ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

RELME

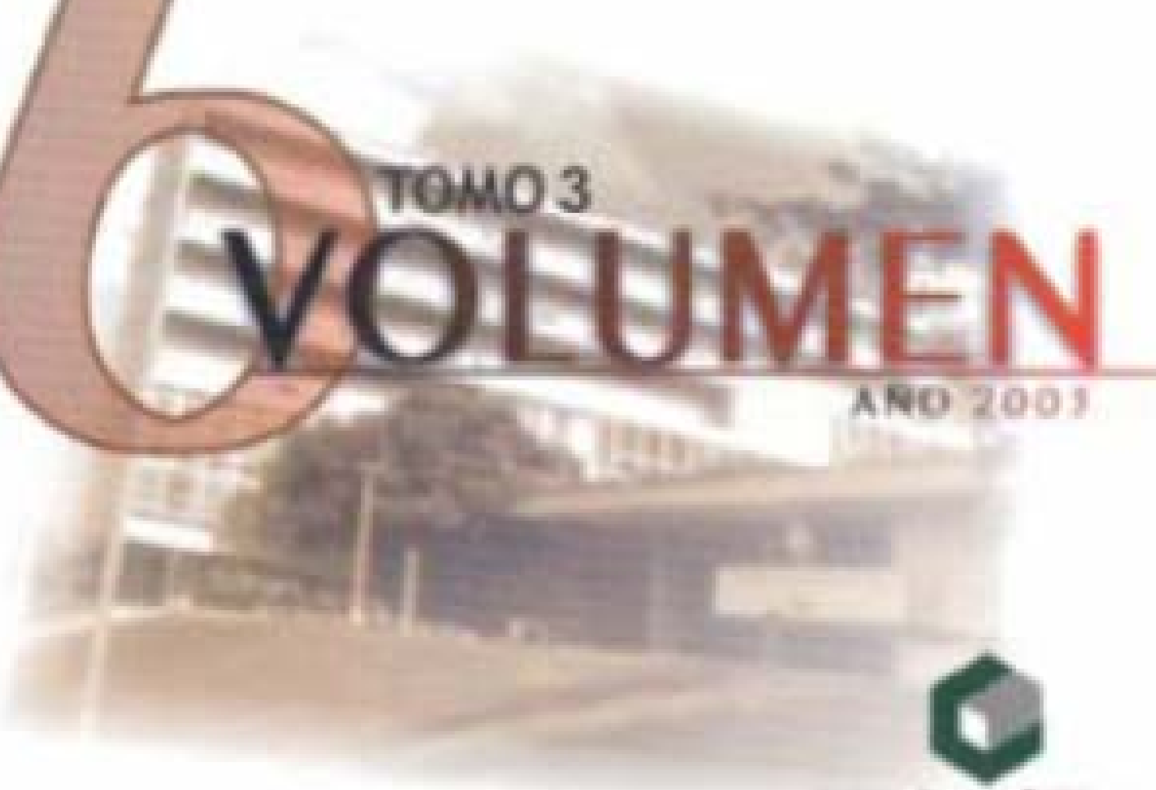
Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

16

TOMO 3

VOLUMEN

AÑO 2003



Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría

cujae

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
Volumen 16, Volumen 3, año 2003

Editor:
Juan Raúl Delgado Rubí

(No existe versión impresa de este Tomo)

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 16

Tomo 3

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

RELME

CUBA 2002

Comité Internacional de RELME 16

Presidente:	Eugenio Carlos Rodríguez	Cuba
Vocales:	Cecilia Crespo Crespo	Argentina
	Guadalupe Tejada	Panamá
	Carlos Rondero	México

Comité Nacional Organizador de RELME 16

Presidente	Dr. Eugenio Carlos Rodríguez
Asuntos Académicos	Dr. Juan Raúl Delgado Rubí
Apoyo Logístico	Dra. María Lucía Brito Vallina
Relaciones públicas	Lic. María de los Angeles González Peñalver
Relaciones Internacionales y Divulgación	MSc. Mayra Durán Benejam
Finanzas e Inscripción	MSc. Esther Ansola Hazday
Coordinación Técnica	Dra. Bertha Fernández de Alaiza García-Madrigal
Coordinación Nacional	Dra. Virginia Alvarez Suárez
Miembros	Lic. Eva Escalona
	Lic. Lourdes Tarifa
	Dr. Luis Campistrous

PRESENTACIÓN:

Cuando en 1995, durante la 9na Reunión Centroamericana y del Caribe de Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa celebrada en el Centro de Convenciones del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas en Cojímar, La Habana, surgió la idea de acoger en el seno del movimiento a los docentes e investigadores en Matemática Educativa de toda Latinoamérica se daba un importantísimo paso en pos del desarrollo de esta disciplina y del mejoramiento de la enseñanza de la Matemática en nuestros países.

El siguiente año, durante la Décima Reunión en Puerto Rico se constituyó el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y fue ya en México, principal promotor de este movimiento donde se desarrolló la primera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, la cual conservó el ordinal correspondiente de sus predecesoras, o sea se llamó RELME 11 en aras de destacar que era un mismo movimiento, sólo que ahora enriquecido.

La Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 16, desarrollada del 15 al 19 de julio del 2002 en La Habana constituyó un momento importante de consolidación del movimiento. En ella, a diferencia de citas anteriores, pudo participar una nutrida delegación de profesores e investigadores cubanos, quienes trasmitieron sus experiencias en esta área, estando muchos de los trabajos avalados por Tesis de Maestrías y Doctorados de sus autores. Asimismo, concurrió una importante representación de colegas de Argentina, Bolivia, Canadá, Colombia, Costa Rica, Chile, Ecuador, España, Estados Unidos, Guatemala, Honduras, México, Panamá, Perú, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela.

Los artículos presentados en el presente Volumen 16 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, como en otras ediciones, siguieron las exigencias planteadas por el CLAME. En esta intensa y dedicada actividad colaboraron los siguientes evaluadores, para los cuales se hace patente el reconocimiento por la encomiable labor desarrollada:

Abel Fernández Infante	Cuba
Adriana González	Argentina
Alfredo del Castillo	Cuba
Ana Todea Aragón	Argentina
Analida Ardila	Panamá
Beatriz Deiros	Cuba
Bertha Fernández de Alaiza	Cuba
Carlos Rondero	México
Carmen Luisa Méndez Fabret	Cuba
Cecilia Crespo	Argentina
Cecilia Gaita	Perú
Celia Rizo	Cuba
Christiane Ponteville	Argentina
Crisólogo Dolores	México
Delia Lerner	Argentina
Ed Dubinsky	EE.UU
Edison De Faria	Costa Rica
Eréndira Valdez	México
Eugenio Carlos Rodríguez	Cuba
Fabián Valiño	Argentina
Francisco Cordero	México
Guadalupe Tejada de Castillo	Panamá
Gulnara Baldoquín de la Peña	Cuba
Gustavo Bermúdez	Uruguay
Herminia Hernández Fernández	Cuba
Juan Manuel Nole	Panamá
Juan Raúl Delgado Rubí	Cuba
Liliana Homilka	Argentina
Lourdes Hernández Rabell	Cuba
Luis Campistrous	Cuba
Luis R. Moreno Chandler	Panamá
Malva Analia Alberto de Toso	Argentina
Margarita Véliz	Argentina
María Cristina Pérez	Cuba
María del Carmen Pérez	Argentina
María Lucía Brito	Cuba
Marta Elena Valdemoros	México
Martha Fernández Casuso	Cuba
Mayra Durán Benejam	Cuba
Mayra Solana Sagarduy	Cuba
Nélida Pérez	Argentina
Olga Lidia Pérez González	Cuba
Oscar Sardella	Argentina
Otilio Mederos Niceto	Cuba
Patricia Camarena	México
Patricia Sadovsky	Argentina
Paúl Torres	Cuba
Rafael Espín Andrade	Cuba
Raúl de la Cruz Cordovés	Cuba
Regla Calderón Ariosa	Cuba
Ricardo Cantoral	México
Rosa María Farfán	México
Santa Daysi Sánchez	R. Dominicana
Sonia Hernández Rrodríguez	Cuba
Teresita Noriega	Cuba
Teresita Peralta	Costa Rica
Víctor Martínez Luaces	Uruguay
Yolanda Ofarrill	Cuba

Asimismo, el Comité Organizador Nacional quiere agradecer a los participantes y ponentes de RELME 16, ya que fueron ellos los que hicieron posible que se llevara a cabo con éxito este evento, así como a los representantes del CLAME y del Comité Internacional por la colaboración y orientación ofrecida. Merecen un agradecimiento especial Raúl de la Cruz Cordovés, Carmen Luisa Méndez Fabret, Martha Fernández Casuso y Sonia Hernández Rodríguez sin cuya colaboración y apoyo incondicional, tanto la realización del evento como la edición de las Actas no hubiera sido posible.

Queremos patentizar el agradecimiento a Marlén Marcos Vázquez, Abel Fernández, Lourdes Casañas, Ana Margarita Vicente, Beatriz Deiros, María del Carmen Rodríguez, Alfredo del Castillo, Leonor Fernández, Carlos Cepero y Valentina quienes sin ser miembros del Comité Nacional Organizador, trabajaron abnegadamente en pos de la realización del evento.

Un agradecimiento especial queremos patentizar a todos los estudiantes de Ingeniería Industrial e Informática que colaboraron en la preparación y realización del evento, en especial a Eduardo Lima Mitev y Susel Ruiz Durán quienes trabajaron incansablemente antes y durante el evento y a Marbelys Vega Álvarez por su infatigable labor durante el proceso de edición de las Actas, sin cuya ayuda hubiera sido imposible llevarla a feliz término.

Comité Organizador Nacional

Índice del Tomo 3

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

Vínculos conceptuales discreto-continuo del Cálculo en la ingeniería de control. ***Martín Sauza Toledo*.**
Propuesta metodológica para contribuir a la resolución de problemas matemáticos. ***Isabel Santiesteban Pérez y Maricela Rodríguez Ortiz***
Argumentaciones y justificaciones en torno a una situación de rombos. ***Ismenia Guzmán R. y Lidia Consigliere D.***
La reflexión y la valoración en el proceso de enseñanza-aprendizaje: una necesidad en la enseñanza contemporánea. ***Mariano Héctor Jiménez Milián***
El aprendizaje desarrollador como marco teórico para el estudio de las funciones, en el nivel preuniversitario. ***Mario Armando Gómez Hernández.***

TALLERES
Flexogeometría sin regla ni compás en la construcción de polígonos y poliedros regulares. ***Oscar Pacheco Ríos***
Software didáctico en el programa geometría viva. ***Lilia López Vera, Sandino Flores M., Oscar Fernández C. y Ruth Rodríguez G.***
La geometría dinámica y la tecnología en la escuela básica. ***Celia Rizo Cabrera y Luis Campistrous Pérez.***

POSTERS
La noción del espacio en el niño a través del ambiente computacional LOGO. ***Elizabeth Esparza Cruz***

GRUPOS DE DISCUSIÓN
Utilización del laboratorio de computación en la enseñanza de la matematica. ***Rafael Jiménez Martínez y Milagros Gutiérrez Alvarez.***

CURSOS CORTOS
La media aritmética en diferentes contextos. ***Carlos Rondero Guerrero- Rosalba López Gómez-Juan Rivas Sánchez***

Conferencias Especiales

ESTUDIO DE LOS CONCEPTOS BASICOS DEL ANALISIS MATEMATICO ENCUADRADO EN UN MODELO EDUCATIVO

Pedro Pérez Carreras

E.T.S. Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Valencia, ESPAÑA
Ceta-Upv, Cujae, CUBA
pperezc@tesla.ispjae.edu

RESUMEN

En un modelo cognitivo, la estructura cognitiva asociada con un determinado concepto matemático incluye todas las imágenes mentales, representaciones visuales, experiencias e impresiones, así como propiedades y procesos asociados(que llamaremos **concepto-imagen**, siguiendo a Vinner, Tall y Dreyfus y "estructuras elaboradas" o "esquemas" según los científicos cognitivos) y ha ido emergiendo con el tiempo mediante experiencias de todos los tipos, cambiando a medida que el individuo recibe nuevos estímulos y madura e influyéndose por desviaciones, aparentemente triviales, de un entendimiento válido. A medida que este concepto-imagen se desarrolla, no resulta necesario que sea coherente en cada momento. Así, resulta posible que visiones conflictivas sean evocadas en tiempos diferentes, sin que el individuo sea consciente del conflicto, hasta que son evocadas simultáneamente. Su coincidencia o no con lo que podríamos llamar **concepto-definición** (la formulación convencional lingüística que demarca precisamente las fronteras de aplicación del concepto) es fuente de muchas disfunciones en el aprendizaje.

1. Objetivo

Nuestro objetivo es el tratamiento de los **conceptos** básicos del Análisis Matemático en sus concepto-definiciones actuales, no el de resultados concretos o cuerpos de resultados. Todos los conceptos básicos tratados descansan en la idea de convergencia que posee distintas manifestaciones, según el problema a tratar, pero la dificultad de comprensión en cualquiera de estas situaciones estriba en (a) cómo explicar que un proceso que no termina puede producir un resultado final finito y exacto y (b) cómo traducir el dinamismo inherente a ese proceso en estados estacionarios y, por lo tanto, manipulables algebraicamente.

2. Estrategia

Nuestra estrategia consiste en (1) respetar el objetivo de implantar el entendimiento de los concepto-definiciones del Análisis (es decir, no buscar alternativas simplistas, falaces o parciales a las mismas), (2) buscar ese entendimiento a base construir un concepto-imagen adecuado al concepto-definición objeto del estudio encuadrando esa búsqueda en un modelo educativo conocido, (3) diseñando una metodología apropiada que, por un lado, confirme la plausibilidad del modelo y, por otro, haga evidente su eficacia a la hora de garantizar el progreso hacia el entendimiento, (4) que permita el diseño descontextualizado de una propuesta metodológica a ser implementada por un profesor en un tiempo razonable (una o dos clases habituales)

3. Obstáculos

La motivación que hace necesaria la estrategia antes mencionado proviene tanto de los obstáculos cognitivos existentes en la docencia de las Matemáticas, en general, y del Análisis, en particular, que son fruto de su evolución histórica y de las corrientes de pensamiento filosófico de la disciplina que han conformado lo que podríamos llamar la enseñanza tradicional del Cálculo, como de la formación previa del alumnado que accede a esta disciplina.

<u>3.1 Dificultades que provienen de la propia disciplina</u>:

(a) **la propia naturaleza de las Matemáticas**: que es una forma de pensamiento que requiere una concentración considerable. Las ideas que se manejan no son, en modo alguno, triviales y requieren de un tiempo de asimilación. Las Matemáticas son intrínsecamente difíciles (probablemente porque la arquitectura de nuestro cerebro no está bien adaptada a largas cadenas de operaciones simbólicas), no siempre divertidas, y éste es un aspecto que no debe ser olvidado.

(b) **sus raíces antiguas y su crecimiento acelerado**: los resultados clásicos han ido evolucionando a lo largo de los siglos y la forma habitual de presentarlas no es genética, sino a través de la visión filosófica del momento: en nuestro caso (aunque ya cambiando), a través de una rígida jerarquía de secuencias lógicas que establecen demostraciones formales de hechos más generales que los que inicialmente se estudiaron y que son el producto de una sistematización muy posterior al momento de su descubrimiento. Las innegables ventajas de poseer un edificio lógico, tienen su contrapartida en hacer difícil simplificar la exposición de alguna idea profunda eludiendo los puntos claves: en este tipo no ambigüo de presentación lógica rige lo que podríamos llamar el principio de conservación de las dificultades, que hace que tarde o temprano se tenga que lidiar con ellas, algo que debiera tenerse en cuenta a la hora de diseñar alternativas a las tradicionales a nivel universitario.

(c) **el divorcio entre la actividad matemática y la práctica docente**: pues las actividades primordiales del pensamiento matemático avanzado (la formulación de conjeturas, el alumbramiento de pruebas o refutaciones convincentes y el uso constante de diagramas) está ausente de la presentación docente: se presenta un producto acabado donde "todo está en calma y en certidumbre" y las pruebas se desarrollan a lo largo de las lineas deductivas tradicionales. El ansia de producir pruebas formales tiene aspectos particularmente problemáticos:

(c.1) **estilo de presentación**: el estilo de presentación docente de las pruebas es esencialmente el mismo que el utilizado para comunicar resultados de investigación a través de artículos en revistas científicas, en donde se abunda en detalles sobre las definiciones dadas y las pruebas empleadas, sin referencia alguna a por qué el problema es interesante en sí y su relación con los orígenes del mismo. Puede ser descrito como el código mínimo de entendimiento necesario para transmitir el conocimiento matemático. Su carácter mínimo hace que, incluso en artículos de investigación, se pierda parte de la información vital para su entendimiento. La razón aducida para evitar diagramas es que éstos incorporan más información que la estipulada por el problema y una prueba válida no puede hacer uso de hipótesis distintas de las estipuladas. Sin embargo, los diagramas nos proporcionan representaciones extraordinariamente poderosas y ricas de la información y, aunque, ese poder pueda ser fuente de errores y malas interpretaciones, su uso es casi indispensable para el matemático creativo, pues ¿qué es un diagrama sino una concesión a la intuición geométrica? Así pues, la epistemología (entendimiento de la estructura del conocimiento) que produce esa práctica docente (insistencia en sistemas axiomáticos expresados en lenguaje de Teoría de Conjuntos y eliminación de toda evidencia intuitiva y visual) basada en el divorcio al que aludíamos, es diametralmente opuesta a la realidad cotidiana de la comunidad matemática creativa.

(c.2) **énfasis en aspectos sintácticos**: Un subproducto de esta praxis es el énfasis en aspectos sintácticos, más que en los aspectos semánticos (control del significado), lo que nos lleva a otro obstáculo serio (c.3) **su lenguaje de comunicación**: Observemos que el uso del idioma corriente ya entraña una competencia especial, al depender éste del uso de formas gramaticales elaboradas, de la relación entre términos y de la aplicación de esos términos a la descripción de situaciones. Además, el idioma corriente es rico en reglas, significados y convenciones matemáticas implícitas que, últimamente, es lo que nos permite sentar las bases del conocimiento matemático, al permitir la elaboración de un lenguaje más refinado que abstrae y extiende las reglas y significados de las Matemáticas y que, en última instancia, proporciona teorías axiomatizadas. Incluso el uso de conceptos lógicos claves siguen reglas lingüisticas. Así, el conocimiento matemático implícito en el lenguaje corriente es la base de todo el conocimiento matemático. A pesar de todo ésto, el lenguaje empleado en la docencia de las Matemáticas (formal o informal) asigna un grado de precisión a los términos matemáticos y lógicos que no es siempre el del idioma corriente. Dado que uno de los objetivos de la docencia es fijar al alumno en contexto, un paso previo al desarrollo de la disciplina debiera ser aclarar que se utiliza un semidialecto del idioma: términos habituales en Análisis como "límite" evocan en el idioma corriente una barrera que no puede ser sobrepasada y así podríamos poner muchos ejemplos.

3.2 Dificultades de que provienen del desarrollo histórico:

A finales del XVII Newton y Leibniz (1646-1716), independiente y simultáneamente, consiguieron un cuerpo de doctrina cuyos logros conjuntos pueden sumarizarse en (a) la invención de los conceptos generales del Cálculo Infinitesimal, como el cociente de diferencias y la integral, (b) el diseño de una notación que convirtiera el Cálculo en un algoritmo que permitiera resolver las ecuaciones infinitas, como el Algebra lo hace con las ecuaciones finitas y © la constatación de que los procesos de hallar tangentes y áreas (diferenciación e integración) son mutuamente inversos (Teorema Fundamental del Cálculo).

Las dos escuelas (continental e insular) a que dieron origen ambos investigadores difieren sustancialmente en el método empleado para desarrollarlo.

(a) **Cálculo de diferencias**: La tradición continental era guiada por la visión que de las Matemáticas tenía Descartes: poder del simbolismo (no debates sobre fundamentos) y justificación de su interés por su capacidad de resolver problemas concretos (no la creación de sistemas axiomáticos y pruebas largas). Leibniz resolvería problemas como el de la loxodrómica (trayectoria descrita por un navío), la catenaria y problemas de optimización. Sus éxitos le convencieron de la importancia crítica de elegir símbolos apropiados y hallar las reglas de manipulación de los mismos. Así, y una vez definidos los nuevos instrumentos de trabajo, entendidas sus propiedades y creados unos símbolos apropiados, Leibniz y sus seguidores (los Bernoulli, Euler, Huygens, etc..), persiguiendo la creación de un lenguaje en el que todo razonamiento correcto se convirtiera en un cálculo sencillo, procederían pragmáticamente desarrollando el llamado "cálculo de diferencias" como un álgebra en donde se daban como válidas ecuaciones como $x+dx=x$, sin interpretar dx como una magnitud constantemente decreciente (y, por lo tanto, ajena al concepto de límite) para evitar nociones filosóficamente peligrosas como el infinito. Una técnica crucial en integración, como es el método de substitución es virtualmente automática en este nuevo lenguaje. El cálculo de diferencias transformaría el uso de procesos límite de un método sólo apto a un número pequeño de especialistas en un cálculo sencillo

que, posteriormente, sería susceptible de ser enseñado en libros de texto a miles de personas. La extraña algebrización propuesta no sería aceptada por todos. La primera exposición organizada de los logros de la escuela continental fue el "*Analyse des* *infinitement petits*" (1696) del Marqués de L'Hopital con asistencia de Johann Bernoulli (1667-1748). Esta obra provocaría la denominación "Análisis" para referirse al Cálculo Diferencial e Integral aunque el término "análisis" ya había sido utilizado por Vieta para designar lo que hoy día llamamos Algebra *en "In Artem Analyticem Isagoge*", 1591. Observemos que el Cálculo continental derivaría su nombre de su uso como instrumento para calcular aunque, en su nivel más básico, sería una colección de técnicas algebraicas que producen producen respuestas numéricas exactas a problemas geométricos.

(b) **Los Principia**: Por contra, la escuela insular (Newton, Maclaurin, etc….) desarrollaría el concepto de "magnitud constantemente decreciente", primer prototipo del concepto de límite entendido de una forma más restrictiva que hoy día: la estabilización de un conjunto de valores que se acercan más y más al valor deseado, pero no lo sobrepasan. La idea sería proporcionar las reglas operativas de la diferenciación e integración, resultados que aparecen implícitos en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, que desarrolla un modelo del mundo de profunda importancia: vivimos en un planeta sujetos a sus leyes. Así como Leibniz era fundamentalmente un algebrista, Newton era fundamentalmente un geómetra. Para Newton, el Cálculo era un intento matemático de describir las leyes de la Naturaleza: si uno quiere entender cómo funcionan las cosas, hay que pensar en términos del mundo físico y, por lo tanto, en términos geométricos. Al desarrollar el Cálculo intentaría hacerlo de forma que se mantuviera lo más cerca posible del contexto físico que quería explicar. El intento de Leibniz de convertir el Cálculo en una máquina algebraica sería completamente ajeno al espíritu newtoniano: si uno pasa a la manipulación algebraica, esencialmente deja de pensar geométricamente, es decir, deja de pensar sobre el sentido que tiene lo que está haciendo. Dado que los lectores de la obra de Newton estaban familiarizados con la Geometría de Euclides y Apolonio, sería la introducción de los métodos infinitesimales lo que causaría la mayor sorpresa pues, a pesar de que éstos métodos tenían una larga historia en la Geometría (habría que remontarse a Arquímedes en su " Método", en donde comparaba dos áreas fijándose en el número de "lineas" de las que estaban compuestas o comparando dos sólidos en función del número de "planos" que los constituían), esta obra sólo se conocería en Occidente en el siglo XX.

(c) Fusión de ambas aproximaciones: Al no poder algebrizar el concepto de límite (habría que esperar a Cauchy), los continuadores de la obra de Newton decidieron basar el edificio conceptual en la Geometría clásica de los griegos, produciéndose la monumental obra de Maclaurin "*Treatise of fluxions*". Así, esta primera idea de límite debida a Newton, sería elaborada por Maclaurin, entroncada en la tradición continental por d'Alembert y sistematizada por Lacroix en *su "Traité de calcul différentiel et du calcul intégral*" (1797) para ser finalmente algebrizada por Cauchy. En el Continente la fundamentación geométrica de Maclaurin era conocida (Maclaurin recibiría dos veces el premio de la Académie des Sciences y sus libros se traducirían rápidamente al francés) pero, para cada prueba geométrica que presentaba en su tratado, los matemáticos continentales elaborarían su propia prueba algebraica. La ventaja de esa idea de Newton es que poseía un atractivo intuitivo y geométrico y, aunque no era entendida de forma muy precisa, permitiría el desarrollo de una serie de métodos capaces de resolver numerosos problemas aplicados ("*data aequatione quoteinque fluentes quantitoe involuente fluxions invenire et vice versa*" o, en castellano, resolver ecuaciones diferenciales).

(d) **Rigor en el Cálculo**: Podemos argumentar que, si tanto se pudo avanzar utilizando el Cálculo sin necesidad de rigorizar la disciplina ¿porqué hacerlo a nuestros alumnos? Ya hemos mencionado que, como lo que contaba eran los resultados (que establecieron la dinámica de las partículas, cuerpos rígidos, fluidos y sólidos), nadie se preocupó de establecer unos fundamentos sólidos, porque rara vez cometían errores}, lo que era debido, básicamente, a dos razones: (a) las funciones de variables reales, series de potencias o funciones derivadas de la realidad física raramente producen situaciones que lleven a error y (b) matemáticos como Newton, Euler o Lagrange tenían una comprensión muy profunda de los problemas que trataban, lo que les llevaba a elegir intuitivamente los métodos más potentes y evitar errores y esta última cualidad esta fuera del alcance de la mayoría de nuestros alumnos.

A principios del siglo XIX se dieron las tres circunstancias siguientes existía un álgebra de desigualdades bien desarrollada, el rigor empezaba a considerarse importante y se darían cuenta que los conceptos relacionados con la convergencia (límites, series, derivadas, integrales) podían ser descritos precisamente en el lenguaje de desigualdades. Analicemos estas tres circunstancias:

(d.1) El álgebra de las desigualdades: Durante el siglo XVIII una de las prioridades era desarrollar técnicas que permitieran aproximar} con una estimación del error cometido: para una ecuación no resoluble exactamente, había que buscar una aproximación (en forma de suma finita sencilla) y luego calibrar el error cometido para saber si era aceptable. La herramienta más poderosa para resolver este problema era la fórmula de Taylor que permitía calcular el valor de una función en un punto, supuesto conocidos los valores de la función y de sus derivadas sucesivas en un punto cercano, en la forma de una serie infinita (Brook Taylor desarrollaría sus series estableciendo analogías entre diferencias finitas y fluxiones). Considerando solamente la suma de los n primeros términos de esta serie (polinomio de Taylor), los valores de una función determinada podían ser calculados por hombre (o máquina) con la precisión requerida (dependiendo del n elegido), estimando el error cometido mediante la acotación superior "de la cola de la serie" (o término complementario). La acotación del término complementario para una gran variedad de expresiones analíticas, al no existir un método de acotación universal para cualquier término complementario, produjo toda una serie de técnicas que se agruparon en un cuerpo de doctrina nada trivial llamado el álgebra de las desigualdades. Dado un entero positivo n, los matemáticos del XVIII estaban entrenados para hallar un error, es decir, un épsilon.

(d.2) Varias circunstancias concurrieron para que la rigorización del Cálculo se considerara importante y deseable: razones de índole filosófica: (a) ganas de rebatir los ataques de matemáticos como George Berkeley, obispo de Cloyne, que mencionamos (de hecho, la fundamentación geométrica de Maclaurin tenía el objetivo colateral de contestar a las críticas de Berkeley), (b) la percepción de que había un límite al número de resultados que podían ser atacados con las técnicas del Cálculo y la conveniencia de no seguir avanzando y consolidar las ganancias obtenidas, (c) la existencia de un matemático prominente, Lagrange (1736-1813), que sí estaba interesado en cuestiones de fundamentos, pues deseaba proporcionar una base puramente algebraica al Cálculo, afirmando explícitamente que había que liberarlo de la idea foránea del "movimiento" y, dada la inconsistencia del concepto de infinito, se preguntaba cómo tantos resultados correctos pueden derivarse de una noción inconsistente. En 1784, cuando todavía se encontraba en Berlin, promocionaría un premio de la Academia para áquel que pudiera proporcionar una fundamentación satisfactoria del Cálculo. Lazare Carnot (1753-1823) y Sylvestre

Francois Lacroix (1765-1843) producirían esfuerzos en este sentido, sin conseguirlo. El propio Lagrange en su *Théorie des fonctions analytiques* trataría de basar el Cálculo en la noción de series de potencias (convergentes o no); este intento estaría también condenado al fracaso, pero produciría nociones como la de función derivada y resultados como la expresión para el término complementario en el desarrollo de Taylor que quedarían tal y como las trabajó y (d) la necesidad de muchos matemáticos prominentes de enseñar a grupos cada vez más numerosos de alumnos en las nuevas instituciones surgidas de la Revolución Francesa y del Imperio Napoleónico, que estimó que la creación de cuerpos de científicos e ingenieros podrían ser útiles al estado moderno. La necesidad de escribir libros de texto para estas instituciones (Cauchy, Lacroix, Charles Sturm, Jean-Marie-Constant Duhamel) obligó a repensar y estructurar el Cálculo: el establecimiento de las academias militares y la école Polytechnique en 1795 creó una forma de explicar Matemáticas que se convertiría en el modelo de la educación universitaria.

(d.3) Aparte de los tres volúmenes de la obra *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797-1800)} de Lacroix, no existían textos de referencia, por lo que Cauchy comenzaría la escritura sistemática de sus notas de clase. En 1821 *aparecería Cours d'analyse de l'école Royale Polytechnique*, tratando los preliminares del Análisis e incluyendo la teoría de las funciones continuas y la teoría de la convergencia de series reales y complejas. Esta obra sería seguida en 1823 por *Résumé des lecons données á l'école Polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Sin embargo, el objetivo último de Cauchy no sería el entrenamiento de principiantes, sino la investigación científica y su obra escrita resultaría en una reformulación drástica del Análisis al iniciar la eliminación del pensamiento algorítmico y su substitución por el pensamiento conceptual, iniciando, así, la transición del Análisis algebraico (en el sentido de Euler y Lagrange) al Análisis aritmético (en el sentido de Weierstrass). Su obra sería entendida con dificultad, incluso por sus colegas, y muchas innovaciones importantes contenidas en ellos serían redescubiertas más adelante. Dado el poco éxito entre alumnado y colegas de las obras antes mencionadas, el propio Cauchy publicaría versiones más accesibles en 1829 y 1833. Tanto el libro de Lacroix como los que seguirían a los de Cauchy en las instituciones francesas evitarían el estilo conceptual de Cauchy (aunque no sus resultados sobre series convergentes): por ejemplo, la continuidad sería descrita más que definida; la integración sería vista como la antidiferenciación;....El principal objetivo del profesorado francés sería la preparación de estudiantes de ingeniería y ciencias para trabajos útiles al Estado. Teniendo a mano las expresiones decimales, nadie (salvo Cauchy) se preocuparía de proporcionar teorías para los números irracionales.

¿En qué basarse para lograr esa rigorización? El Algebra de Desigualdades sería la clave. La necesidad de basar todos los métodos y resultados conseguidos en definiciones claras (noción de convergencia, continuidad, diferenciablidad e integrabilidad) y pruebas rigurosas, llevaría a Cauchy (1789-1857), en el siglo XIX, a una primera etapa de rigorización de la disciplina. El hecho de que expresiones como "una variable que se aproxima a un valor fijo" y la visualización de los números reales como puntos de una recta aparezcan profusamente, nos indica que el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, en esta primera etapa, fue presentado en términos de matemática infinitesimal y no en lenguaje épsilon-delta (sólo utilizado por Cauchy verbalmente y probablemente la causa de algunos resultados incorrectos que obtuvo). Estas llamadas a la intuición geométrica, además del descrédito que sufriría la visualización de conceptos importantes como continuidad y diferenciabilidad harían necesaria una segunda etapa de "rigorización", liderada por Weierstrass (1815-1897) y Dedekind (1831-1916), que tendría las auténticas características de una revolución, eliminando el contenido geométrico-intuitivo de los razonamientos analíticos, al basarlos en una estructura aritmética: primero en los números reales (Dedekind) y, posteriormente, en los números naturales (Cantor), estructura ésta que estaría controladada por unos pocos axiomas (axiomas de Peano), que son, esencialmente, un conjunto de entidades generadas a partir del 0 por aplicación reiterada de la operación "sucesor". La axiomatización de Peano, a su vez, abriría el camino a la teoría de funciones recursivas, la teoría de los algoritmos y de la computación, entendida en sentido moderno. La construcción del continuo a partir de los naturales requeriría la introducción de unos nuevos entes matemáticos: los conjuntos infinitos. Además, la aritmetización del Análisis serviría a la consolidación de la Matemática Pura como disciplina practicada por un grupo específico de profesionales, creándose unos requerimientos especiales de formación para ganar aceptación dentro de este grupo.

(e) Las dos etapas de rigorización diferirían en la explicación de la noción de infinito que subyacía en sus construcciones: mientras que Cauchy se sustentaba en la noción de infinito potencial, Weierstrass se basaría en la noción de infinito actual y eliminaría los infinitesimales del Análisis. En un primer paso, el soporte natural de la teoría (el continuo de los números reales) debía ser rigorizado. En la historia del Análisis desde Leibniz hasta Weierstrass existían dos teorías rivales del continuo. Por un lado, la teoría Weierstrassiana hoy día aceptada y, por otro, la teoría Leibniziana (el continuo arquimediano extendido al no arquimediano producto de añadir los infinitesimales e infinitamente grandes). Esta segunda teoría fue la dominante hasta la revolución de Weierstrass y Cauchy se movería completamente en esta tradición. La revolución a la que aludíamos consistió en poder explicar satisfactoriamente el Análisis conocido en términos de los números reales (tal como los definió Weierstrass) y desarrollarlo más allá, eliminando del Analísis todas las magnitudes variables, todo cambio, movimiento y reduciéndolo todo a estados estacionarios, es decir, a magnitudes constantes (Luzin). Observemos que un real para Cauchy era una variable que podía correr a través de los reales de Weierstrass, los infinitesimales y todos aquellos "números" que diferían de los reales de Weierstrass en números infinitamente grandes o infinitesimales. Siguiendo a Lakatos, las variables de Cauchy eran sucesiones de reales de Weierstrass; sus números infinitamente grandes eran sucesiones no acotadas y sus infinitésimos, sucesiones que convergían a cero. Aunque Cauchy no menciona explícitamente la noción de sucesión, la idea está implícita (una de las dificultades pedagógicas en la exposición del Análisis es que, para la mayoría de alumnos, la visión del continuo que tienen está más próxima a Cauchy que a Weierstrass). Weierstrass construiría los números reales a partir de los racionales mediante la introducción de una algebraización satisfactoria de la noción de convergencia y la admisión del infinito actual de Cantor al considerar conjuntos infinitos de racionales positivos con sumas parciales acotadas para construir reales.

(f) Durante el siglo anterior los matemáticos se habían dedicado a buscar orden y regularidad en el Análisis. Las nuevas definiciones construidas con sumo cuidado y con fines profilácticos resultaron ser alarmantemente complejas y traerían más consecuencias que las previstas inicialmente haciendo la disciplina más precisa, pero más compleja, exigiendo una revisión de todas las pruebas conocidas y propiciando que, en el siglo XIX, el énfasis pareciera estar en la búsqueda de la excepción y la irregularidad. Dirichlet hallaría una función que no es continua en ningún punto (función que no sería integrable). Riemann (en su Habilitationsschrift de 1854) produciría el primer ejemplo de función integrable con una infinidad de discontinuidades. Este ejemplo sería de trascendencia en el desarrollo del Análisis, pues, desde Cauchy, la teoría de la integración sería una serie de intentos de extender el concepto de integral a tantas funciones discontinuas como fuera posible, intentos que sólo tendrían sentido gracias a la existencia de funciones altamente discontinuas, como la producida por Riemann. Así, con Fourier como precursor, los trabajos de Riemann colocarían a las funciones discontinuas como objetos de estudio en el paisaje matemático. Weierstrass sorprendería a la comunidad matemática con el primer ejemplo de una función continua que no es diferenciable en ningún punto, ejemplo que era contrario a toda intuición: de hecho todos los libros de Análisis de la época "probaban" que toda función continua era diferenciable salvo, quizá, en un número finito de puntos, probablemente influidos por los trabajos de Ampére (1775-1835 y creador de la Electrodinámica) que aseguraba haber probado este resultado. ¿Hay algo menos intuitivo que una función continua en un intervalo que no tenga derivada en ninguno de sus puntos? Observemos que la no-diferenciabilidad en un punto puede entenders intuitivamente como que la gráfica presenta un ángulo (vértice) en ese punto. La existencia de una función como la planteada sería algo así como una curva continua toda ella constituida por vértices (más tarde este descubrimiento se encarnaría en la descripción del movimiento browniano que describe el desplazamiento de las moléculas de un gas, como el aire que respiramos). Así, el concepto de función introducido por Dirichlet (que establece simplemente la función como una correspondencia arbitraria) y la noción de serie funcional como generadora de funciones como las de los contraejemplos anteriores, haría abandonar la visión geométrica de función (es decir, funciones y curvas serían ya conceptos distintos). El ejemplo anterior fue también el responsable de la separación entre las nociones de continuidad y diferenciabilidad en el estudio del Análisis.

Gracias a la existencia de contraejemplos a las nociones intuitivas más comúnmente aceptadas, los trabajos de Weierstrass tuvieron un efecto más duradero que ya hemos apuntado: la necesidad de proceder a una nueva etapa de rigorización (entendida como aritmetización) en los Fundamentos del Análisis al ser capaz de construir contraejemplos a las nociones más comúnmente aceptadas y plausibles (como la construcción de curvas antiintuitivas, como la de Peano, que desacreditarían la intuición visual).

> **Our own job is not entirely easy:...we have to explain the ideas of Newton in the notation of Leibniz to pupils who may not be quite so apt as Cauchy**
>
> Gilbert Strang

ENCUADRE EN UN MODELO EDUCATIVO

La frase anterior de Strang resume las dificultades cognitivas a las que un profesor se enfrenta cuando quiere que sus alumnos entiendan las ideas básicas del Cálculo Infinitesimal y de las que debe ser consciente. Las consideraciones anteriores hacen patente también la necesidad por parte del docente de conocer la génesis de los conceptos matemáticos y sus ulteriores transformaciones. Es nuestra fuerte intuición que, como estrategia educativa, no hay nada mejor que hacer vivir al alumno la aventura intelectual que supone la propia historia de las Matemáticas relativa al concepto cuyo entendimiento perseguimos.

Para buscar un modelo que se adapte a lo que pretendemos, debemos buscar uno que imite, en su esencia, el proceso de cómo discurrió la génesis de los conceptos matemáticos desde la idea naive inicial hasta la formulación rigurosa. Fijándonos, por ejemplo, en la evolución del concepto de grupo abstracto, éste ocurrió en fases o niveles que podrían ser descritas como (1) el descubrimiento de fenómenos aislados (nivel visual), (2) el reconocimiento de ciertas características comunes a todos ellos (nivel de reconocimiento), (3) búsqueda de nuevos objetos, su estudio y clasificación (nivel de clasificación y relación) y (4) la emergencia de principios generales y la formulación de postulados, cristalizando en abstracción de la estructura investigada (nivel de deducción). Aceptando que este esquema jerarquizado puede ser útil para la comprensión de cualquier otro concepto del Cálculo, recordemos qué es el

Modelo de van Hiele

Una línea de investigación prometedora es el estudio y aplicación del llamado modelo de van Hiele, que proporciona una descripción del proceso de aprendizaje postulando la existencia de niveles de pensamiento, que no se identifican con niveles de habilidad computacional y formación previa, y que, además de un Nivel 0 (predescriptivo), podríamos clasificar como: Nivel I (de reconocimiento visual), Nivel II (de análisis), Nivel III (de clasificación y relación) y Nivel IV (de deducción formal). Así, la aplicación de este tipo de modelo a una materia concreta necesita del establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados que permita la detección de los mismos, por lo que parece razonable asignar un conjunto de condiciones a los niveles diseñados para que puedan ser considerados dentro del modelo de van Hiele: (i) los niveles deben ser jerárquicos, recursivos y secuenciales, (ii) deben ser formulados detectando un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual, (iii) los instrumentos (de cualquier tipo) que se diseñen para su detección deben recoger la relación existente entre nivel y lenguaje empleado en cada uno de ellos y (iv) el diseño debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

Más precisamente, la detección de los niveles anteriores en una investigación concreta debe ser posible atendiendo a las seis propiedades siguientes:

> *Secuencialidad fija*: Un aprendiz no puede estar en un nivel n sin haber superado el nivel n-
>
> *Adyacencia*: El objeto de percepción del nivel n-1 se convierte en el objeto de pensamiento de nivel n.
>
> *Distinción*: El nivel n requiere una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido al nivel n-1, ésto es, la percepción de una nueva estructura completa.
>
> *Separación*: Aprendices que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse en lo que al objeto de su razonamiento se refiere.
>
> *Cada nivel tiene su lenguaje*: Cada nivel posee un lenguaje característico. Podemos encontrar en diferentes niveles las mismas expresiones con diferentes significados.
>
> *Consecución*: El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual.

Las raíces de este modelo hay que buscarlas también en la obra de Piaget, aunque con diferencias relevantes: admitiendo la existencia de varios niveles de pensamiento, Piaget piensa que el paso de un nivel de pensamiento a otro es función del desarrollo, van Hiele del aprendizaje. La preocupación de van Hiele estriba en cómo estimular el progreso de un nivel al siguiente, Piaget no veía la existencia de estructuras en un nivel superior como resultado del estudio de un nivel inferior. En el modelo de van Hiele sólo se alcanza el nivel superior si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así en una nueva estructura Piaget no da importancia al lenguaje en el paso de un nivel al otro. En van Hiele, cada nivel desarrolla su propio lenguaje característico de ese nivel.

4. Pautas de trabajo (Entrevista Clínica, Test de Respuesta Múltiple, Tratamiento Estadístico Robusto y Elaboración de la Propuesta Metodológica)

Elegido, pues, el modelo de van Hiele como marco de nuestra experiencia educativa por sus indudables conexiones con la aproximación genética que preferimos en Matemáticas y elegido un concepto concreto, la experiencia educativa pretende **crear un concepto-imagen** adecuado su concepto-definición. Adecuado hay que entenderlo en el sentido que la formulación verbal del concepto-imagen que se persigue debe producir automáticamente el concepto-definición, cuando el alumno disponga de la madurez de manipulación algebraica y lógico-deductiva que comporta el concepto-definición, por lo que, de ser exitosa, puede aplicarse a alumnos preuniversitarios o a alumnos de primer curso universitario que están cursando precisamente la materia de Cálculo Infinitesimal.

4.1 Entrevista Clínica

Dada la importancia capital que el lenguaje exhibido por los aprendices tiene en el modelo de van Hiele, la experiencia discurrirá como un diálogo socrático entre profesor y aprendiz: la investigación consiste primordialmente en diseñar el diálogo como una entrevista clínica semi-estructurada cuyo devenir (i) debe hacer aflorar los tres niveles I,II y III de van Hiele de razonamiento, (ii) debe ceñirse a una duración razonable y (iii) debe conseguir el objetivo propuesto, que es la la formulación verbal por parte del aprendiz de la definición del concepto que se persigue correspondiente al concepto-imagen adecuado al concepto-imagen del concepto que se estudia.

Naturalmente, debemos partir de algún tipo de información aceptada por entrevistador y entrevistado: así, nuestro nivel Predescriptivo obliga a partir de conceptos y hechos simples **geométricos** (pues perseguimos la creación progresiva de un concepto-imagen con fuerte componente visual-geométrica) de fácil aceptación por parte del aprendiz y establecer una reglas de juego verbales aceptables por ambas partes (profesor y aprendiz). Nuestra autoimposición de poder pasar la experiencia a alumnos preuniversitarios, obliga a la <u>no</u> utilización de terminología o habilidades algebraicas. A partir de ellos, construiremos una **primera imagen** que sea **manipulable** mediante un solo **mecanismo** (que deberá ser accesible al aprendiz para su ejecución), preferiblemente utilizando asistentes matemáticos y dando entrada en nuestra experiencia educativa a las nuevas tecnologías cognitivas (cuyo manejo no es requerido al aprendiz). Su utilización sobre ejemplos preseleccionados de dificultad creciente deberá ir detectando los niveles I,II,III de van Hiele (para los que habrá que establecer una lista de descriptores de reconocimiento) tanto en las manifestaciones del aprendiz sobre cómo afianzan o alteran sus convicciones como en el uso del lenguaje que emplee, progresivamente más refinado, conceptualmente hablando.

Por nivel detectado, la batería de preguntas que conlleva la experiencia consiste en un ciclo de aceptación-confianza-crisis, crisis que es producida por una nueva percepción que altera el concepto-imagen creado en ese nivel y obliga a un nuevo ciclo de aceptación-afianzamiento-crisis y así en espiral hasta alcanzar el nivel III.

El hallarse en nivel III se caracterizará por que

1.- el aprendiz exija una definición, que procuraremos establezca él mismo

2.- satisfacción del aprendiz al comprobar que “su” definición resuelve los casos problemáticos que le han dado problemas a lo largo de la entrevista

3.- Nueva crisis al ser confrontado con situaciones que su definición no resuelve, para hacerle ver las limitaciones de nuestra propuesta y la necesidad de proceder al concepto-definición en contextos más precisos que el puramente visual (algebraico y lógico) y a perseguir con coraje todas aquellas implicaciones que se sigan (necesidad de las teorías matemáticas). Nuestra experiencia tiene como objetivo producir al alumno la sensación de haber dominado un determinado concepto y hacerle ver que, si requiere certeza, debe proceder al nivel IV.

4.2 Ejemplo Ilustrativo

Concepto: Continuidad de una función en un punto

Manipulación: Mediante DERIVE®

Primera Imagen: Curva deformable

Mecanismo: Estiramiento (escalamiento horizontal)

4.2.1 Consideraciones previas

La presentación habitual del concepto de continuidad en el sentido de Cauchy-Weierstrass (la formulación "épsilon-delta")

(i) requiere no basarla en todas aquellas consideraciones visuales habituales que la palabra continuidad pueda sugerir, al ser esta definición esencialmente una consideración sobre controlabilidad local de errores y, aunque pueda tener un equivalente visual (eso es precisamente lo que buscamos bajo el término concepto-imagen), ese equivalente no corresponde a posibles levantamientos de lápices a la hora de plasmar la gráfica de la función correspondiente (Propiedad del Valor Intermedio) u otras imágenes de no rotura de la gráfica.

(ii) suele sustentarse en una visualización estática (para una función f concreta y un punto a de su dominio de definición, dado un distanciamiento vertical de la recta y = f(a) , encontramos un pedazo de gráfica que, conteniendo al punto del plano (a,f(a)), se halla localizado dentro de los límites marcados por ese distanciamiento vertical). Al no transmitir la esencia del concepto de límite como un proceso indefinido, no es adecuada y sólo nos sirve como punto de partida de construcción de nuestro concepto-imagen dinámico.

(iii) requiere de una madurez *algebraica* en tres vertientes: algebraica es la traducción de efectos visuales en símbolos, algebraica es la manipulación de símbolos (como, por ejemplo, módulos y sus manipulaciones) y algebraica también es la explicitación de las leyes lógicas inherentes al condicionamiento de las desigualdades: "para todo....., existe....."

No es habitual que las dos primeras vertientes estén presentes en alumnos preuniversitarios y la tercera, aunque disponible, necesita de entrenamiento más largo que el que habitualmente se proporciona (no basta poner los cuantificadores en su posicionamiento correcto y tirar para adelante). Nuestra propuesta metodológica **no** requerirá madurez algebraica, por lo que será fuertemente visual y la vertiente lógica se deberá plasmar en el condicionamiento verbal de unas imágenes a otras, lo que lograremos vía el programa DERIVE® como asistente matemático. Supondremos que

(i) los alumnos sometidos a la propuesta metodológica reconocen objetos como curva y punto con sus propiedades matemáticas elementales: una curva está constituida por puntos y los puntos no tienen dimensión. Debemos cerciorarnos de que ésto es así y, caso de notar dificultades en esta concepción "ideal" de entes geométricos, debemos lograr su aceptación.

(ii) aunque alumnos puedan tener asociado el concepto de curva al de función, evitaremos la mención del término “función” a lo largo de la propuesta, dada la enorme cantidad de obstáculos cognitivos asociados a este término (como han probado numerosas experiencias investigadoras) y presentaremos solamente representaciones gráficas de funciones y no las expresiones algebraicas de las que provienen, para evitar todo tipo de manipulación algebraica.

(iii) el concepto-imagen que de una curva posee un alumno es de carácter estático.

Buscamos una propuesta metodológica que transmita la esencia de la definición de continuidad funcional: sustituiremos “función” por “curva” (pero no la imagen de (iii), sino algo dinámico y deformable que precisaremos) y todo el proceso de creación de imágenes adecuadas nos llevará al concepto-imagen de “curva controlable localmente”, cuya formulación verbal por parte del alumno será el paso inmediatamente anterior a la formulación algebraica de continuidad de una función en un punto.

4.2.2 ¿Cómo construir la entrevista clínica?

Primer Objetivo: curva deformable

Nuestro primer objetivo es la creación de un concepto-imagen dinámico y deformable de curva, en la que podremos ver más o menos alejados los puntos que la constituyen, lo que es imprescindible para realizar las aproximaciones sucesivas que involucra encubiertamente el concepto de límite subyacente a la definición de continuidad. Trabajando con hilos y gomas, comparando la propiedad de elasticidad que tiene la goma con el hilo y marcando dos puntos en colores distintos, podremos observar que la distancia entre los puntos aumenta al estirar la goma, volviendo ésta a la forma original cuando dejamos de tensionarla. Esta imagen nos deberá servir para introducir el concepto de curva matemática como una goma ideal que nos permite estirarla todo lo que deseemos.

Construcción del estiramiento horizontal.

¿Cómo provocar un estiramiento horizontal semejante al anterior sobre una figura plana sobre papel o pantalla, figura que deberá exhibir las características de lo que entendemos por curva, es decir, la “goma ideal”? Primero, trabajaremos con una lupa sobre ejemplos de curvas presentadas en papel, con la intención de ver sus puntos más separados (para lo que las curvas llevarán pintados dos puntos de diferentes colores). La lupa permite separar los puntos horizontalmente, al mismo tiempo que también tiene el efecto no deseado de verlos separados verticalmente, así que la lupa no produce el efecto de separación que realizábamos con el estiramiento de la goma y no es el instrumento adecuado para reproducir el estiramiento. Un asistente matemático puede producir en pantalla el efecto deseado con un escalamiento de abscisas, dejando inalterable la escala de ordenadas. Ya sobre pantalla, compararemos el efecto Zoom (similar a la lupa) y el estiramiento horizontal sobre distintas curvas y haremos observar como actúa incidiendo en la separación de los puntos de la curva.

Trozo controlado

Necesitamos introducir lo que entendemos por “trozo controlado”: primero en el contexto del lenguaje cotidiano, introduciendo ejemplos de situaciones que el alumno entienda como “controladas” (no necesariamente en el ámbito geométrico) para incidir en la idea de control como la no superación de unos límites establecidos. Posteriormente, introducimos la idea de trozo controlado de curva pasando por la noción de distanciamiento vertical: introducimos parejas de rectas horizontales para identificar el “trozo controlado” con la búsqueda de las intersecciones entre rectas y curva.

Utilización adecuada de las deformaciones

Debemos de evitar que el alumno se sitúe en una situación mecánica, en la que utilice el estiramiento horizontal por sistema para determinar el trozo de curva controlado. Para evitarlo, proponemos situaciones en la que no se aprecien claramente las intersecciones entre las rectas horizontales y la curva, para producirle la necesidad de utilizar las deformaciones de forma adecuada: combinaciones de Zoom estiramientos. Al mismo tiempo vamos cambiando la pareja de rectas horizontales para que observe el dinamismo del proceso: lo más adecuado es ir acercándolas al punto y así observará la dependencia existente entre la variable “pareja de rectas horizontales” y el trozo controlado. El alumno habrá cambiado sus objetivos de buscar un trozo de curva controlado (fijándose en las intersecciones con las rectas) a observar la dependencia del trozo controlado con la variable pareja de rectas horizontales.

No existencia de trozo controlado

Cuando el alumno se desenvuelva con la suficiente seguridad en el paso anterior, presentaremos situaciones en las que no es posible encontrar el trozo controlado, junto con situaciones donde sí es posible, dependiendo de la pareja de rectas horizontales dada. No incidiremos en las discontinuidades de salto o evitables, ya que estas reforzarían la imagen intuitiva y errónea de que una función continua como, exclusivamente, aquella que sin roturas. Por ello, buscaremos nuestros ejemplos en funciones oscilantes. Este paso suele representar una dificultad seria para el alumno, ya que anteriormente le estábamos pidiendo que buscara la intersección que permitiera identificar el trozo controlado y, ahora, pasamos a pedirle que determine si existe o no el trozo controlado para la curva y la pareja de rectas horizontales correspondiente. Para ello, el alumno en principio realizará estiramientos horizontales hasta que observe que el posible proceso indefinido de acercamiento no le va a permitir observar las intersecciones entre la recta y la curva, por lo que deberá concluir la no existencia de trozo controlado.

Para cualquier par de rectas horizontales

Hasta ahora hemos abundado en la situación estática correspondiente a “*dado un épsilon concreto encontrar un delta apropiado*”, pero debemos dar el paso de ir practicando con cualesquiera épsilons, para lo que recurriremos a presentarle al alumno una curva con una variedad de parejas de rectas horizontales cada vez más próximas preestablecidas y pedirle el trozo controlado que corresponda. Una vez pasado satisfactoriamente este paso, preguntaremos, en ausencia de rectas horizontales, como procedería para cualquier pareja de rectas horizontales.

Distinción entre comenzar por parejas de rectas horizontales o comenzar por parejas de rectas verticales.

Vamos a pasar a estudiar el delicado aspecto **lógico** de la encubierta definición de límite funcional como es la diferencia entre “dado un épsilon encontrar un delta” y la definición que obtendríamos si diéramos un delta y quisiéramos encontrar un épsilon, sólo como una verificación de que entiende el posicionamiento de los cuantificadores lógicos y las diferencias que se producen al alterarlo. Para ello presentamos la situación que se obtiene al comenzar por parejas de rectas verticales, buscando el trozo controlado y las rectas horizontales correspondientes. Presentamos situaciones que hayamos observado anteriormente comenzando por parejas de rectas horizontales, y evaluamos la reacción de los alumnos: ¿Considera que es diferente el resultado al comenzar por rectas horizontales que el de comenzar por rectas verticales? ¿Observa que comenzando por rectas verticales siempre podrá encontrar un trozo controlado? ¿Concluye que son dos conceptos distintos los que se obtienen?

Método de clasificación.

Ya estaríamos en condiciones de solicitarle la definición de continuidad entendida como controlabilidad local de curvas, para lo que proponemos la idea de "curva controlable localmente" como aquella que, para cualquier pareja de rectas horizontales, siempre podemos encontrar un trozo controlado. Se le propone la búsqueda de un método de clasificación y su aplicación a un conjunto de curvas, pasando antes por ejemplos que le permitan observar que las curvas controlables tienden a quedarse planas ante la realización de estiramientos, propiedad que no se da en las curvas no controlables. Esperamos que el alumno ofrezca el método "*de estirar la curva y aquellas que tiendan a quedarse plana será controlable*"

Algebrización

La explicitación verbal del método por parte del alumno conlleva una evolución de razonamiento desde premisas muy elementales a la idea de controlabilidad con su manejo implícito de los cuantificadores lógicos y por tanto, habrá asimilado la idea de continuidad, aunque no la reconocerá con ese nombre. Haciéndole saber que el fenómeno estudiado hasta ahora también se le conoce con el término "continuidad", será conveniente enfrentarle con contraejemplos a su concepto-imagen del término verbal continuidad como "no rotura de la curva".

4.2.3 ¿Cuáles serían los descriptores de los niveles de van Hiele?

A modo de ilustración, ofrecemos cuáles serían los descriptores de cada nivel obtenidos por Pedro Campillo en su tesis doctoral (así como la elaboración de la entrevista clínica anterior, de la cual sólo hemos mostrado las ideas subyacentes y no las preguntas concretas):

NIVEL 0 (Predescriptivo)

0.1 El mero reconocimiento de los objetos a estudio (puntos, curvas, rectas) constituye lo que consideramos nivel 0 o predescriptivo: se reconocen los objetos con sus propiedades matemáticas elementales: un punto no tiene dimensión y una curva esta formada por una infinidad de puntos sin "agujeros" entre ellos.

NIVEL I (de reconocimiento visual)

1.1 La construcción del estiramiento por el alumno será una característica de nivel I, estiramiento entendido como separación horizontal de los puntos de una curva, dejando fijo el distanciamiento vertical entre ellos.

1.2 El reconocimiento del trozo de curva controlado localmente, fijánndose para distinguirlo en los puntos de corte entre la curva y la recta.

1.3 Una característica del nivel I es una primera apreciación de lo que luego vendrá a constituir el dinamismo del concepto: una pareja de rectas horizontales más cercanas al punto provocan una reducción del trozo de curva controlado localmente; comprende que el resultado depende de la variable "pareja de rectas".

1.4 (Diferenciación del nivel II) El alumno de nivel I que no ha llegado a nivel II no recurre a las deformaciones, cuando tiene dificultades para apreciar cuál es el trozo de curva controlado localmente, al no ser capaz de utilizar herramientas anteriores ante un problema nuevo.

NIVEL II (de análisis)

2.1 La utilización de las deformaciones de forma adecuada para poder decidir el trozo de curva controlado localmente es una característica del nivel II: la utilización de nuevos medios para resolver un problema que hasta ahora no se le había presentado.

2.2 Fijado un distanciamiento vertical, la apreciación de que una curva no tiene trozo controlado localmente para esas rectas dadas, proporciona una distinción con el nivel I, siempre que llegue a esa aseveración tras hacer realizado las deformaciones adecuadas y haya generalizado que, en el teórico proceso infinito de posibles deformaciones, no podría apreciar el trozo controlado. Así como la apreciación de trozo de curva controlado es un proceso finito y realiza deformaciones hasta poder

apreciar los cortes de las rectas con la curva con claridad, la conjetura de la no existencia de control local, supone un paso más en la calidad de razonamiento.

2.3 El alumno en nivel II avanzado también podrá desenvolverse en este tipo de problemas, aunque no se le explicite un distanciamiento vertical de entrada.

2.4 La separación entre los niveles II y III, seríaa la capacidad de distinguir que no se obtiene el mismo concepto de control local comenzando por distanciamientos verticales en lugar de horizontales.

NIVEL III (de clasificación o relación)

3.1 Es capaz de ejemplificar situaciones en donde la distinción mencionada en 2.4 es patente.

3.2 Proporciona el método adecuado para saber si una curva es controlable localmente y es capaz de aplicarlo correctamente, siendo esta actitud un diferenciador claro de nivel III.

Test de Respuesta Múltiple

La realización, en número suficiente de entrevistas clínicas previas permitirá la confección de un test de respuesta múltiple. Procederemos a la elaboración de esa prueba escrita con los condicionantes que se derivan de ajustarse al modelo educativo (al igual que la entrevista) y con aportes de información, que suplan sus deficiencias frente a la riqueza informativa que se proporciona en la entrevista. Diseñaremos cuatro opciones de respuesta cerradas por pregunta (que habrán sido escogidos de entre las respuestas más representativas de la entrevista, acertadas o no), dejando una opción de respuesta "e", abierta para dar libertad de expresión, en el caso de que las otras cuatro opciones no se correspondieran con el pensamiento del alumno y, siendo la elección de esta ultima opción, nuestra única posibilidad de indagar sobre el lenguaje empleado por el entrevistado, aspecto este que nos venía dado de forma natural en la entrevista.

4.3 Tratamiento Estadístico

Se plantea la dificultad de asignar un nivel de razonamiento respecto al concepto que investigamos a cada uno de los tests (los descriptores conseguidos en la entrevistas son la clave), para lo que utilizamos un algoritmo de K-medias con la asistencia del Programa SPSS©. En dicho algoritmo, los casos se asignan a su vez al centro de conglomerado más próximo. La localización del centro, en el caso de que hayamos seleccionado utilizar las medias actualizadas, se actualiza después de añadir cada dato. Se asignan todos los datos y el proceso se van repitiendo hasta que la solución converja. Entonces se clasifican todos los casos, asignándoles el centro de conglomerado más próximo. Antes de comenzar el análisis de conglomerados con el algoritmo de K-medias, nos planteamos elegir el número de conglomerados, que según nuestra clasificación de niveles, debería de ser de tres. Pasamos, en una segunda fase, a buscar unos centros iniciales, para lo que hicimos una preclasificación de las pruebas a las que claramente podíamos asignarle un nivel, que no será definitiva, sino útil para encontrar los centros iniciales (para arrancar con el algoritmo) y que irían cambiando a medida que avanzamos. Para poder realizar esta preclasificación, agrupamos las preguntas de la prueba escrita en tres bloques y elegimos un criterio de clasificación "del experto". Calculamos los porcentajes de aciertos de cada pregunta, según el nivel de razonamiento asignado a la entrevista, utilizando estos porcentajes como centros iniciales ya que, de no introducir unos centros iniciales, el algoritmo no tiene capacidad para encontrar una clasificación coherente, debido a la diversidad de las respuestas. Consideramos otro criterio distinto de clasificación, pero también acorde con nuestros resultados experimentales previos y con la opinión del experto. El algoritmo arroja también una clasificación en tres centros, que coincide esencialmente con la obtenida con el criterio del experto, lo que deber a confirmar la estabilidad del análisis estadístico realizado. Resumiendo, el tratamiento estadístico empleado deber a confirmar (a) la existencia de tres esquemas bien diferenciados de respuestas, correspondientes a los niveles cuya existencia quer iamos demostrar (b) que los descriptores propuestos son los adecuados a la descripción de cada nivel y (c) que su detección ha sido también posible mediante el test de respuesta múltiple.

El algoritmo deber a ofrecer una clasificación de los tests realizados que concuerde con nuestra experiencia previa vía la entrevista. Observándolos por grupos, deberán poder apreciarse diferencias entre alumnos universitarios y alumnos no universitarios, además de poder afirmar que los niveles no se correspondan con niveles educativos, es decir, garantizar la existencia de alumnos universitarios con un nivel bajo de razonamiento, aunque encontrando previsiblemente entre estos más porcentaje de alumnos con un nivel de razonamiento más alto.

4.4 Propuesta Metodológica

Las conclusiones obtenidas deberán permitir la elaboración fiable de una propuesta metodológica, siendo la entrevista clínica la base de la elaboración de esta propuesta. Para su utilización en alumnos de secundaria, se elaborará un software interactivo que permita reproducir el fluir de la entrevista. Para su utilización en alumnos universitarios, su implementación ideal será el diseño de una clase por debate científico.

EXPLORACIÓN, VISUALIZACIÓN Y DEMOSTRACIÓN:
LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS CON *EL GEÓMETRA*

Homero Flores, Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, México

ahfs@servidor.unam.mx

Scott Steketee, Señor Software Developer, KCP Technologies, Emeryville, CA, USA

stek@keypress.com

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas apoyada en el uso de software de Geometría Dinámica como *El Geómetra* (The Geometer's Sketchpad) puede hacerse mucho más significativa y fomentar de manera mucho más eficiente un pensamiento reflexivo y un razonamiento deductivo en nuestros alumnos, no importa el grado en que se encuentren. Ahora bien, con la versión 4.0 de Sketchpad es posible enseñar de una manera más amable no sólo la geometría, sino cualquier rama de las matemáticas, desde la aritmética hasta el cálculo, pasando por el álgebra y la geometría analítica. En este artículo se verán algunas actividades con Sketchpad cuya intención es ilustrar el uso de la exploración, visualización y la demostración para desarrollar el entendimiento matemático y el razonamiento reflexivo en nuestros alumnos.

INTRODUCCIÓN

En los años recientes la enseñanza de las matemáticas se ha visto beneficiada con el advenimiento del software educativo. En este ámbito se han diseñado muchas aplicaciones encaminadas principalmente a facilitar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, el cálculo y la geometría. Ahora bien, existen pocos programas que se puedan aplicar a cualquier rama de la matemática con la misma facilidad, aunque la tendencia en los nuevos softwares y en las actualizaciones de los ya desarrollados apunta en esa dirección. Tal es el caso del software de Geometría Dinámica *The Geometer's Sketchpad* en su versión 4.0 (Jackiw, 2000), más conocido en español como *El Geómetra*.

En el presente trabajo veremos algunos ejemplos que pondrán en relieve las nuevas características del software y porque afirmamos que es de gran utilidad en actividades de exploración, visualización y demostración en la enseñanza de las matemáticas y no sólo en la enseñanza de la geometría. Éstas y otras actividades pueden revisarse en www.keymath.com.

Centroide

Iniciamos con una pantalla en blanco y las herramientas propias de la geometría euclidiana: la regla y el compás (que en Sketchpad corresponden a las herramientas de Rectas y Círculo). Usamos primero la regla para construir un triángulo. Al arrastrar un vértice o uno de los lados, nos damos cuenta de que el resultado no es un solo triángulo, sino la representación de cualquier triángulo posible, agudo, obtuso, recto, etcétera.

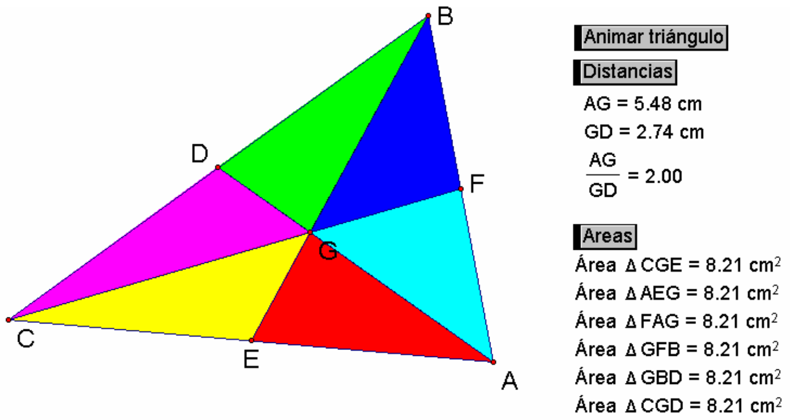
A continuación construimos el punto medio de los lados. En caso de que estemos en un aula, conviene que el alumno construya el primer punto medio usando exclusivamente las herramientas de rectas y círculo, esto con el fin de que vaya recreando la geometría euclidiana, los demás puntos medios los puede construir con el comando Punto medio. Volvemos a usar la herramienta de Rectas para construir las tres medianas del triángulo.

Los estudiantes se darán cuenta de que la tercera mediana pasa por la intersección de las otras dos (intersección conocida como centroide). En un dibujo en papel, la observación sería válida para un solo caso, siempre y cuando el alumno haya hecho la construcción con el suficiente cuidado. Pero con Sketchpad, el estudiante puede arrastrar el triángulo y observar que la observación es válida para cualquier triángulo.

El estudiante puede ahora medir la distancia del centroide a uno de los vértices y al punto medio del lado opuesto y descubrir que a pesar de que las distancias cambian, hay algo constante en la relación. En una configuración particular, encontramos que una distancia parece ser el doble de la otra. Con Sketchpad, podemos descubrir que esta relación se cumple sin importar el tamaño o la forma del triángulo.

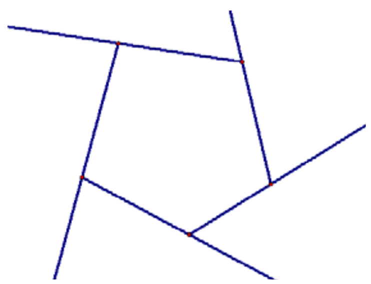
Para continuar con nuestra investigación, podemos medir el área de dos de los triángulos interiores (para ello es necesario construir el interior de los triángulos y después medir el área). Al arrastrar el triángulo, nos damos cuenta de que las áreas son iguales, a pesar de que los dos triángulos interiores tengan formas muy diferentes.

Por último, si deseamos que otros vean el resultado de nuestro trabajo en Internet, podemos guardar nuestro archivo como página web y ponerlo en nuestro sitio de Internet. Podemos cambiar el tamaño del dibujo para que aparezca en la página del tamaño adecuado. Después cambiar el dibujo con extensión html. Después de guardado, podemos abrirlo con un navegador de web para ver el resultado.

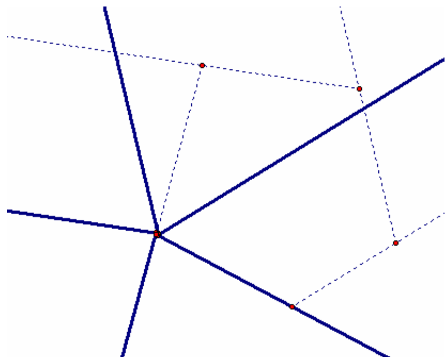


Ángulos exteriores

El siguiente es un ejemplo de lo valioso que puede ser la combinación de Sketchpad y la geometría de las transformaciones. En el aula podemos pedirle a los estudiantes que intenten imaginarse cuál será la suma de los ángulos externos de un pentágono. Para ver con facilidad los ángulos exteriores, usamos la herramienta de rayo para construir el pentágono. Ahora tenemos cinco ángulos exteriores y podemos medirlos y sumarlos con los menús de Sketchpad. Pero haremos las cosas un poco diferentes.



Primero marcamos un vértice como centro de rotación o de dilatación. Para rotar objetos, podemos utilizar la herramienta de Flechas del programa. Si giramos los otros vértices alrededor del centro, nos damos cuenta de que los ángulos no cambian. Del mismo modo, si usamos la lecha de dilatación para dilatar los demás vértices, notamos que los ángulos siguen sin cambiar. Pensemos ahora una vez más en la pregunta original: ¿cuál es la suma de los ángulos exteriores del polígono? Si lo encogemos hasta que se colapse en un punto obtenemos la figura siguiente.



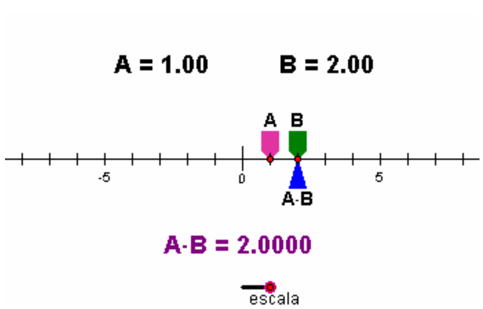
Este es un ejemplo en el cual el estudiante no sólo da una respuesta correcta, sino que inmediatamente se da cuenta de que ésta es válida para cualquier polígono convexo. Además, la naturaleza de la demostración visual es tal que el estudiante la recordará durante mucho tiempo: siempre recordará cómo se verá el pentágono si se le encoge hasta un punto.

Multiplicación en la recta numérica

En este ejemplo presentamos una máquina mágica que toma dos números como entrada y produce otra cosa. Los estudiantes no necesitan saber exactamente cómo funciona la máquina, pero pueden primero ver que produce exactamente los resultados que normalmente obtienen cuando multiplican dos número positivos.

Después observamos cómo se comporta cuando multiplicamos un número positivo por uno negativo, y vemos el comportamiento de la máquina es consistente. El movimiento del resultado es continuo a medida que uno de los números cruza el cero y se vuelve negativo.

Finalmente, preguntamos al alumno que diga qué espera cuando ambos número son negativos. Si la máquina se comporta de manera continua, ¿qué pasará cuando el segundo número cruce el cero?



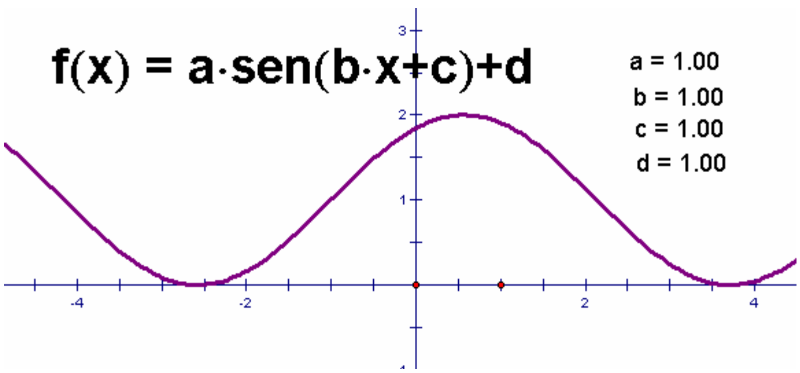
Esta máquina hace muy fácil que un estudiante entienda el argumento por el cual el producto de dos números negativos es positivo.

Familia de funciones

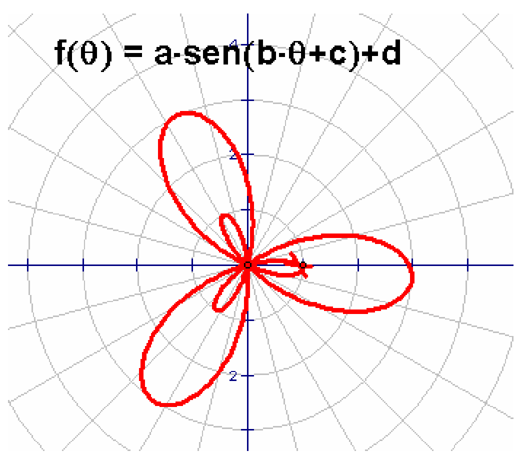
Es muy fácil graficar una función con Sketchpad. Elija Graficar nueva función del menú Graficar y teclee la función, en este caso sen(*x*). El programa nos pregunta si deseamos graficar la función seno usando grados o radianes. Escogemos radianes y aparece la gráfica.

Con Sketchpad podemos graficar una familia entera de funciones al agregar un parámetro a nuestra función. Escogemos Nuevo parámetro del menú Graficar y etiquetamos con “a” al parámetro. Hacemos lo mismo para obtener un segundo parámetro “b”. Ahora hacemos doble clic en la expresión de la función para editarla y la cambiamos para que ahora tenga los parámetros.

Después de hacer la edición todavía no vemos cambios porque ambos parámetros tienen valor uno. Podemos cambiar el valor de los parámetros si presionamos las teclas “+” y “-“ y explorar la familia de funciones que se crea. Podemos fácilmente ver cualquier valor particular de cualquier parámetro si hacemos doble clic en él y tecleamos un nuevo valor. También podemos animar los parámetros para observar cómo cambia la función y su gráfica.



Podemos también graficar la función en coordenadas polares. En el siguiente dibujo presentamos la familia de funciones del seno en coordenadas polares. Si mostramos los controles podemos ver que el valor de *b* es uno. Cambiemos el valor a 3 para ver el resultado. Este dibujo nos parece muy atractivo, pues cuando animamos el parámetro *c* podemos imaginar que somos pilotos de una aeronave a punto de despegar.



Derivada

En el siguiente ejemplo presentamos varias actividades que tienen el objetivo de ayudar a los estudiantes a entender el concepto y la definición de derivada. Recomendamos hacer las actividades en dos partes para darle tiempo al estudiante de pensar en ellas. En la primera parte empezamos con una función, por ejemplo, sen(*x*). Después utilizamos la herramienta de Rectas para construir una secante.

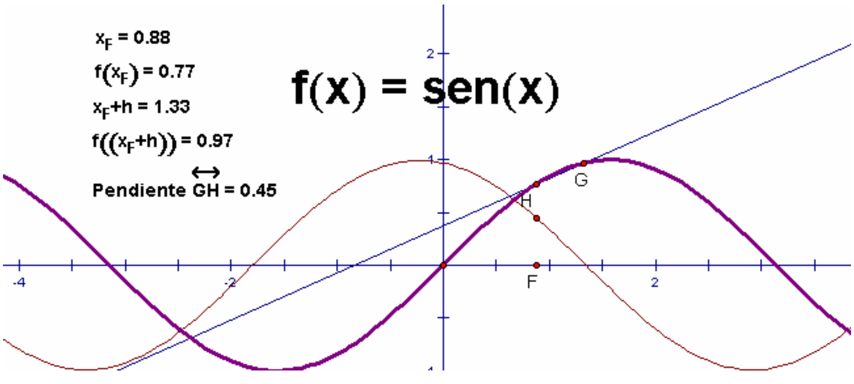
Observe que podemos arrastrar la secante a lo largo de la función y animarla de modo que se desplace de manera automática. Ahora que tenemos una secante, queremos estudiar la "función pendiente", es decir, deseamos observar el comportamiento de la pendiente de la recta secante en diferentes posiciones de la función. Medimos la pendiente y el valor *x* de uno de los puntos extremo. Podemos graficar el punto que muestra el valor de la pendiente y marcar su rastro. Cuando movemos la secante, podemos observar la función pendiente de la secante.

Sin embargo, la pendiente de la secante no es un resultado preciso para la pendiente de la función misma; podemos hacer que el resultado sea mucho más preciso si acercamos mucho los puntos A *y* B entre sí. Ahora vemos una aproximación mucho mejor del valor de la pendiente de la función.

Como una segunda parte de las actividades, en una clase posterior, colocamos un punto en el eje *x* y medimos su abscisa. Después calculamos el valor correspondiente de *f*(*x*). Si graficamos estos dos valores, tenemos un punto en la función; en esta ocasión deseamos controlar la separación de los dos puntos, por tanto construimos el parámetro *h*. Definimos las propiedades de este parámetro de manera que cambie en valores muy pequeños, 0.01, cada vez que presionamos la tecla "+" o "-".

Si calculamos tanto el valor de *x* + *h* como el de *f*(*x* + *h*), tendremos las coordenadas requeridas para un segundo punto en la función. Podemos ahora utilizar estos dos puntos para construir una recta secante. Ésta es diferente de la construida en la primera parte, pues ahora tenemos un control muy preciso de la separación de los dos puntos.

Midamos de nuevo la pendiente de la secante y grafiquemos después el valor de la pendiente como función de *x*. Incluso podemos graficar el lugar geométrico del punto graficado para diferentes valores de *x*, para ver la función pendiente completa al mismo tiempo. Y podemos cambiar la separación de los dos puntos para hacer que el resultado sea más o menos preciso para la pendiente de la tangente. Y también podemos ver por qué podemos hacer que el valor de *h* se acerque a cero, pero sin dejar nunca que realmente alcance este valor.



Podemos hacer mucho más con el cálculo, como explorar el teorema fundamental del cálculo y hacer algunas actividades con antiderivadas e integrales definidas, y con campos de tangentes. De hecho, creemos que el único límite que un profesor encuentra al diseñar actividades con Sketchpad es su imaginación.

Los ejemplos presentados en esta plática son sólo una pequeña muestra de la capacidad que tiene Sketchpad para diseñar actividades de enseñanza de las matemáticas (y algunas otras materias como física) en las cuales el alumno pueda hacer las matemáticas que debe aprender en cualquier nivel escolar, desde primaria hasta universidad. El uso del paquete en el aula permite diseñar actividades donde el alumno, a través de la exploración, pueda descubrir objetos matemáticos y las relaciones que existen entre ellos; pueda tener una mejor visión de los conceptos matemáticos mediante representaciones geométricas dinámicas de los mismos; y pueda, a través de la exploración y la visualización, llegar a sus propias conclusiones y sus propias conjeturas e, incluso, aventurarse en el arduo camino de validarlas y argumentarlas para convencerse a sí mismo y a otros de su veracidad: una de las actividades más importantes de un matemático y una de las habilidades que todo buen profesor de matemáticas quisiera fomentar en sus alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Jackiw, N (2001), *The Geometer's Sketchpad: software de geometría dinámica para explorar matemáticas, version 4.0.* Key Curriculum Press**,** Emeryville, Ca. EUA.

La enseñanza de la Matemática desde una óptica vigotskiana

Juan Raúl Delgado Rubí
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (CUJAE). Cuba.
rdelgado@ind.cujae.edu.cu

Resumen

A partir de la pasada década comenzaron a tener auge, en el ámbito de la Matemática Educativa, las ideas de Vigotsky y su teoría psicológica; sin embargo, aún entre los docentes e investigadores latinoamericanos se conoce poco sobre los principales presupuestos de su teoría psicológica y lo más importante, de sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas.

El enfoque histórico-cultural ha servido durante muchos años de referente teórico en las investigaciones educativas en Cuba, influidas por la formación de profesionales cubanos de alto nivel en la desaparecida Unión Soviética y enriquecidas por ese laboratorio permanente que es la práctica educacional cubana.

Este trabajo tiene como objetivo divulgar entre los profesores e investigadores de la comunidad de educadores matemáticos latinoamericanos, los principales presupuestos teóricos de esta escuela psicológica, significándolos en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, aunque con énfasis especial en el nivel superior, a tono con el nivel de enseñanza donde el autor desarrolla sus investigaciones.

Presentación del enfoque histórico-cultural

El enfoque histórico-cultural en la psicología tiene sus orígenes a principios del siglo XX, en la primera década de vida de la Revolución Socialista de Octubre en Rusia y surge como una respuesta de su creador, el maestro y psicólogo ruso Lev Semionóvich Vigotsky[1] (1896-1934) y sus colaboradores más cercanos, al problema de encontrar una psicología, que respondiendo al enfoque materialista dialéctico e histórico de la filosofía, superara la obsoleta psicología vigente a principios de siglo.

La profunda revolución económico-social que arribaba al poder era concebida y aupada por una mayor y más profunda revolución ideológica, que estremecía todos los estamentos de la sociedad y la propia concepción del mundo: de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento.

Fue precisamente en este último campo donde Vigotsky se propuso hacer su mayor contribución y el resultado fue extraordinario. La concepción vigotskiana de la psicología constituiría toda una revolución en esta esfera y sentó las bases para la creación de una de las más importantes escuelas psicológicas del siglo XX.

Concibió la psicología como una ciencia de la psiquis humana con todas sus características y complejidades, que si bien tomaba en cuenta los resultados de las investigaciones en animales, debería superarlos por la condición primera de concebir al hombre como un ser social que piensa, interactúa, se transforma y se comunica con los demás a través de un lenguaje articulado y complejo que se corresponde con el desarrollo alcanzado por su pensamiento, en tanto sistema de funciones psíquicas superiores; ciencia que dejaba atrás la introspección como método fundamental y pasaba a estudiar al individuo en su desarrollo como integrante de un grupo social del cual no se podía sustraer, pues se perdería la quinta esencia de su humanidad.

[1] Para el apellido del insigne psicólogo se adopta en el presente trabajo la ortografía que es habitual entre los psicólogos cubanos, la cual además está sugerida y justificada en Castorina et al. (1996).

Al asumir conscientemente la filosofía marxista como marco filosófico-metodológico de las investigaciones, la concepción vigotskiana de la psicología es consecuente con las posiciones y enfoques del materialismo dialéctico e histórico.

En consecuencia con ello, Vigotsky concibe una teoría psicológica esencialmente genetista, que centra su atención y sus explicaciones en el *desarrollo* como categoría principal, visto este en sus diferentes niveles: el filogenético (desarrollo de la especie humana), sociogenético (desarrollo de los grupos sociales), ontogenético (desarrollo del ser individual) y microgenético (desarrollo de aspectos específicos de la personalidad).

Consideraba que la conjunción compleja de estos niveles en cada individuo en un momento dado de su desarrollo personal traza una impronta que distingue a la especie humana del resto de las especies. Un enfoque así es típicamente sistémico, dialéctico e histórico, a tono con el enfoque marxista.

El psicólogo norteamericano Jerome Bruner al referirse a la teoría creada por Vigotsky apuntaba:

> *"En realidad su teoría educacional es una teoría de transmisión cultural como también una teoría de desarrollo. Ya que 'educación' no sólo implica para Vigotsky el desarrollo del potencial del individuo sino también la expresión y el crecimiento históricos de la cultura humana de la que surge el Hombre"*(Bruner, 1987)

No debe extrañar entonces, la creencia de Moll (1993) y otros estudiosos de que la pedagogía fue la ruta esencial del acercamiento de Vigotsky a la psicología y en consecuencia que la concepción vigotskiana enfatice en las aplicaciones de los resultados teóricos de la enseñanza y el papel de la escuela y en general de la enseñanza institucionalizada, en la transmisión cultural.

La llamada "troika rusa" Vigotsky-Luria-Leóntiev constituyen los tres primeros y principales pilares del surgimiento de la concepción y desarrollo del enfoque histórico-cultural.

A los resultados de investigación basados en la nueva concepción psicológica se fueron sumando apellidos tales como Zaparozhets, Slavina, Bozhovich, Morozova, Levina, Zinchenko y Galperin entre otros, todos psicólogos jóvenes que posteriormente dirigieron sus propias investigaciones, pero ya bajo el marco del enfoque histórico-cultural.

En su corta, pero fructífera vida (apenas 37 años) Vigotsky escribió más de 180 obras. Muchas de sus ideas nunca se publicaron. Otras se dieron a conocer mucho tiempo después de su muerte. Gracias a Luria y Bruner se conoció fuera de las fronteras de Rusia su obra mayor "Pensamiento y Lenguaje" y otros de sus más importantes trabajos.
L.S.Vigotsky es considerado uno de los grandes *monstruos* de la psicología educacional del siglo XX.

Principales presupuestos

Los temas que constituyen el núcleo de la estructura teórica de Vigotsky son:

1. la creencia en el método genético o evolutivo de investigación y la interacción de los distintos niveles (filogenético, sociogenético, ontogenético y microgenético) en los procesos de aprendizaje y desarrollo del individuo.

2. la tesis de que los procesos psicológicos superiores tienen su origen en procesos sociales y

3. la tesis de que los procesos mentales pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan como mediadores.

En esta exposición se desarrollarán los dos últimos temas porque son los que tienen incidencia directa sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje, ilustrándose con ejemplos relacionados con la Matemática Educativa. Asimismo, se expondrá la óptica vigotskiana de las relaciones existentes entre desarrollo, aprendizaje y enseñanza.

Los procesos psíquicos superiores tienen su origen en procesos sociales.

Para Vigotsky los procesos de aprendizaje ocurren como procesos de asimilación de la cultura y del conocimiento del grupo social al que pertenece el individuo, ocurren siempre de afuera hacia adentro, como un proceso de interiorización que permite la transformación de las funciones psicológicas y en general del pensamiento.

Así, toda función psíquica, todo conocimiento, toda actividad que será aprehendida y dominada por el individuo, aparece en acción dos veces, primero en el plano interpsicológico -donde el individuo intercambia con el medio social e interactúa con otros sujetos- y sólo después en el plano intrapsicológico -el de la individualidad, donde el sujeto ha hecho suyos los signos sociales, los significados de ellos y ha elaborado nuevas herramientas psicológicas para actuar en situaciones relacionadas con esos signos.

Esto no ocurre sólo en el terreno cognitivo, sino que involucra a todas las esferas de la personalidad. De acuerdo con Martha Kohl de Oliveira:

"*El proceso de internalización, que corresponde a la misma formación de la conciencia, también es un proceso de constitución de subjetividad a partir de situaciones de intersubjetividad. El pasaje del nivel interpsicológico a intrapsicológico involucra, así, relaciones interpersonales densas, mediadas simbólicamente, y no cambios mecánicos limitados a un terreno meramente intelectual*" (Oliveira, 1992, Pág. 68).

Esta interpretación tiene implicaciones directas en concepción pedagógica con soporte en el enfoque histórico-cultural, la cual defiende el principio de la unidad instrucción-educación y en consecuencia lo perjudicial de la separación de los objetivos de enseñanza en instructivos y educativos.

En el caso particular de la matemática educativa, debe destacarse que esta concepción vigotskiana viene a reforzar teóricamente lo que quizás por su experiencia personal, formación e investigaciones en el campo particular de la enseñanza de las matemáticas, algunos educadores (por ejemplo Schoenfeld, 1985) defienden como indispensable en la formación del pensamiento matemático en los estudiantes, a saber: las clases de matemática deben desarrollarse como un *microcosmos matemático*, donde no se instruya formalmente, sino se eduque, se trasmitan los modos de actuación característicos de quienes hacen bien las matemáticas, se aprenda el conocimiento, se desarrollen las habilidades a la par que se forman valores (éticos, estéticos, morales…) y se configuran actitudes y un sistema de creencias (belief system) sobre las matemáticas, su lugar en la cultura, su papel en una concepción científica del mundo y en particular sobre las potencialidades y orientaciones necesarias para resolver problemas dentro de determinados marcos.

En el propio desarrollo del enfoque histórico-cultural surgió la Teoría de la Actividad a partir de los trabajos de Leóntiev y colaboradores, la cual reforzó la idea de la dinámica entre la actividad externa e interna del sujeto, de la apropiación de los signos y significados sociales a través de la actividad del sujeto con el medio y con otros individuos.

Esta teoría explica los procesos de aprendizaje a través del paso de la actividad externa del sujeto en el medio social (plano interpsicológico) a ser actividad interna y mental del sujeto cognoscente (plano intrapsicológico) transitando por ciertas etapas del proceso de asimilación, a través de las cuales se va transformando no sólo el carácter de apropiación de dicho conocimiento, sino además las cualidades mismas de esa apropiación (dominio, reflexión, solidez, independencia, generalización, etc.).

Esas etapas son la motivacional, la de elaboración de las bases de orientación de la actividad, la material o materializada, la verbal y la mental (Galperin, 1959), las cuales constituyen estadios por los que transita con mayor o menor evidencia todo conocimiento o actividad en su proceso de interiorización en el sujeto.

La Teoría de la Actividad asume el enfoque holístico o sistémico vigotskiano al concebir la actividad psíquica superior descompuesta en unidades que conservaran la esencia del todo. Se presenta así a toda actividad humana como esa unidad, provista de una estructura funcional que toma en cuenta la motivación, la orientación, la ejecución y el control.

Por su parte Wertsch (1985) ha destacado que la unidad de estudio *"no podía derivarse de divisiones o abstracciones artificiales de la actividad psicológica real. Tenía que ser un microcosmos de los complejos procesos interfuncionales que caracterizan la actividad psicológica real*" (citado por Moll, 1993)

Retomando nuevamente la concepción de Schoenfeld se puede apreciar que una clase de Matemáticas convertida en un microcosmos matemático, donde se caracterice a escala docente la actividad del matemático, en tanto experto, y se evidencien, en toda su complejidad, los procesos heurísticos y metacognitivos en su interrelación, durante el proceso de resolución de problemas, esencia misma de la actividad matemática, está en consonancia con la idea vigotskiana del carácter sistémico y social de la trasmisión de la cultura y la formación del pensamiento en el estudiante.

Asimismo, bajo una óptica vigotskiana se destaca la importancia y el valor del *autocontrol* durante los procesos de aprendizaje, pues a tenor con el enfoque histórico-cultural, este no es más que la actividad de control, desarrollada primeramente en un plano interpsicológico: de otra persona hacia el sujeto que aprende, de él hacia su par y finalmente de él hacia su yo, cuando ya ha sido internalizada y se encuentra en un plano intrapsicológico (Hernández, 1998).

En el proceso de enseñanza de las matemáticas, la mayoría de las veces, no se hace transparente al estudiante, los elementos de control que deben tomarse en cuenta en la realización de cualquier actividad. Cierto es que en unas actividades más que en otras es viable realizar el autocontrol o brindar al estudiante elementos de control, pero ya sea bajo el apoyo de un recurso heurístico (gráficas, tablas, calculadoras, asistentes matemáticos), o del control mediante procesos inversos, o mediante el desarrollo por otras vías de solución alternativas, debiera estar presente esta actividad en todo el quehacer de las matemáticas escolares y universitarias.

También el control por parejas es un buen recurso para lograr aprendizajes en un medio social adecuado, promover el intercambio de puntos de vista y representaciones diversas de un mismo objeto.

Abreviadamente se puede concluir que la actividad mental es el resultado del aprendizaje social, de la interiorización de los signos sociales y de la internalización de la cultura y las relaciones sociales. Por ello, el proceso de internalización tiene carácter *mediatizado, cultural e histórico.* [2], como se explicita a continuación:

- **Mediatizado**, porque los procesos mentales superiores se desarrollan y manifiestan a través de herramientas y signos que median entre la realidad a aprehender, la representación que el hombre se hace de ella y la forma en que propone transformarla. Las herramientas están orientadas hacia afuera, hacia la transformación de la realidad física y social. Los signos, por el contrario, están orientados hacia adentro, hacia la autorregulación de la propia conducta.

  Como ejemplos de *"herramientas psicológicas y sus sistemas complejos", Vigotsky mencionaba los siguientes: el lenguaje; varios sistemas para contar; técnicas mnemónicas; sistemas de signos algebraicos; obras de arte; escritura; esquemas; diagramas; mapas y dibujos mecánicos; toda clase de signos convencionales, etc."* (Blank, 1993).

  Como se puede apreciar de la cita de Guillermo Blank, los objetos matemáticos son en su mayoría, mediadores por excelencia, es por ello que la Matemática es considerada un lenguaje universal para todas las ciencias y constituye hoy más que nunca un segundo idioma después del lenguaje natural.

  En consecuencia con el enfoque histórico-cultural, es plausible suponer que una de las causas fundamentales de los bajos rendimientos en el aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles de enseñanza y de la poca acogida que tiene por un gran número de personas, puede buscarse en el deficiente dominio que sobre los signos matemáticos –y los conocimientos que ellos representan- logra alcanzar el estudiante medio.

  Esto pudiera advertirse en cualquier materia o esfera del conocimiento, pero en el caso particular de la matemática, cuyo objeto de estudio son conocimientos, teoremas y procedimientos que se expresan en un lenguaje altamente estructurado y a través de sistemas de símbolos que constituyen abstracciones complejas de la realidad y de las relaciones entre las magnitudes y los objetos, las dificultades se acrecientan.

  Si se toma en cuenta que los conceptos matemáticos son "palabras" del lenguaje científico universal –que además cada vez penetran más la cotidianidad del hombre común- y que sus representaciones, los símbolos matemáticos, son las "letras" de dicho lenguaje, los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son verdaderos procesos de alfabetización, a pesar de que en la literatura psicopedagógica no se les trate como tales; y a diferencia de lo que se concibe como un proceso de alfabetización o de la enseñanza de un segundo idioma, no es posible "alfabetizarse" en Matemática de una vez y a partir de ahí enriquecer el acervo cultural matemático. Si no en todo momento, al menos al inicio del estudio de determinados cuerpos de conocimientos (Aritmética en los dos primeros grados, Geometría Inicial, Álgebra Elemental, Introducción al Cálculo Infinitesimal, etc.) se producen verdaderos procesos de alfabetización; sin embargo, de común no se le dedican el tiempo, los esfuerzos y las acciones que una empresa tal requerirían para que la persona pueda asimilar esos nuevos sistemas de signos que serán los futuros mediadores de los nuevos aprendizajes matemáticos y de otras materias.

  No hay que proporcionar muchos argumentos para convencerse de lo complejo que es el aprendizaje de todo el sistema de símbolos matemáticos y las formas particulares del

[2] Luria (1979) recordaba que Vigotsky concebía su psicología como instrumental, cultural e histórica.

pensamiento matemático que permiten usarlos, para poder dominarlos y aplicarlos en la resolución de problemas.

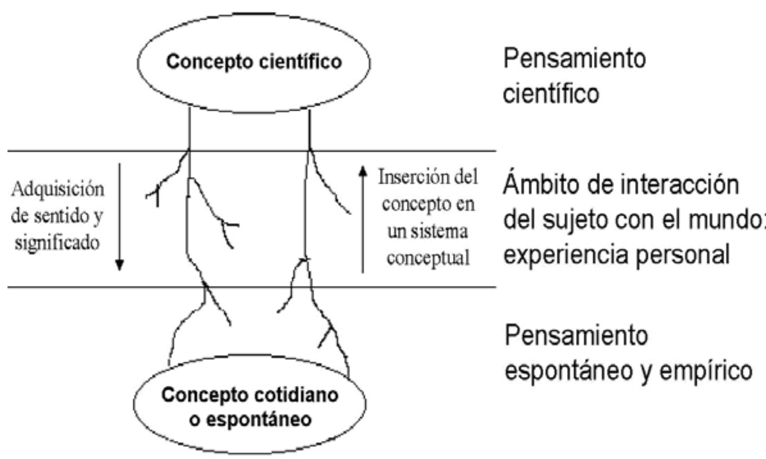
El correcto aprendizaje de los sistemas de numeración y las operaciones definidas en ellos, en tanto sistema de herramientas psicológicas, por ejemplo, produce en el sujeto un desarrollo de su pensamiento; por una parte, porque el dominio de los mismos y sólo éste, le permitirá abordar y apropiarse de otros conocimientos y procedimientos matemáticos. En este sentido, puede percibirse claramente cómo el aprendizaje de los nuevos conocimientos científicos es prácticamente imposible sin el uso de ese mediador que es el sistema de numeración.

Por otra parte, el ser depositario de ese conocimiento nos sitúa en una posición social diferente, pues ahora se pueden comprender muchísimas cosas, hasta ese momento incomprensibles, a saber, se pueden realizar análisis, mediados por los números, que ensanchan los horizontes de nuestro pensamiento. Podrían citarse innumerables ejemplos como el anterior respecto al aprendizaje de otros contenidos matemáticos.

Vigotsky establecía una diferencia entre los “conceptos cotidianos” o espontáneos y los “conceptos científicos” (escolarizados) y también en su interrelación se pone de manifiesto la mediación. Los conceptos cotidianos median en la adquisición de los conceptos científicos; no es posible explicar el contenido de un concepto científico sin el auxilio de los conocimientos y conceptos que ha adquirido la persona de su experiencia cotidiana.

Los conceptos científicos crecen hacia abajo, hacia lo cotidiano, hacia el dominio de la experiencia personal, adquiriendo sentido y significado, y al hacerlo marcan el camino para el desarrollo de los conceptos cotidianos hacia arriba, hacia lo científico.

El siguiente esquema trata de ilustrar de manera gráfica lo dicho anteriormente y la explicación de la brasileña Martha Kohl de Oliveira que aparece a continuación:



“…los conceptos espontáneos y científicos se desarrollan inicialmente en direcciones contrarias, pero terminan encontrándose, permitiendo el enraizamiento de los conceptos científicos en la experiencia y la estructuración de los conceptos espontáneos en sistemas”.(Oliveira, 1996).

En el proceso de enseñanza son usados determinados medios auxiliares, herramientas culturales: el lenguaje (dentro del cual entran los conceptos cotidianos), los símbolos matemáticos y otras muchas representaciones y convenciones que permiten la transmisión cultural, o sea los mediadores.

Esos mediadores se usan primero para la comunicación en el plano interpsicológico, pero después son dominados por la persona y son usados en el plano intrapsicológico, nos ayudan a pensar e internalizamos su uso.

La mediación que en sus inicios sólo era vista por Vigotsky a través del uso de las herramientas culturales o mediadores, pasó a ser interpretada también en el proceso de colaboración, como la acción desarrollada por el sujeto que apoya o suministra las ayudas al que aprende.

Todo maestro o profesor de matemáticas con alguna experiencia reconoce el valor que tiene explicar, aupar al que aprende, utilizando exactamente los *impulsos* necesarios para que "por sí solo" sea capaz de aprehender el nuevo contenido o resolver el problema o tarea dados. Se trata justamente de no ayudar tanto que el estudiante prácticamente no haga nada, porque nada quedará como huella en su aprendizaje, ni tan poco que le sea inalcanzable el cumplimiento de la tarea docente y con ello el desaliento y la formación de creencias referidas, al menos, al aprendizaje de ese contenido de estudio, para no pensar en que pueda marcar para siempre su actitud negativa ante las matemáticas.

- **Cultural e histórico** porque las funciones psíquicas superiores -la estructura de la percepción, la atención voluntaria, la memoria voluntaria, los afectos superiores, el pensamiento, el lenguaje, la resolución de problemas, así como la conducta y otros - adquieren formas diferentes en culturas y relaciones sociales históricamente distintas.

La acepción **cultural** significa que la sociedad le proporciona al miembro de un grupo social, metas e instrumentos estructurados para alcanzarlas. El lenguaje es uno de esos instrumentos claves creados por la Humanidad para la organización de los procesos del pensamiento.

Instrumentos como el lenguaje, creados no por la experiencia personal, sino como resultado de una cultura, de un determinado nivel sociogenético alcanzado, les son brindados al hombre, quien al dominar su uso y utilizarlos se enriquece y desarrolla en el plano personal (ontogenético).

Los instrumentos culturales, o sea desarrollados por una determinada cultura o grupo social, han sido creados a lo largo de su historia; es por ello a la componente cultural se le une la **histórica**.

En época de Leonardo de Pisa (hasta 1202 en que sale a la luz su *Liber abaci*), en la Europa medieval no hispánica, se calculaba aún mediante instrumentos culturales desarrollados por la civilización romana, el sistema aditivo de números romanos. Las personas de esa cultura y etapa histórica sólo concebían la escritura de números bajo la concepción de un sistema aditivo. Esto creaba dificultades, no sólo para la masificación de su dominio, sino para abordar nuevos desarrollos matemáticos, porque, por ejemplo, operaciones como la división, eran realizadas por procedimientos muy engorrosos.

