadora, más precisamente el programa Derive. En la Argentina el tema funciones forma parte de los temas previstos para su enseñanza a partir de noveno año. El tema elegido para este taller intenta ser un aporte para profundizar con los alumnos los conceptos previos que desarrollaron sobre el tema funciones en las clases de matemática.

El uso de la computadora en educación es una nueva tendencia que se caracteriza por una clara inclinación hacia sistemas que involucran herramientas puestas a disposición de los alumnos, con el rol de facilitadoras para la indagación y la adquisición de conocimiento, en ambientes de aprendizaje colaborativos e interactivos (Kaput, 1992).

En este sentido, una de las finalidades del taller fue que los alumnos adquieran una herramienta más para la exploración y observación de conceptos relacionados con el análisis de funciones y desarrollen estrategias de aprendizaje para tal fin.

Por otra parte, una problemática central vinculada con el concepto de función, se refiere a los distintos registros de representación de las mismas (tabla de valores, fórmula, gráfico y descripción verbal). Duval (1995) plantea que una causa importante de los fracasos escolares está ligada a la conversión entre esas representaciones: los alumnos saben, en general, trabajar aisladamente con cada una de ellas, pero no tienen la capacidad de decidir si conviene o no cambiar de registro según la tarea que se les presente. A partir de esto, otra finalidad del taller fue lograr en los alumnos naturalidad en el manejo y selección de las distintas formas de representación de las funciones.

En síntesis, ya que la computadora ha simplificado el problema de graficar, se pretende que los alumnos desarrollen una apreciación global e intuitiva del comportamiento de las funciones y sus propiedades, basado tanto en la lectura de los gráficos que las representan como de sus expresiones analíticas. De este modo podrán traducir estas últimas a gráficas y viceversa, anticipando en cada caso las características, ya sea del gráfico o de su expresión algebraica.

Por último, cabe destacar que el software utilizado fue el Derive, ya que el mismo, como señalan Berry et al. (1994), puede ser integrado a la resolución de problemas como un entorno de exploración, como una ayuda para visualizar e interpretar.

¿Por qué un taller?

Como expresa Miguel de Guzmán et al. (1993), "en todo proceso de aprendizaje el eje principal ha de ser la propia actividad del alumno dirigido con tino por el profesor, colocando al primero en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo. Las ventajas de este procedimiento bien llevado son claras: actividad contra pasividad, motivación contra aburrimiento, adquisición de procesos válidos contra rígidas rutinas inmotivadas que se pierden en el olvido". En tal sentido, se propone la modalidad taller para que los alumnos trabajen a su propio ritmo, desarrollando las tareas propuestas y debatiendo los avances con sus compañeros. En esta modalidad el rol docente es el de moderador y guía, propiciando exposiciones e intercambios de ideas cada vez que lo considere necesario o sea requerido por los alumnos.

Objetivos del taller

- Traducir datos y variables de problemas en expresiones funcionales y hallar sus gráficas utilizando el software Derive.
- Generar modelos a partir de situaciones problemáticas.
- Reconocer que con el mismo tipo de función se pueden elaborar modelos para una gran variedad de problemas.
- Predecir resultados de problemas que se explican a través de funciones cuando se varía las condiciones de las variables involucradas.

Propuesta temática del taller

Teniendo en cuenta que este taller se dictó en carácter de optativo, los temas seleccionados para el mismo fueron:

1. Conceptos básicos y práctica con el software de graficación de funciones y resoluciones algebraicas Derive.
2. Determinación de dominio, imagen, crecimiento, decrecimiento, puntos críticos sobre gráfica de funciones dadas.
3. Gráfica de funciones continuas, discontinuas, por tramos.
4. Interpretación de gráficas de funciones. Predicción de resultados.
5. Presentación de problemas para la determinación de expresiones funcionales que explican la variación de las variables involucradas.
6. Análisis de la variación de parámetros de una función. Predicción de resultados

Carga horaria del taller y participantes

El taller se llevó a cabo en el Colegio Dr. Arturo Illia, colegio de la Universidad Nacional de Mar del Plata. En este colegio los estudiantes deben optar por un taller entre todos los que se proponen. Seleccionaron este taller 10 (diez) alumnos, quienes participaron del mismo. Estos alumnos en la asignatura Matemática habían trabajado el tema funciones, dominio, imagen, graficación, funciones dadas por tramos, pero nunca utilizando la computadora como herramienta.
El taller se dividió en 12 encuentros de 2 horas cada uno.

El trabajo en el aula

El taller se llevó a cabo íntegramente en la sala de computadoras y con el objeto de organizar el trabajo, en una primera instancia se presentó a los alumnos el software Derive para que conozcan cómo trabajar con el mismo en los modos álgebra y gráfico
Respecto de la evaluación, la misma fue continua y se tuvo en cuenta no sólo los avances en el trabajo individual sino también el nivel de participación y colaboración de cada alumno.

Una vez que aprendieron el uso de las funciones básicas del Derive: ingreso de expresiones en modo álgebra, graficación en 2D, incrustación de gráficos, resolución de ecuaciones, definición de funciones, graficación de funciones por tramos (uso de la función if), trabajaron con los problemas que se seleccionaron para cumplir con los objetivos propuestos.

A modo de ejemplo presentamos uno de ellos:

> *La empresa de correos LA VELOZ cobra para enviar un paquete $5.- de costo fijo más $12.- por kg. de peso. La empresa CORRECAMINOS cobra $7.- de costo fijo pero $8.- por kg. de peso. Debemos asesorar a una persona sobre la epresa de correos más conveniente para enviar un paquete. ¿Qué podemos decirle?*

El 50% de los estudiantes planteó correctamente en el primer intento las ecuaciones de costo correspondiente a cada empresa de correos

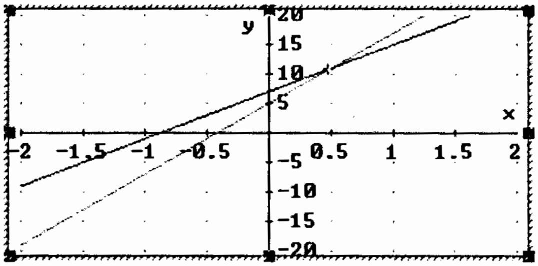
Una vez obtenidas las gráficas observaron la misma y sin problemas dedujeron cuál era el peso del paquete para el cual el costo de ambas empresas era el mismo, aunque el valor exacto lo obtuvieron algebraicamente a través de la opción Resolver Sistema del Derive.

No obstante, no fue tan inmediata la deducción de la respuesta al problema, ésta surgió a través de una discusión-debate surgida espontáneamente una vez que todos obtuvieron las ecuaciones correctas.

A continuación se transcribe el trabajo realizado por uno de los estudiantes:

#1: $y = 7 + 8 \cdot x$

#2: $y = 5 + 12 \cdot x$



la recta verde es la que corresponde a #2 y la recta negra a #1
parece que se cortan en el punto (0.5,10), pero tengo que estar seguro y por eso voy a hacer las cuentas en álgebra

#3: SOLVE([y = 7 + 8·x, y = 5 + 12·x], [x, y])

#4: $\left[x = \dfrac{1}{2} \wedge y = 11\right]$

ahora estoy seguro que se cortan en el punto (0.5,11)
eso significa que cuando el paquete pesa medio kilo me da lo mismo enviar el paquete por cualquier empresa porque me cuesta $11.-
pero todo esto tiene sentido si estoy de cero para la derecha, no existen pesos negativos.
la recta verde desde cero hasta 0.5 está abajo de la recta negra, entonces sale más barato ir a la veloz si el paquete pesa menos que medio kilo y si pesa más conviene ir a la otra empresa, pero si pesa medio, da lo mismo.

Este mismo problema fue retomado realizando una modificación a las tarifas de correos, considerando que el precio se fraccionaba cada 100 gramos de peso, es decir llevando la situación a una más real. En este caso, el docente promovió el debate entre los estudiantes para que expusieran sus puntos de vista ante esta modificación. Para resolver la nueva situación comenzaron a realizar cálculos hasta llegar a la conclusión de que se trataba de funciones por tramos, las cuales graficaron y observaron para ver en qué aspecto modificaba la respuesta dada bajo las condiciones iniciales. En este caso, el trabajo realizado en Derive por otro de los estudiantes fue:

primero voy a tener que cambiar la función porque ésta es para kilos y ahora necesito para gramos

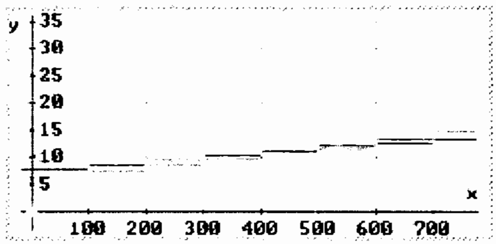
```
#3:   y = 7 + 0.008 x

#4:   y = 5 + 0.012 x

#5:   f(x) := 7 + 0.008 x

#6:   g(x) := 5 + 0.012 x

#7:   IF(X < 100, f(100), IF(X < 200, f(200), IF(X < 300, f(300), IF(X < 400, f(400), IF(X <
        500, f(500), IF(X < 600, f(600), IF(X < 700, f(700), IF(X < 800, f(800), IF(X < 900,
        f(900), IF(X < 1000, f(1000))))))))))
```



pero ahora puedo decir que si el paquete pesa entre 400 y 500 gramos da lo mismo cualquiera de las empresas No para 400 porque es más caro correcaminos

De la misma manera trabajaron con el resto de los problemas propuestos. Estos involucraron principalmente funciones cuadráticas (relacionadas con superficies, trayectorias), cúbicas (relacionadas con volúmenes), lineales (relacionadas con trayectorias)

Consideraciones finales

Las ciencias tratan de expresar ciertas características de los fenómenos estudiados en función de otras. El poder de las funciones consiste tanto en describir de manera simple situaciones complejas como predecir resultados y realizar los análisis cualitativos correspondientes.

Como ya se ha señalado, el objetivo del taller fue ofrecer a los alumnos una forma de trabajo para que, utilizando la computadora como herramienta, sean capaces de determinar e interpretar funciones que explican situaciones problemáticas.

A partir de las herramientas y conceptos previos de que disponían e incorporando la computadora como un nuevo recurso con el software Derive, se logró que los alumnos predigan resultados ante cambios en las condiciones de datos o variables de los problemas propuestos. Por otra parte se observó claramente en ellos la búsqueda autónoma (sin la intervención del docente), la gestación de ideas y el descubrimiento de estructuras matemáticas sencillas en la resolución de los problemas.

Otro logro importante fue la naturalidad con la que manejaron y seleccionaron las distintas formas de representación de funciones como tabla de valores, fórmula, gráfico, descripción verbal.

Es importante destacar que la introducción de la computadora generó en los participantes del taller una gran motivación para el trabajo. Da cuenta de ello que ante cada situación se dedicaron a realizar modificaciones en los parámetros de las funciones logrando variantes de los problemas originales, que los llevaron en algunas oportunidades a profundizar sobre algún tema (dominio de definición de una función) o a tratar temas que no conocían (funciones de dos variables)

En base a los resultados observados, consideramos importante llevar adelante nuevamente esta experiencia involucrando durante su desarrollo no sólo al docente encargado del taller sino también al docente de matemática del curso e incorporando otros temas. Todo ello con el objetivo final de elaborar en conjunto una propuesta didáctica para llevar adelante en los cursos de matemática.

Referencias bibliográfícas

MCyE. (1996). *Contenidos básicos para la Educación General Básica.* Argentina.