Sin embargo, contemporáneos de Leonardo de Pisa y vecinos no tan lejanos en la propia Europa, pero del otro lado de los Pirineos, los escribanos y contadores árabes, realizaban cálculos cómodamente utilizando el sistema indoarábigo. El pensamiento de los matemáticos árabes era más generalizado respecto al uso de los sistemas de numeración, pues conocían la existencia de dos maneras diferentes de simbolizar las cantidades: la posicional y aditiva.

Lo anterior ilustra el carácter instrumental, cultural e histórico del pensamiento, o sea cómo la actividad mental y sus funciones están condicionadas por los instrumentos que ha incorporado un individuo integrante de un determinado grupo sociocultural en un período determinado de su desarrollo histórico (sociogenético). Leonardo de Pisa fue el primero que introdujo el sistema posicional de numeración indoarábigo en la Europa visigoda, lo cual provocó un desarrollo a nivel social e individual de todos aquellos, que como él, dominaron el uso del "nuevo" sistema de numeración.

Relación desarrollo-aprendizaje-enseñanza

1. El aprendizaje en un medio social condiciona el desarrollo del individuo.

Para la concepción vigotskiana el desarrollo ontogenético tiene su esencia en la formación y desarrollo de las funciones psíquicas superiores y esta como se expresó anteriormente no ocurre al margen de las relaciones sociales.

Si bien el desarrollo ontogenético tiene como base el desarrollo biológico, es sin embargo, en la formación y desarrollo de los "órganos artificiales" del hombre, o sea de las funciones psíquicas superiores, donde tiene su esencia.

El proceso de internalización se realiza en el transcurso del desarrollo ontogenético en sociedad, a partir de la actividad del niño con los adultos, trasmisores de la experiencia social.

A diferencia de otras especies, *"el hombre es miembro de una especie para cuyo desarrollo el aprendizaje desempeña un papel central"* Oliveira (1996), pues sólo así es que ha podido erigirse sobre el resto del reino animal, acumular tanto conocimiento no trasmitido genéticamente y transformar su entorno en la magnitud que lo ha hecho.

Por ello, para Vigotsky existe una estrecha relación entre desarrollo y aprendizaje, pero como básicamente éste último ocurre en condiciones de vida social, generalmente se ponen de manifiesto procesos de enseñanza (deliberada o no). Así, según Martha Kohl de Oliveira (1996), para Vigotsky:

- desarrollo y aprendizaje *"están íntimamente relacionados: dentro de un contexto cultural que le proporciona la "materia prima" del funcionamiento psicológico, el individuo cumple su proceso de desarrollo movido por mecanismos de aprendizaje accionados externamente"*.
- *"aunque en la relación del individuo con el medio los procesos de aprendizaje tienen lugar en forma constante, cuando en éste existe la intervención deliberada de un otro social, enseñanza y aprendizaje comienzan a formar parte de un todo único, indisociable, que incluye al que enseña, el que aprende y la relación entre ambos*".

Ese todo único que envuelve a los sujetos que están involucrados en ese proceso de "*transposición didáctica*" (en el sentido de Chevallard) y la relación que se establece entre ellos, es lo que en ruso Vigotsky utiliza bajo el vocablo "*obuchenie*" que no puede ser identificado como enseñanza ó aprendizaje, por separados, sino en su compleja interrelación[3], o sea que siempre incluye al que enseña, al que aprende y la relación entre ambos.

Así, "todo desarrollo presupone un aprendizaje, viene precedido de él, pero necesariamente no todo aprendizaje provoca desarrollo" (Hernández, 1998)

2. *El aprendizaje no puede ocurrir al margen de las relaciones sociales y la enseñanza puede promover el desarrollo.*

Como se vio arriba, el aprendizaje es visto como un proceso de apropiación, de internalización de la cultura, proceso que ocurre inmerso en un medio social.

Para Hernández (1998) este presupuesto vigotskiano condiciona otra concepción del aula, del grupo escolar, del aprendizaje. Esto hace que se desplace una comunicación nuca a nuca entre los estudiantes hacia una comunicación cara a cara, con intercambios de logros y fracasos, de estímulos y desalientos.

La aparentemente absoluta aseveración de que el aprendizaje no puede ocurrir al margen de las relaciones sociales no implica que para que haya aprendizaje sea necesaria la presencia física del otro que enseña. La televisión, la prensa escrita, los libros, los tutoriales, las comunicaciones mediante las nuevas tecnologías de la Información y las Comunicaciones entre otros, son medios que manifiestan un determinado nivel de relaciones sociales, las cuales crean ambientes propiciadores de aprendizajes y en los cuales el individuo, aparentemente solo, puede aprender.

Sin embargo, fuera cual fuese la concepción de enseñanza concebida (presencial, semipresencial, a distancia, a través de Internet, etc.) la única enseñanza buena es la que adelanta al desarrollo, o sea la que lo promueve, lo cual no debe ser confundido con acciones para "acelerar el desarrollo", término usado en experiencias con niños con limitaciones mentales.

Una buena enseñanza es aquella que le permita al estudiante construir sus propias bases de orientación ante los nuevos contenidos de estudio, pero no mediante el ensayo-error ni la adopción mecánica de esquemas y "recetas" presentados por otros, sino asimilando la ayuda del profesor o de los medios de enseñanza para obtener representaciones propias, insertadas sistémicamente en sus propias estructuras de conocimientos, concepciones y valores con un determinado grado de generalización y completitud, tales que le permitan, de forma independiente, resolver problemas y ejecutar tareas en un espectro relativamente amplio de situaciones nuevas para él.

Asimismo, Vigotsky enfatizaba que la enseñanza debía propender al desarrollo de la toma de conciencia y al control voluntario del conocimiento.

3. *El aprendizaje no ocurre fuera de los límites de la Zona de Desarrollo Próximo*

En la explicación de esa compleja interrelación enseñanza-aprendizaje-desarrollo, Vigotsky adelanta la hipótesis de la Zona de Desarrollo Próximo (o Potencial), la cual es un resultado que surge de su pensamiento de manera natural y consecuente con toda su teoría. Una amplia gama de ideas suyas se conectan a través de dicho concepto, el cual es considerado el presupuesto teórico suyo más sugerente, que más desarrollos teóricos pudiera propiciar con vistas a su instrumentación didáctica.

---

[3] Para más información consultar el trabajo de Valsiner (1988)

En sus palabras, Vigotsky concibe la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) como la distancia entre *"el nivel de desarrollo real del niño, tal y como puede ser determinado a partir de la resolución independiente de problemas, y el nivel potencial, determinado por la resolución de problemas bajo la guía de un adulto o en colaboración con un compañero más capaz"* (Vigotsky, 1979).

Vigotsky sostiene que las medidas estáticas (test de inteligencia y otros instrumentos) evalúan funcionamientos psicológicos que ya han madurado, que se han fosilizado, pero que no sirven para informarnos sobre la posibilidad del desarrollo venidero.

Plantea que se debe alentar y evaluar la maduración o el desarrollo de las funciones psicológicas a través de actividades de colaboración, pues lo que los sujetos pueden realizar en colaboración o con ayuda hoy, lo podrán realizar independientemente y con eficiencia mañana. A decir de Cazden (1981) se trata de lograr *"el desempeño antes de la competencia"*, o como se preferiría entre los teóricos del enfoque histórico-cultural, lograr que el sujeto realice tareas y resuelva problemas hoy con el uso de determinados sistemas de ayuda, antes de que la actividad sea dominada, se automatice y se convierta en habilidad.

Este dominio psicológico que mueve sus fronteras en el tiempo, es un dominio en constante transformación, es el dominio psicológico donde están dadas las condiciones para que se puedan producir los aprendizajes.

Es el movimiento de la ZDP, el cambio de sus fronteras, lo que conduce al desarrollo del individuo, y eso sólo es posible mediante aprendizajes significativos, que le permitan al sujeto dominar los conceptos e instrumentos de su cultura.

La ZDP es un concepto complejo, el cual no puede ser determinado simplificadamente, como que bastaría establecer un nivel de dificultad para el alumno, propiciar el desempeño con ayuda y evaluar el desempeño independiente del mismo.

Por ejemplo, no puede hablarse de la comprensión del concepto de límite de funciones reales, si no se tienen claras las nociones de infinito y de densidad en $\mathbb{R}$, de dominio de una función, de la significación lógica de la expresión "para todo $\varepsilon>0$", entre otros conocimientos.

No es cuestión de que exista una determinada cantidad de conocimientos acumulados, sino de que haya una estructura de conocimientos asimilada significativamente que propicie la inserción del nuevo conocimiento en ella y para la cual exista una predisposición positiva del sujeto a asimilarla.

Tiene que haber como precedente, la observación de procesos de convergencia en la naturaleza y el significado que para el sujeto tengan los términos "convergencia", "límite", etc., muchos de los cuales en el momento de aprendizaje del concepto matemático de límite, son conceptos cotidianos, que difieren en su significado.

La presencia de todos esos elementos (cognoscitivos y afectivos) constituyen el preámbulo necesario para la identificación de la ZDP correspondiente, la cual propiciaría no sólo el aprendizaje del concepto de límite matemático per se, si no más aún, de un salto cualitativo en el pensamiento del sujeto al poder en lo adelante comprender la abstracción que constituye el paso de procesos discretos a continuos, de procesos finitos a infinitos, de la diferencia de lo infinito y lo ilimitado (no acotado), de la convergencia en el infinito, etc.

Es importante, desde el punto de vista de la enseñanza de la matemática, que el docente pueda conocer o diagnosticar el llamado nivel de partida del estudiante en el momento de comenzar el aprendizaje de un nuevo conocimiento, sobre todo si es medular ese aprendizaje para su desarrollo y crear en consecuencia sistemas de tareas y ayudas que posibiliten crear la ZDP en el mismo y finalmente permitir que se produzca el aprendizaje desarrollador.

Conclusiones

En la presente conferencia se expusieron los principales presupuestos del llamado enfoque histórico-cultural, cuyo genial fundador fue el soviético Lev Semionóvich Vigotsky, escuela que aún continúa cultivándose en las más diversas latitudes. En particular en Cuba, un gran número de investigaciones psicopedagógicas en los diferentes tipos de enseñanza y centros e institutos de investigación educacionales se realizan en la actualidad dentro de este marco teórico.

Esta teoría psicológica se ha mantenido en el tiempo, a pesar de la muerte temprana de su fundador, del silenciamiento durante el período stalinista en la ex-Unión Soviética, la desaparición misma de este estado multinacional y la disgregación y poca divulgación de los importantes resultados científicos alcanzados en sus institutos, universidades y sistema educativo, entre otras razones.

Esta conferencia terminará mediante unos comentarios en torno a una reciente entrevista realizada al destacado psicólogo no vigotskiano Juan Ignacio Pozo (2000).

Para Pozo el enfoque histórico-cultural *"...por destacar esa génesis social,..., es un marco teórico más adecuado para analizar fenómenos sociales, como es la educación"*, comparándolo con el enfoque piagetiano, prevaleciente en América Latina durante décadas.

En la propia entrevista el citado psicólogo madrileño argumenta que *"La teoría vigotskiana nos puede dar pautas para comprender la intervención educativa como una ayuda pedagógica, para comprender como los escenarios sociales fomentan la construcción individual, para entender el papel asimétrico de los profesores en la construcción de los saberes por los alumnos, etc.…."* (Pozo, 2000)

Sin embargo, a continuación apunta que *" los problemas del aprendizaje y la enseñanza en dominios y tareas concretas (la enseñanza de conceptos concretos, de procedimientos e incluso de valores) debemos definirlos desde otros marcos teóricos que su teoría no llegó a desarrollar..."*.

La psicóloga cubana Dra. Liliana Morenza (1997) caracterizó al enfoque vigotskiano como una metateoría psicológica y aunque no en el mismo sentido que ella, también J. I. Pozo (2000) la considera como tal y es de la opinión que ella acoge bajo sus marcos, desarrollos teóricos particulares que expliquen cómo las personas aprenden y cómo deben ser enseñados determinados conceptos, procedimientos y valores.

Bajo la dirección de la Dra. Herminia Hernández, este conferencista desarrolló su tesis por la opción del grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas (Delgado, 1999) en la cual se revelaban puntos de contacto y complementaciones entre la Teoría de la Actividad (bajo el enfoque histórico-cultural) y la llamada Psicología Cognitiva del Procesamiento de la Información en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

Asimismo, se considera a priori que los resultados obtenidos en investigaciones sistematizadas bajo el paradigma de la Didáctica de la Matemática francesa o bajo el paradigma socioepistemológico, por ejemplo, pueden ser insertados sin contradicciones en una enseñanza desarrolladora concebida bajo la óptica vigotskiana. Claro está, esto debe ser objeto de cuidadosa investigación y plantea de hecho un problema abierto para las investigaciones en Matemática Educativa.

Referencias bibliográficas

Blank, G. (1993). "Vygotsky: El hombre y su causa" en L.C. Moll (comp.) *Vygotsky y la educación. Connotaciones y aplicaciones de la psicología sociohistórica en la educación.Buenos Aires. Aique Grupo Editor S.A.*

Bruner, J. (1987). Prologue to the English edition. In L.S. Vigotsky. *Collected works*, Vol.1, pp.1-16.

Cazden, C. (1981). "Performance before competence: Assistance to child discourse in the zone of proximal development". *Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition.* 3 (1), 5-8.

Castorina et al. (1996). *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate.* Buenos Aires. Paidós Educador.

Chevallard, Y. (1985). "La transposition didactique". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, París, La Pensé Sauvage Editions.

Delgado, J.R. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas* (Tesis de Doctorado, Universidad de la Habana).

Galperin, P. Ya. (1959). "Tipos de orientación y tipos de formación de las acciones y los conceptos". Folleto *Acerca de la atención*. Editado por la EMS "Cdte. Arístides Estévez Sánchez". La Habana, Cuba.

Hernández, H. (1998). "Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana". Conferencia Magistral dictada en la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Morelia, México. Aparecida en *Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la Educación Polimodal y Superior*. Rosario, Argentina. Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones. ISBN 950-808-173-2.

Moll, L. (1993). "Introducción" en L.C. Moll (comp.) *Vygotsky y la educación. Connotaciones y aplicaciones de la psicología sociohistórica en la educación.Buenos Aires. Aique Grupo Editor S.A.*

Morenza, L. (1997). "Psicología Cognitiva Contemporánea y representaciones mentales. Algunas aplicaciones al aprendizaje". Folleto del curso pre-congreso homónimo en el evento internacional Pedagogía '97). Ciudad de al Habana, Cuba.

Oliveira, M. K. De (1992). Vigotsky: algunos equívocos na interpretacao de seu pensamento, *Cadernos de Pesquisa*, 81.pp.68

Oliveira, M. K. De (1996). "Pensar la educación: las contribuciones de Vigotsky" en Castorina et al. *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate.* Buenos Aires. Paidós Educador.

Pozo, J.I. (2000). “La posición vigotskiana es adecuada para analizar la educación” entrevista aparecida en la Revista *Novedades Educativas*, Buenos Aires, Edición 113, Mayo del 2000.pp.10

Schoenfeld, A. (1985c). "Ideas y tendencias en la resolución de problemas" en *La enseñanza de la Matemática a debate*. Madrid, M.E.C.

Valsiner, J. (1988). *Developmental psychology in the Soviet Union*. Sussex, The Harvester Press citado en Castorina et al. (1996). *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*. Buenos Aires. Paidós Educador. Pág. 48

Vigotsky, L. S. (1979). El desarrollo de las procesos psíquicos superiores. Barcelona, Grijalbo.

Vigotsky, L. S. & Luria, A. (1930). *“Estudios de historia de la conducta: el simio, el hombre primitivo, el niño”* (en ruso). Moscú

Wertsch, J.V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

LA FORMACIÓN, DESARROLLO Y GENERALIZACIÓN DE CONCEPTOS EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA.

Otilio B. Mederos Anoceto

Centro de estudios de Educación. Universidad Central de Las Villas. Cuba.

Oma8111@yahoo.es , omederos@cei.uclv.edu.cu

RESUMEN

En la primera parte de este trabajo se analizan las características generales del proceso de formación, desarrollo y generalización conceptual. Se analiza, además, la importancia de utilizar la resolución de problemas como un medio para facilitar estos procesos. En la segunda parte, a partir de una experiencia docente, se muestra el comportamiento de dos grupos de alumnos que tomaron parte en el proceso de formación, desarrollo y generalización del concepto de media numérica.

1. Ideas generales sobre los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos.

Estos procesos, independientemente de sus singularidades, tienen una extraordinaria relación y unidad. El proceso de abstracción se caracteriza por:

- La determinación de un conjunto de rasgos abstractos comunes para los objetos de una clase inicial.
- La no consideración de rasgos particulares variables de los objetos de la clase inicial.

Al analizar diferentes objetos particulares para extraer rasgos comunes, dejando de considerar otros no comunes, se realiza un proceso de abstracción, que resulta imprescindible para pasar de lo concreto y singular, a lo general y abstracto. Por medio de las abstracciones la ciencia es capaz de captar aquello que es inaccesible a la contemplación.

El tránsito del encuentro de rasgos de un objeto individualizado a su determinación y separación en una clase inicial de objetos similares, y la utilización de una palabra para nombrar a todos los objetos que poseen esos rasgos comunes, y sólo esos objetos, que por lo general forman una clase más amplia que la inicial, se denomina proceso de generalización. Al generalizar, expresamos lo común en los objetos o fenómenos de la realidad individualizados, y designamos con una palabra los objetos o fenómenos que tienen esos rasgos comunes. Consecuentemente, la palabra corresponde a una clase de objetos distintos pero que tienen entre sí unos rasgos comunes que los caracterizan. El "tamaño" de esta clase determina la "magnitud" de la generalización.

Hemos comprobado en nuestra práctica docente que algunas acciones que son útiles para que los estudiantes desarrollen un concepto con ayuda de una persona más experta son las siguientes:

- Presentar a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los analicen y los comparen.
- ayudar (dar impulsos) a los estudiantes para que seleccionen propiedades de cada objeto, los comparen con los otros objetos y eliminen propiedades no comunes.
- Determinar finalmente un conjunto de propiedades comunes a todos los objetos analizados.

- Seleccionar, del conjunto de propiedades comunes, un subconjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener (deducir) todas las demás propiedades comunes.
- Utilizar una palabra para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales.

El proceso de generalización conceptual no termina, especialmente en matemática, con la definición del concepto. La generalización de un concepto después que ha sido definido científicamente sigue, al menos, una de las dos vías que a continuación se señalan:

1. Debilitar, o eliminar, algunos rasgos esenciales.
2. Considerar conceptos de partida más amplios que el utilizado para definir científicamente el concepto que se generaliza.

2. La resolución de problemas como un medio para facilitar la formación, desarrollo y generalización conceptual.

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas debe estar dirigida a insistir en los procesos de pensamiento y de aprendizaje, tomando como campo de acción los contenidos matemáticos. Aunque desde hace mucho tiempo en Psicología, se han estudiado profundamente los procesos de formación, desarrollo (Vigotsky, 1998) y generalización (Davidov, 1981) de conceptos, consideramos que hay mucho que hacer en esta dirección con relación a la utilización de la resolución de problemas con este fin en matemática. Algunas de las acciones que hemos aplicado con buenos resultados al utilizar la resolución de problemas como un medio para facilitar la formación, desarrollo y generalización de conceptos son las siguientes:

1. Insistir en que la obtención de la solución de un problema no debe considerarse como la etapa final del mismo.
2. Utilizar problemas adecuados que motiven y faciliten la formación y desarrollo de conceptos; y de esa forma, lograr que los estudiantes participen en la construcción de la matemática que aprenden y que le encuentren un adecuado sentido a sus técnicas, ideas, objetos y estructuras.
3. Utilizar cadenas de problemas del tipo (problema planteado – problema resuelto – nuevos problemas planteados) que motiven y faciliten diferentes generalizaciones de un concepto teniendo en cuenta el desarrollo del tipo de pensamiento que corresponde a cada nivel de enseñanza.
4. Ofrecer impulsos y adecuados niveles de ayuda para que los estudiantes sientan la necesidad, una vez que ha logrado la solución de un problema, de plantear nuevos problemas que estén dirigidos a eliminar alguna restricción bajo la cual fue resuelto; y de esa forma guiarlos para que realicen generalizaciones de objetos relacionados con el problema original.

3. Problemas sencillos de geometría plana que conducen a diferentes medias de dos números reales positivos.

En esta sección se muestran algunos elementos de como se comportó el proceso de formación, desarrollo y generalización del concepto de media numérica en dos grupos de estudiantes: un grupo de 13 estudiantes de la asignatura Seminarios de Problemas I de primer año de la Carrera de Matemáticas de la Universidad Central de Las Villas, Cuba, en el curso 2001-2002; y un grupo de octavo semestre de la asignatura optativa Matemática Educativa de la Carrera de Matemática Aplicada de la Universidad Autónoma de Coahuila, México, en el curso 2000-2001. La diferencia esencial entre los estudiantes de estos dos grupos se presentó como consecuencia del tipo de pensamiento que habían desarrollado; los del primer grupo estaban muy lejos de tener un pensamiento funcional y los del segundo grupo tenían un pensamiento funcional, aunque no totalmente desarrollado. Las diferencias del proceso estuvieron en la utilización de herramientas acorde al tipo de pensamiento desarrollado.

El objetivo de estos problemas es mostrar a los profesores cómo es posible facilitar la presentación de un conjunto de objetos numéricos que constituyen su solución, y de esta forma comenzar a llamar la atención de los estudiantes sobre estos números. El problema que a continuación se plantea ha sido tomado del artículo (Maor, 1977) y fue presentado a los dos grupos de estudiantes sin que ellos conocieran que nuestro objetivo como profesor era utilizarlo para que aparecieran diferentes medias numéricas.

Problema 1. Dado un rectángulo de lados *a* y *b*, se quiere construir un cuadrado equivalente de lado *l*, que cumpla una de las propiedades siguientes:

1.1 El cuadrado tiene el mismo perímetro que el rectángulo.

Se pidió a los estudiantes que determinaran la longitud *l* del lado del cuadrado con esta característica, y ellos obtuvieron sin dificultad $l = \frac{1}{2}(a+b)$. Una vez que obtuvieron esta solución se le planteó el ejercicio siguiente:

Ejercicio 1. Probar que si se representan en el eje real los números *a, b* y $\frac{1}{2}(a+b)$, el punto correspondiente a $\frac{1}{2}(a+b)$ ocupa el punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos correspondientes a los números *a* y *b*.

Para que, dados dos números *a* y *b,* el número $\frac{1}{2}(a+b)$ adquiera un significado para los alumnos es muy importante que se presenten varios problemas cuya solución conduzca a ese número, o en cuyo proceso de solución juegue un papel importante ese número. Sólo entones debemos darle el nombre de media aritmética de los números *a* y *b* y utilizar la notación *MA,* o sea, $MA = \frac{1}{2}(a+b)$. A los estudiantes se le presentaron otros problemas en cuya solución intervino la media aritmética de dos números, y se le pidió que presentaran otros problemas con estas características.

1.2 El cuadrado tiene la misma área que el rectángulo.

Siguiendo la idea que condujo a la solución del caso anterior; los estudiantes llegaron a que $l = \sqrt{ab}$. Se planteó el ejercicio, muy útil para que los estudiantes fuesen determinando algunos rasgos comunes de las medias siguientes:

Ejercicio 2: Pruebe que si $0 \leq a \leq b$, los números *a, b, y* $\sqrt{ab}$ satisfacen la cadena de desigualdades $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.

Recomendamos a los profesores que planteen a sus estudiantes, y le pidan que ellos mismos planteen, varios problemas cuya solución conduzca al número $\sqrt{ab}$. Cuando este número haya adquirido importancia para los estudiantes se le puede llamar media geométrica de *a* y *b*, e indicarse por $MG = \sqrt{ab}$. Nuestros estudiantes no se motivaron con la búsqueda de tales problemas.

1.3 Las diagonales del cuadrado tienen la misma longitud que las del rectángulo.

Los estudiantes llegaron a la solución $l = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$, y seguidamente se le planteo el siguiente

Ejercicio 3. Pruebe que $a \leq \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.

Después de plantear otros problemas cuya solución conduzca al número que da la solución del problema 1.3 se puede indicar este número por *MC* y denominarlo media cuadrática de *a* y *b.*

1.4 El cuadrado tiene igual relación área / perímetro que el rectángulo.

Los estudiantes llegaron sin dificultad a la solución $\ell = \dfrac{2ab}{a+b}$; y con la ayuda del profesor llegaron a la expresión equivalente $\dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ y resolvieron el siguiente

Ejercicio 4. Pruebe que si *a* y *b* no son simultáneamente nulos, entonces $a \leq \dfrac{2ab}{a + b} \leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, a = b.

1.5 El cuadrado tiene igual relación área / diagonal que el rectángulo.

Los estudiantes obtuvieron sin dificultad las igualdades

$$\ell = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}} \qquad \left(\frac{1}{\ell} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}\right)$$

y resolvieron el siguiente

Ejercicio 5. Pruebe que si *a y b* son no negativos y no simultáneamente nulos*,* entonces $a \leq MHC \leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, a = b.

Conclusiones parciales:

Esta conclusiones están dirigidas a los profesores, no obstante, se hacen comentarios sobre como se comportaron los estudiantes.

1. Se ha indicado cómo proceder para que dados dos números positivos a y b se contribuya a que tengan un significado especial para los estudiantes los números

$$\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}},\quad \frac{2ab}{a+b},\quad \sqrt{ab},\quad \frac{1}{2}(a+b),\quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Después de haber trabajado en la forma que se ha indicado en esta sección, los estudiantes comprendieron la utilidad de estos cinco números y estaban familiarizados con los mismos.

2. Se han planteado cinco ejercicios que están dirigidos a destacar dos rasgos comunes a las cinco medias anteriores:

   2.1 Si M es uno cualquiera de esos cinco números, entonces $a \leq M \leq b$ si a y b son no negativos y no simultáneamente nulos.

   2.2 Se cumple que $M = a$ si, y sólo si, $a = b$.

Los estudiantes de los dos grupos fueron capaces de encontrar estos dos rasgos comunes de las cinco medias analizadas en esta sección.

3. Los estudiantes no fueron capaces de plantearse la pregunta: ¿existe algún orden entre las medias estudiadas?

4. Primeras abstracciones y primera generalización vinculadas al concepto de media numérica.

Se le dieron a los dos grupos de estudiantes ideas generales de los procesos de abstracción, de selección de rasgos comunes de objetos particulares y de generalización; y se le planteó el problema siguiente: *Llegar a algún tipo de generalización de los casos particulares que se habían estudiado*. Contrariamente a lo que esperábamos, los estudiantes del octavo semestre no utilizaron los rasgos comunes seleccionados. A partir de la forma de las medias estudiadas y utilizando su pensamiento funcional llegaron a la generalización $M = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^s$, con r.s =1, y r entero. No llegaron a una generalización donde r fuese un numero real cualquiera, lo cual indicó que no eran capaces de utilizar una potenciación mas allá de los números racionales. Los estudiantes del primer semestre también trataron de generalizar las expresiones de las medias pero no tuvieron éxito. Aunque habíamos insistido mucho en la selección de rasgos comunes esta situación se explica porque:

-Ninguno de los estudiantes de los dos grupos había desarrollado habilidades para llegar por ellos mismos a la definición de un concepto seleccionando rasgos esenciales de objetos particulares.

-Tenían experiencia en generalizar expresiones algebraicas sustituyendo números por parámetros.

-La mayoría de los conceptos los habían estudiado a partir de su definición y nunca encontrando ellos los rasgos esenciales.

En resumen, los estudiantes hicieron abstracción de todas las demás características y rasgos de estas cuatro medias y, analizando y trabajando con la forma de sus expresiones llegaron, con la ayuda del profesor en el caso del grupo de primer año, a nuevas expresiones que permiten una primera generalización. Si tenemos en cuenta que ninguno de los estudiantes conocía perfectamente la generalizaciones de la operación de potenciación, es sumamente significativo que haya sido para ellos mas difícil dar una definición sacando los rasgos comunes que utilizar una expresión con una operación que no dominaban totalmente, como es caso de la potenciación

El profesor escribió, para a y b, no negativos en el caso en que aparece una raíz cuadrada y no simultáneamente nulos en el caso en que aparece un exponente negativo, las expresiones de *MHC, MH, MA, MC* en la forma

$$MHC = \left(\frac{a^{-2} + b^{-2}}{2}\right)^{\frac{1}{-2}}, \quad MH = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{-1}}, \quad MA = \left(\frac{a^{1} + b^{1}}{2}\right)^{\frac{1}{1}}, \quad MC = \left(\frac{a^{2} + b^{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

y sugirió a los estudiantes sustituir las notaciones *MHC, MH, MA* y *MC* por M_{-2}, M_{-1}, M_1 y M_2, respectivamente, y utilizar una expresión general para las cuatro medias; i. e.

$$M_p = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \{-2,-1,1,2\}$$

Entonces presentando la cadena de inclusiones $\{-2,-1,1,2\} \subset Z \subset Q \subset R$; se les guió para que completasen sus generalizaciones y planteasen una primera generalización del concepto de media numérica con una extensión de cuatro objetos, a un concepto de media numérica con una extensión con infinitos objetos, y aceptasen como adecuada la definición del concepto generalizado siguiente:

Definición 1. Se denomina media p-ésima de dos números reales no negativos y no simultáneamente nulos a y b , al número $\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in R \setminus \{0\}$,y se indica por M_p .

Seguidamente se le pidió a los estudiantes que propusieran algunas propiedades de las medias p-ésimas que ellos consideraban que debían cumplir, de acuerdo a los resultados obtenidos con las cinco medias estudiadas. De donde surgió el siguiente

Ejercicio 6. Pruebe que si *a y b* son números reales no negativos y no simultáneamente nulos; entonces $a \le M_p \le b$ y pruebe, además, que las igualdades se tienen si, y sólo si, a = b.

5. Abstracciones más profundas conducentes a la determinación de rasgos esenciales. Segunda generalización.

El ejercicio 6 de §4 les permitió asegurar que toda media p-ésima tiene dos rasgos comunes. Con la ayuda del profesor enunciaron esos rasgos, utilizando expresiones funcionales, en forma de propiedades para las medias p-ésimas como se muestra a continuación. Dados dos números reales no negativos y no simultáneamente nulos a y b, cada media cumple:

(i) Es menor o igual que max{a, b} y mayor o igual que min{a, b}; i. e.

$$min\{a,b\} \le M_p(a,b),\ G(a,b) \le max\{a,b\}$$

(ii) Es igual a max{a, b} e igual a min{a, b} si, y sólo si, a = b; o sea

$$min\{a,b\} = M_p(a,b) = G(a,b) = max\{a,b\} \text{ si, y sólo si, } a = b$$

Seguidamente se presentaron a los estudiantes ejercicios que los ayudaron a que plantearan, y seguidamente probaran, la afirmación siguiente

(iii) Toda media p-esima es invariante por un cambio de escala, o sea, $M_p(ta, tb) = t\, M_p(a, b)$ y $G(ta, tb) = tG(a, b)$.

Los estudiantes aceptaron de manera natural, aunque no fueron capaces de enunciarla, la definición del concepto de media numérica siguiente

Definición 2. Dados dos números reales positivos a y b, todo número M(a, b) que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) recibe el nombre de media numérica de a y b.

En el artículo (Nicolai, 1977) se presenta una definición del concepto de media que toma estas tres propiedades como el contenido de este concepto.

Al llegar a este punto los estudiantes tenían dos definiciones de medias numéricas, no obstante, ellos no tuvieron ninguna preocupación en cuanto a la equivalencia de estas dos definiciones, y de las generalizaciones que representan. Fue el profesor quien llamó la atención sobre este hecho, mediante la realización de la pregunta: ¿existen medias numéricas de a y b que satisfacen la definición 2 y que no son medias p-ésimas? Esta pregunta puede hacerse con diferentes objetivos:

- Para que los estudiantes determinen si la segunda generalización es más amplia (si la respuesta es positiva) o de igual amplitud (si la respuesta es negativa).
- Para que los estudiantes comprendan el concepto de extensión de un concepto.

La respuesta afirmativa de la pregunta se obtuvo también con la solución de un problema, que debido a las restricciones de espacio no presentamos, lo cual permitió concluir que la generalización segunda, que se obtuvo del proceso que condujo a la definición 2, no es vacía con respecto a la primera generalización. Por medio de problemas se logro que los estudiantes de los dos grupos participaran en el proceso de generalización del concepto de media numérica asociados a tres y n números reales.

Bibliografía

1. Davidov, V. (1981). Tipos de generalización en la enseñanza. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.
2. Maor, E. (1977) “A Mathematicians repertoire of means”. Mathematics Teacher 70. January. 20-25.
3. Nicolai, M.B. (1977). Commenting on Maor’s “A Mathematicians repertoire of means”. In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. September. 486.
4. Vygotsky L.S., (1998), Pensamiento y Lenguaje. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Segunda Edición.

ESTRATEGIAS QUE FAVORECEN LA PERTINENCIA DE LOS APRENDIZAJES MATEMÁTICOS

Santa Daysi Sánchez González

Departamento de Pedagogía, Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana

E-mail: j.luciano@codetel.net.do

Formación de Profesores, Nivel Básico y Medio

RESUMEN

Tradicionalmente, la escuela ha servido para transmitir a los jóvenes los aspectos culturales de su sociedad y para ofrecerles oportunidades de realización personal. Los avances tecnológicos de los últimos años, entre otros factores, han provocado que las necesidades individuales y grupales cambien. Se ha producido toda una transformación en el ambiente educativo a nivel del lenguaje, los intereses, los enfoques.

Ahora más que nunca, el docente se preocupa por la calidad de los aprendizajes logrados por sus alumnos, por ayudarlos a desarrollar habilidades intelectuales que les permitan tomar las decisiones adecuadas en cada circunstancia. Se hace necesario que los aprendizajes tengan más significado, sean más adaptados a la realidad, más actualizados y relacionados con los de otras disciplinas, en fin, que sean pertinentes. Para ello debemos seleccionar las estrategias didácticas, los recursos y las actividades que puedan ayudar más fácilmente en estos fines. En esta conferencia presentaremos algunos ejemplos de estrategias que han permitido establecer la pertinencia de ciertos contenidos matemáticos.

INTRODUCCIÓN

La escuela ayuda al joven a adquirir los aspectos culturales de su sociedad, así como también le ofrece oportunidades de realización personal. Hace unos años la sociedad estaba basada en el trabajo del campo, las fábricas y el comercio. Era una sociedad industrial. A la mayoría del estudiantado se le exigía una mínima competencia en lectura, escritura y aritmética, mientras que para la minoría se reservaba el entrenamiento académico más avanzado. Esta minoría constituía los futuros dirigentes de la sociedad.

En la actualidad, el desarrollo está basado en la información y la comunicación, dentro de un entorno globalizado. La facilidad con la que se obtienen calculadoras, computadoras y demás medios tecnológicos, favorece este cambio social y económico. La continua innovación en el área informática y de la comunicación exige un nuevo paradigma en los sistemas educativos. Se necesita un ciudadano preparado para el cambio, dispuesto a hacer preguntas y trabajar en equipo, a mantenerse en entrenamiento continuo de modo que pueda mantenerse actualizado. En este modelo, la escuela debe asegurar igualdad de oportunidades para que todos puedan adaptarse a la nueva sociedad. Aunque las diferencias que da el poder adquisitivo se mantienen, el ambiente educativo es distinto, así como el lenguaje, los intereses, los enfoques.

Aprendizaje auténtico

Ahora más que nunca el docente se preocupa por la calidad de los aprendizajes logrados por sus alumnos, pero no del aprendizaje memorístico resultado de un proceso mecánico y automático cuya única importancia es repetirlo en un examen, sino de lo que es un verdadero aprendizaje, realizado conscientemente por el sujeto, que implique un cambio de pensar, sentir y actuar. No basta con enseñar al individuo a repetir procesos o acumular gran cantidad de información, es necesario ayudarlo a desarrollar habilidades intelectuales que le permitan tomar las decisiones adecuadas en cada circunstancia. El Dr. Angel Villarini, en su libro Teoría y Práctica del pensamiento sistemático y crítico, expresa que *"el aprendizaje auténtico supone que el estudiante es agente activo, es decir que tiene la intención de aprender y desarrollarse"*. El mismo establece cinco condiciones que debe poseer una actividad de estudio para que pueda producir un aprendizaje auténtico. Para el Dr. Villarini:

Un aprendizaje auténtico es:

1. Significativo, porque el estudiante:
   - Relaciona al estudio con sus necesidades, con sus intereses.
   - Establece propósitos y se involucra afectivamente.
   - Trabaja a un nivel apropiado para su desarrollo y estilo de aprendizaje.
2. Activo, porque el estudiante
   - Realiza acciones en situaciones reales o modelos de la realidad.
   - Desarrolla medios o maneja instrumentos.
   - Diseña o produce algo.
3. Reflexivo, cuando el estudiante
   - Ejercita destrezas del pensamiento.
   - Planifica y supervisa su proceso de estudio y aprendizaje
   - Se autoevalúa.
4. Colaborativo, cuando el estudiante
   - Desarrolla competencia social.
   - Da y recibe retroalimentación.
   - Coordina sus metas y acciones con las de otros
5. Empoderador, si el estudiante
   - Desarrolla competencias o habilidades.
   - Supera la pasividad frente a la realidad.
   - Transforma o domina un aspecto de la realidad.

Estrategias

Para lograr en los estudiantes un aprendizaje como el que describimos, el docente debe convertirse en mediatizador entre las experiencias, intereses y capacidades del estudiante y los de la cultura contenida en las asignaturas; debe aplicar estrategias que propicien oportunidades para que pueda darse dicho aprendizaje. Las investigaciones sobre estrategias habían estado vinculadas a las técnicas, métodos y programas para aprender a pensar y crear. Actualmente se está dando importancia al estudio de estas estrategias durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Adoptamos el concepto estrategia como un plan general de actividades dirigido a promover el aprendizaje, en el cual se tienen en cuenta los propósitos u objetivos y las condiciones presentes en el proceso educativo. En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, aplicar estrategias que promuevan un aprendizaje auténtico presenta grandes retos para los docentes. Según Henry Pollak, matemático especializado en aplicaciones a la industria, se necesita en la actualidad un individuo que sea capaz de plantear y resolver problemas con las operaciones adecuadas, utilizando técnicas diversas y trabajando en grupo. Debe ser capaz de ver la posibilidad de aplicar ideas matemáticas a problemas comunes y complejos, de estar preparado para enfrentarse a problemas abiertos, ya que la mayoría de los problemas reales no están bien formulados y debe creer además en la utilidad y validez de la matemática. Esto implica que se desarrollen mayores habilidades intelectuales que les permitan hacer conjeturas y razonar favoreciendo la toma de decisiones adecuadas en cada circunstancia.

En el documento que fundamenta la transformación curricular de nuestro país se proponen algunas estrategias para promover aprendizajes significativos. Entre ellas:

- Estrategias de recuperación de la percepción individual de los alumnos que valoricen los saberes populares y garanticen el aprendizaje significativo de los conocimientos elaborados, recurriendo al entorno de la escuela o la escuela misma, a excursiones, etc.
- Estrategias expositivas de conocimientos elaborados utilizando recursos orales y materiales escritos variados, videos, etc.
- Estrategias de problematización a través de las cuales se contraste o ponga en cuestionamiento lo expuesto u observado, donde se enfaticen las divergencias y controversias por medio de debates que permitan trabajar los contenidos desde la multiperspectividad.
- Estrategias de descubrimiento e indagación para el aprendizaje metodológico de búsqueda de información, así como el uso de la investigación bibliográfica y de formas adecuadas de experimentación.
- Estrategias de proyectos que permitan la creación, modificación o puesta en realización de equipos, artefactos o procedimientos vinculados a la satisfacción de una necesidad o a la resolución de un problema.
- Estrategias de inserción de docentes y alumnos en el entorno como una manera de contextualizar los aprendizajes escolares en las culturas de las comunidades y utilizar las aulas como espacios para compartir con la comunidad.
- Estrategias de socialización centradas en actividades grupales, permitiendo la libre expresión de opiniones, la identificación de problemas y soluciones, en un ambiente de cooperación y solidaridad.

Al aplicar diferentes metodologías en el salón de clases se pretende que los aprendizajes de los alumnos estén más adaptados a su realidad, sean más actualizados, estén relacionados con los de otras disciplinas. Para que estas estrategias lleguen a producir un verdadero aprendizaje es necesario que a través de ellas se logre llevar al salón de clases situaciones que provoquen el pensamiento y oportunidades de práctica en relación con el objetivo que se quiere lograr; facilitar la interrelación entre estudiantes y educadores en un ambiente de libertad y respeto, evaluar el proceso de desarrollo del estudiante. En fin, lo que se pretende es lograr que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea pertinente.

Pertinencia

La pertinencia es una de las dimensiones presentes en el proceso de mediación que realiza el docente entre el estudiante y la asignatura. Una actividad pertinente para lograr un propósito es una actividad oportuna, adecuada, que despierta el interés y enfoca el pensamiento. Otras de las dimensiones en el proceso de enseñanza y aprendizaje son: colaboración, modelaje, práctica estructurada, clima moral y afectivo, criterios de calidad.

El Dr. Villarini expresa que “La clave para una enseñanza pertinente es que se parta de aquellos intereses y tendencias presentes en el estudiante y que al mismo tiempo correspondan con las necesidades de su desarrollo personal y social, y los valores culturales”.

Lograr despertar el interés de los estudiantes por las clases de Matemática ha sido una preocupación permanente y un reto para los docentes del área. Los profesores hemos estado realizando esfuerzos por conseguir esta pertinencia, atendiendo a las nuevas tendencias educativas y a los requerimientos de la transformación curricular.

Algunos ejemplos

El costo de la energía eléctrica.

Con el propósito de "determinar los gastos en que incurren los hogares dominicanos para resolver la falta de energía eléctrica", el profesor Vinicio Vásquez, del Colegio Babeque Secundaria, involucró a los alumnos de 7mo grado en un actividad que los llevó a leer los contadores y las facturas de la energía eléctrica consumida en sus casas, calcular el gasto promedio de 5 meses, graficar este comportamiento y calcular el porciento de aumento en esos meses. Como en nuestro país sufrimos continuamente de apagones, se pidió a los alumnos que consultando a sus padres, determinaran el costo de mantenimiento y combustible de la planta auxiliar y que mediante gráficos lo compararan con lo pagado a la compañía de electricidad. Se hizo una proyección anual de estos gastos y se convirtió a dólares. Al final, cada grupo debía rendir un informe escrito explicando las etapas del procedimiento seguido para la investigación y concluir con algunas recomendaciones para disminuir el consumo de energía y evitar la contaminación que producen las plantas auxiliares al medio ambiente.

La experiencia fue muy significativa tanto para los estudiantes como para los padres y el maestro. Aplicando las estrategias de inserción en el entorno, de socialización y de investigación, se logró que los estudiantes aprendieran a leer los contadores y las facturas, aplicaran los conocimientos sobre las operaciones fundamentales de la Aritmética, sacaran promedios y porcientos, hicieran diagramas de barras, pero sobre todo, tuvieran la oportunidad de involucrarse en el problema energético del país y de comprender el carácter utilitario de la matemática. Fue una actividad adecuada, adaptada a su realidad, interdisciplinaria, en otras palabras, pertinente.

La matemática en el teatro.

Utilizando el mismo tema de la lectura de los contadores y de las facturas de energía eléctrica, el mismo profesor elaboró un libreto para que los estudiantes lo dramatizaran y luego hicieran una historieta. La dramatización es una estrategia de socialización que permite al educando identificarse con los personajes representados, lo que garantiza el interés y facilita la interrelación.

Simulación de un supermercado.

En el tema de las operaciones con números racionales, se utilizó la simulación de un supermercado como estrategia para que los estudiantes pudieran desarrollar habilidades en el cálculo y conocer la utilidad de estos números en las actividades comerciales. Se quería hacer la conexión del tema con el mundo de los precios, la oferta y la demanda, a fin de que los alumnos pudieran desarrollar actitudes críticas frente a los gastos en que incurren las familias de escasos recursos económicos. El procedimiento consistió en revisar la lista de precios de diversos artículos ofertados por un supermercado a través de un periódico. Se formaron 4 equipos de trabajo con una lista de compras proporcionada por el profesor para calcular el monto a pagar y la cantidad de dinero disponible. Otro grupo fungía de caja de cobros con calculadoras para verificar el monto a pagar por los compradores. El grupo de compra debía determinar si el dinero disponible le alcanzaba y en caso negativo tomar la decisión que resolviera la situación. Al final de la actividad se hizo una reflexión acerca de la situación de una familia de escasos recursos que quisiera hacer una compra, contando con el sueldo mínimo. Esta estrategia también propicia aprendizajes pertinentes.

Aprovechando el interés natural por el internet.

El tema de las Relaciones Cuadráticas y las Secciones Cónicas en undécimo grado puede resultar muy teórico y carente de interés para los estudiantes. Hallar la ecuación de una circunferencia o de una elipse puede ser sólo un aburrido procedimiento. Aprovechando el interés que muestran nuestros estudiantes por el internet, le pedimos que investigaran cuales eran las aplicaciones de las diferentes cónicas en la comunicación y en la construcción. Primero compartimos todas las informaciones que los estudiantes trajeron al aula y luego las clasificamos por temas y organizamos grupos que buscarían nuevas informaciones más específicas y prepararían una exposición con los datos encontrados. La experiencia fue muy rica porque además de lo que ya conocíamos acerca de las aplicaciones de la parábola y de la hipérbola en la comunicación y de la forma elipsoidal en algunas construcciones para concentrar los sonidos y las luces; se encontró una aplicación de la elipse en los instrumentos que utilizan los cirujanos para hacer operaciones con rayos láser. Los estudiantes estuvieron felices de hacer ese aporte a la clase. En este mismo tema, se utilizan vasos cónicos de papel, tijera y cartulina para construir la definición de las cónicas. Aunque estos estudiantes tienen 15, 16 y 17 años, la conceptualización lograda a partir del material concreto es mucho mejor que si se hace sólo a partir de definiciones y diagramas. El proceso de desarrollo de las diferentes fórmulas fue seguido con mayor dedicación e interés por los estudiantes.

Otras estrategias que han favorecido la pertinencia de los aprendizajes de Matemática en los estudiantes han sido:

- Una investigación realizada por alumnos de 7mo grado acerca de la cantidad de agua que se desperdicia en las casas por averías. En la misma, se integraron las áreas de ciencias naturales y letras. Los estudiantes debían medir el tiempo que duraba en llenarse un galón de agua desperdiciada por avería, convertir eso a litro por hora, promediar con los compañeros de su sector, comparar con los otros barrios o sectores mediante diagramas de barras y realizar un informe oral y escrito del proceso y de las conclusiones.
- Utilizar la idea de fábrica de helados, o de ropa, o de tienda por departamentos, para desarrollar el tema de las matrices y sus operaciones.
- Utilizar ejemplos de fábricas para desarrollar el tema de combinación lineal como aplicación de los sistemas de inecuaciones lineales.
- Integrar por medio de investigaciones bibliográficas o de anécdotas la historia de los contenidos matemáticos que se están trabajando.

Ahora bien, la pertinencia de los aprendizajes matemáticos no sólo se logra en el aula. Las actividades extra-clases, como son las ferias científicas, las olimpíadas y otras, también favorecen aprendizajes significativos. El juego de la loto y el congestionamiento vehicular frente al colegio han sido trabajados con mucha propiedad por los estudiantes, aplicando los conocimientos matemáticos e integrándolos a otras disciplinas.

CONCLUSIÓN

El conocimiento se produce en el pensamiento, por lo que si queremos propiciar un aprendizaje auténtico en nuestros estudiantes debemos procurar que tengan conciencia del proceso que se está operando en ellos. Los docentes, como mediadores del proceso de adquisición del acervo cultural y de las competencias que van a permitir al educando adaptarse con eficiencia a una sociedad en constante cambio, tenemos el deber de poner toda nuestra voluntad, nuestras experiencias y nuestras acciones en lograrlo. El aprendizaje lo tienen que hacer ellos, pero nosotros vamos a propiciar las oportunidades. Nosotros somos mediadores entre ellos y la asignatura, entre ellos y la cultura. Es nuestra responsabilidad ofrecer la mayor variedad de estrategias que den oportunidad para que los diversos estudiantes que reunimos en nuestras aulas, con diferentes estilos y ritmos de aprendizaje puedan lograr los objetivos educacionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Betancourt, J y otros (1997). Pensar y Crear: educar para el cambio. Academia, La Habana.

Jiménez , V (1990). Cómo lograr una enseñanza activa de la Matemática. CEAC, Perú-Barcelona.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en Castellano. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Villarini, A (1991). Teoría y Práctica del pensamiento sistemático y crítico, Organización para el Fomento del Desarrollo del Pensamiento, Río Piedras, P. Rico.

----------- Elementos para reflexionar sobre la calidad de la educación en América Latina. (Apuntes).

Comunicaciones Breves

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DEL SIGNIFICADO DE LA TERCERA DERIVADA

Carlos A. García y Ricardo A. Cantoral
Cinvestav-IPN. México
carlos_agp@hotmail.com rcantor@mail.cinvestav.mx

RESUMEN:

Se presentan los resultados del estudio relacionado con la tercera derivada desde la aproximación socioepistemológica. El análisis del discurso matemático escolar contenido en los libros de Análisis ha permitido observar la introducción de las derivadas sucesivas, y en consecuencia a la tercera derivada, como un proceso iterativo que se aplica a funciones que se generan al derivar una función. Sin embargo, esta presentación minimiza las relaciones de variación que vinculan a la derivada primera con las de orden superior. Con el propósito de identificar propiedades gráficas de las funciones en las que entra en juego el pensamiento y lenguaje variacional, se analizaron los vínculos de la curvatura y las variaciones de tercer orden. Culminando en el diseño e implementación de una secuencia fundamentada en las variaciones del círculo de curvatura.

INTRODUCCIÓN

Desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 2000), se han realizado diversas investigaciones con el afán de generar secuencias didácticas que favorezcan la noción de variación en los estudiantes de los cursos de análisis de nivel medio superior y superior. Particularmente en el tema de derivadas de orden superior se han realizado investigaciones acerca de la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas (Contreras, 1999) y el diseño de secuencias desde la perspectiva de la Teoría de Situaciones Didácticas (González, 1999). Estas aproximaciones han abierto un terreno propicio para germinar investigaciones en diversas direcciones, y el presente proyecto corresponde a una de las vertientes que tienen su origen en ésta perspectiva.

La noción central del proyecto lo conforma la variación de la circunferencia de curvatura en la descripción del comportamiento de la función. Bajo este supuesto, se han implementado una serie de actividades con el propósito de generar un ambiente propicio para que el estudiante analice las relaciones existentes con las derivadas de una función.

DESARROLLO

Problema y justificación del estudio

Desde el punto de vista de las derivadas sucesivas, se ha reportado que la presentación de este tema, se considera de importancia en dos aspectos, el primero de ellos corresponde al análisis gráfico y el segundo, sin dejar de considerar el anterior, corresponde al estudio del Polinomio de Taylor. (Pernía, 1984). Sin embrago, se hace énfasis en el aspecto iterativo del proceso de derivación dejando de lado las propiedades variacionales que aparecen de manera implícita al calcular derivadas de orden superior. Esto limita a la derivación a un proceso de algoritmización, perdiendo el estudiante una serie de significados que la derivada posee, limitando así su desempeño en diversos contextos que requieren interpretaciones diversas del proceso de derivación. En este sentido la hipótesis que sustenta a este proyecto es la estabilización del concepto de derivada hasta que el estudiante ha hecho propia la noción de derivada sucesiva desde la perspectiva variacional.

Bajo esta visión, pretendemos identificar las propiedades variacionales de la curvatura, para el diseño de una secuencia que considere variaciones de tercer orden, con el afán de proporcionar al alumno un espacio propicio para analizar los vínculos de la primera derivada con sus derivadas sucesivas.

Marco Teórico y Metodología

El marco teórico que sustenta esta investigación corresponde a la aproximación socioepistemológica, que considera cuatro dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica y social.

Desde la perspectiva didáctica nos interesa estudiar el discurso matemático escolar contenido en los libros de texto. Nuestra aproximación corresponde al análisis de textos científicos como resultado de la cultura. En este sentido no solo nos interesa identificar el tipo de presentación y los propósitos del autor en relación a la tercera derivada, sino integrar los recursos discursivos que utiliza a lo largo de su presentación del tema en la obra y los posibles significados que genera en los usos que hace la noción.

Asimismo, se consideran los significados generados en diversas obras relacionadas con temas de física e ingeniería, pues en ellas se aborda a la segunda derivada como la aceleración y en consecuencia la tercera derivada describiría variaciones en la aceleración.

En la dimensión epistemológica pretendemos analizar la naturaleza y desarrollo de las nociones de derivación, curvatura y círculo osculador, identificando sus cualidades particulares, los vínculos que existen entre estos tres temas así como las posibilidades de integrar evidencias de variaciones de tercer orden. Estas dos aproximaciones fortalecerán el diseño de la secuencia didáctica para identificar las cualidades cognitivas de los estudiantes al identificar variaciones de tercer orden; identificando los diferentes registros de representación, gráfico, icónico, gestual, analítico, verbal, etc., que utilizan durante la resolución de la secuencia. Finalmente, como se puede observar, la dimensión social ha entrado en juego en cada una de las dimensiones anteriores.

El estudio de textos se realizó con cuatro obras representativas en el área de Análisis y que actualmente están vigentes en la cultura escolar. Los propósitos del análisis fueron los siguientes:

- Identificar la forma en que el autor define el concepto.
- Caracterizar el orden de presentación del tema para ubicar el concepto.
- Describir el tipo de ejemplos que resuelve y los problemas que propone al lector.
- Establecer los contextos en que ubica a la noción.
- Ubicar los recursos gráficos, textuales y tipográficos de los se vale en su presentación.
- Determinar la intencionalidad del autor al presentar el tema.
- Delimitar el tipo de usos que hace el autor del tema en cuestión durante su presentación y en capítulos posteriores.

En este sentido, el trabajo consistió en recopilar muestras de texto que sustenten las afirmaciones que se generen en cada uno de estos aspectos.

En lo referente al estudio de la curvatura para la estructuración de la secuencia, se procedió en dos direcciones. Por una parte, se analizaron las posibilidades de diversas presentaciones de la curvatura, tratando de ampliar y representar en diferentes registros las nociones que emanan de las diferentes obras en las áreas de cálculo, historia de la matemática, geometría y geometría diferencial. Por otra parte se aprovecharon los recursos que ofrecen las calculadoras graficadoras con el propósito de identificar relaciones visuales entre las derivadas primera, segunda y tercera y las variación de la curvatura.

Finalmente, el diseño de la secuencia se efectuó considerando las propiedades puntuales y globales del círculo de curvatura y las variaciones que experimenta al desplazarse a lo largo de la gráfica. Particularmente la secuencia cubre los siguientes aspectos

- Identificación de las propiedades de la circunferencia de curvatura y la gráfica de la función
- Variaciones de la concavidad y su repercusión en el radio de curvatura
- Caracterización de la circunferencia de curvatura en los puntos de inflexión
- Variaciones de la circunferencia de curvatura en la trayectoria de las gráficas
- Visualización de variaciones en la función de curvatura
- Establecimiento de conjeturas y argumentación de las mismas

La secuencia se implementará en estudiantes de nivel medio superior y superior que han recibido al menos un curso de cálculo. La implementación se realizará en entrevistas semiestructuradas en la cuál se consideran dos sesiones en las que se resolverán las tres fases de la secuencia. El proceso de resolución se realizará en equipos de tres estudiantes cada uno grabando en audio y video cada sesión para establecer el registro de los episodios.

Avances preliminares

El análisis de textos ha permitido identificar la conceptualización de las derivadas de orden superior como un proceso iterativo que se aplica a las funciones que se generan al derivar. Este es una invariante que se presenta en las cuatro obras analizadas. Sin embargo se detectaron diferencias en lo referente a los ejemplos, problema, orden de presentación y contextos manejados. Se ubicó que los gráficos son preferentemente utilizados como recursos de apoyo a las nociones introducidas y como resultado de los procesos aplicados a la función.

En lo referente a la noción de curvatura, ubicamos diversas aproximaciones que permitieron identificar cualidades variacionales de la gráfica en las que interviene la primera y segunda derivada. Una aproximación considera una circunferencia límite que se genera mediante una recta tangente a la gráfica en un punto, en ella se traza una circunferencia que sea tangente a la recta y que toque a la gráfica en el punto P y la corte en el punto Q (fig1). La circunferencia de curvatura es el límite, si es que existe, cuando hacemos tender el punto Q al P siguiendo la grafica.

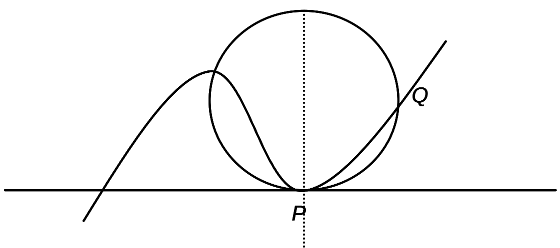


Figura 1

Esta aproximación nos permite identificar una familia de circunferencias cuyos centros se ubican sobre la recta normal a la tangente a la curva en P. Y observamos que conserva una estrecha relación con las secantes en la conformación de la tangente.

Esto nos permite obviar la existencia de una relación entre la primera derivada y la circunferencia de curvatura, por otra parte, observamos que la circunferencia conserva las propiedades de concavidad de la curva en un entorno cercano a P.

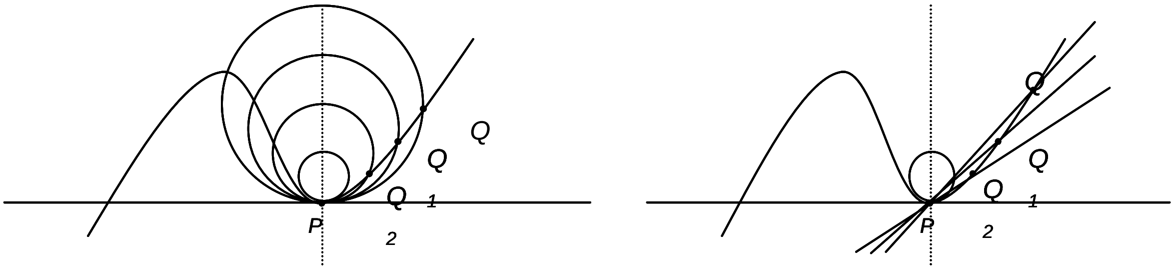


Figura 2

Esto es de utilidad debido a que se hace explícita la relación con la segunda derivada. Sin embargo el estudio de esta noción nos permitió delimitar los alcances reales dirigidos hacia las variaciones de tercer orden.

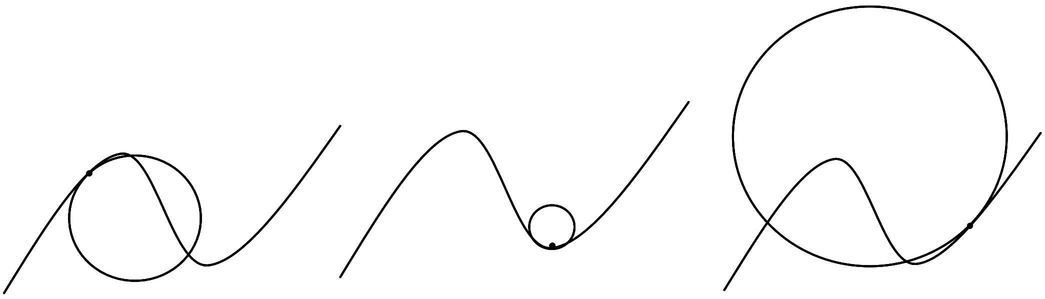


Figura 3

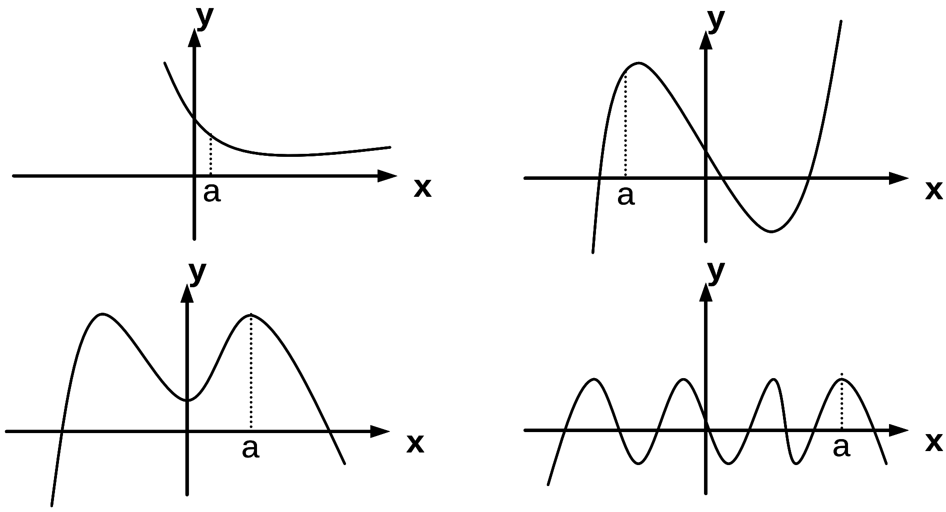
Al analizar los comportamientos gráficos relacionados con la curvatura identificamos relaciones entre los gráficos correspondientes a la curvatura de la gráfica y su segunda derivada que nos permiten observar relaciones con los puntos de inflexión, los máximos y mínimos locales.

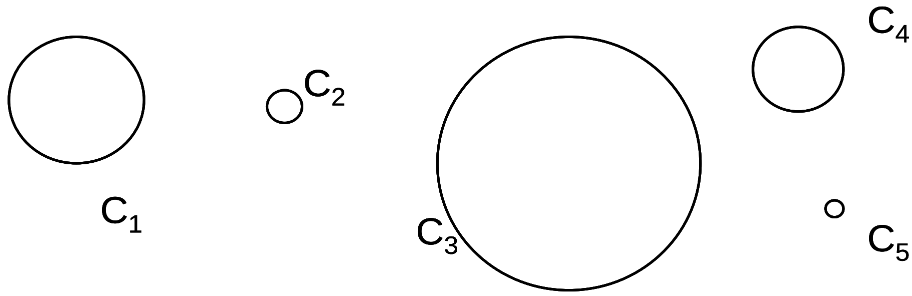
Estas aproximaciones han permitido la conformación de una secuencia que considera tres secciones, la primera de ellas corresponde a un estudio preliminar de las posibilidades del estudiante en problemas relacionados con el tema y que corresponden al discurso matemático escolar; la segunda parte considera la identificación de las propiedades del círculo osculador, la variación del radio de curvatura a lo largo de la gráfica así como la identificación de las propiedades gráficas de la función; finalmente se propone a los estudiantes, actividades que, con el apoyo de la calculadora graficadora, permitan visualizar propiedades variacionales relacionadas con el comportamiento de la curvatura y el gráfico de la derivada y sus derivadas sucesivas.

Las actividades se estructuraron de manera tal que el estudiante partiera de nociones intuitivas hasta desarrollar conjeturas que requieren de un análisis detenido de la situación.

Actividad 1

En la parte inferior se encuentran cinco circunferencias, selecciona y dibuja sobre las gráficas la cada función, la circunferencia que mejor "imite", el comportamiento de la curva en un entorno de el punto (a, f(a)).





a) ¿qué puedes conjeturar?
b) ¿qué características comparten localmente la gráfica y la circunferencia?

Partiendo de este marco intuitivo se pretenden identificar las relaciones que existen entre las nociones de curvatura y variaciones de tercer orden, así como las relaciones que se puedan deducir entre la tercera derivada, la función y las derivadas de primer y segundo orden.

COMENTARIOS FINALES

El análisis de las obras literarias científicas, permitió identificar las diversas aproximaciones que realizan los autores en el tema de estudio. Las posibilidades de la circunferencia de curvatura se aprovecharon para generar la secuencia relacionada con variaciones de tercer orden. La secuencia considera aspectos relacionados con el desempeño de los estudiantes al resolverla haciendo énfasis en la identificación de las propiedades de la circunferencia de curvatura y sus relaciones con el gráfico de la función.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los procesos del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). Editorial Iberoamericana. México.

Cantoral, R. (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal*. Editorial Ibeoamericana. México.

Contretras, L. (1999). *La interpretación geométrica de las derivadas sucesivas*. CINVESTAV, IPN. México.

González, R. (1999). *Estudio paralelo de la presentación de la derivada en diversos textos de cálculo*. CINVESTAV, IPN. México.

Pernía, R. (1984). *Estudio paralelo de la presentación de la derivada en diversos textos de cálculo*. CINVESTAV, IPN. México.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS:
UNA INNOVACIÓN EN SU ENSEÑANZA

María Rey Genicio; Graciela Lazarte; Clarisa Hernández; Silvia Forcinito,
Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Jujuy- Argentina
tresm@imagine.com.ar

RESUMEN

El cálculo por medio del logaritmo fue durante mucho tiempo el plato fuerte del programa de matemática de 4º año del bachillerato en nuestro nivel medio. Con la popularización de las calculadoras electrónicas el cálculo logarítmico en sí mismo fue perdiendo espacio, y en forma gradual se fue reduciendo su enseñanza, convirtiéndose en un mero entrenamiento algebraico. Como el tema está en el programa se sigue enseñando pero sin darle un nuevo significado ya que el original, facilitador de cálculos, lo perdió

Con la intención de ensayar nuevas estrategias didácticas se ofrece al docente un material que le permitirá reflexionar sobre una innovación en la forma de enseñar el tema funciones exponenciales y logarítmicas.

Este trabajo se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo que adopta la «Ingeniería Didáctica», como metodología para la investigación.

CONSIDERACIONES SOBRE LA PROPUESTA

En el marco de la investigación Estrategias Innovadoras en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Medio se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema**:** Función exponencial y logarítmica.

Esta investigación se nutre teóricamente de los aportes de la psicología del aprendizaje y de la didáctica. Sintetizamos a continuación los aportes más relevantes de cada una.

De la fuente psicológica tomamos en especial las teorías cognitivas, las que en general entienden que el aprendizaje efectivo requiere que el estudiante participe activamente en la construcción del conocimiento y que aquel es mediado por los procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado (Constructivismo psicogenético, la Teoría Socio–Histórica de Vigotsky y el Aprendizaje Significativo de Ausubel).

Tenemos entonces que la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje en tanto que la acción del docente es intervenir aportando las ayudas necesarias, estableciendo los esquemas básicos sobre los cuales éstos pueden explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

De esta misma fuente se toma el concepto de Interacción Socio–Cognitiva, entendiendo que la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. De allí sostenemos que los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo. Sin embargo, en ellos se hace necesaria una intervención del docente de forma muy cuidadosa, tendiente a optimizar las actividades, supervisando cada grupo, facilitando los intercambios de tipo cognitivo, recuperando oportunamente lo producido en cada uno y logrando una reorganización final de los conocimientos trabajados.

Por otra parte, de la fuente didáctica tomamos en primer lugar el concepto de estrategia didáctica de Bixio que designa al conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y explícita intencionalidad pedagógica. Algunas de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en las construcciones de sentido previas de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.

En segundo lugar, la propuesta se apoya en la *«ingeniería didáctica»* (Douady – 1996), por lo que se elaboró un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje sobre el tema mencionado.

En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta: las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales de los docentes para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.

En cuanto a la concepción y al diseño de las actividades se encuadra dentro de *«la teoría de las situaciones didácticas»* de Guy Brousseau. Se proponen entonces situaciones *«adidácticas»* en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; debe provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. La llamada «*Situación fundamental*» está dada por las situaciones adidácticas que intentan enfrentar a los alumnos ante un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Las *«variables didácticas»* intervienen para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad. Las *«recontextualizaciones»* de las funciones tratadas le otorgan a la propuesta el valor de la utilidad para resolver problemas de otras ciencias y como objeto matemático, necesario para su propio desarrollo.

En la resolución de los problemas, se propone que se de lugar a distintas estrategias de resolución. También se sugieren puestas en común en las que se validen los resultados, se detecten los errores, se analicen las distintas estrategias y representaciones que se hayan utilizado, se elijan las más eficaces, se debatan las argumentaciones, se identifiquen los conocimientos puestos en juego, etc. a fin de que esos conocimientos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el que se quiere construir.

Desde la *«dialéctica instrumento – objeto»* de Regine Douady, un concepto matemático funciona como *«instrumento»* cuando es la herramienta que permite resolver un problema; y funciona como *«objeto»* cuando es descontextualizado y aislado como objeto matemático. Los problemas diseñados responden a las *«condiciones del buen problema»* enunciadas por Douady; ya que: los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (aritmético, algebraico y gráfico). Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º– Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Antigua). 2º– Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Búsqueda). 3º– Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Explicitación). 4º– El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de *«objeto ma-*

temático» (Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Complejidad de la tarea o nuevo problema)

PROPUESTA DIDÁCTICA

Se comienza el desarrollo de la clase presentando distintos ejemplos donde se utilizan estas funciones para modelizar cierto tipo de fenómenos. Por ejemplo**:**

> *Determinar, mediante el fechado del carbono 14, en qué época estuvo habitado el Pucara de Volcán, lugar que se encuentra ubicado en la localidad de Volcán de la provincia de Jujuy – Argentina.*

Al comenzar el abordaje de esta manera, se da respuesta a una posible demanda de los alumnos sobre la aplicación del tema (-*¿esto para qué me sirve?* -).

A continuación se presenta al estudiante la siguiente situación que contiene tres problemas y que conducen a la definición de función exponencial general**:**

> *Se tiene una hoja de papel, de tamaño oficio, cuyas dimensiones son de 22 cm de ancho por 34 cm de largo, y cuyo espesor es de aproximadamente 0,1 mm. Se procede a dividir la hoja en dos partes, cortándola por el lado más largo y se las apila. Luego dicha pila se vuelve a dividir, de la misma forma, por la mitad y se vuelve a apilar. Se repite este procedimiento varias veces.*
>
> **Problema 1:** a) *Calcular el número de hojas de la pila cuando se realizan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 20 divisiones, b) encontrar una fórmula general que permita obtener el número de hojas para n divisiones, c) volcar en un gráfico los 5 primeros datos obtenidos y d) determinar si la función es creciente o decreciente.*

Los alumnos podrán utilizar distintos formatos para volcar los datos, pero considerando que ya han trabajado con otro tipo de funciones se privilegiará la organización de los datos en una tabla. Con este problema el alumno dio el primer paso en la construcción de la fórmula general $\mathbf{y = b.\, a^x}$ (b = 1). Con el siguiente se pretende avanzar con la incorporación de $b \neq 1$

> **Problema 2:** a) *Calcular el espesor de cada pila cuando se realizan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 20, divisiones, b) encontrar una fórmula general que permita obtener el espesor de la pila cuando se realizan **n** divisiones, c) volcar en un gráfico los 5 primeros datos obtenidos y d) determinar si la función es creciente o decreciente.*

Según la actitud que vayan adoptando los alumnos el docente podrá sugerir que usen la tabla anteriormente realizada. Aquí es conveniente que se recuperen los saberes ya construidos y se expliciten asegurando que la totalidad del grupo pueda capitalizarlos (hacerlos concientes)

El siguiente problema apunta a que el alumno se enfrente a una situación en la que la función es decreciente.

Problema 3: a)*Determinar el área de cada hoja de la pila cuando se realizan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 20, divisiones, b) efectuar las actividades indicadas en los incisos b) c) y d) de los problemas anteriores, c) a partir de la observación de los distintos gráficos obtenidos, determinar la ordenada al origen e indicar cómo se puede anticipar dicho valor utilizando únicamente la fórmula, d) discuta con sus compañeros de grupo, qué determina que la función sea creciente o decreciente*

Nuevamente se recuperará el conocimiento construido y se internalizará el concepto de función exponencial y su fórmula general, reconociendo que en ella interviene una potencia que tiene por exponente a la variable independiente y que, por este motivo, este tipo de funciones recibe el nombre de **función exponencial**. Además se aclarará que en los tres problemas considerados, la variable independiente toma valores naturales y el cero, pero que en la generalización de la función, como puro objeto matemático, podrá tomar también valores reales. Para ejemplificar proponemos que el alumno resuelva la siguiente situación**:**

Una población de bacterias se encuentra en un medio nutritivo homogéneo. Suponer que, mediante la realización de muestras de la población a ciertos intervalos de tiempo, se determina que la población se quintuplica cada día. Si la población inicial es de 100 bacterias, calcular cuál será la población al cabo de 30 días, encontrar la fórmula de una función que permita obtener el número de bacterias ***P*** *cuando han transcurrido* ***t*** *días, averiguar cuántas bacterias hay cuando transcurrieron 12 y 80 horas y finalmente determinar los valores que puede tomar la variable independiente* ***t***

Los alumnos cuentan ahora con los elementos suficientes para realizar una primera formalización de la definición de función exponencial

Se podrá advertir que de las situaciones trabajadas es difícil que el estudiante llegue a establecer el campo de variabilidad de la base **a** y el coeficiente **b**. Por ello para determinar el valor que toma **a** puede ser ventajoso que como primer paso el grupo recupere el conocimiento sobre el concepto de potencia. Como segundo paso es conveniente que descubran las restricciones que se deben imponer a la constante **a**. Para ello se propone como actividad que determinen el valor de la función exponencial para distintos valores de **a** y **x** tomando **b** = 1. Luego se pide que discutan sobre el valor que se le puede asignar a la constante **b**.

Aquí se recuperarán los saberes construidos y se explicitarán, para tener cierta seguridad de que la totalidad del grupo los haya asimilado.

Luego se presenta un ejemplo que muestra la aparición del número ***e*** en aquel campo del conocimiento que sea más acorde a la orientación del plan de estudio o características del grupo. Un ejemplo puede ser el siguiente**:**

*La masa (**m**) de una célula crece a medida que pasa el tiempo (**t**). Supongamos que una célula de árbol crece un 1% de su masa cada día. Suponiendo que su tamaño inicial es de* m_0, *calcular su tamaño al cabo de 100 días*.

A continuación se pide al alumno que realice representaciones gráficas de distintas funciones exponenciales generales. El objetivo de esta actividad es que el alumno investigue el comportamiento de éstas funciones para distintos valores de las constantes **a** y **b**. Conviene que utilice para ello algún software de matemática; si no se dispone de ninguno, convendría que el docente le proporcione los distintos gráficos, para que luego indique el comportamiento de los mismos.

Se propone a continuación una actividad que muestra la variedad de aplicaciones de la función exponencial. Se utiliza como método participativo la técnica de la rejilla, de modo que los alumnos no sientan la aridez de realizar tantos cálculos y puedan apreciar la variedad de aplicaciones. Una de ellas puede ser la siguiente**:**

> *La demanda de un nuevo producto aumenta rápidamente y luego se nivela. A través de distintas experiencias se determinó aproximadamente que el porcentaje P de compradores de dicho producto responde a la fórmula***:** $P\ (t) = 100 - 80\ (0{,}25)^{t}$ *siendo t la cantidad de meses que el producto está en el mercado. Calcular P(2) e indicar que representa este valor; determinar a cuántas personas se puede estimar que se les ha vendido el producto luego de 10 días de permanencia en el mercado, sabiendo que existe en el mercado 10 000 posibles compradores.*

Para introducir el tema de ecuaciones exponenciales se puede retomar el problema de la hoja de papel y las sucesivas divisiones, pero encarado de la siguiente manera**:**

> *Se realizó a la hoja de tamaño oficio un determinado número de divisiones como se indicó anteriormente, y se obtuvo un total de 128 hojas. Se pide averiguar cuántas divisiones se hizo.*

Para ejercitar el tema se propone que mediante la técnica de la rejilla se realice la siguiente actividad**:**

> *1.–Escribir las siguientes funciones como potencias de 2 ó 3 según corresponda***:**
> $y = 8^{x}$; $y = (1/9)^{3x-1}$
> *2. –La siguiente expresión puede factorarse como se muestra. Encontrar el factor faltante***:**
> $2^{x+h} - 2^{x} = 2^{x} \cdot (\qquad)$
> *3.–Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales***:**
> *a)* $2^{x+5} = 8$ *b)* $(1/25)^{2-x} = 5^{x+3}$ *c)* $8 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+4} = 315$

Para abordar la función logarítmica se retoma el ejemplo dado en ecuaciones exponenciales; allí se indicaba que el nº de hojas era 128 (se daba el valor de **y**) y se pedía calcular el nº de divisiones realizado (**n**). Ahora si se indica que se obtuvieron 512 hojas y se pide calcular nuevamente el nº de divisiones se tiene que volver a repetir el procedimiento. Lo mismo se debería hacer si se tuviera como dato otro valor de **y**. Por lo tanto en vez de repetir el mismo procedimiento para cada caso, es deseable encontrar una expresión que permita encontrar el valor de **n** cuando se tiene el valor de **y**, es decir encontrar **n = h (y)**. Surge entonces la necesidad de definir una función que realice el proceso inverso al de la función exponencial y que se llama función logaritmo y a continuación se la define. Para relacionar el tema con otros vistos, se puede preguntar al alumno qué otros procesos inversos conoce y que indique alguno (suma y resta, potencia y raíz, etc.)

A continuación se plantea una actividad donde el alumno debe calcular, aplicando la definición, el logaritmo de distintos números y donde resuelva ecuaciones simples con logaritmo.

También se pide que, para distintos tipos de funciones, representen en un mismo gráfico la función exponencial y su inversa y que determinen si existe alguna vinculación entre ambos gráficos. Al igual que se hizo para función exponencial, se realizará la representación gráfica de funciones logarítmicas, para distintas bases, y para bases recíprocas, analizando las características de cada uno.
Luego se indican las bases más usadas para ambas funciones, se obtienen algunos valores usando la calculadora y se resuelven problemas de aplicación.

A continuación el docente enumera las propiedades de la función logaritmo. Se demuestra una de ellas, ya sea por parte del docente o se intenta que la realice el alumno. Se plantea una actividad donde se apliquen las distintas propiedades.

Se pide al alumno que resuelva la siguiente ecuación $5^{x+1} = 3$. Es conveniente permitir que cada alumno busque una estrategia de resolución. Si en la resolución aplica la definición de logaritmo observará la imposibilidad de encontrar un valor numérico (expresado como un número decimal), lo que dará pie para trabajar el cambio de base. Si el procedimiento que adopta es aplicar logaritmo natural o decimal miembro a miembro, resolverá el ejercicio sin ver la necesidad del cambio de base. En este último caso se propone la actividad siguiente que permite dar significación al tema cambio de base**:**

> a) *Resolver la ecuación anterior aplicando logaritmo natural e indicar qué pasa con los resultados. (si lo resolvió primero aplicando logaritmo natural, se pide que ahora aplique logaritmo decimal). b) Indicar si se podría haber aplicado para resolverlo logaritmo en base 5, o en otra base; en este caso con qué inconveniente se encontraría. c) Indicar qué logaritmo conviene aplicar y por qué. d) Encontrar un método para determinar el valor de* $\log_5 3$. *e) Obtener una expresión que permita calcular* $\log_a b$

A través de un problema se plantea la necesidad de resolver ecuaciones logarítmicas, por ejemplo**:**

> *La magnitud, M, de un temblor en la escala de Richter está relacionada con la energía liberada, E, mediante la fórmula:* $\log E = 1{,}5\,M + 11{,}4$. *Se necesita calcular la energía liberada por un temblor de magnitud 2 en la escala de Richter.*

Por último se realiza la ejercitación correspondiente al tema Ecuaciones Logarítmicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. G.E.I.. México.

Bixio, C. (1998) *Enseñar y aprender*. Homo Sapiens. Bs.As

Brousseau, G "Los roles del maestro" cap. PARRA, C, SAIZ, I, otros. *Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones*. Compilación. Paidos . Bs As. 1994

Douady, R. (¿) "Dialéctica instrumento–objeto. Juego de encuadres". *Cuaderno de Didáctica de la Matemática* Nº3. Edición mecanografiada

DIFICULTADES EN LA INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

Jorge Ávila Contreras y Eduardo Carrasco Henríquez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA)
Santiago de Chile
jorgedechile@hotmail.com ecarrasc_99@yahoo.com

RESUMEN

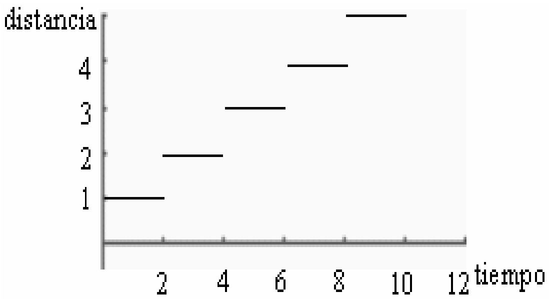
A partir de experiencias en aula hemos detectado que nuestros alumnos, al verse en la necesidad de interpretar un gráfico distancia-tiempo, en muchas ocasiones asocian dicha gráfica con el desplazamiento de un móvil en un contexto distancia-distancia, en donde la forma de la gráfica induce un objeto conocido. Además es frecuente la construcción de gráficas distancia-tiempo erróneas cuando se trata de representar fenómenos. Este artículo deviene de un estudio exploratorio respecto a la construcción de gráficas a partir del fenómeno del péndulo en movimiento. Por medio de un instrumento que aplicamos a diez estudiantes de primer año universitario, detectamos la persistencia de la imagen mental que se posee del fenómeno por sobre los análisis del mismo, invisibilizando la variable tiempo que se encuentra de forma implícita.

ANTECEDENTES

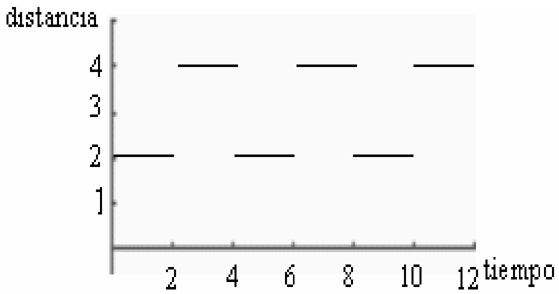
Es bien sabido que la construcción, manejo e interpretación de gráficas es una vital herramienta tanto en la actividad matemática, como en otras disciplinas y así también en la vida cotidiana. Las diversas articulaciones que se deben realizar entre los distintos registros semióticos (Duval, 1999) que requiere el manejo de gráficas es algo que está ausente en la educación formal de nuestro país. En especial la articulación desde el fenómeno hacia la gráfica no solo ha estado ausente de la práctica pedagógica sino también en la investigación didáctica.

La enseñanza clásica privilegia el registro algebraico y, en general, ofrece pocas instancias de trabajo en otros registros de representación. En particular, la construcción de gráficas suele tratarse primeramente por medio de la evaluación punto a punto y luego como resultado del análisis de fórmulas algebraicas, las cuáles *más adelante* podrán representar algún fenómeno en distintos ámbitos disciplinares, tales como: los físicos, económicos o sociales, entre otros. Es decir, se articula desde el álgebra hacia las gráficas y, en el mejor de los casos, se establece una articulación recíproca entre el álgebra y lo fenoménico, pero no se articula desde lo fenoménico hacia las gráficas.

Este trabajo surgió al analizar las respuestas desarrolladas por alumnos de un primer semestre de la Carrera de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa a una actividad que formó parte de nuestros estudios de maestría. En el marco de reconocer fenómenos de periodicidad, entregamos a los estudiantes una serie de gráficas dibujadas supuestamente por medio de un sensor y ellos debían construir situaciones reales o fenómenos del cual pudiesen dar cuenta dichas gráficas. A continuación presentamos las respuestas que despertaron nuestro interés:



una escalera



marcas de los patines de una atleta

Las respuestas dadas: subir una escalera y marcas de los patines de una atleta en la pista, reseñan un desplazamiento de un móvil en un contexto distancia-distancia, en donde la forma de la gráfica induce un objeto conocido. Problemas de este estilo lo pudimos constatar en todos los grupos que participaron de esa experiencia. De igual forma, en una segunda parte de la actividad, en donde se pidió construir la gráfica altura-tiempo de una bola en movimiento pendular, hubo claras muestras de dificultad.

A la luz de estos antecedentes nos surge la pregunta ¿se percibe realmente que el tiempo transcurre o sólo está la tendencia natural de considerar lo que "se ve" y "cómo se ve"?. Para responder lo anterior desarrollamos un instrumento con la intención de explorar cuan persistente era la imagen mental[1] a la hora de construir gráficas distancia-tiempo.

CONSTRUCCIÓN Y APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

El fenómeno elegido fue el movimiento de un péndulo, debido a que usualmente es tratado como ejemplo de un movimiento periódico y también por lo familiar que resulta ser en el ámbito cotidiano (todos nos hemos balanceado en nuestra niñez).

Con el fin de explorar la persistencia de la imagen mental en la construcción de gráficas distancia-tiempo, nos planteamos la necesidad de dar cuenta de dos aspectos centrales:

a) El primero, explicitar la imagen mental del fenómeno elegido. Para lo cual pedimos que dibujaran la situación desde tres puntos de vista distintos: mirando de forma frontal, lateral y superior (Hoja uno, Anexo 1) con el fin de prever el efecto que produce la persistencia de la imagen en la construcción de la gráfica.

b) El segundo, explorar si los estudiantes lograban representar el fenómeno en un gráfico distancia-tiempo, cuya gráfica debería ser la misma, independiente del punto de vista desde el cuál se está situado para observar el fenómeno (como imagen mental). En el instrumento se indicaron las variables altura-tiempo en un sistema coordenado y se pidió graficar desde los tres puntos de vista ya mencionados (Hoja dos, Anexo 1).

El instrumento construido fue aplicado a 10 estudiantes de pedagogía en matemática e informática educativa de primer año universitario con edades entre 18 y 21 años. Se concretó en dos momentos: el primero para la aplicación de la "Hoja uno" y el segundo para la aplicación de la "Hoja dos".

La actividad se llevó a cabo una mañana completa, fuera de la jornada habitual de clases. Y con el objeto de minimizar el efecto de la primera parte en la segunda -tanto temporal como temáticamente- programamos una conferencia sobre didáctica de las matemáticas entre ambos momentos.

RESULTADOS

Con respecto al primer momento, todos los estudiantes -con mayor o menor detalle en sus dibujos- lograron representar el fenómeno desde los tres puntos de vista que se les pidió imaginarlo, de modo similar al mostrado en la Fig. 1.

[1] Entendida esta como la imagen evocada por el estudiante del fenómeno señalado, en ausencia de este.

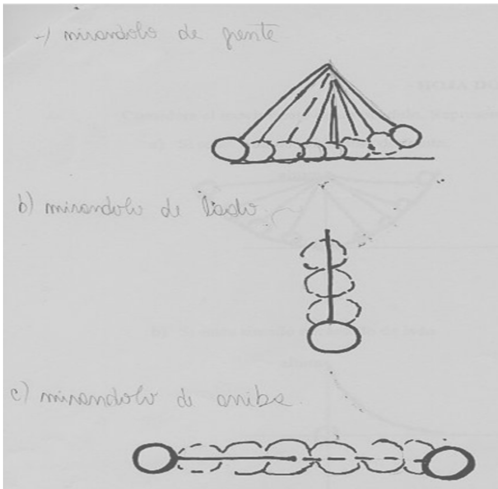


Fig. 1

De las respuestas dadas en el segundo momento, a excepción de uno de los diez estudiantes, ninguna mostró indicios de la forma gráfica del fenómeno, detectándose una persistencia de la imagen mental del fenómeno y a la vez una no visualización, por parte de los estudiantes, de la variable tiempo que queda representada en el eje horizontal del sistema en el cual se les pidió construir las gráficas.

No podríamos incluir cada uno de los desarrollos en este artículo, por lo que hemos escogido tres desarrollos del segundo momento que son representativos de lo que aconteció con la mayoría del grupo que vivió la experiencia (ver *Fig. 2a, Fig. 2b y Fig. 2c*).

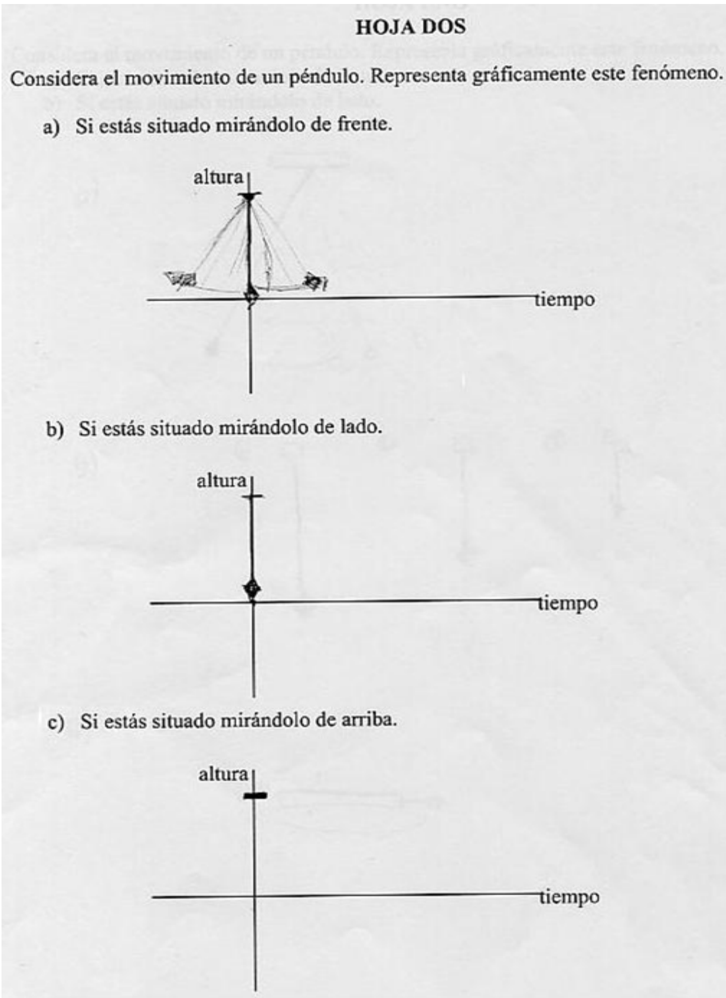


Fig. 2a

Respecto a la *Fig. 2a*, podemos interpretar que el eje vertical es utilizado: en el gráfico a), como eje de simetría del movimiento del péndulo; en el gráfico b), como posición del observador; y, en el gráfico c), no nos queda claro pero pareciera haber considerado el péndulo visto desde arriba y detenido, pues lo que hace es "marcar" la misma altura ya expresada en los dos gráficos anteriores.

Vemos que el estudiante utiliza de manera diversa el eje vertical de la gráfica. Si bien marca la altura posible del péndulo, también sirve de eje de soporte de la "gráfica". Por su parte, la variable tiempo del eje horizontal no es considerada en ninguna de las tres gráficas, sino que el eje horizontal es usado para dar cuenta (gráficas a y b) del piso o suelo sobre el cual se mueve el péndulo.

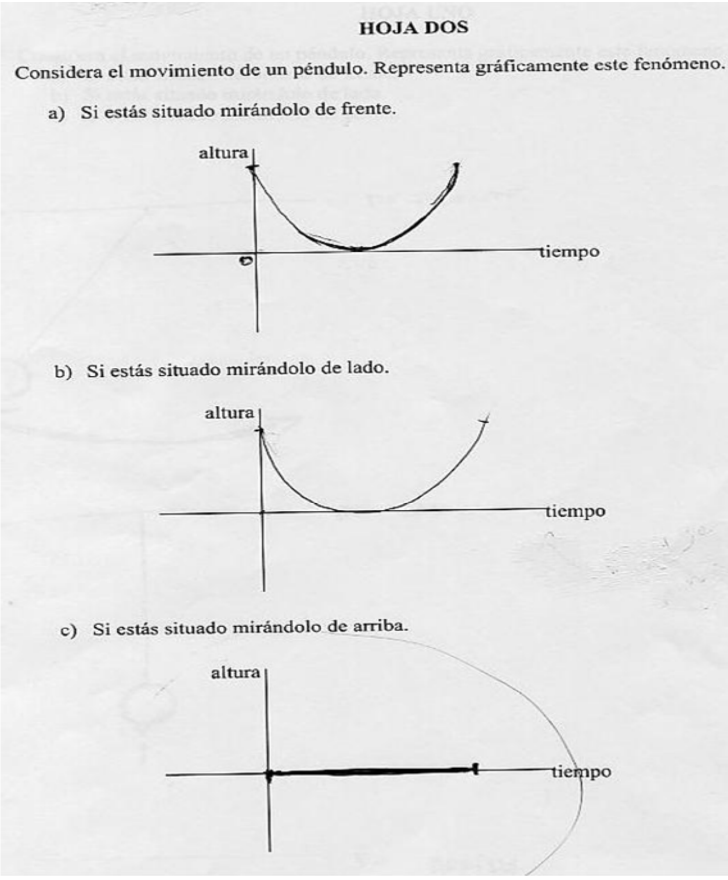


Fig. 2b

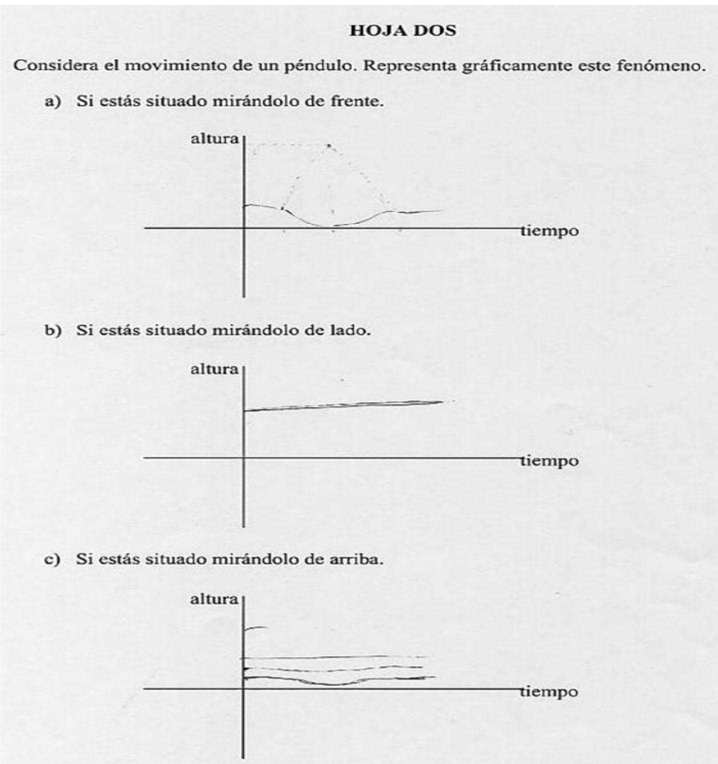


Fig. 2c

Por otra parte, de la Fig. 2b, reconocemos que en los dos primeros casos, gráficos a) y b), el estudiante dibuja una "traza" del recorrido del péndulo, sin hacer la lectura de la variable tiempo. En el gráfico c) se aprecia claramente como influye para la confección de su "gráfica" la imagen mental de la posición desde donde se le pide graficar el fenómeno y además se da cuenta, a través del eje horizontal, del desplazamiento acotado de la bola en su movimiento pendular.

Para el caso de la Fig. 2c, observamos que en el gráfico a) es representado el movimiento frontal del péndulo, usándose ambos ejes para dar cuenta del desplazamiento, eje vertical para el desplazamiento de altura y eje horizontal para el desplazamiento de recorrido. Resultan llamativas las dos extensiones que pueden apreciarse en el gráfico a) ya que parecieran tratar de llenar el espacio de eje "no usado" lo que generalmente no suele ocurrir en las gráficas que se realizan en la enseñanza tradicional.

Finalmente, en el gráfico b), vemos que no hay consonancia con la vista lateral del movimiento del péndulo. La línea es dibujada a una altura fija, tratando al parecer de dar cuenta de la altura máxima del péndulo. Por su parte, en el gráfico c) no reconocemos elementos significativos y se presenta una indecisión en la construcción de la gráfica o bien algún sentido que no podemos interpretar a partir de la observación.

En términos generales, podemos agregar que ninguno de los dos desarrollos da cuenta de la característica periódica presente en el fenómeno a medida que transcurre el tiempo y que no hay consideración de ninguno de los ejes con sus respectivas variables al momento de "graficar". Prevalece lo observable y lo visual.

CONCLUSIÓN

Aplicado el instrumento y analizados los resultados, podemos afirmar que se confirmó nuestra hipótesis inicial de la persistencia de la imagen mental del fenómeno al momento de construir una representación gráfica distancia-tiempo de este. Pensamos que la profundidad de las interpretaciones puede enriquecerse más aún, por lo que se hace necesario modificar el instrumento exploratorio, a fin de explicitar mejor las argumentaciones y de ese modo aproximarnos más a la realidad del por qué de las representaciones que los estudiantes construyeron, por ejemplo ello puede ser viable con una entrevista en profundidad, la cual no tuvimos la oportunidad de realizarla al menos con el grupo al cual se les aplicó esta experiencia. Sin embargo, en nuestra opinión, el problema está detectado y el desafío ahora es diseñar una secuencia didáctica a fin de aproximar alguna solución a este obstáculo presente al momento de representar gráficamente un fenómeno de variación distancia-tiempo.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cap. 1. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.

Buendía, G. & Cordero, F. (2002). *Una epistemología del concepto de periodicidad a través de la actividad humana.* Cinvestav, México.

Cordero, F. (1998). "El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa* 1 (1), 56 –74.

ANEXO 1

Instrumento aplicado en la experiencia:

Primera parte:

HOJA UNO

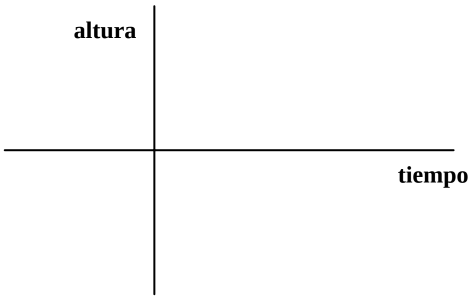
Considera el movimiento de un péndulo. Representa gráficamente este fenómeno.
a) Si estás situado mirándolo de frente.
b) Si estás situado mirándolo de lado.
c) Si estás situado mirándolo de arriba.

Segunda parte:

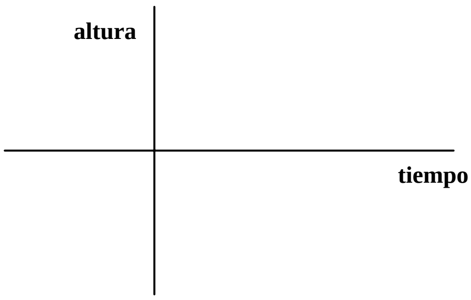
HOJA DOS

Considera el movimiento de un péndulo. Representa gráficamente este fenómeno

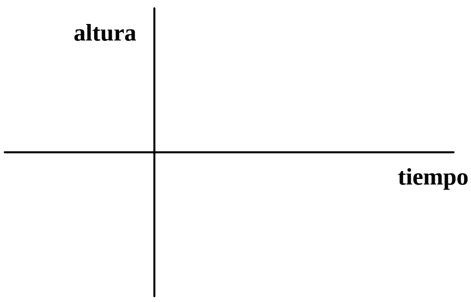
a) Si estás situado mirándolo de frente.



b) Si estás situado mirándolo de lado.



c) Si estás situado mirándolo de arriba.



EL DOCENTE – LÍDER Y LA APORTACIÓN DIRECTA DEL SABER CIENTÍFICO Y TECNOLÓGICO DE GRUPOS INTERDISCIPLINARIOS DE ESTUDIANTES, EN RESPUESTA AL REQUERIMIENTO DEL PROCESO DOCENTE EDUCATIVO Y DE LA COMUNIDAD CIENTÍFICA Y SOCIAL.

Lilia López Vera
Facultad de Ciencias Físico-matemáticas UANL, México
lilia_lopez@hotmail.com

RESUMEN:

En respuesta a los nuevos desafíos sociales e intelectuales de la UANL, la FCFM define su propia MISIÓN: "Apoyar el desarrollo de la Sociedad Neoleonesa y del País, mediante la formación integral de profesionistas de las Ciencias Matemática, Física y Computación, y a través de la aportación directa de su saber científico y tecnológico."

La demanda de parte de la sociedad de contar con una eficiente enseñanza-aprendizaje de la Geometría sumada a la evidencia en clase, tanto de las deficiencias en los alumnos, como las limitaciones en los Software Didácticos Comercializados que presentan ocultamientos y propician "errores de interpretación", constituyó el *Conflicto Cognitivo y Elemento Detonante* que propició la formación de *grupos interdisciplinarios de estudiantes, con liderazgo democrático y grados de cohesividad,* para incursionar en la aplicación de sus conocimientos elaborando Materiales Didácticos para el Nivel Superior y Básico, enfrentando la "visión fragmentada" de Ciencia y Tecnología en las Comunidades Epistémicas del Sistema Educativo.

En el presente trabajo se describe la labor realizada por el equipo bajo la conducción del docente enmarcando la misma como una Tecnología, conformada a su vez por subtecnologías.

INTRODUCCIÓN

Los retos del nuevo orden social y político universal, demandan una educación superior de excelencia, que vaya asociada al desarrollo social, cultural, científico y económico de nuestro país. En busca de dicha excelencia académica, la UANL ha adoptado esquemas internacionales que conduzcan tanto a la acreditación institucional ante instancias nacionales y extranjeras, como a la formación integral para la vida de los alumnos, con un perfil de competitividad mundial y sentido humanista.

En su origen, el prejuicio del primado intelectualista de la ciencia, obligó a definir a los programas de las diferentes Licenciaturas e ingenierías de la UANL con un *enfoque predominantemente disciplinar,* deslindada del contexto socio-cultural.

El proceso de Transformación institucional definido en 1998, en el Programa Visión UANL 2006, está enmarcado en valores y esta orientado al logro de cuatro atributos esenciales: Espíritu crítico, Pertinencia, Liderazgo y Multidisciplinariedad.

Sustentando su análisis en cuatro sistemas: Académico, Administrativo, Social-Humano y de Relación con el entorno.

"Tras un análisis profundo de retroalimentación, la UANL decidió redoblar esfuerzos en la consecución de las metas de la Visión 2006, presentando en el 2001, el programa "EDUCACIÓN PARA LA VIDA", el cual significa *Hacer más interactiva a la Universidad con la Sociedad y descansa en cuatro criterios: aprender a ser, aprender a conocer, aprender a hacer y aprender a servir.*

El objetivo de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) es**:**

"Formar recursos humanos, comprometidos para realizar investigación de frontera competitiva a nivel internacional y realizar desarrollo tecnológico de alta calidad, en diferentes áreas científicas y laborales" y en respuesta a los nuevos desafíos sociales e intelectuales de la UANL, la FCFM define su propia MISIÓN:

"Apoyar el desarrollo de la Sociedad Neoleonesa y del País, mediante la formación integral de profesionistas de las Ciencias Matemática, Física y Computación, y a través de la aportación directa de su saber científico y tecnológico."

La Experiencia Didáctica que se presenta en este documento, como ***una acción extramuros de FCFM- UANL***, se ha desarrollado en el seno del curso de Licenciatura Cálculo Vectorial.

DESARROLLO

Aunque el análisis endógeno de la evolución de la Didáctica de las Matemáticas muestra una visión contextualizada avanzada, logrando una filosofía interdisciplinaria, se puede señalar que en las instituciones de nivel superior de Matemáticas se tiene una visión parcelaria de la Ciencia y la Tecnología, en el *Mito de las dos culturas*, pues se registra el menosprecio al *conocimiento empírico-cotidiano*, fruto de la experiencia inmediata de las tradiciones y costumbres, subestimando el valor de la *Unidad Teoría-Práctica*.

El uso de Medios y Recursos Didácticos en Matemáticas, se ha enfrentado a un "Zigzag" de rechazo y aceptación en las diversas etapas históricas de la Enseñanza de las Matemáticas, Registrándose cierta *analogía* con las etapas de rechazo y aceptación de la Geometría en el desarrollo de la Ciencia en las comunidades epistémicas de nivel superior, producto de la influencia endógena de las concepciones del Método Científico, en relación a su *pureza y dinamismo,* provocando etapas paradigmáticas.

Demanda social nacional-estatal

La acción de desarrollar el Software Didáctico FCFM-UANL no es un hecho aislado en el Sistema Educativo del País. Existen catálogos sobre software para educación superior, y se han registrado trabajos de algunas Universidades (Anáhuac, ITESM, Ibero, UDLA, CISE-UNAM, UAM-A y el CINVESTAV) las cuales han ***contribuido a la cultura nacional*** desarrollando Software didáctico en español, que apoya a niños y jóvenes en el difícil arte de prepararse para desarrollar Habilidades Matemáticas o introducirse al mundo del Arte, la Historia, la Química, la Física y el Español, entre otros.

La demanda de parte de la sociedad de contar con una eficiente enseñanza-aprendizaje de la Geometría y desarrollo de habilidades geométricas, *está implícita* en la urgencia de contar con Recursos Humanos, dentro del Sistema Educativo, en Sectores de Servicio a la Comunidad y en el Medio Productivo de ciudades industriales como Monterrey, ante problemas de capacidad óptima y problemas de campos vectoriales en construcciones, ductos o contenedores, etc.

La participación de la FCFM UANL en el desarrollo de Informáticos Educativos dirigido al Nivel Básico, *fue solicitada en 1996* por el Departamento de Informática Educativa de la SEP de Nuevo León, para conformar la *componente de consultoría teórica en el equipo interdisciplinario* de dicha institución. Pero, dicha participación se suspendió por el cambio de autoridades gubernamentales y se decidió retomar el compromiso con la sociedad.

Evidenciar en la clase de Cálculo Vectorial, tanto las deficiencias en los alumnos, como las limitaciones en los Software Didácticos Comercializados que presentan ocultamientos y propician "errores de interpretación", constituyó el *Conflicto Cognitivo, el Reto o el Elemento Motivador y Detonante* que propició la formación de *grupos interdisciplinarios de estudiantes,* para incursionar en "la aplicación de sus conocimientos de Física, Matemáticas y Computación en la elaboración de Materiales didácticos". Surge entonces el Programa Geometría Viva, para dar respuesta *al Requerimiento del Proceso Docente Educativo y de la Sociedad*.

Existe la *demanda de diferentes instituciones educativas* de primaria, secundaria y preparatoria (Colegios Particulares y Escuelas Estatales) e incluso por docentes de preescolar. Las autoridades de CONACYT NL, como **gestores de política científico-tecnológica**, lo programan cada año en la "Semana de la Ciencia", como *taller de Iniciación Científica,* respaldándolo con la programación de conferencias sobre el Programa Geometría Viva, en preparatorias de la UANL.

PROGRAMA GEOMETRÍA VIVA
Programa Geometría Viva, está conformado por **formación del Equipo Interdisciplinario, el desarrollo de Software y el Taller Geometría Viva.**

I. Concepción del Equipo interdisciplinario

El equipo interdisciplinario se apega a la concepción de grupos innovadores, como *grupos con grados de cohesividad*, "en el cual se respeta la personalidad propia de sus integrantes, trabajando en su momento como un grupo en formación, un grupo muy unido o algo unido y personas en sincronía, relacionadas o aisladas".

La tarea del docente es dar orientación teórica didáctica (BOA) y situar las actividades en la Zona de desarrollo Próximo, considerando el *perfil del docente* definido en la Visión 2006, capaz de *trabajar en equipo* como *líder o conductor*, *comprometido con la institución y la sociedad*, que propicie "proyectos montados sobre metodología interdisciplinaria de impacto positivo para la sociedad"

El concepto de Institución-empresa, exige que el docente se documente sobre "el arte de dirigir y coordinar los recursos humanos y materiales, a lo largo del ciclo de vida de un Proyecto, para conseguir los objetivos prefijados y satisfacción de los participantes o partes interesadas en el Proyecto"

Como el beneficio para el estudiante, se mide también en términos de su competitividad profesional futura, es importante que el docente señale a los alumnos las líneas de especialización que pueden dar continuidad al trabajo realizado en el equipo interdisciplinario. Al respecto, se informa que los programadores estudian Maestrías en dicha línea.

El docente-líder, tiene el compromiso de vigilar y combatir los problemas que vulneren el *carácter humanista y demás valores éticos* en el desarrollo del joven científico, ante el riesgo de plagios a manos de una "autoridad" en el proceso de la *gestión de la innovación y transformación del conocimiento en tecnología.*

II. El Software Didáctico FCFM

Se ha insistido en que el crédito de cada Software o material Didáctico, sea compartido entre el Programador y el Autor Teórico Didáctico. Dado que se ha trabajado con el **estilo de liderazgo democrático**, en el cual "*el líder actúa como un primero entre iguales*, se fomenta la discusión abierta y aunque se reconoce y se respeta explícitamente la labor de los expertos, el líder *se hace responsable* de las conclusiones extraídas".

El Software Didáctico, **Curvas en el Espacio, Tutorial Geometría Viva, Software-Tangram y Rubik en Perspectiva** , como tecnología, se ha nutrido de tres fuentes*: el conocimiento, la tecnología y la práctica concreta.* Se realizó un *Corte Vertical,* en los programas de Geometría del nivel superior y medio superior de la UANL y en los programas del nivel básico de la SEP (CECAM), para identificar la posibilidad de diseñar materiales didácticos que propicien la construcción de conceptos y habilidades de Geometría.

III. Taller Geometría Viva

Del mismo análisis teórico, surgió la propuesta de contar con un Taller de Geometría, en un Parque Público con área verde, funcionando como un *Museo Científico* y/o como un *Laboratorio de Geometría*, para presentar al conjunto de Materiales Didácticos

Dado que *tanto las nociones espaciales iniciales como el lenguaje científico geométrico, son una herramienta fundamental en el desarrollo de la Ciencia y la Tecnología; Sumado* a que el lenguaje ordinario o coloquial constituye un puente entre el conocimiento científico y la contextualización del mismo*;* El objetivo del "Taller Geometría Viva" es: "Iniciar una Alfabetización *Geométrica* que evite preconcepciones falsas y contribuir al desarrollo de habilidades geométricas en el visitante".

El Taller Geometría Viva es un *trabajo científico-metodológico*, basado en las implicaciones que a modo de resultados, aportan artículos de investigación sobre teorías cognitivas, Percepción global, niveles de razonamiento y fases de aprendizaje, la relación de los Métodos Investigativo y Lúdico con las etapas de la teoría de Asimilación, Modelos de liderazgo, etc

El Taller Geometría Viva considerado como una **Tecnología**, está integrado por las siguientes **subtecnologías**: hardware: (materiales, maquinarias, equipos), software: (procedimientos, manuales, bancos de datos), humanware: (conocimientos, habilidades) y OrgWare*:* (estructuras y formas organizativas, interacciones, experiencia empresarial)

Los **materiales didácticos del Taller Geometría Viva**, que se consideran innovadores entre otros, son los siguientes:

Los Personajes de la Geometría, como figuritas coleccionables o en el Memorama de Triadas y como figuras de gran tamaño (1.20 m de altura), cuya importancia es el Nombre de cada uno.

El teatro guiñol, que permite interactuar con los espectadores para contribuir a la "alfabetización geométrica" (lenguaje externo) y la corrección de preconcepciones erróneas.

El Software Didáctico: "Tutorial Geometría Viva", "Software-Tangram" y " Rubik en Perspectiva"

Tangram-3D: Prismas que conforman a la unidad de volumen (un litro)

EVALUACIÓN

1.-El Taller Geometría Viva fue aprobado por autoridades de Gobierno, de Secretaría de Educación Pública (SEP), NL. y el Software fue aprobado por Informática Educativa NL.

2.-El Software Didáctico FCFM, fue evaluado en la Primera Muestra Nacional de Material Didáctico para la Enseñanza Universitaria en Junio del 2001, en la cual se otorgó reconocimiento al Tutorial "Geometría Viva" como uno de los tres mejores trabajos en su categoría, por cumplir con la Validación Didáctica (usables, agradables, útiles y aceptabilidad en el diseño de interfaz para Software Educativo), definida por la Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la SEP del País

3.- El Software Didáctico se compartió con los programadores del programa JOVEN CLUB de La Habana, en Noviembre del 2001, se donó a la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de la Habana, se donó a preparatorias de la UANL y al CEVETis (Preparatoria Técnica) y extraoficialmente se ha donado a Primarias Públicas de Monterrey para su evaluación y posible implementación en la enseñanza de temas de geometría.

4.- La *evaluación de la factibilidad* de incidir en Preescolar, se realizó en función de conferencias dictadas a dichos docentes en Monterrey NL, en Saltillo Coahuila, México y en el CELEP de la Habana-Cuba, del 9 al 13 de julio de 2001.

CONCLUSIONES

Demanda institucional: El Programa Geometría Viva se enmarca en las siguientes acciones, definidas en el Programa "Educación para la Vida":

Tecnología Educativa*, como una acción del Programa Innovación Académica, con el objetivo de crear material para la impartición de clases, videos, multimedia, software y apoyos gráficos.*

Programa Desarrollo Científico y Tecnológico: Difundir *el conocimiento científico de la UANL y Promover el intercambio y la colaboración interinstitucional para enriquecer investigaciones.*

Centro de transferencia tecnológica (CTT), en el área de Vinculación y Servicio Social (DVSS), *plantea que el conocimiento, la investigación y los servicios que presta la UANL, puedan ser transferidos con mayor calidad y eficiencia al sector productivo.*

La formación de equipos científicos interdisciplinarios de estudiantes puede ser considerada como una *innovación social* en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, cuya enseñanza superior se ha centrado en carreras, y los ***materiales didácticos*** se conciben como *innovaciones de utilidad*, dado que son "un producto de lo que deseamos y de lo que sabemos, que satisfacen una necesidad" o como "una combinación de necesidades sociales y de demandas de mercado. Es decir, como una "innovación arrastrada por la demanda", en este caso, *demanda educacional*.

Es urgente la **formación integral de docentes**, que implemente nuevas estrategias educativas y alternativas científicas en busca de la solución de problemas de la sociedad. Partiendo de que "no se trata de que el docente transmita conocimientos y valores; ***se trata de enseñar a pensar con autonomía y creatividad, de enseñar a valorar***" el docente no debe perder de vista que "Solo en un ambiente de creatividad cultural y de innovación social, puede lograrse a plenitud, **el continuo *creencia - tecnología - sociedad - desarrollo*;** sin ignorar desde luego, la contribución de la ciencia a la conformación de tal ambiente". (Núñez, 1999, p103)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, A. (2001). *Del Pizarrón al Ciberespacio. Muestra Nacional de Material Didáctico* UANL, Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa.

Aréchiga, J. (2001). *Problema de la Transferencia de las Matemáticas*. Página Web: http://www.uag.mx/63/a04-04.html

Artigue, M. & Douady, R. & Perrin, M.R. y Robinet, J. (1994). *Ingeniería Didáctica*. Grupo editorial Iberoamérica

Canales, E. (2001). *Administración de Tecnología*. Doctorado en Filosofía de la innovación. (1993): L.P.A.D. Evaluación Dinámica del Potencial del Aprendizaje. Ediciones Bruño, Madrid

Kolmogorov, V. et al (1956). *La matemática su contenido, métodos y significado.* Tomo I. Editorial MIR. Moscú.

Martínez, F. (2001). *Guía del Trabajo del Curso de Postgrado: Estudios de Ciencia Tecnología y Sociedad*. (libro en soporte magnético)

Núñez, J. (1999a). *La ciencia y la tecnología como proceso sociales*. Editorial "Félix Varela", La Habana, 245. (Tesis y Libro en soporte magnético)

“LA GEOMETRÍA EN EL DISEÑO, LA RECREACIÓN Y LAS CONSTRUCCIONES”

María Plaza, Norma Quiroga, Yolanda de J. O’Farrill Dinza
Cát. Matemática, FAU, UNT, Argentina, Departamento Matemática General. Facultad de Ingeniería Industrial -CUJAE- Cuba
mamelia48@yahoo.com , nquiroga1986@yahoo.com , yoly_cu@yahoo.com
Campo de Investigación: Pensamiento geométrico- Nivel Educativo: Superior

RESUMEN

El presente trabajo forma parte de un proyecto de investigación para la innovación del modelo didáctico de la cátedra de matemática de primer año de la F.A.U.

Con este proyecto perseguimos, entre otros objetivos, realizar una revisión de los contenidos de la materia y actualizarlos a través de criterios de selección y organización que consideren la interdisciplinariedad como eje.

INTRODUCCIÓN

Al trabajar sobre la incorporación de la geometría plana y espacial en los contenidos de la materia, fue necesario realizar una evaluación diagnóstica de los conocimientos previos de los estudiantes, la cual arrojó resultados alarmantes. El desconocimiento de la geometría intuitiva y espacial que poseen los alumnos en general es algo que a nadie escapa y que es motivo de preocupación e investigación en diferentes frentes educativos.

Miguel de Guzmán Osamiz (1989), en un párrafo de Tendencias Innovadoras en Educación Matemática nos dice *“Es evidente que desde hace unos veinte años el pensamiento geométrico viene pasando por una profunda depresión en nuestra enseñanza matemática... Y al hablar del pensamiento geométrico no me refiero a la enseñanza de la geometría más o menos fundamentada en los Elementos de Euclides, sino a algo mucho más básico y profundo, que es el cultivo de aquellas porciones de la matemática que provienen y tratan de estimular la capacidad del hombre para explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura, la forma física”*.

En la universidad se hace necesario que el conocimiento abstracto que el alumno trae vuelva a la realidad, con mayor razón al tratarse de una carrera de arquitectura donde lo fundamental es utilizar el espacio de acuerdo a las necesidades funcionales que tiene el hombre. Así consideramos importante hacer propuestas para que desde la matemática se acostumbre a pensar en un espacio funcional a partir de la forma, yendo al encuentro de la **geometría de la forma** dada su íntima relación con el diseño arquitectónico. Nuestro equipo de trabajo está en la búsqueda de motivaciones que cubran tales expectativas. En ese sentido hemos elaborado un **Proyecto Sobre el uso de los Cuerpos Geométricos en la Construcción y la Recreación**, que constituye una primera experiencia al respecto.

OBJETIVO del PROYECTO. Mostrar la forma metodológica a emplear para lograr que los estudiantes construyan los conocimientos geométricos a través de un proyecto integrador.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL TRABAJO. Para el desarrollo del trabajo se tuvieron en cuenta estrategias de enseñanza basadas en teorías constructivistas que conducen al aprendizaje significativo que en sus metas y objetivos de la educación plantea que la educación debe favorecer y potenciar el desarrollo cognoscitivo del alumno, promoviendo su autonomía moral e intelectual. Piaget ha comentado lo siguiente en torno al problema de los objetivos de la educación: " El principal objetivo de la educación es crear hombres que sean capaces de hacer cosas nuevas, no simplemente de repetir lo que han hecho otras generaciones: hombres que sean creativos, inventivos y descubridores. El segundo objetivo de la educación es formar mentes que puedan criticar, que puedan verificar, y no aceptar todo lo que se les ofrezca" (Piaget, 1964 cit. por Kamii, 1982).

De acuerdo con Kamii (1982) debemos partir de la acción del alumno cuando aprende distintos tipos de conocimientos (físico, lógico-matemático y social). Pero debemos distinguir cada uno de ellos (cuando se deseen enseñar) y entonces utilizar estrategias distintas. El alumno debe ser animado a conocer los eventos físicos (descubrirlos), lógico-matemático (reconstruirlos) y sociales de tipo convencional (aprenderlos) y no convencional (apropiarlos y/o reconstruirlos).

En torno al concepto de enseñanza, para los piagetianos hay dos tópicos complementarios que es necesario resaltar: la actividad espontánea del niño y la enseñanza indirecta.

El primero, hace ver a la concepción constructivista como muy ligada a la gran corriente de la escuela activa en la pedagogía, desarrollada por pedagogos tan notables como Decroly, Montessori, Dewey y Ferriere. No obstante según Marro (1983), aún cuando ciertamente existen similitudes, también existen sendas diferencias entre dichas propuestas pedagógicas y la de la psicología constructivista y piagetiana. Piaget señalaba estar de acuerdo con utilizar métodos activos (como los anteriores pedagogos), centrados en la actividad y el interés de los niños. Sin embargo Piaget (1976) señala que en un planteamiento así, sin el apoyo de un sustrato teórico-empírico psicogenético, no garantiza una comprensión adecuada de las actividades espontáneas de los niños, ni de sus intereses conceptuales. Esta es precisamente la gran aportación de la psicología genética, a una educación basada en métodos activos, dado que esclarece al profesor (vgr. con el conocimiento de las etapas de desarrollo cognitivo, el conocimiento de cómo aprenden los niños, el significado de las actividades autoiniciadas, los tipos de conocimientos, etc.) el cómo operarlos en beneficio de los alumnos.

El segundo relacionado con los métodos activos de los que hemos hablado, se refiere a lo que se ha denominado "enseñanza indirecta", que es el complemento de la actividad espontánea de los niños en la situación educativa. La enseñanza indirecta consiste en propiciar situaciones instruccionales, donde la participación del maestro se vea determinada por la actividad manifiesta (vgr. juego, experiencias físicas frente a los objetos) y reflexiva (vgr. coordinar relaciones, plantearse preguntas, etc) de los niños, la cual es considerada protagónica.

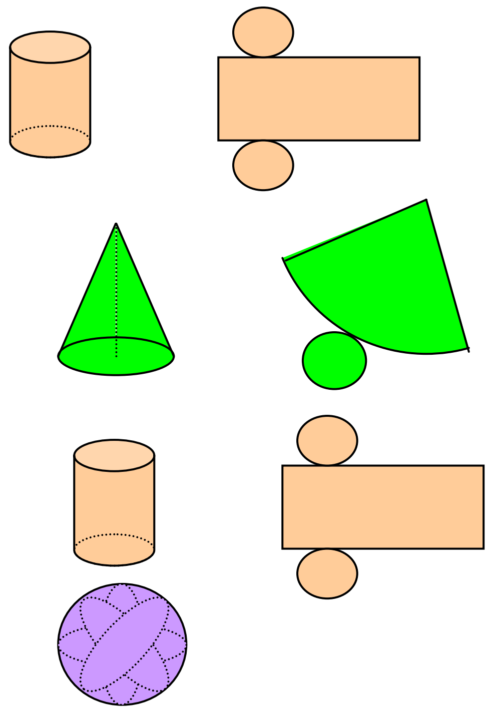
El maestro no enseña (o al menos trata de no hacerlo y lo puede hacer sólo después de que los niños han intentado por sus propios medios aprender), sino propicia situaciones donde el alumno construye conocimientos (lógico-matemáticos) o los descubre (físicos) de manera natural y espontánea, como producto de su propio desarrollo cognitivo (Labinowicz, 1982).

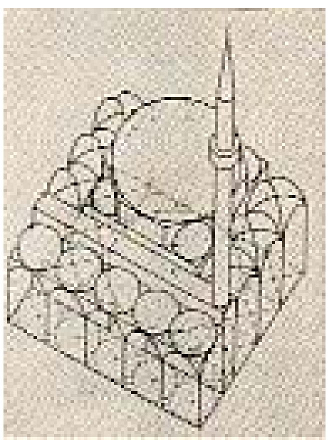
Consideramos, asimismo, que uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la Matemática y de la Geometría es el desarrollo intelectual de los alumnos a través de la formación del pensamiento espacial, del pensamiento geométrico, el pensamiento final, la formación lingüística, la creatividad y la fantasía.

También diseñamos este proyecto en función de trabajar sobre las operaciones mentales para la formación del pensamiento en general como ser la abstracción, la concretización, el análisis y la síntesis.

Las ilustraciones siguientes ejemplifican una posible vía de desarrollo del pensamiento geométrico espacial en la que el estudiante traslada al plano (bidimensional) cuerpos tridimensionales.

Casa unifamiliar en Stabio 1980-1982 Arq. Mario Botta





Mezquita de Rusten Pacha, Estambul

DESARROLLO DEL PROYECTO

El desafío es reciclar el viejo mercado de abasto de nuestra ciudad que hoy se encuentra abandonado, manteniendo la antigua construcción colonial y en sus ambientes crear talleres de recreación para niños del nivel primario. La particularidad que van a tener estos talleres es que en ellos se encontrarán elementos en forma de cuerpos geométricos (con sus respectivos nombres) de distintos materiales y tamaños, con los cuáles los niños irán construyendo sus propios juegos. Esto permitirá además de la diversión, un espacio para la creatividad y el ingenio ya que se encontrarán ante múltiples posibilidades y combinaciones.

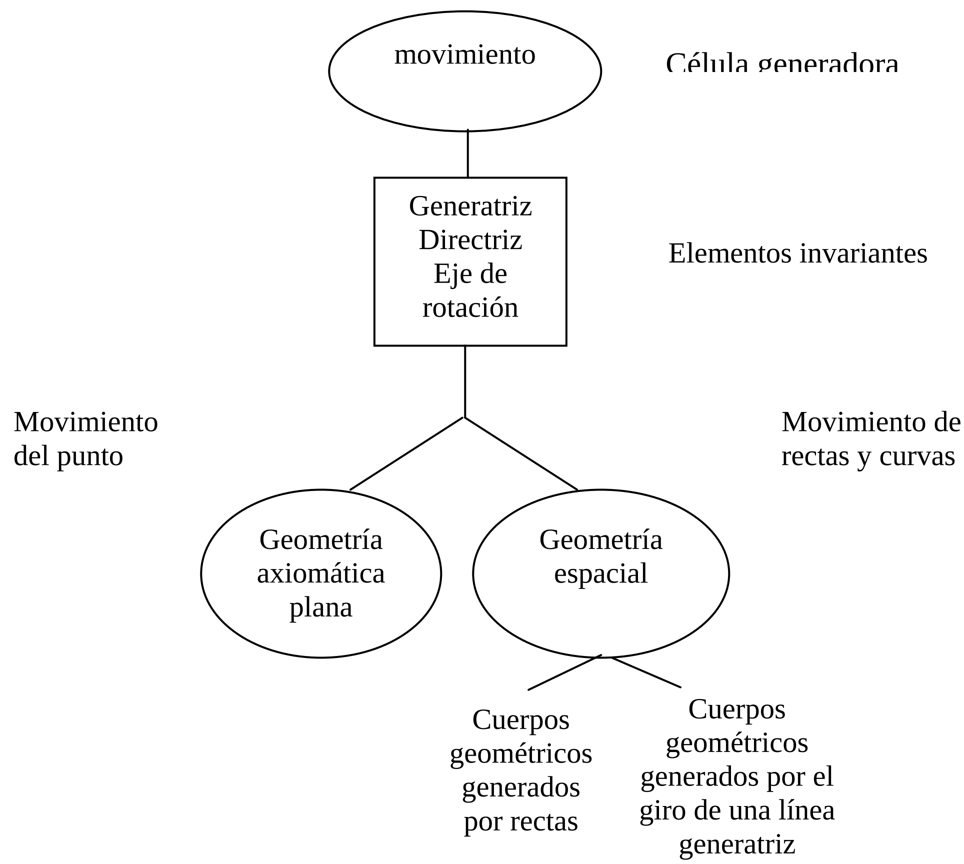
Cada ambiente convertido en taller tendrá distinta aplicación, por ejemplo: el taller de los laberintos, donde con guías previas se los invitará a construirlos; el taller de las construcciones, en el que los niños podrán armar con distintos poliedros y cuerpos redondos, trenes, casas, etc. Los materiales de construcción serán reciclables (alambres, cables para unir, latas de refresco, cajas de remedios, etc.) con elementos de fácil adquisición, manteniendo siempre un concepto ecológico.

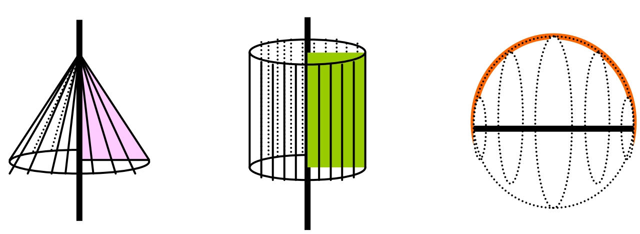
Este predio convertido en el “reino de la geometría” será guiado por los alumnos del primer año de la F.A.U. quienes habiendo asimilado previamente el conocimiento realizaran esta transferencia como una extensión a los alumnos de jardín de infantes y de la primaria quienes tendrán así una experiencia vivencial de la geometría, un acercamiento concreto a ésta como es acorde a su nivel de desarrollo del pensamiento.

ACTIVIDADES PREPARATORIAS DEL PROYECTO.

Actividad 1: Estudio de la base teórica de la Geometría que utilizaremos en el Proyecto. La motivación se produce de manera natural, ya que el proyecto esta elaborado de acuerdo a los intereses de los alumnos y tiene las características de los trabajos que ellos realizan en los talleres de diseño arquitectónico.

- Se realiza un estudio teórico del tema y se plantea un enfoque sistémico de los conocimientos geométricos



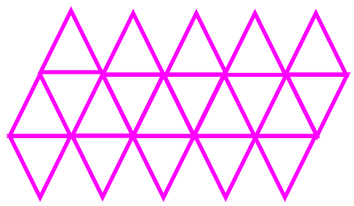


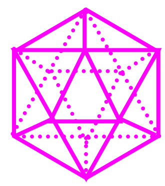
Esta estructura del conocimiento constituye, de forma esquemática la base orientadora para el trabajo a realizar.

<u>Actividad 2:</u> Cálculos e instrumentos geométricos necesarios para el Proyecto.

- cálculo de perímetros, de áreas, de volúmenes,
- uso de las relaciones de proporcionalidad, Teorema de Thales, Pitágoras, etc.
- usos de elementos geométricos,
- elaboración de planos (planta, corte, frente)

<u>Actividad 3</u>: Construcción de cuerpos geométricos partiendo del desarrollo.

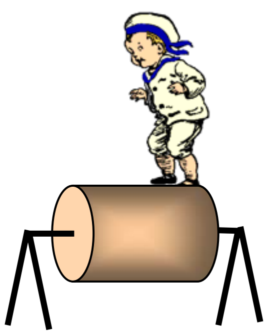


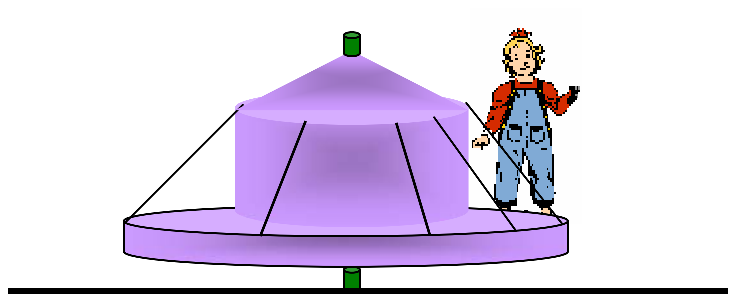


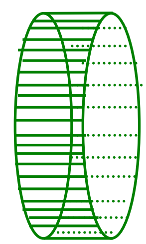
Una vez construidos los cuerpos los usamos como modelo para nuevas construcciones.

<u>Actividad 4:</u> Utilización de la geometría como generadora de espacios recreativos.
En esta etapa de creación, el alumno realiza una aplicación de todo lo aprendido en la elaboración del proyecto, donde pone en juego conocimientos, fantasía, creatividad, etc.
Los alumnos elegirán los talleres sobre la base de las siguientes modalidades:

- Taller del desarrollo motriz: construcción de elementos geométricos con uso de ejes de simetría.

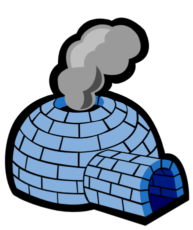


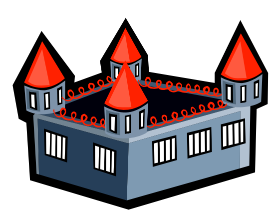




- Taller de construcción de elementos de uso cotidiano que utilicen cuerpos geométricos en su estructura.

- Museo de la fantasía: construcciones que se originan de un libro de cuento (castillos, puentes, aljibes, etc.) para las cuales es indispensable la combinación de cuerpos geométricos





- Construcciones Históricas: pirámides egipcias, templos mayas, palacios aztecas, castillos medievales, etc.: información sobre el uso de la geometría en las construcciones a lo largo de la historia.
- Sala de los laberintos: utilización de cubos y prismas en la construcción de laberintos que a su vez adquieran otras formas geométricas.

CONCLUSIONES

Este trabajo es el fruto de un esfuerzo constante que desde la cátedra de matemática de la FAU venimos realizando para lograr en nuestros alumnos una mayor motivación hacia el estudio de la matemática en general, y de la geometría en particular. A la vez nuestra inquietud para realizarlo surgió de la necesidad de integrar los contenidos de nuestra materia con los intereses en torno a los cuales gira la carrera de arquitectura, en especial el trabajo con y en el espacio y la metodología de trabajo de los Talleres de Diseño Arquitectónico.

En este sentido entendimos la utilidad de una experiencia como la descripta para que a través de la aplicación de los contenidos y su proyección hacia alumnos de otras edades, nuestros estudiantes logren interiorizar conceptos que desde el aula muchas veces se dan exclusivamente en forma abstracta.

Otro aspecto de nuestra motivación lo constituye el hecho de promover en los alumnos el sentido de solidaridad a través de una tarea de extensión.

BIBLIOGRAFÍA

Colectivo de autores (1991) en *Tendencias Pedagógicas Contemporáneas*. CEPES. Departamento de Psicología y Pedagogía. Ciudad de La HABANA.

Guzmán, M. (1989) de: 'Tendencias innovadoras en la educación matemática'. Organización de estados Iberoamericanos para la educación, la ciencia y la cultura. Edición HTML. Joaquín Asenjo www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

Kamii, C. (1982). La autonomía como objetivo de la educación: implicaciones de la teoría de Piaget. Infancia y aprendizaje. 18, 3-32.

Labonowicz, E. (1986). Introducción a Piaget. México: Fondo Educativo InterAm.

Mario Botta. (1989) de: Comentarios personales del Arquitecto

Mario Botta. Dossier de Nuevas Tendencias Nº 4. Suplemento de la revista *Arquiplus*. Argentina.

Marro, F. (1983). Aplicabilidad y repercusiones de la obra de Piaget en la práctica educativa. Infancia y aprendizaje, 23, 1-22.

Mitjans Martínez, A- Betancourt Morejón, De la Torre, S. (1995) en: *Pensar y crear* estrategias, métodos y programas. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.

Piaget, J. (1976). Psicología y Pedagogía. Barcelona: Ariel.

Zvi Hecker (1979)'Arquitectura poliédrica'. *En Colección Sumarios. Geometría en el Espacio*, Volumen 5. Nº 30. Argentina

MODELO DIDÁCTICO ALTERNATIVO PARA EL AJUSTE DE CURVAS

Patricio Rosen R. y Carlos H. Saavedra
Universidad Nacional Autónoma de México, México
pizzio@hispavista.com cahesa@hispavista.com

RESUMEN:

El análisis de datos ha cambiado muchísimo en estos últimos años con la inclusión de ciertas técnicas que en general son muy sencillas y poco conocidas por ejemplo los diagramas de tallos y hojas o los diagramas de cajas y bigotes, estos últimos ya incorporados en algunas calculadoras gráficas. La recta de Tukey, o mejor conocida como el método de Mediana-Mediana, que figura en el currículo de Matemáticas IV, del tronco común de los programas actuales del Colegio de Ciencias y Humanidades, permite ajustar una recta a una nube de puntos en algunos casos en los que el ajuste mínimo cuadrático produce resultados no muy buenos. Por eso, nos ha parecido que podría tener cierto interés el conocer esta técnica desarrolladas por el matemático americano John Wilder Tukey. *La recta de Tukey o Mediana-Mediana* es un método novedoso y práctico que puede venir a apoyar a otro que tradicionalmente se ha empleado en el ajuste de curvas, a nivel bachillerato, el de Mínimos Cuadrados.

En el presente trabajo presentamos las bondades prácticas de este método ingenioso que no requiere de un fundamento matemático demasiado abstracto en su tratamiento, y por lo cual se puede emplear en el cuarto semestre del tronco común de los programas vigentes del Colegio de Ciencias y Humanidades.

INTRODUCCIÓN

Por una parte, la situación actual en la que se encuentra la educación a nivel bachillerato en nuestro país, nos lleva a ser más cuidadosos en generar aquellos apoyos didácticos que requerirá en forma urgente el cuerpo docente, para ello es necesario avanzar con materiales educativos que le permitan al profesor suavizar el abordaje de los programas de Matemáticas, y su tratamiento le permita crear un ambiente académico adecuado a resarcir construcciones de conocimientos matemáticos significativos en nuestros alumnos, por esta razón el Seminario de trabajo de Rubro 2 del área de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades ha avanzado en la producción de materiales de apoyo con esta metodología. Debemos agregar en este apartado, que durante este periodo, los integrantes del Seminario diseñamos una serie de fichas de trabajo para favorecer el proceso enseñanza-aprendizaje, fichas que incluyen principalmente actividades individuales o grupales para que los estudiantes trabajen en el aula y que incluyen: la temática, los objetivos a alcanzar y una serie de sugerencias para que el profesor las utilice adecuadamente.

Estas fichas son de cinco tipos diferentes:

- *Fichas de lectura*: En este tipo de fichas la participación del alumno se limita a leer con atención para obtener nociones básicas o introductorias sobre un tema. Se utilizan con fines de motivación o para referencia de consulta. Requieren pocos antecedentes previos.
- *Fichas de exploración*: En este tipo de fichas se presentan al estudiante tareas de diferente grado de complejidad (generalmente basadas en un problema), para que él realice conjeturas o redescubra propiedades de algún ente matemático. Se recomienda trabajarlas en dos etapas, primero en forma individual y luego en pequeños grupos de trabajo. Estas fichas plantean "puentes conceptuales", de acuerdo al avance de los alumnos. Requieren respuestas escritas.

- *Fichas de sistematización*: En este tipo de fichas el estudiante trabaja en la solución de problemas o ejercicios mediante una guía dirigida, para que sistematice procedimientos y estrategias típicas de solución a los mismos. Requieren respuestas escritas.
- *Fichas de consolidación*: Mediante estas fichas se pretende descubrir los avances alcanzados por los estudiantes en el logro de algún objetivo de aprendizaje, así como servir de retroalimentación a los aprendizajes adquiridos. Requieren respuestas escritas.
- *Fichas de aplicación*: Estas fichas pretenden lograr que los alumnos "transfieran" el aprendizaje adquirido, es decir que puedan aplicarlo en contextos distintos. Requieren respuestas escritas. Se recomienda trabajarlas de preferencia de manera grupal.

Por otra parte, el análisis de datos ha cambiado muchísimo en estos últimos años con la inclusión de ciertas técnicas que en general son muy sencillas y poco conocidas por ejemplo los diagramas de tallos y hojas o los diagramas de cajas y bigotes, estos últimos ya incorporados en algunas calculadoras gráficas. La recta de Tukey que figura en el currículo del Colegio de Ciencias y Humanidades, permite ajustar una recta a una nube de puntos en algunos casos en los que el ajuste mínimo cuadrático produce resultados no muy buenos.

Por eso, nos ha parecido que podría tener cierto interés el conocer algunas de estas técnicas desarrolladas por el matemático americano John Wilder Tukey.

¿QUIÉN ES TUKEY?

John Wilder Tukey nació el 16 de junio de 1915 en New Bedrord Massachusetts. Después de licenciarse y hacerse Master en Química por la Universidad de Brown en 1937 participó en el programa de matemáticas de la Universidad de Princenton donde recibió el Master en 1938 y el Doctorado en 1939.

Después de su graduación, fue nombrado instructor de Matemáticas de Princenton; 10 años más tarde llegó a ser catedrático. En 1965 la Universidad de Princenton creó el departamento de estadística, y Tukey fue su primer director. Además de su posición en Princenton fue miembro de la Dirección Técnica de los Laboratorios de ATT & Bell desde 1945 hasta jubilarse en 1985 como Director ejecutivo de Investigación en la División de Información Científica.

Tukey está considerado una de las personas que más ha influido en el análisis exploratorio de datos habiendo sido el creador de diversas técnicas, tales como los diagramas de tallos y hojas, los diagramas de cajas y bigotes, etc. También ha hecho importantes aportaciones a la teoría de la estimación y al análisis de las series cronológicas. Tukey es autor de numerosos libros y de más de 350 artículos importantes en matemáticas y estadística. A él también se debe el término de contracción de las palabras *binary digit*.

La participación de Tukey tanto en educación como en servicios de asesoramiento técnico al gobierno ha sido importante. Fue nombrado miembro del Comité Asesor Científico del Presidente Eisenhower en 1965; ayudó al desarrollo del Programa Nacional para el Progreso de la Educación y fue un miembro destacado de la Oficina del Censo en 1990.

A lo largo de su vida de trabajo ha conseguido todo tipo de honores, tan sólo mencionamos los más importantes: recibió la Medalla Nacional James Madison de la Universidad de Princenton y miembro extranjero en la Royal Society de Londres.

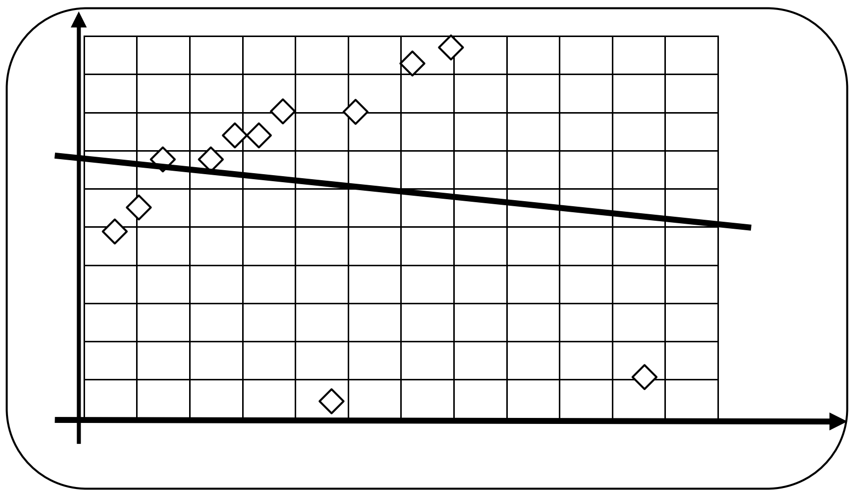
Tukey hasta hace muy poco ha seguido desempeñando el cargo de Profesor Emérito de Estadística, Profesor Emérito de Ciencia y Alto investigador Estadístico en la Universidad de Princenton.

LA RECTA DE TUKEY

Consideramos la distribución bidimensional dada por la tabla del margen. Con una calculadora con tratamiento bidimensional obtenemos la ecuación de la recta en regresión de Y, que es la siguiente:

$$Y = - 0.161 X + 13.569$$

En el gráfico hemos representado la nube de puntos y la recta de regresión. Es obvio que debido a dos puntos patológicos la recta obtenida se ajusta muy mal a la nube.



La regresión que hemos estudiado está basada en las medias, y éstas son muy sensibles a los valores muy extremos. En cambio, la mediana es un parámetro mucho más inerte a estos valores extremos.

El estadístico americano John Wilder ha desarrollado un procedimiento que se basa en esta idea eliminando en gran medida la influencia de los valores muy extremos.

Se divide el eje X en tres partes de modo que cada una de las partes corresponde aproximadamente a la tercera parte de los datos. Con ello dividimos la nube en puntos en tres nubes. Calcularemos la mediana de la X y la mediana de la Y de la nube de la izquierda; a ese punto lo denotamos $(M_{x1,} M_{y1})$.

Análogamente calculamos la mediana de la X y la medina de la Y de la nube de la derecha; a ese punto lo denotamos por (M_{x3}, M_{y3}).

- Gráficamente, la recta de Tukey se obtiene trazando la recta que pasa por los puntos $(M_{x1,} M_{y1})$ y $(M_{x3,} M_{y3})$, y a continuación trasladando paralelamente dicha recta y la otra mitad por debajo.
- Analíticamente, la recta de Tukey viene dada por la ecuación:

  Y = ax + b, donde:

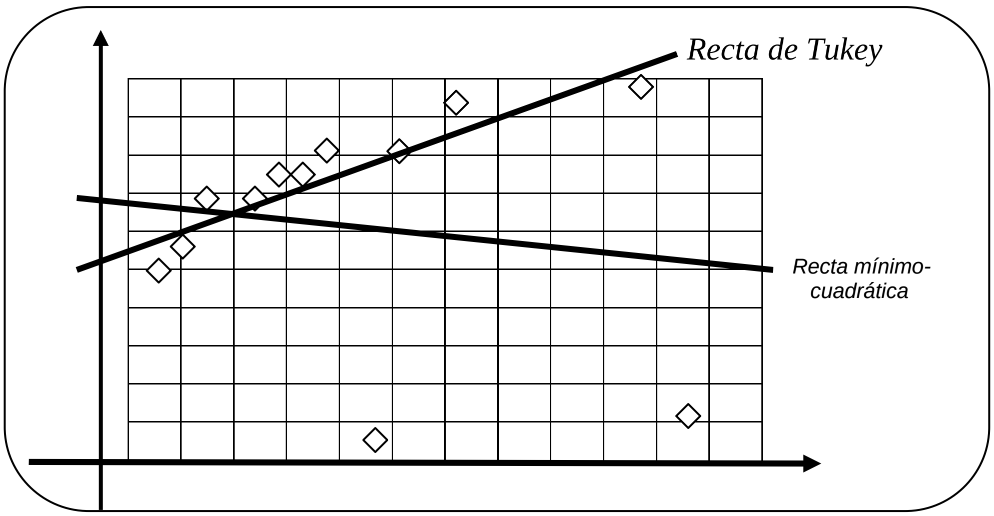
$$a = \frac{M_{Y3} - M_{Y1}}{M_{X3} - M_{X1}}, \qquad b = \text{medina de los valores } (y_i - ax_i).$$

Hoy en día existen calculadoras gráficas que ya tienen incorporado un procedimiento para obtener la ecuación e la recta de Tukey que también se llama *recta resistente*.

La recta así obtenida tiene la siguiente ecuación:

$$Y = 0.476\ X + 10.849$$

A continuación representamos ambas rectas: la mínimo-cuadrática y la de Tukey, que evidentemente se ajusta mucho mejor a la mayor parte de los puntos de la nube.



CONCLUSIONES

El *ajuste de curvas* es un tema que se ha estudiado casi exclusivamente en programas de estadística, no obstante su inserción en el programa de Matemáticas IV, última asignatura del tronco común en el CCH, es la de darle un aspecto de cierre al estudio de *funciones* que se da a lo largo de los cuatro primeros semestres, esto significa que a partir de una serie de datos, recopilados al analizar el comportamiento de algún fenómeno, los métodos para ajustar curvas nos permiten obtener a su vez el comportamiento funcional del mismo. Además, el uso de estos métodos tendría que estar ligado al entorno natural de los alumnos. Estos tienen que practicar la recopilación de datos, su representación en tablas y gráficas, deben discutir conjuntamente la metodología más adecuada y deben ejercitarse en la interpretación de los resultados. Como hemos visto el *ajuste de curvas* se puede realizar de una manera novedosa, efectiva y práctica aplicando el método de *mediana- mediana o de Tukey*.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, M. C. et al (1987): *Azar y probabilidad.* Editorial Síntesis. Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Madrid.

Hawkins, A. et al (1992): *Teaching statistical concepts.* Longman. Londres.

Holmes, P. et al (1991): *Practical statisticals.* Macmillan. Londres.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO INSTRUMENTO METODOLÓGICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Nadia Gil Ruiz
Secretaria de Educación Pública. México
gil_ruiznadia@hotmail.com

Resumen
Esta propuesta didáctica se inscribe en la enseñanza, plantea un plan de intervención pedagógica para mejorar el rendimiento de los alumnos de cuarto grado, en la resolución de problemas matemáticos, reconociendo a éstos como un medio que permite al alumno llegar al conocimiento matemático por sus propios medios, respetando sus estrategias y canalizando sus conclusiones.
El planteamiento de problemas se propone a través de dos modelos: el modelo generativo y el modelo de estructuración. En el primero, la operación queda subordinada al pensamiento, es decir, se pondera la estrategia como vía de solución y se busca, después, la operación válida para dar cuerpo al proceso de resolución. El modelo de estructuración, ayuda a constituir mentalmente las partes que componen el problema. En ambos modelos se considera al "desafío" (en este caso, acertijos) como elemento clave para motivar a los alumnos a la resolución de problemas.

LA RESOLUCION DE PROBLEMAS EN EL CURRICULO DE EDUCACION PRIMARIA

El planteamiento y resolución de problemas es un punto central en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, ya que estimula el desarrollo de estructuras de pensamiento lógico-matemático, ayuda a comprender las relaciones cuantitativas y las formas espaciales que se dan en la realidad, además de fomentar la creatividad. De ahí que la solución de problemas siempre ha estado presente en los planes de estudio.

En el actual Plan y Programas de Estudio de Educación Primaria, se plantea como función de la escuela brindar situaciones en las que los niños utilicen los conocimientos que ya tienen para resolver ciertos problemas y que, a partir de sus soluciones iniciales, comparen sus resultados y sus formas de solución para hacerlos evolucionar hacia los procedimientos y las conceptualizaciones propias de las matemáticas (SEP, 1993).

Un factor esencial para que la resolución de problemas se convierta en una actividad interesante y productiva es, sin duda, el profesor. Sus acciones y el ambiente que logre crear dentro de su clase darán significado a la práctica de la resolución de problemas.

DIAGNOSTICO

Propósito que en el ejercicio de la docencia se pretendió con alumnos de cuarto grado, sin embargo, se manifestaron las siguientes características comunes en los alumnos, al resolver problemas: la incorrecta aplicación de los conocimientos a las situaciones problemáticas y una elección de estrategias procesales en las que generalmente, intervino el azar y no el razonamiento. La iniciativa, la creatividad, la concentración y asimilación de técnicas de base en la resolución de situaciones, eran escasas y subrayadas por una reiteración de ciertos ejercicios apoyados en la imitación de intenciones vacías.

El grupo se caracterizó por resolver ejercicios de manera irreflexiva, incluso se llegó a cuestionar si los problemas se resolvían con determinado algoritmo matemático. La ausencia de factores como la participación, la autoestima y la seguridad del alumno, así como el gusto por la tarea mencionada, fueron constantes. Es en este momento cuando surge el cuestionamiento, ¿Cómo lograr que los alumnos manifiesten interés, generen ideas y utilicen el razonamiento lógico para resolver problemas?

Para dar respuesta a la pregunta anterior, uno de los propósitos que se planteó fue, cómo lograr cambiar la perspectiva de los alumnos hacia las matemáticas como algo rígido y sin aplicación a la vida cotidiana.

De esta manera, el programa de intervención pedagógica se apoya en la invención- reconstrucción de situaciones problemáticas por los propios alumnos, orientando la generación de ideas a partir de su vocabulario, desde sus conocimientos y experiencias. Que permitirá el logro del propósito del plan y programas de estudio.

Establecidos los propósitos del programa, para efectos del diseño del programa de intervención pedagógica se apeló a los aportes de la escuela constructivista de Guy Brousseau, especialmente al término de transposición didáctica.

EL PROBLEMA COMO FUNDAMENTO Y MEDIO DE APRENDIZAJE

Aunque el término “transposición didáctica” de Y. Chevallard se refiere a las diversas transformaciones dialécticas del saber o a las distintas presentaciones del mismo: “saber científico”, “saber del programa escolar”, “saber del maestro”, “saber del alumno” etc., En este sentido, el problema matemático no solo desempeñaría las funciones de “herramienta” y “objeto” como lo establece R. Douady en sus “Juegos de marcos y dialéctica herramienta-objeto” sino que podría propiciar el “adelanto” de contenidos de los programas escolares(Douady,1993).

El problema como objeto central de este estudio, se caracteriza, en un sentido amplio, de acuerdo con Brousseau (1983), en que, un alumno no hace matemática si no se plantea y no resuelve problemas.

Se distingue entre situación problemática y problema, la primera como una situación total o parcialmente nueva para un sujeto, misma que requiere una respuesta o resolución. Y el problema como una situación problemática hecha consciente por el individuo que la enfrenta (Caballero, 2001).

Lo que trajo como consecuencia hacer notar que un problema puede serlo o no para un sujeto. Lo anterior se percibe claramente cuando el alumno es capaz de proponer sus problemas, al emitir los comentarios algunos compañeros expresaban la facilidad para resolverlo, en palabras de ellos “ese está muy fácil, no tiene chiste”, sin embargo para el alumno que lo propone sí implica dificultad. Esto deriva en una seria reflexión: al reconocer las diferencias individuales se deben elegir convenientemente los problemas que se han de plantear colectiva o individualmente.

En este sentido, Brousseau (1983) señala que el profesor debe organizar situaciones con las que el alumno confronte sus ideas propias acerca de algún fenómeno. Este contexto es propicio para presentar "situaciones problema", es decir, circunstancias que obliguen a la reflexión acerca del conocimiento con el que se cuenta hasta el momento. También se deben dar "situaciones de entrenamiento y familiarización", donde el conocimiento nuevo interviene como herramienta para resolver dichas situaciones fuera del contexto habitual en el que se desenvolvía el alumno.

Se deben dar problemas que le permitan al alumno reutilizar un conjunto de conocimientos nuevos, a manera de evaluación o diagnostico.

Las características para lograr un aprendizaje efectivo señaladas por Brousseau son ejes en el diseño del plan de intervención pedagógica.

a) Una actividad propuesta que sirva para plantear problemas a los alumnos, los cuales deben ser posibles de ser resueltos pero que a la vez impliquen un reto.

b) los problemas deben incluir en su solución conocimientos con los que ya cuente el alumno, que les sirvan como una base introductoria.

c) La validación no debe ser dada por el profesor, sino más bien por los mismos alumnos.

En conclusión, el propósito es crear ambientes en condiciones propicias para que se desarrollen situaciones óptimas de aprendizaje de conocimientos matemáticos. Con tal propósito, se diseñó el programa de intervención pedagógica.

DISEÑO DEL PROGRAMA DE INTERVENCION PEDAGÓGICA

Es preciso señalar que para el planteamiento de esta propuesta de intervención pedagógica se tomaron en cuenta los siguientes ejes: que el problema siempre debe ser significativo para el alumno, relacionado con su entorno y ligados a su experiencia; habrá que tomar en cuenta la dificultad del mismo para no crear en el niño frustración por no poder resolverlo. "Podemos empezar por el interés que ellos tienen en el hombre y el mundo, como punto de partida global. De ahí debemos reconocer su profunda necesidad de ordenar su entorno para que les permita sentirse competentes e inteligentes" (COHEN, 1998, p 278) esto último primordial en la motivación de ahí la necesidad de combinar el juego y el reto. El resolver problemas, (en el caso de esta propuesta los acertijos) se realizó cotidianamente y fueron planificados en base a los objetivos planteados y a los dos modelos de problemas; los modelos generativos y los modelos de estructuración.

EL PROGRAMA DE INTERVENCION PEDAGOGICA

El programa de intervención persigue favorecer la seguridad con la que el alumno se enfrenta a la resolución de distintas situaciones y desarrollar la fecundidad matemática a partir de elementos sencillos, fácilmente reconocidos en su entorno y ligados a su experiencia.
Partiendo de la afirmación "a los niños les complace descubrir cosas, que tienen una creciente capacidad de manejar mas de una variable a la vez, aunada a su mayor habilidad para percibir las alternativas" (COHEN, 1998, p 280), se propuso a los alumnos la resolución de acertijos en los que el número era algo secundario, la operación queda subordinada al pensamiento, del que se desprende divergencia y flexibilidad. Se formularon *situaciones sin número,* en que no aparecen datos numéricos, por ejemplo: dejar caer una pelota que está encima de un ropero y una pelota que está encima de una cama; ¿Qué pelota llega primero al suelo? ¿Es la cama más alta que el ropero?, también se planteó *información de la que se deduce algo,* una situación de este tipo es "Tengo monedas de $10 y mi hermano tiene monedas de $1 ¿Quien puede comprar más cosas?

Otras preguntas que fueron muy aceptadas son las de parentesco, ¿Qué será de ti la suegra de la esposa de tu hermano? En este primer momento se plantearon como acertijos y resolvían dos por semana, posteriormente la exigencia por parte de los alumnos fue que se plantearan más, incluso ellos se dieron a la tarea de proponer algunos y en este momento ya era un reto para ellos resolverlos.
Se comenzó también a resolver acertijos de geometría y de series numéricas. Es este momento donde ya están presentes en la clase de matemáticas *como un recurso de aprendizaje*. Muestra de ello es un acertijo que propone cerillos acomodados de tal forma que integran cuatro cuadrados y el reto es mover dos cerrillos para formar dos cuadrados de diferente tamaño; y el contenido temático a abordar fue el cuadrado, sus características y el perímetro, la discusión de las estrategias para resolverlo permitió construir el concepto perímetro.

Es en esta etapa donde la finalidad del planteamiento y resolución de problemas en clase puede sistematizarse de esta manera: plantear un problema a los alumnos, quienes buscan un procedimiento para resolverlo, se confrontan los procedimientos utilizados por los alumnos, posteriormente se plantea un nuevo problema que implica nuevos obstáculos que permitirán obtener una nueva "herramienta" es decir un concepto que permite resolver problemas. Es relevante en esta etapa la participación de los alumnos en clase, en sus palabras "nos falta tiempo para la clase" "vamos a iniciar con matemáticas".

Anteriormente se plantearon problemas que ayudan a estructurar mentalmente las partes que componen el problema. Se percibe la importancia de cada una, la relación que tienen, distingue la solución del problema de la resolución de éste. En esta etapa *inventan y resuelven un problema a partir de una solución dada.* “Inventa un problema cuya solución sea 56” “Inventa un problema que se resuelva mediante (16X2+6-4) x8”, es interesante este modelo porque un mismo resultado puede corresponder con diferentes situaciones planteadas, donde un alumno suma, otro resta.

Del mismo modo se es consciente de que una misma operación o conjunto de operaciones da lugar a la creación de una amplia diversidad de situaciones. Se observan interesantes razones para respetar las ideas de los demás.

En esta etapa los alumnos crearon su problemario. Ellos plantean sus problemas al grupo e incluso compiten para poder dar su problema a los demás.

LA EVALUCION DEL PROGRAMA

Respecto a la evaluación fue inicial, formativa y sumativa a través de la observación sistemática e interpretación de dichas observaciones. Sin duda el instrumento primordial fue la participación del alumno en la resolución de problemas tanto su proceso como los resultados además de otros instrumentos como cuestionarios.

RESULTADOS

Los resultados de esta propuesta pedagógica son satisfactorios puesto que se desarrollaron en el alumno distintas habilidades y actitudes que coadyuvan a un desarrollo integral.

Se observó cómo cambió notablemente la percepción de los alumnos hacia las matemáticas. Al terminar el plan te intervención manifestaron que las matemáticas son útiles. Tratan de resolver problemas relacionándolos con conceptos ya adquiridos, esto permite inferir que hay una modificación de la concepción tradicional de las matemáticas como bloque rígido de conocimientos que deben aprenderse de memoria. Con esta propuesta los alumnos elevaron notablemente su nivel de actividad mental y de participación en los procesos de aprendizaje.

Manifestaron confianza en sus capacidades para resolver problemas y en general enfrentaron con éxito situaciones complejas y con presión emotiva. La gran mayoría se desenvolvió en un excelente estado de emocionalidad, no manifiestan nerviosismo cuando se les pide que resuelvan un problema, ni se desaniman fácilmente ante un problema difícil, se observó que lo intentaron de nuevo y buscaron distintas estrategias de solución.

Se fundan las anteriores aseveraciones en un cuestionario que se aplicó en dos momentos; al inicio del ciclo escolar y al culminar el plan de intervención. En el primer momento en el cuestionario se pidió su opinión a los alumnos acerca de las matemáticas en función de cuestiones como las siguientes: “me divierto en mi clase de matemáticas”, “me gusta resolver problemas de matemáticas”, con las opciones para contestar, a menudo, algunas veces, rara vez o nunca. También se cuestionó su estado emocional al resolver un problema (acertijo en este caso), con las opciones frustración, agrado, nerviosismo, gusto por resolverlo. De estas cuestiones solo dos alumnos manifestaron su agrado por resolver problemas pero ninguno se divertía en su clase de matemáticas; los demás manifestaron desagrado hacia las matemáticas. En el segundo momento, en febrero, se aplicó a los alumnos nuevamente el cuestionario y los resultados fueron completamente distintos, solo dos alumnos no se divertían en clase de matemáticas y no les gustó resolver problemas.
También se aplicó un instrumento de evaluación integrado por una serie de acertijos que debían resolver individualmente, respecto a los resultados; fue más breve el tiempo que tardaron los alumnos para resolver los acertijos, a comparación del tiempo utilizado al inicio del ciclo escolar, en que no lograban resolver un problema, también el número de aciertos incrementó y lo más

importante manifiestan diferentes estrategias de resolución. Sin duda lo más satisfactorio es que los alumnos manifestaron actitudes de seguridad ante cualquier situación, pueden defender y justificar sus ideas, son capaces de buscar alternativas y de cooperar para encontrar soluciones.

Falta tiempo para culminar con esta propuesta de intervención pedagógica y la evaluación continua permite reflexionar sobre algunos aspectos que al inicio se tomaron en cuenta; como lo es; plantear problemas para resolver de manera grupal y problemas a resolver individualmente. Los alcances rebasaron las expectativas pero queda un reto mayor, el lograr vincular esta propuesta a otras asignaturas, esto es, que permita abordar contenidos de otras asignaturas, será interesante lograr hacer de la resolución de problemas un recurso didáctico en otras temáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Brousseau, G (1983). *Obstáculos epistemológicos en matemáticas, Investigaciones en didácticas de las matemáticas.* Vol. 4. La Pensé, Sauvage, Grenoble.

Caballero, R. Froylán. (2001) *Los problemas matemáticos.* Serie Museo Didáctico de la matemática. México.

Cohen, Dorothy. (1988). "*Cómo aprenden los niños* ". FCE: México 1998.

Douady, Regine (1993). "Juego de marcos y dialéctica herramienta objeto", en *Didáctica de las matemáticas.* Escuela francesa. Cinvestav, México.

Fernández, Bravo J.A (2001). *"El problema del problema o la ausencia de creatividad"* MEC, CPR Latina Carabanchel, No. 11, 24-31

Gómez, Chacón, Inés María. (2000) *"Matemática emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático"* Ed. Narcea, Madrid

Secretaría de Educación Pública, (1993) *"Plan y programas de estudio educación primaria"* SEP.1993.

MATECHAVOS: UN SITIO INTERACTIVO PARA NIÑOS DE EDUCACIÓN BÁSICA

Marina Kriscautzky Laxague-Patricia Martínez Falcón-Gabriela González Alarcón
Dirección General de Servicios de Cómputo Académico. UNAM. México
mfalcon@servidor.unam.mx

RESUMEN:

Matechavos es un sitio Web interactivo que forma parte del Programa Universitario de Matemáticas Asistidas por Computadora (PUEMAC), desarrollado por el Instituto de Matemáticas y la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico (DGSCA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Matechavos está dirigido a niños de 6 a 12 años con el propósito de plantear actividades interactivas en las que se pongan en juego los conocimientos matemáticos escolares de manera informal. Además, se pretende proporcionar a los niños información interesante y breve sobre algunos temas de matemáticas de cultura general.

UN SITIO EN WEB PARA "HACER MATEMÁTICAS"

¿Por qué un sitio de matemáticas para niños en la red? La intención principal de desarrollar un sitio sobre matemáticas fue la de proporcionar a los niños un espacio en Internet donde puedan "hacer matemáticas", es decir, donde encuentren situaciones desafiantes que pueden ser resueltas de diversas maneras y que permiten descubrir el significado de algunas herramientas matemáticas a través de la formulación de hipótesis y su verificación.

En los acercamientos constructivistas al proceso de aprendizaje de los niños, se considera que éstos construyen sus conocimientos a partir de una interacción con un medio que ofrece resistencias, que presenta dificultades. En el caso del aprendizaje de las matemáticas, se considera que los alumnos construyen sus conocimientos como *herramientas* que permiten resolver determinados problemas, y no es sino después de un proceso, a veces largo, de descontextualización y generalización, que éstos asumen la forma de saberes culturales, institucionalizados (Douady, 1986).

Para "hacer matemáticas" no es imprescindible utilizar una computadora. Sin embargo, las actividades que se incluyen en *Matechavos* tienen la ventaja de que ofrecen una validación visual de las decisiones tomadas por los niños. En este sentido, pueden considerarse como las situaciones de validación propuestas por Brousseau (1986).

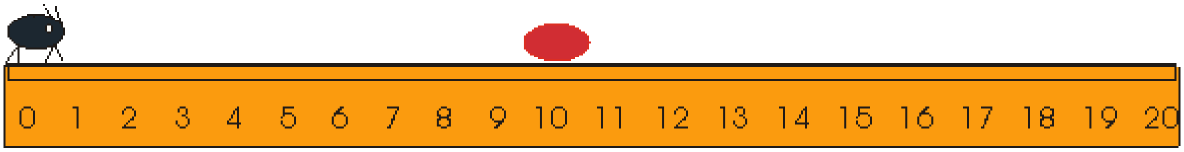
Las actividades están diseñadas con un concepto de interactividad que implica pensar que los niños se enfrentan a un reto y toman decisiones que tienen efectos sobre lo que sucede en la pantalla. Tales efectos permiten reflexionar sobre las decisiones tomadas previamente, reconsiderarlas y desarrollar nuevas estrategias.

Veamos esto en un ejemplo. En la sección *Échale coco* se incluye el juego de "La pulga y las trampas" [1]En él se propone a los niños la siguiente instrucción:

"En este juego tienes que evitar que la pulga caiga en las trampas decidiendo el tamaño de los saltos que dará la pulga. La regla es que los saltos tienen que ser todos iguales, por ejemplo, si escoges el 2, la pulga saltará del 0 al 2, luego al 4, luego al 6 y así. También puedes ser el trampero. Entonces tendrás que ingeniártelas para poner las trampas

[1] Este juego está tomado del libro Block et.al. (1991) *Juega y aprende matemáticas* México, SEP (Libros del rincón)

en los lugares en los que puede caer la pulga. Puedes jugar contra la computadora o contra un amigo Hay tres niveles de dificultad para que le eches coco. ¡Ojo! Hay una manera de atrapar siempre a la pulga...”



Si el niño decide jugar contra la computadora y *ser la pulga*, la máquina le pondrá de una a tres trampas, según el nivel de dificultad escogido. El niño tiene que decidir de qué tamaño hará sus saltos tratando de no caer en las trampas. Comúnmente, las primeras veces que juegan, los niños escogen el tamaño del salto al azar, por tanto no pueden predecir el resultado. Conforme van jugando, van reparando en que con cierto tamaño de salto caen en determinadas trampas.

Por ejemplo, Edgar, de 7 años[2], después de caer en la trampa varias veces, comenzó a anticipar los números en los que caería la pulga si el salto era de dos unidades. Si veía que iba a perder, probaba con otro tamaño de salto (por ejemplo 5) y volvía a contar de cinco en cinco, sobre la recta numérica, para comprobar si caería en la trampa.

Si el niño escoge *poner las trampas*, debe anticipar qué números son los más convenientes para atrapar a la pulga con más probabilidad. Por ejemplo Pedro, de 12 años, jugando en el nivel difícil, debía colocar tres trampas. Las primeras veces las puso al azar. Luego, comenzó a buscar aquellos números que permitían atrapar a la pulga en más casos independientemente del tamaño de salto que eligiera la pulga. Por ejemplo, el número 12 permite atrapar a la pulga que da saltos de 2; 3; 4 y 6 unidades.

Los conocimientos matemáticos implicados en este juego son la suma, la multiplicación y los múltiplos y divisores (mínimo común múltiplo y máximo común divisor). Los niños descubren estos conceptos a medida que juegan sin saber el “nombre” escolar de los mismos. Es decir, ponen en juego estos conocimientos a través de sus acciones sin volverlos objeto de reflexión. Para que esto suceda es indispensable que no se les diga desde antes que se trata de un juego de multiplicación.

Los procedimientos que utilicen los niños para resolver el juego dependen de sus conocimientos previos. Por tanto, pueden jugar niños de diferentes edades y diversos niveles de conocimiento pues cada uno buscará una solución acorde con lo que ya sabe y podrá aprender algo nuevo.

Todos los juegos que se presentan en *Matechavos* tienen características similares:

- pueden ser resueltos a través de diferentes estrategias
- son interactivos, porque proporcionan una validación visual de las acciones de los niños
- pueden ser jugados varias veces y en distintos momentos hasta encontrar la estrategia para ganar siempre.
- pueden ser jugados por niños de diferentes edades

[2]Los ejemplos que se presentan están tomados de la evaluación que se hizo de las actividades del sitio *Matechavos*, con niños de 7 a 12 años.

MATEMÁTICAS Y DIVULGACIÓN

Junto con las secciones de juegos, *Matechavos* presenta dos espacios de información. En la sección "Pregúntale a los expertos" los niños tienen la posibilidad de comunicarse con matemáticos para consultar sus dudas e inquietudes. Pueden enviar su pregunta y recibir una respuesta de alguno de los dos especialistas, o consultar las preguntas de otros niños.

En la sección "¿Sabías...? se ofrecen cápsulas informativas sobre diversos temas de cultura matemática general que pueden ser consultadas por los niños y por el público en general. En estas cápsulas la información está organizada con hipertextos y animaciones para hacer más fácil y comprensible la lectura.

Veamos un ejemplo de la cápsula "Los números mayas". Para representar la propiedad aditiva de la numeración maya, se utilizan dos recursos: por una parte, un hipertexto que amplía la información sobre la propiedad aditiva de algunos sistemas de numeración, utilizando otra de las cápsulas de la sección "¿Sabías...?

Por otro lado, la aditividad específica del sistema de numeración maya se representa mediante una animación. En ella se van iluminando, sobre un fragmento del códice Dresde, los símbolos de los números en el orden en que se van sumando. Al final, aparecen los valores de cada símbolo y la suma total representados en el sistema decimal de numeración.

En la siguiente tabla presentamos algunos cuadros de la animación:

Por último, nos interesa destacar que *Matechavos* es un sitio diseñado para que los niños lo utilicen fuera del ámbito escolar pero también para que los maestros lo aprovechen como apoyo didáctico en la clase de matemáticas.

PARA LOS PROFESORES

Junto con las secciones dirigidas a los niños hay un espacio para maestros de educación básica, *Mateprofes*, con el fin de proporcionar asesoría didáctica en matemáticas y ofrecer materiales didácticos.

En la sección "Asesoría didáctica" los maestros pueden solicitar ayuda para:

- Resolver dudas sobre algún tema de matemáticas.
- Resolver dificultades específicas con sus alumnos en relación con el trabajo en matemáticas.
- Desarrollar situaciones para enseñar algunos conceptos.
- Obtener bibliografía

En la sección de materiales didácticos se encuentra disponible, y de manera gratuita, un software para trabajar problemas multiplicativos (Vergnaud, 1988) y de proporcionalidad (Noelting, 1980) desarrollado en Cómputo para Niños: "Los saltos de las ranas".

Este software, producto de un trabajo de investigación (2001) fue diseñado bajo las mismas premisas didácticas que las actividades de *Matechavos*. El objetivo principal del programa es proporcionar validación visual acerca de las acciones de los niños. Las actividades involucran básicamente la multiplicación, la división y las relaciones de proporcionalidad, pero en ningún momento se explicitan estos contenidos. Por el contrario, los niños descubren esos conceptos al utilizar el programa.

Por otra parte, una de las cualidades del programa consiste en nunca dar la respuesta correcta a los alumnos. A partir de la retroalimentación visual que reciben los niños pueden analizar nuevamente el problema y buscar una respuesta distinta a la anterior hasta resolver la situación. (Block y Martínez, 1999).

COMENTARIOS FINALES

Regresemos a la pregunta inicial ¿por qué un sitio de matemáticas para niños en la red?

Porque las opciones disponibles en Internet (y de software en general) se reducen a la ejercitación de las operaciones básicas y no existen opciones para quienes tienen otra concepción acerca de la enseñanza de las matemáticas.

Porque los maestros necesitan material desarrollado para llevar a cabo situaciones didácticas significativas con sus alumnos y, cuando esos materiales involucran el uso de tecnología, al maestro le compete saber seleccionarlos y utilizarlos en el momento adecuado y no convertirse en desarrollador de software.

Porque Internet es un medio idóneo para comunicarse y distribuir información.

Porque *Matechavos* permite jugar en el sitio mismo, aprovechando de este modo las posibilidades del medio.

Finalmente, porque quienes desarrollamos este sitio tenemos la firme convicción de que la investigación didáctica que respalda este espacio permite ofrecer una alternativa para los niños y los maestros que desean aprender a "hacer matemáticas".

Matechavos está disponible provisionalmente en http://kentia.matem.unam.mx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Block, D., I. Fuenlabrada, A. Carvajal, L. Ortega (1991) *Juega y aprende matemáticas* México,SEP *(Libros del rincón)*

Block, D., P. Martínez (1999) "Los saltos de las ranas. Un ejemplo de uso de la computadora como medio de validación empírica de resultados" En *Seventh European Logo Conference* Sofía, Bulgaria

Block, D. (2001) *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico* Tesis de doctorado del Departamento de Investigaciones Educativas-CINVESTAV-IPN

Brousseau, G. (1986) "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques" *Recherches en Didactique des Mathématiques 7 (2), 33-115*

Douady, R. (1986) "Rapport enseigement-apprentissage:dialectique outil-objet, jeux de cadre" *Cahier de didactique des mathématiques* No. 3 IREM PARIS VII

Noelting G. (1980) "The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Differentiation of stages" In *Educatinal Studies in Mathematics* 11 pp. 217-253

Vergnaud, G.(1988) "Multiplicative structures" En H. Hiebert & M. Behr (eds) *Number concepts and operations in the middle grades Virginia, NCTM pp. 141-161*

LA SEGUNDA LEY DE KEPLER COMO ESLABÓN ENTRE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y EL CÁLCULO INTEGRAL

Alexander Bell Mejía y Roberto Torres Hernández
Instituto Tecnológico de Querétaro y Universidad Autónoma de Querétaro
robert@sunserver.uaq.mx

RESUMEN:

En el presente trabajo se expondrán algunos temas para enriquecer el curso tradicional de geometría analítica y cálculo integral a nivel medio-superior y superior. La idea principal consiste en proponer, analizar y desarrollar una serie de suplementos a los temas usuales con el objeto, por un lado, de ilustrar algunas aplicaciones y problemas que pueden resolverse con herramientas elementales y por otro, dar un vistazo a la historia y origen de algunos conceptos, así como su evolución y utilidad a través del tiempo. Lo anterior se hará con un ejemplo concreto que, de paso, muestra como se eslabonan diversos aspectos de las matemáticas escolares sobre un problema común.

INTRODUCCIÓN:

Dos de las principales líneas en la didáctica de las matemáticas son la enseñanza a través de la resolución de problemas y la incorporación de la historia de las matemáticas a las clases cotidianas. Con esto en mente, este trabajo propone una serie de temas complementarios a los temas usuales del curso promedio de geometría analítica con los siguientes objetivos:

1. En cuanto a la formación de profesores, creemos importante que el instructor de un curso de geometría analítica tenga un panorama más o menos amplio acerca de los diversos alcances del material que enseña, en cuanto a los problemas que resuelve. Por otro lado, consideramos que conocer el origen de algunos conceptos posibilitará entender, de manera clara, algunas de las dificultades encontradas en la evolución y por ende en la enseñanza de los mismos.
2. Articular y eslabonar diversos temas de las matemáticas elementales sobre un problema común.

ALGO DE HISTORIA:

En el siglo XVI d. C. el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543), basándose en la teoría de Aristarco (siglo III a. C.), afirmó que la Tierra y todos los planetas giraban alrededor del Sol como centro. Corrigiendo así la teoría de Ptolomeo desarrollada en el siglo II d. C.

Posteriormente, aprovechando el legado de Copérnico y tomando como base de sus especulaciones astronómicas los resultados de las pacientes observaciones realizadas por el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), después de muchos años de estudio, descubre que los planetas no se mueven formando círculos sino describiendo órbitas elípticas.

Este descubrimiento produjo un profundo cambio en la perspectiva científica acerca de la naturaleza. El movimiento circular establecido como soberano desde los tiempos antiguos hasta los días de Copérnico y Tycho Brahe era reemplazado por la elipse. De aquí en adelante, aquella cónica estudiada por Apolonio de Perga (alrededor de 247-205 a. C.) y a la cual nombró Elipse, pasaba a ocupar el centro de una filosofía práctica natural.

Empleando una frase poco ortodoxa podríamos decir que, en la época de Kepler, “*a la humanidad le «achataron» el círculo*”.

Puede resultar curioso, pero sobre todo, muy interesante, relacionar este suceso histórico, con una definición de la Elipse. Esto es lo que estudiaremos a continuación.

EL MOVIMIENTO “CIRCULAR” DE LOS PLANETAS

Con la intención de iniciar una reflexión acerca del tema que aquí se enuncia, analizaremos la siguiente definición.

Definición (1). Una ***elipse*** es una circunferencia contraída.

Para ilustrar esta definición, basta trazar desde cada punto $\boldsymbol{P' = (x, y')}$ de una circunferencia de radio $\boldsymbol{a}$ y (para facilitar nuestro trabajo) con centro en el origen, un segmento perpendicular al *eje x*, tal y como se muestra en la *Figura* 1. Y, posteriormente, suponer que las ordenadas de todos los puntos $\boldsymbol{P'}$ de la circunferencia se acortan mediante un coeficiente de contracción $\boldsymbol{0 < k < 1}$. De esta manera, todo punto $\boldsymbol{P' = (x, y')}$ será sustituido por otro punto $\boldsymbol{P = (x, y)}$. Éste último tiene la misma abscisa que su antecesor, pero generalmente su ordenada es otra, a saber, $\boldsymbol{y = ky'}$.

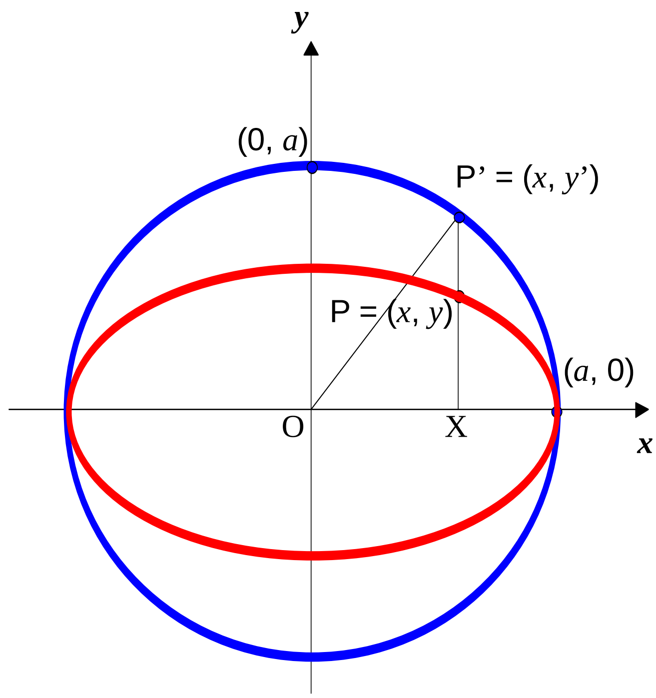


Figura 1

De este modo, la definición (1) afirma que mediante el proceso anteriormente descrito, se transforma a la circunferencia considerada en una elipse.

Por otro lado, obtener la ecuación de esa elipse es sencillo, para ello es suficiente relacionar los siguientes hechos:

- De acuerdo con la definición (1), para la ordenada de cualquier punto ***P* = (*x*, *y*)**, de la elipse, se tiene que:

$$y = ky'$$

- Pero, al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo ***OP'X*** de la *Figura* 1, se tiene que:

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

  Claro está que si el punto ***P*** y su correspondiente ***P'*** están en la mitad superior o en la mitad inferior de la elipse, se tendrá que

$$y' = +\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{ó} \qquad y' = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

  respectivamente.

- Por otro lado, es claro que el punto de intersección de la circunferencia con la parte positiva del *eje y*, tiene por coordenadas **(0, *a*)**. Y que si al punto de intersección de la elipse con la parte positiva del *eje y*, le asignamos las coordenadas **(0, *b*)**, entonces por la definición (1), se tiene que

$$b = ka \text{ o, bien, } \qquad \frac{b}{a} = k$$

Así, de los tres hechos anteriores se sigue que: si ***P* = (*x*, *y*)** está en la mitad superior de la elipse, entonces

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ ,$$

mientras que si ***P* = (*x*, *y*)** está en la mitad superior de la elipse, entonces

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

Pero, si se elevan ambas ecuaciones al cuadrado, entonces las coordenadas de cualquier punto ***P* = (*x*, *y*)** de la elipse (independientemente de si se encuentra en la parte superior o inferior) satisfacen a la ecuación

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

o, de manera equivalente, a la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Que no es otra que la ecuación *canónica* de la elipse que se obtiene al trabajar con la siguiente definición

Definición (2). Una ***elipse*** es el conjunto de puntos del plano cuya distancia a dos puntos fijos tiene una suma constante.

Después de nuestro estudio y siendo coherentes con la definición (1), podemos afirmar que: *Los planetas giran al rededor del sol en circunferencias contraídas*. Y, en tono poco serio, podemos decir que esta última palabra "contraídas" era el error (de omisión) que Kepler corrigió a sus antecesores.

Ahora, antes de abordar un hecho curioso acerca de una de las leyes de Kepler, enunciaremos, de manera precisa, las primeras dos de sus tres leyes[1] sobre el movimiento de los planetas, mismas que sirven de base a la Astronomía y que marcan una época en la historia de la ciencia matemática.

- **Primera Ley**. La órbita de todo planeta es una elipse, con el Sol en un foco.
- **Segunda Ley**. El radio vector que enlaza al Sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.

Así, de acuerdo con esta ley, si el área de la región ***OPS*** es igual a la de la región ***QSP***, entonces el tiempo que tarda el planeta en pasar del punto ***P*** al punto ***O***, será el mismo que emplea en trasladarse del punto ***R*** al punto ***Q***. (*Figura* 2)

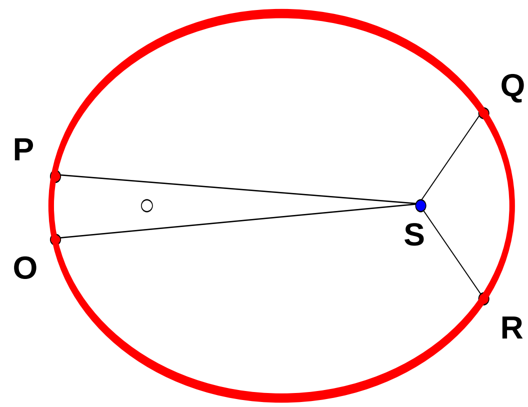


Figura 2

La segunda Ley de Kepler: En los trabajos de Kepler es notorio el abandono del rigor con el cual se trabajó desde la época de Arquímedes. El deseo de obtener resultados que el método griego era incapaz de proveer rápidamente, fue la razón por la cual este autor, entre otros, muy a menudo se basó en suposiciones no rigurosas. Así, por ejemplo, consideró que el área del círculo estaba compuesta de un sinnúmero de triángulos con vértice común en el centro. Esta forma de trabajar de Kepler le dio un matiz característico a su obra destacando, de manera particular, sus consideraciones infinitesimales. En este contexto, su segunda ley, constituye un ejemplo notable como antecedente al Cálculo Infinitesimal.[2]

Por otro lado, resulta interesante el hecho de que el sustento original (el realizado por Kepler), con el cual se logró establecer la certera e importante aseveración *"el radio vector que enlaza al Sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales"*, contenga una combinación de errores que se compensan mutuamente.

[1]Las dos primeras leyes se encuentran expuestas en su *Astronomia Nova* (1609), tratado que representa la culminación de sus cuidadosos esfuerzos para calcular la órbita de Marte.
La tercera, que es una muestra de un trabajo duro y prolongado, más que una genialidad del autor, se encuentra en la sección final de su *Armonices Mundi, Libri* (1619).

[2] Son precisamente las grandes obras de Kepler, Cavalieri, Torricelli, entre otros, en las que se desarrollaron métodos que con el tiempo condujeron a la invención del Cálculo.

Kepler, de manera acertada, logró establecer (con base en sus observaciones astrales) que si un planeta está en cualquiera de sus ápsides[3], entonces su velocidad $\boldsymbol{v}$ es inversamente proporcional a su distancia $\boldsymbol{r}$ desde el Sol. Esto es, si $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$ son sus velocidades en el afelio $\boldsymbol{P_1}$ y perihelio $\boldsymbol{P_2}$ (*Figura* 3) entonces hay una constante $\boldsymbol{k}$, tal que

$$v_1 = \frac{k}{r_1} \qquad \text{y} \qquad v_2 = \frac{k}{r_2} \tag{1}$$

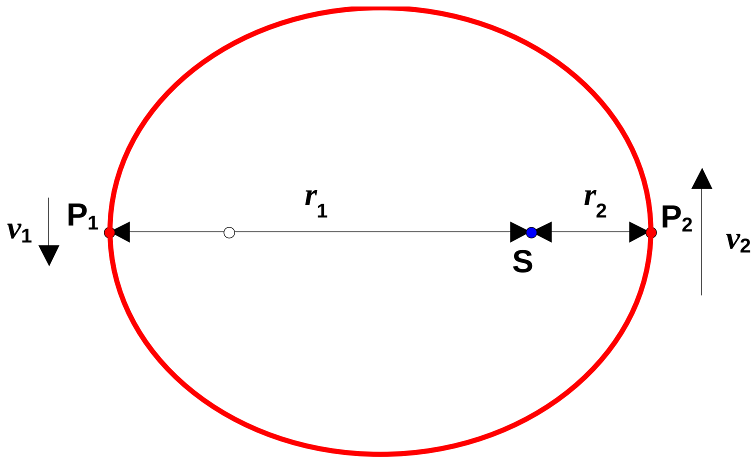


Figura 3

Después, este resultado lo generaliza estableciendo que este hecho se verifica para todo punto $\boldsymbol{P}$ de la órbita,

$$v = \frac{k}{r} \tag{2}$$

Esta afirmación ($\boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{r}}$ para cualquier punto de la órbita) es el *primer error*, ya que la conjetura es falsa. Lo que en realidad se verifica es que la velocidad en $\boldsymbol{P}$ es inversamente proporcional a la distancia $\boldsymbol{d}$ perpendicular desde $\boldsymbol{S}$ a la recta tangente a la elipse en $\boldsymbol{P}$.

Por otro lado, al calcular el tiempo $\boldsymbol{t}$ requerido para cruzar un arco $\boldsymbol{PQ}$ (*Figura* 4) de su órbita, él dividió el arco en un gran número de subarcos de igual longitud $\Delta\boldsymbol{s}$. De este modo, si $\boldsymbol{r_i}$ es la distancia $\boldsymbol{SP_i}$ desde el Sol hasta el punto inicial $\boldsymbol{P_i}$ del **i**-ésimo subarco $\boldsymbol{P_iP_{i+1}}$, $\boldsymbol{v_i}$ la velocidad en $\boldsymbol{P_i}$, y $\boldsymbol{t_i}$ el tiempo requerido por el planeta para cruzar este subarco, obtuvo que

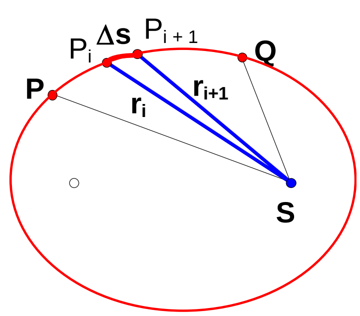


Figura 4

[3] En astronomía se llama *ápside* a cada uno de los dos extremos del eje mayor de la órbita de un astro, es decir, a los vértices de la órbita.

$$t = \sum_{i=1}^{n} t_i \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{v_i} \qquad \text{(ya que } v_i = \frac{\Delta s}{t_i}\text{)} \tag{3}$$

Aquí, cuando Kepler considera la relación generalizada (no válida) $\boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{r}}$, obtiene

$$t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{k / r_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i \, \Delta s}{k} \tag{4}$$

Para finalmente tener que

$$t = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} r_i \, \Delta s \tag{5}$$

Por otro lado tomó en cuenta que, si la **i**-ésima sección de área fuera un triángulo con base $\boldsymbol{r}_{\mathbf{i}}$ y altura $\boldsymbol{\Delta s}$, entonces el área total

$$A \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s \,, \tag{6}$$

pero esta conjetura constituye el *segundo error*, ya que, también, es falsa. Este error, de manera superficial, podemos decir que es del mismo tipo que el primero, en el sentido de que se trata de generalizar una propiedad que es válida en situaciones particulares. Observemos que, esto constituiría una buena aproximación si r_i fura igual r_{i+1} situación que no se da en la elipse.

Sin embargo, este segundo error compensa al cometido anteriormente, de tal suerte que, de acuerdo con las expresiones (5) y (6), se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \, \Delta s = 2A = kt \,,$$

luego, ya que $\boldsymbol{k}$ es una constante, Kepler obtiene la expresión, precisa, siguiente

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{ct} \tag{7}$$

donde, obviamente, $\boldsymbol{c}$ es una constante cuyo valor es $\dfrac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}$.

Esta última expresión nos dice que el área $\boldsymbol{A}$ depende de la constante $\boldsymbol{c}$ y de la variable $\boldsymbol{t}$ (de esta manera si a un determinado tiempo t_0 le corresponde una área A_0 y a un tiempo t_1 una área A_1, entonces, de acuerdo con (7) A_0 será igual a A_1 cuando, y sólo cuando, t_0 sea igual a t_1), por lo que:

Una recta trazada desde el Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Edwards, C. H. (1979) *The Historical Development of the Calculus.* USA. Springer-Verlag.

Katz, V. (1999). *A history of mathematics. An introduction.* USA: Addison-Wesley.

Lehmann, Ch. (1986). *Geometría Analítica.* México, D.F.: Editorial Limusa.

EL EMPLEO DE LA INSTRUCCIÓN HEURÍSTICA EN EL TRATAMIENTO DE LA SUCESIÓN DE INDICACIONES CON CARÁCTER ALGORÍTMICO

Neldi V. Castro Hermidas y Antonio Rosales Marrero.
Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero". Holguín. Cuba.
dpto.matematica@isp.holguin.inf.cu

RESUMEN:

La heurística como disciplina científica es relativamente joven. En el mundo se han realizado múltiples investigaciones sobre el uso de los elementos heurísticos, lo que está indisolublemente ligado con la resolución de problemas. En 1998, Castro, N. elaboró un modelo de actuación didáctica para el trabajo con la instrucción heurística con los estudiantes del ISPH de la carrera Matemática - Computación, el les ha propiciado una mejor preparación en los componentes académico, investigativo y laboral.

En la enseñanza de la Matemática los elementos heurísticos son de gran aplicación y se pueden vincular con todas sus situaciones típicas. Es por ello que este trabajo tiene como objetivo mostrar como se puede emplear la instrucción heurística en la elaboración o socialización de la sucesión de indicaciones con carácter algorítmico dentro de la disciplina Geometría.

INTRODUCCIÓN

En el mundo se han realizado múltiples investigaciones sobre el uso de los procedimientos de solución en Matemática. Existen dos tipos de procedimientos de solución: los heurísticos y los algorítmicos. Aunque tienen en común que se aplican en la solución de ejercicios y problemas de diversos tipos, también tienen diferencias.

Los procedimientos heurísticos fundamentalmente, se han empleado en la resolución de problemas y esencialmente de problemas matemáticos, aunque también se han aplicado en otras ramas del saber humano, su uso sistemático ayuda a encontrar caminos y vías de solución e incluso a formar nuevos algoritmos de solución que hasta un cierto momento son desconocidos para el alumno.

También se trabajan mucho y con más insistencia los procedimientos algorítmicos. Sin embargo, en observaciones a clases se han detectado dificultades en la elaboración o socialización de algorítmicos, pues la tendencia general en clases es darlos directamente sin elaborarlo con los estudiantes o sin socializarlo, lo que trae como consecuencia que no se convierta en estrategia personal de cada alumno, y lleve a que estos actúen de forma mecánica en su empleo.

Por otra parte, cuando los docentes intentan elaborar algún procedimiento algorítmico no planifican las preguntas a utilizar, haciendo esta actividad de forma empírica, por lo que no se logra la adecuada fijación de los procedimientos.

Es por ello que el *objetivo* del trabajo es: mostrar como se puede emplear la instrucción heurística en la elaboración o en la socialización de procedimientos algorítmicos dentro de la disciplina Geometría.

DESARROLLO

Se entiende por instrucción heurística:

[…]*La enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas...* (Ballester, 1992, p.225).

Es necesario que cuando se declaren explícitamente por primera vez las mismas; se destaquen de un modo claro, preciso y que se recalque su importancia en clases posteriores hasta que los alumnos las aprendan y las utilicen independientemente de manera generalizada, por lo que su uso debe ejercitarse en numerosas y variadas tareas.

Se coincide con Algarabel, en su planteamiento sobre el entrenamiento en heurísticos, donde expresa que este puede ser un método instruccional útil para mejorar el rendimiento en la solución de problemas y se debe añadir que en el aprendizaje de los estudiantes en cualquier rama del saber, ya que dicho entrenamiento influye positivamente en el desarrollo de su pensamiento.

La instrucción heurística es parte esencial de la formación de un graduado de la especialidad de Matemática-Computación, pues dentro de la carrera tendrá que emplearla con mucha regularidad para su propia formación y después de graduado tiene la responsabilidad de aplicarla en su trabajo, para facilitar a sus estudiantes la comprensión clara de los contenidos matemáticos que les enseña. En la asignatura Matemática, hay elementos que se pueden aprender fácilmente a través de un algoritmo, como son algunos conocimientos de Álgebra, por ejemplo, la resolución de ecuaciones, el trabajo con variables, etc; sin embargo, como se ha planteado existen dificultades en la elaboración y socialización de estos.

El año 1945 marcó una pauta en la Heurística, cuando el húngaro Polya trabajó esta línea en las matemáticas y escribió su obra, "Cómo plantear y resolver problemas" y como expresara Schoenfeld en una de sus obras, desde entonces se reconocen dos etapas: antes de Polya y después de él, por la importante contribución que hizo a los elementos heurísticos.

Se requiere, por ello, responder la pregunta sobre lo que se asume por el concepto fundamental empleado por Polya, es decir,

¿A qué se llama problema?

Problema es " *toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo*" (Campistrous y Rizo, 1996, p. IX).

En este sentido se destaca que al menos deben cumplirse dos condiciones necesarias para que tal situación constituya problema:

- La *vía p*ara pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida *tiene que ser desconocida;* cuando es conocida deja de ser un problema.
- El individuo quiere hacer la transformación, es decir, quiere resolver el problema.

En 1998, Castro, N. elaboró un modelo de actuación didáctica para el trabajo con la instrucción heurística con los estudiantes de la carrera Matemática - Computación del ISP "José de la Luz y Caballero", el que les ha propiciado una mejor preparación en los componentes académico, investigativo y laboral.

Para llevar a efecto el modelo se inicia hablando en términos generales de procedimientos heurísticos, no obstante en el trabajo se especifica si se trata de una regla heurística (RH), una estrategia heurística (E H) o un principio heurístico (PH).

En síntesis se puede plantear que el modelo consta de tres etapas, en el que se emplean tres estrategias didácticas.

Las tres etapas son: **Introducción, Ampliación y Aplicación.**

Para la ejecución del modelo de actuación didáctica que se propone, se han establecido las estrategias didácticas siguientes: *el empleo de hojas de trabajo, la ficha de contenido y la autointerrogación.*

En la primera etapa se emplean las hojas de trabajo, para introducir los procedimientos heurísticos, luego se sistematiza su uso empleando la ficha de contenido y la autointerrogación. En la etapa de ampliación, se elaboran estrategias colectivas e individuales para la resolución de problemas, empleando la ficha de contenido y la autointerrogación y en la última etapa se precisa de los estudiantes que elaboren problemas para sus alumnos y compañeros de clases y que elaboren las estrategias de solución.

"En la enseñanza de la matemática los alumnos deben realizar actividades mentales muy diversas: *resolver problemas, demostrar teoremas, realizar construcciones geométricas*, etc., lo cual exige de ellos una planificación adecuada del trabajo, dirigida hacia el objetivo que se quiere alcanzar, de modo que se racionalice el esfuerzo mental y práctico y que el tiempo disponible se utilice con efectividad." (Ballester, et all., 1992) Los elementos heurísticos contribuyen con esa racionalización del trabajo mental y práctico debido a que son de gran aplicación y se pueden vincular con todas las situaciones típicas de la enseñanza de la matemática.

ACERCA DE LA SUCESIÓN DE INDICACIONES CON CARÁCTER ALGORÍTMICO

Según Jungk (1981):

"*Toda sucesión de indicaciones con carácter algorítmico consiste en una serie de indicaciones sobre la realización de un cierto sistema de operaciones en un orden determinado. Estas indicaciones tienen carácter algorítmico cuando inducen operaciones unívocas, rigurosamente determinadas y del mismo tipo en aquellos individuos hacia los cuales están dirigidas. En esto se muestra la importante propiedad de los algoritmos de dejarse determinar (determinabilidad). Cualquier indicación es un algoritmo solamente cuando determina completamente, un cierto proceso, una actividad y cuando conduce, siempre, en presencia de determinados datos iniciales del mismo tipo, a los mismos resultados finales.*"

Sin embargo, aclara que las indicaciones generales que se consideran procedimientos heurísticos elementales, aunque son indicaciones, no tienen carácter de algoritmo, pues son indeterminadas.

El concepto proceso algorítmico es diferente del concepto algoritmo, si algoritmo es el sistema de operaciones para la solución de una tarea, entonces el proceso algorítmico es la solución de una tarea según el algoritmo dado.

Se puede señalar que la sucesión de indicaciones con carácter algorítmico (SICA) y cuasialgorítmico, están asociadas con acciones de transformación: magnitudes iniciales se transforman, mediante un sistema de operaciones, en magnitudes finales, y con acciones de identificación.

En la elaboración de sucesiones de indicaciones se deben tener en cuenta los tres objetivos siguientes:

1. En el transcurso de la formación matemática del alumno se le debe hacer cada vez mayor conciencia a este de que el trabajo racional se hace posible en gran medida, en muchos campos de la matemática y en su aplicación, solo mediante la utilización

de procedimientos algorítmicos, por lo que tales procedimientos deben ser elaborados y asimilados en la enseñanza de la matemática.

2. Los alumnos deben asimilar determinadas sucesiones de indicaciones con carácter algorítmico indicadas en el programa, haciéndoles ver en esta ocasión, la gran importancia que ellas tienen en la enseñanza ulterior.
3. Los alumnos deben aprender cómo se procede en la obtención de sucesiones de indicaciones con carácter algorítmico en diferentes dominios matemáticos.

EL PROCESO DE COMUNICACIÓN EN LAS CLASES DE MATEMÁTICAS.

Si de vital importancia resulta que los alumnos se apropien de los diferentes procedimientos, también lo es el que el maestro conduzca adecuadamente el proceso y para ello debe establecerse una adecuada comunicación dentro del mismo.

En la comunicación, uno de los elementos que resulta indispensable para la dirección del aprendizaje es la formulación de preguntas. Cada maestro imprime su sello personal en la clase cuando formula su sistema de preguntas, que dirigido adecuadamente estimula la actividad mental de los alumnos (Majmutov, 1975). Los maestros siempre han desarrollado esta actividad, luego ¿Por qué en el proceso docente no existe una actividad cognoscitiva activa y sistemática de los escolares?

1. Por el desconocimiento que en los maestros existe sobre la naturaleza de las preguntas como forma de expresar el pensamiento.
2. Las preguntas que estimulan el pensamiento de los alumnos se hacen de manera empírica, empleándolas esporádicamente, careciendo de carácter de sistema.

Aspectos sustancialmente importantes de la formulación de preguntas para dirigir el aprendizaje de los estudiantes lo constituyen los siguientes: la significación de la pregunta en la enseñanza, los tipos de preguntas que se emplean, el arte del maestro de hacer preguntas y la habilidad del alumno de formular preguntas.

La dirección de la actividad cognoscitiva mediante preguntas, es un procedimiento flexible, en dependencia del objetivo que el maestro se plantee. Formulando preguntas se puede enseñar al alumno a encontrar las diferencias y similitudes entre los objetos y fenómenos, a seleccionar los rasgos necesarios y suficientes para formular las definiciones, a seleccionar los hechos para las demostraciones, a hallar las regularidades de los fenómenos, a ver un fenómeno en todo su comportamiento y con ello llegar a conclusiones, generalizaciones y establecer procedimientos para *la solución de situaciones que presenten características semejantes.*Todos estos aspectos deben ser conocidos por los docentes en ejercicios y los que están en formación para optimizar el proceso de enseñanza – aprendizaje y de forma consciente y planificada contribuir al desarrollo del pensamiento de sus alumnos.

EJEMPLO DE ELABORACIÓN DE SICA EMPLEANDO PROCEDIMIENTOS HEURÍSTICOS EN GEOMETRÍA.

Se escoge para ejemplificar la construcción de la mediatriz de un segmento, la que constituye una invariante del contenido geométrico.

Para asegurar el nivel de partida se deben recordar los siguientes contenidos: Definiciones de segmento y de mediatriz de un segmento, teorema sobre la desigualdad triangular, axiomas de circunferencia C1 y C2, las figuras planas: el trapezoide simétrico y el cuadrilátero equilátero, teorema sobre el cuadrilátero equilátero (rombo) y los pasos para realizar una construcción geométrica.

Para la elaboración de la sucesión de indicaciones con carácter algorítmico, se propone el siguiente ejercicio:

Dado un segmento, construir su mediatriz.