Ausubel, D.P. (1997). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Trillas: México.

Berry, J., Graham, T.and Watkins, T (1994). Integrating the DERIVE program into the teaching of mathematics. En *The International DERIVE Journal* ,V. 1, N 1 .(83-96)

De Corte, E. (1996). Aprendizaje Apoyado en el Computador: una Perspectiva a Partir de la Investigación acerca del Aprendizaje y la Instrucción. En *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa.* Barranquilla, Colombia.

Duval, R. (1995). *Sémiosiset pensée humaine: Registres sémiotiqueset apprentissage intellectuals.* Suiza. Peter Lang.

Guzmán, M. de y Gil Pérez, D. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones.* OEI. Ed. Popular

Guzmán, M. de & Colera, J. y Salvador, A. (1987). *Matemáticas Bachillerato 1.* Madrid. Grupo Anaya.

Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. *En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (515-556). Macmillan. N.Y

Kutzler, B., Kokol-Voljc, V. *Introducción a DERIVE 5.* OEG. Austria. Edición Española. DERISOFT, c.b. Valencia, España

Novak, J.D. y Gowin, D.B. (1984). *Learning how to Learn.* N.Y. University Press.

Paulogorrán, C. y Pérez C. (1994). *Cálculo Matemático con Derive para PC.* Ra-Ma. Madrid.

Las matemáticas integradas en contexto

Leonardo Torres Pagán
Departamento de Educación de Puerto Rico, Puerto Rico
mathpr@coqui.net

Resumen

Todos los maestros tienen opiniones propias sobre la forma en que sus estudiantes aprenden (Streefland, 1999) opiniones determinan la forma en que los maestros se desempeñan en la sala de clases. Hay quienes piensan que los estudiantes llegan a la sala de clases con su mente vacía. Esto implica que la mente del joven esta en una especie de inactividad y que la educación consiste en llenar de conocimientos las mentes de los estudiantes quienes recibe los mismos pasivamente. Lamentablemente, esta visión el aprendizaje, ha guiado la mayor parte de la enseñanza de las escuelas del país. Frecuentemente se invierte una gran cantidad de tiempo en la memorización y aplicación de algoritmos y manipulaciones algebraicas. Este método tiene su lugar en la enseñanza de las matemáticas, más aún, en ocasiones la forma más efectiva de aprender ciertas ideas es que sean expuestos a los estudiantes, por ejemplo, las figuras geométricas y las tablas de multiplicar. Por desgracia en realidad la enseñanza matemática se rige casi en su totalidad por este método.

Acerca del aprendizaje

En la década de los cincuenta, el psicólogo Jean Piaget, describió experiencias relacionadas a la forma en que los niños aprenden. Piaget (en Quintero, 1986a 1986b) señalaba que los niños interpretan ciertas situaciones en forma diferente a como las interpretan los adultos. Añade que los niños, lejos de limitarse a repetir las explicaciones de los adultos, ofrecían explicaciones que respondían a sus propias experiencias y creencias.

Todos los estudiantes traen consigo a la sala de clases un valioso acervo de conocimiento matemático informal el cual agregan nuevo conocimiento a medida que progresan a través de los niveles de estudio. Como se señalo antes, los estudiantes tratan de medir sus observaciones y las explicaciones que se les presentan mediante sus concepciones e ideas propias y creencias. En el aprendizaje de las matemáticas, esta personalización del aprendizaje es de suma importancia ya que indica que todo aprendizaje debe tener como punto de partida el propio estudiante, pero, esta naturaleza profundamente individual del conocimiento no lo hace un asunto completamente privado. El aspecto social de las matemáticas juega un papel importante en la construcción de tal conocimiento. Las interacciones entre los estudiantes, y entre estos y el maestro constituyen ingredientes fundamentales en la construcción del conocimiento individual (Nacional Council of Teachers of Mathematics, 2000)

Una idea muy afín con la naturaleza constructiva del aprendizaje es aquella del aprendizaje con sentido (Quintero 1984, 1996). Cuando una persona aprende, además de adquirir información y datos, construye modelos mentales que le ayudan a entender e interpretar el mundo a su alrededor (Quintero, 1986c) Ciertamente el fin de la educación no puede ser proveer un cúmulo de datos e información al estudiante. El fin de la educación es más bien el de dotar a los estudiantes de los recursos intelectuales necesarios para que aquellos puedan perpetuar su propia educación; es decir, una buena educación es aquella que enseña a los estudiantes a aprender, o a lo que es lo mismo, a construir su propio conocimiento. La matemática misma es mucho más que una extensa colección de formulas y manipulaciones algebraicas; es una materia que surge del interés humano por entender el mundo que le rodea.

Uno de los rasgos más importante del aprendizaje con sentido es su naturaleza generativa, es decir, el aprendizaje con sentido engendra nuevo conocimiento. Cuando un estudiante entiende una idea puede ubicar correctamente la nueva idea dentro de la estructura mental del conocimiento anteriormente adquirido (Quintero, 1984). Por tal razón la enseñanza de las matemáticas debe partir de situaciones que tengan sentido para el estudiante, es decir, que constituyan ya parte del acervo matemático del estudiante (Streefland 1999) las destrezas solo tienen sentido en contexto. Por ello las destrezas no se deben enseñar en forma aislada, sino que deben desarrollarse integradas a contextos con sentido.

Una vez reconocida la naturaleza constructiva del aprendizaje, el desempeño del maestro en la sala de clases cambia radicalmente. El estudiante es entonces el centro de la actividad educativa, perdiendo el carácter pasivo que siempre se la ha querido asignar, y el maestro mantiene su papel activo, pero esta vez de guía y como creador de ambientes en la sal de clase que propicie que el proceso constructivo se dé en el estudiante. Sin embargo, Streefland (1999) señala que los estudiantes no aprenden eficientemente si la enseñanza comienza en un nivel de abstracción muy alto. Ello ocurre precisamente porque el conocimiento que se presenta guarda poca relación con la matemática que han logrado entender. Las nociones centrales que forman el estudio de las matemáticas solas e adquieren a través de periodos relativamente largos de tiempo, y ello ocurre luego de que tales nociones se presentan repetidamente de diferentes maneras y en circunstancias de mayor abstracción a medida que los estudiantes progresan a través de los niveles educativos. Por consiguiente, el currículo se de planificar de manera que se provean las circunstancias para que el estudiante pueda desarrollar su conocimiento matemático a través e niveles de abstracción cada vez mas altos. En particular, se debe integrar la educación verticalmente, proveyendo oportunidades para la introducción de modelos, notaciones, esquemas conceptuales, símbolos y otros, que propicien la transición del estudiante a niveles mas altos de conocimiento (Freudenthal, 1981). Sin embargo, no debe pensarse que el progreso del estudiante a través de niveles de abstracción cada vez más altos constituyen un proceso fortuito. El mismo esta íntimamente relacionado a la forma en que el ser humano aprende y es susceptible a las metodologías que se emplean en la enseñanza de las matemáticas. Hay dos planteamientos que deben considerarse con relación a los niveles de abstracción. En primer lugar constituyen una jerarquía en la que es necesario completar un nivel antes de poder alcanzar el nivel próximo. La educación matemática debe tomar como punto departida para la enseñanza el conocimiento que tiene el estudiante, tanto formal como informal en el momento en que se dispone a ocurrir el aprendizaje. A esto debe añadirse que la educación matemática debe ser contextual, es decir, debe partir de contextos que revistan interés y que sean pertinentes en la vida del estudiante). En otras palabras, los estudiantes se expondrán al estudio de situaciones matemáticas que surjan de una multiplicidad de áreas de interés, tan variadas como la pueden ser la astronomía, las ciencias ambientales, la física, la sociología o la matemática misma. Los estudiantes podrán abordar el estudio de situaciones matemáticas interesantes enmarcadas en contextos ricos y estimulantes para el pensamiento y la reflexión. Inicialmente el estudiante construye modelos (verbales, visuales o simbólicos) para describir estas situaciones que se toman como punto de partida, y en ellos emplean todo tipo e estrategias formales e informales para comprender a cabalidad las situaciones presentadas. Esta totalidad de procedimientos formales e informales que emplea un estudiante para organizar el contenido matemático de una situación contextual se conoce como matematización horizontal. Así pues, la matematización horizontal permite la confección de modelos de una situación. Tales modelos son por su naturaleza descriptiva ya que sirven para representar, describir o modelar la situación original.

Una vez consideradas varias situaciones contextuales e identificada los elementos comunes entre los modelos descriptivos empleados, se desarrollan modelos más abstractos, los cuales sirven para sugerir y predecir situaciones futuras. Este proceso se conoce como matematización vertical.

El proceso de matematización transforma continuamente el conocimiento informal del estudiante en el conocimiento matemático más formal. La historia de la matemática es ilustrativa de este punto. Si se estudia el desarrollo de la matemática, se advierte que muchos modelos que se crean con el fin de resolver problema específico termina sugiriendo nuevas áreas de estudio y propiciando el desarrollo matemático en otras direcciones. La matematización vertical sostenida durante varios anos termina por hacer de La matemática una disciplina lógica, de estructura deductiva, en la que muchas veces es imposible identificar los problemas y los contextos que dieron base a su desarrollo. Es por tal razón que la presentación estrictamente lógica de la matemática no siempre constituye el mejor método didáctico ya que tal presentación supone el nivel de abstracción más alto. La enseñanza de la matemática no se debe limitar únicamente a la presentación de los conceptos centrales de la disciplina, sino que debe crear las condiciones necesarias para que el estudiante participe activamente en el proceso de matematización.

Por otro lado, el proceso de matematización vertical es uno que ocurre a través de los diferentes niveles educativos, y que requiere la consideración repetida de los mismos temas matemáticos generales. Los modelos centrales de la educación matemática se desarrollan a través de periodos de tiempo relativamente largos. El desarrollo conceptual de las ideas centrales requiere la consideración repetida de los mismos modelos básicos, los cuales se van puliendo y gradualmente haciéndose cada vez más abstractos. No es de extrañar que la matemática sea una disciplina que por su naturaleza repetitiva, en la que los mismos modelos mentales reciben atención continua en todo el currículo. Este tipo de educación se conoce como educación en espiral, la cual requiere la vuelta repetida a los mismos temas, tratando estos con niveles de profundidad y abstracción cada vez más altos. Al presentar un concepto en contextos y situaciones variadas, se hace posible que le estudiante pueda apreciar el mismo desde diferentes ángulos y puntos de vista. La estrategia de la enseñanza en espiral y la planificación del currículo a largo plazo, son cónsonas con las teorías de los niveles de aprendizaje en la educación matemática. En efecto, tales teorías se deben tomar en cuanta en el momento del diseño del currículo (López, 1989). Tales teorías plantean ciertos niveles de abstracción en el aprendizaje matemático, a través de los cuales los estudiantes progresan sistemáticamente. El paso de un nivel al próximo implica un desarrollo cognoscitivo del estudiante y evidencia el proceso de matematización vertical. De acuerdo a estas teorías, los estudiantes traen consigo desde los niveles inferiores conceptos que se tratan repetidamente en varios niveles de aprendizaje (VanHiele, 1978, Quintero, 1996, López 1998).