Se realizarán preguntas que permitan a los estudiantes la elaboración de la SICA, las cuales se relacionan con los diferentes procedimientos heurísticos. Se proponen las siguientes preguntas:

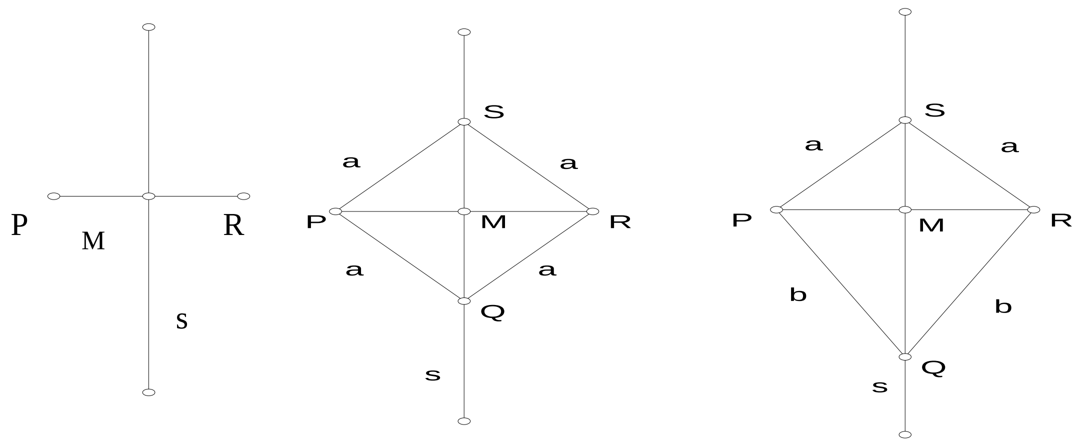
1. ¿Qué es lo dado? ¿Qué es lo buscado?

RH: Separar lo dado y lo buscado.

2. ¿Qué conceptos aparecen en el ejercicio?
3. Sustituye el concepto de mediatriz por su definición. R/ La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

RH: Sustituir el concepto por su definición.

4. ¿Es posible ilustrar lo dado y lo buscado en una figura de análisis? R/ Si



RH: Construcción de figura de análisis RH: Considerar el problema resuelto.
EH: Trabajo hacia atrás.

5. ¿Cómo podemos encontrar una recta perpendicular al segmento $\overline{PR}$, que pase por su punto medio, usando solamente regla y compás?. ¿Qué figuras planas has estudiado que puedan ayudarte a hacer una construcción auxiliar para lograr el objetivo? R/ Se ha estudiado el trapezoide simétrico y el cuadrilátero equilátero (rombo).

¿Cuál es más conveniente, el más óptimo para aplicar en el algoritmo de la construcción? ¿Por qué?
R/ El cuadrilátero equilátero, pues los lados son iguales y con solo una abertura del compás se puede realizar la construcción.

RH: Construcción de líneas auxiliares. RH: Sustituir concepto por su definición.

6. ¿Qué teorema has estudiado sobre el cuadrilátero equilátero?

R/Para todo cuadrilátero equilátero se cumple:

a) los lados opuestos son paralelos
b) las diagonales se bisecan y son perpendiculares entre sí.
c) Las diagonales bisecan los ángulos del cuadrilátero.

RH: Recordar teoremas del dominio matemático
¿Cuál de estas propiedades se puede emplear para la construcción que hay que realizar? R/ La del inciso b)

7. ¿Qué elementos serán el segmento $\overline{PR}$ y su mediatriz del cuadrilátero equilátero? R/ Una diagonal y la recta que contiene a la otra diagonal.
8. ¿Qué propiedad debe cumplirse para que existan Q y S? R/ La desigualdad triangular, es decir 2 a > $l(\overline{PR})$

RH: Recordar teoremas del dominio matemático PH: Movilidad.

9. ¿Cómo proceder entonces para construir la mediatriz del segmento $\overline{PR}$? ¿Qué se debe hacer primero y con posterioridad?

Al responder esta pregunta se va elaborando el algoritmo para la construcción de la mediatriz de un segmento dado.

Sucesión de indicaciones con carácter algorítmico.

1. Se trazan las dos circunferencias de centro P y R del mismo radio *a*, el cual satisface la condición 2 $a > l\overline{PR}$), es decir, $a >$ ½ l ($\overline{PR}$). Sean Q y S los puntos de intersección de estas circunferencias.
2. La recta de unión de Q y S es la mediatriz del segmento $\overline{PR}$, luego lo corta en su punto medio M.

Es importante proponer a los estudiantes que analicen la posibilidad de simplificar la construcción y que ellos arriben a las conclusiones siguientes:

- De las circunferencias se necesitan trazar solamente arcos en los dos semiplanos de borde la recta que contiene al segmento $\overline{PR}$
- De la recta QS se necesita trazar solamente el segmento en el que está contenido M.
- La recta QS es la mediatriz del segmento $\overline{PR}$.

A partir de la elaboración de esta sucesión de indicaciones, los alumnos pueden realizar la sucesión de indicaciones para otras construcciones como: el de la bisectriz de un ángulo, la perpendicular a una recta por un punto interior de esta y la perpendicular a una recta por un punto exterior a esta.

CONCLUSIONES.

Se puede concluir que:

- Para la elaboración de Sucesión de Indicaciones con Carácter Algorítmico es necesario que el maestro planifique un sistema de preguntas apropiado, sin ambigüedades que permita a los estudiantes reflexionar y obtener los pasos de la misma.
- Es de gran importancia que a los estudiantes se lleven modelos de cómo elaborar Sucesión de Indicaciones con Carácter Algorítmico que les permiten formar una base orientadora para realizar otras construcciones y para elaborarlas con sus alumnos en la escuela media, que les permita resolver otros problemas del campo de la matemática, empleando los elementos heurísticos conocidos y empleados por ellos en las diferentes clases.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Algarabel, S. et al. (1996). "Solución de problemas: una revisión del uso de heurísticos y una evaluación de su utilización en Matemáticas" *Revista Española de Pedagogía*. Año LIV, No 203 enero-abril, España. pp.143-165.

Ballester, S. et al. (1992). Metodología *de la Enseñanza de la Matemática.* Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Campistrous, L. & Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba.

Castro, N. (1998). *Propuesta de instrucción heurística mediante la disciplina geometría*. (Tesis de maestría), I. S. P., Holguín.

De Corte E. (2000). "Marrying Theory Building and the Improvement of School Practice: A Permanent Challenge for Instructional Psychology". *Learning and Instruction*. USA.

Farfán, R M. (1995). *Heurística*, Sección de Matemática educativa. CINVESTAV-INP. México.

Jungk, W. (1976). *Conferencias para la Enseñanza de la Matemática*. Segunda parte. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Majmutov, (1975). *La enseñanza problémica*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Monereo, C. (1995). Enseñar a Conciencia. ¿Hacia una didáctica meta cognitiva?, en Revista *AULA de Innovación Educativa* No 34. Barcelona. España, enero. Pág. 74-80.

Polya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas, p.171-186.

Schoenfeld, A. (2000). *Purposes and Methods of Researching in Mathematics Education*. Unversity of California.U.S.A.

Vigotsky, L. (1982). *Pensamiento y Lenguaj*e. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

DISEÑO DEL MATERIAL DE APOYO AL ESTUDIO INDEPENDIENTE EN UN CURSO SEMIPRESENCIAL DE MATEMÁTICA SUPERIOR

Rosa del Carmen González Romero

Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Cuba

rosa.gonzalez@umcc.cu

Manuel Álvarez Blanco

Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (CUJAE), Cuba

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es mostrar algunos aspectos a considerar en el diseño de materiales didácticos basados en la utilización de las Nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones.

Estos materiales soportados en formato electrónico serán utilizados para llevar a cabo la fase no presencial del curso de Matemática I y II para Ingenieros Informáticos en la modalidad semipresencial, que se iniciará en el mes de septiembre del 2002 en el Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" de la ciudad de La Habana, Cuba, con una matrícula aproximada de mas de 600 alumnos, los cuales son maestros de computación en la enseñanza primaria.

ASPECTOS GENERALES

La educación es esencialmente un proceso dinámico, que pretende el perfeccionamiento del individuo como persona, buscando la inserción activa y consciente de éste en el mundo social, proceso permanente e inacabable a lo largo de toda la vida que proporciona los medios y ayudas necesarios para alcanzar las metas del hombre, partiendo de la aceptación consciente y creadora del sujeto. El estado resultante, aunque en constante perfeccionamiento, supone una situación duradera, no definitiva, distinta al estado original natural del hombre (Fernández A. y Sarramona, J., 1999). Es indudable que la sociedad actual impone retos, y facilitar el acceso a la educación reviste primordial importancia en la formación del hombre para la convivencia en una sociedad donde ocurren grandes transformaciones.

Además para enfrentarlos, es necesario una educación permanente, entendiéndose ésta como aquella que abarca desde la educación escolar hasta la educación de adultos, dirigida a todo tipo de persona y que tiene por objetivo el desarrollo integral de ésta (Cirigliano, G., y Lampe, A., 2000; Roquet, G., 2000). Sería prácticamente imposible satisfacer esta necesidad, que siempre estará en aumento, utilizando los procedimientos y medios tradicionales de la educación.

En Cuba para dar frente a la creciente necesidad de personal docente que imparta la computación básica a los alumnos de la enseñanza primaria ha sido creada, entre otras, la Escuela de Maestros Emergentes de Computación y se plantea como tarea urgente garantizar la formación profesional de los egresados de esta escuela mediante la continuidad de estudios universitarios.

Considerando lo anterior, en las universidades cubanas, se establecen las acciones pertinentes para ampliar las ofertas de los programas de educación superior, dirigidos a este sector de la población, y a otros en general, que tienen el deseo de aprender cosas nuevas para tener mejores oportunidades de trabajo, aprender para sentirse realizados como seres humanos y llevar este aprendizaje en tiempo y espacio adecuados a la posibilidad de cada quién, y que no pudieron, por una u otra causa ingresar a la Universidad en los cursos regulares.

Dentro de las carreras que se ofertarán en el mes de septiembre del 2002 en el ISPJAE, en la modalidad semipresencial, se encuentra la Ingeniería Informática, con una matrícula aproximada de más de 600 alumnos, los cuales son maestros de computación en la enseñanza primaria. Una de las disciplinas que componen el plan de estudio de la misma y de todas las carreras de Ciencias Técnicas, es la Matemática; que como ciencia abstracta y generalizadora, ha constituido en todas las sociedades civilizadas un instrumento imprescindible para el perfeccionamiento y la transformación de la realidad que caracteriza a la acción humana, por lo cual la enseñanza de esta ciencia desempeña un papel fundamental. Entre sus objetivos no sólo se plantea el desarrollo: de la independencia cognoscitiva, de la estimulación del pensamiento lógico deductivo y del pensamiento creador, sino que, además, contribuye de manera decisiva al desarrollo multilateral de la personalidad, ya que la peculiaridad de los objetos matemáticos de ser entes abstractos, unidos a la lógica de su estructura y la rigurosidad de su lenguaje hace que su estudio exija hábitos de disciplina, persistencia y trabajo ordenado entre otras cualidades de la personalidad. Estos aspectos tan importantes contribuyen a una formación integral de los futuros profesionales que le permiten enfrentar la velocidad de los cambios en la ciencia y la tecnología.

Así mismo el impetuoso avance de las Nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (NTIC) constituyen uno de los factores que están influyendo de manera decisiva en los cambios de escenarios y paradigmas de cualquier proceso organizacional o actividad profesional, y su impacto ha conducido a la denominada sociedad de la información y el conocimiento que requiere de modelos de enseñanza flexibles, capaces de renovar y transmitir esos conocimientos y técnicas y dar respuestas al aumento de las demandas educativas.

En la Conferencia Mundial sobre Educación Superior, auspiciada por la UNESCO, que se efectuó en París en octubre de 1998, se aprobó la Declaración Mundial sobre Educación Superior en el Siglo XXI: Visión y Acción, donde se expresa que: las NTIC seguirán modificando la forma de elaboración, adquisición y transmisión de conocimientos y estas tecnologías no sólo amplían las posibilidades de acceso a la Educación Superior sino que constituyen un factor de innovación para la institución en cuanto a las formas y métodos que se emplean para desarrollar el aprendizaje y se consideró la necesidad de generalizar, en la medida de lo posible, la utilización de las nuevas tecnologías para reforzar el desarrollo académico, ampliar el acceso, extender el saber y facilitar la educación continua.

En este sentido la aplicación de las NTIC permiten abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática de forma creativa, ingeniosa y motivadora con la utilización de entornos educativos que amplían las posibilidades, entre otras, de la transmisión de conocimientos y la contribución del desarrollo de destrezas y habilidades matemáticas. También es importante resaltar el papel que juegan las NTIC en el aprendizaje por el número de sentidos que pueden estimular, así como propiciar la retención de la información. Estudios realizados revelan que se recuerda el 10% de lo que se ve, el 20% de lo que se oye, el 50% de lo que se ve y oye, y el 80% de lo que se ve, oye y hace (Cabero, J, 1996).

ASPECTOS DEL DISEÑO DEL CURSO SEMIPRESENCIAL DE MATEMÁTICA 1 Y MATEMÁTICA 2

El curso semipresencial de Matemática 1 y Matemática 2 incluye dos fases: la no presencial y la presencial. La fase no presencial está dirigida a la transmisión de la información y al aprendizaje de los conocimientos y la fase presencial dedicada a la retroalimentación individualización y evaluación del conocimiento. Para el desarrollo de ambas los estudiantes contarán fundamentalmente con: un producto multimedia en el cual se incluyen los materiales didácticos elaborados que servirán de guía para su estudio, libros de textos básicos por los cuales se desarrollará el contenido y además de un folleto impreso con la síntesis de las orientaciones que aparecen en el material electrónico. Los profesores y tutores tendrán en sus manos, conjuntamente con lo descrito anteriormente, las orientaciones metodológicas que les servirán de pauta para desarrollar las diferentes actividades que conforman este tipo de curso.

En la concepción metodológica del diseño de ambas fases se debe tener presente la flexibilidad que este tipo de curso requiere en el sentido del tiempo de acceso a la información, el espacio en el cual se desarrolle el proceso de aprendizaje, el contenido, y el ritmo de aprendizaje (Díaz, F. 1998, Noa, L. 2000, García, L., 1995, Palacios, G. 1999, Noa, L., 1999).

Otro aspecto a tener en cuenta es el ofrecer al estudiante las herramientas necesarias para construir su propio conocimiento, tomando en consideración el papel que juega el alumno, pues el aprendizaje está basado en el estudio independiente, apoyado en el uso de las NTIC de forma tal que se convierta en protagonista y gestor del conocimiento. Es también importante considerar el rol que debe desempeñar el profesor o tutor, no como mero transmisor de contenidos, sino como facilitador del aprendizaje, por lo que debe poseer los conocimientos teóricos y técnicos adecuados con respecto a la materia en cuestión y además contar con las habilidades sociales para mantener la cercanía en cuanto los aspectos afectivos que definen a la enseñanza (Ballesteros, M. 2201).

La integración de las NTIC en este tipo de curso semipresencial debe realizarse sobre la base de las concepciones pedagógicas que permitan hacer un buen uso de estos recursos en cuanto a la determinación de objetivos, contenidos y metodología a desarrollar.

ASPECTOS DEL DISEÑO DE LOS MATERIALES DIDÁCTICOS PARA LA FASE NO PRESENCIAL

La fase no presencial es importante para el aprendizaje de los estudiantes y la utilización de las NTIC en ella es una estrategia clave para llevar a cabo la mismo.

En el programa de la Disciplina Matemática para Ingeniería Informática, y en específico los de las asignaturas Matemática I y Matemática II, la estructuración del contenido se distribuyó en 18 semanas para cada una de ellas. El libro de texto básico a utilizar es Cálculo con Geometría Analítica, Segunda edición, de Earlw Swokowski.

Los materiales didácticos, que conforman el producto informático, servirán de guía para el desarrollo del aprendizaje en la fase no presencial. Deben indicarle al alumno qué tiene que aprender, cómo puede aprenderlo y cuándo lo habrá aprendido, su elaboración conduce a lograr la implicación de los estudiantes en el aprendizaje, constituirán para estos una guía real del mismo, y complementarán los textos que estén a su alcance, en los que los conocimientos teóricos que se aborden estén en correspondencia con las exigencias de una enseñanza adecuadamente organizada. Deben propiciar el interés de los estudiantes por el conocimiento y que exista accesibilidad a él, contribuyendo al carácter desarrollador de la enseñanza a partir de tareas que promuevan funciones psíquicas superiores, en particular aquellas que conlleven a la formación de un alto grado de generalización (Tarifa, L. y González, R., 2000), y además favorecer la investigación en determinados aspectos de las asignaturas.

Es importante considerar en ellos aspectos tan esenciales como: el aspecto instructivo, relacionado con la formación de hábitos, habilidades y capacidades; el aspecto educativo, relacionado fundamentalmente con la formación de valores y el aspecto desarrollador en el sentido que los conocimientos, hábitos, habilidades y capacidades formados, se desarrollen con el objetivo de que el estudiante pueda enfrentarse a diferentes situaciones y darle solución.

Estos materiales se han diseñado como presentaciones en Power Point con voz y movimiento en el caso que lo requieran, en las cuales se le orientan los contenidos a estudiar en cada semana del curso, considerando los aspectos fundamentales de cada tema. Para su confección fue necesario analizar los programas de la Disciplina Matemática y de las asignaturas Matemática 1 y Matemática 2, los objetivos del profesional, los objetivos de la carrera para los dos primeros años, el libro de texto y contestar las tres preguntas siguientes: ¿qué contenidos le es difícil?, ¿qué falta en el texto?, ¿qué necesita voz y movimiento?.

Las respuestas a esta última pregunta tienen un carácter particular en el diseño de estas presentaciones. La utilización de la multimedia da la posibilidad de unir la imagen animada con el sonido, proporcionando al estudiante de este tipo de curso, una mejor comprensión del lenguaje matemático, problemas y ejercicios. Con la incorporación del movimiento y el audio, a partir de las características particulares y especificidad de la Matemática se contribuye a que la información brindada sea más viable para su comprensión desde el punto de vista matemático considerando que en esta fase no está presente el profesor o tutor.

Se contemplan en ellas ejercicios resueltos detalladamente y las orientaciones para los ejercicios propuestos a realizar, que se correspondan a los contenidos abordados en cada semana y que tienen como objetivo fundamental contribuir al desarrollo de las habilidades generales matemáticas (Hernández, H. 1993). En este material se incluyen las indicaciones para la utilización del software escogido DERIVE versión 5.2 así como los ejercicios en los cuales se desarrollen habilidades con este.

Un aspecto que contribuye a la retroalimentación de los contenidos estudiados y que necesariamente debe formar parte del material es el autoexamen, como una vía para que el estudiante se autoevalúe.

Constituyen parte de estos materiales las guías para el alumno y el profesor que contienen aspectos de carácter metodológicos para llevar a cabo un eficaz desarrollo del curso, así como el programa de la disciplina y de las asignaturas, puntualizándose los objetivos generales del profesional y de los dos primeros años de la carrera, los antecedentes y fundamentación de esta.

A continuación se ilustra algunas de las pantallas de este producto multimedia, en este caso un sitio web de la Disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería Informática para este tipo de curso semipresencial

CONCLUSIONES

Es necesario que en este tipo de curso los aspectos a considerar en el diseño de los materiales promuevan los procesos de aprendizaje, garanticen una secuencia que responda al ritmo de aprendizaje de acuerdo a las posibilidades, necesidades y capacidad intelectual del estudiante, incentiven la formación de habilidades para el estudio y trabajo independiente así como la estimulación de la creatividad, iniciativa, decisión y responsabilidad en el estudiante.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ballesteros, M., (2001). Redefiniendo a los participantes en los procesos de enseñanza-aprendizaje, nuevos perfiles. Ponencia CIVE-2001 En URL: http://www.civereduca.com

Cabero, J. (1996). Nuevas tecnologías, comunicación y educación. EDTEC. *Revista electrónica de tecnología educativa*, No.1 febrero

Centro de Estudios Académicos, S, A. (2000). *Ventajas de la Enseñanza a Distancia*. Madrid. En: http://www.cen.edu/presenta.html

Cirigliano, G. Y Lampe, A. (2000).Significación y alcance de las modalidades de educación a distancia para la educación de adultos. En: http://www.rds2000.crefal.mx/ cvelez/rpol/tv.htm#1

Díaz, F. (1998). *Cursos a Distancia Windows 95 y su aplicación Word*. Tesis para optar por el título de Máster en Informática de Salud. Ciudad de La Habana, Cuba.

Fernández A. y Sarramona, J. (1999). *Concepto de educación*. Ediciones CEAC. Barcelona, España.

García, L., (1995). *La UNED y los rasgos característicos de la educación a distancia*, España. En: http://www.iued.uned.es/iued/biblioteca/artic4.htm

Hernández, H. (1993). *Sistema básico de habilidades matemáticas en Didáctica de la Matemática. Artículo para el debate*. EPN, Quito Ecuador

Noa, L. (2000). Guía de Estudio del Curso Tecnología en Educación a Distancia. Facultad de Educación a Distancia, Universidad de La Habana, Cuba.

Noa, L., (1999). *Multimedia y Educación a Distancia*. Tesis para la obtención del grado científico de Doctor en Ciencias de la Educación Superior, Facultad de Educación a Distancia, Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Palacios, G(1999). *Implicaciones de las Nuevas tecnologías de la información y la comunicación en la educación*, ITESM Campus Monterrey.
En: http://www.mty.itesm.mx/dcic/hipertextos/02/indice.htm

Tarifa, L. y González, R., (2000). *Materiales didácticos: Instrucciones para su confección*, Publicación Científica del Área de estudios sobre Educación Superior. Universidad de Matanzas, Cuba

SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA: RE-CREANDO EL ARCO CAPAZ

Cristina Ochoviet Yacir Testa Mónica Olave Mario Dalcín
Administración Nacional de Educación Pública-Consejo de Educación Secundaria-Uruguay
princesa@adinet.com.uy milefede@adinet.com.uy almamat@adinet.com.uy

RESUMEN

Se reporta una investigación realizada con alumnos de 15- 16 años sobre los algoritmos de construcción de un Arco Capaz de segmento y ángulo dado.

Es tradicional en la enseñanza que para construir dicho arco se imponga una construcción que tiene sus raíces históricas en los *Elementos* de Euclides. Se ha observado que esta construcción no resulta significativa para los alumnos, pues estos la aprenden mecánicamente para posteriormente olvidarla.

Proponemos transformar a la clase en un "laboratorio de geometría", dándole a los alumnos un espacio para crear sus propios algoritmos de construcción.

INTRODUCCIÓN

En la práctica tradicional se ha detectado que, a través de generaciones, la construcción de un Arco Capaz de segmento y ángulo dado, se realiza a través de un algoritmo geométrico que el docente transmite a sus alumnos buscando un entendimiento instrumental más que relacional. Como consecuencia de esta acción el algoritmo tradicional, es reproducido por los alumnos en forma mecánica, sin que exista un cuestionamiento profundo sobre las razones, ventajas, desventajas y alcances de su aplicación. Como todo conjunto de reglas que es aprendido sin la participación activa del sujeto que aprende, el algoritmo pasa a ser olvidado rápidamente y nos cuestionamos si en estas condiciones tiene sentido la enseñanza que tradicionalmente se viene impartiendo. Lo que se ha detectado en la práctica es lo que Skemp (1976) ha descrito como "reglas sin razones", llegando tanto los profesores como los alumnos a reproducir una práctica sistemática de construcción que no alberga un entendimiento relacional.

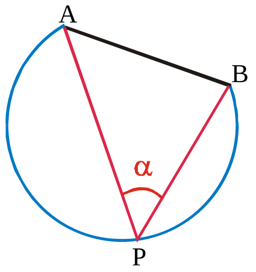
Nuestra propuesta apunta a brindar un espacio de reflexión donde el alumno ponga en juego sus conocimientos y habilidades para generar sus propias construcciones de un Arco Capaz.

Nuestro objetivo es generar en el alumno un entendimiento relacional, para que éste no sólo sepa como funciona el método sino también por qué, habilitándolo a relacionar el método con el problema a resolver y posiblemente a adaptar el método a nuevos problemas.

Proponemos una reorganización de este tópico de la geometría métrica, para que el aprendizaje resulte significativo para los alumnos, planificando las situaciones adecuadas para que los estudiantes desarrollen habilidades intelectuales y estratégicas, y pongan en juego sus redes de conocimientos de forma que les permitan conducirse eficazmente en las situaciones que enfrenten.

ANTECEDENTES

Entendemos por Arco Capaz de segmento AB y ángulo α, el lugar geométrico de los puntos de un semiplano de borde AB desde los cuales se ve el segmento AB bajo el ángulo α.



Desde P se ve el segmento AB bajo el ángulo α, esto significa que $\angle APB = \alpha$.

En 4º año de Liceo en Uruguay (nivel 15-16 años) figura en el currículo el estudio del Arco Capaz y se tocan temas como: ángulo al centro y ángulo inscrito en una circunferencia, demostración de la relación entre sus medidas, definición de Arco Capaz como Lugar Geométrico, resolución de problemas de aplicación.

En 5º año (nivel 16 – 17 años) en el curso de Geometría Métrica se aborda la misma temática en forma más rigurosa, demostrando en la mayoría de los casos, todos los teoremas involucrados.

Es habitual en la práctica docente que el profesor exponga el algoritmo de construcción del arco capaz que aparece en la proposición Nº 33 del libro III de los *Elementos* de Euclides y que permanece prácticamente sin cambiar hasta nuestros días.

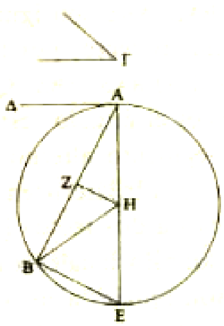
PROPOSICIÓN 33

Sobre una recta dada, describir un segmento de círculo que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Sea AB la recta dada, y el ángulo rectilíneo dado el correspondiente a Γ.

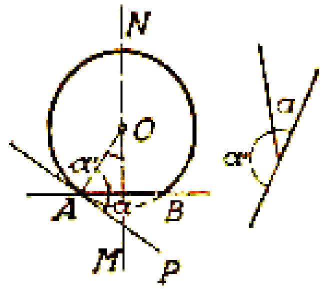
Así pues, hay que describir sobre la recta dada AB un segmento de círculo que admita un ángulo igual al correspondiente a Γ.

El ángulo correspondiente a Γ es entonces o agudo, o recto u obtuso; sea en primer lugar agudo, y como en la primera figura, constrúyase en (la recta) AB y en su punto A el (ángulo) BAΔ igual al ángulo correspondiente a Γ; entonces el (ángulo) BAΔ es también agudo. Trácese AE formando ángulos rectos con ΔA, y divídase en dos partes iguales AB en el (punto) Z, y trácese a partir del punto Z, ZH formando ángulos rectos con AB, y trácese HB.



A modo de ejemplo veamos la forma de construcción que aparece en dos libros de texto de uso generalizado en nuestro país.

4. **Construcción del arco capaz.**—Para hallar el centro del arco capaz de un ángulo dado α sobre un segmento AB, bastará hallar en la mediatriz MN de AB un punto O tal que el ángulo AOM sea igual a α. Para ello construiremos en el semiplano opuesto un ángulo $BAP=\alpha$ y trazaremos por A la perpendicular AO al lado AP. Esta recta y la mediatriz se cortan (por cortarse sus perpendiculares) en el centro buscado. En efecto, $AOM=BAP=\alpha$ (por la perpendicularidad de los lados).



Obsérvese que la construcción del arco capaz del ángulo *suplementario* α' en el semiplano opuesto *da el mismo centro*, y que ambos arcos completan una circunferencia.

Extraído de "Curso de Geometría Métrica Tomo I". Puig Adam. 13ª Edición, Madrid 1977. 1ª Edición año 1947.

Construcción de arco capaz

Dados el segmento AB y el ángulo de medida α, te guiaré como construir el arco capaz para ese segmento y esa medida del ángulo.

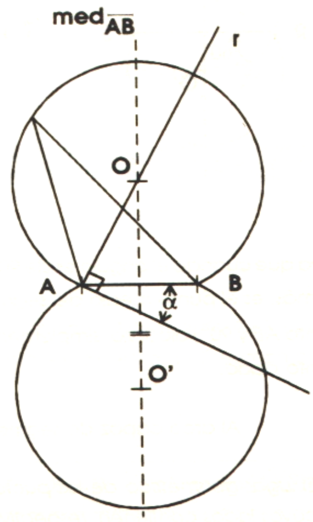
Alcanza con determinar centro y radio de las circunferencias que contienen al arco capaz.

Construye el segmento AB y en uno de los semiplanos de borde AB, construye además un ángulo de medida α, tal que un lado, coincida con la semirrecta AB.

Traza por A, la recta p, perpendicular al lado del ángulo no contenido en la semirrecta AB.

Construye la mediatriz del segmento AB y determina el punto, O, intersección de esta mediatriz con la recta p. Dicho punto, es el centro de una de las circunferencias buscadas, ¿sabes cuál es el radio?. Es $d\ (O,A)$.

El centro de la otra circunferencia, lo determinas simetrizando O respecto de la recta AB.



Extraído de "Mikrakys, Matemática cuarto año." Gallo, Haniotis, Muñiz, Silvera. Editorial Fin de Siglo. Montevideo, 1994.

Este algoritmo es impuesto a los alumnos, el cual es reproducido en forma sistemática sin que medie una reflexión sobre su uso y construcción. Esta imposición lleva a que el alumno crea que es el único algoritmo posible para construir el Arco Capaz.

De lo anterior se desprende que en 50 años, en nuestro país, no ha cambiado el discurso matemático escolar, no se ha tenido en cuenta el pensamiento matemático del alumno ni la influencia de los diferentes medios socioculturales donde el individuo crece y se desarrolla.

METODOLOGÍA

Proponemos darle la posibilidad al alumno de que él cree su propio algoritmo de construcción generando así argumentos que le permitan lograr un aprendizaje más significativo. Con este objetivo se propuso a un grupo de 22 alumnos de nivel 15- 16 años una secuencia didáctica con el fin de constatar si surgían construcciones alternativas del Arco Capaz (ver ANEXO).

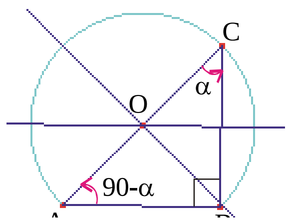
En los grupos se realizó una revisión de los conceptos previos que nosotros consideramos como necesarios para poder realizar dicha construcción. Estos son: definición de circunferencia, mediatriz, circuncentro, ángulo al centro y ángulo inscrito en una circunferencia, relación entre ellos, circunferencia circunscrita a un triángulo.

La secuencia se propuso a los alumnos en forma individual, luego confrontaron sus resultados en equipos de a tres, elaborando un informe y por último se realizó una puesta en común, comentando los resultados obtenidos.

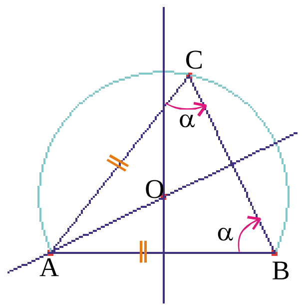
RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación aparecen algunas construcciones que crearon los estudiantes para construir el Arco Capaz de segmento AB y ángulo α dados

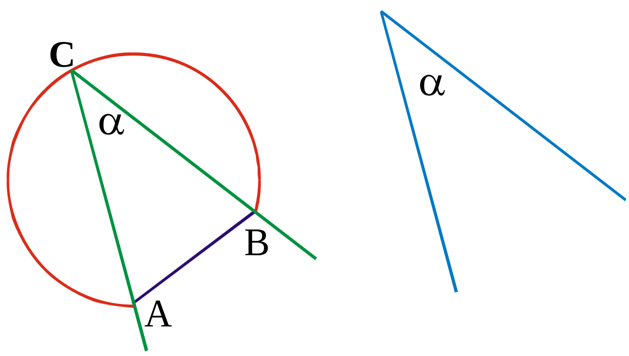
1) En este caso se construyó un triángulo ABC de lado AB conocido y ángulos adyacentes de 90º y (90º-α). De esta manera el ángulo en C mide α. Se determinó el circuncentro de dicho triángulo, que es el centro del Arco Capaz buscado.
Observemos que el alumno está utilizando la propiedad de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.



2) En este otro caso se construyó un triángulo isósceles ABC con los lados AB y AC de igual medida y el ángulo en B de medida α. De esta manera se asegura que el ángulo en C también mida α. Luego se determinó el circuncentro de ese triángulo, que es el centro del Arco Capaz buscado.
En este caso el alumno está usando la idea de que un triángulo isósceles posee dos ángulos de igual amplitud.



3) Si el ángulo de la derecha es el ángulo de medida α dado, por A y B, respectivamente, se trazan paralelas a los lados del ángulo α dado. Se determina luego el circuncentro del triángulo ABC y se traza el Arco Capaz buscado.



CONCLUSIONES

En primer lugar señalaremos que en ningún caso los alumnos crearon espontáneamente la construcción de Arco Capaz tradicional ya expuesta.

En general, los alumnos crearon algoritmos de construcción utilizando fundamentalmente la noción de circuncentro de un triángulo.

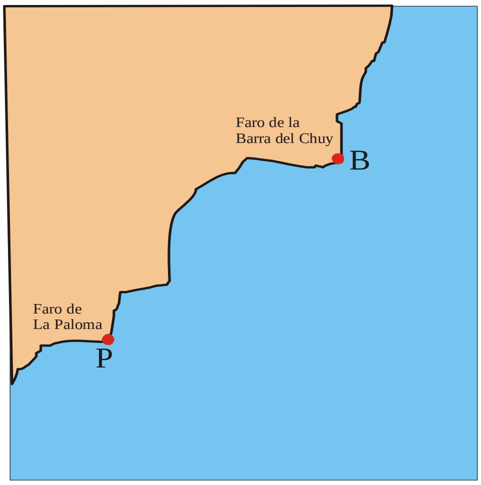
Los estudiantes lograron darle significado al algoritmo que crearon, dando argumentos que les permitieron lograr un entendimiento de carácter relacional en el sentido de Skemp (1976).

Creemos que resultó altamente positivo haber generado un ámbito de reflexión para que los alumnos pusieran en marcha sus propias ideas, logrando así un aprendizaje rico en significados que pudieron posteriormente aplicar y adaptar a diferentes situaciones problemáticas.

ANEXO

Actividad 1

1) Un radioaficionado capta cierta información enviada desde un barco en situación de emergencia. Debido a la gran interferencia en la comunicación, generada por una tormenta eléctrica, solo alcanza a recibir el siguiente dato: las visuales desde el barco dirigidas al faro de La Paloma (P) y al faro de la Barra del Chuy (B) forman un ángulo de 50º. Utilizando el mapa que se te proporciona marca la posible ubicación del barco. ¿Es única?



2) Explica el procedimiento que realizaste.
3) Discute con tus compañeros de equipo los resultados que obtuviste.
4) Elabora una conclusión con tu equipo de la solución del ejercicio.
5) Puesta en común.

Actividad 2

1) Escribe las instrucciones necesarias para construir el arco que encontraste en la *Actividad 1*, usando regla, compás y semicírculo.
2) ¿Qué datos iniciales necesitas para poder construir el arco?

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Euclides. (1991). Elementos. Madrid, España: Editorial Gredos S.A.

Gallo, Haniotis, Muñiz, Silvera (1994). *Mikrakys, Matemática cuarto año.* Montevideo, Uruguay: Editorial Fin de Siglo.

Hernández Rojas, G. (1998). El paradigma cognitivo. En *Paradigmas en psicología de la educación*. Cap. 6 pp.117-167. México: Paidós Educador.

Puig Adam, P. (1977). *Curso de geometría métrica. Tomo 1*. Madrid, España: Biblioteca Matemática.

Skemp, R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding.* Mathematics teaching 26(3), 9-15.

INVESTIGACION EN APRENDIZAJE DE LA CIENCIA, LA MATEMATICA Y LA TECNOLOGIA: FUNDAMENTO PARA EL DESARROLLO

Fernando Cajas
División de Ciencias de la Ingeniería, Centro Universitario de Occidente
Universidad de San Carlos de Guatemala
fercajas@hotmail.com

RESUMEN:

Esta presentación describe algunos aspectos que deben considerarse al diseñar planes encaminados a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia, la matemática y la tecnología de una población. La pregunta fundamental que intento atacar es: ¿cual es la relación entre contenidos científicos, matemáticos y tecnológicos que deben ser generados para educación general y su aprendizaje?

Se discute el papel de la investigación en didáctica de la ciencia y la tecnología así como en Matemática Educativa que puede iluminar la formación de planes de esta naturaleza. Se sugiere la construcción de planes pilotos que sirvan para recolectar información acerca de las condiciones en las cuales los estudiantes aprenden ideas importantes de ciencia, matemática y tecnología. Se utilizan datos empíricos provenientes de proyectos pilotos de Latinoamérica (Cajas, 1999b).

INTRODUCCION

Aunque vivimos en una sociedad dominada por la ciencia, particularmente dominada por los productos tecnológicos de la ciencia, los ciudadanos de las sociedades autodenomindas desarrolladas y llamadas en vías de desarrollo en general carecen de un conocimiento científico, matemático y tecnológico relevante para sus vidas como individuos, trabajadores y ciudadanos (Wynne, 1995; Cajas. 1999a). En ambos tipos de países, la población general aun no tiene acceso a un conocimiento científico, matemático y tecnológico que pueda hacer sus vidas más plenas, sus actividades más productivas y su participación política más efectiva. La ciencia aun guarda su carácter elitista que ha caracterizado su historia. De allí que la planificación de programas que puedan incrementar el nivel de alfabetización científica, matemática y tecnológica sea de primera importancia para todo tipo de país, particularmente los países latinoamericanos.

Durante las últimas tres décadas se ha dado un cambio fundamental en la manera de plantear los problemas de la enseñanza y principalmente el aprendizaje en ciencia y matemática. Por muchos siglos las decisiones acerca de la enseñanza de estas materias ha bian estado dominadas por ideologías y creencias sin ningún sustento cientifico-teorico ni evidencia empírica. La historia es similar a lo que sucedió siglos atrás en física. Por milenios filósofos y teólogos especularon acerca de la naturaleza del movimiento de los objetos. Por ejemplo, Zenon, el filósofo griego de Elea, creo paradojas mentales, sin ningún sustento empírico, para ilustrar contradicciones acerca del movimiento. El cambio fundamental se dio cuando las explicaciones acerca del movimiento de los cuerpos fueron contrastadas empíricamente. Galileo rompió drásticamente con la ideología dominante y sugirió que el problema de explicar el movimiento de los cuerpos debería explicarse teóricamente y contrastarse empíricamente. La contribución fundamental de Galileo fue su posición de que hipótesis, esto es explicaciones acerca del funcionamiento de cualquier sistema y/o sus componentes, deben constatarse, aceptarse o refutarse basados en evidencia empírica (Arons, 1997). De una manera similar Jean Piaget basó sus investigaciones en explicaciones teóricas sustentadas con evidencia empírica que soporta o refuta sus explicaciones acerca del aprendizaje de conceptos científicos y/o matemáticos. Con esto Piaget y sus seguidores contemporáneos revolucionaron la manera de afrontar los problemas de aprendizaje.

Es en este devenir social que al iniciar el Siglo XXI existe una tendencia a alejarse de un paradigma[1] educativo *tradicional* donde enseñar es “hablar” y aprender es “repetir”. En el caso de educación científica por mucho tiempo se sostuvo que enseñar ciencia era dar clases magistrales y aprender era memorizar los hechos importantes que el profesor decía. El caso de matemática es similar con el agravante de que se pensó que la estructura lógica de la matemática debería dominar el contenido y la instrucción matemática, particularmente a los niveles de bachillerato y principalmente universitarios. En los niveles de pre-primaria la situación es mucho más dramática pues los contenidos de ciencia y matemática no han sido siquiera pensados ya que se cree, erróneamente, que las niñas y niños a estas edades solo deben de “jugar” y que no están preparados para aprender conceptos y procesos científicos “complicados”. “Jugar” ha sido mal interpretado y no se diseñan ambientes donde los infantes puedan construir, jugando, elementos básicos para su educación cientifica y matemática. Sin embargo, los trabajos de Piaget y de muchos científicos cognitivos contemporáneos han proveído evidencia empírica que soportan que en determinadas condiciones los niños y niñas pueden apropiarse de ideas y procesos científicos poderosos. A la vez la psicología cognitiva ha demostrado que para aprender ciencia y matemática los niños y niñas tienen que tener oportunidades de reconstruir conocimientos y procesos claves desde edades muy tempranas (NRC, 2000).

Paralelamente a los trabajos de científicos cognitivos, esto es, durante la década de 1970-1980, una serie de investigaciones empíricas desarrolladas alrededor del mundo por la emergente didáctica de la ciencia y la matemática (llamada science and mathematics educación en los países sajones y didáctica de la ciencia y matemática educativa en Latinoamérica) revelaron que los estudiantes no aprenden la ciencia ni la matemática que se les enseña (Driver, et al, 1987). Estas investigaciones cubrieron una gama de conceptos científicos (por ejemplo, fuerzas, energía, fotosíntesis, células, etc.) asociados a fenómenos naturales (esto es, movimiento de objetos, el clima Terrestre, producción de alimento, crecimiento de las plantas, etc.) y conceptos matemáticos (por ejemplo, fracciones, proporciones, funciones, álgebra, cálculo, etc.). Estos estudios sientan las bases teóricas y empíricas para repensar la manera en que generamos conocimiento científico, matemático y tecnológico para la educación general así como para planificar como producir recursos que pudieran soportar el aprendizaje de estos contenidos (ver un resumen de dicha investigación en AAAS, 1998, capitulo 15).

CONTENIDOS: El PRINCIPIO DE UN PLAN COHERENTE

Esta presentación describe algunos aspectos que deben considerarse al diseñar planes encaminados a mejorar el aprendizaje de la ciencia, la matemática y la tecnología de una población. La pregunta fundamental que intento atacar es: ¿cual es la relación entre contenidos científicos, matemáticos y tecnológicos que deben ser generados para educación general y su aprendizaje? Esto es, intento proponer un esquema que describa y que pueda usarse para mejorar ostensiblemente la educación científica, matemática y tecnológica no solo de unos cuantos individuos escogidos por el sistema para realizar estudios cientifico-tenologicos sino mejorar el nivel de educación científica y tecnológica para la gran mayoría de una población. Parto de la hipótesis de que lo más importante para planificar un programa coherente de mejoramiento del aprendizaje de la ciencia, la matemática y la tecnología es precisamente

[1] Aquí la palabra “paradigma” significa una manera mas o menos estable de ver y hacer cosas. Un paradigma incluye una visión del mundo así como estrategias particulares para afrontar problemas dentro de una disciplina.

aclarar que es lo que queremos de dicha educación. Para ello lo primero que se requiere es generar un sistema (más que un agregado o un conjunto) de contenidos, esto es un sistema de conceptos y procesos coherentes y relevantes que permitan la formación de la persona humana que al final de la educación general.

LA INCOHERENCIA ES LA NORMA ACTUAL

La generación de contenidos es una actividad fundamental de cualquier plan para mejorar el aprendizaje de la ciencia, la matemática y la tecnología. Usualmente esto ha sido mal interpretado como la generación de listas de tópicos y objetivos instruccionales comunmente incoherentes, esto es, contenidos que no están relacionados los unos con los otros y que son irrelevantes para la educación general. Y aquí no importa si quienes generan esas listas son científicos, matemáticos o científicos individuales o si se copian del índice de los libros de texto o aun si son generadas por docentes en servicio. Casi siempre los contenidos son incoherentes e irrelevantes.

Los contenidos son incoherentes porque no se han pensado globalmente y porque tampoco han sido pensados en términos de como construirlos desde la pre primaria hasta la educación secundaria y menos la universitaria. Aun en matemática, donde se supone que la estructura lógica de dicha disciplina es capaz de proveer coherencia local y global, nos encontramos ante contenidos que difícilmente se conectan unos con otros. Así, el primero año básico se introduce a los estudiantes a las nociones de lógica y teoría de conjuntos. Luego se les mueve al álgebra donde se les enseñan varios, varios, casos de factorizacion. Luego se les enseña un poco de trigonometría y en algunos casos geometría. Pero este fiambre de contenidos no se relaciona el uno con el otro. Aunque es posible generar cierta coherencia que explique el papel de logica y teoría de conjuntos en la construcción de contenidos matemáticos escolares, la situación actual no incluye dicha visión. Así, se ha introducido la teoría de conjuntos pero no se le ha utilizado para construir el contenido matemático escolar. La visión algebraica nunca se conecta con lógica sino mas bien se basa en la enseñanza memoristica de una serie de casos de factorizacion irrelevantes para los estudiantes y aun para los docentes quienes se ven en el dilema de enseñar una matemática incoherente y descontextualizada.

La matemática escolar latinoamericana no esta sola. La física, la química y la biología escolar son agregados de algunos conocimientos físicos, químicos y biológicos usualmente irrelevantes que forzan a los estudiantes a memorizar piezas de contenidos muertos que tienen sus origines en una conceptualizacion de las ciencias naturales totalmente desvinculada con la realidad. La física impone una estructura más histórica que didáctica donde los estudiantes memorizan definiciones de cinemática y dinámica sin tener acceso a ideas claves que puedan explicar una serie de fenómenos.

CONSTRUYENDO CONTENIDOS RELEVANTES Y COHERENTES

En cada área de acción humana, disciplina o profesión, incluyendo en ciencia, matemática y tecnología, siempre hay más material que nos gustaría que los estudiantes aprendieran de lo que hay tiempo para que éstos lo aprendan. Por lo tanto, es necesario tener sumo cuidado al identificar un grupo de contenidos básicos de aprendizaje que se apoyen mutuamente. Dicha selección y construcción de conocimiento nuevo escolar depende de los objetivos que tiene la educación. En el contexto de la educación científica, el criterio más importante debería ser la democratización de la ciencia, la matemática y la tecnología. En el caso particular de los cursos de ciencias y matemática estos no deberían ser filtros para la producción de elites académicas sino oportunidades para que los alumnos de todos los estratos sociales se apropien de conocimientos científicos y matemáticos poderosos que les permitan tener una vida más interesante, productiva y participativa. Estos tres objetivos de la educación científica y matemática están relacionados con objetivos de la educación general, a saber: su naturaleza cultural (una vida más interesante), su función económica (una vida más productiva) y su objetivo político (una vida con más participación ciudadana).

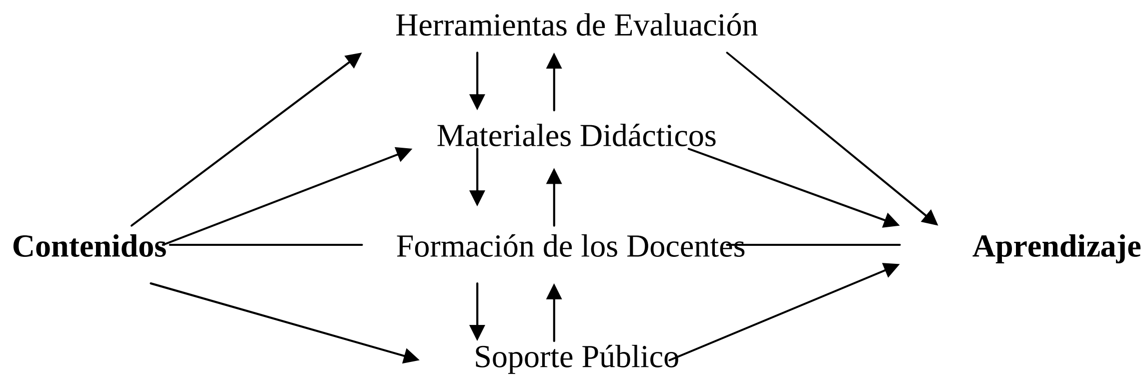
CONCEPTUALIZANDO UN PLAN COHERENTE

Para mejorar sustancialmente la educación científico, matemática y tecnológica de todos los miembros de una sociedad, hombres y mujeres, se requerirá desarrollar programas pilotos con docentes y personas especializadas en la enseñanza y particularmente el aprendizaje de la ciencia, matemática y tecnología (Cajas, 2000, 2001 para el caso de tecnología). Estas personas tienen que invertir parte de su tiempo en generar planes de mejoramiento educativo. En el mejor de los casos dichas personas ya existen. Pero lo más probable es que hay que formar a estas personas. No es posible seguir improvisando y dejando en manos de escritores de libros de texto sin formacion cientifica ni didáctica, docentes sin preparación especializada o políticos cuyo interés no es la educación cientifica de todos los guatemaltecos, las decisiones acerca del contenido científico, matemático y tecnológico que nos pueda sacar del subdesarrollo.

A la vez de que se forman cuadros que puedan dirigir un movimiento de creación de contenidos coherentes, se requiere la creación de las herramientas conceptuales y las condiciones sociales que puedan soportar un proceso de largo alcance que pueda mejorar el aprendizaje de la ciencia, matemática y tecnología. Ya la generación de una serie de contenidos coherentes y relevantes es de por si un primer elemento de un plan eficiente. Luego podrá trabajarse a nivel de proyectos piloto para explorar cual es el tipo de formación profesional que requieren los docentes en servicio. Esto llama por el desarrollo de herramientas efectivas de evaluacion de aprendizaje de *esos* contenidos lo cual no es inmediato. La premisa fundamental de un movimiento educativo como este es que cambia el significado de qué significa aprender. Esta nueva visión de aprendizaje como la conceptualizacion y aplicación de conceptos científicos y matemáticos poderosos requiere técnicas de evaluación mucho más sofisticadas que la evaluación de procesos memorísticos de hechos científicos o algoritmos matemáticos.

Si los programas piloto, guiados por contenidos coherentes, empiezan a dar información acerca de las condiciones en las cuales los docentes guatemaltecos pueden aprender los conceptos y procesos científicos, matemáticos y tecnológicos que han sido identificados y que guían todo este plan, entonces será posible empezar a crear materiales curriculares que efectivamente puedan ayudar a los docentes y estudiantes a enseñar y aprender *dichos contenidos*. Esto tampoco es inmediato, durante los proyectos piloto será preciso estudiar la naturaleza de los materiales curriculares y cómo estos van a poder darle soporte a los docentes. Los materiales curriculares son más que proveedores de contenidos científico, matemático o tecnológico. Estos deben soportar a los docentes y a los estudiantes a construir ideas fundamentales de la ciencia, matemática y la tecnología (Roseman, et al, 2000). Se debe conocer las condiciones en las cuales las actividades didácticas en dichos materiales son reproducibles (Lezama & Farfán, 2001).

Todo el proceso anterior, desde la creación de los contenidos hasta la exploración de la naturaleza del desarrollo profesional docente que se requerirá, las herramientas de evaluación y los recursos didácticos, pueden desarrollarse en el ámbito de proyectos pequeños que provean datos empíricos concretos sobre las condiciones en las cuales los docentes guatemaltecos aprenden a enseñar conocimientos científicos, matemáticos y tecnológicos específicos. El proceso va a requerir desde sus inicios de un soporte público (padres de familia, universidad, escuelas, prensa, comercio, industria, etc.) a que apoyen un movimiento para salir del subdesarrollo académico en ciencia, matemática y tecnología. Abajo una representación gráfica de este proceso.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AAAS. (1998). *Avances en el Conocimiento Científico*. México. Harla. http://www.project2061.org/español

AAAS. (1997). *Ciencia Conocimiento para Todos*. México: Harla. http://www.project2061.org/español

Black, P.& Atkin, M. [Editos]. (1996). *Changing the subjet: Innovation in science, mathematics and technology education*. Routledge: London

Cajas, F. (2001). The Science/Technology Interaction: Implications for Science Literacy. *Journal of Research in Science Teaching*, 38 (7), 715-729.

Cajas, F.(2000). Technology Education Research: Potential Directions. *Journal of Technology Education*, 12(1), 75-85
(disponible en http://scholar.lib.vt.edu/ejournals/JTE/v12n1/pdf/cajas.pdf)

Cajas, F. (1999). The Public Understanding of Science: Using technology to enhance school science in everyday life. *International Journal of Science Education*, 21(7), 765-773.

Cajas, F. (1999b). Science Literacy: Project 2061/AAAS Experiences in Panama. *TecKnowLogia*, 2(3), 30-33. http://www.techknowlogia.org

Driver, R., Guesne, E., & Tiberghien, A. (Eds.). (1985). *Children's ideas in science.* Milton Keynes, UK: Open University Press.

National Research Council. (2000). *How People Learn*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Lezama, J., Farfán. R.M. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 4, No.4, 161-193.

Roseman, J.E. Kosidou, S. , Stern L.& Cadwell, A. (1999). *Heavy books light on learning*. Science Books & Films. Vol. 35, No. 6,243-247.

Wynne, B. (1995). Public understanding of science. In S. Jasanoff, G. Markle, J. Petersen and T. Pinch (Eds), *Handbook of Science and Technology Studies* (pp. 61-388). California: Sage.

CENTROS DE INTERÉS EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA A LA LUZ DE LOS NUEVOS ENFOQUES TEÓRICOS – EPISTEMOLÓGICOS

Nelly A. León Gómez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Venezuela
nellyleong@hotmail.com - Omarmoralesll@cantv.net

RESUMEN:

En el campo de la investigación en Educación Matemática los cambios que en la enseñanza en general se han venido produciendo en los últimos tiempos, se manifiestan al asumir nuevos esquemas investigativos sustentados en una visión fenomenológica (Martínez 1997, 1999) del hecho educativo que comporta a su vez, nuevas formas de abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática bajo una concepción más comprensiva e integradora, donde hay más cabida para la pregunta, para el cuestionamiento, que para las certezas o la certidumbre.

En esta comunicación revisamos las propuestas de Kilpatrick y Sierspinka (1996) y de González (2000), para la conformación de una Agenda de Investigación en Educación Matemática, orientándolas a la luz de las nuevas consideraciones teóricas – metodológicas que emergen en estos tiempos postmodernos. Asimismo, se plantea la necesidad de revisar los postgrados en Educación Matemática a fin de convertirlos en espacios para la reflexión, para la discusión y para la confrontación de saberes, propiciando la consolidación del binomio formación – investigación a través de la implementación de *currícula* menos escolarizados y más dirigidos a la práctica investigativa (Becerra, 2001). Por último, abogamos por la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, realizada por los profesores de matemática, en el propio entorno escolar siguiendo las utopías y renovaciones de Alcina (1998) y las concepciones epistemológicos, pedagógicos y didácticos que en la actualidad dirigen las actividades educativas (Gallegos Badillo y Pérez Miranda, 1991), enfocándolas a la enseñanza de la matemática.

INTRODUCCIÓN

A lo largo del Siglo XX y lo que va del presente se han ido produciendo cambios en todos los estamentos de la vida humana. En los diversos campos de producción de conocimiento se han superado los paradigmas tradicionales por su insuficiencia e ineficacia para dar respuestas a las interrogantes que han ido apareciendo en los ámbitos científicos y culturales, dando paso a nuevas visiones, más complejas, y a nuevas formas de acercarse y abordar la realidad.

Es quizás la actividad científica la que está sufriendo cambios más acelerados en sus concepciones paradigmáticas. En el campo educativo, dominado por mucho tiempo por la fuerza omnipotente del método hipotético – deductivo y la consecuente objetividad, ha venido dando un giro hasta llegar a ubicarse dentro de los postulados de la complejidad, al reconocerse la imposibilidad de obviar el entramado de relaciones, coincidencias y contradicciones de lo real, que no puede estudiarse de manera fragmentada, sino en su totalidad, tal como lo expresa Morín (1998), al señalar que en los tiempos actuales se impone un nuevo modo de pensar que favorezca la superación del sistema de enseñanza predominante que "privilegia la separación, la reducción, la compartimentación y la corporatización misma de los saberes, fragmentando y alienando nuestro modo de pensar" (p. 2).

En el ámbito de la producción de saberes a nivel de docencia, en la actividad investigativa, se está dejando de lado la concepción que privilegia la descontextualización del objeto de estudio y la imposibilidad de reflejar la subjetividad y los valores en el hecho investigativo. Al contrario, está emergiendo una nueva visión que reconoce que "por supuesto el conocimiento debe utilizar la abstracción, pero ésta también debe buscar construirse con referencia a un contexto y, por ende, debe movilizar lo que el conociente sobre del mundo" (Morín, 1995, p. 15).

Por otra parte, se está rompiendo con la visión disciplinar del conocimiento, irrumpiendo una nueva racionalidad transdisciplinar que, precisamente, reconoce que los saberes no son propiedad exclusiva de una sola disciplina, sino que hacen puente entre las disciplinas, a través de las disciplinas y va más allá de las disciplinas, para formar la comprensión y la trascendencia de los problemas educativos, (Pérez, 2000).

Vemos entonces que, las realidades que están emergiendo como producto de la ruptura con lo tradicional han traído consigo nuevas formas de conocer, de informarse, de educarse y por lo tanto nuevos modos de pensar el hecho educativo y el hecho investigativo.

Particularizando al campo de la Educación Matemática y de la investigación en Educación Matemática, podemos decir con seguridad que desde hace ya algún tiempo hemos venido transitando, quizás un poco tímidamente, las sendas que nos señalan los nuevos paradigmas que emergen en los tiempos postmodernos, como son el pensamiento complejo y el pensamiento transdisciplinario. Hace tiempo ya hemos venido dejando de lado aquellos esquemas investigativos tradicionales donde aislábamos una variable, generalmente una estrategia metodológica "novedosa", y luego de "controlar" el resto de las demás variables que conscientemente pensábamos que podían interferir en el proceso, establecíamos su efecto sobre otra variable, generalmente el rendimiento estudiantil.

La educación matemática es un campo de conocimiento sumamente amplio y complejo, con infinidad de problemáticas por investigar que deben abordarse con la participación "entramada" de una diversidad de disciplinas como son la matemática, la pedagogía, la psicología, la sociología, entre otras. Las situaciones a estudiar se dan en un contexto que involucra una multiplicidad de actores y elementos: docentes, estudiantes, representantes, comunidad, ambiente, currículum, estrategias didácticas, recursos, evaluación entre otros.

El fin último de la investigación en Educación Matemática es mejorarla, es introducir los cambios y las renovaciones que se muestren prometedoras sean éstas conceptuales, contextuales, temáticas, administrativas. Pero esto no debe hacerse por capricho o siguiendo la moda predominante en un momento histórico; es algo más complejo y profundo que requiere el compromiso de todos los involucrados en el proceso. Por eso, para aportar un granito de arena revisaremos a continuación algunos de los centros de interés en la investigación en Educación Matemática que puede ser abordados desde los enfoques teóricos – metodológicos que esbozamos al inicio de este escrito.

CENTROS DE INTERÉS EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Han sido varios los intentos por establecer una agenda de investigación en Educación Matemática. Jeremy Kilkpatric y Ana Sierspinka (1996) condujeron un grupo de trabajo sobre este tema durante el 8° Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8, Sevilla, España), donde presentaron una agenda para la investigación en este campo, en la cual partían de un cuestionamiento a los criterios que se venían siguiendo para establecer la calidad de las investigaciones, analizaban cuestionarios relacionadas con los códigos de éticas a seguir, con las relaciones entre investigadores para compartir experiencias y hallazgos y con los medios de divulgación de los resultados.

En el ámbito latinoamericano, Freddy González (2000) presenta el programa ALIEM XXI: Agenda Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática para el Siglo XXI, en la cual asume un concepto de investigación : Búsqueda disciplinada de información hecha por alguien para proponer respuestas a algunas interrogantes que por algún motivo le interesa dilucidar (p. 8) , que particulariza para el caso de la Educación Matemática mostrando su especificidad y delineando cinco grandes áreas temáticas:

a) Estudios de caracterización de los contextos donde se producen los procesos de adquisición de conocimientos y saberes matemáticos.
b) Estudios que examinan el proceso de aprendizaje de la matemática por parte de los estudiantes de los diversos niveles del sistema educativo (primario, secundario y universitario).
c) Estudios acerca de las prácticas docentes del profesor de matemática.
d) Formación inicial y permanente del profesor de Matemática.
e) Estudios acerca de las prácticas de evaluación utilizadas en el aula de clases de Matemática.

Mostrando para cada una de ellas un conjunto de líneas de investigación que, si bien no es exhaustivo es bastante amplio y abarca una gran cantidad de posibles problemas de investigación.

Dentro del esquema de estas dos propuestas quiero destacar el desarrollo de la investigación desde la perspectiva del investigador y de los fines que percibe. Desde esta óptica concibo una investigación con fines académicos, una investigación pedagógica realizada por los docentes en sus propios ámbitos laborales y una investigación libre. Me referiré un poco a los dos primeros casos: el primero porque es en los postgrados en Educación Matemática y en las Escuelas de Educación de las universidades venezolanas donde se originan casi el 100% de la producción investigativa en el área y al segundo porque coincido con Stenhouse (1998) al considerar la escuela, el aula de clase como el escenario natural para indagar sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En el postgrado la investigación debe ser un proceso estrechamente vinculado a la formación: investigación y postgrado son dos aristas indisolubles. El requisito de presentación de una tesis o trabajo de grado obliga a los estudiantes graduados a realizar una investigación, pero lamentablemente debo coincidir con Becerra (2001) quien señala al referirse al Postgrado del Instituto Pedagógico de Maturín que "los trabajos de grado no transcienden porque son producidos desde perspectivas y bajo discursos pedagógicos, desde taxonomías y fórmulas que no dejan nada para la duda, para la interrogante, para lo inexplicable, para lo imprevisto".

Creo que debemos revisar nuestros postgrados, debemos interpelarnos: ¿Cómo estamos respondiendo a las exigencias teóricas - metodológicas y epistemológicas que han traído consigo los nuevos retos cognitivos vinculados "a la era planetaria, a la globalización, a la multicontinuidad, a la era de la comunicación instantánea y de la nueva cultura de imagen" (Becerra, 2001, p. 3).

Nuestros postgrados en educación matemática deben constituirse en espacios para la discusión, para la reflexión, para el desarrollo de la investigación y para la confrontación de saberes. Esto no se logra con el requisito de presentación de una tesis de grado y con el desarrollo de cursos teóricos donde muchas veces repetimos lo ya visto en pregrado. Formación e investigación no pueden seguir rutas paralelas. Así como las realidades cambian y se complejizan, también el conocimiento se modifica, y por lo tanto, la forma de llegar a él se transforma, se redefine. (Martínez, 1999).

Se propone entonces revisar en forma perentoria nuestros postgrados en Educación Matemática, a fin de hacerlos menos escolarizados, promoviendo una formación para la investigación, investigando, desarrollando el currículum desde los núcleos y centros de investigación donde pueden definirse líneas imbuidas en las temáticas, propuestas en el Programa ALIEM XXI, u otros no incluidos en él pero que se muestran relevantes, enfocándolas desde una perspectiva transdisciplinaria con el concurso de equipos integrados por especialistas de diferentes áreas .

El reto está planteado, pero es imprescindible recuperar para la investigación "la ilusión por hacer todo lo que se hace, la pasión por saber más y resolver los retos individuales, el amor por las personas que comparten la aventura". (Alsina, 1998 p. 564).

En cuanto a la investigación en Educación Matemática conducida por el docente en su propio entorno laboral, considero que esta lleva implícita una fuerte carga subjetiva impregnada por todos los elementos que hacen vida en la escuela. Estudiar lo que ocurre en el aula de matemática amerita "la captación de esa estructura interior que la caracteriza y, para ello, requiere una metodología cualitativa estructural" (Martínez, 1991, p. 29) o como lo señala Gallego Badillo y Pérez Miranda (2000):

> *"En la unidad del aula escolar, en la que se da una multiplicidad y variedad de interacciones, cualquier reducción mecanicista se constituye en una ingenuidad teórica, que obliga al educador a la necesidad de construir una teórica pedagógica y didáctica, signado por la teoría de la complejidad (p. 36).*

Pero no es suficiente que el docente de matemática sólo, de manera individual exhiba un cambio en su concepción del hecho educativo, al contrario, como lo señalan los mismos autores "a la luz de estas nuevas concepciones, es preciso que la institución escolar mude hacia una perspectiva diferente, esa transmutación implica un cambio en las concepciones epistemológicas, pedagógicas y de docentes que en la actualidad dirigen las actividades educativas (p. 36).

En concordancia con estos planteamientos recomendamos al igual que Alsina (1998, pp 561-564) orientar la investigación en Educación Matemática realizada al interior de la escuela centrada en:

a) Enseñanza como guía de un aprendizaje /descubrimiento.
b) Enseñanza matemática potenciadora de las capacidades mentales, prácticas y emotivas.
c) Enseñanza de una matemática realista, adecuada al contexto y al momento.
d) Enseñanza integradora de recursos.
e) Enseñanza integradora de conocimientos.
f) Enseñanza de una matemática interesante y comprensible que eluda dificultades y asegure éxitos.
g) Enseñanza matemática sensible ante la diversidad del alumnado.
h) Enseñanza matemática arropada por la comprensión social y el estímulo exterior.

i) Enseñanza de la matemática comprometida con el futuro.

j) Enseñanza de la matemática llena de ilusión, pasión y amor.

¿Cuántas investigaciones podemos desarrollar a partir de estos diez planteamientos? El camino está despejado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (1998), "Utopías, Renovaciones y Clases de Matemática". Conferencia en Espolón Revista de la SAEM. *THALES*. No. 42 Vol 14 (3). Sevilla, España.

Becerra, O. (2001). "El Postgrado en el IPM. De los Estudios que tenemos a los estudios que deseamos". Conferencia Memografiada. Maturín, Venezuela

Gallego Badillo, R. y Pérez Miranda, R. (1997). *La Enseñanza de las Ciencias Experimentales. El Constructivismo.* Editorial Magisterio. Colombia.

González, F. (2000). Programa ACIEM 2001. *Agenda Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática para el siglo XXI*. Conferencia presentada en la V REUNIÓN didáctica del Cono Sur. Chile.

Kilpatrick, J y Srespinka, A. (1996). *Hacia una Agenda de Investigación en Educación Matemática*. Mimeografiada. Sevilla España.

Martínez, M. (1997). *El Paradigma Emergente*. Editorial Trillas. México.

______ (1999). *La Nueva Ciencia*. Editorial Trillas. México.

Morín, E. (1998). *El Paradigma Perdido. El Paraíso Olvidado*. Editorial Kairos. 2° Edición. Barcelona. España.

_____ (1997). *Reforma del Pensamiento. Transciplinariedad. Reforma de la Universidad*. Locarno, Suiza.

_____ (1995) "La necesidad de un Pensamiento Complejo" en: *Pensamiento completo. En torno a Edgar Morín, América Latina y los Procesos Educativos*. Sergio González Moreno. Compilador. Magisterio, Bogotá. Colombia.

Stenhouse, L. (1998). *La Investigación como base de la Enseñanza*. Ediciones Morata, Madrid.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO VÍA DE ELABORACIÓN DEL CONOCIMIENTO. UNA EXPERIENCIA EN GEOMETRÍA

María Cristina González Dosil.
Universidad Pedagógica "Enrique José Varona".
asesoria@rectoria.upejv.edu.cu

RESUMEN:

En la formación de un profesional tiene una especial significación su preparación matemática, por las potencialidades que el aprendizaje de esta ciencia brinda en el desarrollo de habilidades relacionadas con el pensamiento lógico entre otras. Un importante papel en esta dirección corresponde al desarrollo de las habilidad para obtener y demostrar proposiciones matemáticas, siendo la Geometría una de las disciplinas que más puede aportar al respecto.

En esta investigación se presenta una propuesta para el desarrollo de estas habilidades a través del tratamiento de un tema de la Estereometría. En la misma se abordan los fundamentos teóricos que la sustentan, los que incluyen tendencias actuales de la Educación Matemática. Asimismo se brindan recomendaciones para el tratamiento de las proposiciones que se estudian en el tema, basadas en la utilización de métodos activos de apropiación del conocimiento y se plantean ejemplos que ilustran cómo ponerlas en práctica.

Por último, se describe la aplicación de la metodología propuesta a un grupo de estudiantes de segundo año de la carrera de Matemática-Computación de la Universidad Pedagógica “Enrique José Varona” y los resultados alcanzados por ellos en cada una de las acciones que integran la habilidad antes mencionada.

INTRODUCCIÓN

En todos los niveles de enseñanza el aprendizaje de la Matemática representa para los estudiantes una materia de elevado grado de dificultad. Se destaca en este sentido la Geometría y en especial la relativa al espacio. Esta disciplina se caracteriza por el hecho de que la mayoría de los procesos que intervienen en la elaboración y aplicación de los conocimientos no son algorítmicos, lo que hace que en muchas ocasiones los estudiantes no se sientan suficientemente motivados por su aprendizaje y no logren culminar con éxito los esfuerzos que realizan en esta dirección.

Esto ha sido constatado en numerosas investigaciones vinculadas a los distintos niveles de enseñanza (Almaguer y otros, 1995; Santana, 1998), las cuales han arrojado que en la mayoría de los casos los estudiantes dominan los elementos teóricos principales (definiciones, axiomas, teoremas), pero no son capaces de aplicarlos en la resolución de problemas de cálculo, construcción y en especial de demostración.

De todo lo anterior se infiere la necesidad de introducir cambios en las formas de planificar el proceso docente en la disciplina Geometría, de manera que los estudiantes logren apropiarse de los conocimientos de un modo más efectivo. En este trabajo se aborda ese problema en el estudio sintético de la Estereometría, en el tema “Relaciones de posición entre rectas, entre rectas y planos y entre planos”, que corresponde a la asignatura Geometría III de la carrera de Matemática - Computación de la Universidad Pedagógica “Enrique José Varona”.

Corresponde a los docentes la aplicación de los métodos más adecuados para contribuir a alcanzar satisfactoriamente estos propósitos. Se ha comprobado en reiteradas ocasiones la utilidad del empleo de métodos activos en los cuales los estudiantes jueguen el papel fundamental en la elaboración de los conocimientos.

La enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente uno de los métodos más invocados para poner en práctica el aprendizaje activo, pues la misma persigue que los estudiantes desarrollen procesos eficaces del pensamiento en la resolución de problemas, los cuales, además de contribuir a su independencia cognoscitiva, elevan la confianza en las posibilidades de éxito y aumentan la motivación por el estudio.

DESARROLLO:

La resolución de problemas se viene tratando desde los orígenes de la Matemática como ciencia. Desde el siglo XVII Descartes se refirió a la existencia de reglas básicas para cualquier tipo de problema. En sus libros “Rules for the direction of mind” y “Discurse of the method” presentó estrategias generales que contenían reglas específicas para resolver problemas. (Schoenfeld, 1991)

Personalidades que se dedican a esta ciencia se han pronunciado a favor de la resolución de problemas. Entre ellos podemos citar a Halmos, Kleiner y Dieudonné. La esencia de sus planteamientos radica en reconocer la resolución de problemas como el eje central de las Matemáticas.

La aparición en 1945 del libro titulado “How to solve it?”, del matemático de origen húngaro George Polya, supuso el nacimiento de una nueva doctrina. A raíz de su publicación un creciente número de matemáticos, lógicos, pedagogos y psicólogos se ocuparon del tema. Entre los matemáticos, además de Polya se destacan Schoenfeld, Goldin y Miguel de Guzmán.

De este modo, la enseñanza de la Matemática por resolución de problemas ha surgido, en el contexto iberoamericano, como un modelo alternativo a la enseñanza tradicional.

Entendemos por problema matemático todo ejercicio en el que se conoce la situación inicial y ocasionalmente la situación final, pero no se dispone de un procedimiento bien determinado de solución y cuya resolución constituye una necesidad para el sujeto ante quien se plantea dicho ejercicio.

Esta caracterización de problema lleva implícita su carácter relativo. Una situación, que constituye un problema en un determinado contexto de aprendizaje (en el cual se desconoce la vía de solución) puede dejar de serlo si se domina un procedimiento seguro de solución. Del mismo modo, una situación puede ser un problema para un estudiante y no serlo para otro, en dependencia de las motivaciones que cada uno haya creado alrededor de ella.

Esto requiere por parte del profesor la realización de un trabajo diferenciado con sus estudiantes, dirigido a las características individuales de cada uno de ellos, teniendo en cuenta sus intereses y el desarrollo alcanzado, sobre la base de los aportes de la teoría vigotskiana a la concepción del proceso educativo.

Debe tenerse presente, además, que la apropiación por los estudiantes del sistema de conocimientos y procedimientos científicos, la técnica desarrollada y el conjunto de valores de la sociedad, presupone un proceso activo, constructivo, en el cual la interacción social constituye un elemento fundamental. Todos somos capaces de inventar y de descubrir en mayor o menor medida, y este aspecto activo y creador de nuestra mente debe ser cultivado en todo momento. Inclusive, él nos brinda el único camino para lograr un conocimiento profundo de cualquier disciplina.

El trabajo con los problemas contribuye a lograr una adecuada orientación hacia el objetivo que se persigue, para lo cual resulta determinante la claridad en el planteamiento de los mismos. Por otro lado, la resolución de problemas brinda una oportunidad de conocer y pulsar las dificultades, de conocer los alcances y limitaciones del instrumental y conocimiento matemático que poseemos. Vale mucho más ser capaz de resolver problemas no triviales que hacer acopio en la memoria de enunciados, teoremas, demostraciones, etc.

En la elaboración de los nuevos conocimientos tiene especial importancia el planteamiento de problemas abiertos, en los cuales se desconoce la situación final, lo que conduce al estudiante a la formulación de conjeturas mediante la aplicación de procedimientos heurísticos, lo cual debe ser inducido por el profesor a través de impulsos. De este modo se contribuye a desarrollar en los estudiantes la imaginación espacial, así como los procedimientos lógicos asociados a los razonamientos. No obstante, es necesario que el docente logre hacer conscientes a los estudiantes de la realización de tales actividades mentales y de la forma en que estas pueden ser promovidas por el profesor, para que puedan incorporar tales modelos de actuación a su posterior desempeño profesional.

Como ejemplos de tales problemas pueden proponerse los siguientes:

1) Sea P un punto, r una recta que no pasa por P. ¿Existe algún plano que pase por P y sea paralelo a r? ¿Cuántos? Fundamente.

2) Dadas dos rectas cualesquiera r y s. Determine un plano ε que pase por la recta r y sea paralelo a s. ¿En qué caso tiene el problema:

   a) solución única?

   b) infinitas soluciones?

   c) ninguna solución?

Pueden proponerse también problemas en los cuales se desconozca la situación final, por ejemplo:

3) Investigue bajo qué condiciones son iguales las proyecciones sobre un plano de las oblicuas trazadas desde el mismo punto. Formule y demuestre la proposición correspondiente. Analice si es verdadero el recíproco de la proposición anterior y, en caso afirmativo, demuéstrelo.

4) Sean α, β y γ planos tales que $\alpha \perp \gamma$. ¿Cuál debe ser la posición relativa entre los planos α y β para que se cumpla que $\gamma \perp \beta$? Formule y demuestre la proposición obtenida.

Resulta de vital importancia dedicar especial atención al proceso de solución del problema de demostración y no solamente a la demostración en sí. En la formación de profesores resulta indispensable que los estudiantes (futuros profesores) desarrollen estrategias metacognitivas referidas a la solución de problemas para que las incorporen a sus propios modos de actuación y para que propicien en sus alumnos el desarrollo de tales estrategias.

Con vistas a lograr un mayor desarrollo en los estudiantes de la habilidad para demostrar proposiciones de la Estereometría y aumentar su independencia en la solución de problemas de este tipo se hizo un análisis de cada uno de los teoremas propuestos para ser abordados en el tema en el programa de la asignatura para determinar el tratamiento más conveniente de la obtención de los mismos, así como la búsqueda de la idea de la demostración correspondiente.

Es conveniente que las soluciones a estos problemas sean debatidas en colectivo y que los estudiantes planteen no sólo las conclusiones a las que arribaron, sino además cuáles fueron los razonamientos que les permitieron llegar a ellas, tanto si son correctas si no lo son. En este último caso lo más importante es determinar cuáles fueron los razonamientos que condujeron al resultado erróneo.

A continuación se ilustra a través de un ejemplo la obtención del teorema: *Si una recta y un plano son perpendiculares, entonces:*

a) Toda recta paralela a la recta dada es perpendicular al plano dado.

b) Todo plano paralelo al plano dado es perpendicular a la recta dada,

Para ello se parte del teorema: *Si la recta a es perpendicular a la recta b, también es perpendicular a cualquier recta c paralela a b.*

Se pide a los estudiantes que sustituyan en esta relación una de las rectas a, b ó c por el plano α Se obtienen las proposiciones siguientes:

i. $\alpha \,||\, b \wedge b \perp c \Rightarrow \alpha \perp c$.

ii. $a \,||\, \alpha \wedge \alpha \perp c \Rightarrow a \perp c$.

iii. $a \,||\, b \wedge b \perp \alpha \Rightarrow a \perp \alpha$.

Se encuentra un contraejemplo para la proposición (i), analizando en un modelo de la situación espacial dada que para cada punto de c existen infinitas rectas perpendiculares a b y de ellas solamente una es perpendicular al plano α, luego dicha proposición es falsa.

Como las proposiciones (ii) e (iii) no pueden ser refutadas a partir del análisis de los modelos correspondientes, se llega a que su veracidad depende de su demostración, la cual es realizada independientemente por los estudiantes

Una vez concluido el tratamiento de las nuevas proposiciones se propone realizar una sistematización de las mismas, atendiendo a la igualdad de sus tesis. En esta sistematización se deben incluir todas las proposiciones estudiadas en los temas precedentes, con el objetivo de facilitar la búsqueda de los medios de demostración en los problemas posteriores.

La metodología planteada se aplicó a un grupo de 40 estudiantes de segundo año de la carrera de Matemática-Computación de la Universidad Pedagógica “Enrique J. Varona”.

Dicha metodología se desarrolló según los siguientes pasos:

1. Aplicación de una prueba de entrada.
2. Elaboración de una base de orientación para la solución de problemas geométricos de demostración.
3. Utilización de las recomendaciones elaboradas para el tratamiento de los teoremas que se abordan en el tema.
4. Atención diferenciada a los estudiantes según los resultados de la prueba de entrada y el desarrollo alcanzado a lo largo del tema.

La base de orientación (BOA) se elaboró con la participación de los estudiantes, quedando conformada como sigue:

1. Elaborar una figura de análisis.
2. Separar premisa y tesis.
3. Seleccionar el método de demostración.
4. Seleccionar los medios adecuados de demostración.
5. Organizar lógicamente los medios de demostración.
6. Representar la demostración.
7. Fundamentar los pasos más importantes.
8. Analizar los pasos seguidos en la demostración.
9. Analizar otras vías de solución.
10. Analizar la utilidad de la proposición demostrada como medio para solucionar problemas posteriores.

Para la demostración de estas proposiciones los estudiantes utilizaron la BOA elaborada previamente, la cual lograron incorporar como forma de trabajo en la solución de problemas geométricos de demostración.

Desde el inicio del tema se realizó un trabajo diferenciado con los estudiantes, que comenzó con el análisis de los resultados alcanzados por cada uno de ellos en la prueba de diagnóstico, a partir de los cuales se les asignaron tareas individuales encaminadas a erradicar sus deficiencias.

De este modo se obtuvieron logros significativos, tanto en lo que se refiere a la adquisición de conocimientos teóricos, como al desarrollo de la habilidad para resolver problemas geométricos de demostración. Estos últimos fueron constatados a través de la aplicación de una prueba de entrada antes de la puesta en práctica de la metodología propuesta y una prueba de salida al finalizar la misma, cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Acciones	**% Aprobados**		**% Desaprobados**	
	Prueba de entrada	**Prueba de salida**	**Prueba de entrada**	**Prueba de salida**
1. Elaborar figura de análisis.	90	100	10	0
2. Separar premisa y tesis.	85	97,5	15	2,5
3. Seleccionar método de demostración	75	77,5	25	22,5
4. Seleccionar medios de demostración	52,5	80	47,5	20
5. Organizar lógicamente los medios.	42,5	62,5	57,5	37,5
6. Representar la demostración.	42,5	62,5	57,5	37,5
7. Fundamentar los pasos más importantes.	52,5	55	47,5	45

CONCLUSIONES

En la aplicación de esta propuesta se destacan algunos elementos que resultaron determinantes en el logro del objetivo que se persigue. Ellos son:

- El tratamiento de los teoremas que se estudian a lo largo del tema y los problemas de demostración que se proponen se basó en la utilización de métodos activos de apropiación del conocimiento.
- La inclusión en el tratamiento de las proposiciones de elementos del aprendizaje por problemas favoreció el desarrollo en los estudiantes de formas lógicas del pensamiento, de la imaginación espacial y de la elaboración, formulación y argumentación de conjeturas.
- La elaboración por los estudiantes de una base de orientación propició la orientación necesaria para que los mismos pudieran enfrentarse de manera independiente a la solución de problemas geométricos de demostración.
- La sistematización de las proposiciones obtenidas según la igualdad de sus tesis facilitó la búsqueda de la vía de solución de los problemas de demostración.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almaguer, A. y otros (1995). *Desarrollo de la línea directriz Geometría en Secundaria Básica*. Resumen del informe de investigación. I.S.P.E.J.V. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática. Ciudad de la Habana.

Barrón, A. (1991). *Aprendizaje por descubrimiento. Análisis crítico y reconstrucción teórica*. Editorial Universidad de Salamanca, España.

Gil, D. y De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones*. Editorial Popular S.A. Madrid. España.

Hernández, H. (1993). *Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate.* Escuela Politécnica Nacional. Quito. Ecuador.

Polya, G. (1965) *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Editorial Trillas, México.

Santana, H. (1998). *La validación en la Licenciatura en Educación, carrera Matemática-Computación en el Período 1992-97.* Tesis presentada en opción al Título de Master en Didáctica de la Matemática. Ciudad de la Habana

Santos Trigo, L. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Cuaderno Inv. No.28. México.

Schoenfeld, A. (1991). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas.* Olimpiada Matemática. Argentina

Talízina, N. (1988). *Psicología de la enseñanza*. Editorial Progreso. Moscú. 1988.

LA COMPRENSIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

Luisa García de La Vega y Raquel Ravelo Maytín
Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona". Cuba
asesoria@rectoria.upejv.edu.cu

RESUMEN

La enseñanza de la Matemática confiere gran importancia al estudio de las construcciones geométricas porque persiguen objetivos educativos relacionados con la limpieza y la exactitud, además del desarrollo de capacidades en los estudiantes.

Las construcciones geométricas se relacionan también con la aplicación de teoremas y definiciones, especialmente cuando se hace su fundamentación.

Es OBJETIVO del presente trabajo presentar algunas experiencias de las autoras relacionadas con la comprensión de las construcciones geométricas que se abordan en la asignatura Geometría II del 1er Año de estudio de la carrera profesoral de Matemática – Computación.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la Matemática confiere gran importancia al estudio de las construcciones geométricas porque persiguen objetivos educativos relacionados con la limpieza y la exactitud, además del desarrollo de capacidades en los estudiantes, tales como:

- La imaginación espacial asociada a la representación de figuras geométricas.
- La planificación de cómo proceder cuando es capaz de analizar cómo resolver el problema propuesto.
- Las capacidades manuales relacionadas con el manejo de los instrumentos de dibujo.
- El desarrollo del lenguaje porque el estudiante debe describir y fundamentar las construcciones a realizar.
- La aplicación de indicaciones con carácter algorítmico, cuando utiliza las construcciones geométricas fundamentales en la resolución de otros problemas de construcción.
- La aplicación específica de teoremas y definiciones que se pone de manifiesto en la búsqueda, descripción y fundamentación de una construcción geométrica.

La aplicación de teoremas y definiciones está asociada al proceso de comprensión de una construcción geométrica, puesto que el alumno sólo es capaz de emplear adecuadamente una definición o un teorema matemático para fundamentar una construcción cuando realmente la ha comprendido.

Es **OBJETIVO** del presente artículo abordar algunos resultados obtenidos por las autoras con relación a la comprensión de las construcciones geométricas en el primer año de la carrera de Matemática - Computación de la Universidad Pedagógica la cual pertenecen.

Este trabajo forma parte de un grupo de experiencias en la búsqueda de indicadores para medir la comprensión pedagógica, como parte de la investigación que realizan en su tesis doctoral.

La investigación toma como fundamento teórico referencial la teoría de Procesamiento de la Información y el Paradigma histórico-cultural de Vigotstky.

DESARROLLO

Al plantear un problema de construcción, se le exige al estudiante que primero fundamente el procedimiento a seguir, acompañándolo de una figura de análisis o boceto de la construcción que tiene que hacer y posteriormente que realice con rigor la construcción. Es en ese análisis y planificación de cómo proceder, que el estudiante manifiesta a través del boceto, las primeras evidencias de que comprende la construcción geométrica que se le plantea.

Las representaciones gráficas son consideradas por lo general imprecisas y sujetas a errores porque dependen de la percepción del individuo. Pero esa misma característica es la que proporciona tanto al estudiante como al matemático un laboratorio que contribuye a desarrollar la independencia y la flexibilidad de pensamiento, tan importante en la enseñanza de la Matemática. (Schoenfeld, 1982)

Las autoras del trabajo tomaron una muestra de 10 estudiantes tomados al azar entre los diferentes grupos de 1er Año y le aplicaron el siguiente problema:

Construir un triángulo rectángulo dados su hipotenusa y la altura de dicha hipotenusa.

Las respuestas de los estudiantes a los cuales se les aplicó el aparecen reflejados en la siguiente tabla:

No	**ANÁLISIS**		**DESCRIPCIÓN**	**CONSTRUCCIÓN**
	BOCETO	**ESCRITO**		
1	OK	OK	OK	IMPRECISA
2	NO	NO	NO	NO
3	OK	OK	OK	IMPRECISA
4	OK	OK	OK	OK
5	NO	NO	NO	NO
6	OK	OK	OK	IMPRECISA
7	OK	OK	OK	OK
8	NO	NO	NO	NO
9	OK	OK	OK	OK
10	NO	NO	NO	NO

La descripción de los principales resultados obtenidos puede resumirse a continuación:

- El 60% de los estudiantes a los cuales se les aplicó el test, fundamentó los pasos que debían darse y realizó la figura de análisis correctamente.
- Los estudiantes que no fueron capaces ni siquiera de hacer un boceto, tampoco pudieron fundamentar sus ideas correctamente, en ese caso se encontraba el 40% de la muestra considerada.
- Aunque un 30% de los estudiantes, es capaz de hacer una figura de análisis y de fundamentarla, no pudieron realizar la construcción rigurosamente.

Haciendo un análisis de los resultados de la experiencia realizada, las autoras del trabajo llegaron a las siguientes valoraciones:

- Un análisis correcto por parte del estudiante sobre cómo proceder está relacionado con la posibilidad de realizar un boceto de la construcción. El alumno que comprende un ejercicio de construcción es capaz traducirlo a un lenguaje gráfico o con sus palabras.
- La rigurosidad de la construcción como tal no está relacionada con su comprensión, sino al parecer está asociada a habilidades en el manejo de los instrumentos de dibujo.

CONCLUSIONES

La comprensión de la construcción en un primer momento se evidencia en la figura de análisis, aunque por supuesto existen otros factores que pudieran influir en lograrla, luego a partir de esta idea pudieran plantearse indicadores para la comprensión de las construcciones geométricas y esta experiencia sería un punto de partida para una investigación relacionada con la comprensión pedagógica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ballester, S. et al. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana

___________. (1995) *¿Cómo consolidar los conocimientos matemáticos?* Editorial Academia. Colección PROMET. La Habana

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Editorial Trillas. México.

Mitjáns, A. (1995). *Creatividad, Personalidad y Educación*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Müller, H. (1990). Conceptos básicos de la Geometría Plana. *Libros para la Educación.* La Habana.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En: Grouws, D. A. (ed) *Handbook of Research in Mathematical Education*. Universidad de California. Berkeley.

Vigotsky, L. (1982). *Pensamiento y Lenguaje*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

UNA EXPERIENCIA DE CLASES, EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES O SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Juan Carlos Navarro González
Escuela Latinoamericana de Medicina. Cuba.
saramat@elacm.sld.cu

RESUMEN:

El trabajo presenta reflexiones derivadas del accionar con un grupo de estudiantes de la Secundaria Básica " William Soler" del municipio Centro Habana, en la capital cubana. Se realiza una breve explicación de cómo se desarrollaron las clases: primero las de traducción del lenguaje común al algebraico, después clases donde se realizó la comprensión y la búsqueda de la vía de solución y finalmente las clases de resolución de problemas. Se propone hacer uso del algoritmo para la comprensión de texto, de la asignatura Español, haciéndole una adecuación al contexto de la comprensión de problemas del tipo que nos ocupa. En las conclusiones se presentan algunos resultados cuantitativos y desde el punto de vista de las características personológicas de los estudiantes, obtenidas de la experiencia.

INTRODUCCIÓN:

La importancia de la enseñanza de la Matemática para la formación multilateral de los estudiantes es universalmente reconocida. Los contenidos básicos de esta son indispensables para lograr un aprendizaje sólido y aplicable, tanto a la vida cotidiana como en el desempeño profesional, es por ello que en el proceso de optimización que se viene desarrollando en el sistema Educacional en Cuba, la misma ocupa un lugar priorizado.

La prioridad consiste en lograr que todos los docentes de las diferentes asignaturas de Ciencias contribuyan a que los estudiantes aprendan a razonar lógicamente, a buscar de manera heurística soluciones a problemas. Para el logro de este fin los nuevos programas que se desarrollan en el área de las ciencias, en Secundaria Básica, tienen como asignatura rectora la Matemática y dentro de los objetivos básicos de estoas se encuentran: el trabajo con variables; ecuaciones y fórmulas; la traducción del lenguaje común al algebraico y el uso de esas destrezas para resolver y enunciar problemas.

Durante un curso escolar en la Secundaria Básica “William Soler” del municipio capitalino de Centro Habana y donde existían dificultades en cuanto a la compresión de texto y la determinación de la vía de solución para resolver problemas que conducen a ecuaciones lineales o sistemas, se desarrolló esta experiencia que tiene como fundamentos los preceptos antes expuestos; el aporte de Polyar al tema, con su esquema heurístico general: comprensión del problema; concebir el plan de solución; ejecutar el plan de solución y evaluar la solución, y las propuestas realizadas por Shoenfeld de cómo realizar la solución de problemas con los estudiantes: discusión del problema con todo el grupo; resolver problemas con el alumno utilizando las ideas del profesor y el profesor a prueba.

DESARROLLO:

En el sistema de clases relacionado con la resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales se trabajó teniendo en cuenta los siguientes fases: primero la traducción del lenguaje común al algebraico; después llegar a la declaración de variables y la determinación de la vía de solución (ecuación o sistema) y por último realizar resolución completa del mismo. Se mostrarán a través de ejemplos algunas ideas, que desde el punto de vista metodológico fueron utilizados en esta experiencia.

Con relación a la traducción del lenguaje común al algebraico se presentaron tipos de ejercicios como los que aparecen a continuación:

Ejemplo 1:

1. Representa a través de variables

a) Un número aumentado en tres.
b) La mitad de un número menos su tercera parte.
c) El producto de dos números consecutivos.
d) Un número natural par y un número natural impares.

2. Traduce del lenguaje común al algebraico los siguientes textos:

a) La edad de una persona hace tres años, conociendo la actual.
b) El triplo de las mujeres de una fábrica representan la cantidad de hombres de la misma.

3. En una escuela hay 5 profesoras más que profesores. Exprese con variables el total de profesores.

Estos tipos de ejercicios permitieron ir entrenando al estudiante no solo al realizar la traducción del lenguaje común al algebraico, sino también los preparó para la comprensión del problema, o sea, el poder determinar las variables del mismo, sus relaciones y lógicamente encontrar la vía de solución.

Para las clases donde se realizó la declaración de variables y la determinación de la ecuación que solucionaría cada problema, se hizo uso del algoritmo para la comprensión de texto de la asignatura Español, pero adecuándolo al contexto de la resolución de problemas del tipo que nos ocupa:

1. Realizar una lectura modelo para una primera familiarización con el texto del problema (puede hacerla el profesor o un estudiante que sepa leer correctamente).
2. Lectura individual en silencio.
3. Analizar el conjunto de palabras del texto que no se comprenden, para la búsqueda de su significado.
4. Analizar la información, que me piden para definir las variables del problema y después establecer las variables matemáticas.
5. Analizar la información que me ofrecen teniendo en cuenta palabras o frases claves y llegar a la expresión de dicha información en el lenguaje matemático.
6. Analizar conocimientos complementarios para realizar los razonamientos lógicos y establecer otras relaciones que permitan llegar a la solución del problema.

A través de un ejemplo se mostrarán algunas ideas o impulsos, se harán algunos comentarios que el profesor puede realizar y que expresan, en alguna medida, como se hizo uso del algoritmo de comprensión de texto antes expuesto, en la experiencia.

Ejemplo 2:

Problema:
El plano de una Secundaria Básica será confeccionado a escala 1:100, en cm. Si el perímetro de un aula es de 29,6 m y el largo excede en 100 cm el ancho. ¿Cuáles serán las dimensiones que tendrá el aula en el plano de la escuela?

Breve Descripción:

Después de realizar las dos lecturas, como indica el algoritmo para la comprensión de texto es interesante hacer diferentes preguntas como:

¿Cuáles son las palabras que no se comprenden?.

Al desarrollar el ejercicio en clase surgió dudas en las palabras escala y excede. Es importante que los estudiantes lleguen a comprender que la escala 1:100 significa, que 100 cm de la realidad se representarán como 1 cm en el plano; y que excede significa que tiene de más.

¿Cuáles son las variables del problema y que datos se muestran?

Generalmente al hacer esta pregunta ellos expresan que la variable es x y no declaran textualmente las incógnitas que tiene el problema. Se debe reflexionar hasta que definan con sus palabras las variables del problema y los datos.

Variables:	Datos:
Dimensiones del aula; y ¿cuáles son las dimensiones?	Perímetro del aula: 29,6 m Escala del plano: 1:100
Largo del aula:	
Ancho del aula:	

¿Qué relaciones existen entre las variables?

El largo excede en 100 cm al ancho y el perímetro 29,6 m.

¿Cuántas variables matemáticas necesito?

Es importante que ellos entiendan que las variables matemáticas son aquellas que se van a declarar para representar las incógnitas del problema. Se pueden declarar tantas variables como incógnitas, pero la misma cantidad de variables que declaren será la cantidad de ecuaciones a encontrar para resolver el problema.

¿Cuántas relaciones entre las variables existen?

Esta pregunta parecería innecesaria, porque es evidente que son dos y las deben tener definidas con una pregunta realizada anteriormente. Si en conversación se les hace reflexionar sobre la correspondencia entre cantidad de variables del problema y cantidad de relaciones entre ellas se puede llegar con los estudiantes a la conclusión siguiente: si declara una variable matemática, entonces una relación entre las variables del problema posibilitar expresar la otra variable del mismo en función de la variable de la matemática y la otra relación sería para establecer la ecuación:

Largo del aula: x
Ancho del aula: x + 10
P = 2 (x + x + 100) = 2 960

Otra conclusión que se puede obtener con los estudiantes es que si declaro 2 variables matemáticas, no es posible resolver el problema si no planteo un sistema de ecuaciones, y para ello se tienen las dos relaciones entre las variables.

Largo del aula: x	P = 2 (x + y) = 2 960
Ancho del aula: y	y = x + 10

Estas ideas que se han planteado están en correspondencia con los pasos 3, 4 y 5 del algoritmo de comprensión de texto, pero es importante hacer algunas reflexiones con relación al paso 6, que para la descripción del ejemplo se ha separado; pero que de forma natural, en las reflexiones que se hacen con los estudiantes, queda unido a las ideas antes expresadas.

¿Cómo se calcula el perímetro del aula?

Si no tiene este conocimiento complementario el estudiante no puede asociar el perímetro como una de las relaciones del problema, no tampoco llegar a la vía de solución (dígase ecuación).

¿Es posible trabajar con dos magnitudes diferentes?

Esta es una pregunta útil para que el estudiante reflexione que antes de establecer las relaciones entre las variables hay que hacer las conversiones de las unidades de medidas.

¿En qué unidad de medida está dada la escala?

Esta pregunta nos ayuda reflexionar que es conveniente trabajar en centímetros.

¿Quedará resuelto el problema cuando hallemos el ancho y el largo del aula?

Es una pregunta que propicia la reflexión al uso de la escala.

En el conjunto de clases anteriores solo se trabajaron las ideas propuestas sin llegar a la solución del problema, para que los estudiantes se entrenaran en la comprensión del texto y la búsqueda de la idea de solución.

Las clases de resolución de problemas se realizaron utilizando los siguientes métodos (en éste orden):

Primero: la discusión del problema con los estudiantes teniendo en cuenta el plan de solución concebido por el profesor, que llevaba el sistema de impulsos para la resolución.

Segundo: la discusión de problemas con los estudiantes sin plan concebido. El profesor ayudando a aprovechar lo positivo de las ideas que se exponen y motivando a seguir trabajando hasta lograr la resolución.

Tercero: la resolución de forma independiente por los estudiantes de los problemas propuestas y el debate de todas las diferentes vías de solución encontrados a cada problema y la resolución por parte del profesor de problemas traídos por los estudiantes, que observan su proceder en la tarea planteada.

CONCLUSIONES

Esta forma de trabajo en clases permitió resultados satisfactorios, algunos se mostrarán en la tabla siguiente:

	Examinados	Aprobados	%	Promedio de notas
Diagnóstico Inicial	37	16	43,2	2,24
Diagnóstico Final	37	30	81	3,73

Nota: Se considera nota máxima 5 puntos y el aprobado 3 puntos.

En el desarrollo de las clases también se pudo constatar con relación a las características personológicas de los estudiantes, que estas:

- Desarrollan constancia y responsabilidad ante las tareas propuestas.
- Desarrollan hábitos correctos de estudio y trabajo colectivos.
- Desarrollan la solidaridad con sus compañeros y valentía de enfrentarse a los problemas.
- Desarrollan un adecuado nivel de comunicación entre ellos y con el profesor.
- Se motivan por estudio de la asignatura, preocupándose por profundizar cada vez más en los conocimientos adquiridos y en la búsqueda de nuevas bibliografías.

Es importante que los docentes encargados de explicar la resolución de problemas procuren que los estudiantes realicen una adecuada comprensión del texto, que les permita encontrar los medios y vías para resolverlos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Ballester, S. et al (1993). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática I y II*. Editorial MINED. Cuba.

Campistrous, L. & Rizo, C. (1996). *Aprender a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.

Labarrere, A. I. (1984). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de los problemas matemáticos en la escuela primaria*. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.

MINED. (1997). *Programa Director de la Matemática*. Editorial MINED. Cuba.

Muñoz, F. et al. (1989). *Programas, Orientaciones Metodológicas y Libro de Texto de 8vo. Grado*. Editorial MINED. Cuba.

Nickerson, R. et al. (1991). *Enseñar a pensar*. Editorial Trillas (2ed). México

Schonfeld, A. (1994). “La resolución de problemas en el aprendizaje de Matemática”. Cuaderno No. 28.

PARA TODO CONTENIDO DE GEOMETRIA PLANA: ¿EXISTIRAN MOVIMIENTOS QUE LO SISTEMATIZAN?

María de los Angeles Prieto Durán - Miguel Angel González Rangel - Olga González Lang
Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona”. Ciudad de la Habana. Cuba
asesoria@rectoria.upejv.edu.cu

RESUMEN:

Este trabajo recoge algunos ejercicios de una colección para sistematizar contenidos de Geometría Plana, manteniendo vigente en todos, el concepto de movimiento. De acuerdo con las sugerencias de la investigación “Cómo transcurre la línea directriz geometría en secundaria básica”, se proponen ejercicios, sin complicaciones extremas, donde se crean condiciones para la creatividad de los alumnos pues, son de respuestas abiertas y los maestros los pueden utilizar para la creación de otros y elevar el protagonismo de los educandos.

INTRODUCCION:

De acuerdo con nuestra experiencia personal acumulada por las actividades que nos ha tocado desarrollar, sobre todo la atención a la práctica docente, por investigaciones realizadas y por valoraciones comentadas sobre el tema por parte de colegas y de estudiantes, nos llama la atención de que, por cualquier vía, nos llegan las múltiples dificultades por las que atraviesa la enseñanza de la Geometría.

Siendo consecuentes con lo anterior, no perdemos oportunidad para aportar algo que modestamente pueda ayudar a atenuar la problemática planteada pues en los programas de estudio de la Matemática que conforman las necesidades de la educación cubana, ocupa un lugar destacado la enseñanza de la Geometría.

El contenido “los movimiento del plano” está inmerso dentro de la gama de conocimientos geométricos y aunque éstos no ocupan un lugar cimero en estos momentos, no podemos dejar de destacar su gran utilidad en servir de base para introducir nuevos contenidos y desarrollarlos manteniendo vigente el concepto de movimiento y sus propiedades.

No podemos olvidar, al realizar este trabajo, la investigación: “Desarrollo de la línea directriz geometría en la secundaria básica” que culminó en el curso 96-97 y entre las dificultades detectadas allí, se encuentra la poca variedad y deficiente graduación de los ejercicios, sobre todo los que constituyan ejercicios problémicos de Matemática. El presente trabajo debe contribuir a cumplimentar la sugerencia de la investigación, de presentar, bien estructuradas, propuestas que ayuden a eliminar las deficiencias constatadas en este sentido.

Teniendo en cuenta todo lo planteado anteriormente, proponemos **una relación de ejercicios que constituyen problemas matemáticos sobre movimientos en el plano que contribuyan a la fijación de los contenidos del tema de “Geometría Plana” en 7mo. Grado.**

DESARROLLO:

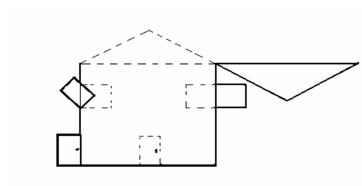
Para seleccionar y crear problemas matemáticos convenientes al contenido y al grado nos apoyamos en los siguientes planteamientos teóricos:

- Una definición de problema matemático. La que hace referencia a que el alumno conoce de dónde se parte y a dónde debe llegar, pero la vía de solución es desconocida. Para que constituya un problema el alumno debe estar motivado, es decir, debe tener interés en resolverlo.