La reflexión en el aprendizaje. La enseñanza desde la perspectiva constructivista requiere de la reflexión de parte del estudiante, n solo en torno a sus pensamientos, sino en torno a los pensamientos de otros estudiantes y del mismo maestro (Freudenthal, 1981). El estudiante aprende matemáticas cuando reflexiona en torno a los razonamientos de este y de sus compañeros que han pasado a constituir estrategias adecuadas para la dilucidación de situaciones matemáticas. Más aun, un estudiante aprende matemáticas cuando reflexiona sobre sus propios errores y sobre sus razonamientos fallidos en el intento por solucionar algún problema. Treffers (1982) y Clarck (1992) alegan que la reflexión es u recurso valiosísimo en la construcción del conocimiento y sirve parta llevar tal conocimiento a niveles de abstracción cada vez mas altos. Añaden que debe ser motivo de reflexión todo tipo de producción de los estudiantes que se da con referencia a la solución de problemas matemáticos, las observaciones de los estudiantes, sus aseveraciones, sus razonamientos y sus errores entre otros. Tales producciones son en efecto fuentes de información para conocer ideas, las concepciones y los niveles alcanzados por los estudiantes. La educación matemática debe entonces provee al estudiante de múltiples oportunidades de reflexión sobre las ideas centrales del currículo. Al permitir que un estudiante trabaje un problema matemático utilizando las estrategias que este crea más convenientes, el maestro descubre el grado de sofistificación matemática y el nivel de abstracción alcanzado por el estudiante. Tal descubrimiento permite al maestro diseñar sus actividades de aprendizaje, las cuales partiendo de las concepciones de los estudiantes, van ampliando, profundizando o corrigiendo las mismas. Las actividades que promueven las producciones libres de los estudiantes son instrumentos efectivos para hacer que los estudiantes reflexionen sobre lo que han aprendido.

La investigación sobre los errores que cometen los estudiantes muestra que hay ciertos errores comunes que se repiten con relativa frecuencia en el estudio de los temas específicos del currículo. Es por ello que la discusión de los errores que cometen los estudiantes revisten una importancia especial (Freudenthal, 1981; Treffers, 1987). Desde 1 punto de vista cognoscitivo, cualquier lección, por excelente que sea, será incompleta. Es imposible recoger en una lección todas las implicaciones de un principio o regla. Toda actividad parte de la premisa de que el estudiante hará inferencias propias para ampliar lo que se le ha enseñado. En este proceso de hacer inferencias es muy probable que aparezcan errores. Tales errores tienen cierta estructura lógica, mas aun, en algunos casos muestran un grado mayor de pensamiento lógico que las contestaciones correctas. De las discusiones de estos errores pueden surgir explicaciones muy iluminadoras, tanto para el estudiante, como para sus compañeros, y sus maestros.

El aspecto social del aprendizaje. El aprendizaje típicamente ocurre en ambientes sociales que suponen una pluralidad de relaciones entre los estudiantes, y entre los estudiantes y el maestro (Freudenthal, 1981). Las interacciones sociales que ocurren dentro de la sala de clases deben estimular el aprendizaje fomentando al máximo las interacciones que se generen entre los estudiantes. Treffers (1987) recomienda que el ambiente de la sala de clases estimule un aprendizaje más eficiente. Las normas que se establecen con el fin de definir y reglamentar las relaciones y las interacciones que se dañe en el salón de clases envían un mensaje claro al estudiante sobre las expectativas del maestro en su desempeño.

Los maestros deben hacer un esfuerzo para lograr que los estudiantes hagan observaciones, conjeturas y desarrollen estrategias para que establezcan conjeturas, discutan y argumenten entre ellos y respeten las opiniones de sus compañeros. En fin, el ambiente que debe promoverse en la sala de clases es aquel que propicie la exploración, el cuestionamiento, la aceptación de buenas razones como justificadores de razonamiento, la discusión seria, la discusión seria y responsable entre estudiantes y el aprendizaje en grupos (Treffers, 1987). Debe prevalecer una atmósfera en la que los estudiantes frecuentemente comuniquen sus actividades y hagan e su razonamiento el foco de su discusión. Por otro lado, en toda interacción social asociada al aprendizaje que surge en la sala de clases, el maestro asumirá el papel de guía del estudiante (Nacional Council of Teachers of Mathematics, 2000).

La estructura del conocimiento. El conocimiento no consiste en la mera acumulación de datos o destrezas aisladas, sino que consiste en la construcción de una estructura coherente en la que se pueden ubicar datos y destrezas especificas (Treffers, 1987). Idealmente, los nuevos conocimientos se incorporan en el lugar adecuado, lo que a veces requiere de ciertos ajustes. El conocimiento más duradero es el que puede ser organizado por el estudiante en estructuras generales y coherentes de elementos interrelacionados (Quintero, 1984). Esto es, el estudiante es capaz de aprender en la medida en que puede establecer vínculos entre las diferentes áreas del currículo.

En términos generales, en la enseñanza tradicional, los estudiantes se someten al estudio de ciertas destrezas, las cuales eventualmente resultan inútiles en la solución de problemas. En este tipo de enseñanza, las interrelaciones entre las diferentes áreas de las matemáticas no están del todo claras para el estudiante (Manhard, 1985). Se piensa que si se individualiza las ideas o destrezas necesarias para la solución de problemas, el estudiante no experimentará las dificultades de aprendizaje que normalmente se asocian a la consideración de situaciones que involucran una pluralidad de ideas relacionadas. Sin embargo, en la práctica, este tipo de aprendizaje es el que evidencia los niveles más bajos de aprovechamiento académico (Treffers, 1987).

Como ya se ha planteado, gran parte del aprendizaje no es ni más ni menos que el establecimiento por parte de quien aprende de vínculos y relaciones entre unas ideas y otras (Quintero, 1984). Son tales vínculos los que constituyen la estructura del conocimiento y los que permiten al estudiante apreciar mejor las relaciones entre unas ideas y otras.

Conclusiones

En fin, la enseñanza de las matemáticas debe proveer los contextos propicios para que el estudiante pueda establecer vínculos y descubrir relaciones entre las diferentes áreas del currículo. Tal vinculación se debe fomentar concertadamente, tanto en las guías curriculares como en los documentos normativos de la educación matemática, como en cada estudiante individualmente. La integración del conocimiento debe partir de la consideración de situaciones reales o contextuales, tomadas del mundo cotidiano de los estudiantes, los cuales permiten a éstos emplear estrategias informales en la búsqueda de conexiones matemáticas.

Referencias bibliográficas

Freudenthal, (1981). *Revisiting Mathematics Education*: China Lectures Kluwer Academic Publishers, The Netherlands

Manhard, W. (1985). Let's teach mathematics: A case for integrated mathematics programs. In C. Hirsch & M. Zweng (Eds.). *The secondary school mathematics curriculum* (pp. 189 - 199). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Quintero, A. (1986a). *La escuela que soñamos*. Editorial Universitaria: Rio Piedras.

Quintero, A. (1986b). *Que me pasa con las matemáticas*. Editorial Universitaria: Rio Piedras.

Quintero, A. (1986c). *Representaciones en la enseñanza de las matemáticas*. Editorial Universitaria: Rio Piedras.

Streefland, L. en Heuvel-Panhuizen, M. Van Den (1999). *Uncertainty, a metaphor for mathematics education.* Institute Freudenthal: Utrecht, Holanda

Treffers, A. (1987). Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in *Mathematics Instruction: The Wiskobas Project.* Kluwer D Reidel Pub Co: The Netherlands.

Matemática para Ingeniería Química: Una propuesta de diseño curricular

Víctor Martínez Luaces y Gladys Guineo-Cobs.
Facultad de Química - Universidad de la República. Montevideo. Uruguay.
victor@bilbo.edu.uy gladysgc@bilbo.edu.uy

Resumen

Este trabajo pretende exponer de manera resumida las experiencias de propuesta y puesta en práctica de un diseño curricular para la asignatura Matemática en la carrera de Ingeniería Química, estudiar sus posibilidades y optimizar su aprovechamiento.
El diseño curricular al que se hace referencia fue puesto en práctica, con el advenimiento del plan 2000 en la Universidad de la República, en Montevideo, Uruguay.
El proceso de diseño curricular tuvo lugar en varios ciclos de Investigación Acción: puesta en práctica, evaluación, obtención de conclusiones y realización de propuestas, cuyos elementos más importantes se intentan reflejar en este artículo.
Sobre la base de este proceso se formularan algunas conclusiones y recomendaciones.

Introducción

El planteo presentado en este trabajo, constituye el objetivo central de la tesis doctoral de uno de los autores, para aspirar al título de Doctor en Ciencias Pedagógicas en la República de Cuba (Martínez Luaces, V., en preparación).

Para realizar un diseño curricular adecuado, resulta fundamental tener en cuenta el medio en el que tendrán aplicación directa las investigaciones educativas. En tal sentido cabe aclarar que los mencionados estudios se han realizado teniendo en cuenta las necesidades de la carrera de Ingeniería Química. En el Uruguay, dicha carrera es compartida por Facultad de Química y Facultad de Ingeniería, lo que plantea una serie de particularidades y "condiciones de contorno" muy especiales, que deben ser tenidas en cuenta.

Para lograr este objetivo, se ha instrumentado un proceso de mejora continua, en diversos ciclos de Investigación - Acción (Martínez Luaces, V. y Guineo Cobs, G., 2002. a). Para este tipo de proceso, resulta fundamental evaluar las experiencias realizadas (Gómez, A., Martínez Luaces, V, 2002) y extraer conclusiones que guíen las futuras modificaciones a proponer.

Antecedentes

Entre los años 1995 y 1996 el Instituto de Ingeniería Química decidió iniciar los "contactos" a fin de elaborar una propuesta para un nuevo plan de estudio de la carrera de Ingeniería Química.

Con éste propósito se designó una pequeña comisión de trabajo, la cuál a su vez invitó a uno de los autores de éste artículo a colaborar en lo correspondiente a las materias de la asignatura Matemática. La propuesta resultó aprobada por el Instituto de Ingeniería Química en el año 1997, por los consejos de la Facultad de Ingeniería y Facultad de Química en el año 1999 y finalmente fue integrada al plan de estudios 2000 de las carreras que se dictan en Facultad de Química.

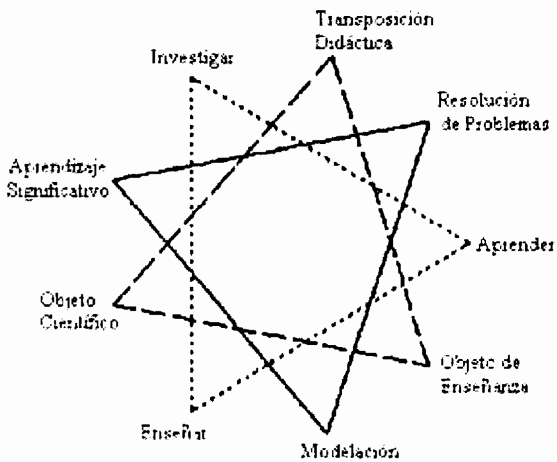
Para la elaboración de la propuesta se hizo (a) una revisión de programas y planes de estudio de Ingeniería Química en algunas de las más prestigiosas universidades de la región y (b) un análisis crítico de los programas de otras carreras afines a Ingeniería Química, en particular Ingeniería Mecánica e Ingeniería de Alimentos. Además se tuvieron en cuenta (c) las recomendaciones y sugerencias que hicieron llegar los egresados a través de la Asociación de Ingenieros Químicos, (d) las opiniones de los estudiantes del ciclo técnico (4º, 5º y 6º año de la carrera) de Ingeniería Química y se tomó especial atención a (e) los resultados del "Foro de Ingeniería Química" realizado a principios de los '90. De dicho foro participaron los principales docentes del Instituto de Ingeniería Química, docentes y autoridades de la Facultad de Química, estudiantes avanzados, egresados, etc.

Finalmente se consideraron algunas experiencias piloto que se habían realizado en Facultad de Química y Facultad de Ingeniería.

Marco teórico

Desde el punto de vista metodológico este diseño curricular ha sido desde sus orígenes una implementación concreta de los principios de la *Investigación – Acción*, ya que no se pretende lograr un diseño definitivo, sino ir solucionando los problemas que puedan surgir en el transcurso de su implementación, evaluar continuamente su funcionamiento y consecuentemente poner en práctica acciones correctivas (Contreras, J., 1995).

Con el nuevo plan de estudios las facultades involucradas pretenden que sus egresados tengan la capacidad creativa y crítica que les permita identificar y solucionar los problemas profesionales a que se enfrenten, con un mejor resultado para su país. Para ello en el plan el diseño curricular se organizó sobre la base de la *Resolución de problemas*, de modo que el alumno asuma un papel activo en el proceso de enseñanza aprendizaje. Es decir, se espera que el alumno logre *aprendizajes significativos*, a través de la *modelación, resolución e interpretación* de problemas de la vida real y/o profesional (Schöenfeld, A. H., 1983).



Este modelo de enseñanza-aprendizaje hace necesario, por parte de los docentes un trabajo interdisciplinario y un proceso de búsqueda continua de problemas que han de ser adaptados, transformándolos de *objetos científicos* en *objetos de enseñanza*.

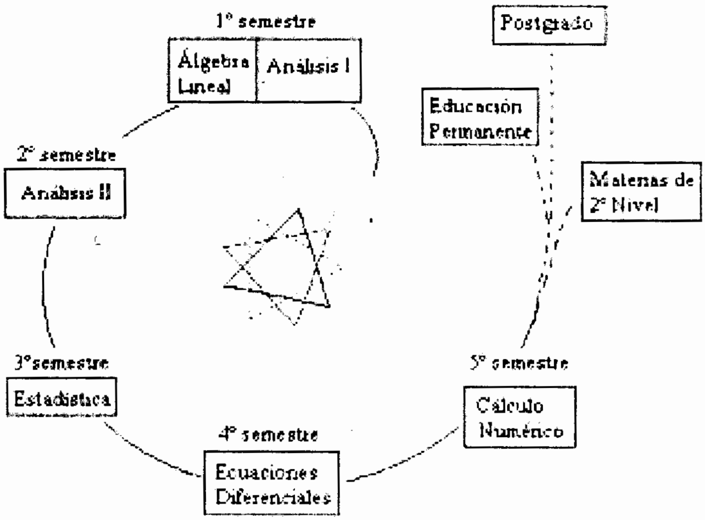
Una adecuada *transposición didáctica* (Chevallard, Y., 1991) debería permitir que el problema convertido en objeto de enseñanza genere una *zona de desarrollo próximo* (Vigotsky, L. S., 1978). En otras palabras, la solución del problema se debe plantear de forma tal que se encuentre en el nivel de desarrollo potencial del alumno y su procedimiento de resolución permita (al estudiante) acceder a los conocimientos necesarios con la ayuda del docente o un compañero más avanzado.

Como se puede ver, en este punto confluyen dos teorías importantes que fueron adoptadas por este nuevo diseño curricular en matemática, como marco teórico y metodológico para el trabajo en el aula, las mismas son la teoría de aprendizaje de Vigotsky, denominada *Constructivismo Social,* y la *Ingeniería Didáctica.*

En estos procesos de búsqueda y transposición didáctica de problemas, y enseñanza e investigación quedan difuminadas las fronteras entre quien enseña y quien aprende, entre quien es el investigador y quien el docente. No hay separación de tareas. El proceso educativo es uno y consiste justamente en eso: *enseñar* o *aprender* a *investigar* y, para ello, *investigar* cómo se *aprende* o *enseña* (Fernández, V. et al, 1999).

Diseño curricular

A partir de ese marco teórico que viene a ser el centro de la espiral en éste diseño curricular, van teniendo lugar a lo largo de los cinco primeros semestres las distintas materias de la asignatura matemática.



Comenzando por el 1° semestre las materias son Análisis Matemático I y Álgebra Lineal. Si bien no interesa especificar el detalle de los contenidos es conveniente aclarar que el curso de Análisis Matemático I no es sólo el típico curso de Cálculo Diferencial e Integral en una variable, en efecto, se agregan algunos temas como número complejo y una introducción a las Ecuaciones Diferenciales y a la Transformada de Laplace, vista esta última como una integral impropia paramétrica. La inclusión de número complejo y de algunas ecuaciones diferenciales es relativamente común pero lo que no se ha visto en ninguno de los programas y planes de estudio es la presencia de la Transformada de Laplace en el primer semestre. Esta innovación surgió de un pormenorizado estudio con el objetivo de facilitar la comprensión (Martínez Luaces, V., 2000) y optimizar el relacionamiento con otras materias (Martínez Luaces, V, Alfonso, M., 2000). Más allá de las innovaciones temáticas el enfoque de los temas (al menos en el plan) está orientado a la resolución de problemas químicos concretos.

De igual modo en álgebra se tratan los temas clásicos del Álgebra Lineal y se llega al final del semestre a tratar temas como diagonalización de matrices y forma canónica de Jordan por su importante vinculación con otras materias como es el caso de Ecuaciones Diferenciales (Martínez Luaces, V, 2000).

Para el 2° semestre la única materia de Matemática programada es Análisis Matemático II en el cual prácticamente todos los temas de Análisis Matemático I se vuelven a ver con un enfoque más general al trabajar con funciones en varias variables (escalares y vectoriales) En este caso las aplicaciones y la orientación en general está más orientada a Fisicoquímica (Martínez Luaces, V., 2001, c) Este curso finaliza con un módulo de Cálculo Vectorial con un enfoque netamente aplicado a asignaturas como Física, Química General, Fluidodinámica (Martínez Luaces, V. y Guineo Cobs, G., 2001).

Para el 3^er^ semestre de la carrera el plan prevé un curso denominado Estadística, en el cual se hace una introducción a la teoría de las probabilidades y luego se tratan los temas específicos que tienen que ver con el tratamiento estadístico de datos, dándole mayor relevancia a esta última a diferencia del programa correspondiente al plan anterior (Martínez Luaces, V, Cuitiño, E., 2000).

El hecho de que este curso esté ubicado en este semestre obedece a las necesidades de materias como Química Analítica y Fisicoquímica, fundamentalmente la primera de ellas. Por este motivo la resolución de problemas en Estadística está en esta propuesta orientada a la resolución de problemas de Análisis Químico Cuantitativo, Cualitativo e Instrumental. En el 4° semestre se dista el curso de Ecuaciones Diferenciales que comprende temas de EDO, Transformada de Laplace y EDP, integrando los enfoques algebráico, analítico y cualitativo, lo que permite volver a tocar temas de tres de los cursos anteriores Análisis Matemático I, Análisis Matemático II y Álgebra, pero con una mayor profundidad y aplicabilidad. Al mismo tiempo permite una fuerte conexión con las demás asignaturas, Física, Química General, Fisicoquímica (Cinética Química), etc. y con los problemas de la vida real (Martínez Luaces, V., Guineo Cobs, G., 2002. a).

En el 5° semestre tenemos el último curso obligatorio de Matemática para Ingeniería Química, se trata de Cálculo Numérico. Este curso funciona como materia integradora de todas las anteriores ya que se tratan resolución de ecuaciones algebraicas, derivación, integración, resolución de EDO, resolución de EDP y cálculos estadísticos con distribuciones especiales (Martínez Luaces, V., Guineo Cobs, G., 2002. b).

En este punto la currícula se ramifica en al menos tres posibilidades no excluyentes:

a) Cursos de segundo nivel: se trata de cursos de grado semestrales con un número de créditos asignado igual que en cualquier otro curso, pero de carácter opcional. Los temas de estos cursos son más específicos e implican siempre alguna profundización de temas anteriores. Ejemplo: Estadística Avanzada y Optimización.

b) Cursos de postgrado: hace algunos años se implementó la maestría en Ingeniería Química que cuenta entre sus cursos permanentes al menos un curso de Matemática denominado "Ecuaciones en Derivadas Parciales: Aplicación a la Ingeniería Química".

c) Cursos de Educación Permanente: En estos cursos se profundizan algunos temas específicos que son de interés fundamentalmente para los egresados. Son cursos de poca duración, bastante intensivos y tiene una evaluación opcional. Su objetivo es actualizar al profesional en algún tema concreto que presente una importante aplicabilidad, por ejemplo, "Diseño de Experimentos", "Tratamiento Estadístico de Datos", "Control de Calidad", etc.

De estas tres opciones, la última se viene instrumentando desde 1995, la segunda desde 1997 y la primera, que es la más reciente, esta prevista para el próximo semestre.

Cabe agregar que el diseño curricular realizado no se limitó a los contenidos disciplinares. El mismo incluyó contenidos conceptuales, actitudinales y metodológicos, de acuerdo a las sugerencias de algunos investigadores reconocidos en el área del diseño curricular (Rico, 1998).

Resultados

Este nuevo plan fue evaluado muy positivamente por los Consejos Directivos de ambas facultades ya que se logró una mejor articulación con otras asignaturas de la misma carrera, se consiguió una mejor adaptación a los requerimientos de cada una de las carreras químicas, se lograron subsanar las dificultades del plan anterior y fundamentalmente, se modificó la actitud de los estudiantes frente a las materias que imparte la cátedra. El cambio de actitud en el alumnado ha tenido como componente principal el enfoque aplicado de los cursos, los que a su vez se adaptan mejor a las necesidades de cada carrera (Martínez Luaces, V., Guineo Cobs, G. y Acher, R., 2001) y producen un efecto muy positivo en la motivación (Martínez Luaces, V., Guineo Cobs, G. y Acher, R., en prensa).

Todo lo anterior ha sido corroborado mediante análisis estadístico de los datos de las encuestas de evaluación de calidad de enseñanza, tanto utilizando técnicas del Análisis Multivariado (Gómez, A., Guineo Cobs, G. y Martínez Luaces, V., 2002) como de la Estadística Paramétrica y la Estadística No Paramétrica (Gómez, A., Martínez Luaces, V., 2002).

Conclusiones

De todo el proceso anteriormente descrito surge que la Investigación-Acción es una herramienta idónea para el mejoramiento no sólo de un curso en particular (Martínez Luaces, V., Guineo Cobs, G., 2002. a), sino de toda la curricula matemática de una determinada carrera (Martínez Luaces, V., en preparación). Este mejoramiento continuo implica identificar el o los problemas a resolver, diseñar encuestas, analizar la información y sobre la base de las conclusiones obtenidas, realizar propuestas concretas que repercutan en el trabajo del aula. En tal sentido, es fundamental que no se produzca una separación entre quienes enseñan y quienes investigan (Contreras, J., 1995). Por el contrario, el docente debe investigar sobre su propia práctica (Stenhouse, 1984), ya que el proceso educativo es uno y consiste justamente en eso: enseñar o aprender a investigar y para ello, investigar cómo se aprende o enseña (Fernández, V. et al, 1999).