- El carácter sistémico de la materia y la estructura de la formación matemática escolar donde cada contenido se apoya en el anterior y no existe alguno con independencia del resto. En los problemas que proponemos, relacionamos los movimientos con la teoría de triángulos, cuadriláteros, etc, de una manera natural y sin complicaciones extremas que ayuden a calzar unos contenidos con otros. Los movimientos en el plano se introducen en la enseñanza primaria y al aplicarlos en la secundaria básica resulta una posibilidad efectiva de vincular ambas enseñanzas.
- Las formas especiales de la fijación: ejercitación, repaso, sistematización, profundización y la aplicación. Los problemas los hemos enmarcados en la forma de repaso pues deben situarse al final de la unidad ya que uno de sus objetivos es mantener la vigencia y necesidad del concepto de movimiento.
- La aplicación de formas de trabajo independiente de los alumnos. Se plantean problemas geométricos donde el alumno tenga que exponer las diferentes posibilidades al responder, en el orden que él lo considere y ejercicios de nuevo tipo donde el que responde dice todo sin limitaciones porque son de respuestas abiertas. De esta manera se contribuye a la flexibilidad del pensamiento y a la creatividad por parte de los alumnos.
- Los requisitos generales que debe cumplir una relación de ejercicios, cualesquiera sea la forma de fijación para la que ha sido creada: asequibilidad, actualidad, variedad y profundidad; teniendo en cuenta las exigencias del programa.
- Indicaciones metodológicas que contribuyen al éxito de una clase de repaso.
- Algunas ideas y tendencias en la resolución de problemas.

Seguidamente se plantea una selección de los ejercicios propuestos de tal manera que permitan al lector tener una idea de las posibilidades de todos los que aparecen en el trabajo.

5. A un pintor se le han cambiado de posición algunas componentes de su dibujo. Ayúdalo a ponerlos en su sitio planteando mediante qué movimientos del plano es posible lograrlo

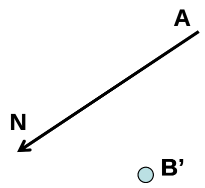


6. Determine en cada caso, los elementos necesarios para completar la ilustración donde se muestra el segmento AB y su imagen el segmento A' B'

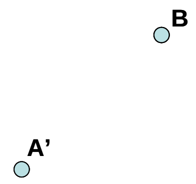
a) Reflexión del eje r

b) simetría central de centro O.

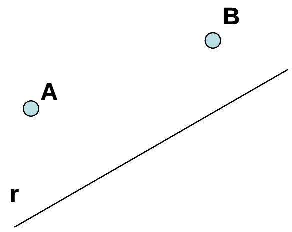
c) traslación de vector AN.



d) rotación de centro A y ángulo de 90



3. ¿Cuál es el movimiento del plano mediante el cual un triángulo rectángulo y su imagen forman un triángulo isósceles?
4. Analice si existe algún caso en que las rectas m y m' sean perpendiculares cuando una es la imagen de la otra por una simetría central de centro O.
5. ¿ Dónde estará situado el eje de simetría para que un ángulo se transforme en sí mismo?
6. Considere los diferentes tipos de triángulos y analice mediante qué movimiento del plano el triángulo y su imagen forman un paralelogramo.
7. Identifique y caracterice los movimientos que cumplen la condición expresada en cada uno de los siguientes incisos:
    a) las diagonales del rombo se transforman en sí mismas.
    b) un rectángulo se transforma en sí mismo
    c) Permanece fijo un vértice en un triángulo.
    d) un triángulo equilátero ABC tal que $A \rightarrow C$, $C \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$
    e) permanecen fijos dos lados consecutivos de un polígono.
8. Se necesita trasladar un ganado de la posición A la posición B, pasando previamente por el río r para dar de beber agua a los animales. Diga cuál es el recorrido más corto.



En los ejercicios que conforman la propuesta y en los que se puedan crear, es necesario tener en cuenta algunas consideraciones, como por ejemplo: el uso de hojas de trabajo que el maestro debe preparar y entregárselas a los alumnos en el momento de situar determinado ejercicio e insistir en el uso correcto de los instrumentos de dibujo y en objetivos generales educativos: precisión, exactitud, limpieza, tenacidad.

Durante toda la actividad de crear ejercicios con situaciones novedosas se necesitó realizar validaciones de ellos para lo cual se les situaron los ejercicios a estudiantes, no solamente de la enseñanza secundaria sino también a los del Pedagógico explicándoles previamente la necesidad de su cooperación para dar cumplimiento a tareas de una investigación. Entre otras consideraciones, para obtener criterios más completos, se les solicitó que razonaran en voz alta todo lo que pensaran para tomar notas y conocer de esta manera la secuencia de sus razonamientos. Obviamente con cada alumno se trabajó individualmente, y esto permitió controlar la muestra de una forma más objetiva pues se seleccionaron estudiantes con diferentes niveles de conocimiento y realizar los cambios convenientes en los ejercicios, además de la creación de otros más adecuados.

CONCLUSIONES:

Los problemas planteados, con su correspondiente validación, permitieron el cumplimiento del objetivo declarado; aunque se va por encima de la posibilidad de su empleo para una clase de repaso pues muchas de las situaciones creadas permiten una sistematización de los contenidos de la Geometría Plana.

La muestra seleccionada es representativa y confiable pues en ella se previeron diferentes niveles de enseñanza y diferentes niveles de asimilación.

Este trabajo no culmina aquí pues mantenemos el interés y la necesidad de continuar profundizando en cómo aprender matemática a través de una ejercitación que permita al estudiante la creatividad y la espontaneidad, pero, convencidos de que no puede dejarse a la intuición, a la experiencia, a la casualidad, etc, por parte del docente pues todo esto ayuda pero resulta insuficiente.

BIBLIOGRAFIA:

Ballester, S. (1995). La sistematización de los conocimientos matemáticos. Editorial Academia. La Habana.

Ballester, S. (1995). *La sistematización de los conocimientos matemáticos.* Editorial Academia. La Habana.

Ministerio de Educación de Cuba. (1988). *Matemática 7mo.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Ministerio de Educación de Cuba. (1988). *Matemática 7mo. Programa*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática,* 2da. Parte. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Schoenfeld, A. (1985). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas.* Ministerio de Educación y Ciencias. Madrid.

REFLEXIONES ACERCA DE LA MATEMÁTICA EN LA INCERTIDUMBRE

MSc. Guillermo López Domínguez
CUJAE, La Habana, Cuba
glopez@ind.cujae.edu.cu

RESUMEN

Durante siglos se ha sostenido que la Naturaleza está obligada a seguir ciertas reglas que conducen a estructuras basadas en la certeza, no debe extrañar, pues, que la Matemática, y junto a ella prácticamente todas las ramas de la Ciencia, se hayan apoyado en este principio, pero en unos sistemas sociales cada vez más complejos y mutantes resulta difícil imaginar que bastan esas reglas deterministas para explicar el mundo actual y predecir el futuro.
En el año 1965 se inician los trabajos que permitieron el surgimiento de una nueva matemática, la Matemática de la incertidumbre, enriquecida con el aporte de miles de investigadores en todo el mundo y que ha probado ampliamente su utilidad para abordar los nuevos problemas que se presentan en la actualidad.
Los resultados de una búsqueda realizada en Internet arrojan que en un gran número de universidades e incluso en varios centros de enseñanza media superior se abordan los contenidos fundamentales de esta, también llamada Matemática borrosa, sobre todo en Europa y América del Norte y principalmente en ingeniería y ciencias económicas. Este trabajo pretende tributar hacia el objetivo de comenzar a preocuparnos seriamente en nuestra región por la difusión de estos temas y su futura incorporación a planes y programas de estudios.

El principio de la simultaneidad gradual

La matemática tradicional está basada en el principio del tercio excluso. Un único operador lógico permite encadenar proposiciones hacia adelante con el “modus ponens” y hacia atrás con el “modus tollens”. El razonamiento lógico expresado mediante símbolos ha dado lugar al desarrollo de la matemática, que con el tiempo se fue enriqueciendo, pero siempre dentro de cierto mecanicismo. Sobre estos razonamientos lógicos se han elaborado técnicas específicas, casi siempre en forma de modelos y algoritmos, con el objetivo de construir instrumentos capaces de prestar una ayuda para la toma de decisiones.

En los momentos actuales no es posible asentar toda la actividad investigadora sobre el principio del tercio excluso, pues ya no explica las complejas realidades de nuestra época; cada vez más lo subjetivo cobra mayor importancia. De esta necesidad surgió el principio de la simultaneidad gradual:

“Una proposición puede ser a la vez verdadera y falsa, a condición de asignar un grado a su verdad y un grado a su falsedad.”

Este principio generaliza el del tercio excluso al incluirlo como un caso particular y permite sustentar los distintos operadores lógicos que habían ido surgiendo como consecuencia del desarrollo de la matemática de la incertidumbre. Trataremos de explicarlo a continuación.

Hay ciertas proposiciones que caben perfectamente dentro del principio del tercio excluso, tales como “Pedro pertenece al sexo masculino”, pero se pueden encontrar otras proposiciones para las cuales el cumplimiento de dicho principio no resulta tan claro. Proposiciones tales como “Pedro es alto” plantean ciertos problemas dada la relatividad del calificativo alto. Para solucionarlos, tradicionalmente se ha acudido a ciertos umbrales (subjetivos y arbitrarios) a partir de los cuales se asume la verdad de la proposición. Si, por ejemplo, se aceptara en este caso un umbral de 1.80 m, quienes lleguen o sobrepasen esa altura serán considerados personas altas y no altas los restantes. De esta forma siempre se producen contradicciones, tales como aceptar que una persona de 1.80 m es alta y otra de 1.799 m no. La aceptación del principio de la simultaneidad gradual permite resolver estos inconvenientes, expliquemos cómo.

Busquemos aquellas medidas para las cuales se cumple plenamente la verdad y la falsedad de la proposición "Fulano es alto". El hombre más alto del mundo reconocido en el libro de récords Guinness midió 2.72 m y el más pequeño 0.57 m. A partir de estas cotas, en este caso numéricas aunque no tienen por qué ser siempre así, se establece un orden desde la verdad (alto) hasta la falsedad (bajo), que puede enmarcarse por un intervalo como el [0.1] o por cualquier otro concepto que permita el ordenamiento. Si se acepta el intervalo [0.1] asignaremos un 1 a la verdad y un 0 a la falsedad y entonces el gigante de 2.72 m será alto en grado 1 y el enano de 0.57 m alto en grado 0. Personas de 1.70 m pudieran considerarse altas en un grado quizás 0.3 y aceptaríamos que cuando más nos acercamos a la verdad de la proposición el grado asignado se halla más próximo a 1 y cuando más nos alejamos más próximo a 0. En la práctica es usual asociar los valores del intervalo [0,1] a cierta escala semántica, fácil de interpretar por todos como la siguiente, denominada escala endecadaria por sus 11 posiciones:

1	Perfecto
0.9	Muy bueno
0.8	Bueno
0.7	Bastante bueno
0.6	Más bien bueno
0.5	Regular
0.4	Más bien malo
0.3	Bastante malo
0.2	Malo
0.1	Muy malo
0	Pésimo

Pero cuando se formula la falsedad de la proposición, ahora "no alto", o si se quiere "bajo", el gigante sería bajo en grado 0 y el enano bajo en grado 1. De esta manera cualquier persona es alta y baja a la vez, si acompañamos el calificativo de un grado, expresable numéricamente o no.

Se ha encontrado un principio que resuelve las limitaciones existentes en la lógica formal surgida del rigor derivado del principio del tercio excluso y que permite el desarrollo de las llamadas lógicas multivalentes y su aplicación a prácticamente todas las ramas de la Ciencia.

Los números borrosos

La matemática de la incertidumbre se divide en dos grandes campos: matemática numérica y matemática no numérica. En la primera el eslabón fundamental es el número borroso, cuya definición inicia el proceso de reivindicación de lo subjetivo como elemento integrante del conocimiento científico, ya que con estos números se pueden representar los fenómenos a partir de estimaciones objetivas pero también subjetivas y generalizar los modelos y algoritmos clásicos sustituyendo el número cierto o el aleatorio por el número incierto (borroso).

Un número borroso es un subconjunto borroso que posee tres características:

- El referencial pertenece al campo de los reales.

- La función característica de pertenencia es normal.
- La función característica de pertenencia es convexa.

La representación más simple de un número borroso A es el intervalo de confianza:

$A = [a_1,a_2]$

Es fácil ver que un número así es muy adecuado para representar estimaciones o predicciones (con mayor o menor grado de subjetividad) acerca de la futura ocurrencia de fenómenos, signados cada vez más por la incertidumbre. Por ejemplo, si una empresa se viera precisada a estimar sus ganancias para el próximo año podría afirmar que estarían entre $1,000,000 ($a_1$) y $1,200,000 ($a_2$) y sus directivos estarían más a gusto que si fueran forzados a dar una cifra exacta. Si respondieran que pronostican ganancias entre $1,000,000 y $1,200,000, pero lo más probable es un valor de $1,050,000 ya esto no es un intervalo de confianza sino lo que se conoce como tripleta de confianza $[a_1,a_2,a_3]$, donde a_1 y a_3 equivalen a los extremos del intervalo de confianza y a_2 representa el valor más probable (máximo de presunción). También son muy utilizados los cuádruplos de confianza $(a_1, [a_2,a_3],a_4)$ donde a_1 y a_4 son los extremos del intervalo de confianza y $[a_2,a_3]$ es el intervalo de máxima presunción.

Para todas estas representaciones de un número borroso se ha desarrollado una aritmética que amplía la aritmética tradicional con la introducción de nuevos operadores, tales como los de maximización, minimización, comparación y otros que permiten el desarrollo de teorías, métodos y procedimientos para el tratamiento de los problemas decisionales en prácticamente todas las esferas de la actividad humana. Combinando adecuadamente la aritmética de la incertidumbre y la investigación operativa tradicional se pudo crear instrumentos "inciertos" cada vez más perfeccionados.

Aplicaciones

Entre otras muchas, las matemáticas de la incertidumbre han mostrado su versatilidad en los siguientes campos:

- Ciencias Económicas y de Gestión

Se abordan múltiples problemas, tales como la circulación monetaria, la contabilidad, la actividad presupuestaria, el análisis de inversiones y de riesgos, la renovación de equipos y otros. Existe una importante organización, la SIGEF (Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy) con gran aval científico y práctico que lidera la actividad mundial en esta rama.

- Ciencias Técnicas

El desarrollo fundamentalmente del trabajo con las lógicas multivalentes ha permitido obtener componentes, dispositivos y sistemas de control inimaginables hasta hace poco tiempo, aplicables tanto en la industria como en la vida doméstica (controles de velocidad en medios de transporte, equipos electrodomésticos "inteligentes" y muchos más).

- Ciencias Sociales

El trabajo dirigido a la búsqueda de elementos que permitieran mitigar el grado de subjetividad inherente a la mayor parte de las informaciones numéricas disponibles en las Ciencias Sociales llevó a la elaboración del concepto de **expertón**, número incierto considerado como el más general resultante de la agregación del conocimiento de varios expertos. El desarrollo de la matemática no numérica de la incertidumbre consolidó la “Teoría de los efectos olvidados” y creó la “Teoría de las afinidades” como generalización de los conceptos de semejanza y similitud.

- Teoría de la Decisión

La Teoría de la Decisión en la incertidumbre, de reciente aparición, construida sobre la base de cuatro conceptos fundamentales: relación, asignación, agrupación y ordenación permite adoptar decisiones sin necesidad de recurrir a elementos numéricos. Su utilidad está dada por el hecho de que actualmente la incertidumbre en muchos procesos es tal que ni siquiera es posible acotar los fenómenos para asignarles el más elemental de los números inciertos.

Como conclusiones de este trabajo se pueden resaltar los siguientes aspectos:

- La matemática tradicional, con todo y su desarrollo a lo largo de miles de años no puede dar respuesta cabal a muchos de los problemas prácticos que se le presentan a la humanidad en nuestros tiempos.
- La matemática de la incertidumbre aprovecha el desarrollo matemático anterior, ha probado su amplia eficacia en la solución de múltiples problemas actuales y parece estar apta para abordar los que se pudieran presentar en el futuro.
- El mayor desarrollo obtenido en esta nueva matemática se encuentra fundamentalmente en Europa y Norteamérica. Es necesario que nuestros investigadores y docentes de América Latina se vayan interesando de modo creciente en esta temática, incluso que se vaya pensando en su introducción en nuestras escuelas y universidades, a fin de prepararnos para dar solución a los múltiples problemas que irán surgiendo en este mundo cada vez más globalizado e impredecible.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Gil ,A. (1990) *El análisis financiero en la incertidumbre.* Editorial Ariel, Barcelona.

2. Kaufmann,A. y Gil, J. (1990). *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre. Elementos básicos para su aplicación en economía.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.

3. Kaufmann, A. y Gil, J. (1993). *Técnicas especiales para la gestión de expertos.* Editorial Milladoiro, Santiago de Compostela.

Reportes de Investigación

EL SOROBÁN COMO HERRAMIENTA PARA DESARROLLAR HABILIDADES DEL CÁLCULO MENTAL

Alma Rosa Cantón Lojero y Simón Mochón
Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-I.P.N. México
acanton1@starmedia.com y smochona@conacyt.mx

RESUMEN

El presente estudio tiene como objetivo principal el de averiguar si el trabajo con el sorobán ayuda a mejorar las estrategias de cálculo mental, pues éste ha dejado de tener interés en la mayoría de las escuelas primarias, por la forma como es abordado en ellas. El análisis se centra en la observación de los alumnos cuando se les presentan situaciones de resolución de operaciones de suma y resta antes y después del uso del sorobán. Este estudio, realizado con un grupo de cuarto grado de primaria, ha mostrado la importancia de variar actividades en cuanto a la concepción y manejo del cálculo mental. Se presentan algunos de los resultados obtenidos en un programa de trabajo aplicado a los alumnos.

INTRODUCCIÓN

A través de cálculo mental los estudiantes alcanzan un sentido numérico que les permite afrontar, entender, analizar y resolver problemas que se les presentan cotidianamente.

El cálculo mental es considerado como una de las habilidades que debe adquirir el alumno para desarrollar un razonamiento lógico que le permita resolver problemas y operaciones aritméticas de una forma más precisa. También se concibe como series de procedimientos mentales diferentes de los algoritmos usuales, utilizados para llevar a cabo rápidas y exactas operaciones aritméticas (Mochón, Vázquez, 1998).

Gómez (1989) expone que hay una razón para incluir el cálculo mental en las clases y es que la mayoría de las personas que son consideradas hábiles para calcular, rara vez hacen uso de los algoritmos usuales, sin embargo, la enseñanza del cálculo mental en la escuela primaria se realiza de manera inapropiada y debido a una falta de método, en la mayoría de los casos, no se ejercita. Mochón y Vázquez (1995) expresan que el cálculo mental ha sido descuidado en la enseñanza de las matemáticas.

¿Por qué incluir al sorobán como herramienta auxiliar para desarrollar el cálculo mental? Kamii, C (1995) nos dice que en comparación con la acción de escribir, las acciones físicas con cuentas están relacionadas mucho más directamente con acciones mentales; de la misma manera, Centeno (1988) menciona que el ábaco es un instrumento importante en la historia del cálculo, pues no sólo sirvió para contar, sino también para hacer cálculos muy complicados; también Gómez (1989) manifiesta que los ábacos potencian la participación, la autonomía, el trabajo en grupo, la firmeza y seguridad en la presentación de resultados y descubrimientos, además, permiten la comprobación, la reversibilidad y la corrección, así como la expresión de cantidades que resultan de difícil comprensión. El ábaco pasará así de ser una herramienta para calcular a ser un instrumento para comprender. Bruner (1971) nos habla de la importancia de adquirir estrategias que reduzcan la complejidad y la confusión que día a día se manejan en las aulas; dicha adquisición permitirá construir modelos que le permitan a los estudiantes dar respuestas acertadas en la resolución de problemas. Con el uso del sorobán pretendemos, efectivamente, que los alumnos adquieran estrategias que les ayuden a desarrollar sus habilidades para el cálculo mental.

El sorobán tiene ciertas propiedades que nos pueden ayudar en la enseñanza del cálculo mental, entre las que podemos mencionar: que es un instrumento basado en el sistema decimal; que sólo son cinco cuentas las que tiene cada eje, una de ellas, la superior, *vale* cinco y se emplea como unidad intermedia de orden superior, lo cual facilita su manejo, pues se reconoce de un vistazo el cinco, seis, siete, ocho y nueve (Kamii, 1995); que se trabajan los complementos de cinco y de diez como estrategias que permiten desarrollar poco a poco la habilidad de conteo.

Se pretende investigar que el sorobán puede resultar una buena alternativa para desarrollar la enseñanza del cálculo mental, pues su uso puede repercutir en la adquisición de habilidades matemáticas, tan necesarias para lograr la resolución de operaciones aritméticas de forma más natural, dentro del salón de clases. El contar con las habilidades, entre otras cosas, permite la comunicación y comprensión de la información matemática presentada a través de medios de distinta índole (Plan y programas de estudio educación básica primaria, 1993).

No obstante la importancia que adquiere el sorobán, su enseñanza no representa la finalidad en este estudio, sino que sólo será una herramienta que propicie el desarrollo de la habilidad para el cálculo mental.

Pese a todo el trabajo sugerido para desarrollar las habilidades de cálculo mental, en nuestro país, propiamente ha sido área de investigación no explorada y que requiere ser abordada por la Matemática Educativa (Vázquez, 1994).

Metodología

Se llevó a cabo un experimento didáctico en donde se desarrollaron actividades relacionadas con el conocimiento y manejo del sorobán, en primer lugar, y con la adquisición de estrategias para el cálculo mental a través de su uso, en segundo lugar.

Los instrumentos metodológicos considerados en la presente investigación fueron: **Un cuestionario inicial** dividido en tres partes, en la primera se formularon preguntas sobre el gusto y manejo de operaciones resueltas con cálculo mental, en la segunda se plantearon sumas y restas de uno, dos y tres dígitos, cuyos resultados debían obtenerse con cálculo mental y en la tercera se plantearon operaciones de suma y resta de fácil resolución que permitían que los alumnos resolvieran otras en las que sólo variaba uno o dos dígitos; tuvo como propósito conocer las estrategias de cálculo mental antes de manejar el sorobán y ofrecer a los alumnos una forma de resolución de operaciones apoyada en el redondeo y en la compensación. **Un programa de enseñanza** desarrollado en quince sesiones de una hora cada una empleando el sorobán; se hizo un diseño de actividades específico para cada sesión. El propósito fue proporcionar a los alumnos la información suficiente para que aprendieran a manejar el sorobán y poder adquirir estrategias que les permitieran resolver operaciones de suma y resta a través del cálculo mental. **Un cuestionario final** que permitió definir los avances alcanzados en cuanto a las estrategias utilizadas en la resolución de sumas y restas, después de haber manejado el sorobán.

La investigación se realizó con el grupo de cuarto grado, grupo “D” de la escuela primaria 21-0752-115-15-x-016 “Presidente Pascual Ortiz Rubio” de la ciudad de México, misma que inició el 29 de octubre de 2001 y concluyó el 17 de diciembre del mismo año.

El cuestionario inicial se aplicó a 6 alumnos elegidos al azar, 3 hombres y 3 mujeres; posteriormente el programa de enseñanza se llevó a cabo con todo el grupo conformado por 23 alumnos, de los cuales 11 son mujeres y 12 son hombres, en donde se observaba con mayor detenimiento el trabajo realizado por los alumnos seleccionados; y la aplicación del cuestionario final, sólo pudo realizarse a 5 alumnos, pues una de las alumnas no concluyó con todo el programa por motivos de salud.

Las actividades que se desarrollaron fueron diseñadas por la investigadora, considerando los propósitos que se establecieron previamente para cada sesión. El papel asumido por la investigadora fue de profesora frente al grupo.

Para trabajar con los alumnos, fueron entregados ábacos individuales y se utilizó, además, un ábaco didáctico en el que los alumnos podían pasar a corroborar sus respuestas o a realizar algún ejercicio que no había sido entendido, también fueron entregadas hojas con actividades. En cada sesión se videograbaron las acciones, también se grabaron las estrategias que utilizaban los alumnos cuando resolvían alguna suma o resta y que expresaban en forma verbal, completaban los ejercicios planteados en las hojas de trabajo; todo esto relacionado con el sorobán, pero al finalizar cada sesión, se hacía una práctica de cálculo mental en donde se ponían en juego las acciones llevadas a cabo en ese día. Al terminar las actividades con el grupo se tomaba nota de lo más sobresaliente de cada sesión.

Al finalizar todo el programa, se entrevistó a 10 alumnos y al profesor del grupo con el propósito de conocer su opinión sobre las actividades realizadas.

Descripción del programa de enseñanza

Este programa de enseñanza tuvo como propósito brindar al alumno una instrucción para que aprenda a manejar el sorobán y adquiera la habilidad necesaria al resolver las operaciones de suma y resta que se le presenten en el cálculo mental. Para este programa, se agruparon las operaciones, de acuerdo con la problemática mencionada: Grupo 1, comienza el desarrollo con actividades simples de un dígito. Grupo 2, actividades de un dígito manejando el complemento de 5. Grupo 3, actividades de un dígito manejando el complemento de 10. Grupo 4, actividades de un dígito con el complemento de 5 y de 10. Grupo 5, actividades simples de dos dígitos. Grupo 6, actividades de dos dígitos con el complemento de 5. Grupo 7, actividades de dos dígitos con el complemento de 10. Grupo 8, actividades de dos dígitos con el complemento de 5 y de 10. Grupo 9, actividades simples de tres dígitos. Grupo 10, actividades de tres dígitos con el complemento de 5. Grupo 11, actividades de tres dígitos con el complemento de 10. Grupo 12, actividades de tres dígitos con el complemento de 5 y de 10.

En cada sesión se hicieron observaciones de cómo efectuaban el cálculo mental y la manera en que realizaban las compensaciones; esto permitió ver el alcance y dificultades que se les presentaron a los alumnos cuando hicieron operaciones con el sorobán primero y después con cálculo mental; pero sobretodo los cambios ocurridos al respecto al final del programa.

Resultados

En este punto se enfocan algunos de los resultados obtenidos en el análisis de los datos que se obtuvieron en las 15 sesiones.

Se observó que el primer acercamiento que hubo al manejar el sorobán, no fue tan sencillo como se esperaba. Adán y Yadira, dos de los alumnos entrevistados, primero se dedicaron a conocer, manipular, jugar con el sorobán, antes de realizar las actividades propuestas.

Inicialmente no trabajaron lo que se les solicitó, pues ellos manejaron el sorobán sólo a manera de exploración. Posteriormente, Yadira no pudo terminar el programa de enseñanza y sólo pudo estar presente en seis sesiones no continuas, después se ausentó por motivos de salud.

Se representaron en primer lugar, los números del 1 al 9 y cuando se introdujo el 10, la investigadora cuestionó cómo se realizaría dicha representación, a lo que algunos alumnos respondieron:

- “tenemos que considerar la cuenta que está junto a la que representa el 5, porque 5 más 5 son 10” dijo un alumno
- otro alumno mencionó “el 10 es una cuenta del siguiente eje pero sin cancelar las cuentas que están en el eje de las unidades”
- un alumno más dijo “el 10 se pone en el siguiente eje, porque en éste –señalando el eje de las unidades- ya no me alcanzan las cuentas, aunque no sé dónde va”
- “yo creo que para el 10, se sube una cuenta inferior del siguiente eje porque es como si fuera el uno de las unidades, es como si fuera el uno, pero de otro eje, el de las decenas”
- un alumno más dijo “el uno corresponde a una cuenta de las decenas y el cero, a cero cuentas de las unidades, es decir, que el espacio de las unidades está cancelado, por lo que las unidades es igual a cero”
- cuando un alumno vio en el pizarrón dibujada la cuenta que vale uno en el eje de las decenas y cero cuentas en el eje de las unidades, expresó “es como si pudiera ver por primera vez al cero”.

A través de estos comentarios, nos damos cuenta de la importancia que adquirió el conocimiento y manejo del sistema posicional, según expresó el profesor de grupo:

- “a partir del trabajo que se ha realizado con el sorobán, los alumnos entienden mejor los conceptos de unidad, decena y centena; además, pueden representar mejor las cantidades que se les solicitan”.

En cuanto al trabajo de cálculo mental, Mariana, una de las alumnas entrevistadas, presentó cambios en las estrategias utilizadas. En el cuestionario inicial, todas las operaciones presentadas fueron resueltas a través del conteo de sus dedos, ella contaba de uno en uno, ya sea para sumar o para restar, utilizando todos los dedos y aunque tardaba un poco en dar el resultado, lo daba de manera exacta o aproximada. En la suma de 9 + 7, por ejemplo, expresa cómo la resolvió:

- “pongo 9 en mi cabeza y luego uso mis dedos para contar 7 más, de uno en uno, ... el resultado es 16”

En el cuestionario final, ante la misma operación, ella expresó:

- “puse 9 en mi cabeza y luego subo 7 como si estuviera usando el ábaco, es decir, subo una cuenta de diez y formo el 19, pero como sólo quiero 7, entonces tengo que cancelar 3 y entonces me quedan 16”

En este ejemplo, Mariana usó la estrategia tal como se le enseñó en el programa, por lo que se aprecia que pudo aplicar la compensación para resolver esta operación. También observamos que al sumar el 10, empieza por la decena y no aplica el algoritmo convencional de sumar primero las unidades y después las decenas; ésta es otra característica al trabajar con el sorobán.

En el cuestionario inicial, a través de las respuestas de los alumnos a una pregunta de que si había realizado alguna vez el cálculo mental, nos percatamos que ellos consideran a las tablas de multiplicar como actividades de cálculo mental

CONCLUSIONES

Haciendo la comparación de los resultados, tanto del cuestionario inicial como del final, se observa que en algunos ejercicios, si hubo mejoría en las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver las operaciones de suma y de resta con uno, dos y tres dígitos, después de haber manipulado el sorobán. El análisis de los resultados del cuestionario inicial y del cuestionario final, también nos permite comentar que los alumnos son capaces de adquirir, en primer lugar, una disciplina para manejar el sorobán y en segundo lugar, algunos elementos básicos que les permitieron resolver diversas operaciones de suma y de resta con mayor facilidad que al inicio de la actividad, tal como lo pudimos apreciar en el caso de Mariana.

Los resultados obtenidos en el programa de enseñanza, apoyan la opinión de que el conocimiento y manejo del sorobán pueden propiciar a estimular el cálculo mental en la escuela primaria. Dichos resultados también sugieren, que al trabajar el cálculo mental, debemos considerar los conocimientos previos que traen los alumnos, pues en esta ocasión, nos dimos cuenta, al inicio del programa de enseñanza, de la falta de afirmación de contenidos relacionados con el sistema posicional de numeración.

Una de las razones por las que en México ha habido un alejamiento de la enseñanza de cálculo mental, se debe al desconocimiento de una metodología adecuada al respecto; sin embargo, al revisar la secuencia propuesta por la SEP para trabajar estos contenidos, vemos que desde el primer grado consideran que el cálculo mental favorece la puesta en juego de estrategias como sumar primero las decenas y después las unidades, tal como se realiza con el sorobán. Aprovechar y conocer dichas estrategias nos permite conocer los pensamientos informales de los alumnos cuando resuelven problemas aritméticos.

En cuarto grado, que es el que nos ocupa, el Libro del Maestro nos habla de la importancia de practicar frecuentemente el cálculo mental, pues ello puede ayudar a que el alumno discrimine un resultado lógico de otro que no lo es y genere procedimientos propios cuando lleve a cabo operaciones por vías distintas a los algoritmos convencionales. Finalmente, esta investigación se convierte en una propuesta para introducir la enseñanza del cálculo mental a través del sorobán.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Bruner, J.S. (1971). *The Relevance of Education*. Nueva York. Traducción al español de Alejandra Devoto, La Importancia de la Educación. Ediciones Paidos Ibérica S. A. Barcelona, España y Editorial Paidos, SAICF Buenos Aires. 18-21, 121-130.

Centeno, J. (1988). *Números Decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid. Edit. Síntesis. 99-101.

Cockcroff, W. H. (1982). *Mathematics counts*. Report of the Committee of Inquiry into The Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmansship of dr. W. H. Cockcroff. London, England: Her Majesty's Stationery office. 92, 114.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holland: D. Reidel Publishing Company. 1-6.

Gómez, A.B. (1989). *Numeración y Cálculo*. Editorial Síntesis. Madrid, España. 65-69, 163-167.

Hope, J. A. (1985). "Unravelling the Mysteries of Expert Mental Calculation. Educational" *Studies in Mathematics*, vol. 16 (4). 355-374.

Ifra, G. (1985). *Las Cifras. Historia de una gran invención*. Alianza Editorial. Madrid, España, 1987.

Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Aprendizaje Visor. 35-47.

Mochón S. y Vázquez R. (1995). "Cálculo Mental y Estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza". *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamericano, S.A. de C.V. Vol. 7 (3). 93-105.

Mochón S. y Vázquez R. (1998). "Strategies of Mental Computation Used by Elementary and Secondary School Children". FOCUS On *Learning Problems in Mathematics*. Center for Research and Advanced Studies, I.P.N., México. Volumen 20 (1). 35.

Parra C. y Saiz, I. (1994). *Didáctica de Matemáticas, Aportes y Reflexiones*. (Comp.). Coordinación del Proyecto de Didácticas Especiales, Hilda Weissmann. Paidos Buenos Aires, Barcelona, México, 1º. Edición.

SEP (1993). *Plan y Programas de Estudio. Educación Básica Primaria*. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

SEP (1999) *Libro para el Maestro. Matemáticas*. Cuarto grado. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México. 23.

Vázquez, R. (1994). *Una Investigación de las Estrategias de Cálculo Mental utilizadas por Niños Estudiantes de Primaria y Secundaria*. Tesis de Maestría, México. CINVESTAV, Matemática Educativa.

LA METODOLOGÍA CONTEXTUAL
APLICADA A UN CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Armando López Zamudio, Salvador Escobar Argote.
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No.94, México
larmandozam@hotmail.com Esco16@hotmail.com

RESUMEN:

La metodología contextual está directamente relacionada con la manera en que aprenden los estudiantes, y señala que éstos logran aprendizajes significativos cuando procesan información o conocimiento, de tal manera que lo que aprenden tiene sentido dentro de su marco de referencia, y es útil para su vida. En este trabajo se dan a conocer los resultados de una experimentación que usó la metodología contextual en un curso de Geometría Analítica para estudiantes de bachillerato (estudiantes de 16-17 años).

Antecedentes

Es indudable que el fracaso en los aprendizajes de los estudiantes de matemáticas está presente en casi todas las latitudes, por lo que la búsqueda de cómo y con qué enseñar para que el proceso enseñanza-aprendizaje logre su objetivo está vigente. Una posible alternativa es la metodología contextual, que enfatiza el desarrollo de habilidades tales como la lectura, la escritura, la habilidad para relacionarse con otros dentro y fuera del aula, las habilidades de razonamiento que invitan a pensar y resolver problemas como un sistema y no como un conjunto de tareas y problemas aislados.

El NCTM (1989, 2000) recomienda para los grados que corresponden al bachillerato, incluir en el *curriculum*, refinamiento y extensión de métodos de resolución de problemas para que todos los estudiantes puedan aplicar procesos de modelación matemática a problemas del mundo real.

Existen varias formas de aprender según lo señaló el Dr. Gardner (1983) pues menciona que los individuos tienen inteligencias múltiples, por lo que la metodología contextual considera todos estos estilos de aprendizaje, tales como: *relación* (aprender de experiencias de la vida real), *transferencia* (aprender de lo que el estudiante ya sabe) *aplicación* (aprender a usar el concepto y la información) *experimentación* (aprenden a descubrir, explorar e inventar), *cooperación* (aprenden a compartir experiencias y a comunicarse).

Tomando estos antecedentes, un grupo académico de profesores en ejercicio, representantes de casi todos los estados de la República Mexicana de la Dirección General de Educación Tecnológica, fue reunido en varias ocasiones para diseñar un material bibliográfico que rescatara mucho de la experiencia docente y considerara la metodología contextual.

Objetivos

En este trabajo se propuso probar la efectividad de los materiales bibliográficos antes mencionados. Además, registrar una experiencia en el aula siguiendo la metodología contextual. Aquí se dan a conocer los resultados de un curso de Geometría Analítica impartido a estudiantes del tercer semestre de bachillerato, así como algunos ejemplos de tipos de actividades del aula que resultaron importantes e interesantes para los involucrados en esta experiencia.

Metodología

Se escogieron dos grupos de 40 alumnos cada uno, el grupo A fue el grupo testigo (tomó clases de manera tradicional), este grupo es del bachillerato económico-administrativo de la especialidad de Contabilidad, considerado académicamente en promedio como el mejor de la especialidad; el docente que impartió este grupo es el que lo ha hecho por 15 generaciones, por lo que se considera es un docente con bastante experiencia.

EL grupo B fue el grupo piloto (tomó clase con la metodología contextual). Este es un grupo del bachillerato físico-matemático de la especialidad de Computación (la cantidad de contenidos de matemáticas es el mismo hasta el cuarto semestre que el bachillerato económico administrativo) y se considera es el mejor grupo académicamente en promedio de la especialidad.

Las sesiones fueron de una hora diariamente durante 74 días hábiles. Los temas tratados fueron: distancia entre dos puntos, la recta, las cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola). Cada una de las unidades se introduce con un problema o actividad para motivar. Esta actividad está directamente relacionada con el entorno del estudiante, o con una aplicación significativa en su vida cotidiana. Enseguida se plantean actividades de estudio donde se formalizan definiciones, algoritmos y se resuelven ejemplos. Posteriormente se plantean actividades complementarias donde el estudiante debe asumir retos y compartir métodos de solución, así como resolver sus propios ejercicios.

Se aplicaron por igual a los dos grupos, tres evaluaciones de 30 reactivos de opción múltiple (cuatro opciones), para ser resuelto en dos horas.

Actividades del Aula

Las actividades motivadoras buscan el interés en el tema y la solución de la misma actividad por parte de los alumnos, la manipulación de objetos es deseable como un primer acercamiento a cierto concepto, pues según el Dr. David Kolb (1984) la mayoría de los estudiantes tienden a percibir la información en forma concreta mediante experiencia, sensación, experimentación, acción. Otro tipo de actividad buscará la no existencia de una solución inmediata u obvia, que existan diversos métodos de solución (algebraico, numérico, geométrico). Para garantizar la comunicación interpersonal compartiendo opiniones, pues también es cierto que otra cantidad de alumnos aprende mejor con actividades abstractas a través de la reflexión, de pensar y observar. A pesar de las diferencias individuales en estilos de aprendizaje e inteligencias, todas las capacidades de aprendizaje requieren la interrelación con lo cotidiano.

La enseñanza por medio de ilustraciones y ejemplos es una forma clásica de comprensión y significado. Por ejemplo muchos adultos todavía recuerdan experiencias del jardín de niños o la primaria cuando los llevaron a recoger plantas e insectos para aprender términos y conceptos mientras veían y experimentaban de la naturaleza, en lugar de sólo memorizar una lista de nombres, pueden tocar y oler los objetos al tiempo que aprenden sus nombres.

Es indudable que para alumnos de bachillerato se busca desarrollar habilidades y pensamiento más allá de lo kinestésico; sin embargo, como una estrategia para motivar resulta muy acertada. Por ejemplo, como una introducción al curso de Geometría Analítica, para recordar los nombre de las cónicas, se pide a los alumnos traer cinco zanahorias y un cuchillo o navaja, se realizan cortes a la zanahoria para obtener las cónicas, por ejemplo, cortando la parte superior de forma perpendicular a la altura de la zanahoria, para obtener en la superficie del corte, la circunferencia, cortando la parte superior de la zanahoria en un ángulo de 30°, obtenemos en la superficie del corte la elipse, haciendo otros cortes se obtiene la parábola y la hipérbola.

Algunas observaciones que los estudiantes hacen es que, mientras la zanahoria este mejor torneada y se asemeje más a un cono, las cónicas son más perfectas. Ellos llegaron a sugerir otros lugares donde las cónicas se observan, por ejemplo, en las sombras que provoca una lámpara al ser proyectada en diferentes ángulos sobre un muro.

Otras actividades motivadoras fueron: para introducir el sistema de coordenadas rectangulares, localizar edificios o lugares importantes en un mapa de la localidad partiendo del zócalo.

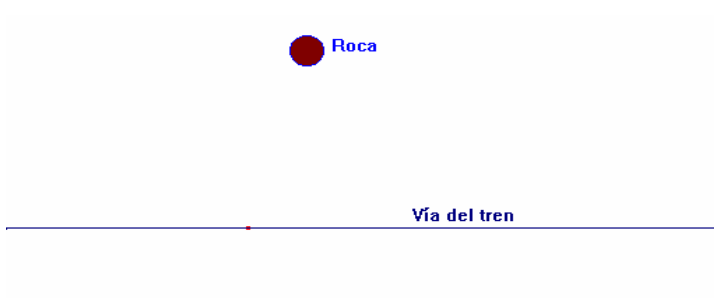
Un problema que interesó mucho a los estudiantes en el tema de la recta fue el siguiente:

> *A Juan le cobran 50 pesos por alquilar una computadora y 2 pesos por cada hoja que imprima, escriba una expresión simbólica que describa el gasto que tuvo Juan por el alquiler de la computadora y la impresión de x número de hojas. (Si representamos al gasto con la variable y).*
>
> **1.**-*Represente diferentes casos haciendo una tabulación.*
>
> **2.**-*Realice una representación gráfica de número de hojas impresas contra pago de Juan.*
>
> **3.**-*¿Cuánto quedó a deber Juan si sólo traía consigo $250 pesos e imprimió 117 hojas?*
>
> **4.**-*¿Cuanto pagó Juan si no imprimió?*

Una actividad de reforzamiento para el tema de la recta, fue pedirle a los alumnos realizaran varios ejercicios usando el software Rectas, Paralelas y Perpendiculares de José Carlos Cortez Zavala, propuesto en el texto Geometría Analítica de Eugenio Filloy y Fernando Hitt (1997), donde los estudiantes pueden trabajar las diferentes representaciones de la recta como es la gráfica, la tabulación y la representación simbólica. Para ello se dan dos sesiones para el manejo del software, y se deja que ellos lo trabajen en casa, pidiéndoles impresiones de los diferentes ejercicios que realizan.

Un problema para motivar el estudio de la parábola que gustó fue el siguiente:

> *"Pedrito" se reunía todas las tardes con su abuelito y se sentaban en una roca cerca de su casa, desde ahí veían pasar el tren que circulaba por una vía en forma de recta es decir sin curvas. Como lo muestra la figura.*



El abuelo de “Pedrito” murió y le dejó en el testamento el siguiente mensaje:

“Pedrito” te dejé una herencia, es un tesoro que debes encontrar, está enterrado a un metro de profundidad y se encuentra a la misma distancia de la roca donde platicábamos todas las tardes, que de la vía del tren, que disfrutes el tesoro.

1.- ¿Dónde debe cavar “Pedrito”, para encontrar el tesoro?

2.- ¿Es único el lugar dónde debe cavar?

3.- ¿Si existen varios lugares, qué figura forman esos lugares?

Después de varias intervenciones de los alumnos, llegan a identificar la figura que describe los diferentes puntos donde podría estar el tesoro, es una parábola. De está experiencia se extrae la definición de la parábola, como el lugar geométrico de un punto en el plano que se mueve de tal manera que su distancia a un punto fijo (la roca) es igual a su distancia a una recta fija (la vía del tren). Usando software de geometría dinámica puede modelarse este movimiento del punto y describir la parábola. Como parte de la metodología se les pide a los estudiantes que inventen otros contextos que involucren el concepto de parábola.

Resultados

De las 3 evaluaciones aplicadas a los dos grupos, se realizó un análisis estadístico, donde se calculó la media, la desviación estándar, la confiabilidad, la eficiencia y el sesgo.

GRUPO PILOTO					
EVALUACION	MEDIA	DESVIACION ESTÁNDAR	CONFIABILIDAD	EFICIENCIA	SESGO
PRIMERA	21.9	4.36	93%	77%	0.02(NULO)
SEGUNDA	17.45	3.96	90%	47%	0.01(NULO)
TERCERA	20,38	5.67	93%	70%	0.07(NULO)
Promedio-total	19.91	4.66	92%	64.6%	0.03(NULO)

GRUPO TESTIGO					
EVALUACION	MEDIA	DESVIACION ESTÁNDAR	CONFIABILIDAD	EFICIENCIA	SESGO
PRIMERA	14.54	2.37	70%	40%	0.19(NULO)
SEGUNDA	15.45	2.21	90%	51%	0.04(NULO)
TERCERA	18	2.33	81%	60%	0.21(NULO)
Promedio-total	15.91	2.30	80.3%	50.3%	0.14(NULO)

Conclusiones

En términos generales, los resultados muestran que la metodología contextual es más satisfactoria en la eficiencia y que la desviación estándar es mayor, es decir, los alumnos buenos se despegan más de los malos (hablando en términos de eficiencia académica), sin embargo, podemos observar que el promedio de calificación es de 6.6 lo que apenas es aprobatorio, podemos entonces señalar que falta mucho por hacer, a los materiales bibliográficos usados les hace falta más ejemplos en contexto, así como los ejercicios o tareas para los alumnos requieren de un refinamiento acorde a la propuesta metodológica.

La confiabilidad de los instrumentos de evaluación es buena y con el análisis estadístico por reactivo, pudo perfeccionarse. En la segunda evaluación del grupo testigo observamos una baja, la cual se pudo atribuir a un descuido del docente, que no implementó tareas de reforzamiento, y que el material bibliográfico propuesto para los temas evaluados fue muy tradicional.

Una de las dificultades de la experiencia fue que el docente que impartió en el grupo piloto, fue diferente al grupo testigo, se sabe que el docente del grupo testigo es tradicionalista y por lo general logra porcentajes de aprovechamiento bajos, en cambio el maestro del grupo testigo logra porcentajes de aprovechamiento mayores. En los datos observamos que el promedio de eficiencia de ambos grupos apenas tiene una diferencia de 14.3%. Por lo que será interesante en el futuro, se haga una experimentación donde sea el mismo docente que trabaje en ambos grupos testigo y piloto. ¿Tendrá la disposición el docente tradicionalista de adoptar la nueva metodología y aplicar los materiales bibliográficos propuestos?, ¿Podrá el docente no tradicionalista experimentar, poniéndose en el papel de tradicionalista?, sin duda la búsqueda de ser mejores docentes, requiere apertura para adoptar las nuevas propuestas y no descansar en el rescate de la experiencia que ha dado la enseñanza tradicional.

Referencias bibliográficas:

Filloy E. & Hitt, F., (incluye software de Hugo Mejía y Carlos Cortés) (1997) *Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C. V. México.

Gardner, H. (1983). *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. Basic Books,

Kolb, D. (1984). *Experiential Learning*. Prentice-Hall

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Va.: The Council. U.S.A.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va 20191-9988.: The Council. U.S.A.

LOS MODOS DE PENSAMIENTO ANALÍTICO Y SINTÉTICO EN EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL

Bonifacio Mora Rodríguez
Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán. México.
bmora@tunku.uady.mx

RESUMEN

Ante el interés creciente por Álgebra Lineal y las dificultades que aún continúan presentando los estudiantes en el aprendizaje de los objetos abstractos de esta disciplina, el presente trabajo pretende apoyarse en el marco de la Geometría Sintética para introducir los espacios analíticos R^1, R^2 y R^3 y poder sólo después realizar las generalizaciones pertinentes a R^n.

Un análisis histórico permite comprender ciertas dificultades de los estudiantes y a la vez proporciona elementos para construir secuencias de actividades con miras a introducir los conceptos de Álgebra Lineal de tal manera que los estudiantes perciban la necesidad del formalismo, presentando todos los sentidos posibles de los conceptos en sus diferentes modos de representación, en particular conectarlo con sus conocimientos anteriores sobre los sistemas de ecuaciones lineales y la geometría.

Esta investigación se desarrollará con estudiantes de primer año universitario, cuando llevan por primera vez Álgebra Lineal y el concepto de espacio vectorial es enseñado formalmente como una definición muy amplia que involucra varios conceptos previos.

Introducción

Intuitivamente podemos decir que un espacio vectorial es un conjunto de objetos que satisfacen ciertas reglas que llamamos axiomas.

En los últimos años, las investigaciones en didáctica de la matemática en Francia, han centrado su interés en algunos conceptos fundamentales del Álgebra Lineal. En comparación con la otra gran parte de la enseñanza durante los primeros años universitarios, por citar el cálculo o análisis, el Álgebra Lineal ha alcanzado un mayor interés para los investigadores. "Las dificultades de los estudiantes en Álgebra Lineal parecen ser igualmente importantes y visibles como en análisis" (Robert y Robinet, 1989; Rogalsky, 1990, referidos en Dorier, 1998).

Analizando los trabajos de J. L. Dorier encontramos que, después de un poco más de 15 años de investigación sobre conceptos del Álgebra Lineal, actualmente el interés por esta rama de las matemáticas ha crecido notablemente, así, menciona algunos trabajos que gracias a los cambios internacionales, permiten observar de manera unificada diferentes problemáticas de investigación que desembocan sobre algunos resultados todavía parciales pero alentadores (Dorier, 1997a).

Este trabajo se pretende desarrollar en 3 fases.

1. Etapa de exploración, en la que se podrá observar cómo vive el concepto de espacio vectorial en la mente de los estudiantes que ya han recibido algún curso de Álgebra Lineal.
2. Apoyados en la etapa anterior y un análisis histórico se buscará construir una secuencia de actividades-problema que permitan introducir el concepto de espacio vectorial en los estudiantes a través de los espacios geométricos R^2 y R^3.
3. Hacer visible la necesidad del formalismo introduciendo el espacio R^n y posteriormente generalizar a objetos (vectores) más abstractos de la teoría axiomática.

Marco teórico.

Los trabajos que se han desarrollado atendiendo a estas problemáticas (sobre todo franceses y canadienses) tienen en común algo que han llamado “flexibilidad cognitiva” que tiene que ver sobre los niveles de descripción, los puntos de vista y los modos de razonamiento. Todos estos inciden sobre la importancia de las cambiantes formas de conocimiento o de representación en el funcionamiento de los conceptos del Álgebra Lineal y analizar su función en los procesos de aprendizaje. Así, estos trabajos muestran la riqueza de contexto del Álgebra Lineal para el análisis didáctico así como también las dificultades que tienen los estudiantes (Dorier, 1998).

El trabajo de Harel, se basa explícitamente en una generalización gradual; se apoya sobre el marco de la geometría sintética para introducir los espacios analíticos R^1, R^2 y R^3 hasta R^n. La problemática sobre la posible confusión entre el objeto vector y su representación analítica casi no es abordada. En varios trabajos se ha mostrado que es necesario separar los objetos de sus diferentes representaciones; esto es uno de los problemas esenciales del aprendizaje del Álgebra Lineal (Hillel y Sierpinska 1995).

Los conceptos en Álgebra Lineal se integran en un campo general de las estructuras algebraicas, que en un primer curso de Álgebra Lineal podría no abordarse directamente la presentación axiomática de tales estructuras y atender la generalidad de las representaciones de un modo gradual y no el modo más elevado (es decir la estructura axiomática). Se puede así introducir el concepto de vector geométrico de dos y tres dimensiones y generalizar hasta n-adas o hasta matrices. En estos diferentes marcos con las herramientas y el lenguaje referente se pueden introducir los conceptos fundamentales de la teoría elemental de los espacios vectoriales.

En estudios realizados en varios países se ha encontrado que el centro de las dificultades de los estudiantes tiene que ver con problemas que tratan con la generalidad de los objetos y el carácter formal y abstracto de las nuevas nociones (muchas nuevas nociones que no tienen los estudiantes). “El formalismo agregado a esta teoría parece ser un origen de dificultad” (Dorier, 1998). Los estudiantes adoptan concepciones erróneas de ciertos conceptos y estos errores se hacen más visibles cuando intentan relacionarlos con los conocimientos anteriores. Gran parte de trabajos que se han revisado toman en cuenta la riqueza de las interacciones y de los posibles juegos entre los diferentes modos de razonamiento o de representación tanto en el funcionamiento del saber con los procesos de aprendizaje como también en las dificultades que este genera.

Para Hillel y Sierpinska, comprender el Álgebra Lineal exige que los estudiantes comiencen a pensar sobre los objetos y los operadores del álgebra, no en términos de relaciones entre las matrices, los vectores o los operadores particulares, sino más bien en términos de estructuras enteras de los objetos, tales que: los espacios vectoriales, las álgebras y las clases de operadores lineales, que pueden ser transformados, representados de diferentes maneras y considerados como no isomorfos. Asocian esta dificultad a la complejidad de las interacciones entre diversos tipos de lenguajes propios del Álgebra Lineal y distinguen: el lenguaje de la teoría general, denominado *lenguaje abstracto*; el lenguaje de la teoría más específica de R^n , denominado *lenguaje algebraico*; el lenguaje geométrico de los espacios en dos y tres dimensiones, denominado *lenguaje geométrico* (Hillel y Sierpinska, 1995).

Interpretando las conclusiones a las que llega Dorier encontramos que, a principios del siglo XX, los trabajos de álgebra esencialmente en Alemania, conducen a desarrollar la importancia de las estructuras algebraicas definidas axiomáticamente. En estos trabajos, la cuestión de la diversidad de los modos de representación y de pensar, aparece como pregunta central. La primera entrada se refiere al análisis del saber, más particularmente a la dimensión histórica. La naturaleza unificadora, generalizadora, simplificadora y formalizadora del Álgebra Lineal, conduce inevitablemente a la multiplicidad de los marcos, los registros, los puntos de vista o los modos de razonamiento, pero también a su unificación en la teoría formal. “El obstáculo del formalismo parece ser una dificultad relevante en los estudiantes que provoca un retroceso en sus diferentes modos de representación y de pensar” (Dorier, 1998).

> “El análisis histórico es entonces una fuente para reencontrar el sentido olvidado a los conceptos y comprender la evolución de ese concepto hasta llegar a su última formalización en la teoría axiomática. En cuanto a la enseñanza, las condiciones históricas de emerger un concepto, en los trabajos de Dorier-Robert-Robinet-Rogalsky, muestran que el análisis histórico permite comprender ciertas dificultades de los estudiantes, pero también a construir ingenierías locales con miras a introducir los conceptos de Álgebra Lineal, de manera que los estudiantes sientan la necesidad del formalismo, presentando todos los sentidos posibles de los conceptos en sus diferentes marcos o registros de representación, en particular conectarlo con sus conocimientos anteriores sobre los sistemas de ecuaciones lineales y la geometría” (Dorier, 1998).

Un modo de razonamiento es como un tipo de lenguaje para expresar un conocimiento matemático y como todo lenguaje hace uso de un sistema específico de signos y representaciones, los modos de razonamiento se distinguen por el uso de tales representaciones. El modo sintético-geométrico se basa en el uso de las figuras geométricas, tales como líneas y planos, principalmente, así como la intersección entre ellos. En el modo analítico-aritmético, las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de “n-adas” o números satisfaciendo ciertas condiciones que son escritas, por ejemplo en forma de sistemas de ecuaciones o desigualdades. El pensamiento analítico-estructural va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de toda una estructura (Sierpinska, 2000).

En un plano más específico, los tres modos de razonamiento en Álgebra Lineal serán distinguidos correspondiendo a sus tres lenguajes de interacción: el lenguaje geométrico-visual, el lenguaje aritmético que tiene que ver con los vectores y matrices como listas y tablas de números y el lenguaje estructural que tiene que ver con los espacios vectoriales y las transformaciones lineales (Sierpinska, 2000).

Pensando en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal a nivel universitario, es considerado como una experiencia frustrante para un gran número de estudiantes, debido a que muchos de ellos se enfrentan por primera vez a una teoría matemática con estricto formalismo. Esta teoría se construye sistemáticamente basándose en conocimientos elevados y refiriéndose constantemente a conocimientos, definiciones o teoremas anteriores que los estudiantes no tienen claro.

En un primer nivel, las dificultades de los estudiantes con Álgebra Lineal provienen de su inexperiencia con pruebas y demostraciones basadas en teorías. Al respecto (Rogalsky, 1990) pregunta a 380 estudiantes en Francia, ¿dónde encuentran mayores dificultades en el tema?, y resulta que una de las cinco principales respuestas, es el tratamiento que los estudiantes enfrentan con las pruebas y demostraciones. Otro aspecto importante de la teoría matemática es la generalidad. Los estudiantes piensan acerca de los objetos y operaciones, en términos de relaciones, no en términos de toda una estructura.

Existen tres niveles de descripción o lenguajes: el lenguaje de la teoría general, un lenguaje más específico de la teoría y el lenguaje geométrico de R^2 y R^3. Estos tres lenguajes coexisten frecuentemente, pero ciertamente no son equivalentes. Una dificultad específica que los estudiantes tienen en el entendimiento de las nociones es representar un objeto matemático y moverse desde una representación a otra.

El lenguaje en Álgebra Lineal puede verse como un sistema o una red de lenguajes y reglas de traslación entre ellos. El lenguaje es parte del mundo como muchas otras cosas. Una persona pronto debe aprender que existen otros lenguajes y que todo lenguaje es gobernado por una gramática la cual puede ser muy diferente. El lenguaje es un instrumento, que ofreciendo signos su función significativa es conocer. Los signos son algo más en las cosas que esperan ser reconocidos o descubiertos.

Álgebra Lineal es realmente el mundo del uso simultáneo de sistemas de representación. ¿Cómo estar seguro que dos representaciones distintas en verdad representan la misma cosa o asemejan el mismo objeto? Una de las representaciones es elegida, las demás necesitan ser reportadas para ser elegidas y probadas como equivalentes. La elección es un asunto de tradición o familiaridad. Si la vieja concepción no es remplazada por una nueva forma de pensamiento acerca del lenguaje en Álgebra Lineal, uno puede estar cerrado a observar cómo en una representación los estudiantes se cuidan de no caer en una trampa de "semejanza" y se mantienen cometiendo siempre el mismo error (Hillel y Sierpinska, 1995).

Metodología

En la primera fase se desea trabajar con estudiantes que ya han recibido al menos un curso de Álgebra Lineal, donde hayan abordado los espacios vectoriales y su teoría axiomática, dado que se hará un cuestionario individual con un grupo de 15 estudiantes como máximo, para explorar como permanece en su mente la noción de espacio vectorial después de haber recibido el curso. El cuestionario está en proceso de construcción.

Después de analizar las concepciones de los estudiantes y hacer un análisis histórico sobre la evolución de este concepto en los libros de texto, planeamos diseñar una secuencia de actividades que permitan involucrar al estudiante en el problema, favoreciendo el debate entre sus compañeros y que al final sea posible que el estudiante haga suyo el concepto de espacio vectorial al resolver la secuencia de actividades.

Al tener este diseño bien estructurado y revisado será puesto en escena con estudiantes que estén iniciando un curso de Álgebra Lineal, pero que aún no hayan estudiando el concepto de espacio vectorial. Se intentará construirlo sin hacer presente la teoría axiomática y formal, sino más bien hacer generalizaciones a través de los espacios geométricos R^2 y R^3. En esta fase se piensa trabajar con equipos de tres estudiantes (entre tres y cinco equipos). Si se considera adecuado y el diseño lo permite, se podrá incorporar el uso de calculadoras graficadoras o algún software computacional.

Conclusiones

Respecto a resultados de investigación aún no se puede ofrecer mucho. Las ideas se tienen y se hace necesario repensarlas, madurarlas y empezar a realizarlas. Sin embargo, se considera que esto puede conducir a un diseño interesante y creativo que permita alcanzar las metas que ahora se proponen.

Referencias bibliográficas

Dorier, J. L. (1991). Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algebre linéaire á l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 11(2/3), 325-364.

Dorier, J. L. (1993). L'Émergence du concept de rang dans l'etude des systémes d'équations linéaires, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* (2a serie) 3, 159-190.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Matemática* 22(4).

Dorier, J. L. (1997a). *L'enseignement de l'algébre linéaire en question*. Grenoble: la Pensée Sauvage, 331 p.

Dorier, J. L. (1998). État de l´art de la recherche en didactique á propos de l´enseignement de l´algébre linéaire. *Recherches en didactique des mathématiques*. 18(2), 191-229.

Robert, A. y Robinet, J. (1989). *Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algébre linéaire en premiére anné de DEUG*. Cahier de Didactique des Mathématiques, No. 53, Paris: IREM de París VII.

Rogalsky, M. (1990). Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algébre linéaire? In Comisión Inter.-IREM université (ed), *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG Premiére Année*, 279-291, Lyon: IREM.

Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students' thinking in linear algebra*. Research on the teaching and learning of linear algebra conducted at the Concordia University by A. Sierpinska and J. Hillel. Montréal Canadá.

INTELIGENCIA Y HABILIDADES MATEMATICAS

César E. Mora Ley
UPIBI - Instituto Politécnico Nacional. México
cmora@acei.upibi.ipn.mx

RESUMEN

Se presenta parte de los resultados obtenidos del proyecto de investigación *“Taller de habilidades verbales y matemáticas para el desarrollo de la madurez matemática”* que se ha implementado para alumnos de primer año de ingeniería en la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología (UPIBI) del IPN. La estructuración del mismo surgió como una consecuencia de los elevados índices de reprobación en los cursos de Precálculo y Cálculo Diferencial e Integral, así como los estudios sobre madurez escolar de los alumnos de ingeniería (Muñoz, Arce 2001; Mora, 2001).

Mediante el proyecto se pretende desarrollar en los alumnos las habilidades del pensamiento matemático que no dominan y algunas que tienen que ver con la percepción y el lenguaje.

Se presentan los resultados obtenidos con un grupo piloto sobre desarrollo de habilidades matemáticas, y finalmente se comenta la posición del autor con respecto a la relación entre inteligencia y habilidad matemática.

INTRODUCCIÓN

Uno de los grandes problemas de la educación superior en México es la falta de vinculación con los demás niveles educativos. Aunado a esto, se tiene que muchos de los alumnos que ingresan a la educación superior no cuentan con la madurez escolar suficiente, para realizar estudios satisfactorios (Muñoz, Viveros 2001). El problema de la madurez escolar ha sido estudiado ampliamente para los niveles básicos de la educación (Condemarín, Chadwick, Milicic, 1989), pero existe un gran vacío respecto a estudios de madurez escolar en el nivel superior y su repercusión en el mismo. La madurez para el aprendizaje escolar se refiere a “la posibilidad de que el estudiante, en el momento de ingreso a un sistema o nivel escolar, posea un nivel de desarrollo físico, psíquico y social que le permita enfrentar adecuadamente esa situación escolar y sus exigencias” (Condemarín, Chadwick y Milicic, 1989). Se puede definir también el concepto de madurez para el aprendizaje escolar como “la capacidad que aparece en el estudiante de apropiarse de los valores culturales tradicionales junto con otros estudiantes de su misma edad, mediante un trabajo sistemático y metódico” (Remplein, 1966).

Por otro lado, existe la tendencia de culpar al alumno de sus deficiencias matemáticas originadas en los niveles educativos precedentes, pero esta afirmación no es veraz. En todo caso, más que hablar del fracaso del estudiante se debería hablar del fracaso de la institución (Carraher, Carraher y Schliemann, 1991). No hubo la suficiente atención para que el alumno madurara y a nadie le preocupó que al pasar de un nivel a otro, el alumno tuviera el grado de maduración suficiente. Se ha señalado (Muñoz, Viveros 2001), que en muchos casos los problemas de maduración matemática son de fácil solución, siempre y cuando se cuente con la participación responsable del alumno (Richard, 1999).

Nuestro caso de interés se enfoca a la madurez matemática de los alumnos de primer ingreso a ingeniería, y cómo afecta al desempeño en los cursos de Precálculo y Cálculo Diferencial e Integral. Así también, al diseño de estrategias educativas para desarrollar las habilidades verbales, aritméticas, algebraicas y geométricas.

Entendemos por *habilidad* el producto del desarrollo de alguna de las capacidades del individuo y surge a partir de la maduración y el aprendizaje. La *habilidad verbal* es aquella en la que el alumno comprende, analiza, interpreta, abstrae y maneja conceptos expresados por medio del lenguaje; es capaz de generalizar y pensar en forma organizada. La *habilidad matemática* es aquella en que el alumno es capaz de comprender conceptos, proponer y efectuar algoritmos y desarrollar aplicaciones a través de la resolución de problemas, y consideramos: *1) Aspectos aritméticos* que permiten al alumno comprender la composición de cantidades representadas por números. *2) Aspectos algebraicos* que ayudan al alumno a representar y generalizar operaciones aritméticas empleando números, signos y literales. *3) Aspectos geométricos* que ayudan al alumno a conocer las propiedades y medidas de extensión de polígonos, triángulos, y rectas paralelas y perpendiculares.

Con referencia a esto, en los últimos años se ha puesto “de moda”, en los diversos ambientes educativos, los programas de desarrollo de habilidades de pensamiento, y se ha dado el caso de que la expresión “desarrollo de habilidades” se asocie sólo con el tipo de programas mencionado (Moreno, M.G., 1998). También, se ha señalado que “las habilidades no son elementos aislados independientes, sino que están vinculados a una estructura” (Elliot 1993). Por ello, consideramos importante el diseño de material didáctico que englobe los tres aspectos arriba señalados de la habilidad matemática y la habilidad verbal, ya que muchos alumnos viven en un estado de analfabetismo funcional. El manejo del lenguaje es fundamental para la inteligencia y el desarrollo de las habilidades matemáticas.

FUNDAMENTACIÓN

Marco teórico

En los últimos años la psicología y la pedagogía han cambiado su concepción sobre la inteligencia humana. Ahora, se hace énfasis en su aspecto dinámico, sus procesos, sus índices de modificación y la relación que existe entre las variables que facilitan o dificultan su funcionamiento. En la concepción actual de la inteligencia, se considera como el resultado de la interacción compleja del organismo con el ambiente. Para ello se cuenta con dos atributos innatos: la organización y la adaptación. Mediante estas actividades el alumno puede organizar los datos en sistemas coherentes y se adecua al medio. Estas tendencias se reducen a procesos elementales si no se cuenta con la mediación del conocimiento por parte del maestro, de tal forma que el alumno pueda acceder a procesos cognitivos superiores (Feuerstein, 1980). En general, el programa de aprender a aprender es un método excepcional para la modificación (en forma preventiva) de las estructuras mentales, para el desarrollo de las habilidades y para favorecer los prerrequisitos de cualquier aprendizaje, *i.e.*, para mejorar la inteligencia tanto en la enseñanza preuniversitaria y universitaria (Martínez, Brunet, Farrés 1994).

Este programa tiene su base en la Teoría de la Modificabilidad Cognitiva, en dicho marco se deben identificar las funciones cognitivas deficientes, es decir, las deficiencias en las funciones que sirven de base al pensamiento interiorizado, representativo y operativo. Se deben considerar como el resultado de una carencia o de una insuficiencia de mediación o experiencia de aprendizaje.

En la concepción de la mediación, la tarea del maestro queda centrada en el metaaprendizaje del alumno. Para que pueda haber una mejora en el aprendizaje de los alumnos se debe conocer la zona hasta la cual llegan con sus conceptos espontáneos (área de desarrollo efectivo). Después, la estrategia vigotskiana, es influir de manera significativa en el desarrollo potencial, (a través de la mediación) tanto en los procesos de aprendizaje como de estructuración de la persona como ser inteligente.

Las deficiencias de las funciones cognitivas son la causa del comportamiento cognoscitivo retrasado que se manifiesta en determinados sujetos que se llaman *privados culturalmente.* Es importante conocer la naturaleza de las funciones cognitivas ya que mediante un diagnóstico adecuado se puede mejorar el rendimiento deficiente del alumno. Además que, la meta del mediador es corregirlas y promover su desarrollo. Son tres categorías en las que se presentan las funciones deficientes: *i)* Deficiencias en la fase de entrada *(input), ii)* Deficiencias en la fase de elaboración, y *iii)* Deficiencias en la fase de salida *(output).*

Para entender estas deficiencias es importante conocer las funciones cognitivas correspondientes a las fases arriba mencionadas (Martínez, Brunet, Farrés 1994).

Fase de entrada: (1) Percepción clara y diferenciada. (2) Comportamiento exploratorio controlado, sistemático y planificado. (3) Uso del vocabulario y los conceptos apropiados para identificar los objetos. (4) Orientación espacial apropiada. (5) Orientación temporal coherente.(6) Constatar la constancia y permanencia de los objetos. (7) Recoger los datos con precisión y exactitud. (8) Tener en cuenta dos o más fuentes de información a la vez.

Fase de elaboración: (1) Percibir el problema y definirlo con precisión. (2) Distinguir los datos relevantes de los irrelevantes. (3) Ejecutar la conducta comparativa. (4) Amplitud del campo mental. (5) Percepción global de la realidad. (6) Relacionar datos de forma lógica. (7) Interiorización del comportamiento propio. (8) Ejercitar el pensamiento hipotético inferencial. (9) Trazar estrategias para verificar hipótesis. (10) Conducta planificada. (11) Elaboración de categorías cognitivas. (12) Ejercitar la conducta sumativa. (13) Facilidad para establecer relaciones virtuales.

Fase de salida: (1) Comunicación descentralizada. (2) Proyección de relaciones virtuales. (3) Expresividad en la respuesta. (4) Respuestas certeras. (5) Uso del vocabulario y conceptos apropiados. (6) Elaboración de respuestas con precisión y exactitud. (7) Transporte visual correcto. (8) Conducta controlada sin impulsividad.

Inicialmente el Programa de Enriquecimiento Instrumental (PEI) fue desarrollado con materiales libres de contenido, es decir, no son dirigidos a curriculum. El contenido de los ejercicios, se seleccionan de tal manera que permitan la adquisición de los prerrequisitos para pensar. Lo interesante del programa es que los ejercicios del PEI se pueden entrelazar con asignaturas de matemáticas, física, química, ciencias sociales, etc. Para ello es importante que el profesor presente los contenidos de aprendizaje de forma adecuadamente estructurada, esto es, se debe seleccionar cuidadosamente los contenidos, elaborar diseños, crear estrategias de enseñanza. También debe mediar los significados culturales y vitales que implica el saber.

Metodología

El método a seguir es el propuesto por Feuerstein, (Feuerstein *et al.* 1980) para aprender a pensar, cuya base está en la teoría de la Modificabilidad Cognitiva y el Potencial de Aprendizaje (mediación entre el alumno y los estímulos).

La primera parte de la investigación consistió en diseñar y aplicar exámenes diagnósticos sobre habilidades verbales y matemáticas a los alumnos de primer ingreso a ingeniería en UPIBI, para mostrar que efectivamente existe el problema y encontrar los niveles del mismo (Klein, Unterman, 1998). Otra fue que, una vez localizados los problemas de madurez matemática, se procedió a diseñar estrategias para resolverlos. Entre ellas se implementaron actividades del PEI, mediante un *Taller de Habilidades Verbales y Matemáticas,* esto es, se elaboró un manual de ejercicios programados para el desarrollo de las capacidades donde se presentaron más deficiencias, las cuales fueron: (1) Observación. (2) Establecimiento de relaciones. (3) Deducción. (4) Imaginación. (5) Comunicación. (6) Abstracción. (7) Inducción.

En lo relacionado al lenguaje, se incluyó en el manual de ejercicios, lecturas y análisis de textos, complementación de enunciados, construcción de analogías y antónimos. Todas las actividades fueron dirigidas a un grupo piloto. Por el carácter potencial que tienen las capacidades, es necesario que estas se expresen a través de habilidades. Así, esperamos que a medida que el alumno desarrolle las habilidades podrá madurar y construir con mayor facilidad el conocimiento matemático, lo cual repercutirá en el aprendizaje y por lo tanto, permitirá un mejor desempeño escolar y profesional.

Una etapa final será evaluar el rendimiento académico del grupo piloto en todas las asignaturas del tronco común, y correlacionar con los resultados de la evaluación de habilidades matemáticas.

Resultados y conclusiones

El trabajo realizado mediante pruebas diagnósticas escritas, y las actividades del taller de habilidades, nos ha permitido detectar situaciones críticas en la enseñanza del Precálculo a los alumnos de primer ingreso a la UPIBI. Entre los casos de estudio realizados tenemos los siguientes: (1) Operaciones aritméticas con números decimales, razones y proporciones. (2) Manipulación de fracciones aritméticas y algebraicas. (3) Manipulación de series y sucesiones. (4) Simbolización de expresiones. (5) Traducción de enunciados al lenguaje algebraico. (6) Cálculo de áreas y perímetros. (7) El teorema de Pitágoras. (8) Funciones trigonométricas.

Entre los logros alcanzados por las actividades del taller, se ha podido: (1) Aprender a realizar un trabajo sistemático entre los maestros de los cursos de Matemáticas I, Matemáticas II y Física I. (2) Encontrar elementos de motivación a través del logro de diversos objetivos que fortalecen la imagen y autoestima del alumno. (3) Descubrir estrategias que permiten realizar procesos más completos en la resolución de los diferentes problemas de las matemáticas y otras disciplinas. (4) Realizar aplicaciones de lo aprendido en el desarrollo de habilidades y estrategias a situaciones cotidianas del trabajo de los alumnos. (5) Encontrar satisfacción en el trabajo bien realizado. (6) Enriquecer el vocabulario y de esta forma enriquecer el pensamiento matemático. (7) Detectar posibles errores en la planeación curricular y permitir anticiparse y corregirlos, esto llevó a la modificación de los planes de estudio, a la distribución de tiempos y actividades específicas a realizar. (8) Crear un espacio para descubrir la forma en que utilizamos nuestro pensamiento y poder. (9) Crear un escenario para mejorar la comunicación del maestro con los alumnos.

Por otro lado, las pruebas que se aplicaron a los alumnos para medir la inteligencia, no arrojaron resultados contundentes sobre la calificación del IQ y su rendimiento en matemáticas, ya que en estas pruebas se miden la capacidad lógica, la memoria, las adquisiciones culturales básicas, las cuales en buena forma condicionan el éxito escolar y profesional. Pero este número, o etiqueta al ser un resultado general no asegura el éxito en matemáticas. Pretendemos extender este trabajo a un estudio futuro, sobre las inteligencias múltiples y la actitud del maestro para su modificación en su práctica docente.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con apoyo de la CGPI-IPN proyecto CGPI-20010720, el autor agradece el apoyo económico a la COFAA-IPN.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carraher, T. & Carraher, D. & Schliemann, A. (1989) *En la vida diez, en la escuela cero*. Ed. Siglo XXI, México.

Condemarín, M. & Chadwick, M. & Milicic, N. (1989) *Madurez Escolar. Manual de Evaluación y Desarrollo de las Funciones Básicas para el Aprendizaje Escolar*. Ed. Ciencias de la Educación Preescolar y Especial, Madrid.

Elliot, J., (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción.* Ediciones Morata, Madrid.

Feuerstein, R. et al (1980) *Instrumental Enrichment. An Intervention Program for Cognitive Modifiability.* Scott, Foresman Co. Glenview Illinois.

Klein J. K. & Unterman C. (1998). *Test de aptitud professional.* 1ra edición, Ed. EDAF, España.

Martínez J.M. & Brunet J. J. & Farrés V. (1994) "*Metodología de la mediación en el PEI (Orientaciones, y recursos para el Mediador)",* Ed. Bruño, Madrid.

Mora, C. E. (2001) "Taller de habilidades verbales y matemáticas para el desarrollo de la madurez matemática", en *V Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Oaxaca, Oax., México.

Moreno, M. G. (1998) "El desarrollo de habilidades como objetivo educativo. Una aproximación conceptual", *Revista de Educación, Nueva Época*, Núm. 6.

Muñoz, A. & Arce, A. (2001) "La maduración para el aprendizaje de la Matemática", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 17.

Piaget, J. (1964) *Development and Learning*, en Piaget Rediscovered, R. E. Ripple and V. N. Rockcastle, Eds. New York, Cornell University.

Remplein, H. (1966) *Tratado de Psicología Educativa*. Ed. Barcelona; Barcelona.

Richard, W. (1999). "Condiciones para un aprendizaje de calidad en la enseñanza de las ciencias. Reflexiones a partir del proyecto PEEL". *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 3-15.

ANÁLISIS DE FENÓMENOS DIDÁCTICOS VINCULADOS AL ESTUDIO DEL ÁLGEBRA: ASPECTOS DE UNA METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Enrique González Lasseube y Lorena Espinoza Salfate
Universidad Católica de Valparaíso- Chile
ivangonzalez@entelchile.net l_espinoza@hotmail.com

RESUMEN:

A partir del análisis didáctico de distintas organizaciones matemáticas puntuales de la enseñanza media chilena que pertenecen al ámbito algebraico, se pudo postular la presencia de ciertas regularidades didácticas de aparente generalidad.

En la presente comunicación se mostrará la metodología utilizada para realizar la constatación empírica sobre la presencia o no de dichas regularidades, la que se encuentra basada en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). En particular, se describirá el proceso de elaboración y posterior análisis del instrumento utilizado para tal propósito.

El análisis de los resultados concluye con la aplicación de un programa informático de análisis implicativo (CHIC). De esta forma, además de corroborar la mayoría de las hipótesis planteadas, este análisis permitió detectar ciertos aspectos del trabajo matemático de los estudiantes que en una primera versión del análisis no parecieron evidentes.

El artículo muestra algunos resultados obtenidos dentro de un trabajo de tesis de magíster de la Universidad Católica de Valparaíso, y que estamos realizando en el marco de los proyectos DYCIT Nº 26-9933ES y FONDECYT Nº 1020342 de Chile

FUNDAMENTACIÓN

Problemática y propósitos

Situados en el enfoque antropológico podemos formular nuestro propósito general de investigación en los siguientes términos:

Lo que nos interesa es describir y analizar la actividad matemática que se desarrolla en la educación media chilena en torno al álgebra. Esta descripción y análisis supone estudiar los tipos de tareas y técnicas que se proponen en el currículum oficial y que permiten concluir y gestionar el proceso de estudio de las organizaciones matemáticas relativas al estudio del álgebra. Este propósito sugiere detectar la adaptación estructural sufrida por este conocimiento matemático en el currículum para su posterior reconstrucción en el libro de texto, y que concluirá, finalmente, en la sala de clases cuando se enseñe.

Consideramos que los libros de texto son un buen reflejo de la postura institucional acerca de lo que se debe saber hacer. Este análisis nos debe permitir, además, detectar algunos fenómenos didácticos asociados al proceso de transposición didáctica sufrida por esta organización matemática, proponer algunas explicaciones y, prever posibles consecuencias que puedan eventualmente ocurrir en la sala de clases cuando se realice concretamente su estudio.

Objetivos

- Analizar la actividad oficial relativa al estudio del álgebra en los planes y programas de estudio
- Analizar la actividad oficial relativa al estudio del álgebra presente en los libros de texto.

- Identificar fenómenos ó regularidades didácticas vinculadas a esta actividad matemática
- De acuerdo a la descripción realizada, elaborar conjeturas acerca de la actividad matemática en torno al álgebra que estarían en condiciones de realizar los alumnos y contrastarlas empíricamente.

Metodología

La secuencia de pasos que se seguirá para el logro de nuestro propósito de investigación y los mecanismos usados para el desarrollo de cada uno de ellos son los siguientes:

1. Análisis de la actividad matemática oficial

a) Análisis de los programas de estudio

Para realizar la descripción de la organización matemática en torno al álgebra se analiza, en primer lugar, los planes y programas oficiales que la proponen. Ya que al momento de la investigación se encontraban en vigencia dos planes y programas de estudio para diferentes niveles escolares de educación media, se realizó un análisis tendiente a señalar las características generales con relación a la presencia del álgebra en cada uno de ellos.

b) Análisis de los libros de texto

Se analiza la presencia de álgebra presente en los libros de texto, y para ello se elige el texto de la Editorial Santillana por ser uno de los más usados en la educación media chilena. En el análisis previo también fue pertinente el análisis de textos pertenecientes a otras editoriales, que presentaran los objetivos de los antiguos y nuevos planes de estudio (en el momento de nuestra investigación, sólo se encontraban en vigencia los nuevos planes y programas correspondientes a 1º medio)

2. Análisis de fenómenos didácticos vinculados

De la descripción de la actividad matemática realizada en torno al álgebra, se caracteriza una serie de fenómenos didácticos que permiten organizar metodológicamente la actividad matemática en torno al álgebra. Para afinar esta descripción se hace necesario identificar diversos indicadores que dieran cuenta en forma más precisa de estos fenómenos.

3. Elaboración de hipótesis a contrastar empíricamente: Elaboración de cuestionario.

Una vez realizada la identificación y descripción de los fenómenos didácticos, se elaboran una serie de conjeturas acerca de la actividad matemática que estarían en condiciones de realizar los alumnos. Para poder evidenciar “en acto” estas conjeturas, se elaboran una serie de hipótesis empíricamente contrastables que se materializan en un cuestionario para ser aplicado a alumnos de cuarto año de enseñanza media.

Una vez detectadas las regularidades ó fenómenos didácticos que emergen del análisis de los libros de texto debido a la reconstrucción de la organización matemática relativa al estudio del álgebra, y teniendo en cuenta lo que deseamos medir en cada ítem del cuestionario, se identifica cual ó cuales fenómenos están asociados a ese ítem, con lo cuál se puede postular lo que creemos que contestarán los alumnos frente a él, surgiendo así la hipótesis asociada a ese análisis y, que será contrastada empíricamente.

4. Aplicación de cuestionario

Para contrastar la hipótesis, se elabora un cuestionario que pone de manifiesto algunos de los fenómenos y/o indicadores detectados en el estudio del álgebra. Este cuestionario se aplica a alumnos de cuarto año medio de tres colegios diferentes.

Para elaborar el cuestionario se sigue los siguientes pasos:

Un análisis a-priori que contempla la formulación de los objetivos del cuestionario en función de las hipótesis previamente construidas. Para cada objetivo se construyen los ítems necesarios para poder medir la presencia o ausencia de algún fenómeno didáctico o regularidad involucrada. Luego, se realiza un listado de las posibles respuestas y, de esta manera, se constituyen tipologías de respuesta, teniendo en cuenta los modelos del álgebra previamente descritos.

5. Análisis de las respuestas del cuestionario: Análisis a posteriori

En esta etapa se analizan las tipologías obtenidas utilizando un análisis de frecuencia determinando aquellas que son correctas, incorrectas u omitidas, para cada ítem confeccionado. Esta descripción es menos cuantitativa o estadística y más cualitativa. Consideramos correcta nuestra hipótesis cuando la mayoría (superior a un 75 %) de los estudiantes realizan lo anunciado en ella. Posteriormente, se realiza una síntesis de los principales resultados obtenidos y se emiten las principales conclusiones obtenidas de él. Además, se realiza un análisis de efectos cruzados que permite relacionar tipos de respuestas de diversos ítems que nos permitan ampliar nuestro margen de investigación para hacerlo más rico en posibilidades. Interesa detectar cuáles son las técnicas más usadas por los alumnos y cuáles no, y bajo que circunstancias.

RESUMEN DE FENÓMENOS DIDÁCTICOS DETECTADOS VINCULADOS AL ESTUDIO DEL ÁLGEBRA

Fenómeno 1: La utilización formal del Álgebra.

En el estudio del álgebra se privilegia la "forma" en oposición al contenido o significado de los conceptos, los símbolos y su escritura, la presentación de los conceptos, etc.

Indicadores:

1. *El trabajo de La modelización algebraica tiene un marcado carácter formal, y por ello, resulta ser artificial. entendiendo por modelización, a la construcción de un modelo matemático útil para estudiar una situación problemática.*

Especificaciones:

a) Los problemas cotidianos que se estudian requieren, casi en exclusiva de una traducción literal al lenguaje algebraico. Es decir, el modelo viene dado de manera casi explícita en el enunciado.

b) Los problemas que se estudian dentro de cada tema son generalmente de la misma especie (del tipo). De esta forma, se presentan problemas y ejercicios de una complejidad que es siempre la misma, sin la posibilidad de estudiar el dominio de validez de las técnicas, su pertinencia y la relación entre ellas.

c) Los problemas que se proponen, generalmente no requieren de la modelización algebraica para ser resueltos, es decir, el álgebra no es presentada como un instrumento que supera problemas matemáticos que no son objeto de estudio por la vía aritmética. Así, resultan artificiales para la aplicación de las técnicas algebraicas y la modelización. Los problemas que en teoría muestran la utilización del álgebra, son abordados de hecho, sin ella.

2. *Se antepone y se privilegia el estudio sintáctico al semántico. Esto es, importa más la estructura correcta, que el correcto entendimiento de la actividad matemática en desarrollo. Lo problemático suele ser la forma y no tanto el contenido.*
3. *El estudio del álgebra no emerge como la consecuencia de enfrentarse a situaciones reales matemáticas o extra-matemáticas que requieran para su estudio de dicha herramienta. El álgebra aparece más como un objeto que como un instrumento.*

Fenómeno 2: Desarticulación local de la actividad Matemática en torno al Álgebra.

No se realiza una sistemática relación y encadenación de conceptos y técnicas en el estudio de problemas.

Indicadores:

1. *Generalmente no se retoman problemas estudiados en cursos anteriores, que con nuevos instrumentos podrían ser estudiados con mayor eficacia.*
2. *No se retoman técnicas ni tecnologías estudiadas con anterioridad explícitamente, salvo excepciones como lo son el teorema de Pitágoras. No se explicita que parte del estudio es realizado con técnicas antiguas conocidas.*
3. *Todas las ecuaciones que se estudian siempre "tienen solución". Aparece aquí una oposición entre tecnología y teoría, ya que la teoría enuncia los problemas de existencia posibles, pero los problemas, las técnicas y sus tecnologías nunca tratan de este tipo de situación.*
4. *No se hace mención explícita a las relaciones que se pueden establecer entre conceptos.*
5. *Existen definiciones, esto es, tecnologías y teorías que no tiene ninguna utilidad dentro de la actividad matemática que se realiza a lo largo de la enseñanza media.*
6. *Existen tecnologías que, con instrumentos apropiados, aquello que no pudo ser justificado, puede ser efectivamente explicado y argumentado. No se muestra ni se demuestra.*
7. *Atomización de las tareas. Existe una marcada tendencia a subdividir minuciosamente las tareas, y por consecuencia de ello las técnicas implicadas.*

Fenómeno 3: El estudio del álgebra tiene un carácter marcadamente algorítmico.

Se privilegia el trabajo técnico en desmedro del trabajo justificador (integrador). Es decir, no se menciona claramente el tipo de cuestiones que serán resueltas con el trabajo técnico ni el por qué se debe hacer así.

Indicadores:

1. *La manipulación de objetos algebraicos se realiza sin considerar los dominios de validez de ellos. Al parecer, lo que verdaderamente importa es la manipulación de ellos.*

2. *No se considera la validez de los resultados en la solución de ecuaciones y/o inecuaciones. Es decir, después de trabajar sobre el modelo que modela la situación problema; no se vuelve a dicha situación para verificar si las soluciones del modelo son también soluciones del sistema.*
3. *Existen algunos objetos que son manipulados como si fueran dominados por los alumnos y, sin embargo no han sido estudiados con anterioridad. Se dan por conocidos objetos matemáticos no conocidos y sustanciales para la actividad matemática en desarrollo.*
4. *No aparece de forma clara la problematicidad de la situación matemática en estudio. Lo problemático se sitúa generalmente a nivel técnico.*

Fenómeno 4: El estudio del álgebra no se realiza en profundidad.

Generalmente no se presenta un análisis acerca de la verdadera potencia de las técnicas, su pertinencia y su necesidad de ampliación.

Indicadores:

1. *Los criterios para decidir cuál técnica es más apropiada para realizar un determinado estudio, aparecen ocultos en el discurso del texto, o simplemente no están en él.*
2. *El estudio de determinados objetos matemáticos es parcial y con ciertos vacíos tecnológicos.*
3. *Las técnicas de estudio son impuestas por el texto; no surgen de un trabajo que se cuestione la adecuación de las mismas para las situaciones en estudio.*
4. *Quizá el criterio más evidente para escoger las técnicas pertinentes para el estudio es la distinción del determinado contenido o nivel escolar específico, o bien, el tema tratado.*
5. *Las técnicas o problemas aparecen difusas o poco transparentes, en términos de señalar claramente lo que se pretende resolver y cómo.*
6. *El estudio del álgebra no incorpora el punto de vista funcional para abordar los problemas. El tema de función y casos específicos, aparecen como un tema aislado, en el que la función es considerada un objeto en sí mismo y no una herramienta que sirva para modelar situaciones*
7. *Existen tecnologías importantes para la actividad matemática en estudio que se encuentran ausentes.*

Fenómeno 5: Desarticulación regional del estudio del álgebra con las demás organizaciones matemáticas del curriculum

Indicadores:

1. *En problemas geométricos no se hace mención al uso del instrumento algebraico como ayuda para su estudio.*
2. *En el estudio del álgebra no se retoman problemas aritméticos.*

Conclusiones generales y principales resultados

1. La caracterización de las organizaciones matemáticas locales en torno al álgebra en cada uno de los cuatro niveles de enseñanza media, nos ha permitido identificar y describir los ingredientes prácticos y teóricos que las constituyen. Más allá de las diferencias específicas

que poseen cada una de estas organizaciones matemáticas, existen ciertas características comunes a todas ellas que tienen relación con la naturaleza didáctica relativa a la estructura y articulación de los ingredientes matemáticos que las componen. Estos invariantes constituyen el primer síntoma de los fenómenos didácticos que nuestro trabajo pudo detectar. Algunos de estos son:

- Uniformidad de tipos de tareas.
- Diversidad de técnicas para estudiar problemas equivalentes y que no se relacionan.
- Imposición de técnicas de estudio
- Tecnologías y teorías oportunistas y precarias.

2. A partir de esta caracterización, hemos podido identificar distintos fenómenos didácticos:

   - El carácter formal del trabajo algebraico. Existe una tendencia a estudiar la "forma" (sintaxis) de los contenidos y no tanto sus "significados" (semántica), en particular sus aplicaciones.
   - Escasa problematicidad. La mayoría de los problemas que se proponen modelar mediante el álgebra son resolubles sin ella. La mayoría de los problemas que se estudian tienen el propósito de aprender a manipular los objetos algebraicos y no tanto utilizar el álgebra como instrumento de modelación.
   - Actividad matemática atomizada. Existe una tendencia a parcelar de manera insistente los problemas, dividiéndolos en subtareas que después no se relacionan. Ligado a ello, la utilización de las técnicas es generalmente rígida y parcial, sin permitir la posible articulación entre ellas.
   - Vacíos tecnológicos y teóricos. Existen tecnologías artificiosas que simplemente se aplican sin justificación, que provienen de teorías precarias o poco claras. Frente a las técnicas que se usan para resolver los problemas en estudio, no es frecuente encontrar discursos que justifiquen matemáticamente los gestos que se realizan. Existe aquí, a nuestro parecer, un cierto "oportunismo" tecnológico-teórico, que no nos permite entender la estrategia de reconstrucción realizada en los textos. ¿Por qué en algunos casos hay justificación, incluso más compleja que lo que los alumnos en estos niveles pueden manejar, y en otros casos simplemente se omite?
   - Una escasa adecuación de la teoría a las técnicas matemáticas que se estudian. Es frecuente encontrar discursos teóricos y tecnológicos que no se corresponden con el universo matemático disponible para los alumnos de estos niveles. Por tanto, estos discursos aparecen pero son inertes.
   - El álgebra como aritmética generalizada, en que lo que prima es el cálculo del valor de la incógnita que satisface una determinada igualdad y no el estudio de variables que modelan la relación entre ellas.

3. Con la contrastación empírica de los fenómenos didácticos detectados a través de un "cuestionario", pudimos realizar una primera corroboración de la presencia de los mismos en el sistema escolar.

4. La aplicación y análisis de los resultados del cuestionario nos permitió, además, verificar que nuestras descripciones de los ingredientes que componen las organizaciones matemáticas locales en torno al álgebra son efectivas y funcionales.

5. Finalmente, el cuestionario nos permitió además detectar los siguientes regularidades:

- Los alumnos realizan relativamente bien las tareas que pueden identificar como las del “tipo” de tareas estudiadas, donde los criterios para dicha identificación son, casi en exclusiva, la forma, la escritura y el contexto, y no tanto el conocimiento matemático que ponen en juego. En particular, son bastante exitosos en la manipulación técnica que corresponda textualmente a las estudiadas en el texto.
- A pesar que los alumnos estudian problemas de modelización algebraica, frente a situaciones problemas un poco distintas, no son capaces de encontrar un modelo que permita resolverlas. Esta situación permite postular que la actividad de modelización estudiada en la enseñanza media es bastante pobre y superficial, además e la rigidez en el caso de las técnicas.
- Cuando el modelo que permite resolver una situación problema específica viene dado, los alumnos dan por terminado el trabajo cuando encuentran una solución del modelo sin cuestionar si dicho resultado es una solución para la situación problema en estudio.
- Los alumnos resuelven los problemas utilizando, en general, un único registro de representación: el algebraico. El registro gráfico, por ejemplo, no es utilizado de que podría haber sido muy provechoso para obtener la solución o el modelo de la situación

6. Un importante logro de nuestra tesis también ha sido poner a prueba la teoría antropológica de lo didáctico y mostrar su productividad para el estudio de procesos didácticos

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (1998b) El *Proceso de algebrización de las matemáticas escolares.* Jornadas SIIDM BAEZA 98, Universidad de Jaen, Baeza, febrero-marzo de 1998.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997) *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona. ICE-Horsori.

Espinoza, S, Lorena, (1998) *Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto “Límite de funciones”. Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos de estudio*. Universidad autónoma de Barcelona.

Kieran, C, (1992) *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. Traducción de Vilma María Mesa. “Una empresa docente”. 1994.

UN ESTUDIO COGNITIVO SOBRE EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Leopoldo Zúñiga Silva
ITESM Campus San Luis Potosí, México.
lzs@itesm.mx

RESUMEN

Se presentan los resultados obtenidos al momento en un proyecto de investigación sobre *las funciones cognitivas de los estudiantes de cálculo en el contexto de la ingeniería* cuyo objetivo es analizar los procesos cognitivos de los estudiantes de cálculo, cuando el aprendizaje se da en base al tratamiento de problemas en el contexto de la ingeniería. El estudio se basa en la teoría cognitiva de Reuven Feuerstein, en particular en su teoría de *mapa cognitivo* y *funciones cognitivas*. En este reporte presentamos los resultados de la primera fase del proyecto. Esto, en dos partes: la primera de éstas se refiere a un estudio de carácter didáctico-curricular sobre el uso del cálculo en la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), y la segunda, a un estudio sobre las funciones cognitivas en la resolución de un problema que requiere conocimientos de cálculo multivariable.

Antecedentes

El conocimiento matemático en el nivel superior de enseñanza generalmente se trata fuera de todo contexto del mundo real. A lo más que se llega en este sentido en un curso común de cálculo, es a resolver los "problemas de aplicación" que se proponen en los textos, los cuales casi nunca corresponden a la realidad que interesa al alumno. Esto tiene importantes consecuencias cuando los que aprenden son estudiantes que en el ejercicio de su profesión requieren de conocimientos y habilidades que les permitan resolver problemas de verdad. Tal es el caso, por ejemplo, de quienes se preparan en carreras de ingeniería. Camarena (1990, p. 24) establece que: "*...parte de la problemática en ingeniería es que la matemática se encuentra totalmente desvinculada de las asignaturas de la ingeniería, y la realidad del ingeniero reclama esta vinculación que en materia de educación está en tierra de nadie...*".

En particular, en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), el cálculo se imparte en los cursos (tres) llamados "Matemáticas para Ingeniería", en los cuales, aún y cuando llevan el nombre explícito de "para ingeniería", realmente no tienen diferencia alguna con otros cursos de cálculo similares, es decir, los objetivos y el contenido matemático es el mismo. En los programas de estudio correspondientes se puede leer, por ejemplo, que el objetivo es *"proporcionar al alumno los conocimientos fundamentales del cálculo diferencial de una variable real que serán utilizados en la interpretación, planteamiento y resolución de problemas específicos de su carrera*" (para el caso de Matemáticas para Ingeniería I*)*, sin embargo, ni en dichos programas, ni en los textos que se sugieren para los cursos, se mencionan o tratan esos "problemas específicos de su carrera". Y más todavía, en comunicaciones informales con los profesores que imparten estas materias, nos comentan que si bien tienen alguna idea, en realidad no conocen problemas o situaciones específicas de las carreras profesionales y, por tanto, se limitan a enseñar, cuando mucho, el tipo de aplicaciones que aparecen en los textos que ellos usan.

Existe entonces una completa desvinculación entre el conocimiento matemático y las áreas de especialidad de la ingeniería que influye decisivamente en el ambiente del aula, en la disposición de los estudiantes para aprender, en su actitud ante los nuevos conocimientos. Saber matemáticas significa, para los alumnos, tener alguna habilidad para resolver ecuaciones, desarrollar procedimientos, aplicar fórmulas y métodos, etc. Rara vez un estudiante concibe a las matemáticas como algo que le pueda ser útil más allá de eso, y cuando llega a suceder, no es del todo claro el porqué es importante su estudio. ¿Qué se puede hacer?, ¿Cómo vincular los contenidos matemáticos con las áreas que puedan interesar al estudiante?

Algunos estudios sobre matemática en contexto como (Camarena, 1987; 1993) y (Muro, 2000), muestran que cuando el aprendizaje se da en situaciones contextualizadas, se obtienen mejores resultados. Particularmente por la enorme motivación que se provoca en los alumnos y el significado específico, en el área de interés, que adquieren las nociones, ideas y conceptos matemáticos. Sin embargo, si esto es así, ¿qué es lo que sucede en la mente del estudiante?, ¿qué elementos de orden cognitivo están implicados?.

El propósito de este estudio es investigar al respecto, determinar los conocimientos de cálculo que se emplean en ingeniería y analizar las funciones cognitivas involucradas en la resolución de un problema, para posteriormente analizar el funcionamiento cognitivo en situaciones de aprendizaje en contexto ingenieril.

Marco teórico

Nos interesa lo que sucede a nivel cognitivo cuando el aprendizaje ocurre en escenarios en base al planteamiento de situaciones problemáticas del cálculo. Para ello, tomamos como soporte teórico las nociones de *mapa cognitivo* y de *funciones cognitivas* de Reuven Feuerstein, que mencionamos a continuación.

El *mapa cognitivo* es un instrumento que hace posible la representación de una serie de conceptos, sus significados y relaciones, en un esquema, y a través de él podemos analizar un acto mental (como la resolución de un problema) y localizar los puntos específicos en donde aparecen dificultades u obstáculos en el aprendizaje. Consta de siete parámetros: el *contenido, la modalidad del lenguaje, las operaciones mentales, las fases del acto mental* (son las fases en las que tiene lugar el acto mental: entrada, elaboración y salida. Estas tres fases están interrelacionadas y cada una de ellas tiene sentido en la medida en que está en estrecha relación con las otras. La fase es un parámetro fundamental en el análisis del acto mental de un sujeto puesto que posibilita el estudio sistemático del proceso de pensamiento, por ejemplo, en la resolución de un problema), *el nivel de complejidad, el nivel de abstracción y el nivel de eficacia.*

Las funciones cognitivas, por su parte, son consideradas como los prerrequisitos básicos de la inteligencia (Prieto, S., 1992). La adquisición de funciones y procesos cognitivos sirve para la interiorización de la información y permite la autorregulación del organismo. La interiorización es el pilar básico del aprendizaje y de la adaptación y, por tanto, de la inteligencia.

Las funciones cognitivas como actividades del sistema nervioso explican, en parte, la capacidad del individuo para servirse de la experiencia previa en su adaptación a nuevas situaciones (Feuerstein, 1979). Las funciones cognitivas subyacentes en un acto mental son las siguientes:

En la fase de entrada: *percepción clara, exploración sistemática de una situación de aprendizaje, habilidades lingüísticas a nivel de entrada, orientación espacial, orientación* *temporal, conservación, constancia y permanencia del objeto, organización de la información, precisión y exactitud en la recogida de la información*

En la fase de elaboración: *percepción y definición de un problema, selección de información relevante, interiorización y representación mental, amplitud y flexibilidad mental, planificación de la conducta, organización y estructuración perceptiva, conducta comparativa, pensamiento hipotético, evidencia lógica y clasificación cognitiva.*

En la fase de salida: *comunicación explícita, proyección de relaciones virtuales, reglas verbales para comunicar la respuesta, elaboración y desinhibición en la comunicación de la respuesta, respuestas por ensayo-error, precisión y exactitud en las respuestas, transporte visual y control de las respuestas*.