En cuanto a esta propuesta en particular, la resolución de problemas (Schöenfeld, A. H., 1983), en su mayoría provenientes de otras asignaturas y de situaciones de la vida real, resultó fundamental en el logro de una mayor motivación y un mejor ajuste a las necesidades específicas de la carrera de Ingeniería Química (Martínez Luaces, V., 2001)

Un capítulo aparte merece el equipo docente a cargo de la investigación y la puesta en práctica de la propuesta. Entendemos que dicho equipo debería tener una conformación interdisciplinaria (Fernández de Alaiza, B., 2001). En efecto, esto asegura una diversidad de enfoques e intereses, que repercute en una mayor adaptación de la curricula matemática a la carrera en estudio y un mejor aprovechamiento de la misma.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no se trata únicamente de lograr una yuxtaposición de disciplinas en un mismo equipo. Por el contrario, el trabajo del equipo debe dar lugar a un intercambio de ideas enriquecedor.

En definitiva, para realizar los cambios adecuados, es necesario un equipo docente con un genuino interés en la Matemática como asignatura de servicio, tanto en los referente a su enseñanza como en lo que tiene relación con la investigación en Matemática Educativa.

Referencias bibliográficas

Contreras, J. (1995). La investigación en la acción. *Cuadernos de pedagogía* 224. pp. 8 – 19.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique. Pp. 44 – 45.

Fernández, B. (2001). *La Interdisciplinariedad como base de una estrategia para el perfeccionamiento del diseño curricular de una carrera de ciencias técnicas y su aplicación a la carrera de Ingeniería en Automática en la República de Cuba*, Tesis presentada ante el Tribunal Nacional de Ciencias Pedagógicas, La Habana, Cuba.

Fernández, V. et al (1999). *Educación Matemática para no matemáticos* San Juan (Argentina): Editorial Fundación Universidad Nacional de San Juan.

Gómez, A.& Guineo, G. y Martínez, V. (2002). Análisis Multivariado: una metodología para procesar encuestas sobre calidad de la enseñanza en carreras de Ingeniería, página web de las Memorias del X EMCI: , *http://ing.unne.edu.ar/emci*

Gómez, A. y Martínez, V. (2002). Evaluación docente utilizando Análisis Multivariado, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Martínez, V y Alfonso, M. (2000). La Transformada de Laplace en Química, sus aplicaciones y posibilidades educativas, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 13. pp. 147 – 153.

Martínez, V y Guineo, G. (2002a). Un trabajo de Investigación - Acción en un curso de Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería de Alimentos. Página web de las *Memorias del X EMCI*: , *http://ing.unne.edu.ar/emci*.

Martínez, V. y Guineo, G. (2001). Integrales Impropias, de Línea y de Superficie: un Relevamiento y una Propuesta para su Enseñanza en Carreras de Ingeniería. *Actas IN – MAT /2001*: http://www.fi.uba.ar/novedades/congresoinmat.

Martínez, V. (2000). Una innovación en los cursos de Matemática para algunas carreras de Ingeniería, CD: *IX EMCI*, Concepción del Uruguay, Argentina.

Martínez, V. (2001c). Algunos teoremas del Cálculo Diferencial en Matemática y Fisicoquímica: Una propuesta de articulación. *Actas de COMAT 95, 97, 99.* Matanzas: UMCC. ISBN 959 – 160097 – 6.

Martínez, V. (2001).Enseñanza de matemáticas en carreras químicas desde un enfoque aplicado y motivador. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas 45*.43-52.

Martínez, V. y Cuitiño E. (2000). Estadística para Químicos: ¿Qué enseñar?. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13

Martínez, V. (en preparación). Tesis sobre la curricula de Matemática en Ingeniería Química.

Martínez, V. y Guineo, G. (2002). Numerical Calculus and Analytical Chemistry: An example of interdisciplinary teaching, CD: *Communications 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level.*

Martínez, V. & Guineo, G. y Acher, R. (2001). Distance learning in Uruguay: Two different experiences. *Proceedings Third Southern Hemisphere Symposium on Undergraduate, Delta'01*

Martínez, V. & Guineo, G. y Acher, R. (en prensa). Enseñanza de Matemática en la modalidad de Educación a Distancia: algunas conclusiones de tres años de experiencias. *Actas del Foro sobre Innovaciones Pedagógicas en la Universidad de la República.*

Rico, (1998). Complejidad del currículo de Matemáticas como herramienta profesional. *RELIME*. 1. pp. 22 – 39.

Schöenfeld, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical Problem solving. *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press.

Stenhouse, (1984). *Investigación y desarrollo del curriculum*. Madrid: Morata.

Vigotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The Development of Higher Psychological Processes*, USA: Harvard University Press.

Una experiencia de integración de la tecnología educativa y la escuela histórico cultural en la enseñanza y aprendizaje de la integral indefinida.

Teresa Carrasco Jiménez, Alberto Fiol Zulueta y Fernando Martínez
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría". Cuba
tcarrasco@mecanica.ispjae.edu.cu

Resumen

Los autores de este artículo son profesores investigadores que trabajan en el perfeccionamiento de la enseñanza de las diferentes asignaturas matemáticas del currículo del Ingeniero Mecánico. El presente trabajo presenta una investigación realizada en el tema de Integral Indefinida. En el mismo se pudo constatar que la secuencia de presentación de los contenidos se muestra a los estudiantes de forma fragmentada y no como un sistema único, donde se manifiesta la interrelación entre los temas que lo componen.

El marco teórico de la investigación es enfoque histórico-cultural de L. S. Vigostky y en particular la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas de Galperin y seguidores. En este trabajo se conjugan los aportes de dicha teoría al proceso de enseñanza, los aportes de Z.A. Réshetova en diferentes variantes para la estructuración sistémica de los contenidos de las asignaturas y el empleo de la Tecnología Educativa.

Introducción

El desarrollo alcanzado por la ciencia contemporánea como resultado de la Revolución Científica conlleva a realizar cambios en todas las esferas de la vida. Estos cambios tienen lugar también en la enseñanza y en particular en la enseñanza superior. En Cuba, como en otros países el hombre contemporáneo necesita de un volumen superior de conocimientos, estos conocimientos recibidos envejecen muy rápido y por ello es necesaria la instrucción permanente, más aún la preparación de especialistas que estén preparados para la obtención de forma de independiente de nuevos conocimientos.

Resulta, entonces, importante crear alternativas para renovar el proceso de enseñanza aprendizaje en las que se integren los avances de la pedagogía contemporánea con el empleo de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones.

En el Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería Mecánica del ISPJAE se trabaja en el perfeccionamiento de la enseñanza de las diferentes asignaturas que se imparten, en este trabajo se muestra una propuesta de reestructuración al tema de **Integral Indefinida** correspondiente a la asignatura Matemática I, teniendo como base la conjugación de algunos aportes del Enfoque Histórico- Cultural de L. S. Vigostky y de la Tecnología Educativa al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Desarrollo

Aunque se han realizado esfuerzos con respecto a la elaboración de los planes y programas de estudios, en la actualidad el programa de la disciplina de Matemática Superior adolece de dificultades, tales como:

- Los contenidos están agrupados en bloques organizados en conferencias y clases prácticas sin considerar el carácter sistemático de los conocimientos y habilidades.
- No se precisan los indicadores y criterios que al propiciar el autocontrol y la autorregulación del estudiante permitan mejorar las funciones de retroalimentación y de autoregulación del control y evaluación dentro del proceso de asimilación.
- La necesidad de introducir las nuevas tecnologías en el desarrollo sistemático de las asignaturas.

En particular, al realizar el análisis de la asignatura Matemática I, específicamente el tema de **Integral Indefinida** se pudo constatar que la secuencia de presentación de los contenidos se muestra a los estudiantes de forma fragmentada y no como un sistema único, donde se manifiesta la interrelación entre los temas que lo componen. Basta señalar que en el curso tradicional los métodos de integración se estudian aisladamente y no como variantes particulares de un mismo objetivo.

A lo anterior expuesto, se puede sumar que los resultados de estudios diagnósticos efectuados permiten aseverar que los estudiantes olvidan muy rápidamente lo que en un momento determinado demostraron haber aprendido; en particular el uso de la tabla de integrales indefinidas, herramienta de gran utilidad en su profesión.

Todo esto hace evidente que cualquier intento de solución debe tener como base teórica, una teoría psicopedagógica del aprendizaje, la cual se basa en el Enfoque Histórico- Cultural de L. S. Vigostky y en particular de la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas de Galperin y más recientemente, los trabajos realizados por N. F. Talizina, en la aplicación de la teoría de la actividad al proceso de enseñanza, Z. A. Reshiteva y otros colaboradores, en diferentes variantes para la estructuración sistémica de los contenidos de las asignaturas, que se integre con el empleo de la Tecnología Educativa, la cual ha oscilado fundamentalmente entre dos posiciones, la primera es la de equiparar con los medios tecnológicos facilitadores del aprendizaje y la segunda que la concibe como un proceso sistemático, global y coordinante de todas las variables que intervienen en la educación para así lograr su mejora, garantizando la transformación del proceso desde un enfoque integral, renovador y progresista de la formación de la personalidad plena del hombre.

Para la nueva estructuración del tema **Integral Indefinida** se utilizó la variante estructural funcional en la que el objeto es descrito en su nivel más desarrollado en su totalidad destacándose su composición y estructura. En este caso el tipo de enlace principal es el estructural, denominándose invariante del sistema a las características estructurales funcionales estables de cada nivel.

En la organización tradicional del contenido, en el proceso de integración se estudian cada uno de los métodos de integración, distribuidos en tres conferencias y seis clases prácticas de ejercitación de cada uno de estos métodos, comenzando la utilización de la tabla de integrales en las dos últimas clases prácticas.

En la nueva organización del contenido, la primera actividad es partir de una situación problémica en una conferencia, en la que se imparten los conceptos generales sobre el tema **integral indefinida**, se generalizan las integrales de las funciones elementales, se introduce la tabla de integrales explicando su uso y composición, a través de la necesidad de solucionar un ejemplo se llega al estudio de los métodos de integración, que son en realidad un conjunto de vías alternativas de trabajo no excluyentes, que en muchas ocasiones se complementan y cuya aplicación depende fundamentalmente de dos cuestiones:

1. Las características del integrando, y
2. La habilidad que hay adquirido el estudiante.

Sobre esta base se ha creado una base orientadora de la actividad (BOA) para el cálculo de la integral indefinida de tipo 3, caracterizada por el hecho de que la orientación es aplicada a todo un conjunto de fenómenos y se establece en cada caso concreto por el alumno de forma independiente, con ayuda de métodos generales que se le dan, lo cual permite la formación de acciones rápidamente, con gran estabilidad y nivel de generalización. Además, debe quedar claro al estudiante:

- ¿Cuáles son los rasgos que le permiten seleccionar uno u otro método de integración?.
- ¿Qué es lo que diferencia a un método de otro y qué es lo esencial que está presente en todos ellos?

En una tarjeta de estudio se recogen de forma esquemática las relaciones en el sistema conceptual y los procedimientos operacionales para realizar la acción vinculada con el cálculo de la integral indefinida.

Esta tarjeta, además de individualizar el proceso permite dar un mayor volumen de conocimientos y procedimientos de carácter general, facilitando su comprensión y fijación a través de su propia utilización.

Durante la clase, tomando como punto de partida la presentación de diferentes casos se establece conjuntamente con los estudiantes mediante el análisis del esquema de la BOA.

En esta etapa aún no hay ninguna acción por parte del alumno, sino sólo el conocimiento de la acción y de las condiciones de su exitoso cumplimiento. Con relación a esta etapa, escribe Galperin: "Nuestro alumno aún no tiene la propia acción, no la ha realizado todavía, y sin efectuar la acción no puede aprender".

Es bueno destacar que esta diferencia entre la comprensión de cómo hay que actuar y la posibilidad real de hacerlo es especialmente subrayado por N. F. Talízina, quien señaló: "De hecho la asimilación de la acción (de la actividad) se opera sólo a través del cumplimiento de esta acción por el propio alumno, y no sólo mediante la observación de las acciones de otras personas".

Para cuatro actividades docentes, se elaboró un sistema de tareas que propician la realización de las acciones que se quieren formar en los estudiantes: el grado de generalización, el grado de despliegue, el grado de conciencia y el grado de independencia; además, estas tareas en su forma de presentación se corresponden con la etapa de asimilación en lo que se insertan (materializada o material, verbal y mental).

A continuación, se muestra a modo de ejemplo una de las tareas concebidas para la etapa verbal. Como requisito previo a esta tarea, los estudiantes habían asimilado operaciones tales como derivadas, operaciones entre funciones, entre otras.

Tarea

I. Dada las siguientes integrales (sin ayuda de la tarjeta de estudio)

a. Seleccionar el (los) método (s) que permitan calcularlas.

b. En cada uno de los casos, explica cuáles fueron los elementos que tuviste en cuenta para seleccionar el (los) método (s) de integración para su cálculo.

c. Calcule las integrales, utilizando el (los) método (s) de integración seleccionado, explique el razonamiento en el cálculo realizado.

$i.\int \text{sen}^5 2x \cos 2x dx$; $ii.\int (x+4)(\sqrt{x}+2)dx$, $iii.\int x \sec x \tan x dx$, $iv.\int \ln \sqrt{x^2+1}dx$

$v.\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx$; $vi \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; $vii.\int \frac{\text{sen } x}{x}dx$

Indicadores de autocontrol

- Si consideras las características del integrando.
- Si verifica si el integrando contiene algunas de las expresiones partir de las cuales se han agrupado las integrales de la tabla.
- Si al seleccionar el método de integración tuvo en cuenta las características del integrando para aplicar el método.
- Si después de transformar la integral, la nueva integral es más sencilla que la primera.

En esta tarea, los estudiantes deben estar en una etapa verbal por lo que descrita su realización el profesor no exige solo la transformación práctica del objeto sino el razonamiento teórico a un nivel verbal o escrito de forma tal que la acción se transforme de la lógica de la acción a la lógica del concepto y trabajar así la generalización del grado de reflexión basado fundamentalmente en el lenguaje oral o escrito, donde el estudiante se vea obligado a argumentar lo que hizo y por qué lo hizo.

La tarea a ejecutar con estos fines se concibió ya no tan obligada, sino con el número de operaciones mínimo y se incluyen también ejercicios de aplicación a ejecutar. En esta etapa, los estudiantes al realizar la tarea no utilizan la tarjeta de estudio, por lo tanto al ejecutar la tarea lo hacen de manera más independiente.

El grupo se organizó en parejas o en equipos por lo que se le suministró el sistema de indicadores para su valoración. Al analizar la tarea de su compañero el estudiante debe tener en cuenta no sólo la respuesta para concluir si es correcta o no, sino también el proceso de modo de poder argumentar si se tuvo o no en cuenta todo el sistema de condiciones.

La utilización de estas técnicas grupales contribuye a la formación en los estudiantes de diferentes características de la acción, a elevar el nivel de relaciones, de comunicación entre todos, lográndose así efectos educativos a través de la propia organización de la enseñanza.

La última actividad se concibió la utilización de un asistente matemático (DERIVE) para el cálculo de diferentes integrales indefinidas, para lo cual se confeccionó una lista de ejercicios en los que se incluyeran los diferentes métodos de integración a ser desarrollada en un laboratorio de computación y de forma individual, con la presentación de un informe con los resultados obtenidos.

El uso de este asistente matemático, permitió al estudiante enfrentarse a un mayor número y variedad de casos de cálculo de integrales indefinidas, además de poder verificar los resultados obtenidos al considerar la integración indefinida como el proceso inverso a la derivación, luego que se le pidió la comprobación de los resultados utilizando el DERIVE.

En la aplicación de esta nueva estructuración del tema, se le presentó gran atención al control por su importancia en el logro de una adecuada dirección y calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El control preliminar estuvo dado por la evaluación de conocimientos que se hicieron al terminar el tema anterior (diferenciación), requisito previo para el inicio del nuevo tema. Este control sirvió de retroalimentación de la marcha del proceso y para el estudiante a su vez, en muchos casos le sirvió de motivación y ayuda ya que se le señalaron los errores y aciertos permitiéndosele corregir estos.

Durante la marcha del proceso y en el tránsito de las etapas también estuvo presente el control al solucionar los estudiantes las diferentes tareas que se les presentaron, el profesor se informó sobre la marcha del proceso de aprendizaje del alumno en cada etapa, en la primera si está o no motivada, en la segunda es conveniente informarnos del grado de comprensión logrado y de la tercera en adelante debe conocer cómo el estudiante realiza la acción indicada.

El que se le brinde a los estudiantes en los diferentes tipos de tareas los indicadores de autovaloración permite desarrollar en estos el autocontrol, objetivo fundamental en el control del proceso de aprendizaje y cumple además la función de ayuda, ya que el alumno puede comprobar las acciones realizadas por él con el modelo correcto lo que le da la posibilidad de encontrar el eslabón donde cometió el error y rectificarlo con ayuda del modelo.

Este control frecuente realizado en el momento oportuno permitió una mayor motivación del estudiante hacia el estudio y asimilación del contenido. El control final de este tema se realizó como parte de una prueba al finalizar el semestre en la que en dos preguntas se evaluó este tema.

En la evaluación de dichas preguntas se consideró no sólo la evaluación de conocimientos y habilidades, sino también las características de la acción formada.

Conclusiones

Con esta variante de estructuración sistemática del contenido del tema **Integral Indefinida** correspondiente a la asignatura Matemática I para el perfil mecánico integrado con el uso de asistente matemático que sin disminuir el contenido exigido permite la función o generalización de ellos, resultando ser el proceso de asimilación más activo y caracterizado por:

- El uso de las tarjetas de estudio que contribuye a individualizar en cierta medida el proceso de asimilación, disminuyendo el tiempo de inactividad que por desconocimiento o comisión de errores caracteriza a la enseñanza tradicional.
- Las variantes de control utilizadas durante la experiencia, que contribuyeron en forma importante a la retroalimentación de profesores y estudiantes.
- La utilización de métodos activos de aprendizaje.
- La familiarización de los estudiantes con el uso de asistentes matemáticos.

Referencias bibliográficas

Area M., Castro F., Sanabria A.L. La Tecnología Educativa en este final de siglo. Una mirada incierta. España. 1995

Canfux V. Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. U. H. CEPES. Corporación Universitaria de Ibagué. Cuba-Colombia. 1996.

Hernández R. L. y otros. Una experiencia de integración de tecnología de avanzada en la disciplina Matemática Superior para Ingenieros. Memorias de INFOMADI. La Habana. Cuba. 1998.

Reshetova, Z. A., 1988. Selección de Lecturas. Análisis Sistémico aplicado a la Educación Superior. Moscú.

Sanz C. T., Rodríguez P. M. E. El Enfoque Histórico Cultural: su contribución a una concepción pedagógica contemporánea. CEPES. U. H. La Habana. Cuba. 1999.

Swokowski E.W. Cálculo con Geometría Analítica.

Estado del Arte de la Matemática Educativa en Latinoamérica.

Luis Campistrous — Cuba — campi@infomed.sld.cu

Cecilia Crespo Crespo — Argentina — ccrespo@sinectis.com.ar

Víctor Martínez Luaces — Uruguay — victorml@fing.edu.uy

Eréndira Valdez — México — ervaldez@mail.ajusco.upn.mx

Resumen

El grupo de trabajo sobre el estado del arte en la Matemática Educativa en el ámbito de trabajo del CLAME se reunió durante RELME 16 y concentró su trabajo en el análisis de las líneas de investigación que se reflejan en las actas y reuniones, así como discutió propuestas para facilitar la organización de los trabajos y las actas futuras.

A continuación resumimos los aspectos más importantes de los trabajos a fin de que sean conocidos por la comunidad y propiciar el inicio de un trabajo más amplio de discusión a partir de la continuación del grupo en RELME 17.

Acerca de las líneas de investigación

Sobre la base de la clasificación de los artículos en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 15, se propone primeramente un comentario acerca de cada uno de los ítems en los que se han clasificado los trabajos. Esta clasificación tomó como partida los propuestos en los volúmenes 12 y 13, con algunas modificaciones incorporadas, de acuerdo con las clasificaciones dadas por los autores y la evolución de los trabajos presentados.

- ***Pensamiento matemático avanzado***

Se trata de artículos de Nivel Medio y Superior.
Algunos de estos artículos tuvieron su origen en experiencias de aula, otros forman parte de investigaciones sistemáticas que se realizan en la comunidad del Clame y tienen sus antecedentes en publicaciones de años anteriores.

- ***Pensamiento numérico y algebraico***

Los artículos se encuadran dentro de Nivel Básico, Medio y Superior. En este caso, encontramos trabajos propuestos por formadores de docentes, por docentes que presentan los resultados de sus investigaciones particulares y por grupos de investigación constituidos en distintos países y que tienen tradición de presentación de trabajos en RELME.

- ***Pensamiento geométrico***

Aparecen trabajos orientados a Nivel básico, Medio y Superior.
La revalorización de la geometría en la enseñanza es una característica que ha tomado gran importancia a nivel mundial. Este fenómeno se traduce en la presentación de distintos artículos provenientes de investigaciones orientadas a la visualización y al aprovechamiento para la enseñanza de la geometría de recursos gráficos, computacionales, materiales concretos de diversa índole, analíticos, etc.

- ***Pensamiento relacionado con probabilidades y estadística***

A pesar de la presentación de trabajos a Nivel Básico, Medio y Superior, el desarrollo de esta línea es escaso. Aparecen investigaciones aisladas en Latinoamérica. Esta línea, poco abordada en las investigaciones, se presenta como uno de las pedidas por los docentes a cargo de cursos a nivel básico y medio.

- ***Epistemología e historia de la matemática***

Se trata de artículos de Nivel Medio y Superior.
El abordaje socioepistemológico de temáticas medulares en la enseñanza de las matemáticas constituye una de las características de las investigaciones de participantes de Clame. Algunas investigaciones son realizadas por grupos institucionalizados, otras a nivel personal, pero con aspectos similares en cuanto al enfoque. También se han incluido en este ítem algunos artículos en los que se revaloriza a la historia como recurso didáctico.

- ***Incorporación de distintas perspectivas***

Los artículos se encuadran dentro de Nivel Básico, Medio y Superior.
La consideración de este ítem es de gran importancia, ya que permite incluir trabajos con propuestas innovadoras o no estándares. No debemos olvidar como dato anecdótico que en el ICME-4 (4° Congreso Internacional de Educación Matemática), llevado a cabo en Berkeley en 1980, sólo se desarrolló una sesión dedicada a la resolución de problemas bajo la categoría: "Aspectos poco comunes de los planes de estudios". Por esta causa, las "distintas perspectivas", pueden ser el germen de nuevas líneas de investigación que se convertirán en fundamentales en el futuro. Se presentan últimamente trabajos orientados a aprendizaje cooperativo, enseñanza para la diversidad, educación especial, etc.