Método

El método que empleamos considera tanto los estudios previos que debemos realizar para el diseño de las situaciones problema que llevaremos al tratamiento instruccional en el aula, como el procedimiento mediante el cual se trabajará con los estudiantes para analizar las variables involucradas en el aspecto cognitivo. De esta forma, se realiza la investigación de acuerdo a las fases siguientes: (1) Primero se realizó un estudio de carácter didáctico, en el que determinamos las áreas de especialidad en ingeniería donde se usan conocimientos de cálculo. Este estudio se realizó mediante el análisis de los textos en que se basan los cursos de esas áreas (Camarena 1984), así como revisando el plan de estudios (con especial atención en los programas analíticos) de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas que se imparte en el ITESM Campus San Luis Potosí. (2) Una vez realizado el estudio anterior, llevamos a cabo otro estudio preliminar, también de carácter didáctico, respecto a las *funciones cognitivas* de estudiantes de cálculo en una situación problema no contextualizada. Esto, con el propósito de caracterizar los elementos de orden cognitivo implicados y recopilar información a fin de determinar, específicamente, las *funciones cognitivas* particulares que se presentan al resolver un problema matemático. Cabe señalar que en esta parte de la investigación se aborda un aspecto central en el proceso, dado que no contamos con antecedentes referenciales sobre investigación en base a las *funciones cognitivas*, como las concibe *Feuerstein,* en el aprendizaje de matemáticas en el nivel superior.

Resultados

En la primera fase.

Encontramos que los cursos de especialidad en la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas donde, en teoría se emplean conocimientos de cálculo, son los de Análisis de Regresión, Análisis y Diseño de Experimentos, Control Estadístico de la Calidad, Procesos de Manufactura, Sistemas Integrados de Manufactura, Laboratorio de Producción, Laboratorio de Sistemas Integrados de Manufactura y Proyectos de Ingeniería. Aquí, el curso de Control Estadístico de la Calidad, requeriría conocimientos de cálculo sólo por la definición de algunos de los conceptos que se tratan, como la media en términos del valor esperado a largo plazo de la variable aleatoria, la varianza, que mide la dispersión de una distribución de probabilidad, etc. Sin embargo, en la práctica se recurre, a lo más, al uso de algunas fórmulas de integración para hallar la solución a problemas típicos de los textos y que nunca se relacionan a situaciones donde se requiera mayor profundidad en el conocimiento de la integral.

En los demás cursos, se supone emplearían conocimientos adquiridos en los programas de Análisis de Regresión y Análisis y Diseño de Experimentos, que a su vez, son los que requieren conocimientos de cálculo, como hemos podido establecer después de analizar los contenidos de sus programas de estudio y los libros de texto que se emplean. El resultado más importante de este análisis es el siguiente: se estableció que los conocimientos de cálculo de mayor uso allí, son los concernientes al método llamado de mínimos cuadrados en el ajuste de datos empíricos a modelos matemáticos para el análisis y diseño de experimentos de ingeniería.

Este resultado nos permite continuar con la siguiente fase del proyecto. Hemos identificado un conocimiento de especialidad en la ingeniería (método de mínimos cuadrados) donde se usan conocimientos de cálculo: funciones de dos variables independientes, la derivada parcial y el cálculo de extremos de funciones. Es importante señalar que el método mencionado no aparece en ninguno de los programas de los cursos de matemáticas.

La segunda parte se diseña en función de este resultado, se lleva al aula y se estudian los procesos cognitivos de los estudiantes.

<u>En la segunda fase</u>.

El estudio se realizó con un grupo de 13 estudiantes con edades entre 19 y 21 años, del curso de Matemáticas para Ingeniería III, en el ITESM Campus San Luis Potosí.

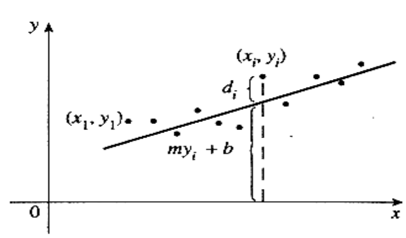
La experiencia se llevó a cabo al final de la implementación de un escenario de enseñanza común, esto es, mediante clases típicas donde el profesor asume el rol principal, expone los temas y propone ejercicios y problemas a resolver a los estudiantes. Esto, siempre siguiendo el programa de estudios oficial y en base al libro “Cálculo: conceptos y contextos (Stewart, J., 1999).

El problema usado en el estudio:

Suponga que un científico tiene razones para creer que dos cantidades, x y y se relacionan en forma lineal; es decir y = mx + b, cuando menos de manera aproximada para algunos valores de m y de b. El científico lleva a cabo un experimento y recopila datos en la forma de los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ *y los grafica. Los puntos no se encuentran exactamente en una recta, así que el científico desea determinar las constantes m y b de modo que la recta y = mx + b se “parezca” a los puntos tanto como sea posible (véase la figura). Sea* $d_i = y_i - (mx_i + b)$ *la desviación vertical del punto (x, y) con respecto a la recta. El método de los* ***mínimos cuadrados*** *determina a m y a b, de modo que minimiza* $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ *que es la suma de los cuadrados de dichas desviaciones. Muestre que, de acuerdo con este método, la recta que más se “parece” se obtiene cuando:*

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$



La experiencia se realizó de la siguiente forma: primero se presentó el problema a los estudiantes, distribuidos en tres equipos de tres integrantes y uno de cuatro, en una sesión de clase de 30 minutos y se les pide que realicen lo que se indica en él.

Resultados: se observan dificultades para comprender lo que se plantea en el enunciado. A pesar de estar familiarizados con la simbología que se usa, se observan conflictos en la comprensión. Estos conflictos van desde dudas sobre lo necesario para minimizar la sumatoria y que se reflejan, por ejemplo, en preguntas como *"¿lo que debemos hacer es derivar?"*, hasta otros más profundos donde alguno de los equipos no entendía la explicación que se da sobre el método de mínimos cuadrados ni lo que se pedía realizar.

Podemos decir que la función de *percepción clara* se ve afectada en los estudiantes debido a la aparición de estimulación novedosa, por ejemplo, con el término "mínimos cuadrados"; también al nivel de complejidad, que el estudiante percibe en la simbología empleada, e incluso, a la amplitud del texto, lo que repercute en un conocimiento impreciso de los datos de la información. Esta situación está estrechamente relacionada con la pobre *exploración sistemática* observada. La *impulsividad* aparece en forma notable, por ejemplo, cuando los estudiantes perciben que se debe derivar, intentan hacerlo aún antes de tener claro cuál es la función a tratar y las variables involucradas, al grado de que en dos de los equipos empiezan a derivar parcialmente respecto a x_i y y_i.

Es importante señalar que estas funciones cognitivas se ven afectadas también en forma considerable por otros dos aspectos fundamentales: la *falta de motivación* y la consecuente *falta de atención* al abordar el problema. Aquí, es importante señalar que en el aspecto motivacional, intervienen directamente *sesgos de pensamiento* como los determinados por la creencia (o al menos duda permanente) de que las matemáticas no les son útiles en su futuro ámbito profesional. Es decir, intervienen de manera decisiva factores de carácter sociocultural. Por ejemplo, durante la sesión en cuestión, al momento de iniciar la lectura del enunciado del problema, un alumno pregunta *¿Y esto para qué nos puede servir a nosotros?..., aquí dice que le interesa a un científico...no es para un ingeniero*.

Es evidente que estos problemas en la fase de entrada no son consecuencia de factores asociados al desarrollo cognitivo de los alumnos, sino a "vicios" de pensamiento adquiridos a lo largo de su vida escolar. Por otro lado, se observa que los alumnos tienen dificultades también con la función de *organización de la información*, aunque creemos que éstas no se deben a una incapacidad para realizarla, sino, más bien, a la incertidumbre en que se cae como producto de las situaciones ya mencionadas, así como a las características de la recuperación de información en la memoria a largo plazo respecto al prototipo que tienen los estudiantes de lo que es una función de dos variables (y cuáles son las variables) y a la noción de sumatoria. Por ejemplo, en dos de los equipos, en forma explicita, aparecen inquietudes en torno a la sumatoria: de su conocimiento previo, lo que aflora y predomina es el significado sobre los símbolos. Asocian el símbolo Σ a las series numéricas infinitas, perdiendo de vista la información en el enunciado del problema y por ende, la necesidad o conveniencia del uso de este símbolo en el planteamiento.

En la fase de elaboración, como consecuencia de los conflictos observados en la parte inicial, se ven afectadas las funciones de *percepción y definición del problema, selección de información relevante, interiorización y representación mental, y la clasificación cognitiva.*

Las funciones de *percepción y definición del problema*, y la de *selección de información relevante*, están directamente relacionadas a las de *percepción clara* y *exploración sistemática*, y afectadas por ellas en términos de las observaciones indicadas anteriormente. Respecto a la *interiorización y representación mental*, podemos inferir su afectación en algunas acciones de los estudiantes, por ejemplo, perciben que la función involucrada es de dos variables independientes, pero les causa conflicto el que no aparezca en forma explícita la variable independiente (alguien comentó que "*la función no tiene nombre*"), además aparecen dudas respecto a si la sumatoria es o no una función (y por tanto, diferenciable o no). Esto provoca que al momento de derivar no usen una simbología apropiada, por ejemplo, no indican qué cosa van a derivar, sólo escriben el resultado.

La *clasificación cognitiva* es una función que depende de otras funciones, entre ellas las de percepción, uso de distintas fuentes de información, conducta comparativa y distinción de información relevante, todas ellas afectadas desde la fase de entrada. Pero además, se presentan dificultades en ella debido a que los alumnos tienen deficiencias conceptuales respecto a las nociones previas necesarias tales como sumatoria, función de dos variables, derivada parcial, valor mínimo de una función de dos variables, etc.

Finalmente, en la fase de salida, sólo se observaron conflictos con la función de *comunicación explícita* y con la de *precisión y exactitud de la respuesta*. Algunos estudiantes llegan a las ecuaciones indicadas pero no escriben la respuesta en forma explícita. Es decir, presentan una comunicación egocéntrica, no consideran necesario mayor explicación sobre la solución, creen que cualquier otra persona que vea su trabajo lo comprende bien.

Referencias bibliográficas

Camarena, G. P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en ciencias, especialidad en Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México.

Camarena, G. P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Edita: ESIME-IPN, México.

Camarena, G. P. (1993). Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas. Edit. ESIME-IPN, México.

Feuerstein, R. (1979). *The Dinamic Assessment of Retarded Performes: The Learning Potencial Assessment Device, Theory, Instruments and Techniques*. Baltimore: University Park Press.

Muro, U. C. (2000). *La serie de Fourier en la transferencia de masa*. Tesis de Maestría en Ciencias con Orientación de la Enseñanza de las Matemáticas, UAE.

Prieto, S. (1992). *Modificabilidad cognitiva y P. E. I.* Colección Nueva Escuela. Madrid: Editorial Bruño.

Stewart, J. (1999). *Cálculo: conceptos y contextos*. México: Thomson Ed.

EL PROCESO DE MODELIZACIÓN EN EL AULA:
BUSCANDO UN MODELO GEOMÉTRICO PARA EL CORAZÓN

Liliana Homilka - María del Carmen Pérez
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Buenos Aires (Argentina)
lhomilka@fibertel.com.ar maria_del_carmen_perez@hotmail.com

RESUMEN

Este trabajo se propone compartir y discutir el resultado de una investigación en la que se utilizó la modelización del cálculo del volumen del ventrículo izquierdo del corazón como instrumento en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para enriquecer y mejorar nuestra práctica cotidiana, realizada con alumnos que cursan el nivel medio. El modelo proviene de aproximaciones realizadas para poder entender mejor la naturaleza y severidad de las afecciones cardíacas y mostrar con una visión simplificada aspectos de diagnóstico médico. (Pichel y otros, 1988). Otorgar significatividad a conceptos como área y volumen.

El proceso de modelización llevado a cabo en el aula siguió la secuencia planteada por Sallett Biembengut y Hein (1999). Esto dio origen a la búsqueda de información; a partir del análisis de la misma y de la elección de una figura se elaboraron actividades con el objeto de modelizarlo a través de alguna cuádrica.

Esta experiencia se constituyó en un medio eficaz para la motivación ya que los alumnos optaron por un desarrollo activo, demostrando gran interés al realizar las actividades dado que trabajaron con situaciones reales, buscando respuestas en la matemática a problemas concretos de otras ciencias.

Hace unos quince años se acercó a mí un destacado cardiólogo argentino, el Dr. Hugo Castagnino, para invitarme a formar parte de su proyecto de investigación sobre aneurismas ventriculares, una afección cardiaca muy seria que surge como complicación del infarto de miocardio o del mal de Chagas. Inmediatamente supuse que era un error, y que buscaban un especialista en Bioestadística. La respuesta fue clara: ***"No, buscamos un geómetra. Lo buscamos a usted."*** *No había error. La afección mencionada produce una deformación extraña de los miocitos, que son las células musculares que forman la pared del corazón. Necesitaban alguien capaz de describir y explicar ese proceso de deformación y deterioro esencialmente geométrico de una de las más perfectas estructuras biológicas de nuestro cuerpo. Los siguientes cinco años contuvieron la experiencia más apasionante de mi vida como matemático. Por primera vez desarrollé modelos matemáticos que explicaban estos procesos biológicos. Por primera vez estuve ante la pantalla de un microscopio electrónico, observando como la inspección del corte de un corazón infartado de rata nos confirmaba la validez de esos modelos. Por primera vez sentí la importancia y utilidad de mi formación matemática. Esta línea de investigación continúa, aunque ahora ya no necesitan de mi colaboración.*

Fausto A. Toranzos (Relme 15)

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se propone compartir y discutir el resultado de una investigación en la que se utilizó la modelización como instrumento en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para enriquecer y mejorar nuestra práctica cotidiana. La experiencia fue realizada con alumnos que cursan el nivel medio y, dado lo abarcativo de la misma, ésta se desarrolló durante un cuatrimestre. En ella se propuso la modelización del cálculo del volumen del ventrículo izquierdo del corazón. El modelo proviene de aproximaciones realizadas para poder entender mejor la naturaleza y severidad de las afecciones cardíacas y mostrar con una visión simplificada aspectos de diagnóstico médico. (Pichel y otros).

Esto permitió diagnosticar en los alumnos el nivel de adquisición de habilidades lógicas, determinar las falencias básicas de la enseñanza-aprendizaje en los ciclos anteriores y, dado que los aprendizajes previos deben ser tenidos en cuenta para construir los nuevos, superar los obstáculos y permitir la transferencia de los mismos a situaciones reales.

Otorgar significatividad a conceptos como área y volumen permite a los estudiantes avanzar en el proceso cognitivo y desarrollar capacidades de intuición, deducción y validación y de esta manera, progresar en la comprensión de los conceptos geométricos pasando por los distintos niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele. (*Van Hiele*, 1998)

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

En la ciencia, la noción de modelo es fundamental para la construcción y expresión del conocimiento. La matemática permite elaborar modelos que posibilitan una mejor comprensión, simulación y previsión del fenómeno que se estudia, en este caso la determinación de la naturaleza y severidad de las afecciones cardíacas.

En la modelización se requiere del conocimiento de conceptos matemáticos, de la realización de investigaciones sobre el tema -ya sea directamente a partir de datos experimentales o indirectamente a través de libros, enciclopedias, revistas, internet, etc.-, de la clasificación de la información, de la formulación de hipótesis, de la generalización, de la selección de las variables relevantes, de la selección de los símbolos apropiados para esas variables y de la descripción de sus relaciones en términos matemáticos, además de la utilización de la computadora como recurso didáctico. Una vez construido el modelo matemático, éste debe ser interpretado y convalidado.

Considerando que el aprendizaje es un proceso de crecimiento y que la educación matemática debe proveer de los elementos necesarios para que el educando desarrolle sus potencialidades y su capacidad para pensar crítica e independientemente, que el aula es el ambiente indicado para estudiar problemas del mundo real a través de la modelización matemática, este trabajo (Ausubel, 1972) parte de una situación problemática cuyo objeto es otorgar significatividad al concepto de volumen que, según Piaget causa dificultad por que crea confusión entre cantidad de materia, que es algo concreto y el volumen físico (espacio ocupado) que es algo abstracto.

En la modelización se aplicó la secuencia propuesta por Sallett Biembengut y Hein (*Biembengut y Hein*, 1998):

a) Justificación del proceso:

   Se comienza presentando una situación problemática extraída de la vida real que tiene repercusión directa en el accionar diario de las personas, mostrando que para su análisis y solución se requiere de la matemática, valorando así el carácter que la misma tiene como herramienta de apoyo a otras ciencias, en este caso la medicina.

   Preocupa la poca motivación que manifiestan los alumnos en lo que se refiere al aprendizaje de las matemáticas, hoy acentuada por la crisis social en que vivimos, esto llevó a tratar de responder en forma explícita e implícita preguntas relacionadas con el por qué, para qué y el cómo enseñar, aprender, trasvasar, evaluar, etc. conocimientos matemáticos.

b) Elección del tema:

Para dar respuesta a una discusión surgida en el aula sobre "*para qué sirve aprender matemática"* se propuso como actividad (que posteriormente generó otras): **¿Cómo calcularía el volumen del corazón?**

Esto motivó, en principio, una búsqueda bibliográfica en la que puso en juego, entre otras situaciones, comprensión e interpretación de textos de temas referentes a medicina. Del análisis de varios de ellos surge la elección de una figura que representa al corazón. y de que existen diferentes métodos que analizan el comportamiento regional del ventrículo izquierdo. A partir de la misma se elaboraron actividades con el objeto de modelizarlo a través de alguna cuádrica.

c) Desarrollo del contenido programático:

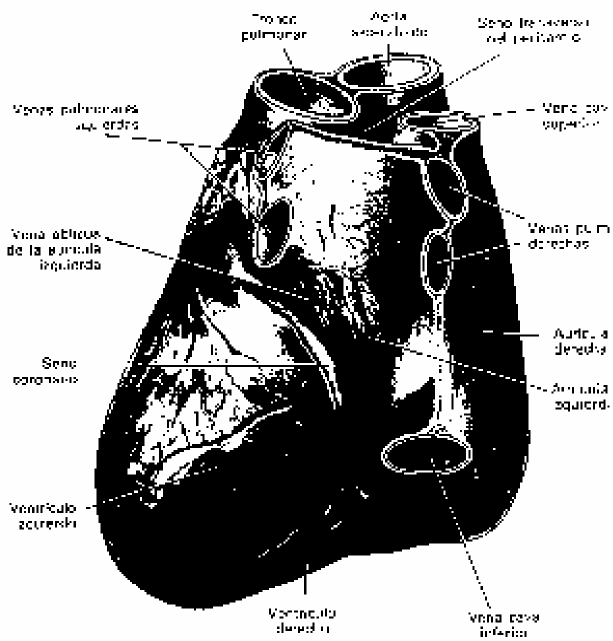


Fig. 6-17. Base y cara diafragmática del corazón. [illegible]

El corazón es una bomba pulsátil que trabaja en forma discontinua La caracterización funcional, que permite comparar lo normal de lo anormal, se realiza a través de diferentes métodos, entre ellos los referidos a:

1) La determinación de volúmenes ventriculares.

2) Los que analizan el comportamiento regional del ventrículo izquierdo.

Con respecto al primer método las respuestas obtenidas fueron:

- *No sé*
- *Calculo el volumen de una figura plana*
- *Por desplazamiento de líquido en un recipiente*
- *Lo asocio a un cuerpo conocido*

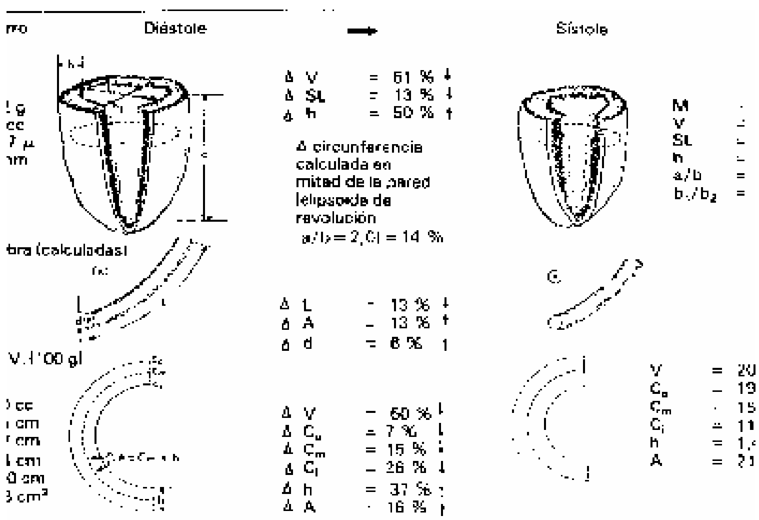
Luego de analizar las mismas se continuó con la presentación de algunos cuerpos ideales. (esfera, elipsoide, cono, cilindro, paraboloide, hiperboloide) y preguntándoles: ¿**A cuál se asemeja? ¿Por qué?**

Se compararon las respuestas obtenidas desde la matemática con las que dio la medicina.

> *Jonsell demostró que el volumen cardíaco total calculado considerando al elipsoide de revolución como referencia geométrica, guardaba buena correlación con el volumen total medido en forma directa. En la actualidad utilizan este cuerpo como referencia. La fórmula es $V=4/3\pi .a.b.c$, donde a es la longitud del semieje mayor y b, c las longitudes de los semiejes menores.(Jonsell, 1969)*

d) Fijación de conceptos:

En la sístole las paredes de las arterias se dilatan y en la diástole retornan elásticamente a su estado normal, impulsando a la sangre como un flujo continuo. Estudios experimentales en animales han demostrado que la relación entre el volumen normal y el anormal permite determinar distintos grados de patologías. Por eso, se analiza el siguiente estudio experimental del ventrículo izquierdo de un perro que se representa en sístole y diástole.



En esta etapa, se propuso a los alumnos:

Sobre la base de los datos de la figura determinar el volumen del ventrículo izquierdo en sístole y en diástole, graficarlos y compararlos.

e) Evaluación y convalidación de los resultados:

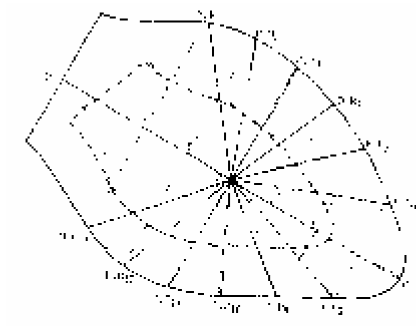
La propuesta para los alumnos al llegar a este punto de la investigación fue:

Analizar si el volumen calculado se corresponde con datos reales obtenidos en investigaciones médicas.

En relación con el análisis del comportamiento regional del ventrículo izquierdo este derivó en el conocimiento de que existen diferentes métodos que analizan su comportamiento regional.

Entre ellos se analizó el de Scampadornis por considerarlo el que más se adecua a los objetivos propuestos (*Pichel,Patritti, de la Fuente,1988*). Parte de imágenes del ventrículo izquierdo en final de sístole y en final de diástole obtenidas en forma directa si se trabaja sobre placas radiográficas, e indirectamente si es a través de imágenes proyectadas por el cineangiograma. En él es fundamental, para adjudicar a cada sector lo que le corresponde, la correcta superposición de las siluetas de final de sístole y de final de diástole. Esto motivo el análisis de la necesidad de pasar del espacio al plano, y de comparar las respuestas posibles desde la matemática y desde la medicina.

El desarrollo del método permitió aplicar en un contexto diferente el concepto de movimientos en el plano y de sus propiedades para obtener la división del ventrículo izquierdo en cuatros áreas. El trazado de bisectrices y mediatrices nos llevó a comparar triángulos, clasificarlos según sus lados y sus ángulos y determinar en cada caso sus puntos notables llegando así a la división del mismo en trece áreas morfológicas.



En la comparación entre áreas morfológicas normales y anormales se trabajó el concepto de proporcionalidad, desde el abordaje del estudio de las escalas de representación. La normalización del ventrículo izquierdo por medio de proyecciones y de la aplicación de propiedades de la circunferencia permitió visualizar de manera diferentes zonas alteradas.

Con el cálculo del índice de asinergia el alumno puso en juego conceptos de probabilidad, valor absoluto e inecuaciones.

A continuación se presentan algunas de las actividades que formaron parte de la secuencia didáctica para ilustrar el proceso de modelización en el aula.

1. Identificados los ejes longitudinales de final de diástole y de sístole, debe corregirse el movimiento de rotación.

Superpóngalos de acuerdo a las siguientes instrucciones:

a) Alineando los ejes longitudinales máximos coincidiendo los puntos medios de ambos ejes.

b) Alineando los ejes longitudinales máximos a partir de la superposición del punto medio de la válvula aórtica de los dos contornos.

c)Gire 5º en sentido horario la silueta que representa el final de diástole, considerando como centro de giro el punto determinado por la intersección de dichos ejes a nivel del plano valvular aórtico

2. Realizada la alineación de las siluetas, y teniendo en cuenta la variación de la longitud de un radio, rote el eje 90º con centro O. Trace las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice.

¿Cuánto miden los ángulos que quedaron determinados? ¿Por qué?

3. ¿Cómo establecería que la medida de un radio de una zona morfológica determinada se corresponde con los valores normales

4. a) Trace la mediatriz segmento OL y OR. ¿Qué queda determinado?

b) ¿Existe algún punto de intersección de la mediatriz con algunos de los radios? ¿Por qué?

5. Las propiedades de los materiales elásticos que has visto en física, se pueden aplicar a una fibra muscular, por lo tanto podemos decir que un músculo más delgado tiene mejor "calidad contráctil" que uno más grueso porque a menor sección desarrolla la misma fuerza.

El comportamiento de los músculos se ven afectados por las tensiones y por los estiramientos. Por lo tanto, se aplica a las propiedades diatólicas del ventrículo.

La función $y = 0{,}43\ e^{kv}$ *vincula la presión de diástole (y) con el volumen de diástole (v)*

a) Caracterice la función.

b) K es un número que indica el módulo de rigidez, ¿cómo puede conocer el valor que le corresponde a una persona cuyo volumen es de 75 cm^3 *y que tiene una presión de 10 mmHg?*

c) A la función derivada de y con respecto a v se la llama rigidez, obtenga su ecuación.

d) Teniendo en cuenta la expresión hallada en el ítem anterior, indique si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta

"La rigidez del ventrículo es función lineal de la presión".

e) Lo recíproco a rigidez se llama distensibilidad. Halle la fórmula que le permita calcular la distensibilidad si se conoce la presión.

f) Caracterice la función distensibilidad..

Las dificultades que surgieron en cuanto a la comprensión de temas que corresponden a otras ciencias fueron abordados por los profesores de biología, física, química y lengua. De esta manera, la investigación llevada a cabo se constituyó en un proyecto interdisciplinario.

CONCLUSIONES

Esta secuencia de actividades permite trabajar desde la modelización un problema significativo con el objeto de construir y aplicar conceptos matemáticos curriculares en forma no tradicional, constituyéndose en un medio eficaz para la motivación ya que los alumnos optaron por un desarrollo activo.

Además permitió analizar la diferencia entre responder a una situación determinada desde la matemática y desde otra ciencia, reforzando el sentido crítico y realista y valorando la herramienta matemática como apoyo en este caso a la medicina.

Por otra parte, se destaca que la situación planteada, dado la amplitud de los conocimientos matemáticos relacionados el tema propuesto, fue posible abordar durante la experiencia múltiples conceptos matemáticos desarrollados en la escuela media, permitiendo al alumno comprender la interrelación existente entre contenidos de los que por lo general posee una visión y tratamiento aislado. El abordaje de la situación problemática presentada, al transformarse en un proyecto interdisciplinario, en el cual los docentes de las distintas áreas colaboraron en la búsqueda del modelo, dio a los alumnos la posibilidad de comprobar cómo especialistas de formaciones diversas aúnan sus esfuerzos en la investigación para hallar soluciones a situaciones problemáticas reales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. (1972). *Psicología Evolutiva: un punto de vista cognitivo*. México: Trillas.

Alsina, C. y otros (1996). *Enseñar matemática*. Barcelona, España: Grao.

Biembengut, M.; Hein, N. (*1998*). *Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas*. Educación Matemática. Vol 11. Nº 1.

Herman, J. (1970). *Left ventricular volume by angiocardiography*. *Comparison of methods and simplification of techniques*. Cardiovasc Res.

Jonsell, S. (1969). *Method for thr determination of heat size by teleroentgenography*

Ministerio de Cultura y Educación. (1997). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal*. Buenos Aires.

Pichel, H.; Patritti, J.; de la Fuente, L. (1988). *Análisis de patologías cardíacas.* Buenos Aires: Fundación Favaloro.

LAS ACTIVIDADES DE MODELACIÓN Y SIMULACIÓN PARA LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DEL CÁLCULO

Liliana Suárez Téllez y Francisco Cordero Osorio

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN, México

lsuarez@mail.cinvestav.mx, fcordero@mail.cinvestav.mx

RESUMEN:

En este reporte de investigación se presentan los avances de un proyecto acerca de las formas de construcción de conocimiento matemático que proporcionan experiencias de aprendizaje basadas en actividades de simulación y modelación en el estudio de situaciones de la variación y de la acumulación de cantidades que varían continuamente.

En la investigación se toma como referencia la aproximación socioepistemológica. Bajo ese paradigma se concibe el Cálculo como el cuerpo de conocimientos que permite el estudio de los fenómenos de variación y la modelación se concibe como una forma de construir conocimiento matemático que pertenece a las prácticas sociales.

Se presentan aquí las primeras exploraciones en un contexto del estudio del movimiento. La forma de trabajar las representaciones asociadas al movimiento es con el uso de sensores y de transductores que transforman la información en conjuntos de datos que diversos programas manipulan mostrando representaciones gráficas en calculadoras.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se ha hecho evidente que el conocimiento sobre la naturaleza del contenido matemático permite el planteamiento de hipótesis plausibles sobre la construcción y reconstrucción de significados asociados a las ideas matemáticas importantes. (Por ejemplo, Alanís, 2000). El planteamiento teórico llamado Socioepistemología proporciona una base para identificar y explicar los fenómenos didácticos asociados a la construcción y reconstrucción de significados del Cálculo. La identificación está guiada por la búsqueda de invariantes que ocurren en la actividad humana y las prácticas sociales que motiva el surgimiento de un contenido matemático determinado, como la predicción en el estudio realizado por Cantoral (2001). La explicación se proporciona a través de esos invariantes en la construcción del conocimiento, llamados categorías por Cordero (1998), estableciendo ejes que pueden organizar una rama disciplinaria como, en esta perspectiva, lo es el Cálculo y el Análisis.

El antecedente principal de este trabajo está tomado del planteamiento teórico de Cordero (2001) donde se esboza una estructura que da cuenta de una nueva organización del Cálculo a través de tres categorías y en el que toma como un elemento importante la modelación y el uso del contenido matemático. Otro de los antecedentes es el planteamiento de Arrieta (2001)

Nuestra tarea específica consiste en mostrar las características del contenido matemático que delinean cierto tipo de pensamiento matemático, particularmente el referente a la variación y el cambio. Interesa también establecer la relación de esta caracterización con una de las actividades, generadora por excelencia de uso y conocimiento matemático, como lo es la modelación matemática. *¿Qué formas de construcción de conocimiento proporcionan experiencias de aprendizaje basadas en actividades de simulación y modelación matemática en el estudio de las situaciones del Cálculo que se refieren a la variación y a la acumulación de las cantidades que varían continuamente?*

MARCO TEÓRICO

La teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) proporcionará un marco teórico general para estudiar las relaciones entre los sistemas del aprendizaje, la enseñanza y el saber. En esta teoría el principal problema de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber con el fin de su optimización, de su control y de su reproducción. Esta visión concede particular importancia a la situación- problema que constituye la experiencia de aprendizaje y a la gestión del profesor, durante el diseño y durante la experiencia, de la interacción entre la situación y el problema.

El diseño de situaciones será el punto de partida de la investigación. En la Teoría de las Situaciones Didácticas la naturaleza del conocimiento matemático incluye tanto conceptos como sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas. Una situación didáctica se define como un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un grupo de estudiantes y el profesor que se establecen con el fin de que los alumnos aprendan, reconstruyan algún conocimiento. En particular el diseño de las situaciones en nuestra investigación contemplarán los siguientes aspectos:

- su planteamiento será coherente con la aproximación teórica socioepistemológica,
- incorporará actividades de simulación y modelación,
- tendrá asociada una explicación de la forma en cómo las construcciones del Cálculo se lograrán a partir de las actividades que la integran. Esta explicación incluirá el uso de herramientas y la generación de significados.

EXPLORACIONES INICIALES

A continuación se presenta una situación de aprendizaje cuyo propósito es el estudio del movimiento. Se ejemplifica, a través del desempeño de los estudiantes en esta actividad, cómo la interacción entre el uso de representaciones (numéricas, gráficas y algebraicas) y el uso de simulaciones guía al estudiante para avanzar en el uso de herramientas y la generación de significados hasta lograr una visión cualitativa de la situación planteada sobre el movimiento.

En las realizaciones de los estudiantes se observa la forma primaria de predicción, es decir aquélla que considera el cambio constante. El propósito de esta investigación es generar la evolución en las producciones a los estudiantes hacia el uso de herramientas de predicción más sofisticadas que involucren el análisis de los cambios en segundo y tercer orden.

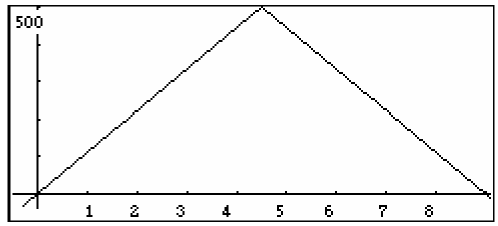
Durante la secuencia de actividades se propicia que los estudiantes transiten por un ciclo de exploraciones que comienza con la situación, sigue con realización de simulaciones y regresa a la situación (ciclo situación – simulación - situación). El propósito de esta secuencia es propiciar una interacción entre las representaciones de los estudiantes con las representaciones que resultan de simular con el uso de la tecnología la situación del movimiento establecida.

Llamamos *construcción de conocimiento matemático a partir de actividades de simulación y modelación* a la evolución que se presenta en el uso de herramientas y la generación de significados que se observa en la secuencia de exploraciones situación – simulación – situación en las que interactúan las representaciones de los estudiantes con las representaciones que resultan de simular la situación del movimiento establecida.

S1. La situación

Se describe con palabras el recorrido de una persona de ida y vuelta a una distancia de 500 metros en 9 minutos.

Los estudiantes recurren a representaciones gráficas de la posición con respecto al tiempo con trazos rectos, tomando como constante la velocidad del recorrido.

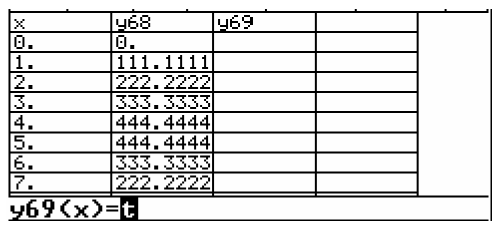


Calculan la velocidad con la fórmula para velocidad constante y se identifica ésta como la pendiente de la recta.

$$v = \frac{d}{t}, \; v = \frac{1000}{9}, \; v = \frac{500}{4.5}$$

Observan que la pendiente tiene signos contrarios para los recorridos de ida y de regreso.

Al analizar las posiciones para minutos consecutivos, observan que el cambio de posición de un minuto a otro es constante en los intervalos de ida y de regreso, y corresponde con las pendientes de la curva.



x	y68	y69	
0.	0.		
1.	111.1111		
2.	222.2222		
3.	333.3333		
4.	444.4444		
5.	444.4444		
6.	333.3333		
7.	222.2222		

y69(x)=t

S2. La simulación

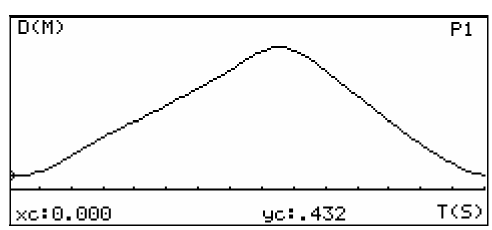
Se propicia que los estudiantes realicen un movimiento de tal manera que a través de un sensor de posición se genere una representación gráfica que corresponda con la situación planteada.

Los estudiantes establecen escalas para representar la situación y se mueven a lo largo de una línea recta frente al sensor.

500 m corresponden con 5 m

9 min corresponden con 1 min

Obtienen una gráfica con trazos suaves. Durante la simulación controlan su velocidad, determinando que ésta sea constante para que se parezca a su primer esbozo.



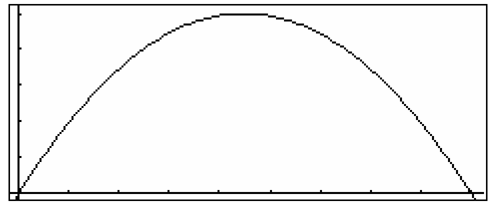
Observan que la inclinación de la recta se relaciona con la velocidad, que la inclinación durante la mayor parte del recorrido es constante, que en el momento de comenzar el regreso la curva no tiene inclinación, que las inclinaciones para los recorridos de ida y vuelta son contrarios.

Relacionan la velocidad constante con líneas rectas.

S3. La situación

Se les propone a los estudiantes explorar[1] el fenómeno del movimiento a partir de la gráfica de una parábola.

Asocian a esta representación el significado esbozado en la exploración anterior en la que la pendiente de la curva corresponde con la velocidad.

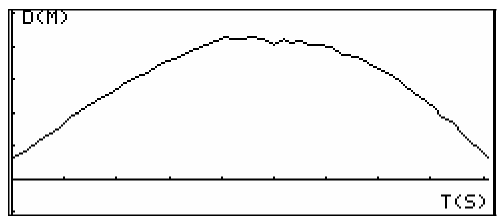


Obtienen la representación algebraica de la parábola y se determina la velocidad por medio de una aproximación con velocidades promedio

S4. La simulación

Se propicia que los estudiantes realicen nuevas simulaciones analizando lo que ocurre con las pendientes en cada momento del recorrido.

Durante la simulación, los estudiantes concentran la atención en las pendientes de la curva a lo largo del periodo del recorrido. Observan que las pendientes de la curva tienen menor inclinación en el inicio y fin del recorrido.



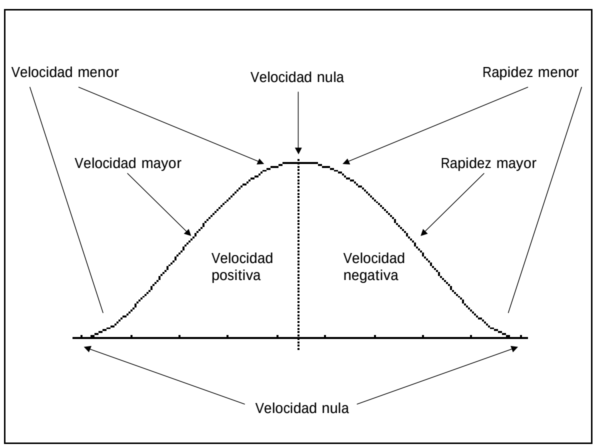
Uso de herramientas y generación de significados encontrados en el desempeño de los estudiantes.

	Herramientas	Significados
S1	Graficación de rectas. Cálculo de la velocidad constante. Tabulación de puntos.	Se identifica la velocidad promedio como la pendiente de la recta. Se observa que la pendiente tiene signos contrarios para los recorridos de ida y de regreso y se asocian signos contrarios a las velocidades de ida y de regreso. Se identifica el cambio de posición constante con la velocidad promedio y con las pendientes de las rectas.

[1] En algunas ocasiones los estudiantes han hecho la exploración de manera espontánea, es decir no ha sido necesario que el profesor se los sugiera.

S2	Establecimiento de escalas. Abstracción de la situación para representarla con la medición de posición con el sensor.	Se relaciona la velocidad constante con líneas rectas. Se relaciona la velocidad nula con una pendiente horizontal de la curva.
S3	Graficación de parábolas. Cálculo de velocidades constantes en intervalos pequeños.	Se genera un procedimiento de cálculo de la velocidad variable a partir de aproximaciones de velocidades promedio.
S4	Establecimiento de escalas. Abstracción de la situación para representarla con la medición de posición con el sensor.	Se relaciona los trozos donde la gráfica tiene pendientes más o menos inclinadas con velocidades mayores o menores Se observa que en el inicio y fin del recorrido la pendiente de la recta es pequeña y se asocian con una velocidad nula

El ciclo de exploraciones de situación - simulación - situación permiten incorporar los significados generados por al estudiante para la construcción de una apreciación cualitativa de la velocidad durante el recorrido a partir de la gráfica de la posición con respecto al tiempo:



Estas exploraciones señalan, de alguna manera, el tipo de actividades relacionadas a la modelación: el estudiante realiza múltiples realizaciones con el propósito de lograr una gráfica que mejor describa la situación de movimiento, realiza ajustes en su movimiento y en la representación gráfica que le permiten una mejor correlación entre la pendiente de la curva y la velocidad y entre la variación de la pendiente de la curva y la aceleración del movimiento. En este sentido decimos que la actividad de aprendizaje planteada permite la construcción de conocimiento matemático a partir de actividades de simulación y de modelación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alanís, J. (2000) La predicción: un hilo conductor para el desarrollo de un curso de Cálculo. En Cantoral, R. (Com.) El futuro del Cálculo infinitesimal. Grupo Editorial Iberoamérica.

Arrieta, J. (2001) La modelación de fenómenos como procesos de matematización en el aula. Memoria predoctoral. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Artigue, M. (1995) La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (Ed.) Ingeniería en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (en prensa). Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 4, 2, 57-74.

Confrey, J. (1999). Generative domain knowledge: Redefining teachers' content knowledge for a changing technological world. En Memorias del VII Simposio Internacional en Educación matemática Elfriede Wenzelburger. Grupo Editorial Iberoamérica.

Confrey, J. y Costa, S. (1996). A Critique of the Selection of "Mathematical objects" as Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking. International Journal of Computers for Mathematical Learning, volumen 1, pp. 139-168.

EXPERIENCIAS EN EL DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CURSOS DE CÁLCULO USANDO WEB

Lourdes Quezada Batalla y Rubén Darío Santiago Acosta
Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México. México
lquezada@campus.cem.itesm.mx rsantiag@campus.cem.itesm.mx

RESUMEN

En este trabajo presentaremos el diseño de cursos de cálculo diferencial e integral de una y varias variables que siguen una estrategia combinada de enseñanza presencial y de aprendizaje en línea basados en la metodología de diseño instruccional elaborado en el Sistema ITESM (ITESM,1995) En el diseño hemos considerado el análisis de la materia, la planeación del curso: objetivos, contenidos, actividades, evaluaciones, etc. (Rico, 1998) y la integración del curso (sitio WEB y actividades en el aula). También mostraremos ejemplos de actividades de los cursos.

INTRODUCCIÓN

En los sistemas educativos tradicionales el medio de enseñanza se reduce a la comunicación directa entre profesor y alumno. Sin embargo, el rápido desarrollo de los medios de comunicación electrónicos empieza a influir en los métodos de enseñanza y en los estilos de aprendizaje. El uso de estos medios electrónicos reduce las diferencias entre la forma de aprender dentro y fuera del aula y puede ser un factor para mejorar el proceso educativo (Blázquez, 1994). Bajo esta perspectiva, los cursos de cálculo que se ofrecen por el Departamento de Matemáticas de nuestra institución se están diseñando bajo un esquema de comunicación en el aula apoyada por comunicación electrónica basada en el web. Los cursos siguen las premisas de que la enseñanza es un proceso de comunicación donde la intencionalidad tiene un carácter perfectivo enmarcado en un contexto institucional controlado (Blázquez, 1994; Crosetti, 2000), y que el “medio de enseñanza” proporciona a los alumnos una experiencia indirecta de la realidad e implica tanto la organización didáctica del mensaje que se desea comunicar como el equipo técnico necesario para materializarlo.

En el aula se usan preferentemente las metodologías de resolución de problemas y de aprendizaje basado en problemas que se han caracterizado por proponer actividades no rutinarias en la que los estudiantes desarrollan sus propias estrategias de solución, seleccionan sus herramientas y discuten utilizando argumentas matemáticos (Ortega, 1988). La plataforma de comunicación electrónica que apoya los cursos es Blackboard (Crosetti, 2000) y se pretende observar el progreso de los aprendizajes en el estudiante, fomentar el trabajo colaborativo (virtual y presencial), proporcionar diversos recursos de aprendizaje (problemas, ejercicios, lecturas, proyectos, etc.) y la interacción remota entre todos los participantes.

MARCO TEÓRICO

La teoría de diseño educativo que soporta nuestros cursos se basa en la “Teoría uno” (Perkins, 1992) que establece que para fomentar el aprendizaje cognitivo cualquier proyecto educativo debería incluir:

Información clara, práctica reflexiva, respuesta informativa y una fuerte motivación intrínseca o extrínseca. Las características del diseño educativo se orientan más hacia la práctica, identificando métodos educativos, así como situaciones en las que dichos métodos deberían utilizarse o no, con la posibilidad de que los métodos de enseñanza puedan fraccionarse en métodos con componentes más detallados que proporcionen a los profesores una mejor orientación. Estos métodos aumentan las oportunidades de conseguir los objetivos en lugar de asegurar la consecución de los mismos.

En particular en el diseño de nuestros cursos consideramos tres elementos básicos: naturaleza social del aprendizaje, las tendencias actuales de la educación y el uso de la tecnología. Consideramos que estos elementos favorecen el proceso enseñanza-aprendizaje y pueden mejorar la calidad y efectividad del aprendizaje de los alumnos. Esto se fundamenta en:

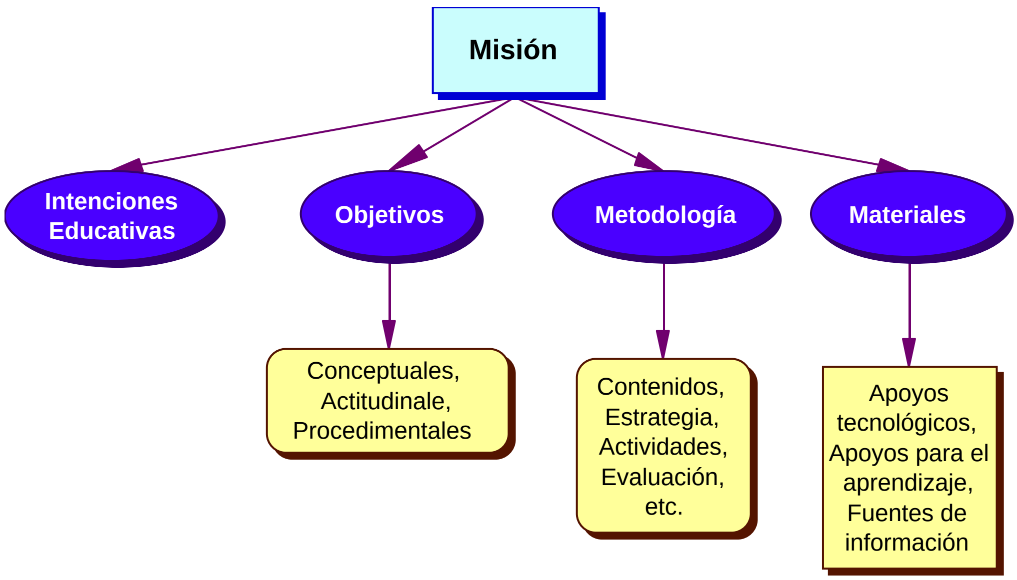
- ✓ Según la teoría sociocultural de Vygotsky el sistema en el cual se desarrollan las actividades de enseñanza deben considerar la naturaleza social del mismo y el contexto en el cual ocurre este proceso
- ✓ Las tendencias actuales de la educación coinciden que el aprendizaje mejora utilizando actividades y proyectos significativos para el alumno. Y el uso de tecnologías promueven el uso de nuevos métodos y procedimientos de enseñanza que utiliza el profesor, facilitando la adopción de técnicas didácticas colaborativas como Resolución de Problemas y Aprendizaje Basado en Problemas (Ortega, 1998).
- ✓ Por otra parte, el avance en las tecnologías de comunicación permiten considerar a los cursos web como instrumentos de un espacio social, la red, en el cual ocurren interacciones y conversaciones con objetos reales o virtuales (Blazquez, 1994; Crosseti, 2000).

MÉTODOLOGÍA DE TRABAJO

El proceso de diseño instruccional seguido por el departamento parte de generar un plan de trabajo que considera los elementos:

- ✓ Modelo Educativo del ITESM
- ✓ El uso de técnicas didácticas
- ✓ El uso de tecnología.

El modelo educativo considera objetivos, contenidos, actividades y evaluación (Rico, 1998) y se encuentra enmarcado dentro de la misión del ITESM como se muestra en la siguiente ilustración.



Las técnicas didácticas utilizadas para el área de matemáticas siguen la filosofía de aprendizaje colaborativo como, por ejemplo: Resolución de Problemas (RP) y Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).

Tanto en ABP como en RP se siguen tres principios básicos:

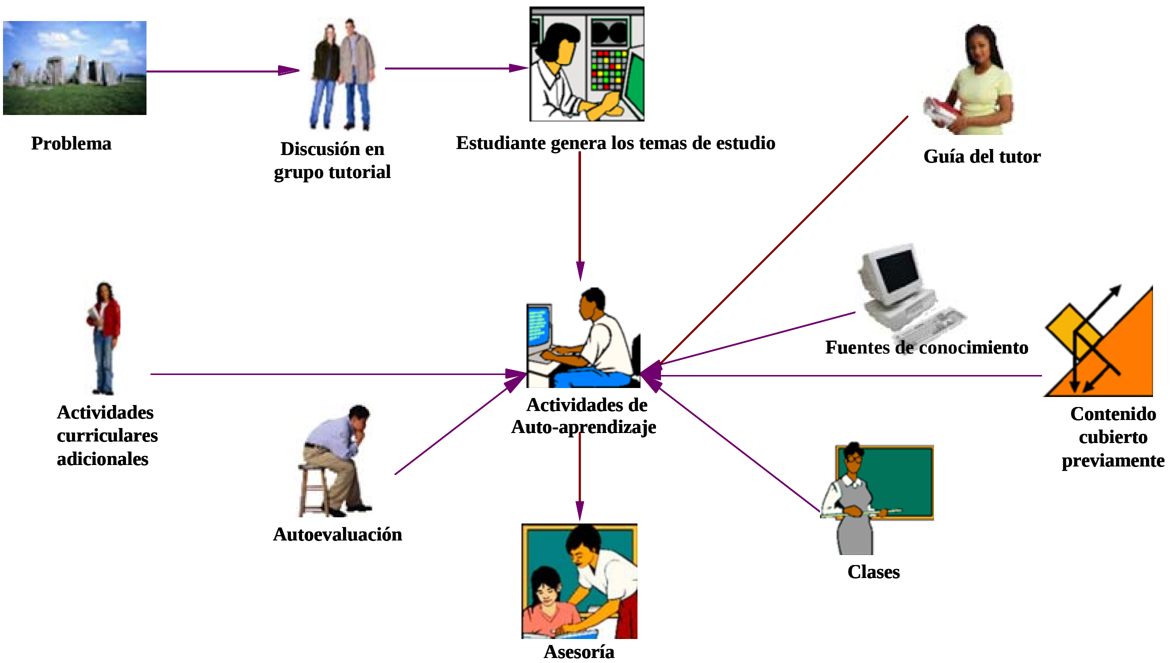
- ✓ El entendimiento de una situación o problema real se produce por las interacciones con el medio ambiente.
- ✓ El conflicto cognitivo al enfrentar cada nueva situación estimula el aprendizaje.
- ✓ El conocimiento se desarrolla mediante el reconocimiento y aceptación de los procesos sociales y de la evaluación de las diferentes interpretaciones individuales del mismo fenómeno

La caracterización del problema marca la diferencia fundamental entre estas dos técnicas. En el caso de RP el problema está definido y estructurado mientras que en ABP el problema es una situación no bien estructurada o definida.

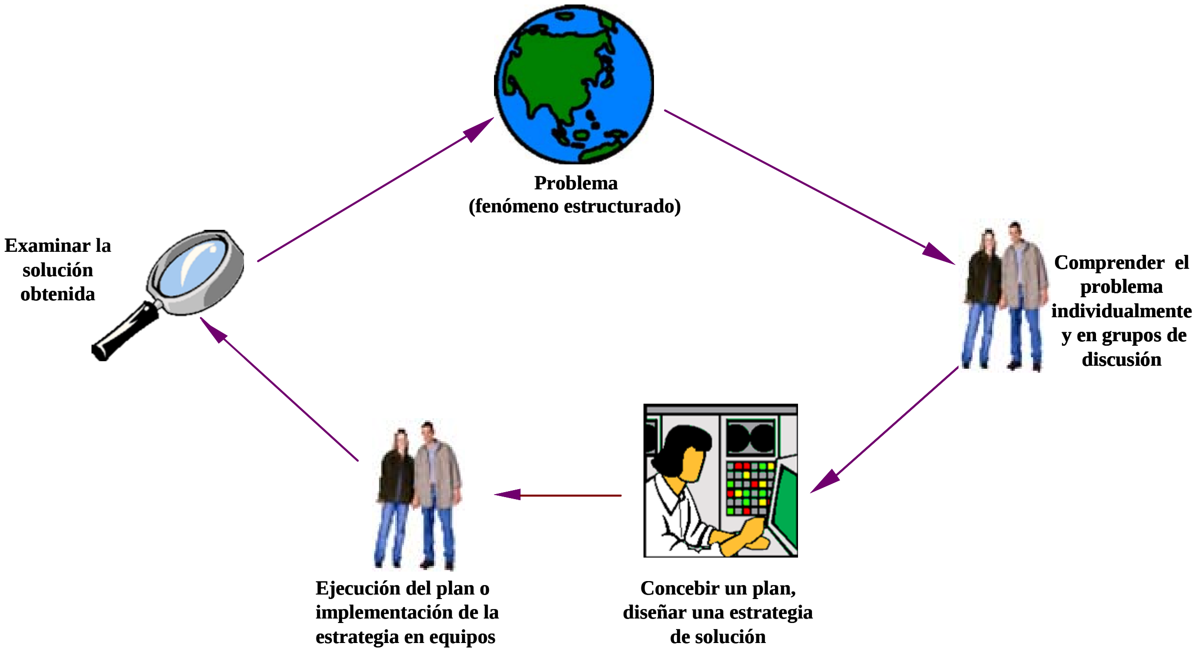
La metodología que seguimos en nuestras actividades de ABP considera los siguientes elementos:

- ✓ Presentar el problema o escenario (clarificar términos).
- ✓ Definir el problema.
- ✓ Listar "Qué se conoce" y "Qué se necesita conocer".
- ✓ Listar posibles estrategias de solución (acciones, recomendaciones, hipótesis). Llevar a cabo la estrategia.
- ✓ Presentar y fundamentar su solución
- ✓ Evaluación y retroalimentación

La siguiente ilustración muestra su uso.



La siguiente ilustración muestra la metodología de los cuatro pasos de Polya (Polya 1981) seguida en RP (comprender el problema, concebir el plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida).



El uso de tecnología en el diseño de los cursos se da en tres aspectos:

- ✓ Uso de plataformas tecnológicas de comunicación electrónica y como organizadores de actividades de aprendizaje y apoyo para los alumnos como Lotus Notes, Blackboard y WebTec.
- ✓ Uso de paquetería especializada para el diseño de sitios web como Frontpage, Flash, Dreamweaver, etc.
- ✓ Utilización de paquetería específica para el área de matemáticas como: Mathematica y Excel.

ESTRUCTURA DE LOS CURSOS

Los cursos se elaboraron considerando módulos temáticos denominados Unidades de Aprendizaje y están basados en grandes temas que en conjunto cumplen los temarios oficiales. Cada unidad está constituida de los siguientes elementos:

- ✓ Introducción
- ✓ Objetivos de la unidad
- ✓ Actividades dentro y fuera del aula de tipo individual (lectura, conceptos básicos, práctica de laboratorio, tarea y examen) y colaborativo (verificación de ejercicios por parejas, resolución de problemas, desarrollo de proyectos).

Cada actividad tiene sus propios objetivos, instrucciones de realización, sugerencias para el estudiante, la actividad, la forma de evaluación y la guía para el profesor. Las unidades de aprendizaje basadas en ABP tienen los elementos siguientes, propios de la técnica: escenario, lectura e investigación, discusión grupal y actividades complementarias. Las figuras siguientes muestran páginas de los cursos.


Unidad de Aprendizaje - Microsoft Internet Explorer provided by MSN
Departamento de
Matemáticas
Funciones logarítmicas y exponenciales
ITESM-CEM
Introducción
Unidad de Aprendizaje
Introducción
Objetivos
Actividades
La clase
Práctica
Investigación
Ejercicios
Problemas
Proyecto
Tarea
Funciones exponenciales y logarítmicas
Las funciones exponenciales aparecen recurrentemente en fenómenos tales como el crecimiento de poblaciones, decaimiento radiactivo e interés compuesto. Junto con las funciones logarítmicas son herramientas muy importantes en el análisis y descripción matemáticas de otros muchos fenómenos que ocurren en el mundo real. En esta unidad estableceremos algunos conceptos básicos (definición, regla de correspondencia, dominio, imagen y gráfica) de este tipo de funciones. Al terminar el módulo serás capaz de reconocer sus propiedades y sus potenciales usos.


Untitled Document - Microsoft Internet Explorer provided by MSN
Departamento de
Matemáticas
Matemáticas II para Ingeniería
Ma. de Lourdes Quezada
Problema
Situación
Lectura e Investigación
Discusión grupal
Actividades complementarias
¡Bienvenido a este módulo de PBL!
Aquí encontrarás la situación y las instrucciones necesarias para trabajar con ella

Algunos de los escenarios usados en Mate I se describen en la tabla siguiente:

Módulo	Título de la actividad	Metas de aprendizaje
1	El gimnasio	Funciones
2	La fortuna de Celia Reyes.	Funciones trascendentes
3	Energía eléctrica	Conceptos básicos de derivadas
4	El caso Dempsey	Interpretación física de la derivada
5	El caso Esteban Duarte	Razones de cambio
6	La maleta de Iberia La cafetería	La extremos relativos

La integración bajo PBL en el curso de Mate II se presenta en la tabla siguiente:

Módulo	Título de la actividad	Metas de aprendizaje
1	Pelotas de golf	Diferenciales
2	La energía y el agua	Integral definida
3	El agua es vida	Métodos de integración
4	Misión espacial	Teorema fundamental del cálculo
5	La raqueta de tenis	Aplicaciones de integración
6	Teotihuacan	Aplicaciones de integración
7	El equipo médico	Métodos de integración
8	Por una vivienda digna	Sucesiones y series
9	Pintura Promex	Series
10	Centro histórico de la Ciudad de México	Sistemas de ecuaciones lineales.

La red de problemas usada en Mate III se presenta en la tabla siguiente:

Módulo	Título de la actividad	Metas de aprendizaje
1	Efecto multiplicador	Funciones vectoriales
2	Fuerza de Coriolis	Interpretación física de las funciones vectoriales
3	Vías del ferrocarril	Curvatura
4	La ola	Funciones de varias variables

5	Una ecuación del calor	Derivada parcial
6	Factor de enfriamiento	Derivada direccional y parcial
7	Taylor y su expansión	Extremos relativos de funciones de dos variables
8	La curva restringida	Multiplicadores de Lagrange
9	Las preguntas de la región	Integral doble
10	La ciudad y la bahía	Integral doble en coordenadas polares
11	El manto terrestre	Integral triple
12	Corriente oceánica	Campos vectoriales
13	El charco	Integral de línea

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES TIPO RP Y ABP

A continuación presentamos un ejemplo de actividad de RP y dos de ABP que se han puesto en escena con los alumnos.

Ejemplo de Escenario de ABP para Mate I

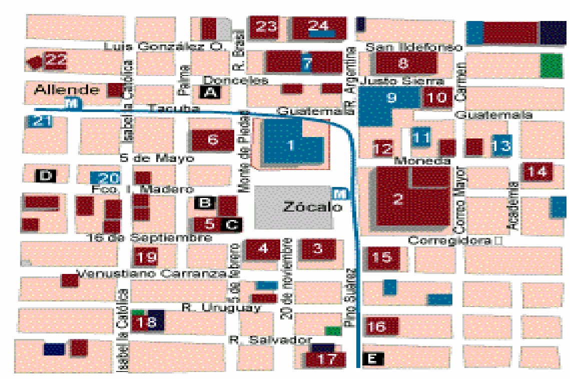
La fortuna de Celia Reyes.

Celia Reyes Lujano derrotó finalmente en tribunales al Banco del Atlántico, institución a la que reclama el pago por sus inversiones hechas en 1988, aunque el monto de los intereses será cuantificado por la segunda sala civil del Tribunal Superior de Justicia del Distrito Federal.

La demanda de la señora Reyes tuvo su origen cuando reclamó hace tres años a Banco del Atlántico el importe y los intereses acumulados por dos inversiones realizadas a una tasa fija de 140 por ciento anual en 1988. Uno de los depósitos era por 5 millones de viejos pesos (5 mil pesos actuales) y el segundo por 54 millones 72 mil 400 viejos pesos (54 mil 724 pesos actuales). Al tipo de cambio de esa época, ambos montos equivalían a 25 mil dólares. La señora Reyes empleó el mecanismo de pagarés liquidables al vencimiento, que en ese caso era de un mes. La señora Reyes requiere saber el monto de su dinero y la cantidad que tendrá que pagar por impuestos al momento de recibirlo.

Ejemplo de Escenario de ABP para Mate II

El centro histórico de la Ciudad de México

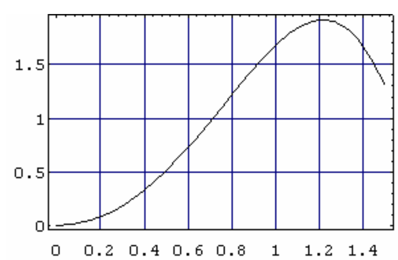


El gobierno de la ciudad desea reducir el tránsito de automóviles en el primer cuadro de la Ciudad (Centro Histórico) porque el humo de los automóviles hace daño a los edificios históricos. Tu equipo ha sido asignado para ayudar al gobierno de la Ciudad, tu tarea es analizar la situación y elaborar varias propuestas para presentarlas al Gobierno. En las propuestas se debe mostrar una simulación gráfica del tránsito en la Centro Histórico con sus fundamentos teóricos

Ejemplo de Actividad de RP para Mate III

Las preguntas de la región

1) El esquema siguiente muestra una región que está limitada por el eje X y una función definida en el intervalo $0 \le x \le 1.5$ cm, estima el área bajo la curva.



2) Supón ahora que la región es la base de un sólido que tiene altura de 2cm estima el volumen del sólido.

3) Considera ahora que la altura del sólido está dada por la función $z=x^2+y^2$, estima el volumen del nuevo sólido.

4) Supón que la región representa una lámina con densidad superficial de masa dada por $s(x,y)=x+2y$ gr/cm^2.

   - ✓ Estima la masa de la lámina. Observa que para cada punto (x,y) se tiene una densidad de masa diferente.
   - ✓ Estima las coordenadas del centro de masa de la región.

RESULTADOS

Después de la etapa de planeación y diseño de los cursos se han empezado los trabajos con alumnos y profesores. Primero se capacitó a 11 profesores tanto en el uso de la plataforma tecnológica como en las técnicas didácticas de RP y ABP. Los profesores trabajaron con 16 grupos en el semestre Enero-Mayo de 2002. Y al terminar el semestre proporcionaron diversas sugerencias para la mejora de los cursos. Sin embargo, se observó que los profesores tenían dificultades en el uso de las técnicas didácticas y en el empleo de la plataforma. Por esa razón se determinó continuar con el taller de capacitación en la técnica de ABP. Se tienen pocos resultados globales con los estudiantes porque sólo ha estado trabajando con un grupo de 36 estudiantes en cuanto al desarrollo de habilidades y capacidades intelectuales para resolver problemas. Un estudio completo que abarque tanto a profesores como a alumnos se encuentra en proceso de implementación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarez, A y Del Río, P (1999) Educación y Desarrollo. Editor Palacios Jesús, España.

Blázquez, F. et. al (1994). *Nuevas tecnologías de la información y comunicación para la educación*. España: Afair

Crosetti, Barbara de Benito (2000). *Herramientas para la creación, distribución y gestión de cursos a través de internet*. España: Edutec

ITESM (1995). *Tecnología para la educación*. ITESM, México

Ortega et, al (1998). *La resolución de problemas en las clases de matemáticas ilustrada: Una red que prepara algunas situaciones típicas del cálculo*. México: IPN.

Perkins, D. (1992). Smart Schools: Better thinking and learning for every child. Free Press, New York.

Polya G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas

Rico, L. (1998*). Complejidad el currículo de matemáticas como herramienta profesional*. RELIME 1. Mexico.

LA CULTURA MATEMÁTICA Y LA ACTUALIZACIÓN DOCENTE Y PROFESIONAL DE LOS PROFESORES DE CÁLCULO EN EL NIVEL SUPERIOR DE EDUCACIÓN

Luz María Minguer Allec
Instituto Tecnológico de Oaxaca. México
luzma16@hotmail.com

RESUMEN:

El presente estudio trata la problemática de la Formación de Profesionales de la enseñanza de las matemáticas en el nivel superior de educación. Los profesores de matemáticas del nivel superior poseen en general una Cultura matemática construida y definida por el entorno familiar y sociocultural así como por sus vivencias escolares enmarcadas en las concepciones de la didáctica tradicional, que les impide identificar de forma clara la problemática de la enseñanza de las matemáticas con todas sus implicaciones y consecuentemente llegar a plantear acciones congruentes en su práctica docente.

Este estudio busca establecer en un primer tiempo, lo que es la Cultura Matemática de los Profesores del Instituto Tecnológico de Oaxaca y en un segundo momento, proporcionar al profesor de cálculo del nivel superior de educación, elementos para ampliar su Cultura matemática, de tal manera que ésta le permita fundamentar sus acciones en el proceso de comunicación de los conocimientos matemáticos, desde la perspectiva de la Matemática Educativa. La investigación se encuentra en curso y aún no cuenta con resultados finales.

ANTECEDENTES:

El Instituto Tecnológico de Oaxaca (ITO), perteneciente al Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos, tiene como principal vocación formar profesionistas técnicos que contribuyan al desarrollo tecnológico del País y ofrece las carreras de ingenierías: Industrial, Eléctrica, Electrónica, Química, Civil y Mecánica, así como las licenciaturas en administración e informática. En este contexto, la enseñanza de las matemáticas adquiere particular importancia ya que ésta será el instrumento que permitirá a los alumnos llegar a construir modelos matemáticos de su especialidad y acceder a la comprensión de otras materias que conforman sus planes de estudio.

En esta Institución como en la mayoría de las escuelas de educación superior y de otros niveles de educación, enfrentamos la problemática de la enseñanza de las matemáticas que se traduce en altos índices de deserción y de reprobación en materias en las que el lenguaje matemático es un requisito. En la búsqueda de soluciones a esta situación se han realizado cursos propedéuticos que cubran los contenidos que son requeridos para abordar nuevos conocimientos; se han propuesto modificaciones en los programas de estudio para depurarlos y de esta forma obtener el máximo provecho de los contenidos abordados; y se ofrecen de manera continua cursos de actualización profesional y docente a los profesores; sin embargo a pesar de los esfuerzos realizados no se han logrado abatir estos índices.

El haber tenido un primer encuentro con la propuesta que hace la Matemática Educativa a través de un diplomado titulado “Introducción a la matemática educativa” ofrecido a los catedráticos del nivel superior de educación del estado de Oaxaca, me permitió vislumbrar una opción diferente para intentar dar solución a la problemática de la enseñanza de las matemáticas, desde una perspectiva congruente que engloba todos los aspectos que en ella intervienen. Esta nueva disciplina se concibe como: “La Ciencia que estudia para un campo particular (la matemática) los fenómenos de su enseñanza, las condiciones de la transmisión de la cultura propia de una institución (la científica) y las condiciones de adquisición de conocimientos del que aprende” (Cantoral, 1990).

Abordar la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de la Matemática Educativa, impone mirar de forma crítica y diferente a los actores que intervienen en este proceso, las instituciones, los saberes, el alumno, el maestro, los métodos. Una Práctica docente enmarcada en este contexto puede ofrecer fundamentos teórico-metodológicos que permitan al profesor realizar su actividad profesional de una manera congruente.

El objetivo fundamental de este estudio es, proporcionar al profesor de cálculo del nivel superior de educación, elementos para ampliar su Cultura matemática, de tal manera que ésta le permita fundamentar sus acciones en el proceso de comunicación de los conocimientos matemáticos, desde la perspectiva de la Matemática Educativa.

Me interesa que los maestros adquieran un bagaje de conocimientos que comprenda: contenidos matemáticos, estrategias didácticas y metodológicas, y temas diversos relacionados con la matemática educativa. Con el propósito de ampliar la cultura matemática con la que fundamentan su quehacer docente.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA:

La educación familiar, el medio social en el que nos desenvolvemos, la cultura propia de nuestro entorno, así como nuestras vivencias como alumnos en las materias de matemáticas es decir, nuestro pasado escolar, definen la labor docente que desempeñamos en general todos los profesores y van conformando una Cultura matemática que corresponderá a la historia de vidas de cada individuo.

En esa "Cultura matemática", está implícita la visión particular del mundo y su relación con La Matemática, que un individuo posee. Cuando decimos La Matemática nos referimos al panorama extenso que contempla todos los ámbitos en los que podemos encontrarla, desde un laboratorio científico, pasando por las matemáticas escolares, hasta las matemáticas utilitarias y cotidianas de la calle, es decir, lo que ese individuo entiende por La Matemática (¿ésta se crea o se descubre?, ¿los conceptos matemáticos son fijos? o ¿sufren cambios?, ¿que lugar ocupan las matemáticas que se aprenden en la calle? ¿se reconoce y se valora socialmente la labor de "hacer matemáticas" que toda persona efectúa cuando por necesidad obtiene un porcentaje o aplica una regla de tres simple en el curso de su vida cotidiana? Etc.); la manera como él concibe la enseñanza de las matemáticas, las respuestas que tiene a las siguientes preguntas: ¿la enseñanza de las matemáticas sólo se practica en el aula? ¿ se circunscribe únicamente al ámbito escolar?, en el aula, ¿es él el único responsable de conocer los temas matemáticos para poder transmitirlo a sus alumnos?, en el proceso de transmisión del conocimiento, ¿es él el único que "sabe" matemáticas? ¿la enseñanza de las matemáticas trata con conceptos y procedimientos que deben de memorizarse?, ¿cuál es el lugar que ocupa el trabajo en equipo y la discusión grupal en una clase de matemáticas?, ¿de que manera concibe él su profesión de enseñante de matemáticas con respecto a los demás profesores y a la sociedad misma?

El conocimiento, y el desconocimiento de las respuestas a estas y otras preguntas más, conforman, una parte de la Cultura matemática, misma que puede estar constituida con referentes que pertenecen a la didáctica tradicional o bien, definida en el marco conceptual de la matemática educativa .

La administración de la educación en México, como en la mayor parte de los países del mundo se ha desarrollado con una percepción de la enseñanza de las matemáticas fundamentada en los principios de la didáctica tradicional, de tal modo que esta corriente ha predominado en las Instituciones escolares y en la sociedad. En el Instituto Tecnológico de Oaxaca la Cultura matemática que subyace en las formas y actitudes de la administración, de los maestros y de los estudiantes es limitada e impide a las partes involucradas una visión crítica acerca de su propio desempeño. Por lo que identificamos el siguiente problema:

Los profesores de matemáticas del nivel superior poseen en general, una cultura matemática limitada definida en el marco de la didáctica tradicional, que no les permite identificar de forma clara la problemática de la enseñanza de las matemáticas con todas sus implicaciones y consecuentemente les impide llegar a plantear acciones congruentes en su práctica docente.

JUSTIFICACIÓN

Hasta ahora, todos los esfuerzos realizados para ofrecer una actualización docente y profesional a los profesores de matemáticas del nivel superior, se han visto enmarcados en la propuesta de la didáctica tradicional (enfoque clásico de la didáctica), pero ésta se ha revelado insuficiente para dar respuesta a numerosos fenómenos implicados directa o indirectamente en la enseñanza de las matemáticas.

Por esta razón, la didáctica tradicional ha tenido que evolucionar incluyendo en su problemática nuevos objetos de estudio que anteriormente habían sido considerados únicamente como herramientas para describir otros objetos de investigación, a esta nueva propuesta en México se le conoce como la Matemática Educativa.

La matemática educativa es el resultado de la evolución en los contenidos y en la forma, de la problemática que aborda la didáctica tradicional.

En el Instituto Tecnológico de Oaxaca, todos los esfuerzos realizados para la formación docente y profesional de nuestros catedráticos han sido espontáneos sin una planeación que responda de manera global a la problemática ya identificada entre los profesores y que habla de la necesidad de actualización e información en los aspectos de: contenidos matemáticos, estrategias didácticas y metodológicas, y fundamentos teóricos de la matemática. Por esta razón la implementación de estrategias para la actualización y formación docente tendientes a conformar una Cultura Matemática en nuestros profesores es altamente prioritaria.

Tomando en cuenta la importancia que reviste el hecho de que los profesores se actualicen y amplíen su Cultura Matemática para poder abordar de manera crítica su labor docente, consideramos que la disciplina de la Matemática Educativa constituye el referente teórico idóneo para enmarcar los programas de actualización docente de los profesores de matemáticas del nivel superior.

La realización de este trabajo puede aportar a la actualización de profesores del nivel superior de educación, una alternativa consistente en un paquete didáctico que comprenda los materiales para transmitir: las estrategias didácticas y metodológicas, los conocimientos matemáticos y los elementos teóricos de la Matemática educativa, para ampliar su Cultura matemática.

OBJETIVO:

Proporcionar al profesor de cálculo del nivel superior de educación, elementos teórico-metodológicos para ampliar su Cultura matemática, de tal manera que ésta le permita fundamentar sus acciones en el proceso de comunicación de los conocimientos matemáticos, desde la perspectiva de la matemática educativa.

HIPÓTESIS:

Los profesores cuya Cultura Matemática está conformada desde la perspectiva de la Matemática Educativa estarán en posibilidades de cuestionar su práctica docente actual.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN:

¿Cuáles son las implicaciones que tiene el hecho de ampliar la Cultura matemática de los profesores en el marco de la Matemática Educativa?

MÉTODO:

El método planteado para este estudio, contempla los siguientes aspectos:

- ➢ Realización de un diagnóstico para conocer la Cultura matemática de los profesores en el nivel superior de educación, desde tres aspectos: contenidos matemáticos, estrategias didácticas y metodológicas utilizadas en el aula y concepciones relacionadas con: la matemática, la enseñanza de las matemáticas y el significado de aprender matemáticas
- Diseño de los instrumentos de medición para el diagnóstico
- Selección de la muestra.
- Aplicación de la encuesta
- Análisis de resultados.
- ➢ Diseño de un paquete didáctico, que comprenderá la definición y justificación de los contenidos del marco referencial que será propuesto a los catedráticos, así como de la selección apropiada de las situaciones didácticas para el aprendizaje de conceptos del cálculo.
- Selección de la muestra
- Puesta en escena: En el marco de un curso-taller (cuya duración está por definirse) en el que se creará un ***ambiente de aprendizaje*** propicio con: trabajo en equipos; discusiones grupales; interacción con situaciones adidácticas; intervenciones del maestro que se transforma en un ***monitor*** que guía el trabajo de los estudiantes e interviene solamente para desbloquear sin dar soluciones; rupturas constantes del Contrato didáctico.
- Análisis de resultados.

ESQUEMA DE FUNDAMENTOS

Deseo estructurar el marco teórico de este trabajo, partiendo de la problemática de la formación docente que en la actualidad se encuentra definida en el marco de una época novedosa que impone nuevas funciones a la educación en general y a las instituciones escolares en particular, para enfrentar retos, problemas y situaciones que se van definiendo y conformando día con día, debido a la innovación tecnológica y al auge de los medios de comunicación en la función educativa; por lo mismo se requiere que la formación docente elabore estrategias que preparen al maestro para jugar un nuevo papel en el escenario de la educación. Abordaré aspectos como el significado de la Formación Docente de profesores de matemáticas en educación Superior, haciendo los cuestionamientos siguientes, ¿cuáles son sus objetivos?, ¿En que marco conceptual debe desarrollarse esa formación? ¿qué papel juega la utilización de modelos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en las aulas? ¿la formación docente y profesional de los profesores de cálculo debe estar vinculada a la práctica en clase de los principios teóricos y a la investigación con el propósito de mejorar su desempeño a partir de los nuevos conocimientos adquiridos y de la reflexión y observación constante sobre sí mismo? ¿Qué significa actualización profesional?

Enseguida deseo abordar las teorías del aprendizaje, concretamente las teorías de la reestructuración ya que son éstas las que constituyen el referente teórico de las diferentes metodologías surgidas en Matemática Educativa, específicamente el diseño de las situaciones de instrucción en las que se busca la construcción de conocimientos científicos o matemáticos o de manera más general la comprensión de nuevos significados o destrezas.

Como parte central de este marco presentaré un planteamiento general de lo que es la disciplina de la Matemática Educativa, su desarrollo y conformación. Para continuar abordando uno a uno los aspectos que están involucrados en este estudio, como son: La teoría de las situaciones didácticas, los obstáculos epistemológicos, la transposición didáctica, la teoría de los campos conceptuales, y finalmente con estos elementos, definir a la Ingeniería Didáctica, y las estrategias de resolución de problemas.

CONTENIDO:

- Formación docente
- Teorías del aprendizaje
- La Matemática educativa (desarrollo y conformación)
    - Transposición didáctica
    - Teoría de los campos conceptuales
    - Teoría de las situaciones didácticas
    - Obstáculos epistemológicos
    - Ingeniería didáctica
    - Estrategias de resolución de problemas.

CONCLUSIONES:

El presente trabajo se encuentra en desarrollo y aún no se cuenta con resultados finales que se puedan compartir con la comunidad de Matemática Educativa. Sin embargo los resultados que se esperan obtener son: Comprobar que la ampliación de la Cultura Matemática en el marco conceptual de la Matemática Educativa es un elemento importante en la formación docente de los profesores de cálculo del Instituto Tecnológico de Oaxaca, a través de un material didáctico, teórico-metodológico que por su congruencia científica propicia la construcción de conocimientos matemáticos y aporta información teórica que fundamenta y permite conocer la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Brousseau,G. (1986). Fondements et Méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*..7 (2), 33-115

Brousseau,G. (1986). Le contrat didactique: le milieu. *Recherche en en didactique des mathématiques*, 9 (3), 309-336.

Cantoral R. (1990). Matemática educativa. (Ed.), *Serie: Antologías* (No.1). Área de educación Superior del DME-CINVESTAV-IPN. México.

Chevallard, I. (1997*). Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Edit. ICE-Horsori. Universidad de Barcelona.

Duady, R.(1995) *La Ingeniería didáctica en educación matemática: La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento.* México D. F: Edit. Ibero América.

Douady, R. (1986) Jeu de Cadre et Dialectique Outil-objet. *Recherche en en didactique des mathématiques*, 7 (2), 5-32.

Perrin-Glorian, M. (1994). *Vingt ans de didáctique des matemáriques en France. Hommage a Guy Brousseau et G. Vergnaud.* La penseé sauvage. Grenoble éditions.

LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LA MULTIPLICACIÓN Y DE LA DIVISIÓN: ESTUDIO DE CASOS

Marcela Escobedo Díaz y Marta Elena Valdemoros Álvarez
CINVESTAV-IPN, Departamento Matemática Educativa. México
mescobed@mail.cinvestav.mx mvaldemo@mail.cinvestav.mx

RESUMEN:
El presente trabajo fue elaborado a partir de la realización de un estudio de casos llevado a cabo con cuatro niños de cuarto grado de educación básica. Con un enfoque cognoscitivista planteamos como problema de investigación la exploración de los significados en términos de Maza (1991) de la multiplicación como "combinación, comparación, conversión y razón"; y de la división como "agrupamiento y reparto", que construyen los alumnos cuando resuelven problemas planteados en el terreno de las "estructuras multiplicativas" Vergnaud (1983)[1] Los casos, aquí expuestos, ilustran ciertas dificultades cognitivas cuando resolvieron problemas multiplicativos. Algunos de los obstáculos evidenciados por los casos fueron de: semántica, de cálculo numérico y de selección de estrategias. Estos son los rasgos centrales que nos permitieron describir e interpretar los casos que nos ocupan.

MARCO TEÓRICO

Ausubel *et al.* (1983) dicen que construimos significados cada vez que somos capaces de establecer relaciones "sustantivas y no arbitrarias" entre lo que aprendemos y lo que ya conocemos. Es decir difícilmente el alumno podrá construir significados si el contenido es vago, está poco estructurado o es arbitrario. Al igual que Coll (1989) coincidimos en que los significados que se construyen se almacenan en la memoria configurando complejas redes de significados interrelacionados. De hecho, el mayor o menor grado de solvencia de un aprendizaje depende, en buena medida, de la amplitud y complejidad de las relaciones que establece entre los significados construidos al respecto, por una parte, y los significados ya existentes en la "estructura cognoscitiva", por otra.

En este sentido, consideramos que la resolución de problemas debe constituir un objetivo fundamental para la construcción de significados.

Al plantear situaciones nuevas e imprevistas el alumno se ve obligado a reorganizar sus conocimientos y buscar entre ellos nuevas relaciones. Rico (1990) menciona que cada niño elabora un esquema a partir de sus conocimientos y sus experiencias previas que le permite reorganizar la información disponible hasta alcanzar una respuesta a la cuestión planteada.

Reconociendo que los significados, de la multiplicación y de la división brindan un soporte fundamental al conocimiento matemático básico y que el punto de partida de tales construcciones lo constituyen la resolución de problemas, por parte del sujeto cognoscente, se retoman las aportaciones de Maza (1991) con respecto a que es importante considerar todos los tipos de problemas de estructura multiplicativa (de multiplicación: "combinación, comparación, conversión y razón"; y de división: "agrupamiento y reparto), afines a los problemas clasificados por Vergnaud (1993) en tres categorías: "Proporción simple, producto de medidas y proporción múltiples".

[1] En estrecha relación con estas operaciones se crea la idea de "campo conceptual" Un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos estrechamente interconectados (Vergnaud, 1983).

En primer lugar porque la resolución de los mismos es distinta y de diferente nivel de dificultad. Sólo con ello podríamos asegurarnos que el aprendizaje es adecuadamente progresivo, desde los problemas más sencillos a los más complejos Sastre (1999) comprueba que el niño amplía de manera progresiva la capacidad de aplicar correctamente un mismo concepto a situaciones cada vez más complejas. En segundo lugar, porque al ser distinta la forma de resolución las destrezas y conocimientos que se emplean difieren y ello permite desarrollar un tratamiento de las operaciones más flexibles de más amplio nivel conceptual.

Es por eso que sabemos que desarrollar problemas de multiplicación exclusivamente resolubles por la suma reiterada y de división como reparto, no capacita al alumno para resolver otros problemas que se le pudieran presentar porque deja el conocimiento de la multiplicación y de la división reducida a una parte.

ESTUDIO DE CASOS

El estudio que estamos comunicando aquí está referido a cuatro casos (Jesús, Jessica, Leslie y Brenda), cuyo punto de partida lo brindó un cuestionario exploratorio fue aplicado a un grupo de cuarto grado en una escuela primaria pública.

El propósito perseguido en la aplicación del cuestionario era obtener información general del grupo, para facilitar una selección más eficaz de los alumnos que exhibían un perfil destacado, para desarrollar con ellos un estudio de casos. Realizamos entrevistas semiestructuradas e individuales que constituyeron el recurso metodológico básico del estudio de casos.

MÉTODO

Los instrumentos metodológicos considerados en la presente investigación fueron los siguientes:

1. Aplicación de un **cuestionario exploratorio** aplicado a 31 estudiantes de cuarto grado de primaria. Dicho instrumento estaba compuesto por diez problemas de distinta naturaleza; las que promovían una indagación general acerca de las nociones básicas a los significados de la multiplicación y de la división, así como la exploración de las estrategias de solución frente a problemas multiplicativos. Fue el primer instrumento involucrado en dicho estudio ya que nos permitió abstraer el perfil básico de estos y la correspondiente selección de los cuatro casos.

2. El **desarrollo de la enseñanza**, tiene un enfoque constructivista, con apego a lo destacado por Coll (2000). Desde este punto de vista, tuvo como propósito crear un ambiente propicio que habilitara a los alumnos a construir conocimientos básicos sobre los significados de la multiplicación y de la división. Se llevaron a cabo ciertas actividades de enseñanza con los cuatro casos para introducir nuevos problemas y con ellos nuevos significados y nociones de la multiplicación y de la división; además esta situación de enseñanza me permitió seguir de cerca los procesos de construcción por parte de cada alumno, para explorar estos significados y el reconocer los procesos de solución de cada alumno. Las actividades que conformaron la enseñanza fueron diseñadas tomando en consideración los resultados obtenidos del cuestionario inicial (de aquí la forma de abordar los significados, del más complejo al más sencillo) y los objetivos que se pretenden alcanzar en nuestra investigación.

3. El **cuestionario final**, fue aplicado después de la enseñanza a los cuatro casos con el propósito explorar los significados de la multiplicación y de la división, considerando y valorando los avances que alcanzaron durante el desarrollo de la enseñanza. Los aspectos considerados para el análisis de este instrumento fueron análogos al cuestionario inicial, así como también el diseño de las tareas.

4. Las **entrevistas** fueron semiestructuradas (según Cohen y Manion, 1990), ya que contábamos previamente con un protocolo, los casos fueron sometidos a indagación a través de entrevistas individuales de carácter didáctico, en las que -desde un enfoque constructivista- se promovieron las reelaboraciones de los entrevistados y se accedió a modos muy activos de retroalimentación (conforme a la caracterización que en Valdemoros *et al.*, 1996, se realiza de la "entrevista didáctica") se asumió un papel propositivo, procurando introducir tareas paralelas o problemas simplificados, organizadas por seis tareas ligadas a los significados de la multiplicación y a la división.

Los **procedimientos de validación** adoptados para legitimar la experiencia de campo y los resultados obtenidos, fueron los "controles cruzados" entre dos observadores y la "triangulación de tareas similares", susceptibles de ser comparados y de permitir constatar la persistencia de las respuestas y procesos de resolución de observados.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Presentamos los primeros resultados obtenidos, concentrando la atención en aquellos que concitan las interpretaciones y el análisis fundamental de estos datos de campo.

El cuestionario exploratorio nos facilitó el reconocimiento de ciertas regularidades manifiestas en algunos alumnos: En el problema de "razón" fue resuelto por casi la mayoría de los alumnos, utilizando como estrategia "la multiplicación como suma reiterada", mientras que el resto de los significados fue gradualmente aumentando el grado de dificultad, ya que el problema de "combinación" (la multiplicación como la operación que permite calcular el número de combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos), solamente el caso de Jessica pudo resolverlo, utilizando como estrategia "el algoritmo convencional de la multiplicación"

Por otro lado sucede lo mismo con los significados de la división, la mayoría de los alumnos resolvió exitosamente los problemas de "reparto", presentando dificultades en los problemas de "agrupamiento".

Lo que nos demuestra que no todos los significados han sido construidos por los cuatro alumnos.

Cuando se abordo el "significado de combinación" a través de la enseñanza, en un comienzo tanto Jesús, Jessica, Leslie y Brenda interpretaron el problema de una manera estática, no lo representaron mentalmente con la idea de temporalidad, de movimiento, de ahí que las combinaciones no fuesen sino las que vieron en el momento inicial. Sin olvidar el caso contradictorio de Jessica, que resuelve el problema utilizando la multiplicación.

Los niños hicieron una representación calculable del problema, es decir, lo interpretaron de manera tal que consideraron necesario seleccionar y utilizar una operación para resolverlo.

A la luz de cuestionario final, se observa utilizaron una representación dinámica del problema en donde fue incorporada la idea de tiempo, de movimiento, dichos logros les permitieron imaginar y buscar en el tiempo, las diferentes combinaciones posibles. Con ello incorporaron un progreso fundamental: sus procedimientos de búsqueda se transformaron sistemáticos y exhaustivos.

A la luz de las entrevistas observamos que los niños construyeron estrategias para resolver problemas donde la multiplicación revestía el significado de operación que permite calcular el número de combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos. Tales estrategias mostraron evolución que expreso el nivel de conceptualización de los niños en relación a este tipo de problemas.

A lo largo de toda la experiencia de campo, (Jesús, Jessica, Leslie y Brenda) evidenciaron manejar con eficiencia los algoritmos canónicos de la multiplicación y de la división aunque no exhibían signos claros de comprender su sentido. Al final de la experiencia esta situación mejoro, al quedar dichos algoritmos canónicos inmersos en problemas aritméticos plenamente comprendidos por ellos.

CONCLUSIONES

En nuestros primeros resultados encontramos que cuando los alumnos se enfrentan desde el principio a todos los tipos de problemas de estructura multiplicativa, no sólo propicia que los alumnos amplíen los diversos significados de la multiplicación y de la división, sino que también favorece la construcción de estrategias que integran los procesos de solución de los alumnos y promueve el desarrollo de amplios cálculos, vinculados a los problemas multiplicativos.

Es posible que cada niño elaboro un esquema a partir de sus conocimientos y experiencias previas que le permiten reorganizar la información disponible hasta alcanzar una respuesta a la cuestión planteada.

Los alumnos construyeron por sí mismos estrategias de solución, no fueron meros recipientes pasivos que recibieron información seleccionada por otro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausbel, D., Novak, J, y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa*. México: Trillas.

Cohen, L. y Manion, L. (1990) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Coll, C. (1989) *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento.* Buenos Aires: Magisterio Río de la Plata.

Coll, C (2000). *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Editorial Grao.

Maza, C. (1991) *Enseñanza de la multiplicación y división*. Madrid: Editorial Síntesis.

Maza, C. (1991). *Multiplicar y dividir. A través de la resolución de problemas*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Resnick, L.(1999) *La educación y el aprendizaje del pensamiento*. Argentina: Aique.

Rico, L (1990). *Memorias del 1° Congreso Iberoamericano de Educación matemática*. Sevilla: Colección de documentos.

Sastre, G., Moreno Monserrat. (1999). Descubrimientos y construcción de conocimientos.

España: editorial gedisa.

SEP (1993). *Plan y programas de estudio. Educación Básica. Primaria*. Dirección General de Materiales y Métodos educativos de la Subsecretaría de Educación y Normal. México.

SEP (1993) *Matemáticas cuarto grado*. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos. México.

Valdemoros, M., Orendain, M., Campa, A. Y Hernández, E. (1996). La interpretación ordinal de la fracción. En: Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa, I* (441-455). México: Editorial Iberoamericana.

Vergnaud, G. (1983) Multiplicative structures. En Lesh, R. Y Landau, M. (Ed), *Adquisition of mathematical concepts and proceses*, (127). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1993) *El niño, las Matemáticas y la Realidad*. México: Trillas.

UNA RECONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS EN EL CONCEPTO DE DERIVADA. EL CASO DE LA LINEALIDAD DEL POLINOMIO*

María del Pilar Rosado Ocaña y Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México
mrosado@mail.cinvestav.mx y fcordero@mail.cinvestav.mx

RESUMEN:

Se presentan los resultados de un proyecto de investigación cuya finalidad es formular una reconstrucción del significado de la derivada, basada en considerar que la propiedad de linealidad del polinomio –en el marco del argumento gráfico del comportamiento tendencial de las funciones- posibilita que los estudiantes construyan, desde este argumento, un nuevo significado a la primera derivada y a su vez usarlo en el bosquejo de gráficas de polinomios en general. La situación refleja la posibilidad de reconstruir significados en el concepto de derivada y explica la relación de éstos con el concepto, a través de la actividad humana.

PROBLEMÁTICA

Considerando que la problemática fundamental de la enseñanza de las matemáticas, consiste en una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, y que cada una es de naturaleza y necesidad distinta; la tarea fundamental de la Matemática Educativa consiste en reorganizar a la obra matemática. La fuente principal de la reorganización se encuentra en la reconstrucción de significados en contextos interactivos que formula la organización social del salón de clases (Cordero, 2001). El concepto de derivada ha tenido muchos acercamientos, sin embargo no es clara su reorganización en la matemática escolar.

Un cuestionamiento que se hace, en el marco de la problemática es, si la derivada como concepto es el resultado de la actividad, es decir, si corresponde a la naturaleza del conocimiento que proviene de la actividad. Se percibe en diferentes investigaciones que el concepto de derivada no corresponde a esa naturaleza. En diversos estudios se reporta que el estudiante no incorpora significados a la derivada a pesar de conocer que es la pendiente de una recta. En este artículo, se presentan los resultados de un proyecto de investigación que considerando el cuestionamiento dentro de esta problemática, propone una reconstrucción de significados en el concepto de derivada.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Dentro del marco anterior, se formula la siguiente pregunta de investigación:

- *¿Qué significados se pueden reconstruir, con relación a la derivada a través de la situación diseñada para construir la propiedad de linealidad del polinomio, en contextos interactivos de los estudiantes?*

Para aproximarse a una respuesta, se ha pretendido hacer un estudio basándose en el marco teórico y la metodología elegida de la investigación, realizando un diseño de la situación para la recolección de datos y su respectivo análisis.

---

* Este trabajo es el seguimiento de la comunicación breve "La Variación, la Aproximación y la Transformación como un marco de reconstrucción de significados en el concepto de derivada. El caso de la Linealidad del Polinomio", presentado en RELME 15 en Buenos Aires, Argentina.

HIPÓTESIS

La hipótesis consiste en creer que la construcción la propiedad de linealidad del polinomio –en el marco del argumento gráfico del comportamiento tendencial de las funciones- posibilitará que los estudiantes construyan, desde este argumento, un nuevo significado a la primera derivada y a su vez usarlo en el bosquejo de gráficas de polinomios en general.

MARCO TEÓRICO

La Socioepistemología es considerada una aproximación teórica que toma en cuenta las relaciones entre las dimensiones didáctica, cognitiva y epistemológica a través de la incorporación de la dimensión social. Se trata de considerar las interacciones que surgen en el salón de clases entre el profesor y los estudiantes, y entre los estudiantes mismos, como una actividad humana que debe considerarse más allá de los conceptos matemáticos a la hora de reorganizar la obra matemática y antes de ser llevada al salón de clases.

Esta perspectiva teórica, brinda herramientas didácticas a los docentes para que participen activamente en el diseño de situaciones del Cálculo, esas herramientas dependen de los significados y de sus reconstrucciones que surgen de la actividad humana y los significados y sus reconstrucciones componen contenidos matemáticos específicos que reorganizan la obra matemática (Cordero, 2001). La socioepistemología se basa en cuatro elementos: significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos.

Una descomposición genética basada en la socioepistemología, que considera a los conceptos que aluden a un comportamiento de la función que tiene cierta tendencia (situación de transformación), puede ser formulada como sigue:

- **Significados**. Patrones de comportamiento de la función.
- **Procedimientos**. Variación de parámetros de la función.
- **Procesos-objetos**. Función como una instrucción que organiza comportamientos.
- **Argumento**. Comportamiento tendencial de las funciones.

Este trabajo, toma en cuenta esta aproximación teórica en el diseño de situación.

METODOLOGÍA

La metodología de la investigación consiste en observar a las situaciones a través de un ciclo iterativo, considerando tres elementos mutuamente relacionados: análisis de hechos o datos, diseño de la situación y su implementación, la recolección de datos y con ello considerar la experiencia de la cual se partió. (Martínez, 1999). Estos tres elementos componen varias etapas para alcanzar la actualización de la descomposición genética de los conceptos involucrados en las situaciones.

- En la etapa uno, se parte de una experiencia epistemológica estudiando el contenido matemático correspondiente al tópico del proyecto, y se organiza el contenido con base a lo que significa entender el concepto y cómo el concepto puede ser construido por el que aprende. (Cordero, 1998).
- Para la etapa dos, se trabajan ejemplos de diseño e implementación de situaciones y colección de datos en el laboratorio.

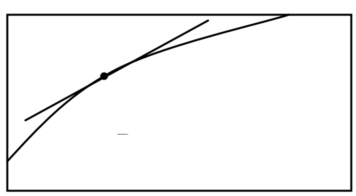
- En la etapa tres, se realiza un análisis de los datos coleccionados y posteriormente se reconsidera la experiencia de la cual se partió.
- En la etapa cuatro, al analizar los datos coleccionados y de acuerdo a los resultados obtenidos, se espera encontrar los fundamentos para la aplicación de la situación en el proyecto. Al realizar el rediseño de la situación, se parte de esos resultados.
- Para la etapa cinco, se realiza la aplicación del rediseño y la colección de datos.
- En la etapa seis, se realiza el análisis de datos y la actualización de la descomposición genética. Se pretende alcanzar un refinamiento del recorte o amplitud del entendimiento sobre el cuál se partió. La iteración continúa hasta alcanzar una explicación de la evolución socioepistemológica del contenido matemático de la problemática.

DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

En la didáctica actual, todavía hallamos énfasis en los aspectos formales y rigurosos, dejando de lado los aspectos epistemológicos y psicológicos concernientes a los conceptos. En el cálculo, los conceptos fundamentales son señalados por la derivación e integración, explicados a través de las concepciones del límite y de función, acompañados de sus representaciones geométricas, la recta tangente a una curva, y el área bajo la curva. Cabe señalar que esta didáctica ha generado una “cultura”, en el profesor y estudiante, aprenden a “decir” lo que es la derivada e integral y representarlos geométricamente, sin tener una explicación que les permita estudiar fenómenos de variación continua, sólo lo conciben como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles aplicación (Cordero, 1997).

Esta didáctica tiene un buen desarrollo de los argumentos analíticos sobre los conceptos, logrando matizarlos a través de los dominios de las funciones, sin embargo la didáctica insinúa que estos argumentos sustituyen cualquier otro tipo de argumentos, por ejemplo, los intuitivos y los visuales. La característica fundamental de esta didáctica es que toma los conceptos matemáticos como objetos ya hechos, sin considerar que estos conceptos tienen que ser construidos por el sujeto como una herramienta funcional que le será posible tratar con distintas clases de situaciones.

El concepto de derivada es presentado comúnmente por ventanas como la siguiente:



Se le presenta al alumno una curva, se señala un punto y se le pide que trace la recta tangente a la curva en dicho punto. Sin embargo, este tipo de ventanas nos pueden representar tres situaciones, la situación de variación, la situación de aproximación y la situación de transformación (Cordero, 2001).

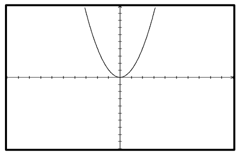
La idea central, es diseñar situaciones que no solamente tomen en cuenta la adquisición del conocimiento, sino también el desarrollo de actividades. Esas situaciones deben mostrar o interpretar de alguna manera relaciones entre los contextos algebraico y gráfico. El lenguaje de herramientas basado en la actividad humana nos ayuda a identificar a la categoría del comportamiento tendencial de las funciones a través de argumentos cualitativos, estos argumentos cualitativos nos llevan a nuevas acciones que reflejan un intercambio permanente entre los contextos algebraicos y gráficos.

Uno de los aspectos importantes de la investigación, es el diseño de la situación que se trabajó con los estudiantes y que se presenta a continuación.

¿Qué le pasa a una función cuando se le suma una recta?

SECUENCIA 1

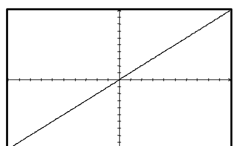
La función cuadrática $f(x) = x^2$, tiene como gráfica la curva que aparece en la figura siguiente y se llama parábola.



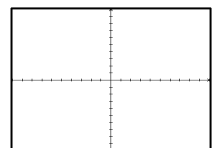
Se trata que identifiquen la propiedad que tiene la función cuadrática $f(x) = x^2$ cuando se le suma una recta. Para tal propósito les sugerimos las siguientes actividades.

Actividad 1.

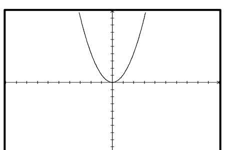
a) Grafiquen en un sistema de ejes coordenados la función resultante [$Y_i(x) = f(x) + y_i(x)$], como se indica a continuación:



$y_1(x) = x$

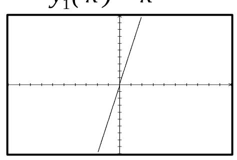


$Y_1(x) = f(x) + y_1(x)$



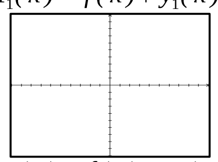
$f(x) = x^2$

+

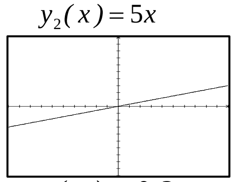


$y_2(x) = 5x$

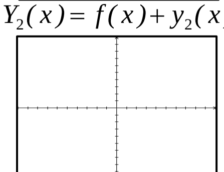
=



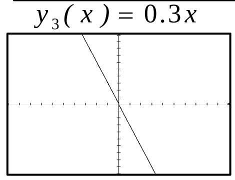
$Y_2(x) = f(x) + y_2(x)$



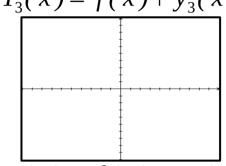
$y_3(x) = 0.3x$



$Y_3(x) = f(x) + y_3(x)$



$y_4(x) = -3x$



$Y_4(x) = f(x) + y_4(x)$

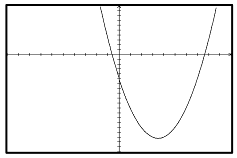
b) Organicen sus resultados en una tabla que registre las características de la recta y de la función resultante.

Actividad 2.

a) Describan lo que le pasa a la parábola $f(x) = x^2$ cuando se le suma una recta, o sea cuando resulte $x^2 + ax + b$.

b) Ilustra la descripción anterior con varios casos. Grafica en los mismos ejes coordenados la función resultante y la recta.