- ***Uso de tecnología***

Los artículos se encuadran generalmente dentro de Nivel Medio y Superior. La utilización de calculadoras graficadoras en el aula ha sido incorporada recientemente a la enseñanza. Las computadoras también se han constituido en recursos aplicables en la enseñanza de la matemática. Esto ocasiona la presentación de diversas propuestas para el abordaje de temáticas variadas en los tres niveles. Los avances tecnológicos son aprovechados para motivar y facilitar los aprendizajes; el poder de este enfoque mediante la utilización de software abre perspectivas que están siendo abordadas por investigadores de los distintos países de manera institucionalizada o espontánea.

- ***Resolución de problemas***

Artículos de Nivel Básico, Medio y Superior.
Es indudable la importancia que tiene el enfoque de la resolución de problemas. Las investigaciones en esta área son muy numerosas. Se presentan trabajos orientados a diversos temas y niveles.

- ***Evaluación***

Se trata de artículos de Nivel Medio y Superior.
Las investigaciones evaluación no es una de las líneas frecuentemente abordadas por la comunidad de Clame. Sin embargo, se trata de una línea que aunque nueva, se perfila como "de punta" en las investigaciones actuales, debido a las demandas y a la escasez de publicaciones al respecto.

- ***Teoría y metodología***

La exposición de resultados teóricos, producto de investigaciones, se constituye en aportes que permiten la fundamentación o bien la orientación del pensamiento de los investigadores.

- ***Formación de profesores***

Se presentan trabajos de Nivel Básico, Medio y Superior, provenientes muchos de ellos de cursos y talleres dictados durante RELME. Estos se entroncan muchas veces con otras temáticas: resolución de problemas, pensamiento geométrico, pensamiento algebraico, evaluación (a partir del análisis de los errores).

- ***Educación a distancia***

De gran importancia para la comunicación de grupos distantes, aunque con pocos trabajos agrupados bajo esta categoría.

- ***Desarrollo del Curriculum***

Se presentan trabajos de Nivel Medio y Superior, en los que se analiza la organización de los contenidos y cursos.

1ra. Propuesta

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores, se consideró posible proponer como primer acercamiento, las siguientes líneas como aquellas de mayor madurez en la comunidad de Clame. (Es posible que sea necesario reestructurar sus nombres en algún caso, para permitir una mayor identidad de las investigaciones realizadas). Por otra parte, parece importante que en las RELME's siguientes se reestructure la clasificación de los trabajos según estas líneas, reemplazando la clasificación que venimos utilizando hasta RELME 16, para facilitar de esta manera la organización de resúmenes y actas.

- ***Pensamiento matemático avanzado***
- ***Pensamiento numérico y algebraico***
- ***Pensamiento geométrico***
- ***Epistemología e historia de la matemática***
- ***Incorporación de distintas perspectivas***
- ***Uso de tecnología***
- ***Resolución de problemas***
- ***Teoría y metodología***

Como líneas en las cuales la comunidad de Clame aún no presenta madurez, pero en las cuales parece importante introducir para promover su desarrollo, tal como se viene perfilando en las distintas corrientes de investigación sobre la enseñanza de la matemática a nivel mundial y de acuerdo con los requerimientos de los docentes en varios países:

- ***Pensamiento relacionado con probabilidades y estadística***
- ***Evaluación***
- ***Educación a distancia***

2da Propuesta

En vista de que este trabajo pretende abordar las formas organizativas para hacer una descripción de los aportes de la comunidad del CLAME en el Campo de la Matemática Educativa durante los trabajos presentados en las RELME's, se consideró conveniente en esta segunda propuesta que se tomaran en cuenta, de entrada, los trabajos que han sido documentados con reportes en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, para recuperar estas experiencias en ***una visión retrospectiva***.

A partir del primer panorama pudieran delinearse orientaciones teóricas abordadas y vigentes, encuadres teóricos que caracterizan los trabajos realizados por la comunidad, líneas de investigación y/o intervenciones educativas con mayor avance. Surgen posibilidades de definición estratégica que permiten dar a la comunidad CLAME ***un trabajo en prospectiva*** para pensar en el colectivo en propuestas de metas de mediano y largo plazos en los escenarios que hoy día tenemos ya disponibles para este tipo de trabajos. Se trata de trabajos originados tanto en la investigación y/o intervención educativa que se realizan en marcos institucionales, así como en los programas de postgrados que desde diferentes ciudades latinoamericanas dan ya cobertura a los equipos de académicos.

Con esta consideración, podría pensarse en un esquema de agrupación que permita hacer la reconstrucción teórica en un meta-análisis, y esto es posible si se trasciende el plano descriptivo, y se procede a formar amplias categorías de agrupación para el análisis en grupos de trabajos, que si bien serán los sitios donde se ubique la producción que hasta la fecha tenemos, puedan dar lugar a una reflexión ordenada y con posibilidades de organización sobre el material.

Se proponen los siguientes agrupamientos:

- ***Tratamiento de contenidos y/o habilidades matemáticas*** (epistemológico- disciplinario)

Está ampliamente representado en los trabajos que abordan ***análisis sobre el tratamiento de temas de contenido*** como son Aritmética, Álgebra, Geometría, Cálculo, Probabilidad, Estadística y otros más especializados... Una de las tendencias en los últimos años ha sido considerar como parte fundamental del tratamiento didáctico disciplinario, el aspecto de tipo cognitivo, y trabajar con los temas de "pensamiento matemático avanzado", "....el medio" y "pensamiento matemático inicial".... De aquí derivarían las subcategorías de este agrupamiento.

En este agrupamiento se ubica la mayor parte de los trabajos de nuestra comunidad. Representa uno de los logros más considerables, y con aportaciones significativas.

- ***Estudios sobre encuadres teórico- metodológicos*** (Psicológicos, Didácticos,)

Quedarían en este agrupamiento los trabajos cuyo eje de desarrollo es la aplicación, adaptación, o nueva elaboración, de un encuadre psicológico o didáctico para mirar a través de él, el proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas. La diferencia con el agrupamiento anterior es que aquí el objeto de estudio presenta en primer plano la metodología empleada, y los aspectos disciplinarios son el complemento con el que se concreta la situación educativa.

Un ejemplo de este tipo de aportaciones son los trabajos que presentan un tratamiento especial para desarrollar la Geometría bajo el Modelo de Van Hiele, las propuestas de uso de las calculadoras en el aula, el estudio de los efectos de la enseñanza en ambientes cibernéticos, etc.

Las subcategorías de este agrupamiento podrían ser del tipo: metodologías de trabajo (investigación), propuestas didácticas por contenido y nivel, aportaciones en términos de recursos didácticos por contenido y nivel, uso de tecnologías, etc.

- ***Estudios sobre los actores del proceso***

En este agrupamiento quedarían ubicados los trabajos que centran su atención sobre la actividad de los maestros, la de los alumnos y la de la comunidad que los rodea (como: padres de familia, directivos, etc.).

Son muestra de este tipo de producción los trabajos que presentan los problemas que confrontan en los escenarios escolares y extraescolares, las limitaciones que sus situaciones específicas producen, la interacción que se genera durante el proceso de enseñanza y el de aprendizaje en el tratamiento de las disciplina, y también los que muestran el impacto de tipo cultural y social que tienen las Matemáticas hoy día.

Acopio de información

En un primer acercamiento los integrantes de la Comisión de Estados del Arte en Matemática Educativa (Comunidad CLAME), harían el registro de fichas de reporte de las propuestas de la comunidad. Para ello se propone invitar a la comunidad participante a completar la información derivada de cada publicación con una ficha que complete una matriz de datos del (o los) autor(es), y *algunos descriptores* de su trabajo.

En los descriptores podrían figurar: nivel de aplicación, tipo de contenido, de estudio, los sujetos de investigación, los aprendizajes específicos que aborda, la metodología utilizada, y otros que cada autor considere pertinentes.

De entrada todos los trabajos son del Campo de la Matemática Educativa, por lo que los descriptores 'matemáticas' y 'educativa' se obviarán.

Un dato importante está formado por la ubicación del tipo de aportación que el trabajo hace para la comunidad: i) de investigación, ii) de intervención

Es posible que un trabajo pueda pensarse en dos agrupamientos simultáneamente. Esto se debe a que estas categorías no definen conjuntos ajenos en el universo de producciones CLAME. Sería recomendable que el (o los) autores de tal(es) propuesta(s) pudieran dar su opinión al respecto, para ubicar de la mejor manera posible los trabajos.

Elaboración de un proyecto común de escritura para las líneas de investigación

En relación con la elaboración de un proyecto común de escritura para todas las líneas propuestas, parece importante que no falten en el análisis de cada línea, los siguientes puntos:

- ***Caracterización general de la línea de investigación:*** Descripción de las características generales de la línea de investigación.
- ***Países en los que se realizan investigaciones institucionalizadas o no acerca de la línea en cuestión:*** Identificación de núcleos de investigación institucionalizados o independientes, con la finalidad de que se produzca el intercambio de investigaciones entre ellos orientada al enriquecimiento mutuo y a lograr un perfil que caracterice al Clame en las investigaciones en esa línea de investigación.
- ***Avance producido en los últimos años:*** Esto permitirá medir la influencia de Clame a través de RELME como foro y Relime como publicación y comparar los avances con los producidos en otras escuelas contemporáneas.
- ***Aportes relevantes realizados y registrados en las sucesivas Actas de RELME***: La comparación y secuenciación de estos aportes permitirá enriquecer nuestros conocimientos sobre las características actuales e historia del pensamiento e investigaciones de la comunidad de Clame. RELME, al ser en nuestro foro de discusión e intercambio, es para muchos una fuente de actualización y enriquecimiento.
- ***Temáticas específicas dentro de la línea de investigación:*** Cada línea de investigación involucra tanto temáticas específicas que deben ser identificadas, así como temáticas relacionadas. Este análisis permitirá posiblemente delinear cuáles serán las futuras orientaciones que tomarán las investigaciones.

Referencias bibliográficas

Beitía, Germán (Ed.) CLAME. (2001). *Actas Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 14. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Crespo Crespo, Cecilia (Ed.) (2002). *Actas Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 15. Tomo 1 y 2. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán Marquez, Rosa María (Eds.) (1995). Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Vol. 1. y 2.México: Cinvestav.

Farfán Marquez, Rosa María (Eds.) (1999). *Actas Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 12. Tomo 1. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán Marquez, Rosa María y otros (Eds.) (2000). *Actas Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 13. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán Marquez, Rosa María (Eds.) (1998). Memorias de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cruz, Teresa y otros (Eds.) (1996). Memorias de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Ponce - Cayey (Puerto Rico).

La perspectiva latinoamericana de la investigación en Matemática Educativa

Elika Sugey Mejía Maldonado, Juan Gabriel Molina Zavaleta, Cesar Octavio Pérez Carrizales, Avenilde Romo Vazquez, Mario Sánchez Aguilar

Departamento de Matemática Educativa.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

masanche@mail.cinvestav.mx

Resumen

Los métodos y teorías que dan forma a la investigación en Matemática Educativa, se han abordado desde diferentes perspectivas.

Cada cultura ha enfocado el problema de manera diferente, y estas diferencias radican en las características sociales y culturales de cada comunidad.

Puede verse que existe una escuela anglosajona, una francesa entre muchas otras.

A la luz de esto, ¿podríamos hablar de una perspectiva latinoamericana de la investigación en Matemática educativa?, ¿es necesario un movimiento de este tipo?, ¿Para que?

Este póster pretende dar una visión de las diferéntes teorías y los métodos más utilizados por las diferentes escuelas; así como el tipo de resultados que estas obtienen y los argumentos utilizados, con la finalidad de tener un punto de comparación de la investigación que se realiza actualmente en Matemática Educativa en América Latina.