<u>Actividad 3</u>. Consideren ahora, la función cuadrática $f(x) = x^2 - 7x - 5$ y su gráfica. Identifiquen la parte lineal de la función en la gráfica.



$f(x) = x^2 - 7x - 5$

<u>Actividad 4</u>.Conjeturen acerca de lo que le pasa a una función cuadrática cuando se le suma una recta.

SECUENCIA 2

La función cúbica $f(x) = x^3$, tiene como gráfica la curva que aparece en la figura 2.

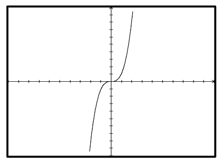
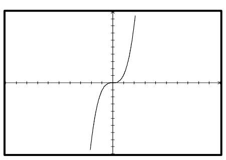


Figura 2

> *Se trata que identifiquen la propiedad que tiene la función cúbica $f(x) = x^3$ cuando se le suma una recta. Para tal propósito les sugerimos las siguientes actividades.*

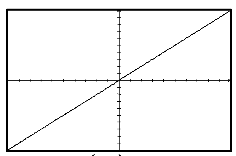
<u>Actividad 1</u>.

Grafiquen en un sistema de ejes coordenados la función resultante [$Y_i(x) = f(x) + y_i(x)$], como se indica a continuación:

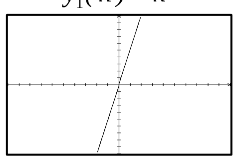


$f(x) = x^3$

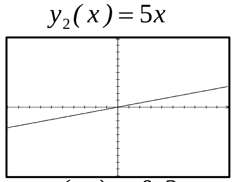
+



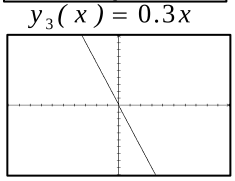
$y_1(x) = x$



$y_2(x) = 5x$

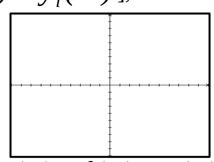


$y_3(x) = 0.3x$

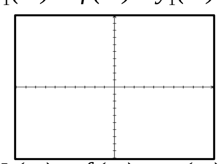


$y_4(x) = -3x$

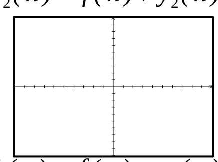
=



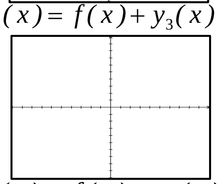
$Y_1(x) = f(x) + y_1(x)$



$Y_2(x) = f(x) + y_2(x)$



$Y_3(x) = f(x) + y_3(x)$



$Y_4(x) = f(x) + y_4(x)$

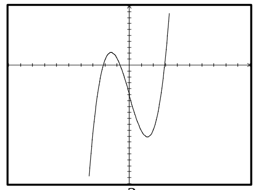
b) Organicen sus resultados en una tabla que registre las características de la recta y de la función resultante.

<u>Actividad 2</u>.

a) Describan lo que le pasa a la función cúbica $f(x) = x^3$ cuando se le suma una recta, o sea cuando resulte $x^3 + ax + b$.

b) Ilustra la descripción anterior con varios casos. Grafica en los mismos ejes coordenados la función resultante y la recta.

Actividad 3. Consideren ahora, la función cúbica $f(x) = x^3 - 7x - 5$ y su gráfica. Identifiquen la parte lineal de la función en la gráfica.



$f(x) = x^3 - 7x - 5$

Actividad 4. Conjeturen acerca de lo que le pasa a una función cúbica cuando se le suma una recta.

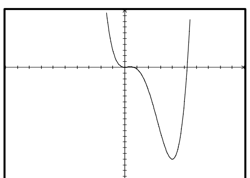
SECUENCIA 3

Una función de la forma $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$ recibe el nombre de polinomio de grado *n*.

Actividad 1.

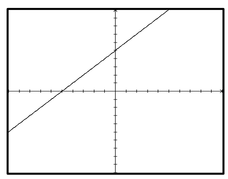
a) Bosquejen en el mismo sistema de ejes coordenados las gráficas de la recta y la función resultante al sumar el polinomio $P_4(x) = 0.25x^4 - 1.5x^3 + x^2$ y la recta $y(x) = x + 5$.

b) Describan el comportamiento de la gráfica de la función resultante con respecto a la recta.



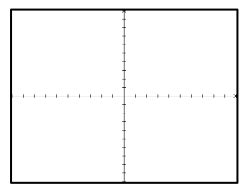
$P_4(x) = 0.25x^4 - 1.5x^3 + x^2$

+

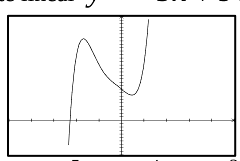


$y(x) = x + 5$

=

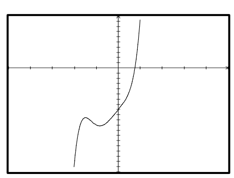


Actividad 2. Consideren el polinomio $P_5(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 5x + 9$ y su gráfica. Describan el comportamiento de la gráfica del polinomio con respecto a su parte lineal $y = -5x + 9$.



$P_5(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 5x + 9$

Actividad 3. En la siguiente gráfica, se han variado los parámetros de la parte lineal del polinomio de la actividad anterior. Propongan una expresión analítica para esta gráfica. (Justifiquen su respuesta).



Actividad 4.

a) De acuerdo a los resultados que obtuvieron en las actividades anteriores conjeturen, escribiendo en un párrafo, lo que le pasa a un polinomio cuando se le suma una recta.

b) Demuestren la conjetura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*. II, 6, 1-32.

Cantoral, et. Al, (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* Ed. Trillas, México, D.F.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre las construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Numero 2, 103-128.

Cordero, F. (1997). *Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada*. Serie: Antologías, número 1.

Cordero, F. Y Solís, M. (1997ª). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo.* Serie Cuadernos de Didáctica, Grupo Editorial Iberoamérica, 2ª. Edición, 79 pp.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Numero 1, 56-74.

Martínez, M. (1999). *Estudio de las relaciones que el estudiante hace para construir la gráfica de la derivada y de la primitiva: efectos de la enseñanza en la transformación de funciones*., tesis de maestría. Dirección de estudios de posgrado. Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

EVALUACIÓN DE UN CURSO DE CÁLCULO CUANDO SE USA EL CICLO ACE FUNDAMENTADO EN LA TEORÍA APOE

Ofelia Vizcaíno Díaz
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Ciudad de México
ovizcain@campus.ccm.itesm.mx

RESUMEN:
El proyecto que sustenta este artículo está fundamentado en la teoría A P O E, la cual presentan una perspectiva interesante pero aún inconclusa acerca de la evaluación del proceso enseñanza y aprendizaje. Por tal motivo se plantea como hipótesis de investigación: ¿La evaluación de los estudiantes a través del tratamiento instruccional ACE genera las mismas notas de evaluación a través de entrevistas personalizadas? en aras de incorporar la experiencia y habilidad del docente para plantear tareas e instrumentos de evaluación sustantivas que sean sensibles e informativas.

INTRODUCCIÓN

Nadie puede negar que la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje es una actividad compleja para los profesores, sin embargo los métodos simplistas para mejorar ésta pueden generar resultados muy pobres y tal vez contraproducentes, pero al mismo tiempo ese análisis constituye una tarea necesaria y fundamental en la mejora de dicho proceso. Es compleja porque dentro del proceso educativo puede analizarse prácticamente todo, lo cual implica aprendizajes, enseñanzas, acción docente, contexto educativo, programas, currículos y aspectos institucionales.

La evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje dentro de una metodología tradicional asigna a cada alumno un valor numérico que parece ser de su exclusiva responsabilidad; así la calificación del alumno para los padres, profesores y los mismos alumnos es el resultado de su capacidad y su falta o derroche de esfuerzos.

En el caso de fracasar será él quién deberá pagar las consecuencias. Sólo él deberá cambiar. Lo demás, podrá seguir como estaba. Nadie cuestiona a los profesores acerca de los aspectos que se tomaron en cuenta para generar la evaluación de los estudiantes. La evaluación se convierte en proceso conservador.

Sin la información que nos proporciona la evaluación no tendríamos argumentos suficientes para proponer correcciones y mejoras al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Al desempeñar su función en alguna institución educativa, cualquier docente tiene una cierta concepción implícita del modo en que se aprende y se enseña, así como una cierta concepción coherente con ésta, sobre cómo, cuándo, por qué, y para qué evaluar, con el fin de poder asegurarse que las experiencias educativas que proponga en el acto de enseñanza produzcan datos positivos.

El conseguir que los estudiantes se apropien de los conceptos específicos del curso es el único fin de los profesores, pero esto no ocurre por el simple deseo de que así sea, ahí entran en juego varios aspectos: el contenido, las creencias del profesor, la metodología usada para la enseñanza, la teoría cognitiva elegida, las actividades planteadas a los estudiantes, los objetivos institucionales, etc., qué tan efectivos han resultado en conjunto éstos es el objetivo de la evaluación.

Antecedentes

En los últimos años han aparecido distintas aproximaciones y paradigmas sobre el aprendizaje de las matemáticas cuyo objetivo principal es ayudar a los estudiantes a aprender Cálculo. Sin embargo poca ha sido la investigación en torno a la evaluación en éstas aproximaciones.

En la posición de un grupo de investigadores RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) se plantea entre muchos otros el siguiente cuestionamiento: ¿Qué podemos hacer para mejorar el aprendizaje de los estudiantes? (Ver Dubinsky, E., 1992. [13]).

El grupo plantea estrategias para conseguir la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje las cuales involucran varias innovaciones entre las cuales se incluyen: el ciclo de enseñanza ACE (actividades en la computadora, discusiones en el salón de clase y ejercicios), el aprendizaje colaborativo, la construcción por parte de los estudiantes de sus conceptos matemáticos en la computadora, discusiones diseñadas para estimular la construcción de conceptos matemáticos. Todas éstas fundamentadas en la teoría APOE.

Pero surgen las interrogantes: ¿cómo evaluar el conocimiento de un estudiante si su trabajo siempre ha sido colaborativo?; si ellos han construido los conceptos matemáticos en la computadora, ¿cómo decidir si esas mismas construcciones se han dado en su mente? ; ¿qué significado puede tener la respuesta a una pregunta específica en un examen cronometrado? ; ¿los estudiantes entendieron en la pregunta lo mismo que el profesor quiso preguntar?, ¿cómo podemos decidir con certeza si un estudiante aprendió matemáticas en su curso?, ¿cuál debe ser el mejor criterio para decidir su nota final?.

Implementan una metodología de evaluación que combina datos cuantitativos y cualitativos para determinar la construcción de estructuras mentales en los estudiantes y concluyen que si los estudiantes participan en todas las actividades del curso, cooperan en sus grupos, realizan razonablemente bien sus exámenes, etc., entonces las construcciones mentales fueron hechas.

La evaluación aplicada a los estudiantes incluye: *tareas semanales en la computadora, tareas semanales, discusiones en el salón de clase, tres exámenes parciales y un examen final.*.

La calificación final dada a los estudiantes es obtenida dando un peso igual a cada uno de los rubros anteriormente citados.

Los acercamientos anteriores nos presentan una perspectiva interesante pero aún inconclusa acerca de la evaluación del proceso enseñanza y aprendizaje; sería nuestro deseo una mayor investigación alrededor de ella.

Ningún instrumento es por sí mismo suficiente si no se utiliza en forma inteligente y reflexiva.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El trabajo de un grupo de investigadores (RUMEC) ha mostrado una posición novedosa e interesante con respecto a la evaluación del aprendizaje de las matemáticas.

Reclaman una actividad efectiva de los estudiantes para crear su propio conocimiento, para esto diseñan un tratamiento instruccional ACE que se fundamenta en la teoría APOE. El tratamiento instruccional consta de una serie de actividades que ellos realizan en el laboratorio de computación, discusiones en clase y ejercicios tradicionales.

Afirman que el análisis de la consecución de los objetivos matemáticos debe hacerse basándose en la conducta de los alumnos frente a ciertas actividades o tareas matemáticas en el aula y no sólo respecto pruebas cerradas.

En este nuevo tipo de análisis de logros cognitivos se afirma que la reflexión epistemológica sobre la construcción del conocimiento proporciona ideas sobre diversos tipos de fenómenos de aprendizaje que sobrepasan lo que un examen puede interpretar; de manera que la evaluación pasa a ser un eje importante del proceso educativo.

Sin embargo aún existen cuestionamientos en torno a esta metodología de evaluación :

Las tareas computacionales semanales realizadas en equipo tienen por objetivo permitir que los estudiantes mediante el trabajo colaborativo construyan las estructuras mentales necesarias para apropiarse de un concepto, pero si el trabajo lo realizaron en equipo..., ¿cómo tener la seguridad de que cada uno de los integrantes construyó las estructuras mentales necesarias para conseguir tal objetivo?, ¿cómo tener la seguridad de que la calificación asignada al equipo, tiene validez para cada integrante?, ¿cómo poder asignar la calificación a un estudiante de la manera más justa posible?.

Por otro lado los ejercicios tradicionales son entregados semanalmente y por equipo, pero, ¿cómo podemos asegurarnos de que éste fue realizado realmente en equipo?, ¿cómo asegurar que cada estudiante entiende y puede resolver cualquiera de los ejercicios entregados?

En el primer examen por equipo en el cual cada integrante recibe la misma calificación, ¿será justa esta medida para todos los integrantes del equipo?, ¿participaron en la misma medida cada uno de los integrantes del equipo?

Segundo examen resuelto individualmente, cada alumno recibe dos calificaciones, la de su examen y el promedio de calificaciones de los integrantes de su equipo, ¿qué tan justo es asignar a cada estudiante el promedio de las calificaciones de su equipo?. Tercer examen igual.

Examen final resuelto individualmente además de contar con un tiempo límite para su realización, cada alumno recibe sólo su calificación. ¿Qué tanto puede reflejar la calificación de éste los conocimientos del alumno posee?, ¿de qué manera influye en la realización de un examen limitar el tiempo para su resolución?.

Participación en clase, cada alumno recibe una calificación por actividad efectiva durante las sesiones de resolución de problemas.

¿De qué manera esta metodología de evaluación contribuye a la aprobación de alumnos que no deben ser aprobados?, ¿de qué manera el trabajo colaborativo contribuye a esta situación?

Por otro lado una metodología de evaluación capaz de generar con mayor certeza la nota de un estudiante es a través de una entrevista personalizada.

La cual mediante un adecuado diseño, aplicación y análisis debe permitir al profesor percibir la calidad y cantidad de conocimientos que posee cada uno de los estudiantes, así como el nivel de construcción de estructuras cognitivas que el alumno ha desarrollado.

Esta metodología de evaluación que parece ser la solución educativa, ya que proporcionaría la información necesaria acerca de la adquisición de los conocimientos de un alumno al terminar un curso, presenta varias desventajas.

Por un lado el diseño de los cuestionamientos aplicados deben poner al descubierto el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes, es decir, no contener preguntas cerradas; para lo cual requiere práctica en la elaboración de éstos por parte del profesor.

Además del diseño de una metodología que permita la recopilación y análisis de información cuantitativa, que oriente al profesor en la toma de la decisión acerca de la nota que le corresponde a cada estudiante.

Además de la gran cantidad de tiempo que requiere la aplicación y análisis de cada una de las entrevistas.

Todo lo anterior la vuelve una metodología impractica para ser usada durante los cursos.

Este trabajo desea comparar la metodología de evaluación planteada a través del tratamiento instruccional ACE fundamentada en la teoría APOE, con una metodología de evaluación que da un acercamiento más real a la situación cognitiva de los estudiantes, consistente en entrevistas personalizadas a alumnos seleccionados aleatoriamente.

La propuesta de este anteproyecto de Tesis es: ¿La evaluación de los estudiantes a través del tratamiento instruccional ACE genera las mismas notas que la evaluación a través de entrevistas personalizadas?

Haciendo uso de métodos cualitativos y cuantitativos generar un panorama de las ventajas y desventajas que esta evaluación conlleva.

AVANCES DE INVESTIGACIÓN

Evaluación propuesta por RUMEC

Durante el semestre agosto-diciembre de 2001 se implementó en un grupo de Cálculo la metodología planteada por RUMEC, mediante la cual se sugiere el ciclo de enseñanza ACE fundamentado en la teoría APOE. El objetivo de esta implementación fue investigar si la evaluación planteada por RUMEC generaba los mismos resultados que los que vertiera una evaluación realizada a través de entrevistas personalizadas.

Para realizarla se consiguieron las siguientes condiciones:

1. Organización del curso en semanas.
2. Organización de los alumnos en grupos de trabajo permanentes.
3. Actividades colaborativas realizadas en computadora.
4. Organización de discusiones en el salón de clase.
5. Realización de ejercicios tradicionales.
6. Realización del primer examen de manera colaborativa.

7. Realización del segundo examen resuelto de manera individual.
8. Realización del tercer resuelto de manera individual.
9. Realización de un examen final resuelto de manera tradicional.
10. Registro de las participaciones de los estudiantes durante las discusiones y resolución de problemas por equipos.

La distribución del curso en semanas se hizo con el objetivo de aplicar en la medida de lo posible el ciclo de enseñanza ACE fundamentado en la teoría APOE.

La organización del grupo en equipos permanentes de trabajo fue hecha con el fin de que las actividades en computadora, tareas y ejercicios fueran realizados y entregados por equipo.

Las actividades en computadora fueron realizadas la primera sesión de cada semana.

Los estudiantes recibieron la instalación del programa que contenía el lenguaje ISETL en cada una de sus computadoras, además de que se encontraba instalado en un laboratorio de computación al cual ellos tenían acceso durante toda la semana de 7:00 a 19:00 horas.

Los primeros acercamientos que tuvieron los estudiantes con ISETL fueron de duda, ¿para qué necesitamos un lenguaje de programación para aprender matemáticas?

Para conseguir una actitud de aceptación hacia las actividades fue necesario explicarles una y otra vez que la filosofía del curso planteaba la necesidad de la formación de estructuras cognitivas previas al encuentro con los conceptos a estudiar.

Las discusiones en el salón de clase se llevaban a cabo la segunda sesión de cada semana, iniciando con el planteamiento de actividades a desarrollar de manera colaborativa y que podían ir desde 5 hasta 15 minutos al término.

Finalmente cuando se consideró apropiado, se decidió dar explicaciones, respuestas y notaciones necesarias para los estudiantes, además en esta sesión se daban los teoremas, pruebas, ejemplos y contraejemplos necesarios para el concepto matemático estudiado.

La circulación por el salón de clase durante las actividades permitía observar qué estudiantes permanecían al margen de la discusión, hacer anotaciones y durante la discusión del grupo completo se trataba de hacerlos participar. Esta actividad de volvió muy importante ya que permitía detectar qué estudiante necesitaban ayuda.

Al final de cada semana se entregó una serie de ejercicios que los estudiantes resolvieron en equipo, éstos fueron esencialmente tradicionales.

Al principio los estudiantes repartían los ejercicios entre el número de integrantes, ellos no veían la importancia de trabajar colaborativamente para aprender matemáticas, si por alguna razón tenían dudas respecto a la resolución que daban recurrían a la ayuda del profesor, pero se les indicaba que antes de buscarla tenían que discutir y buscar la solución ellos mismos.

El primer examen fue realizado en equipo y cada estudiante del equipo recibió la calificación obtenida en éste.

A pesar de que podría pensarse que los resultados para los estudiantes sería bueno, no ocurrió así. El problema principal durante el desarrollo de este primer examen fue que los equipos que no habían trabajado colaborativamente entregaron exámenes no muy buenos, al cuestionarlos comentaban que no fue fácil ponerse de acuerdo y además invirtieron mucho tiempo explicar a los estudiantes que no comprendían la solución.

El segundo examen fue realizado individualmente y cada estudiante recibió dos calificaciones la de su examen y el promedio de las calificaciones de los integrantes de su equipo.

El tercer examen fue realizado de la misma manera que el segundo. Éste presentó menos discusiones acerca de sus calificaciones.

El examen final fue realizado de manera tradicional, es decir individualmente y con tiempo límite para su entrega; cada estudiante recibió solamente su calificación.

Se trató de llevar un registro de las participaciones de cada uno de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades colaborativas (en computadora, discusiones y resolución de problemas) de manera que se pudiera tener una más o menos clara idea de la situación en el proceso de aprendizaje de cada uno de ellos.

Se recordaba constantemente a los estudiantes que un ingrediente importante para el éxito en el proceso del aprendizaje era su actitud ante tal proceso.

Para obtener la evaluación final de cada estudiante se le dio un peso igual a cada una de las actividades contenidas en los números del 3-10. Con esta metodología se realizó la evaluación del grupo.

Evaluación generada a través de una entrevista personalizada

Uno de los objetivos de la evaluación es describir la situación cognitiva y de habilidades del estudiante al terminar un curso, pero cuál es la mejor manera de conseguir que ocurra. Si pudiéramos elegir libremente y sin presiones administrativas los exámenes no se verían muy favorecidos, quizá optaríamos por una entrevista personalizada a cada uno de los estudiantes. Pero esta opción se vuelve impractica por el tiempo que debemos invertir en la aplicación y análisis de éstas a fin de conseguir una evaluación que realmente describa la situación cognitiva del alumno.

Este proyecto trata de verificar mediante una entrevista personalizada la evaluación planteada por RUMEC, es decir pretende mostrar que el uso indistinto de la metodología de evaluación (la propuesta de RUMEC y una entrevista personalizada) generan la misma nota final del curso.

Para tal efecto se hizo una selección aleatoria de 10 estudiantes que habían cursado la materia de Cálculo con el ciclo de enseñanza ACE fundamentado en la teoría APOE.

La entrevista consistía de 7 preguntas seleccionadas aleatoriamente de un total de 11.

Después de haber seleccionado al azar las preguntas que contestarían en su entrevista se les pedía que al mirarlas con un poco de atención, decidieran por cuál empezarían, se le proporcionó el papel necesario para hacer operaciones, analizar y resolver los problemas.

La pregunta que se hizo a todos los estudiantes antes de iniciar la resolución de cada problema fue: ¿Entiendes qué se te pide que hagas en el problema?

El profesor permanecía como observador y en caso de notar titubeo en la respuesta procedía a cuestionar al estudiante acerca de lo que hacía y por qué lo hacia, siempre con el objetivo de que el estudiante reflexionara acerca de su respuesta; y que por otro lado se pudiera percibir realmente cuál era la situación cognitiva del estudiante al dar la respuesta al problema. Se le pedía al estudiante que escribiera todo lo que pensara que lo ayudaría a resolver el problema.

Se registraba lo que el estudiante contestaba a los cuestionamientos planteados de la manera más fidedigna posible, se evitaba dar opiniones y no manifestar aprobación o desaprobación en el tono de voz usado. Se sugería al estudiante estar lo más tranquilo posible de manera que el estrés no fuera un factor que sesgara la información que vertiera tal entrevista.

La entrevista a los 10 estudiantes se llevó a cabo en 7 días y el análisis de cada de éstas realizó en diez días.

Al final de cada entrevista se les preguntaba a los estudiantes; ¿qué evaluación te pareció mejor, la realizada durante el curso o la entrevista y por qué?

La mayoría de los estudiantes expresaron que la entrevista es mejor porque permite que el profesor conozca lo que el estudiante tiene en su mente y quiere explicar pero, a veces no puede.

A pesar del tiempo invertido en las calificaciones de los estudiantes mediante una entrevista personalizada sus calificaciones no cambiaron sustancialmente con respecto a la obtenida en el curso.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D., Thomas K. (2000). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, *Research in Collegiate Mathematics Education II*, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1996.

Baquero, R. (1997), *Vigotsky y el Aprendizaje Escolar*, 2ª. Edición. Aique. Argentina.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in advanced mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 231- 243). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1995). Assessment in one Learning Theory Based Approach to Teaching. In Gold B. Mathematical Association of America.

Dubinsky, E. (with D. Tall) Advanced Mathematical Thinking and the Computer in *Advanced Mathematical Thinking* (D. Tall, ed.), Kluwer (1991), 231-250.

UN SOFTWARE ASISTENTE DE GEOMETRÍA Y EL TRATAMIENTO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Rafael A. Meza V.
CECyT Diódoro Antúnez E.-I.P.N., México
rmezav53@yahoo.com.mx

RESUMEN:

La utilización de los conceptos de tiempo y movimiento en el estudio de curvas, consideradas éstas como la trayectoria descrita por un cuerpo en movimiento, condujeron a una comprensión intuitiva de los problemas principales del Cálculo, o sea el de la determinación de la tangente a una curva y el problema del área bajo una curva, pero fue Barrow quien con mayor precisión formuló, en 1667, el problema de la relación entre tangentes y áreas, aunque con un carácter estrictamente geométrico.

El presente trabajo muestra como con el apoyo de un software de geometría dinámica se puede llevar a cabo esta tarea. El Cabri Géomètre, ha mostrado ser un excelente aliado para este tipo de actividades y con su ayuda es posible explorar en forma sistemática, y dinámica, cómo los cambios en una variable cognoscitiva visual, de una de las dos gráficas involucradas en la relación entre tangentes y áreas, provoca cambios en la otra.

INTRODUCCIÓN:

La invención del cálculo es atribuible, en forma independiente a Leibniz y Newton a finales del siglo XVII. Newton desarrolló los conceptos de *fluxión* y *fluente* motivado por el problema de calcular la velocidad de un cuerpo y Leibniz por su parte desarrolló los conceptos de *diferencial* e *integral* motivado en el problema de trazar tangentes a una curva cualquiera. Además, concibieron una notación que permite usar estos conceptos. También encontraron y probaron que lo que ahora conocemos como “El Teorema fundamental del Cálculo” relaciona estos dos importantes conceptos. El descubrimiento de este último, hace posible el desarrollo algorítmico del cálculo y proporciona una formulación genérica de la relación entre el problema de la tangente y el problema del área, o en nuestra moderna notación, entre derivación e integración.

La utilización de los conceptos de tiempo y movimiento en el estudio de curvas, consideradas éstas como la trayectoria descrita por un cuerpo en movimiento, condujeron a una comprensión intuitiva de estos problemas, pero fue Barrow quien con mayor precisión formuló, en 1667, el problema de la relación entre tangentes y áreas, aunque con un carácter estrictamente geométrico en sus *Lectiones geometricae*. El problema de la tangente básicamente consistía en determinar un método que permitiera trazar una línea tangente a una curva en un punto específico; el problema del área, también fue abordado en forma geométrica, y básicamente consistía en encontrar un método que permitiera construir un rectángulo de área igual al área de interés.

El Teorema de Barrow permite recuperar el significado gráfico del Teorema Fundamental del Cálculo, así como las relaciones de las variables cognoscitivas visuales entre el problema de la tangente y el problema del área. No es obvio identificar la organización entre estas variables. Sin embargo, con el apoyo de un software de geometría dinámica podemos llevar a cabo esta tarea. Cabri ha mostrado ser un excelente aliado para este tipo de actividades y con su ayuda es posible explorar en forma sistemática, y dinámica, cómo los cambios en una variable cognoscitiva visual, de una de las dos gráficas involucradas en la relación entre tangentes y áreas, provoca cambios en la otra.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

La motivación de este estudio se plantea en términos de las siguientes preguntas:

El alumno que ha llevado un curso tradicional de Cálculo ¿es capaz de identificar la relación que existe entre el problema de la tangente y el problema del área si únicamente dispone de información gráfica?

Y si la identifica,

¿Es capaz de realizar el tratamiento gráfico de la relación entre estos dos problemas, si cuenta con los elementos formales y abstractos del Cálculo que le proporciona un curso tradicional?

Aún cuando a primera vista parece simple identificar o construir esta relación *no es obvio* y el tratamiento de tal relación gráfica requiere de la comprensión de la organización de las variables cognoscitivas visuales, por lo que nuestras siguientes preguntas pueden ser planteadas de la siguiente manera:

¿Cuáles son las variables cognoscitivas visuales en la relación entre tangentes y áreas? y *¿El tratamiento y la conversión de las variables visuales posibilitan al estudiante de bachillerato a la comprensión de tal relación?*

EL CUESTIONARIO

Con el propósito de conocer hasta qué punto los alumnos que han tomado los cursos tradicionales de cálculo son capaces de identificar, llevar a cabo el tratamiento y la conversión de la relación entre tangentes y áreas, se aplicó un cuestionario que tiene la particularidad de no presentar expresiones algebraicas explícitas y guía al alumno a tratar de dar una respuesta que se apoye en elementos gráficos pero sin obstaculizar, desde luego, una respuesta de tipo algebraica.

CUESTIONARIO DIAGNOSTICO

Sea **L** la recta tangente a la gráfica de la función polinomial de segundo grado f en el punto de coordenadas **(2, 60)** como se muestra en la figura 1.

a) encuentra el valor de la función f en $x = 2$, es decir $f\,(2)$

b) encuentra el valor de la derivada de la función f en $x = 2$, es decir $f\,'(2)$

c) en el sistema de coordenadas proporcionado en la figura 2 traza la gráfica de la función derivada $f\,'(x)$

d) determina la expresión polinomial de primer grado que corresponde a $f\,'(x)$

e) utiliza la expresión de $f\,'(x)$**,** obtenida en el inciso anterior, y determina $f\,(x)$

f) haz uso de la expresión $f\,(x)$ para determinar $f\,'(0.5)$

g) ¿a qué tipo de curva corresponde la expresión $f\,(x)$?

h) proporciona dos o tres elementos representativos de esta última curva.

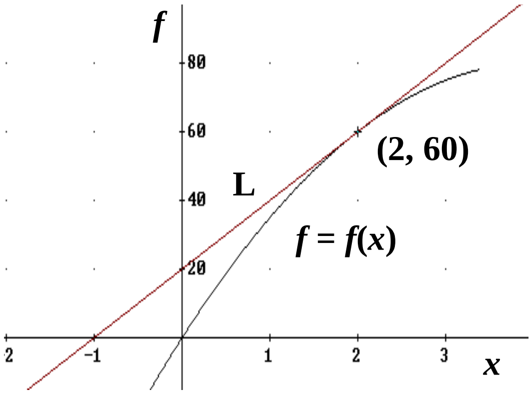


Figura 1

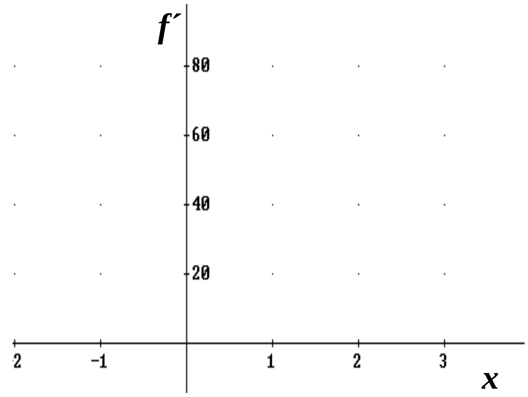


Figura 2

Hemos podido constatar que alumnos del nivel bachillerato y del primer año de licenciatura del área Físico-Matemáticas (he incluso profesores del nivel medio superior) no logran identificar tal relación. Construcción, tratamiento o conversión definitivamente no se encuentran dentro de las posibilidades de estudiantes de este nivel.

EL TEOREMA DE BARROW

Las investigaciones medievales de personajes como: Galileo, Roberval, Descartes, Torricelli, Fermat, Gregory St. Vincent, en particular las de Oresme (siglo XIV), condujeron a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad como función del tiempo (Boyer, 1968). Estos resultados fueron dando lugar al reconocimiento de lo fundamental de la relación entre tangentes y áreas, pero fue Isaac Barrow quien con mayor precisión formuló, en 1667, el problema de la relación entre tangentes y áreas. Struik (1969) en su libro *"A Source Book in Mathematics"* en las páginas 254-260 proporciona los más representativos de esta *Lecture X*.

El método utilizado por Barrow es totalmente geométrico, y esto hace que no sea fácil reconocer la importancia de sus resultados.

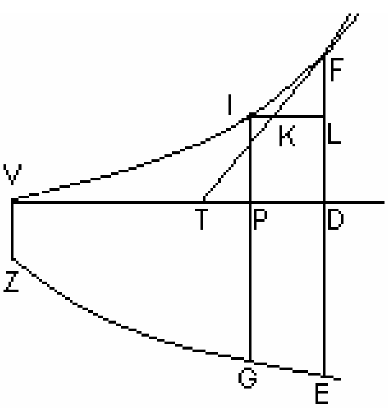


Figura 3

Este trabajo es una de las grandes contribuciones al cálculo infinitesimal, usa métodos geométricos libres de los cálculos y hace uso de curvas auxiliares, aunque es poco claro. Retomo el párrafo XI, que corresponde al Teorema Fundamental, de la *Lecture X*, con el objeto identificar las variables cognoscitivas presentes en este trabajo.

Con referencia a la Figura 3, sea la curva *ZGE*, la gráfica de una función monótona decreciente, a partir de la ordenada perpendicular *VZ*, con respecto a la recta *VD*. Construyamos la curva *VIF* con las siguientes hipótesis.

1. La ordenada perpendicular *DF*, de la curva *VIF*, *representa* el área de la región *VDEZ*.
2. Elijamos el punto *T* sobre la recta *VD* tal que satisfaga $\dfrac{DF}{DE} = DT$.

En consecuencia

$$LF = DF - DL = \text{área } VDEZ - \text{área } VPGZ = \text{área } PDEG.$$

Por otro lado, ΔLKF es semejante al ΔDTF así,

$$\frac{LK}{DT} = \frac{LF}{DF},$$

$$LK = LF\,\frac{DT}{DF},$$

pero, por la segunda hipótesis $\dfrac{1}{DE} = \dfrac{DT}{DF}$, y

$$LK = \frac{LF}{DE} = \frac{\text{área } PDEG}{DE} < \frac{DE \cdot DP}{DE} = DP = LI.$$

Así, finalmente tenemos que: $LK < LI$

Si el punto *P* está a la derecha del punto *D* se cumple entonces la relación:

$$LK > LI$$

Con lo que Barrow demuestra que la recta *TF* es tangente a la curva *VIF* en el punto F en el sentido clásico griego de la recta que toca en un único punto a la curva sin cortarla.

Desde luego que es posible reinterpretar en nuestra notación este resultado.

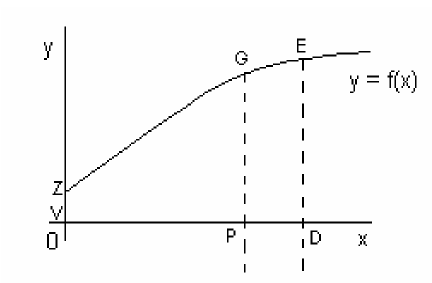


Figura 4

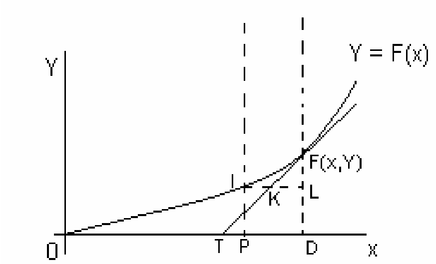


Figura 5

Dada una función creciente $y = f(x)$, figura 4, construyamos una función $Y = F(x)$, figura 5, con la condición de que la ordenada $Y = DF$ represente el área limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, las ordenadas VZ, DE y el eje horizontal, es decir

$$Y = \int_0^x y\,dx\,.$$

Barrow elige el punto T sobre el eje horizontal de tal forma que se cumpla la relación $\dfrac{DF}{DE} = DT$, y demuestra que la recta TF es tangente a $Y = F(x)$.

Por otro lado se tiene que $\dfrac{DF}{DT} = DE = y$, en nuestra notación este resultado es equivalente a $\dfrac{dY}{dx} = y$, es decir $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x y\,dx = y$.

Barrow da así, solución al problema de construir una curva, $Y = F(x)$, en la que en todo momento conocemos su tangente. En nuestra notación moderna, la integral definida considerada como una función del límite superior variable resuelve el problema de encontrar una función en la que en cada momento conocemos su derivada. Lo que no está presente aquí es el cálculo de áreas por medio de tangentes o en nuestra notación la obtención de integrales definidas a partir de integrales indefinidas, sin embargo podemos considerar a la luz de estos hechos que en 1667 logró identificar la siguiente relación básica:

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f *es continua en* $[a,b]$ y $F(x) = \int_a^x f$ *para* $x \in [a, b]$, *entonces* $F'(x) = f(x)$.

CABRI Y LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Tomando como hilo conductor el Teorema de Barrow y apoyándonos en el software de geometría dinámica Cabri, podemos llevar a cabo el tratamiento de diversos pares de funciones familiares en el Cálculo. Bosquejamos a continuación el tratamiento para el par de funciones: *lineal* $f(x)$ y *cuadrática* $F(x)$.

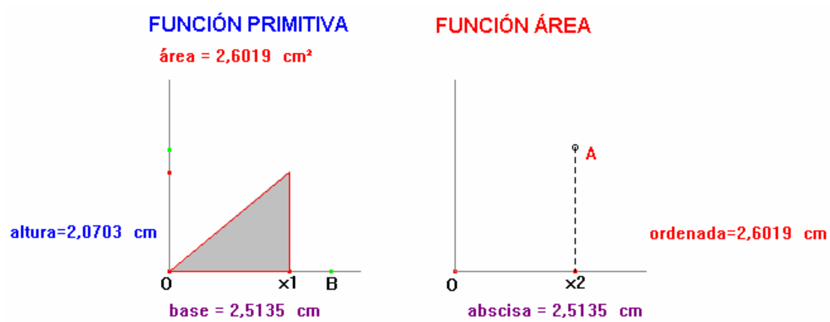


Figura 6 **Figura 7**

En la figura 6 podemos observar que el área del triángulo sombreado, de base 2.5135 y altura 2.0703, es 2.6019, la magnitud numérica de esta área está representada en la figura 7 como un segmento, perpendicular al eje de las abscisas, de magnitud numérica igual a la magnitud numérica del área del triángulo, con lo cual se obtiene un punto A de coordenadas (2,5135, 2.6019). Este mismo proceso puede ser repetido para obtener un conjunto de puntos, pertenecientes a la función de área (figura 7), generados por las diversas áreas de los triángulos correspondientes. El siguiente paso es decisivo ya que implica dar el salto de concebir "x1" como un número a concebir "x" como una variable continua, para poder obtener la expresión algebraica correspondiente al lugar geométrico generado por el punto A al desplazarse la variable "x" sobre el intervalo OB. En este punto Cabri permite que el estudiante pueda llevar a cabo la exploración de la variación de "x" sin recurrir necesariamente al uso de herramientas algebraicas, lo cual puede ser una ventaja para aquellos que aún no poseen estos recursos. La función *Lugar geométrico* del Botón *Construir* muestra en la figura 8 el lugar geométrico generado por el punto A al variar en forma continua "x".

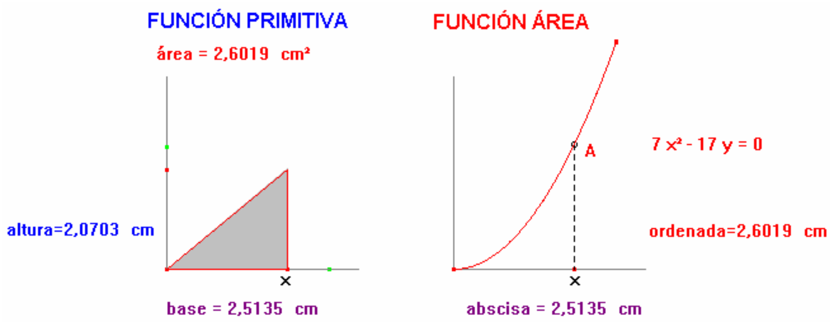


Figura 8

Sin embargo, podemos tomar la alternativa de activar la función *Ecuación y coordenadas* del botón *Medir* y Cabri nos proporcionará la ecuación de la función $Y(x) = F(x)$, como se muestra en la figura 9.

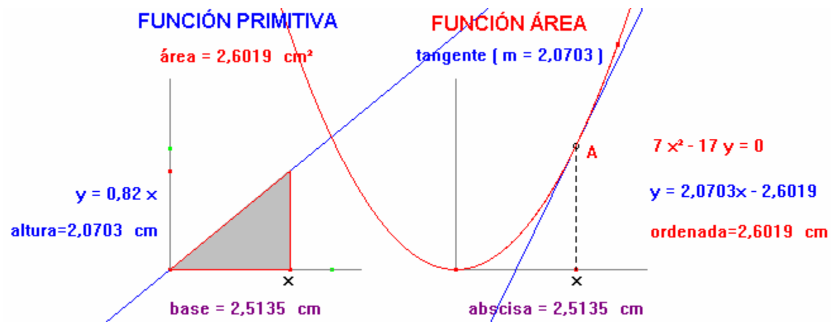


Figura 9

OBSERVACIONES

En este breve espacio se bosquejó la recuperación gráfica y el tratamiento de las variables visuales del Teorema Fundamental del Cálculo, de la versión geométrica de Isaac Barrow, con la ayuda del software de geometría dinámica "Cabri". El tratamiento se realizó sobre la representación gráfica de una función primitiva y se construyó la función área correspondiente para el caso en que la primera es una función lineal ascendente $(m > 0)$, forma un ángulo menor de 45° con el eje de las abscisas $(m < 1)$ y pasa por el origen de coordenadas (constante $b = 0$). Es posible ampliar este análisis en forma sistemática sobre las variables visuales, sus valores y las correspondientes unidades simbólicas (Duval, 1992). Puede mostrarse, por ejemplo, que cuando la función primitiva es la función identidad $y = x$ la cual pasa por el origen, la función de área es la función cuadrática $y = \frac{1}{2}x^2$ de vértice el origen de coordenadas, y como el trazo de la primitiva es ascendente la función de área abre hacia arriba. Una gran variedad de situaciones didácticamente interesantes surgen con respecto al tratamiento de la función primitiva cuando esta última es una función lineal que no pasa por el origen. Finalmente, es necesario dar un mayor énfasis a la construcción, tratamiento y conversión de las representaciones gráficas ya que en general nuestros estudiantes no han llegado a desarrollar las herramientas mentales necesarias para realizar en forma satisfactoria estas operaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Duval, R (1992). Gráficas y Ecuaciones: La articulación de dos registros. En *"Antología En Educación Matemática"*, Departamento de Matemática Educativa, México, D.F.

Boyer, C. (1968). *"A History of Mathematics"*. John Wiley & Sons. New York, USA.

Descartes, R. (1637). *"La Geometría"*. (Traducción, 1947) Espasa – Calpe Argentina, S. A. Traducida por Rossell Soler, Pedro. Profesor de la Universidad de Buenos Aires. Argentina.

Struik, D. J. (1969). *"A Source Book in Mathematics, 1200-1800"*. Harvard University Press. Cambrige.

APRENDIENDO Y ENSEÑANDO MATEMATICA
CON EL PERFIL DEL INGENIERO

Wilda Fuentes González
Universidad Austral de Chile. Chile
wfuentes@uach.cl

RESUMEN.
En este trabajo se desarrolla una experiencia de aula realizada a cursos del Primer y Segundo Nivel Matemático que se dicta en el Campus Isla Teja de la Universidad Austral de Chile, los cuales, en una prueba de diagnóstico aplicada al inicio del semestre académico en cada año, demostraron un bajo nivel de conocimientos específicos en esta disciplina. Dicha experiencia consistió en privilegiar la motivación profesional del alumno para lograr aprendizajes necesarios en su futuro desempeño ingenieril a través del énfasis en los razonamientos matemáticos. El rendimiento de estos cursos tratados, luego de un semestre, se compararon con el de cursos testigo y con los resultados se demuestra que esta estrategia de enseñanza permitió elevar el rendimiento académico de los alumnos.

INTRODUCCIÓN

Es un problema bastante conocido el bajo nivel de conocimientos matemáticos con el cual, en general, ingresan los alumnos a los centros de educación superior. Esto se ve reflejado por los altos índices de reprobación que, como consecuencia, redunda en altos índices de deserción durante los primeros años de estudio y, en algunos casos, mortalidad académica en los años posteriores.

Al problema anteriormente expuesto, se agrega la crítica permanente de los profesores responsables de asignaturas profesionales en las distintas carreras que se imparten en la Universidad, en el sentido de que los alumnos de éstas no tienen la capacidad adecuada de razonar y, menos aún, saben aplicar la matemática cursada en los primeros años.

La Dirección de Pregrado, la Dirección de Investigación, la Facultad de Ciencias y el Instituto de Matemáticas de la Universidad Austral de Chile conciente de estos problemas y en su preocupación constante por solucionarlos mediante la búsqueda de estrategias innovadoras de enseñanza, han permitido a la autora del presente trabajo, desarrollar, desde 1983, distintos proyectos, de manera que, esta presentación es una propuesta generada por el último de ellos (Fuentes W. 1997).

La estrategia de enseñanza utilizada consistió en enfatizar los razonamientos matemáticos utilizados en el quehacer del día a día del docente responsable de las asignaturas profesionales, fundamentada en la experiencia acumulada por la autora y que ésta postula como un mecanismo eficaz para mejorar los aprendizajes y elevar el rendimiento académico. Esta experiencia fue realizada en cursos de 43 y 40 alumnos respectivamente del Primer y Segundo Nivel, ingresados en el primer semestre académico 2000.

METODOLOGÍA

Al inicio de las actividades del segundo semestre académico 2000, se aplicó una Prueba de Diagnóstico de conocimientos específicos matemáticos a los alumnos ingresados al primer nivel de matemáticas de la Carrera de Ingeniería Forestal e Ingeniería en Alimentos, del mismo modo al inicio del Primer semestre 2001, se aplicó a los alumnos del Segundo Nivel, cursos asignados por el Instituto de Matemática para asumirlos como Profesor Responsable y cuyo contenido programático es el "Cálculo en una variable" para el Primer Nivel y el "Cálculo en varias variables" para el Segundo Nivel.

A estos alumnos se les planteó durante el semestre, en periodos regulares de clase, las situaciones problemáticas más utilizadas comúnmente en el ámbito de su motivación profesional y con los razonamientos matemáticos de los contenidos del Programa de la asignatura de Matemática, obtenidas dichas situaciones, en entrevistas de la autora de esta Comunicación Breve, con los profesores de las asignaturas de la carrera.

Las actividades de los alumnos durante el semestre consistieron en presentar: por una parte, trabajos en equipo que plantearan problemáticas ingenieriles que pudieron ser resueltas con los razonamientos matemáticos tratados en la clase, debiendo formar éstos, grupos de no más de cinco personas, y constituidos tanto por afinidad como por disponibilidad horaria. Por la otra, exponer individualmente situaciones que involucraran pensamientos algebraicos y geométricos.

Las entrevistas del Profesor Responsable de la asignatura de matemática con los Profesores Responsable de las asignaturas profesionales, se realizaron con el objetivo de alcanzar una visión interdisciplinaria, internalizando así, las motivaciones del Perfil Profesional para lograr aprendizajes matemáticos a partir de los intereses vocacionales de los futuros ingenieros.

Para poder efectuar un análisis de esta experiencia de aula, se ha hecho una comparación entre el curso que recibió la innovación didáctica (CURSO 1 y CURSO 3) y el curso elegido como testigo de entre los que no ha recibido, y que además se asemejara tanto en el número de alumnos como en el nivel alcanzado en la Prueba de Diagnóstico (CURSO 2 y CURSO 4).

Durante el transcurso de cada semestre, los alumnos de los cursos muestreados, fueron evaluados en su rendimiento académico por: pruebas acumulativas constituidas con problemas de interpretación profesional cuya solución involucrara a razonamientos matemático y exposiciones individuales con trabajos en equipo.

Como parámetro del rendimiento logrado al término del semestre en la asignatura, se consideró la nota final obtenida en la misma.

RESULTADOS

Los valores promedios tanto del nivel alcanzado en la Prueba de Diagnóstico como en el rendimiento obtenido por los alumnos al término del Primer y Segundo Nivel, se muestra en el Cuadro 1.

CUADRO 1. Rendimiento registrado en los cursos muestreados.

	I PRUEBA DIAGNOSTICO (%)		II CALIFICACIÓN FINAL ASIGNATURA (%)		DIFERENCIA ENTRE (I) Y (II)	INCREMENTO EN EL RENDIMIENTO FINAL RESPECTO DEL RENDIMIENTO INICIAL (%)
	X	SX	X	SX		
CURSO 1	20,0	7,3	37,6	16,0	17,6	923
CURSO 2	24,3	13,9	29,9	17,0	5,6	21,8
CURSO 3	18,2	7,5	35,2	15	17	96
CURSO 4	18,5	8,3	24,5	16	6	33

Estadísticamente se estableció que la diferencia de las medias de la calificación final de la asignatura entre el CURSO 1 y CURSO 2, fue significativa. Lo mismo ocurrió entre CURSO 3 y CURSO 4.
La deserción de alumnos en el curso con la innovación respecto del curso testigo elegido, se muestra en el cuadro 2.

CUADRO 2. Deserción registrada en los cursos muestreados.

	NUMERO INICIAL DE ALUMNOS	NUMERO FINAL DE ALUMNOS	DESERCIÓN (%)
CURSO 1	43	40	6
CURSO 2	40	35	10
CURSO 3	40	38	5
CURSO 4	45	40	11

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

El porcentaje de incremento producto de la diferencia entre el rendimiento promedio obtenido en la Prueba de Diagnóstico y la calificación final de la asignatura en cada uno de los cursos muestreados, es sólo un parámetro de comparación y los valores no son absolutos.

Como se puede apreciar en el Cuadro 1, el incremento porcentual en el rendimiento del CURSO 1 fue de 93 y en cambio en el CURSO 2 fue de 22 existiendo una diferencia de 71, lo que estaría demostrando una diferencia conductual bastante notoria entre estos cursos. Análogamente se concluye en forma similar del CURSO 3 lo mismo anterior.

Estos resultados motivan a hacer extensivo este tratamiento a las nuevas generaciones de alumnos que ingresan al Primer y Segundo Nivel, y además a agregar otros elementos que permitan atender en mejores condiciones las motivaciones profesionales, y de este modo lograr un incremento real mayor de la conducta de salida respecto de la conducta de entrada.

En general, los alumnos acogieron con gran interés el método, lo que al parecer influyó en la menor deserción, esto último se desprende de observar la información entregada en el CUADRO 2.

Esta modalidad de trabajo permite además obtener una retroalimentación inmediata del proceso enseñanza-aprendizaje.

Los resultados expuestos, producto de emplear esta modalidad de trabajo, y la opinión manifestada por los estudiantes respecto de esta experiencia, respaldan a la autora de este trabajo en su posición de afirmar que esta metodología ayuda a mejorar el rendimiento académico de los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fuentes, W. (1997) *Metodología Interdisciplinaria Activa*. Informe Proyecto de Investigación. Dirección de Investigación UACH.

Gagne, R. M. (1979). *Las condiciones del aprendizaje*. Editorial Interamericana México Tercera Edición. 273 p.

La Fourcade, P. D. (1974). *Planeamiento, conducción y evaluación en la Enseñanza Superior*, Editorial Kapeluz, B. Aires 285 p.

Larroyo, F. (1964) *Pedagogía de la Enseñanza Superior*. Editorial Porrúa, México, Segunda Edición 406 p.

Morales, M. M. y Valdés, M. (1981). *Diagnóstico y Rendimiento Nivel 101 Segundo Semestre de 1981*. Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago (Trabajo de Graduación) 133 p.

APROPIACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL DIBUJO Y LA FIGURA GEOMÉTRICA A TRAVÉS DEL USO DE CABRI-GÉOMÉTRE.

Alejandro Carrillo A.
CINVESTAV-IPN.
acarrill@mail.cinvestav.mx

RESUMEN:

En el siguiente artículo se presenta el resumen del proyecto de investigación de tres estudios de casos, el cual se encuentra en la etapa de análisis de los resultados arrojados en los diferentes instrumentos metodológicos aplicados a los alumnos de segundo grado de secundaria. En este estudio se pretende, que a través de la herramienta CABRI- GÉOMÉTRE, el alumno se apropie de las relaciones estructurales que se preservan en una figura geométrica.

Después del seguimiento realizado al proyecto a gran escala de EMAT con procesos estadísticos, se hace una extensión del proyecto combinándolo con un estudio en detalle de tres alumnos por su alto, medio y bajo rendimiento escolar, asumiendo a la investigación la forma de un estudio de casos, que es en esta segunda parte donde versa el proyecto.

INTRODUCCION

Se sabe que el razonamiento geométrico del estudiante es inicialmente guiado por el dibujo que se realiza en una hoja de papel o en el pizarrón, es decir, el estudiante al principio no distingue el dibujo de la figura geométrica, de la cual, el dibujo es sólo un ejemplo. La figura geométrica es un objeto abstracto que consiste en un conjunto de relaciones estructurales que se preservan a través de las deformaciones que pueda sufrir un dibujo de la figura, bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, cuando se tiene un triángulo dibujado con Cabri se le puede deformar a través del arrastre. Las deformaciones que sufre un dibujo mediante el arrastre son válidas, en el sentido de que el resultado de la deformación es otro dibujo que representa a la misma figura geométrica. Esto es análogo a lo que ocurre cuando en lugar de un número pensamos en una variable que puede tomar ese valor numérico.

El software "CABRI –GEOMETRE" es el ambiente computacional adecuado para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, ya que permite al alumno manipular figuras geométricas en la pantalla, haciendo que trace y transforme estas figuras, lo que lo conducirá a veces a deducir, por ejemplo, las propiedades invariantes de dichas figuras. Esto es posible, debido a que las transformaciones en el ambiente Cabri están sujetas a las reglas de la Geometría Euclidiana. La verificación práctica de teoremas geométricos, la exploración y elaboración de conceptos hacen del programa Cabri un acercamiento práctico y experimental al mundo de la geometría.

Lo mencionado anteriormente, nos dice que Cabri es el ambiente idóneo para los alumnos de segundo año de secundaria, que usualmente encuentra gran dificultad para conceptualizar en el campo de la Geometría Euclidiana. Por lo general, el estudiante está anclado a las propiedades del dibujo y para tomar conciencia de las propiedades de la figura correspondiente al dibujo debe reconocer propiedades invariantes, es decir, las que permanecen cuando se deforma la figura; por ello, es importante que el alumno distinga las relaciones en el dibujo (particularidades del dibujo, por ejemplo, la medida de los ángulos, la longitud de los lados) y las relaciones en la figura (por ejemplo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo

Trabajo de Tesis: desarrollado en marco del proyecto EMAT con número de referencia G 263385.

siempre es 180^{o}, la suma de la longitud de dos lados de un triángulo siempre es mayor que la longitud del tercero).

Por las razones antes expuestas, en esta investigación se utilizará el ambiente Cabri como herramienta para cerrar la brecha entre la percepción y la geometría, proponiendo un micromundo para la enseñanza de la geometría con manipulación directa.

Contar con las computadoras, no quiere decir que el problema de la enseñanza ya está resuelto. Hay que tener presente que la computadora por sí misma, no es garantía de que se logre el aprendizaje, ni es sinónimo de renovación pedagógica, más bien es una ayuda pedagógica, donde el alumno construye su conocimiento y los significados para interiorizarlos y así, avanzar en su proceso de aprendizaje. Sin embargo, todo esto ha sido demostrado en proyectos anteriores, donde las experiencias nos señalan que, "sí el uso de las tecnologías es apoyado en un modelo pedagógico, permitirá construir ambientes de aprendizaje apropiados, que permitan enriquecer y mejorar la enseñanza actual de las matemáticas en la escuela secundaria" (proyecto EMAT 2000).

El uso de la tecnología puede ayudar en cierto modo a reducir la carga académica del profesor, pero esto, no en el sentido de hacer al alumno más rápido para realizar sus tareas, o más eficiente, o de manera más expedita, sino en el sentido de acceso y equidad para desarrollar sus estructuras cognitivas con mayor eficiencia, como la idea de construcción y verificación de conjeturas, la idea de semejanza, la idea de congruencia. Pero a esta carga se debe acceder después de haber creado un cierto bagaje con respecto al tema de estudio(en este caso la Geometría Euclidiana) en donde el alumno, además, no sólo deba aprender el funcionamiento de la máquina(ya que este funcionamiento es importante, para que el alumno sepa con certeza, cómo decirle a la misma, el proceso que más convenga para llevar a cabo su desarrollo cognitivo), sino también aprovechar todo el desarrollo didáctico y pedagógico, que es lo que se pretende en esta investigación, utilizar la tecnología para producir un impacto a nivel epistemológico.

Por otro lado podemos decir que para resolver un problema en geometría no es suficiente el programa Cabri, sino en principio, se debe tener una buena intuición, después hacer un buen dibujo y tratar de ver qué pasa con él, es decir, qué polígonos son congruentes, qué líneas son paralelas, qué puntos son tangenciales... Después, hacer otro dibujo para ver qué propiedades se preservan y tratar luego de demostrarlo. Porque una vez hecho el dibujo con el softwere, uno puede modificarlo con libertad y éste se traza solamente en nuevas condiciones iniciales.

El descubrimiento y la construcción de un concepto matemático con Cabri no se realizan de manera esporádica, es necesario recorrer un camino que comienza en un nivel intuitivo y que vaya progresando gradualmente a través de un nivel experimental, un nivel teórico y hasta pretender llegar a un nivel axiomático. El recorrido en estas diferentes etapas debe ser guiado por el profesor con actividades previamente elaboradas, sin que la exploración del micromundo por parte del alumno sea totalmente libre o azarosa, ya que los micromundos ofrecen un amplio rango de experiencias para el estudiante, sin que ello garantice que necesariamente ocurra el aprendizaje deseado. Lo que el estudiante experimenta a través de la pantalla puede no ser relevante en un momento dado, de ahí que la presencia del maestro siga siendo indispensable.

Trabajo de Tesis: desarrollado en marco del proyecto EMAT con número de referencia G263385.

En el ambiente del micromundo, el maestro tiene entre sus funciones, no sólo ser el facilitador de las tareas orientadoras para la exploración del estudiante, donde se favorezca el razonamiento y la reflexión en los alumnos, sino también la función de intervenir oportunamente en el proceso de exploración y de conceptualización. Para ello el profesor tiene que desarrollar una sensibilidad en el proceso de enseñanza y de aprendizaje para detectar el momento crucial e intervenir, ya sea con una nueva información o con una pregunta adecuada, y acercar al alumno hacia la zona de desarrollo próximo (modelo Vygotskiano), donde el maestro actúa como interlocutor del sujeto que está aprendiendo, es decir el experto en la pareja.

MARCO TEÓRICO

Desde hace más de dos décadas se ha tenido la expectativa de que la influencia de los softwares y las herramientas computacionales hubiesen tenido un gran impacto en las prácticas cotidianas. Sin embargo, el impacto epistemológico ha sido mayor que lo previsto (Balacheff & Kaput 1996). Estos autores señalan, que se debe fundamentalmente al proceso de reificación de los objetos matemáticos y a las relaciones entre ellos que el estudiante pueda activar en los entornos interactivos computacionales. Lo anterior permite una forma de actividad mucho más directa que lo que era posible anteriormente. Esta nueva concepción hace indispensable la extensión de la transformación didáctica a los contextos computacionales, dando lugar a una transposición informática.

Para Balacheff & Kaput, el micromundo debe de tener ciertas condiciones en su composición para que sea funcional.

Un micromundo está compuesto de (Balacheff & Kaput, 1996):

- Un conjunto de objetos primitivos y operaciones que se realizan sobre estos objetos (un campo operatorio), es lo que usualmente se denomina en matemáticas un sistema formal.
- Un dominio fenomenológico, que relaciona los objetos y operaciones con los fenómenos que podemos apreciar a nivel de pantalla. Este dominio determina el tipo de retroalimentación que se produce como consecuencia de las acciones y decisiones que toma el estudiante durante la exploración.

Un micromundo planteado como el paradigma del "costruccionismo" (Papert, 1993):

Las representaciones mentales son reconstrucciones de acciones externas, por ende, las representaciones externas son herramientas en al construcción de significado. Esto condujo a Seymour Papert a plantear el paradigma del "construccionismo". La idea central detrás de este paradigma, en palabras de Papert, es que las construcciones que se dan en la cabeza de las personas suceden de manera particularmente oportuna cuando son apoyados por construcciones externas, "en el mundo", llevando a productos que se pueden ver, discutir, examinar "ahí afuera", tales como la construcción de un programa de computación, un poema, o la teoría del universo. Es decir, su idea central es que si el conocimiento es una construcción del sujeto activo, la mejor manera de lograr dicha construcción es construyendo algo.

Papert llega a la conclusión, que si se pretende que los niños construyan su propio conocimiento, esto no podía darse a partir de formulaciones abstractas o en ausencia de materiales que facilitaran dicha construcción. Papert considera que es la cultura la encargada de facilitar los recursos necesarios que den soporte a la construcción del aprendizaje. Es aquí donde las hojas de actividades y software Cabri juegan un papel importante para que el alumno construya su conocimiento.

El diseño de las actividades y el ambiente computacional Cabri, se sustenta con la teoría construccionista y el ambiente de micromundo de Papert.

La idea de micromundo de Papert con más apego a la realidad, (Hoyles & Noss 1987).

Estos autores llevaron la idea del micromundo más lejos al considerar también la *situación didáctica* en la que la interacción se lleva a cabo. Dichos investigadores consideran que la definición de micromundo debe tomar en cuenta los siguientes elementos: estudiantes; maestros; el entorno tanto social como físico en los que las actividades se llevan a cabo; y la actividad como algo que depende de las experiencias pasadas e intuiciones del estudiante, y de las metas y experiencias del profesor.

Hoyles y Noss,(1987) define entonces a un micromundo como formado por los siguientes cuatro componentes:

- El componente del estudiante: que involucra los entendimientos y concepciones parciales existentes que el alumno trae consigo a la situación didáctica.
- El componente técnico: formado por el software o lenguaje programación, y un conjunto de herramientas que proveen un sistema de representación para la comprensión de una estructura matemática o campo conceptual.
- El componente pedagógico: todas las intervenciones didácticas que se llevan a cabo las actividades de programación; y
- El componente contextual: el entorno social de las actividades.

La teoría de Hoyles y Noss, sustenta el diseño del modelo de las hojas de actividades y del modelo del plan de clases (que es el modelo del Proyecto EMAT), aplicado en la momento de la observación directa.

MÉTODO

Se toman como antecedentes los trabajos de CABRI-GÉOMÉTRE; Fritzler, 1998, Yábar, 2000, Cabri World Montral, 2002, que no hablan precisamente de estudios de casos, pero sí de la enseñanza de la matemática a través de este software. El presente estudio tiene como marco general el macro proyecto EMAT (SEP – ILCE) y "El Proyecto de Grupo CONACYT "La Incorporación de Nuevas Tecnologías a la Cultura Escolar(1999)", desarrollado por CINVESTAV, SEP - CONACYT.

Para cumplir con el objetivo de esta investigación, se dividió el trabajo en cinco fases, que facilitaron las actividades de campo y son: Primera fase: Cuestionario inicial y Entrevistas individuales. Segunda fase: Selección de los alumnos para el estudio de casos. Tercera fase: Etapa experimental (trabajo de las hojas de actividades con el software Cabri). Cuarta fase:

Cuestionario Final y Entrevista individuales. Quinta fase: Análisis e interpretación de los resultados y análisis de las categorías.

Combinando métodos

Después del seguimiento realizado al proyecto a gran escala de EMAT con procesos estadísticos, llevado acabo en diferentes partes de la república Mexicana, se pretende hacer una extensión a este proyecto, combinándolo con un estudio de casos de tres alumnos, los cuales se escogieron entre 38 estudiantes por sus diferentes rendimientos escolares anterior a este proyecto y por sus resultados obtenidos en el cuestionario inicial. Adán por su alto rendimiento escolar, Victoria un rendimiento medio y Maribel bajo rendimiento, ellos son de segundo grado de una Escuela Secundaria Técnica, en el municipio de Ecatepec, Estado de México. A los tres se les aplicó, un cuestionarios y entrevista exploratoria antes y después de trabajar con las hojas de actividades, para investigar en detalle el desarrollo de las nociones básicas de la Geometría Euclidiana cuando interactúan con el ambiente CABRI-GÉOMÉTRE, utilizando actividades de geometría, previamente diseñadas. En esta investigación se trató de introducir innovaciones educativas para iniciar al alumno en las prácticas escolares en el aula de matemáticas. Para ello se recurrió al uso del software par la enseñanza de la geometría.

El esquema metodológico usado en esta investigación contempla como primer instrumento, la aplicación de un *cuestionario exploratorio* (evaluación diagnóstica) para indagar las nociones básicas de la Geometría Euclidiana a 38 estudiantes de segundo grado de secundaria. El cuestionario estuvo conformado por 10 problemas, con tareas muy específicas de geometría, las cuales fueron estructuradas bajo el enfoque de la resolución de problemas promovida en el currículum de la SEP en 1993.

El segundo instrumento del estudio fue la *observación directa* en el aula, donde el investigador es el maestro frente a grupo, implementando un plan de clases para observar que las hojas de actividades prediseñadas para el software Cabri cumplieran con su objetivo. La finalidad de este instrumento, era observar el avance y dificultades que presentaban los alumnos con las nociones de Geometría al momento de estar resolviendo las hojas de actividades en el instante de estar interactuando con la herramienta CABRI-GÉOMÉTRE.

El plan de clases consistió en trabajar con CABRI-GÉOMÉTRE las hojas de actividades proporcionadas a cada alumno, en cada sesión con una duración de 50 minutos. En esta fase experimental el alumno inicia el trabajo con el software. Durante la sesión se permitía la intervención oportuna del maestro investigador, de una forma pertinente para que los alumno construyeran sus conocimientos, haciendo preguntas o consultando al experto sobre alguna dificultad. Este tipo de interacción también la podía hacer con sus compañeros de equipo.

El diseño de las hojas de actividades para la enseñanza de la Geometría con el ambiente computacional Cabri, fue elaborado conforme al currículum respectivo del segundo año de secundaria de la SEP y bajo del marco teórico del micromundo de Papert, creando un ambiente al alumno que le permita realizar el trabajo exploratorio bajo la teoría construccionista de los conceptos geométricos y la actualización de las actividades se efectuaron con apoyo en al teoría de Hoyles y Noss, además con un modelo de aprendizaje colaborativo; es decir, la libre exploración no fue individual, sino que se agruparon en equipos de dos alumnos por computadora, donde ambos interactuaron, enriqueciendo sus

---

Trabajo de Tesis: desarrollado en marco del proyecto EMAT con número de referencia G263385.

experiencias. En este modelo, el papel del maestro siguió siendo prioritario, ya que su participación fue constante para que la interacción se diera positivamente y resaltara su naturaleza sociocultural, y es en esta parte de la metodología donde se pretende implementar una modelo de corte vigotskyano (Wertsch, 1993).

El tercer instrumento fue la *entrevista.* Se aplicó en dos momentos del estudio: la primera fue después del cuestionario inicial, haciendo exploraciones individuales a los tres alumnos, con la finalidad de determinar detalladamente cuáles eran las dificultades más fuertes en las nociones básicas de la Geometría Euclidiana y además para determinar el nivel de construcción de estos conceptos al estilo de la escala de Van Hiele. La segunda entrevista fue aplicada después del cuestionario final, también con exploraciones individuales, con la finalidad de determinar el avance que tuvieron los alumnos en las nociones básicas de la Geometría Euclidiana, después de haber trabajado con las hojas de actividades con la ayuda del software CABRI. En estas dos fases se uso la video grabación, para registrar el desempeño de los tres alumnos del estudio de casos.

El último instrumento que se utilizó fue el *cuestionario final;* el mismo que el cuestionario inicial, excepto que se le agregaron dos problemas más, con la finalidad de determinar el avance que tuvo el grupo con respecto a su etapa inicial, observando el nivel de construcción de los conceptos de Geometría Euclidiana en ese momento.

Para finalizar este estudio de campo, se llevará acabo el análisis e interpretación de los protocolos de entrevistas, para analizar la construcción de los conceptos geométricos, en los tres casos. Finalmente se elabora el reporte de dicho análisis, en términos de los propósitos teóricos del estudio. La idea en esta parte de la metodología es construir el marco de análisis, desde el punto de vista de la Geometría Dinámica bajo el fundamento teórico de Balacheff y Kaput. Esta etapa se encuentra en proceso.

Validación del estudio

La confrontación y la organización de los instrumentos metodológicos, obliga a ciertos procedimientos para la validación de la investigación con observaciones cruzadas. Aunque se les da, prioridad a los cuestionarios, la observación directa y las entrevistas, que juegan un papel importante para que la validación se dé por medio de una triangulación de todas las situaciones, cuyo contenidos geométricos fueran comunes y constatar por este medio los rasgos fundamentales de los casos.

Notas finales

Actualmente nos encontramos al principio de la etapa de análisis de los resultados obtenidos en los diferentes instrumentos metodológicos, por lo que las conclusiones serán posteriores a esta etapa y en estas notas finales simplemente reporto los resultados previos al análisis.

Para empezar la fase experimental con CABRI, se inició con una etapa introductoria, que permitió a los alumnos conocer las diferentes funciones del programa computacional, realizando ejercicios de Geometría a través de las diferentes primitivas y a la vez para que fueran conociendo la funciones del menú principal del software. Tanto en esta etapa como en los resultados de los cuestionarios y entrevista, los alumnos encontraban gran dificultad con los conceptos básicos de la Geometría Euclidiana como: segmento, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, polígono regular e irregular.

En el cuestionario inicial manifestaron tener problemas para reconocer los símbolos como, triángulo (Δ) y ángulo ($\measuredangle$) además no pudieron identificar el ángulo por la secuencia de las letras($\measuredangle$ ABC). También tuvieron dificultades para determinar: la altura de un triángulo, una mediatriz, la simetría, la escala, el área de una figura, el perímetro de una figura no convencional, entre cinco figuras determinar cuál no era un cuadrilátero, tan poco pudieron identificar el radio de un círculo. Estaos dificultades conceptuales se manifestaron de una forma general en el grupa de estudio conformado por 38 alumnos de segundo grado de secundaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Balacheff, N. &Kaput, J. (1996). “Computer-based learning Environment in Mathematics” in A.J. Bishop et al (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 469-501.

Balacheff, N &Sutherland, R. (1994). “Epistemological Domain of Validity of Microworlds: the case of Logo and Cabri-géomètre" in E R. Lewis &p. Mendelsohn (eds) *Lessons from learning*, North-Holland/ Elsevier Science, Ámsterdam, IFIP Transactions A46, pp. 137-150.

Bisquerra, R. (1989). *Metodología de la Investigación Cualitativa.* Ediciones CEAC, S.A. Barcelona. España.

Hoyles, C. & Noss, R. (1987), “*Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a LOGO-based school mathematics.* Education around the World, Volume 3, University of Chicago Press.

Paper, S. (1993), *The Children's Machine, Basic,* New York.

Paper. S. (1987), “Microworlds: Tranfroming Education”, in R. W. & Yasdani, M. (eds.). *Artificial Intelligence and Education*, Volumen 1: Learnig Enviroments and Tutoring Systems, Ablex, Norwood, NJ,USA.

Paper, S. (1981), *Desafío a la mente*. Galápago. Buenos Aires, Argentina.

Proyecto EMAT(1998-2003). Proyecto de Grupo CONACYT “*La Incorporación de Nuevas Tecnologías a la cultura escolar. La enseñanza de las ciencias y las matemáticas en la escuela secundaria”*. México. D.F. Número de referencia. G263385.

Ursini, L. S. y Orendain, T. M. (2000), *Geometría Dinámica*. Proyecto EMAT. Secretaria de Educación Pública. México.

Van Hiele, P. PM. (1957). *El problema de la comprensión* (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (traducción al español de 1991).

Vigotsky. L.S. (1978). Mind in Society. The development of high her Psychological Processes. Harvard University Press. USA. pp. 86- 90.

Yábar, J. M. (2000). *El constructivismo en la práctica. La computadora en la enseñanza secundaria dentro de un enfoque constructivista del aprendizaje.* Ed. Grao Edición. España. pp. 133-142.

Wertsch, J. (1993), Voices of the Mind: A Sociocultural Approach Action, Harvester. London.

Propuesta didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica de forma integrada.

Cila Mola Reyes, Isabel Yordi González y María Lourdes Rodríguez González
Universidad de Camagüey. Cuba.
cmola@reduc.cmw.edu.cu iyordi@reduc.cmw.edu.cu mlord@reduc.cmw.edu.cu

RESUMEN

Este reporte trata sobre una investigación realizada en la Universidad de Camagüey que se planteó como objetivo la elaboración de un Programa Analítico de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica para la carrera de Ingeniería Mecánica que permitiera elevar la eficiencia del mismo para la solución de problemas y tareas docentes por parte de los estudiantes.

Los métodos empleados fueron tanto teóricos como empíricos, mediante ellos y a partir del problema considerado se constató que la concepción existente del Programa Analítico de la asignatura no es adecuado para asegurar el balance entre su nivel de generalización teórica y la solución de problemas con el consecuente desarrollo de habilidades prácticas profesionales e investigativas para garantizar el encargo social.

En la investigación se demostró que la articulación teórica y práctica empleando el enfoque sistémico y la teoría de la actividad, permitió dar base teórica a la integración de los temas del Álgebra Lineal y Geometría Analítica. Además se rediseñó el Programa de la asignatura y su aplicación contribuyó a elevar la eficiencia del proceso de enseñanza - aprendizaje de la misma.

INTRODUCCIÓN

A través de toda la historia, el hombre ha desarrollado la Ciencia como una actividad encaminada a la comprensión del mundo que le rodea, logro que utiliza para mejorar su propia existencia mediante el desarrollo de una tecnología adecuada, organizándose mejor socialmente en su propio provecho. La Matemática, como Ciencia representa el instrumento gnoseológico y metodológico más general y eficiente en la investigación de los fenómenos de cualquier Ciencia, por ello esta llamada a proporcionar los conocimientos y habilidades científico- técnico básicos generales como disciplina fundamental en la formación del ingeniero.

Es por ello que la escuela cubana ha experimentado una gran transformación respondiendo a las demandas de la vida, siendo necesario imprimirle a la enseñanza un carácter verdaderamente activo, ya que con ella la escuela como institución social, prepara al hombre a la luz del desarrollo que ha alcanzado la sociedad.

Sin embargo, con independencia de las intenciones que estuvieron presentes al momento de llevarse a cabo el perfeccionamiento de los programas de matemática en los Planes de Estudio para el logro de estos fines, según fuentes consultadas (Romero, 1997) y vivencias personales, aún subsisten una serie de dificultades relacionados con el diseño y ejecución de los programas de estudio.

DESARROLLO

Esta investigación partió de resultados constatados por diferentes investigadores en cuanto a la enseñanza de la Matemática, (Hernández, 1989; González, M, 1996; Mallo Rodríguez, C, 1991; Muñoz González, R., 1998). Se constató que la concepción actual del diseño del Programa Analítico de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica para la Ingeniería Mecánica no es, aún, adecuado para asegurar, el balance entre su nivel de generalización teórica y la solución de problemas con el consecuente desarrollo de habilidades prácticas profesionales e investigativas para garantizar el encargo social. Esto conduce a que no se exploten todas las potencialidades para incidir con certeza en los modos de actuación de esta profesión, ni en sus posibilidades educativas y desarrolladoras, pues no se engloba el aspecto epistemológico de la misma, en su carácter de ciencia, incorporada a una dimensión sociocultural de los contenidos curriculares proyectados en la profesión, ello ocasiona también que no se logre la adecuada correlación entre lo fundamental de la asignatura y lo esencial profesional. Tampoco se considera la Asignatura como un todo, y la necesaria interacción con el medio en el subsistema correspondiente.

Al tratar de acotar los aspectos aquí señalados, nos permitió considerar la posibilidad de buscar algunos elementos que favorezcan el diseño y organización conveniente de los contenidos de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica de forma tal que favorezca la preparación necesaria de los estudiantes para enfrentar la solución de los problemas de su profesión.

Metodología desarrollada

En esta investigación se estableció el siguiente diseño, considerándose como **problema científico**: La insuficiente preparación en los estudiantes de primer año de Ingeniería Mecánica en la Universidad de Camagüey para la solución de problemas y tareas docentes en la asignatura Álgebra lineal y Geometría Analítica.

Teniendo como **objetivo**: La elaboración de un Programa Analítico que posibilite organizar el proceso de enseñanza - aprendizaje del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica que permita elevar la eficiencia del mismo para la solución de problemas y tareas docentes por parte de los estudiantes.

Por lo que se plantea **accionar en el campo**: organización del contenido del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica

Estando este campo de acción dentro del **objeto de estudio** proceso de enseñanza - aprendizaje del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica.

Al plantearnos las siguientes interrogantes, cómo organizar el contenido del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica?, cómo lograr que esa organización favorezca al proceso de enseñanza aprendizaje de esa asignatura?, surgió la siguiente **hipótesis**: Si se elabora el Programa Analítico de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica sobre la base del Enfoque Sistémico y la Teoría de la Actividad de Leontiev y seguidores, se contribuye a que la organización de los contenidos en la asignatura propenda a disminuir la insuficiente preparación de los estudiantes de primer año de Ingeniería Mecánica en la Universidad de Camagüey para la solución de problemas y tareas docentes.

Declaramos como **variables independientes**: El Programa Analítico de la asignatura y la lógica de la Ciencia.

Se entiende por "Programa Analítico": a un tipo de programa docente donde se establecen algunos aspectos relacionados con la organización del proceso de enseñanza – aprendizaje.

Entendiéndose por "Lógica de la ciencia": El sistema general del conocimiento humano sobre dicha Ciencia, en la cual se refleja su objeto de estudio y las concepciones generales sobre el mundo y su conocimiento por el hombre.

Declaramos como **variable dependiente**:

Promoción y calidad en los resultados docentes de los estudiantes de Ingeniería Mecánica de primer año en la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica.

Declaramos como **indicadores** para esta variable: Flexibilidad e Integridad.

Flexibilidad: Entendida en la práctica como la posibilidad que tiene el alumno luego de haber adquirido la habilidad que responde al objetivo propuesto de mover el conocimiento ya localizado en su zona de desarrollo actual y enfrentar luego de dominar varias vías de solución aquella que considera más conveniente utilizar.

Integridad: Vista como la posibilidad del alumno de evocar su zona de desarrollo actual conocimientos ya estructurados allí y aplicarlos a los nuevos asimilados estableciendo conexiones y aplicaciones para facilitar la vía de solución del ejercicio.

Las **tareas de investigación** consistieron en:

1- Caracterización del estado actual del problema de investigación mediante:

   a. Estudio de los lineamientos que se manifiestan en el perfeccionamiento de la enseñanza aprendizaje de la asignatura elaborados por el Ministerio de Educación Superior Cubano, para establecer las características fundamentales de los mismos a nivel nacional en diferentes períodos históricos, basado en resoluciones ministeriales y reglamentos para el trabajo docente metodológico de la educación superior.

   b. Análisis de pruebas parciales y finales para diagnosticar la situación problémica.

2- Revisión y análisis de literatura, con vista a establecer el marco teórico, sobre:

   a. los fundamentos filosóficos y epistemológicos de la Matemática y su enseñanza

   b. los presupuestos teóricos del enfoque histórico cultural, la teoría de la asimilación, fundamentalmente los atenuantes a la organización del conocimiento, desarrollo de habilidades y la resolución de problemas.

   c. las tendencias de la enseñanza en general y de la Matemática en particular, en el nivel superior en Cuba y en el mundo.

3. El análisis con un enfoque de sistema de la asignatura precisando sus elementos componentes.

4. Elaboración de indicaciones metodológicas dirigidas al profesor para la organización sistémica de la asignatura.

5. Diseño del sistema de tareas que se proponen para el desarrollo de habilidades en el proceso de resolución de problemas.

6. Confección del Programa Analítico de la asignatura.

Con el fin de dar solución a las tareas planteadas y de verificar en la práctica la hipótesis, se emplearon como **métodos de investigación** los siguientes:

Teóricos: Análisis - Síntesis, Histórico - Lógico, Concreción - Abstracción, Inducción – Deducción.

El método histórico al estudiar y analizar la evolución del pensamiento en torno a la estructuración del conocimiento y la resolución de problemas, así como las investigaciones pedagógicas anteriores realizadas en Cuba relacionadas con estos tópicos. Además, se tuvieron en cuenta las tendencias principales de la Matemática Educativa en el mundo y el desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas Superiores en Ciencias Técnicas en Cuba, en los últimos años.

Los métodos lógicos, inductivo- deductivo, tanto en la búsqueda de regularidades entre los presupuestos de la teoría de la asimilación, la teoría de la actividad, referentes a la estructuración del conocimiento y la resolución de problemas, como en la búsqueda de regularidades en el contenido matemático objeto de investigación, que permitan concebir una asignatura a partir de la utilización sistémica de problemas.

Empíricos: Observación, La entrevista y análisis documental.

Se revisaron documentos de organización, planificación, ejecución y evaluación del proceso de enseñanza aprendizaje relacionados con la formación y desarrollo de habilidades de las asignaturas que conforman la disciplina, además de tomarse en cuenta las reuniones y actividades metodológicas realizadas en el departamento de Matemática de la Universidad de Camagüey durante más de 5 años.

De todo el análisis documental se concluyó que de modo general no se explota en forma optima la autoevaluación, no se ofrece un tratamiento diferenciado a los estudiantes en las guías de auto preparación, no existe la sistematicidad necesaria entre las distintas actividades, pues se organizan y ejecutan de forma aislada, y hay una pobre o nula ejercitación relacionada con problemas geométricos.

Las **bases teóricas** de la investigación están sustentadas en:

Metodología del Materialismo Dialéctico, Psicología y Pedagogía del Enfoque Histórico - Cultural y la teoría de la actividad, la dialéctica materialista y la Pedagogía de la Educación Superior Cubana.

Resultados parciales de la investigación están dados por:

- La organización de la asignatura.
- La determinación de cada uno de los temas en que se estructura la asignatura y sus elementos didácticos fundamentales.
- La elaboración de una propuesta didáctica formada por un conjunto de indicaciones y recomendaciones metodológicas dirigidas al profesor que ejecuta el proceso de enseñanza – aprendizaje del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica.
- El diseño de un sistema de tareas docentes que tiene en cuenta la interrelación de los contenidos, tomando como base el tema.
- La conformación del Programa Analítico de la asignatura.
- Otro resultado de esta investigación es que se conformó el objeto de estudio de la asignatura.

Por ser este último aspecto novedoso en la literatura se explicará en forma sintetizada, se sabe que: la **Geometría** y el **Álgebra** como ramas de la ciencia Matemática, adoptan sus formas particulares, individuales de estas relaciones cuantitativas y formas espaciales, distinguiéndose por la singularidad de sus métodos y por lo que trata en esencia cada rama de la misma.

El objeto de estudio de la **Geometría** como ciencia es las formas y relaciones espaciales del mundo real. En este objeto de estudio lo que identifica a cada rama de la Geometría son los tipos de relaciones que se establecen por tanto:

En el objeto de estudio de la **Geometría Analítica** esas relaciones se manifiestan haciendo un estudio de los modelos espaciales mediante sus representaciones y por medio de sus ecuaciones.

En el **Álgebra Lineal** esas relaciones se manifiestan al hacer un estudio de los espacios vectoriales desde un punto de vista axiomático.

Es decir, todas tienen igual finalidad: el estudio de la forma de los objetos que nos rodea y las relaciones que existen entre los objetos, la formulación de las correspondientes leyes y su aplicación a la solución de los problemas.

De un estudio detallado de los objetos de estudios de cada rama se conformó el objeto de estudio de la asignatura:

El estudio de los espacios vectoriales y de los cuerpos geométricos desde el punto de vista axiomático y analítico, así como sus relaciones internas y las relaciones entre ambas.

Selección de la muestra y recopilación de los datos.

El estudio fue realizado a los alumnos que iniciaron sus estudios profesionales en la carrera de Ingeniería Mecánica procedentes de los centros de educación media superior del sistema de enseñanza cubano, clasificados en estudiantes de preuniversitario de ciencias exactas con una formación matemática superior y egresados de los restantes centros de enseñanza media superior.

Antecedentes

A finales del curso 1999 – 2000 se constató que el contenido del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica estaba distribuido en los tres semestres donde se impartía el cálculo diferencial e integral de una y varias variables, e introducidos en el momento que le hacia falta al estudiante conocerlos para poder asimilar el nuevo contenido del cálculo, no se respetaba la lógica de ciencia, ni de la asignatura.

En el curso 2000- 2001 se conformó la primera versión de la variante metodológica partiendo de considerar como resultado de investigaciones anteriores a la Combinación Lineal (Hernández, 1994), como célula generadora del contenido, para la cual se tuvo en cuenta los elementos del analítico de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica.

En el curso 2001-2002 se aplicó y perfeccionó teniendo en cuenta las deficiencias detectadas en el curso anterior haciéndose nuevos ajustes al plan calendario.

CONCLUSIONES

1. En el trabajo quedó demostrado que la articulación teoría y practica empleando el enfoque sistémico y la teoría de la actividad, permiten dar base teórica a la integración de los temas del Álgebra Lineal y Geometría Analítica, constituyendo un aporte metodológico en la enseñanza de la misma.
2. Desde el punto de vista práctico hemos rediseñado y aplicado el Programa de la Asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica en la Carrera de Ingeniería Mecánica en

la Universidad de Camagüey, que ha contribuido a elevar la eficiencia del proceso de enseñanza aprendizaje de la misma.

3. En esta investigación se ha demostrado la necesidad de continuar trabajando en el perfeccionamiento del proceso de enseñanza – aprendizaje del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarez de Zayas, C. (1990). *Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente educativo la Educación Superior Cubana*. La Habana. ENPES.

Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Editorial Pueblo y Educación.

Bujam, M. (1984). “Algunas consideraciones sobre el proceso de integración de los conocimientos de los estudiantes”. Revista *Varona* No. 13. Julio – Diciembre. La Habana.

Rezhetova, Z. A. (1971). “Organización de la orientación en la estructura sistémica del objeto de estudio y su importancia en la solución de tareas prácticas”. *Documentos del IV Congreso Nacional de la Sociedad de Psicólogos*. Tibilisi.

Rodríguez, M. L. (1999). *El modelo holístico para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica y Descriptiva*. Tesis en opción al título de Master en educación Matemática. Universidad Camagüey.

Romero, J. (1997). *La organización de los contenidos de la asignatura Química Farmacia II en la carrera de Ciencias Farmacéuticas*. Tesis en opción al titulo de Master en Educación Superior, Universidad de Camagüey, 1997

Yordi, I. (1999). *Solución de problemas con cálculos y una propuesta didáctica en el Algebra Lineal*. Tesis de Maestría. Universidad de Camagüey.

UNA PROPUESTA DE SECUENCIACIÓN DEL SISTEMA DE CONOCIMIENTOS Y EL DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA UN APRENDIZAJE COOPERATIVO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Rogelio Acosta González
Centro Universitario Las Tunas, Cuba
rpacostaglez@yahoo.com.mx

Herminia Hernández Fernández
CEPES, Universidad de La Habana, Cuba
hthf1939@yahoo.com

RESUMEN

Partiendo de la relevancia del Cálculo Diferencial como parte de la formación matemática en una cantidad considerable de carreras universitarias, se exponen razones que aconsejan una secuenciación de su sistema de conocimientos, esencialmente diferente a la que se sigue en programas y textos, que facilite la concepción de actividades para el trabajo en grupos de aprendizaje cooperativo, de manera que el estudiante sea sujeto activo de su aprendizaje. Para el logro de tales propósitos se aplica un sistema de principios, revelado por los autores, fundamentado en presupuestos de la Escuela Histórico Cultural y la Teoría de la Actividad, así como en los principios didácticos. También se toman en cuenta la dinámica de las interacciones grupales y la lógica interna del Cálculo Diferencial. Es parte del trabajo un ejemplo que ilustra la propuesta.

INTRODUCCIÓN

El Cálculo Diferencial de Funciones Reales de una Variable Real —que en lo adelante se designa por CD— es un componente esencial de la formación matemática que está prevista en una considerable cantidad de carreras que se cursan en las universidades. La relevancia del CD obedece a dos razones fundamentales. De una parte, es el medio mediante el cual se pueden establecer las principales características de una función real de una variable real, de manera que cuando en una disciplina a la que tributa la matemática se modela determinado proceso o fenómeno mediante una de tales funciones, entonces la información que aporta la aplicación del CD es, a fin de cuentas, relativa al fenómeno o proceso de que se trate. Por otra parte, el proceso de modelación matemática puede requerir de técnicas y herramientas matemáticas que no son propias del CD, pero que lo necesitan como requisito ineludible para desarrollarlas.

De los argumentos anteriores se infieren a su vez dos conclusiones: la primera es que según sea la calidad de los aprendizajes de los estudiantes sobre los contenidos del CD así será, en general, su desempeño en otras ramas de la Matemática con él vinculadas. La segunda es la pertinencia de toda propuesta dirigida a facilitar el aprendizaje de los contenidos del CD. En este sentido, y como se reporta en numerosos estudios (Jiménez, 2000; Delgado 1999), subsisten insuficiencias en la calidad de los aprendizajes sobre el CD que resultan del proceso de enseñanza–aprendizaje que al respecto se lleva a cabo, entre las que se pueden señalar las siguientes:

- Predominio de una lógica expositiva y una enseñanza mecanicista, que privilegia al profesor como transmisor de información y donde se reserva al alumno el papel de receptor de verdades preestablecidas, «listas para el consumo».
- Derivada de la anterior, está la necesidad de un papel más activo del estudiante, así como desarrollar su creatividad y responsabilidad individual y ante el colectivo.
- Deficiencias en la estructuración del sistema de conocimientos, en ocasiones como secuela de la organización y ordenamiento que se sigue en los textos correspondientes.
- Bajo aprovechamiento y poca solidez del aprendizaje.

- Pobre transferencia y aplicación de lo aprendido a nuevas situaciones.
- Bajo desarrollo de la capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.

Los autores, al tiempo que reconocen la contribución que a la superación de estas y otras insuficiencias se sigue de las propuestas de muchos investigadores, así como de la práctica concreta de los profesores universitarios de matemáticas, sostienen que tres cuestiones relevantes al proceso de enseñanza–aprendizaje no han sido tratadas con el grado requerido de profundidad y sistematización:

1. Muchos de estos trabajos se sostienen teórica y metodológicamente sobre presupuestos del enfoque histórico cultural y de la actividad y, en consecuencia, en ellos se propugna, tanto de forma explícita como implícita, la necesidad de fomentar y propiciar la participación activa del estudiante en su propio aprendizaje. En algunas de las propuestas se concibe la realización de actividades para el logro de este objetivo, como es el desarrollo de determinadas tareas con el apoyo de técnicas participativas y el trabajo en grupos. Sin embargo, no se profundiza en el contenido de la actividad como principio estructurante y organizador que determina la existencia real del grupo, ni se aprovechan las potencialidades de ese sujeto activo individual en su interacción con sus compañeros, de manera que no se revela y utiliza el sujeto grupal que se configura en la propia dinámica del trabajo conjunto.
2. No se propicia que el subsistema de conocimientos que en un momento determinado se ha conformado, junto con el papel que tradicionalmente se le asigna como prerrequisito para introducir los nuevos conocimientos previstos, también se revele a los estudiantes como **anticipador** de ellos, en el sentido de reflejar su carácter insuficiente para la consideración, planteamiento y resolución con sus recursos de nuevos problemas del objeto de que se trate, y la consecuente necesidad de nuevos contenidos que permitan el planteamiento y resolución de esos problemas.
3. No se concibe la secuenciación del sistema de conocimientos de manera que de ella se facilite la concepción de actividades para la formación de zonas de desarrollo próximo, tanto individuales como grupales, en las que cada vez se ubica el nuevo contenido objeto de aprendizaje.

Los autores de este trabajo revelaron y fundamentaron, desde presupuestos de la escuela histórico cultural y la teoría de la actividad, un sistema de principios, ya utilizados para concebir hojas de trabajo y otros medios de orientación sobre Cálculo Integral de Funciones Reales de una Variable Real (Acosta y Hernández, 2002), para el trabajo en grupos de aprendizaje cooperativo. En esta ocasión se aplican estos principios, tanto para fundamentar la secuenciación del sistema de conocimientos, como en la concepción de actividades para el aprendizaje de conceptos, teoremas y procedimientos del CD. Se presenta un ejemplo en el que se ilustra la dinámica de la aplicación de este sistema.

Necesidad de una secuenciación del sistema de conocimientos del CD que facilite la concepción de actividades en las que el estudiante sea sujeto activo de su aprendizaje

Como regularidad, en los cursos universitarios donde se desarrolla el CD, inicialmente está previsto considerar unos preliminares sobre funciones, que tienen el propósito de activar, sistematizar y complementar resultados que trae el estudiante de niveles precedentes de enseñanza, para luego tratar los aspectos específicos sobre límite, continuidad y derivación. Para la secuenciación del sistema de conocimientos y la dirección del proceso de enseñanza–

aprendizaje del CD se han utilizado distintas consideraciones.

No obstante, en la práctica los programas analíticos no han podido obviar el ordenamiento que usualmente se sigue en los textos disponibles en los que se trata esta materia. La tendencia predominante, que a nuestro juicio constituye la principal dificultad, es que en la parte inicial sobre funciones, tanto en programas como en textos, no se agotan todas las potencialidades que a nivel elemental se pueden aprovechar para obtener información sobre una función cualquiera, porque muchos conceptos elementales, en los que no intervienen resultados que se siguen de procesos de paso al límite, se introducen y formalizan junto con los de límite, continuidad y derivada. De igual forma, resultados que son atinentes al límite y la continuidad se tratan simultáneamente con la derivada y sus aplicaciones.

Como ejemplos de los primeros se tienen los conceptos de función monótona, extremos, sentido de la concavidad y análisis de la simetría, entre otros. Entre los segundos se puede señalar el concepto de asíntota y los métodos para determinarlas, que se tratan al considerar las aplicaciones de la derivada para la construcción de gráficas y no como partes integrantes del límite, la continuidad y sus interpretaciones.

Un aspecto de esta cuestión de singular importancia es el hecho de que al aprendizaje de determinados conocimientos matemáticos les son inherentes elevados grados de dificultad. En el caso que se está tratando, hay suficiente acuerdo, entre investigadores en Educación Matemática y profesores de esta materia, que el concepto de límite, y los que se expresan a través de él (derivada de una función en un punto, serie, integral definida, entre otros), son difíciles para los estudiantes[1]. De esta consideración se sigue que tratarlos junto con otros que pudieran introducirse con antelación incorpora una dificultad añadida al proceso de enseñanza–aprendizaje que se pudiera obviar, de manera que los recursos cognitivos de que disponen los estudiantes no tengan que ser compartidos.

De igual forma, la situación que así se configura no propicia la concepción de actividades en las que los estudiantes puedan realizar inferencias y formular conjeturas relativas a conceptos no tratados, como tampoco se facilita que los estudiantes tomen conciencia de la necesidad de nuevos recursos, ni dispongan de resultados e información que sirvan como indicadores para el control y una eventual regulación.

Principios para la secuenciación del sistema de conocimientos del CD y la concepción de actividades que propicien el trabajo grupal y el carácter activo de los estudiantes

Una secuenciación del sistema de conocimientos del CD, que contribuye a disminuir las dificultades que se han señalado, se sigue de la aplicación de dos principios fundamentales:

P1 Principio de agotar potencialidades

Este principio está dirigido a agotar al máximo las posibilidades que sobre un objeto de conocimiento sean asequibles y pertinentes al estudiante en una relación espacio–temporal determinada. Asimismo, propicia que en el aquí y ahora se asimile ese objeto que se sabe necesario retomar en otro momento.

P2 Principio de aislar complejidades

Con este principio, cuya aplicación en un contexto determinado es posible en relación

[1] No sólo a estudiantes. Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII no pudieron fundamentar el Análisis infinitesimal porque no fueron capaces de formular un concepto coherente y riguroso del límite funcional.

dialéctica con el anterior, se expresa la necesidad de no considerar en paralelo con objetos de conocimiento de elevada complejidad otros que sea posible tratar con antelación.

Los dos principios enunciados anteriormente se complementan con otros cuatro para la concepción de actividades que fomentan la creación de zonas de desarrollo potencial, que son inicialmente individuales y luego grupales (Castellanos, 1999). Son los siguientes:

P3 Principio de activación de conocimientos

Con este principio se propicia que el estudiante recupere de manera individual, o como resultado de su interacción con sus compañeros de grupo, la información ya instalada, relacionada con el objeto de aprendizaje que se esté considerando. Se concreta por medio de preguntas dirigidas a esa búsqueda, preguntas que implican una reflexión consciente y que constituyen una ayuda en tanto presuponen una orientación de esa actividad. Se puede concretar también a través de ejemplos o resultar de la aplicación del siguiente principio.

P4 Principio de recurrencia

Este principio expresa la intención y el hecho de recurrir reiteradamente a un determinado objeto o resultado matemático —un concepto, un teorema o propiedad, una interpretación, un ejemplo— lo que se traduce en la práctica en el hecho de que permite recuperar, con poco gasto de recursos cognitivos, información ya instalada.

P5 Principio de promoción y resolución de conflictos

Este principio está dirigido a propiciar que el estudiante se haga consciente, por percatarse por sí mismo o con ayuda, de que son insuficientes los recursos de que dispone para resolver un problema y de la necesidad de búsqueda y aprendizaje de otros conocimientos para ello. El conflicto motiva el aprendizaje, obliga a plantear alternativas de solución y a tomar partido técnico, propicia la formulación de conjeturas, el argumentar las ideas y a convencer al otro; en definitiva, a resolverlo como sujeto individual en la interacción social.

P6 Principio de control y regulación

El control, como uno de los componentes fundamentales de la actividad humana; en particular, de la actividad de aprendizaje en su sentido de enriquecimiento y transformación del conocimiento, exige de la regulación como elemento de intervención, de corrección. Este principio se concreta en la práctica cuando de las actividades de aprendizaje en las que se involucra el estudiante, como parte integrante de un pequeño grupo cooperativo, se hacen explícitos resultados que se constituyen en indicadores que propician el control y la eventual regulación.

Un ejemplo que revela la dinámica del sistema de principios

El ejemplo siguiente sirve al propósito de revelar la presencia y la dinámica del sistema de principios. Para mayor precisión, se le llamará recurrencia cero[2] (**R0**) a la ocasión en la que por primera vez se considera el objeto matemático de que se trate. Las siguientes ocasiones en las que se recurra a ese objeto se denotarán por **R1**, **R2** y así sucesivamente.

R0: La función definida por la expresión $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ se introduce en los preliminares

[2] Esta es la recurrencia cero a los efectos del ejemplo que se está considerando. Las funciones que se dividen para formar la expresión analítica se podían haber considerado con antelación.

sobre funciones. Las características de esta función racional que se pueden determinar a nivel elemental son las siguientes:

Su **dominio** es el conjunto de los números reales *R*: $D_f = R$, de donde se infiere que su gráfica tiene intersección con el eje de las *y*: el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$. El único cero de la función es el número $x = 0$, y el punto que él determina sobre el plano de coordenadas es el propio origen $(0, 0)$, que así resulta la única intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas. Los valores de la función son positivos en el intervalo $(0, +\infty)$ y negativos en $(-\infty, 0)$. La función es **impar** ya que para todo *x* real se cumple que $f(-x) = -f(x)$. Notar que con este resultado se tiene un indicador para el control y eventual regulación, ya que toda función impar definida en $x = 0$ se anula en este número. Recíprocamente, si sucede que $f(0) \neq 0$, entonces la función no puede ser impar.

Observación. Llevando esta información a un sistema de coordenadas cartesianas en el plano se pueden plantear otras conclusiones. En efecto, se **infiere** el cumplimiento, para todo $x > 0$, de la desigualdad $f(-x) < f(0) < f(x)$, que indica que la función es **creciente** en el propio $x = 0$ y en todo un intervalo al que pertenece este número, cuyos **extremos** son opuestos (por la simetría), pero que no se pueden determinar a nivel elemental. Tampoco se puede establecer cómo se comporta la función en los puntos frontera del dominio. En este punto se promueve un conflicto, lo que se facilita a partir de interrogantes concebidas para orientar el trabajo conjunto cooperativo. En calidad de tales preguntas pueden tomarse las siguientes:

1. ¿Puede el valor $f(0) = 0$ ser un extremo de la función? ¿Es creciente la función en $x = 0$? Fundamenta tus respuestas.
2. ¿Puedes extraer alguna conclusión sobre la existencia de extremos para esta función?
3. Completa la tabla siguiente con los valores de la función y conjetura lo que sucede con los mismos cuando los valores positivos del argumento *x* se toman cada vez mayores.

x	10	20	30	40	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$f(x)$									

Nota: Utiliza una computadora para la realización de los cálculos necesarios.

4. ¿Cómo se comportan los valores de la función cuando los valores negativos del argumento *x* se toman cada vez menores (mayores en valor absoluto)?
5. Considera nuevamente la segunda interrogante a la luz de la nueva información que se sigue de los análisis realizados para responder las preguntas tercera y cuarta.

R1: Se recurre a la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ al tratar el límite y la continuidad de funciones reales de una variable real. La función trae consigo todas las características ya establecidas.