La escuela anglosajona

A través de la lectura de algunos de los artículos generados al seno de esta escuela, resulta fácil percibir la preocupación de los anglosajones por vincular la investigación en matemática educativa a la reforma y mejoramiento de su sistema escolar, particularmente en educación matemática y científica.

> "The reform of mathematics and science education in the United States has become a national priority.
>
> ...the reorganization of science and mathematics education needs to be guided by a wisely chosen, strategic, and secure research base" (Confrey, 2000), p.87.

Esta reorganización académica comprende una reestructuración sistémica de todos los niveles educativos, desde básico hasta superior, que incluye el desarrollo de nuevas currículas con algunas de las siguientes características:

- Que estén relacionadas a la investigación en aprendizaje y enseñanza (Battista & Clements, 2000), p.737.
- Que introduzcan antecedentes históricos, utilizados principalmente para inspirar a los estudiantes, para conferirle a las matemáticas y a la ciencia una cara humanística y para dar una idea de su lugar en la cultura (Dennis, 2000), p.799.

- Que utilice la nueva tecnología, reestructurando la enseñanza de acuerdo a consideraciones epistemológicas, cognitivas y tecnológicas (Harel & Trgalová, 1996), p.690.

Los métodos utilizados por los representantes de la escuela anglosajona resultan ser variados. Podemos encontrar investigaciones cuyos instrumentos de investigación son diferentes a los comúnmente utilizados, como por ejemplo la perspectiva de investigación cualitativa fundamentada en el uso de entrevistas basadas en tareas presentada por Gerald A. Goldin (2000). Por otro lado se encuentran investigaciones que utilizan métodos propios de las ciencias sociales, tales como los presentes en el paradigma naturalista introducido por Moschkovich y Brenner (2000).

Los resultados generados en la escuela anglosajona tratan de dar respuesta principalmente a problemáticas que tienen lugar dentro del ámbito escolar. Para este propósito son consideradas diferentes dimensiones: la histórica, la social, la cognitiva.

Es importante señalar que a pesar de tomar en cuenta varias de las dimensiones que integran el fenómeno educativo, dentro de sus explicaciones se considera al discurso matemático escolar como un elemento estático.

La escuela francesa

La visión de los franceses sobre el quehacer dentro de la disciplina es evidentemente teórica. Su atención se centra en el estudio de la *comunicación del conocimiento* y los fenómenos didácticos que se presentan alrededor de esta actividad en todos los niveles educativos. Es importante para la disciplina que dicho estudio tenga un carácter científico, para lo cual debe de cumplir algunas condiciones:

> "La didactique étudie la communication des savoirs et tend à théoriser son object d'étude, mais elle ne peut relever ce défi qu'à deux conditions:
> - Mettre en évidence des phénomènes spécifiques que les concepts originaux qu'elle propose paraissent expliquer,
> - Indiquer les méthodes de preuves spécifiques qu'elle utilise pour cela.
>
> Ces deux conditions sont indispensables pour que la didactique des mathématiques puisse connaître de façon scientifique son object d'étude et donc permettre des actions controles sur l'enseignement" (Brousseau, 1986, p. 40).

Los representantes de la escuela francesa no coinciden con la postura que afirma que el conocimiento se logra por medio de una adquisición progresiva (acumulación). La perspectiva francesa, asume que la construcción de significados se logra por medio de interacciones constantes entre el estudiante y situaciones-problema. El objetivo principal de la *didactique* es precisamente estudiar las condiciones de las situaciones o problemas que el estudiante debe alcanzar con la finalidad de favorecer la aparición, el trabajo y rechazo de estas concepciones sucesivas (Brousseau, 1997, p. 83).

Desde la perspectiva francesa, la *didactique* se constituye en el campo de las ciencias empíricas, por lo cual hace referencia a datos empíricos (observación, análisis, experimentación) dentro de un marco teórico explicativo. Esto es lo que distingue la *didactique des mathématiques* de otras aproximaciones de los fenómenos didácticos (Johsua, 1996, p. 201).

La aproximación francesa estudia los fenómenos didácticos mirándolos desde diferentes perspectivas. Podemos encontrar trabajos con un enfoque cognitivo, como los citados en Johsua & Dupin (Johsua & Dupin, 1993, pp 121-191) que tratan de explicar la naturaleza y origen de las concepciones de los alumnos que se manifiestan en la enseñanza científica; trabajos de corte social como los realizados por Chevallard con su enfoque antropológico (ver Chevallard, 1992); o de corte epistemológico como los realizados por Bachelard y continuados por el mismo Brousseau donde se explica la naturaleza y la función de los obstáculos epistemológicos en el proceso de aprendizaje (ver Brousseau, 1983).

La escuela francesa se caracteriza por una amplia producción de resultados teóricos que tal como Johsua afirma son apoyo a la producción de otros resultados. Esto les ha permitido construir con el paso del tiempo una aproximación teórica que ha sido de gran influencia para otras aproximaciones dentro de la disciplina y fuera del continente Europeo.

Dos características importantes sobre el marco de un resultado son que: el marco principal de un resultado en didáctica refuerza el paradigma que lo abriga y que este marco es capaz de producir nuevos resultados (Johsua, 1996, p. 215).

Esta amplia y extensa producción teórica les ha permitido formular una caracterización y explicación muy detallada de fenómenos y escenarios que se generan alrededor de la *comunicación del conocimiento*, así como dentro y fuera del contexto escolar, tales como: el contrato didáctico, los obstáculos epistemológicos, el *milieu*, y otros.

Una característica que me parece importante hacer notar es que desde la perspectiva francesa el conocimiento no es considerado un objeto estático, sino más bien un objeto que nunca deja de ser modificado. Esto es ampliamente explicado dentro de la teoría de la *transposición didáctica*:

La presentación tradicional del conocimiento en un contexto escolar se lleva a cabo por medio de la definición de los objetos de estudio en términos de nociones previamente introducidas. Es entonces que el estudiante por medio de actividades (ejemplos, ejercicios) va acumulando conocimiento el cual está razonablemente cerca al conocimiento de los expertos (savoir savant).

La presentación del conocimiento descrita anteriormente ignora el camino marcado a través de la historia por este conocimiento, es decir, las sucesión de preguntas y dificultades que provocaron la aparición de los conceptos fundamentales (ver Brousseau, 1986).

Esto oculta la génesis de este conocimiento y hace que su enseñanza se haga más difícil. Para facilitarla, es necesario proporcionarle a este conocimiento un significado, uso y motivación para poder llevarlo al salón de clases (recontextualización).

Estos conocimientos se generan dentro de una comunidad científica, la cual antes de comunicar su conocimiento debe pasar por un proceso dentro del cual se despersonaliza y descontextualiza este nuevo conocimiento. Esto permitirá que otras personas transformen este objeto a enseñar, lo reformulen, le den un significado (lo repersonalicen) y lo generalicen de acuerdo a sus necesidades. En pocas palabras: ¡El conocimiento es un objeto que nunca deja de transformarse!

La teoría francesa no solo se ocupa de explicar el proceso de cambio que el conocimiento experimenta desde su producción en la comunidad científica hasta llegar a la escuela; también da explicación (entre otras cosas) a las relaciones que se presentan dentro de un salón de clases.

Esta teoría afirma que la estructura didáctica presente en un salón de clases está constituida no por tres polos superpuestos (el profesor, el alumno, el saber), sino de las relaciones mantenidas por estos tres polos, las cuales se manifiestan en situación de enseñanza. Además, el alumno y el profesor no ocupan posiciones simétricas en la relación de un saber. El segundo no solamente "sabe" más que el primero, sino tiene la responsabilidad de organizar las situaciones de enseñanza que se consideren favorables para el aprendizaje del primero. Brousseau afirma que un *contrato didáctico* es una relación formada en su mayor parte implícitamente, donde cada parte (el maestro y el estudiante) tendrán la responsabilidad de manejar, y de una manera u otra, ser responsable de la otra persona.

Una de las características generales de esta escuela es que estudia el fenómeno educativo desde dentro y fuera del contexto escolar (por ejemplo, desde adentro dando explicación a las relaciones profesor-saber-alumno, desde afuera mostrándonos los procesos de cambio que experimenta el conocimiento en su camino hacia el salón de clases)

Conclusiones

La investigación en Matemática Educativa que se desarrolla en Latinoamérica, surge con la necesidad de dar respuesta a problemáticas propias de países con estructuras sociales y culturales diferentes a los países donde con anterioridad se había estado desarrollando investigación en esta área.

La principal finalidad de la disciplina es generar líneas de investigación cuyos resultados y productos logren incidir en forma positiva y benéfica en el sistema educativo. Estas investigaciones tienen por objetivo último el rediseño del discurso matemático escolar (Cantoral y Farfán, 1998, p. 367).

A pesar de que esta escuela surge entre otras cosas por la búsqueda de una identidad propia, sus investigaciones se ven fuertemente influenciadas por teorías y metodologías de países no latinoamericanos, en especial por la escuela francesa (teoría de las situaciones didácticas, ingenierías didácticas, teoría APOE, etc.).

Las explicaciones dadas a los fenómenos educativos toman en cuenta lo que esta escuela considera las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.

Estas explicaciones tratan de dar respuesta a problemáticas de los diferentes niveles del sistema educativo, desde básico hasta nivel superior.

Es indiscutible el desarrollo que esta escuela ha tenido y sigue teniendo; existen varios indicadores que no lo confirman: el reconocimiento y valoración de los resultados generados por esta escuela fuera de la comunidad latinoamericana, la contribución al robustecimiento de teorías ya existentes (ver por ejemplo Lezama y Farfán 2001), el surgimiento de paradigmas propios de la escuela, así como el desarrollo de nuevas aproximaciones teóricas como por ejemplo la socioepistemología que se encuentra en proceso de desarrollo en diferentes países (Ver por ejemplo los trabajos de Díaz (2001) y Cordero (2001)), el grado de estabilidad y madurez que han alcanzado las diferentes comunidades de investigación que se organizan para discutir y publicar sus resultados en grupos y organizaciones académicas propias como por ejemplo la reunión latinoamericana de matemática educativa o la revista latinoamericana de investigación en matemática educativa por mencionar algunos.

Así pues, la escuela latinoamericana de investigación en matemática educativa sigue trabajando en la búsqueda de su consolidación y reconocimiento con gran éxito.

Su labor es evidentemente social y sus resultados buscan el beneficio común de las sociedades que la abrigan.

Referencias bibliográficas

Battista, M. & Clements, D. (2000). Mathematics Curriculum Development as a Scientific Endeavor. En Kelly, A. y Lesh, R. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics*, (pp. 737-761). EUA: LEA.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), pp. 33-115.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis. *Epsilon*, 42, pp. 353-369.

Confrey, J. (2000). Improving Research and Systemic Reform Toward Equity and Quality. En Kelly, A. y Lesh, R. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics*, (pp. 87-106). EUA: LEA.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives aportes par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1) pp. 73-112.

Díaz, L. (2001). Los estudiantes en el programa socioepistemológico, actores sociales en, desde y sobre la cultura. *Acta Latinoamericana de Matemática educativa*, vol. 14, pp. 231-238.

Harel, G. y Trgalová, J. (1996). Higher Mathematics Education. En Bishop, A. et al (Eds.). *International handbook of mathematics education*, (pp. 675-700). Netherlands: Kluwer.

Johsua, S. & Dupin, J.J. (1993). *Introduction a la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris, France: Presse Universitaire de France.

Lezama, J. & Farfán, R. M. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *RELIME*, (4) 2, pp. 161-193.