Por cuanto es una **función elemental**, es **continua** en su dominio $D_f = R$, de manera que para todo $x_0 \in R$ se determina de forma trivial el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{4x}{x^2+1}$ luego de evaluar en el punto x_0. Los valores calculados en R0 se utilizan para inferir que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x}{x^2+1} = 0$, que a su vez, junto con otros similares, permite conjeturar un resultado de más generalidad, atinente al límite en el infinito de una función racional cuyo numerador sea de grado inferior al del denominador, momento que es propicio para tratar el concepto de asíntota, su interpretación geométrica y los distintos tipos de asíntotas. La posición de la asíntota con respecto a la gráfica se puede inferir del signo de la función, ya establecido en R0.

Notar que la cuestión relativa a la existencia de extremos se enfrenta ahora con más recursos al integrar en el análisis los elementos obtenidos y considerar una representación geométrica. Es un hecho que los estudiantes ya pueden inferir la existencia de un valor máximo en algún número positivo y que este máximo es positivo, así como un mínimo que es negativo y que se alcanza en un número negativo (opuesto al punto de máximo, lo que se sigue de la imparidad). El conflicto ahora lo provoca la imposibilidad de determinar sin la derivada las coordenadas de los extremos.

R2: Se recurre a la función $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$ al tratar la derivada de un cociente, que es una función par, hecho que se infiere de ser impar la función. Los ceros de la derivada –1 y 1 son precisamente los puntos de extremo y este hecho se puede explorar comparando las imágenes por la función en ellos con valores en una vecindad de cada uno, para luego pasar a formalizar las condiciones necesaria y suficiente de extremo. Con la información que aquí se aporta se formulan conclusiones relativas a la concavidad y puntos de inflexión, para lo que se requiere considerar la derivada segunda en una nueva iteración.

Conclusiones

La relevancia del CD a la formación matemática de muchos profesionales universitarios requiere de una dirección del proceso de enseñanza–aprendizaje que propicie que aumente la calidad de su aprendizaje, a través de una organización del sistema de conocimientos y del diseño de actividades que favorezcan la actividad del estudiante como integrante de un grupo de aprendizaje cooperativo. La aplicación de un sistema de principios revelados y fundamentados por los autores constituye una propuesta que marca una diferencia esencial con respecto al tratamiento que usualmente se sigue con el CD en las aulas universitarias. Esta propuesta contribuye al logro de los propósitos enunciados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, R., y Hernández, H., (2002). Principios para la Concepción de Medios para un Aprendizaje Cooperativo del Cálculo Integral. CEPES, Universidad de la Habana, Cuba.

Brousseau, G., (2000). Research in Mathematics Education: Observation and ... Mathematics. En: *Proceedings of European Research in Mathematics Education*. Bordeaux, France.

Castellanos, A. V., (1999). *El Sujeto Grupal en la Actividad de Aprendizaje: Una Propuesta Teórica*. Tesis doctoral no publicada. CEPES, Universidad de La Habana, Cuba.

De Guzmán, M., (1996). Matemática. En: *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. *OEI* (Organización de Estados Iberoamericanos). España.

Delgado, J. R. (1999). *La Enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. Dos elementos para lograr su eficacia: la estructuración sistémica de los contenidos de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas.* Tesis doctoral no publicada. CUJAE, La Habana, Cuba.

Dubinsky, E., (1995). A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics. *Math. Note Number 37. The Mathematical Association of America*. USA.

Jhonson, D. and Jhonson, R., (1998). Cooperative Learning and Social Interdependence Theory. En: *Social Phychological Aplications to Social Issues*. USA.

Jiménez, M. H., (2000). *Propuesta para Mejorar la Referencia y Aplicación de los Saberes del Análisis Matemático en la Formación de Profesores.* Tesis doctoral no publicada. ISP Enrique José Varona, La Habana, Cuba.

Karpov, Y. V. and Haywood, H. C., (1998, January). Two Ways to Elaborate Vygotsky's Concept of Mediation: Implications for Instruction. *American Psychologist*. USA.

Wells, G. (1999). The Zone of Proximal Development and its Implications for Learning and Teaching. En *Dialogic inquiry*: *Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education*. New York, Cambridge University Press, USA.

LA SELECCIÓN DE PROBLEMAS EN TEMAS AVANZADOS DE MATEMÁTICAS PARA SU ENSEÑANZA EN CIENCIAS TÉCNICAS.

Rosa Alicia Vázquez Cedeño y Milagros Gutiérrez Álvarez.
Facultad de Informática, Universidad de Camaguey, Cuba.
rosaaliciav@yahoo.com.mx : milagu@reduc.cmw.edu.cu

RESUMEN:

Partiendo de considerar la enseñanza de la matemática que tiene como fundamentos los problemas considerados como medio, objeto y propósito; y de las dificultades que se advierten en los maestros para usar estos, dada una correcta selección que sea completa, científica y adecuada, y que contribuya a la formación del pensamiento del alumno.

Se determinan los distintos tipos de problemas que deben aparecer en la enseñanza de manera que se desarrolle adecuadamente la orientación del pensamiento, ejecución de métodos, aplicación de los conocimientos y la conceptualización a través de los contenidos de la disciplina. Todo lo cual es aplicado a temas de mayor grado de dificultad por su profundidad teórica y práctica y que son fundamentales en la formación del Ingeniero.

Se indican las orientaciones metodológicas para la selección de estos problemas y su utilización en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la asignatura; se ejemplifica en temas tales como: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y en Derivadas Parciales, Variable Compleja, Transformadas, etc. Así como la interrelación para los distintos tipos de solución.

Se debe tener en consideración del dominio que se necesita del alumno en cuanto al material matemático estudiado antes en los distintos niveles.

INTRODUCCIÓN:

En la actualidad la Escuela Cubana de Matemática transita por el camino fundamental de la resolución de problemas en concordancia con las aplicaciones y el desarrollo del pensamiento matemático de forma dinámica, activa e interrelacionada.

Se tiene en el centro de la atención el problema, pero no como el único aspecto importante a desarrollar.

Ocupa por tanto un papel preponderante en lo que a la investigación pedagógica corresponde profundizar en aquellos problemas que dentro de cada asignatura pueden contribuir al desarrollo y formación del pensamiento del alumno. Se ha privilegiado en este sentido temas que en general corresponden a lo que puede llamarse la primera etapa en la formación Matemática del futuro egresado.

La resolución de problemas como centro de la enseñanza de la Matemática en la actualidad.

En la matemática los problemas actúan como medio y como objeto, constituyendo la resolución de problema un método y a la vez un propósito de la enseñanza, y que constituye el principio básico de desarrollo de la asignatura. No obstante en general los aspectos teóricos y prácticos para poner en función este supuesto ha recaído en determinados temas con mayor frecuencia, quedando un tanto relegado aquellos cuyo grado de dificultad es mayor y que requieren de un mayor desempeño por parte de los maestros tanto en la profundidad de conocimientos de la ciencia como en la maestría pedagógica necesaria, para formar el concepto sin deformaciones a un nivel más elemental.

Se trabaja más en cuanto a la orientación sobre la base del contenido y no del pensamiento.

No puede verse la actividad de resolución de problemas, desde el punto de vista de su propia realización sino en concatenación con todo el desarrollo del PDE desde su preparación por el maestro, hasta la autopreparación del alumno.

Luego una disciplina que pretenda el trabajo no sólo sobre la resolución o no de problemas sino sobre, la base del desarrollo de independencia y autonomía en el estudiante, necesita apoyarse de todo el proceso destacando por su parte:

- La adecuada interrelación entre los contenidos de la propia disciplina.
- El desarrollo de la autopreparación y la elaboración de los soportes materiales que, ayudan a su ejecución como los libros de textos.
- El desarrollo de la resolución de problemas y de aquellas habilidades que estructuralmente entran en ella.

Por esto el problema de investigación al que esta dedicado este trabajo es:

> *¿Cómo conformar una adecuada selección de problemas de manera que se contribuya, en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática, a la formación de la Habilidad General de Resolución de Problemas para temas avanzados de la misma necesarios en la formación del ingeniero?. Con el objetivo de conformar un grupo de indicaciones metodológicas que permitan orientar al profesor de Matemáticas en el uso de distintos tipos de problemas de manera que se contribuya al incremento de la asimilación y el desarrollo del pensamiento.*

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El catalogar la resolución de problemas, como “la habilidad general de resolución de problemas”, se precisa considerar la misma constituida por un conjunto importante de habilidades, que pueden conformarse en un sistema con objetivo determinado y que se interrelacionan.

Habilidades propias del contenido, en relación con la propia actividad, de la metacognición y las del pensamiento lógico.

Son por destacar las que juegan el rol más importante en el plano ejecutor de la resolución de problemas.

Luego se precisa que para el desarrollo de esta macrohabilidad se ejecute la enseñanza de manera que se formen y desarrollen sus habilidades componentes. Esto implica la necesidad de hacer una adecuada selección de problemas que se utilizarán en el transcurso del Proceso de Enseñanza Aprendizaje(PEA) de la Matemática.

Por otro lado al considerar en el proceso de conocimiento la actividad de Resolución de Problemas al analizar la relación sujeto - objeto ocurre que, no se va a las consideraciones necesarias en cuanto a las particularidades del objeto. Lo que puede ser producto de una inadecuada conducción del PEA de la asignatura como resultado de no utilizar los problemas que posibiliten el desarrollo de las distintas habilidades componentes al no tener en cuenta todo el sistema en la relación sujeto - objeto.

Casi siempre se considera el objeto desde el punto de vista general, no se hace consideración del sistema objetal en el cual están el objeto y su contenido, así como las habilidades y conocimientos para la asimilación de dicho objeto.

Al no tenerse en cuenta las particularidades del objeto, y por consiguiente las habilidades específicas que entran en la actividad, se soslaya de los estudios el método privilegiándose la ejecución y no la orientación real de la actividad.

En el proceso docente se conoce que este es un proceso en cuyo contenido hay un sistema de habilidades, y no éstas aisladas, y que las mismas entran en la actividad acorde a un método en la relación sujeto – objeto.

Si se va a la habilidad específica sin tener en cuenta el método casi nunca podrá llegarse a la invariante.

Si por otra parte se va a la invariante sin tener en cuenta los elementos del objeto que lo particularizan, y que son necesarios para su asimilación, entonces se entra al objeto con la invariante como conocimientos, y se dejan fuera otras habilidades de entre las cuales pueden estar habilidades generales y básicas o conocimientos básicos y las habilidades lógicas. Se privilegia el objeto dentro del sistema objetal, y por tanto no se tiene las condiciones para su asimilación (ver esquema 1).

Luego para el desarrollo de esta habilidad de Resolución de Problemas se precisan problemas que posibiliten: la orientación del pensamiento; la ejecución de métodos; la aplicación de los conocimientos dentro de la matemática y en otras disciplinas y la conceptualización.

La selección de problemas para el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Indicaciones y ejemplos.

Problemas para la orientación del pensamiento.

Según Vázquez(1999) se ha logrado demostrar el carácter invariante de las habilidades de identificación y clasificación que unido, a la determinación de acciones esenciales conforman una base orientadora de la acción(B.O.A.), para la orientación en la ejecución de las acciones en el pensamiento, lo que resulta básico para la formación de los conceptos, y por tanto el desarrollo de dichas habilidades está en la base para la resolución de los problemas y tareas docentes.

Por otro lado, del desarrollo de estas habilidades que conforman la B.O.A, se fundamentan y relacionan las restantes habilidades y procedimientos para llegar al concepto.

Las indicaciones fundamentales de la metodología dirigida a lograr un proceso de enseñanza, que contribuya a desarrollar el pensamiento sobre la base de estas acciones quedan compuestas por:

- Dirigir el trabajo en las actividades docentes sobre las habilidades expuestas en la BOA.

- Desarrollar problemas y tareas para el trabajo con las habilidades en la BOA separadamente seleccionando los mismos con respuesta negativa, positivas y de no decisión.

Esto a su vez constituyen las indicaciones fundamentales para los problemas y tareas docentes que contribuyen al desarrollo de la orientación

Un ejemplo lo constituye en Variable Compleja al considerar la invariante de la asignatura, que se denomina “relación fundamental”, como:

$F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Tomando como base esta relación, se logran vincular estos conceptos con los ya conocidos en variable real: funciones elementales, límites, continuidad, derivadas, integrales y series, lo que propicia el trabajo con las habilidades de determinar acciones esenciales, clasificación, identificación, generalización y llegar a conformar los nuevos conceptos.

Otro ejemplo es en integrales de Funciones de una Variable Compleja. Para su cálculo el trabajo con las acciones esenciales: Análisis del integrando y de la región de integración.

Basado en estas acciones esenciales se asienta la identificación y clasificación y determina el enfoque para la integración en variable real.

Problemas para la ejecución y aplicación de los conocimientos dentro de la matemática y en otras disciplinas.

Estos son de manera indiscutible los que la generalidad de los docentes mas utilizan en su quehacer de la enseñanza. No obstante se precisa tomar en cuenta:

- La variedad de problemas y tareas a utilizar.
- La verificación de condiciones para la aplicación de los métodos.
- La interpretación de soluciones.
- Destacar la heurística empleada, y tomar en cuenta el uso de distintos procedimientos.
- Usar la modelación de manera creativa, situando al alumno ante situaciones posibles de ubicar en lo estudiado.

Por ejemplo en el tema de Ecuaciones de Ecuaciones Diferenciales no basta con tratar la solución de las mismas y pedir la aplicación del método si no se usa, una vez estudiado, el teorema para la existencia y unicidad de la solución La posibilidad de uso de los paquetes de programas para la solución, en este caso de Ecuaciones Diferenciales, reafirma la necesidad de accionar en cuanto a la verificación de condiciones y la interpretación del resultado como aspectos fundamentales.

Presentar problemas aplicados es una tendencia actual en la Educación Superior Cubana Ahora bien no cumple el problema su rol si el docente no toma en cuenta algunos aspectos que hacen que este ocupe dentro del proceso de desarrollo del pensamiento matemático su verdadera función.

- La materialización de las acciones.
- La vinculación con aspectos necesarios en su esfera de formación.
- La verificación del cumplimiento de las hipótesis

Problemas para la conceptualización.

Constituyen estos problemas los que de manera indiscutible necesitan ser reforzados en cada una de las asignaturas de la disciplina matemáticas, ya que el concepto constituye

dentro del pensamiento su base fundamental.

El concepto es la forma del pensamiento abstracto mediante el cual los objetos concretos y sus propiedades son reflejados en la mente del hombre. En el mismo se expresan sólo los rasgos y propiedades esenciales de los objetos de un género determinado, haciendo abstracción de las propiedades y nexos secundarios que no forman parte del contenido del concepto.

Referente al concepto, Álvarez (1994) plantea "que es el elemento más importante del pensamiento lógico. Es una imagen generalizada que refleja la multitud de objetos semejantes por medio de sus características esenciales"

El concepto no es el punto de partida del conocimiento, sino su resultado.

En el concepto se tiene la expresión concentrada de conocimientos, actividades prácticas e investigativas como suma de todo lo acontecido en una etapa de la realidad social.

Respecto a la formación de conceptos existen diferentes habilidades y procedimientos que están relacionados con el proceso de su desarrollo, por lo que los problemas dedicados a esta función necesitan cumplir determinados requerimientos entre los cuales se destaca:

- La integración de los conocimientos estudiados de uno o varios temas, la asignatura o la disciplina.
- La ejecución de métodos y la verificación de sus condiciones.
- Propiciar el fundamento matemático del sistema de conocimientos.
- Desarrollo de la metacognición: valoración, toma de decisiones autocontrol, etc.
- Generalizar los métodos estudiados.

Para lograr problemas que cumplan estas funciones es necesario incluir aquellos que cumplan las siguientes características:

- La integración desde el ente matemático que sirve de fundamento para dar solución a distintos problemas de esta ciencia.

Por ejemplo en la asignatura Métodos Numéricos se tiene la solución de sistemas de ecuaciones lineales como fundamento para la resolución de:

❖ Problemas cuyos modelos corresponden a ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método del elemento finito.

❖ Problemas cuyos modelos corresponden a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante el método del elemento finito.

❖ Problemas del ajuste de curvas usando métodos de los mínimos cuadrados.

Otro ejemplo es en la asignatura de Variable Compleja la determinación del residuo para puntos singulares aislados para.

❖ Problemas de cálculo de integrales de funciones de una Variable Compleja.

- ❖ Problemas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante métodos operacionales
- ❖ Problemas de cálculo de transformadas inversas de Laplace.
- ❖ Problemas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas mediante métodos operacionales.
- ❖ Problemas de cálculo de transformadas Zeta.

- Que se efectúe el cambio de método sobre la base del análisis del cambio de las condiciones o exigencias de la solución.

Ejemplo de esto es para los Problemas modelados mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias la solución a través de:

- ❖ Métodos analíticos.
- ❖ Métodos operacionales.
- ❖ Métodos aproximados.

- Que se exprese la contradicción que expresa el salto de calidad entre lo que el estudiante conoce y lo nuevo que está estudiando.

Un ejemplo de esto es en la asignatura de Variable Compleja el uso de la relación fundamental en el proceso de formación de los conceptos de limite, continuidad, derivada, diferencial, e integrales.

CONCLUSIONES:

Una vez analizadas las dificultades que en general se tiene en el proceso de enseñanza aprendizaje para el desarrollo del pensamiento del alumno y de cómo la matemática puede contribuir a esto, se ha hecho un estudio que orienta al docente en cuanto a la selección de los problemas y las características de los mismos en temas avanzados de la Matemática para que el proceso sea activo y dinámico.

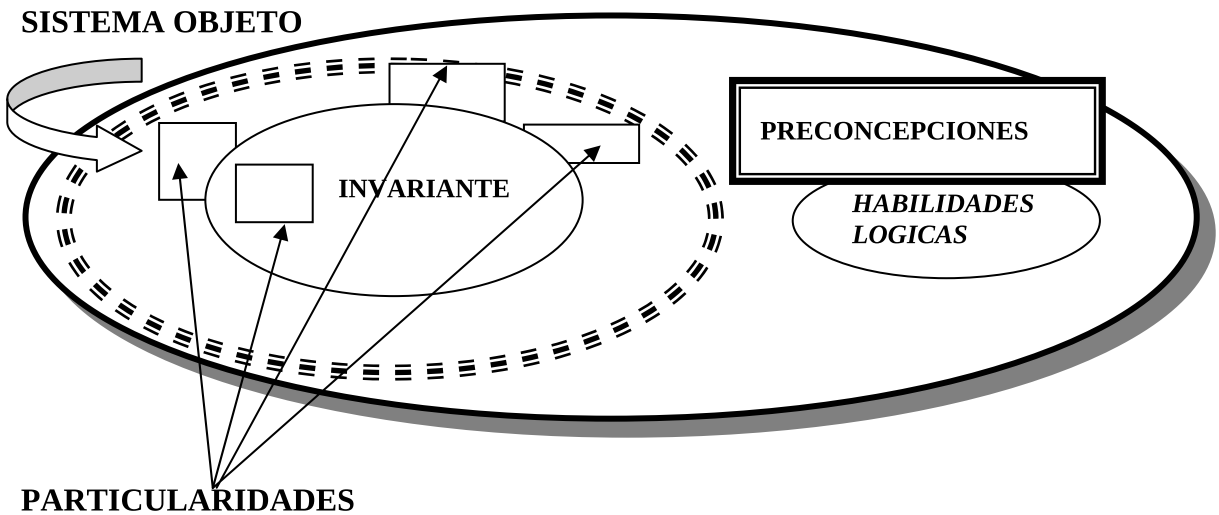
El análisis realizado ha permitido establecer un conjunto de condiciones con vistas a hacer más viable el uso de los problemas en la enseñanza, lo que a su vez ha sido debidamente ejemplificado para distintas asignaturas de la disciplina en Ciencias Técnicas.

Han quedado de esta forma caracterizadas las acciones que deben reflejar estos si nos planteamos una enseñanza en la cual el problema es medio, objeto y objetivo.

Lo estudiado forma parte del accionar que se indica a cada maestro para la búsqueda de su propio método en lo que al desarrollo del pensamiento y la formación de la habilidad general de resolución de problemas.

RECOMENDACIONES.

Unido a la aplicación de las indicaciones aquí analizadas, es preciso la búsqueda constante en cuanto a la conformación de las características fundamentales de los problemas que deben ser usados en la enseñanza, de manera que los mismos cumplan su rol en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Así como el estudio para la formación y desarrollo de la habilidad a través de sus habilidades componentes.



ESQUEMA 1

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Álvarez de Zayas, C. (1994). *Epistemología*. La Habana; /s.n/.

Álvarez, V. (1991). *Propuesta de estructuración del curso de Matemática para las carreras de Biología*. La Habana: Universidad de la Habana, Tesis de doctorado.

Blanco, R. (1997). *Subsistema didáctico con carácter sistémico de la disciplina matemática para ciencias técnicas, fundamentado en las leyes de la asimilación y la teoría del conocimiento*. Tesis de doctorado. Camaguey.

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Ficha bibliográfica. Organización de Estados Iberoamericano para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. España.

Malaniuk, M. P. (1990). "Utilizar de manera más completa las posibilidades de los problemas de matemática". *Revista Matemática Educativa*. (3 / I) 17-25. México D.F

Santos, L.M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. México D.F.

Schoenfeld, A. (1992). "Learning to think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense - Making in Mathematics" Chapter 15 of the *Handbook for Research of Mathematics Teaching and Learning*. New York. Edit D Groups.

Vázquez, R. A. (1999). *La resolución de problemas y tareas docentes para la Matemática IV en Ciencias Técnicas*. Tesis de Doctorado. Camaguey.

VÍNCULOS CONCEPTUALES DISCRETO-CONTINUO DEL CÁLCULO EN LA INGENIERÍA DE CONTROL

Martín Sauza Toledo.
Universidad Tecnológica de Tula Tepeji. México.
msauza@uttt.edu.mx

RESUMEN:

Este trabajo de investigación pretende hacer un estudio preliminar de la dualidad discreto-continuo con profesores de matemáticas y física, específicamente aquellos que imparten estas materias en ingeniería.

El Marco Teórico que sustenta este trabajo de investigación documental es el constructivismo de Piaget y la Matemática en Contexto que tiene su origen en el mismo constructivismo. En el trabajo de investigación se hacen varias referencias sobre la matemática en contexto con la ingeniería, sobre la matemática y la dualidad en el estudio de lo discreto y lo continuo dentro de la Ingeniería de Control.

La madurez que debe de tener el cálculo en este trabajo de investigación es de que los alumnos distingan entre el diferencial como una variable continua y del tipo analógico entre el incremento como un intervalo definido y una variable discreta que da origen a las señales digitales. Hacer notar las herramientas matemáticas entre una y otra, así como mostrar la importancia de transitar o transformar (convertir) un tipo de señal a otra.

INTRODUCCIÓN

El transitar de discreto-continuo es de vital importancia, así como mostrar la importancia que tienen las matemáticas discretas en la teoría de control, el modelar sistemas físicos que tienen como soporte un buen entendimiento de las matemáticas como herramienta y un buen contexto en la ingeniería.

Es importante destacar dos líneas de investigación muy importantes que se tomaron como referencia para el desarrollo de esta tesis, por un lado los estudios realizados por el doctor Carlos Rondero Guerrero, por hacer énfasis en la importancia que tiene la parte discreta de las matemáticas y marcar fuertemente en sus investigaciones la inclinación hacia lo continuo y dejar de lado la parte discreta.

Por otro lado la doctora Patricia Camarena Gallardo por su aportación de la matemática en el contexto de la ingeniería cuyos trabajos se están tomando como marco teórico de referencia en esta tesis.

El propósito es contextualizar la Matemática en la Ingeniería de Control, en la dualidad discreto-continuo. El trabajo de investigación trata de evidenciar los vínculos conceptuales entre el cálculo y la ingeniería, todo ello con el objetivo de incidir en el discurso matemático escolar.

La metodología utilizada es referente a la matemática en contexto con el enfoque en ingeniería de control, las evidencias muestran que en la enseñanza del cálculo se han privilegiado el estudio de lo continuo, y la parte discreta se estudia en el momento en que se están abordando problemas de aplicación, motivo por el cual no existe antecedente de estudio de este concepto.

El PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Estado actual de la investigación.

La visión que se tiene de lo discreto y lo continuo, a continuación se presenta, con la intensión de ubicarnos dentro del problema de investigación, a través de dos enfoques: uno ilustra la idea que se tiene desde el punto de vista de la Física y el otro de las Matemáticas, concernientes al Cálculo. Patricia Camarena desarrolla en su tesis doctoral un estudio epistemológico de la función delta de Dirac, la cual da origen a otras funciones, como la rampa, el escalón, utilizado en ingeniería de control, pero no hace referencia a las funciones como señales analógicas o digitales.

En matemáticas lo Discreto es la parte del incremento de una función, es una diferencia finita dentro del cálculo diferencial, por lo tanto se ve como la parte Discreta. La diferencial, es una diferencia infinitamente pequeña, por lo tanto ésta sería la parte continua dentro del Cálculo, Rondero (1999).

Desde el punto de vista variación y medición, si vemos que la variación es como tal un cambio y está en función del tiempo, ésta es la parte continua, y si nosotros queremos medir esa variación, lo que hacemos es tomar un intervalo y hacerlo finito para ciertos valores del tiempo, de tal forma que la medida viene siendo la parte discreta, así entiéndase discreto como la medición y lo continuo la variación. Dolores C. (1989).

Planteamiento del Problema.

Para la enseñanza de las Matemáticas a nivel licenciatura se requiere de un buen entendimiento de los conceptos Matemáticos, el Modelado de Sistemas Físicos en la realidad depende de si el estudiante tiene bien claro estos conceptos para posteriormente darle una aplicación a la Ingeniería. En el nivel medio y superior, las aplicaciones quedan en el aire, porque muchos profesores en clases, no estudian los problemas que necesitan de un buen razonamiento Matemático, y simplemente le dan la vuelta al problema, es aquí donde es importante crear un Vínculo Conceptual entre las Matemáticas y la Ingeniería, que permitan visualizar más los problemas de aplicación.

Es interesante cómo el alumno se percata que tanto carece de herramientas Matemáticas, y que sin éstas hace de lado una parte muy importante de su formación como Ingeniero, debido a que es en las Ingenierías donde comúnmente se presenta este problema, y donde se requiere un puente entre las Matemáticas y la Ingeniería. Si los Ingenieros no tienen buenas bases matemáticas, no les permite ser eficientes y no desarrollan la Ingeniería conforme a las necesidades de su profesión, motivo por el cual no se hace Ingeniería. Es aquí donde vemos la necesidad de darle un significado al cálculo en la Teoría de Control, por estas razones considero que el currículo a nivel licenciatura no están cubriendo las expectativas, para dar origen a la significación de la dualidad discreto-continuo, (debemos aportar ideas y diseñar actividades de aprendizaje que favorezcan la construcción de estos conceptos).

Se observa que en la Ingeniería Electrónica existe poco vínculo con las Matemáticas que se aplican en la Ingeniería. Este es un problema considerable en la Ingeniería de Control, que ha privilegiado mucho la parte continua del Cálculo y se ha dejado de lado la parte discreta. La Ingeniería Electrónica tiene problemas en su currículo, por que la mayoría de los alumnos no tienen como prerrequisito la parte discreta de las matemáticas y a nivel Ingeniería los profesores que imparten las materias de Control Analógico y Control Digital, tienen que ir a la par con aplicaciones y al mismo tiempo estudiando la parte discreta, por lo que en la enseñanza del Cálculo se tiene que incorporar a la discretización de funciones.

Al comenzar los alumnos a graficar funciones, lo hacen tabulando, posteriormente localizan los puntos en el plano cartesiano, unen los puntos para hacer una gráfica del tipo discreta, pero es aquí donde los profesores no hacen énfasis en que se esta enseñando el elemento discreto, y lo pasan desapercibido, situación anómala por ser un acercamiento importante con el elemento.

Problema de investigación

No se cuenta totalmente con vínculos conceptuales entre el Cálculo y la Ingeniería de Control, que incidan en el discurso matemático escolar.

1) Se requiere buscar vínculos conceptuales entre el cálculo y la ingeniería de control.
2) En la enseñanza del cálculo se tiene que incorporar la discretización de funciones.

En esta tesis se pretende hacer un análisis de textos, de los conceptos que existen en Ingeniería Electrónica y el Cálculo para:

1. Profundizar, en la visión que se debe tener de lo discreto y lo continuo en Ingeniería de Control.
2. Hacer un puente de conceptos que permitan ver las analogías de la parte continua del Cálculo con la parte analógica en control
3. La parte del Cálculo discreto con el elemento discreto del control digital.
4. Señales analógicas y digitales vinculadas con funciones continuas y discretas.

MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA.

Basados en el enfoque de la idea para la enseñanza constructivista piagetana, en la que todo conocimiento implica creación, es decir, el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que permiten ver el objeto de cierta manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. Piaget (1970)[19]. Donde la nueva información produce modificación y acomodación en las estructuras intelectuales de tal manera que cuando el sujeto se acerca nuevamente al objeto lo ve de manera distinta de cómo lo había visto originalmente y es ahora otra información que le es relevante y sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto, esta investigación tiene como propósito primeramente, cubrir una necesidad en la enseñanza de la matemática, relativa a la enseñanza de lo discreto y lo continuo, en el contexto de la Ingeniería Electrónica, específicamente en el Control Digital y Control Analógico, la estrategia didáctica que se propone en la enseñanza de la matemática para este fin, es la Matemática en Contexto, cuyas bases radican en el constructivismo, para que posteriormente, con la matemática contextualizada, dar significado a lo discreto y lo continuo en la Ingeniería Electrónica.

La enseñanza de este conocimiento matemático bajo la perspectiva de la Matemática en Contexto, tiene como objeto vincular la matemática referente a lo discreto y lo continuo en la ingeniería electrónica, cuyo interés es integrar en los estudiantes el conocimiento matemático con el de la ingeniería electrónica.

Al contextualizar la matemática de lo discreto y lo continuo el objeto será precisamente estudiar, investigar y analizar la integración de este conocimiento al estudiante, de tal forma que nunca este separado del sujeto; en el proceso del conocimiento de la contextualización de lo discreto y lo continuo, se pretende que el sujeto asigne al objeto una serie de significados, cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto.

CONCLUSIONES

Como pudimos ver en los conceptos estudiados anteriormente, es muy importante que las escuelas a nivel medio y superior, aborden conceptos que involucren la parte discreta de las matemáticas, es obvio que hasta este momento solo se ha privilegiado a la parte continua en estudio, y como hemos visto hay evidencias, de acercamientos tan importantes al mundo discreto como se pudo ver a la hora de que los alumnos tabulan una función, y es importante hacer notar a los alumnos que están discretizando una función. Posteriormente se da una introducción a las series de funciones, otro acercamiento muy importante dentro de la dualidad en estudio discreto-continuo, pero enfocado mas en las telecomunicaciones.

Los problemas tan graves que generan la falta de contexto, se refleja en la ingeniería de control, específicamente en la parte discreta y continua, si no se tienen las bases y las herramientas básicas para abordar problemas que tengan que ver con señales analógicas y digitales los estudiantes difícilmente darán solución a los problemas con los cuales se están enfrentando. Es importante resaltar también la importancia que tiene la conversión de señales, es decir de digital-analógico y analógico-digital.

En el análisis de libros de texto pudimos observar que en lo que se refiere a los libros de matemáticas estos abordan los temas de forma tradicional, es decir dan demostraciones de los teoremas, y resuelven ejercicios que solo favorecen a la parte algorítmica, carecen de ejercicios que hagan al alumno contextualizar la matemática, es decir que le vean esa aplicación tan importante. En los libros de ingeniería que se analizaron pudimos observar que algunos dedican un tema de repaso para algunos conceptos de matemáticas y en el análisis de textos pudimos observar algunos temas que aplican las matemáticas y dan evidencia de que son herramientas poderosas para el estudio de la ingeniería de control.

Es importante mencionar que los temas expuestos en los libros de texto se enfocan mas a las ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace así como la transformada Z, ya que son bases importantes para poder contextualizar la ingeniería de control.

Se pudo observar que en la entrevista que se le hizo a un alumno de ultimo semestre de la carrera de ingeniería electrónica no supo decir donde se aplicaba la transformada Z, lo interesante es que definió bien el concepto de función y donde se aplican las ecuaciones diferenciales, pero lo que no supo es donde se aplica la transformada Z y como ingeniero el va a manipular componentes electrónicos cuya base matemática para modelar sistemas electrónicos que requieren a la transformada Z como herramienta, esta es una evidencia clara de cómo no se ha incursionado en la practica docente en el cálculo discreto.

Los currículos actuales de las ingenierías, dan evidencia de que se trabaja mas con el cálculo continuo que con el cálculo discreto y lo poco que se contempla del cálculo discreto algunas instituciones no los cubren, por falta de tiempo, motivo por el cual el profesor titular de la materia donde se debe aplicar la matemática, a veces pierde algo de tiempo por tratar de dar algo de matemáticas discretas que no cubrieron las asignaturas que le anteceden.

A modo de reflexión quisiera comentar que yo creo que la falta de contexto, de significado de las matemáticas en la ingeniería en la actualidad es un obstáculo muy grande y uno de los motivos por los cuales se hace muy poca ingeniería aquí en nuestro país.

BIBLIOGRAFÍA:

Rondero C. (1995). *Ensayo sobre la dualidad discreto-continuo, de los saberes matemáticos. Casos de transición y transposición didáctica*. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN, México.

Rondero C. (2000). *Un estudio sobre el papel de las ideas germinales, Ponderatium y AEquilibrium, en la construcción del saber Físico Matemático.* Tesis de Doctorado CINVESTAV-IPN. México.

Camarena P. (1995). *La Matemática en Contexto.* Novena reunión Centroamericana del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, IPN. México.

Camarena P.(1999). *Hacia la Integración del Conocimiento: Matemáticas e Ingeniería*. Segundo Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. ESIME-Zacatengo IPN. México.

Piaget J. (1970). *Structuralism*. New York, Harpet & Row.

Piaget J. (1973). *Teoría del Pensamiento como Estructuras Cognitivas*. New York.

Piaget J. (1975). *Biología y Conocimiento (ensayo sobre las Relaciones entre regulaciones Orgánicas y los Procesos Cognitivos)*.

Vergnaud. G. (1981). *Quelquel orientations theoriques et methodologiques des recherches transcaises en didactique des mathematiques*. Conferencia plenaria o proceeding PME 5. Paris.

Vergnaud. G. (1994). *El Papel del Enseñante a la Luz de los Conceptos de esquema y del Campo Conceptual (Le role de I' enseignant á la humiére des concepts de schéme et de champ conceptuel)*. París.

Brousseau, G. (1983). *Obstacles épistémologiques en mathematiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2): 33-112.

Thomas/Finney. (1998). *Cálculo una variable*. Addison Wesley. México.

Benjamin C. (1997). *Sistemas de Control Digital*. CECSA. México.

Ogata K. (1998). *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall. México.

N. Vélez Sobrino. (1997). *Las Transformadas en la Ingeniería y Ciencias*. Limusa. México.

Propuesta metodológica para contribuir a la resolución de problemas matemáticos.

Isabel Santiesteban Pérez y Maricela Rodríguez Ortiz
Centro Universitario de Las Tunas. Cuba.
isasp@ictcu.ltunas.inf.cu

RESUMEN:

El artículo ofrece una propuesta metodológica a los docentes de la Enseñanza Media Básica en Cuba para favorecer el aprendizaje de los estudiantes al resolver problemas matemáticos, teniendo en cuenta las transformaciones de los nuevos programas, donde la primera de ellas se refiere a la presentación y tratamiento de los nuevos contenidos a partir del planteamiento y resolución de problemas cotidianos. La propuesta parte del diagnóstico de la práctica escolar, la asequibilidad de la enseñanza, la elevación continua de los niveles de dificultad y se fundamenta en los más actuales criterios de las teorías del aprendizaje relacionados con la superación de los docentes. Las orientaciones metodológicas se han elaborado con el propósito de que sirvan fundamentalmente como guía orientadora para dirigir desde el punto de vista metodológico y heurístico, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

INTRODUCCIÓN

Una dificultad constante de los estudiantes de la Enseñanza Media Básica en Cuba es el incumplimiento de objetivos de la Matemática, sobre todo, los destinados a la resolución de problemas.

Se han hecho varios intentos por mejorar esos resultados; el último de ellos esta relacionado con las transformaciones de los nuevos programas, donde la primera de ellas se refiere a la presentación y tratamiento de los nuevos contenidos a partir del planteamiento y resolución de problemas cotidianos.

Esto se debe a que la resolución de problemas es el proceso por el que los estudiantes experimentan la potencia y la utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea. Además de ser un modelo de indagación y aplicación integrado, con el objeto de ofrecer un contexto sólido para el aprendizaje y la aplicación de las matemáticas.

Sin embargo, se considera que los docentes no se encuentran suficientemente preparados para asimilar los cambios, ya que en sus clases, crearon un esquema difícil de variar y en su formación no se le exigía la elaboración creadora de situaciones problémicas al introducir los nuevos contenidos y la aplicación de estos a situaciones concretas de la vida.

La propuesta que se propone está dirigida a tratar de enmendar los problemas y deficiencias que se ponen de manifiesto en el proceso de asimilación del conocimiento en particular, y en el desarrollo de una adecuada instrucción heurística que contribuya al desarrollo de habilidades, al resolver problemas en la enseñanza de la Matemática.

DESARROLLO

Para introducir este tipo de instrucción en la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Media Básica, se ha seleccionado la situación típica “resolución de problemas”, por ser la que brinda las mayores posibilidades para desarrollar habilidades en los estudiantes al indagar, investigar, debatir sus propias ideas, y desarrollar su espíritu crítico y autocrítico; lo que propicia la independencia cognoscitiva y su aplicación a situaciones concretas de la vida.

La propuesta metodológica tiene las siguientes características:

1. El trabajo está estructurado sobre la base del diagnóstico, tanto en la esfera cognitiva como en la afectiva, tomando como líneas principales el aprendizaje cooperativo. De este modo propicia el intercambio franco y abierto entre estudiantes
2. El papel del docente es primordial, pues además de diseñador, es facilitador, supervisor y controlador durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje.
3. Aparecen diferentes elementos de formación como son: teoría, práctica etc, con lo que se propicia que se contribuya al logro de los objetivos formativos.
4. El estudiante además de participar activamente en la construcción de su propio conocimiento, propicia la construcción del conocimiento de sus semejantes, cuando trabaja en equipos.
5. Se le propone a los estudiantes situaciones problémicas con distintos grado de dificultad, en las que los conocimientos matemáticos a aplicar estén en correspondencia con los contenidos del grado, y se presten a la particularización y la generalización.
6. Se les pide a los estudiantes que traten de registrar el proceso de resolución con la mayor cantidad posible de datos y que reflexionen sobre el proceso seguido.
7. Se propicia la discusión en grupo donde se hacen explícitas las ideas, estrategias, razonamientos, bloqueos, etc, presentes en el proceso de resolución.

Sintaxis de las etapas propuestas

La primera etapa **(Introducción)** estará dedicada a crear un clima apropiado entre docentes y estudiantes, que facilite la comunicación. Además estará caracterizada por tres momentos: motivación, familiarización e identificación.

En el primer momento, de *motivación* es para despertar el interés de los estudiantes al resolver problemas y de entrenamiento en los conocimientos necesarios para enfrentarlos, empleando técnicas participativas, medios de enseñanza y juegos didácticos. La *familiarización* con las acciones y los heurísticos seleccionados, donde se hace la introducción a través de la resolución de problemas, empleando el programa heurístico general seleccionado; se utilizará como estrategia didáctica la hoja de trabajo, donde aparecen los impulsos que se relacionan con los diferentes heurísticos. Estos se elaboran y aplican teniendo en cuenta el nivel de razonamiento de los estudiantes.

En el segundo momento, se declarará de forma explícita, los procedimientos heurísticos y las acciones con los cuales se está trabajando, empleando varias hojas de trabajo, con la finalidad de familiarizar a los estudiantes con las preguntas que se relacionan con los diferentes procedimientos heurísticos que se propone introducir; para que los estudiantes puedan aplicarlos a la resolución de problemas dirigidos por el docente y con posterioridad los empleen de forma independiente.

Después se orientará la confección de una ficha donde aparezca el conjunto de acciones fundamentadas en los procedimientos heurísticos introducidos, para su trabajo en el próximo momento.

El tercer momento o de *identificación* de los procedimientos heurísticos empleados en la resolución de los ejercicios. Los estudiantes deben identificar cuales procedimientos han empleado en la resolución de los problemas, bajo guía del docente, primeramente y luego de forma independiente. Para esta identificación emplearán la ficha elaborada con anterioridad.

Se considera concluida esta etapa cuando los estudiantes son capaces de identificar y aplicar los procedimientos heurísticos en la resolución de problemas.

La segunda etapa **(Ampliación)**, cuenta con dos nuevos momentos, los que están dirigidos a que los estudiantes desarrollen habilidades en la elaboración de estrategias, empleando los procedimientos heurísticos, para la resolución de problemas. Los dos momentos de esta etapa son: *elaboración de estrategias en colectivo y elaboración de estrategias individuales*. Se auxilian del protocolo de resolución y la reflexión sobre el proceso de resolución.

En el primer momento se utiliza la estrategia didáctica, el protocolo de resolución, para explicar las ideas que se consideren importantes en el curso de la resolución, lo que se intenta hacer y su parecer sobre todo ello. En la resolución de problemas en grupo un estudiante hace de secretario y registra el proceso de resolución. Estos protocolos favorecen la retrospección e introducen un elemento de control en el proceso.

Como los estudiantes han elaborado protocolos de resolución, se entrevista a los participantes pidiéndoles que cuenten el proceso y digan su percepción del mismo, donde se ponen en común, analizando las ideas que los conducen a la solución y los bloqueos que les impidan llegar al final, de esta manera ocurre la reflexión sobre el proceso seguido.

Se considera concluida esta etapa cuando los estudiantes son capaces de resolver ejercicios de forma independiente y explicar el uso del conjunto de acciones fundamentadas en los heurísticos para su resolución.

La tercera etapa de la estrategia, **(Aplicación)**, estará dirigida fundamentalmente a que los estudiantes propongan problemas confeccionados por ellos, relacionados con los contenidos propios de la matemática, con las sugerencias del docente a partir de problemas abiertos, que propician la investigación en grupos, aquí se utiliza la estrategia didáctica *trabajo en grupo*, para seguir la metodología de trabajo propuesta ayudado por un moderador o moderadora y un secretario o secretaria, que toman las notas y las ideas del proceso de resolución. Esto hace posible la discusión al final de la sesión sobre el comportamiento seguido, donde el que dirige la actividad, no ofrece ninguna respuesta ni da opinión.

Al alcanzar esta etapa, dirigirán la actividad práctica y confeccionarán problemas que pueden ampliar su campo de aplicación a otras asignaturas en colectivo e individualmente.

Se considera concluida la etapa cuando los estudiantes elaboran problemas para sus compañeros de grupo.

Algunos ejemplos para trabajar con la propuesta

El contenido para 7^{mo} grado comienza con la Unidad # 1 El significado de los números.

El docente aprovecha las oportunidades que ofrece la teoría de números para realizar exploraciones que son interesantes, amenas y útiles. Estas indagaciones inciden en la resolución de problemas, la comprensión y desarrollo de otros conceptos matemáticos, la demostración de la belleza de las matemáticas y la comprensión de los aspectos humanos del desarrollo histórico de los números.

Se utilizan las potencialidades de la teoría de los números para resolver diversos problemas de interés para los estudiantes auxiliándose de técnicas participativas y juegos didácticos como los siguientes.

Se les sugiere a los estudiantes, la posibilidad de realizar un brindis en la escuela, con la necesidad de que traigan un dulce, preferentemente panetela o pudín. Más tarde en el aula se conforman equipos con distintos números de estudiantes, se les propone que repartan el dulce en cada equipo a partes iguales, y expliquen las conclusiones a las que han arribado.

Se sugiere el juego “Estima y aproxima”.

El docente reparte en el aula hojas de trabajo, donde cada una tiene el precio de un producto distinto que se oferta en el mercado y un descuento en particular dado en porcentaje, por ejemplo: ($10,95; 15%). Luego reparte calculadoras en el grupo y cada jugador tiene que hacer una estimación del precio final con el descuento.

El jugador que se haya acercado más al precio real será el ganador.

Otro aspecto que resulta de gran interés para los estudiantes, son las estadísticas del deporte, con datos reales donde puedan generar datos nuevos e investigar toda una gama de conjeturas.

El docente presenta una hoja de trabajo con la información de los resultados estadísticos de un juego de baloncesto de la siguiente forma:

Jugador	**Minutos juego**	**Canastas/ intentos**	**Rebotes**	**Pases**	**Puntos**
A	37	8/19	8	5	20
B	34	8/14	1	12	19
C	31	8/14	6	9	19
D	32	10/16	9	0	26

Utilizando la hoja de trabajo los estudiantes pueden generar información nueva como puntos/minutos, puntos/intentos, o ¿Qué jugador tiene el mejor porcentaje?

También con otros datos pueden hallar la altura de cada jugador y determinar los rebotes/centímetros de altura de cada jugador o los puntos/centímetros de altura.

Este problema abre ante los estudiantes un mundo de preguntas, donde los mismos desarrollan las habilidades al recoger, organizar, elaborar e interpretar tablas y gráficos para formular inferencias y argumentos convincentes que se basen en el análisis de datos.

La Unidad #2 Lenguaje de las variables, donde se sugiere la traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico.

Sugerimos utilizar el juego didáctico **“Buscando Sinónimos”**, para ejercitar la traducción del lenguaje común al algebraico o viceversa.

Buscando sinónimos

Se forman equipos en dependencia de la cantidad de estudiantes en las aulas y se entrega un listado de palabras o expresiones a todos los alumnos. El docente presentará una palabra o expresión y pedirá sinónimos o expresiones que signifiquen lo mismo y lo que han interpretado. Los estudiantes contestarán de forma individual y su calificación será para el equipo.

Con este juego el estudiante aprende a <u>modelar situaciones usando métodos orales, escritos, gráficos y simbólicos.</u>

Otro ejemplo podría enfocarse de la siguiente forma.

> Piensa en un número. Añádale cinco. Multiplica el resultado por dos. Réstale cuatro. Divídelo por dos. Réstale el número que habías pensado al principio. Verás como te leo el pensamiento. El resultado es tres.

Este ejemplo ilustra el papel que cumplen los símbolos escritos en la representación de ideas, cuestión esta que se recomienda utilizar a lo largo de toda la Enseñanza Media Básica. Los estudiantes aprenden a usar un lenguaje preciso en conjunción con los sistemas simbólicos especiales de las matemáticas.

En el 8^{vo} grado a los estudiantes se les prepara para <u>utilizar modelos gráficos lineales o bidimensionales para mostrar relaciones que impliquen números</u> que se amplían de coordenadas naturales a racionales, como el siguiente ejemplo.

El docente muestra en hojas de trabajo las estadísticas de la lluvia que cae en las provincias Orientales del país, durante los meses transcurridos en el año. Los estudiantes deben realizar una gráfica.

Se auxilian de las estrategias didácticas el <u>*protocolo de resolución y la reflexión sobre el proceso seguido*</u> , el docente dirige la discusión sobre la época de siembra de determinado producto en dependencia de la provincia que se analice, la época para visitar las playas y determinados centros turísticos, la temporada de ciclones, etc.

En la Unidad #2 Igualdades que contienen variables. El docente se auxilia del principio heurístico de analogía para resolver ecuaciones lineales de la forma ax+b=c (a,b,c racionales con $a \neq 0$) donde se establecen conexiones con las ecuaciones tratadas en 7^{mo} grado. Y auxiliándose del principio de reducción llevar el procedimiento a una ecuación de la forma ax=b (a,b racionales con $a \neq 0$).

Este contenido es muy apropiado para que los estudiantes desarrollen habilidades al modelar muchos problemas de forma concreta, recoger y organizar datos en tablas, representar datos etc.

Como los estudiantes se han apropiado del conocimiento desde el grado anterior. El docente utiliza las estrategias didácticas: <u>*el protocolo de resolución, la reflexión sobre el proceso de resolución y el trabajo en grupos*,</u> de forma tal que las tareas del grupo sean de manera que los estudiantes se dediquen a la resolución y discusión de forma cooperada y además, siempre que sea posible utilicen la tecnología disponible.

Para introducir las ecuaciones lineales de la forma ax+by=c (con a,b,c racionales y $a \neq 0$) se emplea el juego didáctico "Buscando Sinónimos" para facilitar la traducción del lenguaje común al algebraico de situaciones en las que se emplean dos variables en una sola ecuación lineal.

El docente hace notar por medio de preguntas, que este tipo de ecuaciones tienen infinitas soluciones en el conjunto de los números racionales y que se necesitaría una segunda ecuación, de manera que se introduzcan los sistemas de ecuaciones lineales en dos variables a partir de la recopilación de datos de la vida práctica.

No todos los problemas requieren un contexto del mundo real. Por el contrario, los estudiantes se apasionan a menudo con problemas que cuentan una historia, donde el docente se puede auxiliar de técnicas participativas, con el propósito de motivar y despertar el interés por las matemáticas.

Un ejemplo de lo planteado anteriormente puede ser la **dramatización** como **técnica participativa,** donde a partir de ésta queda en el aula una situación problémica como la siguiente.

El docente narra la historia: **Andando por el desierto nómadas que cargaban sobre sus cabalgaduras sendos sacos de mercancía para venderlas en los sitios por los cuales vagaban. Uno de caballo negro y otro de caballo blanco.**

Estudiante # 1 (hombre del caballo negro). **-Huf, no puedo más este sol sofoca mi cabalgadura.**

Estudiante # 2 (hombre del caballo blanco). **–Tienes que ser más voluntarioso, amigo.**

Estudiante # 1 **-Tú sin embargo no pareces cansado. Hagamos un trato. ¿Por qué no tomas tú uno de mis sacos y me lo llevas en tu cabalgadura?**

Estudiante # 2 **-Oh amigo, eso no puede ser.**

Estudiante # 1 **-¿Por qué no?**

Estudiante # 2 **–Porque si yo tomo uno de tus sacos entonces yo tendré el triple de la cantidad de sacos que tienes tú, sin embargo si tu tomas uno de los míos entonces ambos tenemos la misma cantidad de sacos.**

Se aprovecha la ingeniosidad del problema para la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

En el 9no grado se pueden analizar ejemplos que ilustran situaciones abiertas de problemas donde los estudiantes se auxilian de la estrategia didáctica trabajo en grupos para elaborar problemas y despliegan diversas estrategias.

Se realizó una encuesta entre estudiantes de la enseñanza media del municipio Tunas para determinar el número de horas diarias que estudian. ¿Cuántas horas crees que salieron?

En el problema siguiente, los estudiantes tienen que generar, organizar y analizar datos, buscar patrones que hayan observado para aplicar el principio heurístico de la generalización

> En un pueblo hay 3 calles. Todas las calles son rectas. Cada cruce tiene una farola. ¿Cuántas farolas se necesitan? ¿Cuántas hacen falta en un pueblo de 20 calles? Generaliza para cualquier número de calles?

Los estudiantes deben realizar un croquis o figuras de análisis para responder a la cuestión de cómo están dispuestas las calles antes de resolverlo. Esto genera una diferenciación de casos y diversas estrategias de solución.

CONCLUSIONES

La propuesta metodológica contribuye por una parte, a que los estudiantes se apropien de un conjunto de acciones al resolver problemas, y por otra, a que esta acción se revierta favorablemente en la asimilación de los contenidos de la Matemática que se imparten en Enseñanza Media Básica. Es aplicable ya que tiene en cuenta los programas vigentes, parte del diagnóstico de la práctica escolar, la asequibilidad de la enseñanza y la elevación continua de los niveles de dificultad.

El entrenamiento de los estudiantes en el uso de un conjunto de procedimientos heurísticos se puede convertir a partir de una correcta concepción y organización del proceso docente-educativo, en una vía de inestimable valor si se pretende que el estudiante aprenda a buscar por sí mismo el nuevo conocimiento.

Las orientaciones metodológicas se han elaborado con el propósito de que sirvan fundamentalmente como guía orientadora para dirigir desde el punto de vista metodológico y heurístico, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Algarabel, S. et al. (1996). Solución de problemas: una revisión del uso de heurísticos y una evaluación de su utilización en Matemáticas. *Revista Española de Pedagogía*. 203. 143-165.

Gil, D. y Guzmán, M. (1993). *La enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones*. Editorial Popular S. A.

Gómez, I. (1991). La funcionalidad del aprendizaje en el aula y su evaluación. *Cuadernos de Pedagogía*. Fotocopia p. 28 -35.

Lorenzo, J. (1996). La Resolución de Problemas. Una revisión teórica. *Revista Suma 21*.

Mitjáns, A. (1995). *Creatividad, Personalidad y Educación*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba.

Monereo, C y Pérez, M. L. (1996). La incidencia de la toma de apuntes sobre el aprendizaje significativo. Un estudio en enseñanza superior. *Infancia y Aprendizaje*. 73.

Pozo, J. (1994). *La Solución de Problemas*. Santanilla. S.A. Madrid.

Santos, L. (1992) El trabajo de Alan Shoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las Matemáticas. En: *Educación Matemática*. Vol. IV #2. Ciudad México.

Santos, M. (1990, Enero-Abril). Estructuras de aprendizaje y métodos cooperativos en educación. *Revista Española de Pedagogía* 185. 53-78. Madrid.

Schoenfed, A. (1991). *Ideas y Tendencias en la Resolución de Problemas*. Edipubli. S.A. Buenos Aire.

ARGUMENTACIONES Y JUSTIFICACIONES EN TORNO A UNA SITUACION DE ROMBOS.

Ismenia Guzmán R. y Lidia Consigliere D,
Instituto de Matemáticas, Universidad Católica de Valparaíso, Chile
iguzman@entelchile.net lconsigl@ucv.cl

RESUMEN

La presente investigación se inscribe en el estudio de las argumentaciones y justificaciones en Matemáticas (Geometría y Algebra). Se trata de investigar ¿cómo están elaboradas las argumentaciones y justificaciones? ¿Cuál es su estructura? ¿Cuánto se apoyan en el lenguaje natural? ¿Qué grado de comprensión se revela en el manejo y dominio de los objetos matemáticos (rol de los símbolos y rol de las figuras)? Estas interrogantes plantean una problemática didáctica fundamental, que no ha sido estudiada en profundidad. Es esencial prestarle atención en la formación de los futuros profesores de Matemática,

Este reporte se centra en las argumentaciones y demostraciones en torno a una situación de rombos que fue sometida a estudiantes universitarios de primer año y jóvenes profesores de Matemática. La metodología de Investigación que se emplea es cualitativa, con apoyo en la observación de binomios, en entrevistas y un cuestionario. El marco teórico es la teoría de Raymond Duval sobre el razonamiento matemático.

Considerando que la argumentación es una forma natural de razonamiento que escapa a los criterios lógicos clásicos se propone estudiar cómo aparece esta forma de razonamiento en los discursos orales y escritos de estudiantes y cómo evoluciona esta argumentación en jóvenes profesores de Matemática que ya se han encontrado con el razonamiento formal de la Matemática.

MARCO TEÓRICO

El enfoque que Raymond Duval plantea para el razonamiento lo podemos sintetizar en las ideas siguientes:

- La argumentación tiene sus raíces en la exigencia de la comunicación y no es posible convencer sin comprender. Por lo que el rol del lenguaje natural es esencial tanto en la comunicación oral, como en la escrita.
- La argumentación está relacionada con las justificaciones de las afirmaciones o tesis que se postulan distinguiendo en las justificaciones dos operaciones: la de producir un razonamiento o un argumento y la de aceptar los razonamientos producidos.
- La primera operación, de producción, es una función general que consiste en responder a preguntas ¿porqué?. Esta función se manifiesta por preguntas de **Dicto y de Re** como afirma R. Duval. Las **de Dicto** son del tipo ¿por qué afirmas eso?, ¿Por qué respondes que...?, es decir requieren un argumento. Las preguntas **de Re** son por ejemplo ¿por qué se produce este fenómeno?, ¿por qué se obtiene este resultado? es decir, requieren de una explicación.
- La segunda operación, se refiere a la aceptación o no de los razonamientos producidos
- Los argumentos se aceptan o se rechazan según dos criterios. El criterio *de pertenencia del argumento* y el *de fuerza del argumento*. El **de pertenencia** es de naturaleza semántica, depende de la relación entre el contenido de la afirmación y su justificación y el **de fuerza** es aquel que resiste a objeciones y depende de su valor epistémico (evidente, posible o plausible).

Como la investigación apunta al estudio del ¿cómo están elaboradas las argumentaciones y justificaciones?, ¿cuál es su estructura?, ¿cuánto se apoyan en el lenguaje natural? y ¿qué grado de comprensión se revela en el manejo y dominio de los objetos matemáticos (rol de los símbolos y rol de las figuras)?, se necesita entonces disponer de un cierto número de argumentaciones. Para recogerlas se ha elegido la siguiente situación de rombo, la cual se experimentó con binomios de estudiantes universitarios de primer año y cuatro jóvenes profesores de matemática.

LA SITUACIÓN Y SU ESTUDIO A PRIORI.

SITUACIONES DE ROMBOS

Recuerde que: un rombo es un cuadrilátero con todos sus lados de igual medida

1. Construya un rombo con regla y compás, póngale letras y explique los pasos de su construcción.
2. Complete la siguiente frase: *"Un rombo es un..................particular"* Ayuda: Para completar se sugiere utilizar una de las palabras: triángulo, rectángulo, paralelogramo, cuadrado, cuadrilátero
3. Justifique por escrito la veracidad de la frase completada.
4. ¿Qué puede decir sobre la veracidad de las siguientes frases:
   (a) "Todos los cuadrados son rombos"
   (b) "Todos los cuadriláteros son rombos"
   (c) "Todos los rombos son cuadrados"
   (d) "Todos los rombos y cuadrados son cuadriláteros"

Justifique por escrito cada una de sus respuestas.

5. Pruebe que las diagonales de un rombo son ejes de simetría. Identifique puntos de simetría.
6. Enuncie una proposición sobre los ángulos del rombo. Intente demostrarla.

ANÁLISIS A PRIORI

En el análisis de la situación se pueden distinguir dos momentos primero, la explicación de la construcción de un rombo. Esto es en cierto modo un relato de los pasos. (De Dicto) y segundo la explicación del por qué la figura construida es un rombo. Esto es una justificación de los pasos dados para la construcción. (De Re)

Algunas de las posibles construcciones posibles de rombo son las siguientes:

1. A partir de la propiedad de las diagonales que son perpendiculares y que se dimidian.
2. A partir de un ángulo dado, marcando dos medidas iguales sobre sus lados y construir el cuarto punto.
3. A partir del trazado de dos paralelas y una transversal que las corte. Con la distancia resultante entre los puntos de intersección, se determinan los otros dos vértices.

4. A partir de las diagonales (perpendiculares) como ejes de simetría, ubicando los cuatro vértices como puntos simétricos respecto a cada diagonal.
5. A partir de un triángulo isósceles, se construye el triángulo simétrico respecto a la base.

De los alumnos con respecto a la construcción del rombo y su descripción se espera

- Que realicen algunas construcciones básicas, como: trazar una paralela a una recta dada por un punto fuera de ella, encontrar puntos simétricos respecto a un eje, trazar la simetral de un segmento dado.
- Que designen de algún modo (letras o marcas) los objetos matemáticos que dibujan.
- Que utilicen un vocabulario geométrico.
- Que justifique que la construcción realizada corresponde a un rombo.
- Que enuncien los teoremas que ponen en juego.
- Que enuncien las propiedades utilizadas.

Con respecto a las nociones geométricas y propiedades que deberían manejar los alumnos destacamos las siguientes:

1. Rombo: paralelogramo equilátero.
2. Noción de paralelas: rectas del plano que no se cortan
3. Distancia entre paralelas: es la perpendicular trazada desde un punto de una de ellas a la otra.
4. Las diagonales de un paralelogramo se dimidian
5. Los paralelogramos son cuadriláteros con un par de lados paralelos e iguales
6. Teoremas:
   - Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.
   - Las diagonales de un rombo se dimidian y son perpendiculares.

RESPUESTAS RECOGIDAS Y ANALISIS

En este párrafo consideraremos las respuestas de dos binomios de alumnos y la de un profesor.

Un primer binomio ha dado la siguiente respuesta al cuestionario.

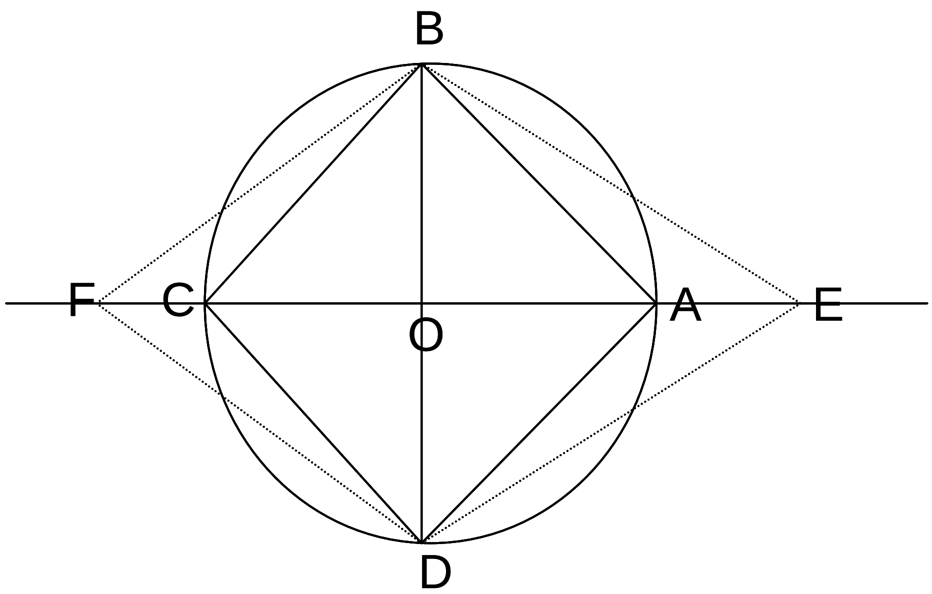
1) “*Trazamos una recta y la perpendicular a ésta*”

2) “Desde el punto O hicimos una circunferencia de radio OB”

3) “*Unimos los puntos de la circunferencia A, B, C, D*”.

4) “Nos queda un cuadrado de vértices A, B, C, D”

5) “No sabíamos construir un rombo, pero una definición “vulgar” es que si uno toma un rombo y lo achata la figura que se forma es un rombo. Por lo que el cuadrilátero DEBF es un rombo.”



En el escrito de este Binomio, constatamos que enumeran los pasos sucesivos de su construcción. Pero en general observamos una falta de precisión, por ejemplo en el punto 1). "Trazamos una recta" y no la precisan, podría ser CA o FE o AE o BD.

Además agregan "y la perpendicular a". Aquí falta señalar el punto por el cual la trazan y cómo, con qué instrumento. En el dibujo constatamos que debió ser por el punto O.

Siguiendo con el relato, la frase de 2) nos indica que el radio OB, que toman es arbitrario. En 3) mencionan los puntos A, B, C, D y no precisan que no son puntos cualesquiera, sino intersecciones de su circunferencia con las rectas perpendiculares. En 4) afirman que "ABCD es un cuadrado", sin justificar el porqué, qué definiciones o propiedades matemáticas le permiten hacer tal afirmación.

En el 5), reconocen que no saben construir un rombo y recurren a una "definición vulgar" según ellas, pero en realidad lo que hacen es una visualización incorrecta.

En la entrevista, no aportan nuevos conocimientos geométricos, sino que queda al descubierto la debilidad de la descripción de los pasos. Por ejemplo la propiedad de las diagonales de un paralelogramo no la dominan y la utilizan en forma intuitiva reproduciendo figuras encontradas en clases. Tampoco ven en el rombo, los triángulos isósceles que podrían reconocerse. En la pregunta 3, admiten que un rombo es un cuadrado particular lo cual se contradice con la respuesta que dan a la pregunta 4. En la cual dan una clasificación con justificación correcta de los cuadriláteros mediante un gráfico. Se les pide que expliquen el porqué de la contradicción señalándoseles que el gráfico es correcto. Ellas reconocen que este gráfico lo hicieron al cursar la asignatura de Geometría y Computación, pero que no lo sabían leer, hablamos de leer "de afuera hacia adentro" o "al revés".

Un segundo binomio presentó los siguientes pasos en la construcción del rombo:

1) *"Pongamos un punto A y un punto B a una distancia "x".*

2) *"Trazamos el segmento* $\overline{AB}$*"*

3) *“Ajustamos el compás a la medida de* $\overline{AB}$ *y hacemos el ¼ de circunferencia.*

4) *“Tomamos un punto D, en el arco trazado y medimos la distancia a un punto C que tiene que ser igual a la distancia* $\overline{AB}$*”*

5) *“Nos aseguramos que* $\overline{AB} \cong \overline{AD}$*. Porque ambos son radio y aseguramos que* $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$ *por el cuadriculado de la hoja.”*

6) *“Trazamos el segmento* $\overline{BC}$ *que también es paralelo a* $\overline{AD}$*.”*

Constatamos que en la descripción de los pasos 1 a 3 ellos tratan de construir una figura de 4 lados iguales. Pero en el 4º paso, tienen dificultades para construir el 4º vértice. Pues, uno de los lugares geométricos es el arco de circunferencia con centro en D y radio AB y el otro que podría ser es la paralela por D al lado AB, lo consideran mecánicamente usando el cuadriculado de la hoja.

En la entrevista quedó en evidencia, que el cuadriculado no les permitió justificar el porqué eran paralelas. Para obviar esta dificultad, consideraron la circunferencia con centro B y radio AB, como 2º lugar geométrico para el 4º vértice. Esto muestra, que para ellos que el paralelismo no jugó un rol importante en su construcción del rombo. No lo consideran como paralelogramo.

En la pregunta 2, la explicación que dieron en la entrevista nos confirma esta apreciación, ya que la respuesta la seleccionaron por descarte, del triángulo, rectángulo y cuadrilátero, éste último, porque era muy amplio. Enfatizando el hecho de que los lados opuestos eran de igual medida y no el paralelismo.

Estos alumnos, además, en la pregunta 5, se apoyan en un paralelogramo que no es un rombo, no obstante afirman que es un rombo y a partir de ella tratan de buscar los puntos simétricos respecto a una diagonal que dibujaron y demostraron era eje de simetría. En consecuencia no pudieron identificar puntos simétricos.

En la entrevista se dieron cuenta de la necesidad de apoyarse en una figura que fuera rombo, ya que su concepto de eje de simetría era intuitivo, basado en el doblez. Ellos dibujaron un romboide, en vez de un rombo, y dicho concepto intuitivo no les funcionó ya que en su figura no funcionó. El concepto geométrico de eje de simetría y puntos simétricos está ausente, en su argumentación.

Una profesora joven ha respondido como sigue:

1º) “Se traza un segmento $\overline{BD}$, luego con el compás se ubica el punto medio”

2º) Para ubicar el punto medio la abertura del compás tiene que ser igual a la del segmento $\overline{BD}$, luego se pone la punta del compás en el punto D y se dibuja un arco de circunferencia, en el extremo superior y en el extremo inferior. A continuación se pone la punta del compás en el punto B y se dibujan”

Construcción

1. “Dibujar un segmento $\overline{BD}$, luego trazar la simetral de este segmento”
2. “Al segmento resultante, de acuerdo a una medida, colocar A y C”
3. “Unir los puntos A, B, C, D. Se obtiene un rombo.”

Ella plantea su estrategia a partir del punto medio de un segmento. Trata de construir este punto pero lo deja incompleto y en ella se observa que la simetral juega un papel implícito en su construcción. Luego, en la parte llamada por ella: construcción, cuando menciona la simetral no explica como la construye ni hace referencia al punto medio y no precisa como determinar el segmento y los puntos A y C, que son infinitos.

Finalmente, afirma haber construido un rombo, sin ver la necesidad de demostrar.

En la pregunta 3 se pide justificar que el rombo es un paralelogramo particular. Ella lo hace en lenguaje natural considerando la propiedad de la simetral, y la igualdad de los lados del rombo. Pero, no se pronuncia sobre el paralelismo del rombo

En esta respuesta observamos que la entrevistada no justifica la proposición que escribe a partir de la hipótesis (definición de rombo) y se remite a repetir la construcción que ha hecho, quedándose sólo en la propiedad de la igualdad de los lados, sin hacer referencia al paralelismo de los lados opuestos. En su relato ella escribe: " por lo tanto AB//CD y BC//CD", una conclusión que se desprende de algo ausente.

En la entrevista a esta profesora joven le preguntamos respecto a cómo ha sido su formación en Geometría y su respuesta es la siguiente: "*No estudié en la Universidad la construcción de figuras y la demostración. Tampoco en la Enseñanza Media."* Entonces le preguntamos cómo ha enfrentado este problema? Y responde: "*Lo hice con mis propios conocimientos que he ido aprendiendo con mi experiencia*"

En la entrevista da su definición de rombo, es un cuadrilátero con sus lados iguales y ángulos interiores opuestos iguales. Respecto al paralelismo no se pronuncia. También conoce la propiedad de las diagonales de un rombo. Esto queda en evidencia cuando se le pregunta por los ejes de simetría.

Esta entrevistada pertenece a la época de profesores de matemáticas que no estudiaron geometría en la Universidad y tampoco recibió formación en geometría en su vida escolar Básica y Media. Nos preguntamos ¿si sus profesores de Matemáticas de enseñanza Media recibieron en su formación profesional enseñanza de Geometría?

CONCLUSIONES

Nuestras conclusiones en este artículo serán algo parciales, ya que lo presentado es sólo una parte de nuestra investigación. No obstante podemos adelantar que el desempeño de los alumnos responde a la cultura escolar que han adquirido, la cual ha privilegiado las tareas reproductivas, aplicaciones de propiedades y ejercicios algorítmicos. En Geometría estos procedimientos no tienen lugar y por lo tanto los alumnos tratan de hacer funcionar la mecánica, se apoyan en las figuras y en las percepciones visuales; ellos realizan acciones que describen linealmente, pero no se preocupan de explicar o justificar. Ellos realizan construcciones mecánicas en lugar de geométricas.

La situación de rombo que hemos presentado deja en evidencia que el concepto de la figura rombo es desconocido para los entrevistados. En consecuencia, a nivel "de Dicto", ellos dan explicaciones imprecisas geométricamente ya que cuando se refieren a rectas; no se preocupan de la notación, y cuando mencionan un punto, tampoco lo caracterizan. Entonces, no se podría estudiar su relato sino está a la vista la figura.

A nivel "de Re", estas explicaciones son vacías, pues no pueden llegar a dar justificaciones geométricas, por la debilidad de los conocimientos que han exhibido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Mariotti, H. (1999). "El problema de la construcción en geometría". X[ème] Ecole d'été de Didactiques Mathématiques, Houlgate.

Duval, R. (1999). "Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?", p.37-61. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Duval, R. (1995). "Sémiosis et Pensée Humaine. Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels". Editorial Peter Lang S.A. Editions Scientifiques Européennes.

Duval, R. (1996). "Pour une approche cognitive de l'argumentation. Annales de Didactique et de Science Cognitive. Vol. 3. Strasbourg.

Padilla, V. (1990) "¿Ayudan las figuras a ver en geometría?" Annales de Didactique et de Science Cognitive. Vol. 3. Strasbourg.

LA REFLEXIÓN Y LA VALORACIÓN EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE: UNA NECESIDAD EN LA ENSEÑANZA CONTEMPORÁNEA.

Mariano Héctor Jiménez Milián
Departamento de Matemática y Computación. Facultad de Ciencias.
I.S.P "Enrique José Varona". Ciudad Escolar Libertad. Ciudad de La Habana. Cuba.
hjm@upejv.edu.cu

RESUMEN:

El trabajo presenta los resultados alcanzados con relación al desarrollo de los procesos metacognitivos, alcanzados como parte de la investigación "Propuesta para mejorar la referencia y aplicación de los saberes del Análisis Matemático en la formación de profesores" desarrollada por el autor, culminada en el año 2000 y generalizada en el año 2001. Esta investigación se sustentó a partir de los aportes fundamentales de la enfoque histórico-cultural, donde se incluyen la interacción entre lo afectivo y lo cognitivo en el desarrollo de la actividad de la tendencia dialéctico-humanista y la necesidad de la organización de los saberes del Procesamiento de la Información.

Como resultado fundamental se aportó una propuesta didáctica para la enseñanza del Análisis Matemático, que se imparte en los Institutos Superiores Pedagógicos en la carrera Matemática y Computación.

INTRODUCCIÓN

La orientación para la acción, por lo general, no recibe durante el proceso de enseñanza-aprendizaje toda la atención, según el autor, que la misma necesita. En la investigación concluida en el año 2000 y desarrollada por este (Jiménez, 2000), se puso en evidencia que la ejecución de los procedimientos generados por los conceptos y teoremas, así como las tareas típicas, necesita de una orientación efectiva.

Se asume que la orientación más efectiva, en cualquier nivel de enseñanza y formación profesional, es aquella que resulta de la elaboración del estudiante como resultado de su aprendizaje. A esta conclusión se arriba, entre otros aspectos, por su correspondencia con la función desarrolladora de la ejercitación, porque expresan una vinculación entre el saber y el saber hacer, porque el estudiante incorpora a las mismas sus criterios y las hace más fiables para sí, además muestran el desarrollo alcanzado por el estudiante al elaborar estrategias de actuación para aplicar sus saberes. Constituyen también un elemento organizador de los procedimientos, al agrupar bajo una misma orientación a diferentes procedimientos relativos a una misma exigencia. Las orientaciones para los procedimientos que generan las tareas típicas son muestras de ello.

DESARROLLO

En no pocas ocasiones los profesores se preocupan por realizar un conjunto determinado de ejercicios, asumiendo que estos garantizan un proceder relativo a determinado conocimiento y luego comprueban que con pocas variaciones en otro ejercicio similar a los realizados el estudiante falla.

Se considera que en situaciones como estas los estudiantes carecen de una orientación que les permita conducir la ejecución, ya que el "nuevo" ejercicio no se encuentra entre los realizados y hay que aprender a hacerlo como se hizo con los anteriores. El estudiante, siempre busca en lo que posee para proceder de forma similar. (Jiménez, 2000)

La orientación es el referente que permite guiar la ejecución y cuando es construida por los estudiantes, como resultado de las particularidades que se presentan atendiendo a lo invariante, a lo que hay que hacer, independiente de cada caso concreto, son muy efectivas.

No obstante, la orientación por sí misma no garantiza una ejecución eficiente de la actividad por parte del estudiante, en la ejecución inciden también otros elementos que pueden llevar a realizar una ejecución deficiente y que entre otros están: las creencias personales (Santos, 1992), las ideas alternativas (Carrascosa y Gil, 1999) y la falta de control. El autor asigna el peso mayor a la última y por ello la abordará en detalle.

LAS ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS

El análisis del proceso de resolución de los ejercicios en general y en Análisis Matemático, en particular, sobre la base de los criterios de los estudiantes, lleva a que se plantee que la resolución, en general, está guiada por la orientación que estos poseen y la ejecución, por la adecuación del patrón al caso particular de que se trate.

No obstante, no es posible concluir que el proceso discurre por mera transferencia de la orientación al caso particular, ya que se observa una cantidad considerable de situaciones que hacen que este proceso no sea efectivo, es decir, el resultado no es el esperado con relación a la orientación que posee el estudiante.

Es criterio del autor que en situaciones como éstas, interviene de manera directa, el poco o ningún control que el estudiante realiza de la misma. ¿Por qué?

Por lo general se le concede mucha importancia al control de la dirección del proceso y muy poca, en ocasiones ninguna, al control como elemento del aprendizaje, coincidiendo el autor con el criterio de que "... el requisito del control no sólo obedece a la teoría general de la dirección, sino que también se deriva de la teoría psicológica de la asimilación" (Talízina, 1984, p.255)

Reafirma estos criterios la Dra. Pilar Rico Montero al decir que "existen... acciones que debe realizar el estudiante... para un aprendizaje más efectivo, para una asimilación más consciente de los contenidos de las asignaturas, estas son las habilidades para..., controlar y evaluar la actividad de aprendizaje, las que presuponen un comportamiento más reflexivo y regulado en dicho proceso" (Rico, 1996, p.4)

Estos criterios permiten que el autor sustente la necesidad de incluir explícitamente al control como contenido de enseñanza, pero insertado como parte de las estrategias cognitivas y metacognitivas que lleven a formar una personalidad reflexiva, crítica y autorregulada. Esto es recogido por la Dra. Pilar Rico Montero al precisar que "estas habilidades (planificación, control y valoración) no siempre son insertadas en la actividad de aprendizaje..., sin embargo su inclusión se justifica... son precisamente muchos de estos procedimientos los que se ponen en marcha cuando el sujeto enfrenta las diferentes tareas y problemas..." (Rico, 1996, p.4)

Por ello esta autora es del criterio de incluir dentro de las habilidades a desarrollar en los estudiantes las habilidades: controlar y valorar.

No obstante, la literatura especializada que aborda el control, la reflexión y la autorregulación lo ha hecho, fundamentalmente, desde la perspectiva de la resolución de problemas, donde son más observables estas manifestaciones en los estudiantes, ofrece más posibilidades para su estudio y resultan ser condiciones necesaria para el resolutor. La pregunta es ¿Sólo a través de la enseñanza de la resolución de problemas es posible incorporar estos elementos?

Por ejemplo, en la enseñanza del Análisis Matemático la exigencia:

“Analice si la función $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-k}$, $k\in\mathbb{R}$ *tiene o no límite cuando* $x\to k$,

necesita que el estudiante en su actuación controle su ejecución y realice las valoraciones correspondientes, por tanto este tipo de exigencia condiciona la transformación de lo dado en lo buscado obligatoriamente mediante un proceder reflexivo y autorregulado.

Este es uno de los tipos de ejercicios de tesis indeterminada, con respecto al cálculo de límite, que puede formar parte de una colección básica de ejercicios. Salta a la vista que el considerar el desarrollo de la ejercitación a través de la que se ha dado en llamar colección básica, entre otros aspectos, desarrolla también la reflexión y autorregulación en los estudiantes, pues la resolución de ejercicios de tesis indeterminada así lo demanda. Lo cual constituye a su vez, una de las razones para la introducción de estrategias metacognitivas también en la fijación del conocimiento y el desarrollo de las habilidades.

El término estrategia, generalmente se asocia con acciones a realizar para obtener un resultado o también como señala el Dr. Labarrere Sarduy y comparte el autor, “las estrategias son “instrumentos” de la actividad cognoscitiva que permiten al sujeto determinada forma de actuar sobre el mundo, de transformar los objetos y situaciones” (Labarrere, 1996, p.70) El mismo autor refiere que la literatura psicológica al referirse a la Metacognición “por lo común hace alusión a un tipo particular de proceso que tiene lugar en la actividad cognoscitiva... que posee como característica principal la de ejercer una función reguladora” (Labarrere, 1996, p.61), criterio que se asume en este trabajo al elaborar las estrategias.

En el Anexo 1 se muestran las estrategias metacognitivas que se diseñaron a partir de las diferentes situaciones en que se puede encontrar el estudiante, con relación a la comunicación, en el proceso de enseñanza-aprendizaje o incluso fuera de este: ante sí mismo, ante el profesor o ante la propuesta de otro estudiante u otra persona o un material docente.

No obstante a estas estrategias, ante la situación que debe enfrentar un estudiante al resolver un problema en Análisis Matemático o cualquier otra disciplina, carecen de orientaciones específicas que lo guíen en su resolución, por ello se entiende necesario abordar las estrategias para resolver problemas también como contenido de enseñanza que, aunque relacionadas con este tema, no serán abordadas en este trabajo.

El método de trabajo en clases comenzó con la búsqueda de la independencia del estudiante al orientarse las tareas en esta dirección. El aspecto a tratar se conoce siempre con antelación y todos deben prepararse para discutirlo (pueden existir variantes de preparación en dúos o equipos más amplios)

Por voluntariedad un estudiante presenta el asunto y guía la discusión; ante las fallas resulta necesario la activación de los conocimientos (nodo cognitivo) hasta esos momentos tratados y la realiza el estudiante ponente o puede constituir un paso previo sobre todo al principio de los temas o de la asignatura.

Es aceptado traer resultados personales que se consideren sean de interés colectivo.

La resolución de cada ejercicio debe ser realizada por un estudiante y este pondrá énfasis en la orientación y estrategias utilizadas y el por qué de las mismas, cómo controló el proceso y la validez de la solución hallada así como otras vías de solución posibles. El cierre del ejercicio siempre debe ser una valoración de la situación de enseñanza-aprendizaje producida.

Todos los ponentes son evaluados. El grupo propone una evaluación fundamentada, el profesor también y el estudiante a evaluar determina, de ser necesario, qué criterio refleja más certeramente sus logros y dificultades. Cuando en una actividad el profesor tiene que actuar como ponente, debe propiciar (a través de preguntas) que los propios estudiantes arriben a la solución y a las causas que originaron las dificultades para resolver la tarea, y finalmente que realicen una valoración de la situación de enseñanza-aprendizaje producida. En el caso de la resolución de un problema se añade el análisis de la vía de solución como un nuevo procedimiento. Se deben hacer valoraciones de la necesidad de los saberes con relación al área del conocimiento que trate el problema para poder resolverlo y de una visión creativa en su aplicación.

Este método permite valorar tanto al expositor como a otros estudiantes y en ocasiones al grupo docente resaltando sus aciertos (incluye los profesionales), en el caso de los desaciertos se señalan como aspectos aún no logrados y se ofrecen las posibles vías para su eliminación.

En cada caso es necesario realizar una valoración colectiva de los participantes y si están en condiciones de ser calificados, se emitirá una calificación para cada uno de ellos. El valor “2” (MAL) nunca se utilizó para señalar el aprendizaje real alcanzado en relación con el esperado, sino como sanción por el no-cumplimiento de las tareas, referidas tanto a la actividad que se desarrolla como la preparación realizada para ella.

Cada estudiante debe participar aproximadamente en el 50% de las clases de la asignatura y tener del 50 al 60 % de las participaciones aprobadas, lo que unido a los resultados alcanzados en las preguntas escritas y la prueba intrasemestral debe darle la nota como mínimo de aprobado para realizar el examen final.

La individualidad pudo ser controlada por la participación de los propios estudiantes, al dar criterios de lo realizado por ellos antes de criticar al ponente.

El método de relacionar la crítica con la autocrítica incidió de forma positiva en el desarrollo de la habilidad valorativa, lo que facilitó extraordinariamente la investigación. Sus criterios estaban cada vez más próximos a sus resultados.

El desarrollo de seminarios, donde el estudiante no tenía que defender un tema sino que debía impartir una clase generalmente de fijación, y los resultados alcanzados en ellos, permiten plantear que este tipo de seminario posibilita en mayor medida interactuar en la dirección de la relación interdisciplinaria con la disciplina Metodología de la Enseñanza de la Matemática, el componente laboral y que los estudiantes se sienten más motivados.

¿Cómo se realizaron?

Se distribuyó la tarea en equipos, uno era el equipo controlador y otro el ponente, el resto de los equipos representaban a los estudiantes que reciben la clase.

Se utilizó para el control de la actividad la guía de observación de clases que se utiliza para los estudiantes en práctica docente. Todos la tienen y es la guía para la discusión.

El ponente evaluaba y calificaba a los estudiantes, el equipo de control evaluaba al equipo ponente y proponía una calificación de la clase, finalmente todos evaluaban al equipo de control y proponían una calificación de su actividad. La crítica colectiva determina por unanimidad o consenso la evaluación y calificación final de cada participante.

Otra de las características de la puesta en práctica de la propuesta la constituyó el hecho de que en todas las clases se podía trabajar con otro estudiante, generalmente lo hacían con el de al lado.

Los resultados alcanzados se valoraron sobre la base del experimento secuencial, entendido como la aplicación de la propuesta a un grupo docente y la evaluación de los cambios que produce en el aprendizaje de los mismos a partir de un análisis comparativo de evolución que recoge el antes, durante y el después, a través de cuatro indicadores, considerados invariantes y que conforman un ciclo, en el modo de actuación ante una exigencia expresados a través de las acciones: identificar, seleccionar, aplicar y responder asumidos de la forma siguiente:

Identificar los conocimientos vinculados con la exigencia planteada.

Seleccionar entre los saberes que se poseen aquellos que posibilitan responder a la exigencia planteada.

Aplicar el sistema seleccionado controlando en su aplicación lo acertado de la identificación y selección realizada así como la propia aplicación.

Responder a la exigencia planteada.

Para la comparación se utilizó el análisis de varianza de rangos de Friedman con las hipótesis nula y alternativa H_0 y H_1 respectivamente.

H_0: No hay diferencias en los resultados.

$H_{1:}$ Hay diferencias en los resultados.

En todos se rechaza H_0 por ser significativamente favorables las diferencias después de la puesta en práctica de la propuesta.

Los resultados alcanzados en la investigación desarrollada demuestran la validez de estos criterios.

CONCLUSIONES

Con la concepción de incluir las estrategias metacognitivas como contenido de enseñanza de las diferentes disciplinas o asignaturas tanto en la formación de profesionales como en la formación general, nos estaremos aproximando cada vez más al modelo de personalidad que queremos alcanzar: reflexiva, autorregulada, valorativa,..., en fin un ser del siglo en que vivimos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Jiménez, H. (2000). *Propuesta para mejorar la referencia y aplicación de los saberes del Análisis Matemático en la formación de profesores*. Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas, Ciudad de La Habana, 2000.

Carrascosa, J. & Gil, D. (1999). *Concepciones alternativas: sus implicaciones didácticas en la renovación de la enseñanza de las ciencias*. PROMET. Proposiciones Metodológicas. Editorial Academia. La Habana.

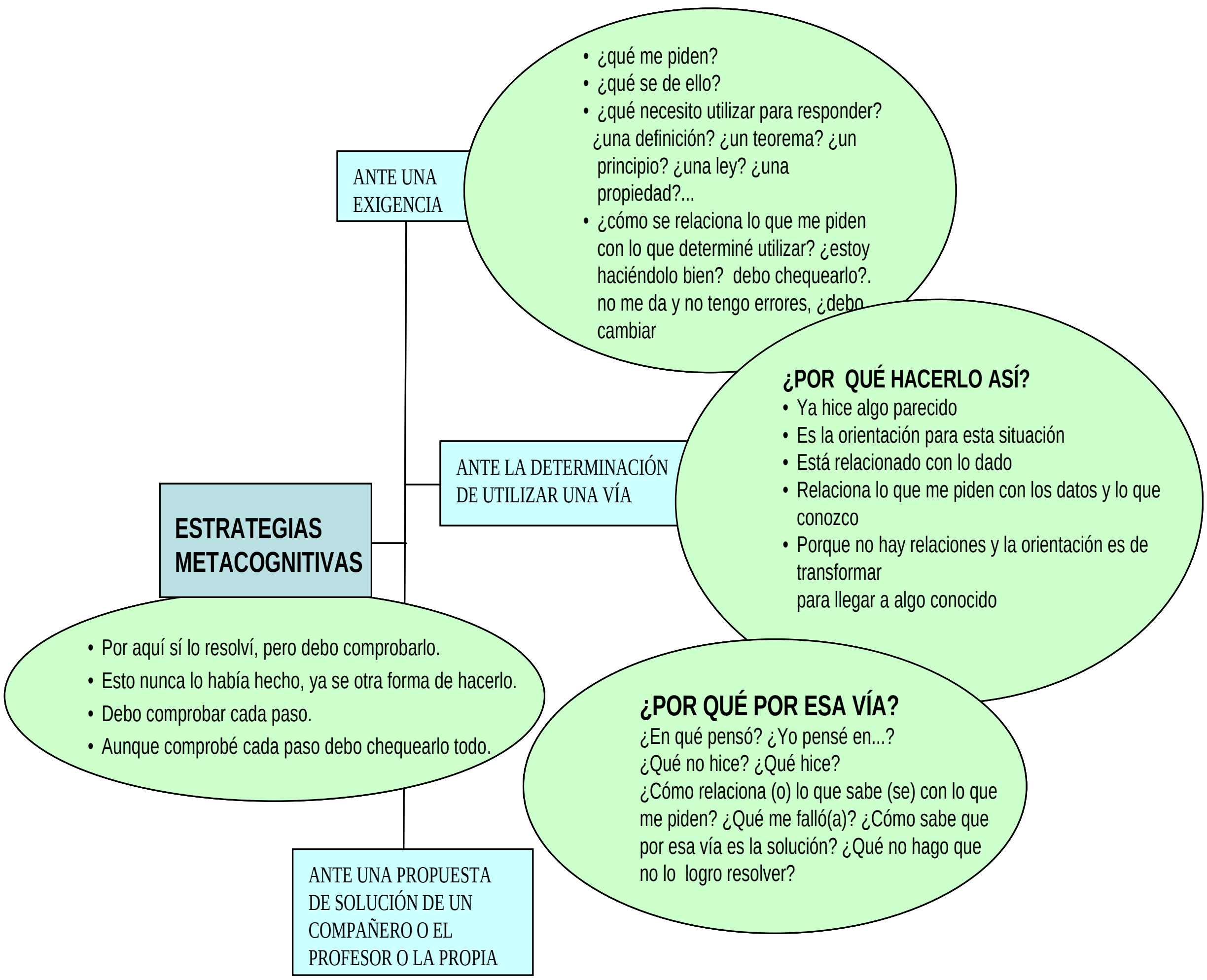
Labarrere, A. (1996). *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Rico, P. (1996). *Reflexión y aprendizaje en el aula*. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.

Santos, L. M. (1992). "Resolución de problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas". En *Educación Matemática*, V. 4, Nº 2 .

Talízina, N. F. (1984). *Los Fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior*, DEPES. Universidad de la Habana.

ANEXO 1



EL APRENDIZAJE DESARROLLADOR COMO MARCO TEÓRICO PARA EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES, EN EL NIVEL PREUNIVERSITARIO.

Mario Armando Gómez Hernández.

Instituto Superior Pedagógico "Rubén Martínez Villena" de La Habana. Cuba

ispvillena@rimed.cu

RESUMEN:

En las investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes, en los contenidos matemáticos de la escuela media, se ha podido determinar que muchas veces los alumnos poseen ciertos conocimientos y lo pueden usar solamente en situaciones formales o dirigidas. Sin embargo, este conocimiento no aparece cuando el contexto incluye mayores exigencias como la solución, en general, de un determinado problema.

Las propuestas teóricas para erradicar las deficiencias en el aprendizaje, que actualmente tienen los estudiantes, potencia como objetivo la apropiación activa y creadora de los conocimientos, que el proceso propicie el desarrollo de su autoperfeccionamiento constante, su autonomía y reflexión, y que el alumno ocupe el papel protagónico que le corresponde en el proceso de apropiación y aplicación de los conocimientos.

En este trabajo se muestra cómo es posible a través de un "aprendizaje desarrollador" de las funciones en el preuniversitario, lograr que los estudiantes pueden transferir los conocimientos aprendidos en estos contenidos a la solución de ejercicios y problemas, tanto de las otras asignaturas del currículo escolar, como vinculados a su vida cotidiana.

El marco teórico y metodológico en el que se fundamenta la propuesta es el Enfoque Histórico-Cultural, en lo relativo a la estructuración del conocimiento y a la resolución de problemas.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las funciones reales de variable real en los currículos escolares es una herencia de la llamada "Matemática Moderna", introducida en Cuba en la década del 70 del siglo pasado; actualmente estos contenidos forman parte de los programas de Matemáticas de casi todos los países iberoamericanos - para muchos especialistas este es el concepto más importante del nivel preuniversitario en la enseñanza de la Matemática-. En su aprendizaje se han podido constatar múltiples deficiencias, algunas de las cuales tienen carácter general y son aplicables a cualquier contenido matemático; otras constituyen singularidades específicas de este complejo de materia.

Una evidencia de la situación que existía en Cuba con el estudio de este concepto, se pone de manifiesto en un análisis realizado por especialistas del Ministerio de Educación de este país sobre las características de la enseñanza de la Matemática, hasta la primera mitad del siglo XX, donde se plantea que "la resolución de ecuaciones se realizaba de una forma mecánica, utilizando procedimientos que enmascaraban la esencia del proceso y el concepto se impartía completamente desvinculado de otros temas, íntimamente relacionados a éste, en particular el de función"(Campistrous, 1984).

A partir de 1976 se introduce, en Cuba, la metodología de la enseñanza de la Matemática, basada en experiencias de la antigua República Democrática Alemana, donde se da un cambio radical en el tratamiento de los conceptos función y ecuación, pues se logra familiarizar, desde edades tempranas al escolar con las correspondencias y las igualdades con una o más variables, y se establecen las llamadas "Líneas Rectoras o Directrices" de la enseñanza de la Matemática, lo que trae consigo un trabajo sistemático[1] en cada una de las unidades de los diferentes grados de la Educación Primaria, formándose las bases para en la Enseñanza Media, definirlos de una manera rigurosa.

[1] Campistrous, Luis. Seminario Nacional a Dirigentes y Metodólogos del MINED. Ediciones del MINED. La Habana, 1984.

Sin embargo en la práctica se demostró que este currículo, para la enseñanza de la Matemática, no era el adecuado en correspondencia con las condiciones histórico culturales de nuestro país, los intereses económicos, y la preparación de maestros y profesores para enfrentar dichos programas escolares, lo cual tuvo como resultado la poca solidez en el aprendizaje de los escolares. Tales dificultades, entre otras, determinaron que se confeccionaran libros de textos y orientaciones metodológicas para la enseñanza de la Matemática, aprovechando las experiencias acumuladas por docentes de nuestro país.

Las principales características en los nuevos documentos, en relación con lo que anteriormente existía, respecto a los complejos de materias ecuaciones y funciones, fueron:

1. El estudio de las funciones potenciales fue trasladado del grado 9^{no} al 10^{mo} de la enseñanza general media.
2. El tratamiento del concepto función se mantuvo en 8^{vo} grado como correspondencia entre conjuntos, y en 10^{mo} grado como conjunto de pares ordenados.
3. El estudio en el nivel secundario de las ecuaciones de segundo grado antes de las funciones cuadráticas, por la posibilidad que ofrece de combinar el cálculo analítico de ceros, con la obtención de la gráfica.
4. Se desarrolló un algoritmo de discusión de la función cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$, $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ y } c \in \mathbb{R})$, donde se tomaron como aspectos principales: ceros (si existen), vértice, eje de simetría, así como el ploteo de puntos y sus simétricos con respecto a dicho eje.
5. Se imparten todas las ecuaciones antes que las funciones correspondientes según el tipo de cada una de ellas, es decir se calculan imágenes y después se estudian las funciones correspondientes.
6. Algunas propiedades ligadas a las funciones tales como monotonía, extremos, y ceros no se definen explícitamente para todas las clases de funciones, sino que se tratan de formar de una manera intuitiva.

A partir del curso 99/2000, se introdujeron modificaciones en los programas del nivel secundario, lo que trajo por consecuencia cambios en el currículo de la asignatura en el preuniversitario, a partir del siguiente curso escolar. Como consecuencia de esto, sólo se imparten en el nivel secundario las funciones y ecuaciones afines, en el dominio de los números reales, y se deja para el preuniversitario la enseñanza de todas las demás clases de ecuaciones y funciones. Sin embargo, a pesar de estos cambios curriculares, los conocimientos de los estudiantes no son sólidos, y lo que es más grave, los alumnos son incapaces de transferir lo discutido en el salón de clases a situaciones más abiertas como resolver problemas vinculados con la utilización de gráficos, y de relacionar estos con las propiedades de las funciones correspondientes.

DESARROLLO

En los trabajos de constatación de la investigación, para determinar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las funciones en el nivel preuniversitario, se ha podido precisar que estas dependen de múltiples factores, pero fundamentalmente de la creencia que tienen los profesores acerca de qué es la matemática, cómo enseñarla y para qué se aprenden estos contenidos en la escuela. Los resultados obtenidos apuntan hacia las afirmaciones siguientes, que caracterizan el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos contenidos en el preuniversitario.

- El papel protagónico lo juega el profesor, este trasmite conocimientos sin propiciar la búsqueda de estos por los estudiantes, lo que limita considerablemente la posibilidad de los alumnos para transferir estos conocimientos a otros contextos.
- Los alumnos tienen tendencia a la ejecución inmediata, si el ejercicio o problema hay que pensarlo más de 3 minutos renuncian a su solución, consideran no estar preparados para esa tarea.
- Creencia de los profesores sobre lo que significa saber Matemáticas, esto trae por consecuencia que sólo se debe enseñar lo que "explícitamente va a prueba de ingreso a la Educación Superior", y que predomine un tipo de instrucción que renuncia tácitamente a la teoría y absolutiza la resolución de ejercicios como única vía de aprendizaje de esta ciencia.
- Formalismo en la enseñanza de la Matemática, manifestado en el divorcio evidente que existe entre contenido y forma, o entre sintaxis y semántica en la enseñanza de estos contenidos, lo que repercute en su asimilación y la posibilidad posterior de aplicar los conocimientos a situaciones no discutidas en el salón de clases.
- No se domina el trabajo sistemático con el diagnóstico, y en los casos que este se realiza es formal, no se le da seguimiento y no constituye un instrumento de trabajo que permita armonizar la relación diagnóstico-pronóstico-resultados.
- Se imparten y evalúan sólo los contenidos del grado, y por lo tanto no se materializa el principio de la sistematicidad de los conocimientos.
- Las clases de ejercitación, que representan más del 80% de los programas de estudio, no son variadas de manera tal que incluyan ejercicios sin solución, con varias soluciones y con soluciones únicas, y el trabajo independiente dentro de este tipo de clases es prácticamente nulo, pues la intervención continua del profesor no lo permite.

Cabe preguntarse entonces si los contenidos que aparecen en el currículo son los que realmente necesitan los estudiantes para el desarrollo profesional o social, o si el problema radica en cómo se produce el proceso de aprendizaje. Esto ha motivado la investigación de nuevas dimensiones, es decir no sólo centrarse en lo que se debe estudiar, y cómo enseñarlo, sino en la forma en que se debe producir el aprendizaje.

En referencia a lo anterior (Greeno ,1991) afirma: “aprender el domino $[Matemáticas]$ es semejante a aprender a vivir en un ambiente determinado, es aprender a moverse alrededor del medio, saber qué recursos son disponibles, y aprender a usar tales recursos al conducir actividades propias en forma productiva y placentera.”

El criterio actual en la didáctica de la Matemática es que los estudiantes pueden haber recibido un determinado contenido; pero si no son capaces de usar el conocimiento disponible, es decir, conceptos, teoremas, procedimientos y habilidades en la solución de nuevos problemas o situaciones anticipadas, entonces el contenido de referencia no ha sido “aprendido”, con lo que se destaca la importancia de la transferencia y la flexibilidad en el uso de estrategias para el aprendizaje de las Matemáticas. (Schoenfeld ,1994) sugiere que “para caracterizar lo que un estudiante sabe acerca de la Matemática, se debe poner atención a lo que ese estudiante puede hacer matemáticamente y no pedirle que recite un inventario de hechos y procedimientos.”

Por lo tanto, la enseñanza formal que predomina en nuestras aulas constituye un obstáculo para que los alumnos puedan aplicar los conocimientos aprendidos a situaciones no discutidas en el salón de clases, esto significa que es necesario lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador que facilite la comprensión y aplicación de los conocimientos a la solución de problemas en diferentes contextos.

El concepto “aprendizaje desarrollador”, es una teoría didáctica que ha sido desarrollada sistemáticamente en Cuba por el Dr. José Zilberstein Toruncha, la Dra. Margarita Silvestre y otros pedagogos.

Este proyecto, basado precisamente en la teoría del aprendizaje desarrollador, se caracteriza por que:

1. Centra su atención en el docente y en el alumno, por lo que su objeto de estudio lo constituye el proceso de enseñanza y aprendizaje.
2. Considera la dirección científica por parte del maestro de la actividad cognoscitiva, práctica y valorativa de los alumnos, teniendo en cuenta el nivel de desarrollo alcanzado por estos y sus potencialidades para lograrlo.
3. Asume que mediante procesos de socialización y comunicación se propicia la independencia cognoscitiva y la apropiación del contenido de enseñanza (conocimientos, habilidades, valores)
4. Garantiza que con su aplicación se forma un pensamiento reflexivo y creativo que permite al alumno “llegar a la esencia”, establecer nexos y relaciones, así como aplicar el contenido aprendido a la práctica social, de modo tal que solucione problemas no sólo del ámbito escolar, sino también familiar y de la sociedad en general.
5. Propicia la valoración personal de lo que se estudia, de modo que el contenido adquiera sentido y el alumno este interiorice su significado.
6. Estimula el desarrollo de estrategias que permiten regular los modos de pensar y actuar, que contribuyan a la formación de acciones de orientación, planificación valoración y control.

Ante la situación descrita y el interés que existe, tanto en Cuba como en el extranjero, por elevar la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se toman diferentes alternativas didácticas que puedan contrarrestar las dificultades existentes, en este caso particular se diseñó y realizó un proyecto investigativo, cuya base teórica lo constituye el “aprendizaje desarrollador”, y que permitió experimentar las concepciones siguientes.

1. Para las funciones lineales (en Cuba se le llama así a las que en otros países se consideran afines), cuadráticas, fraccionarias y con radicales se discuten primero las ecuaciones y después las funciones correspondientes; pero para las funciones trascendentes (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas), se invierte el orden, es decir, primero cada clase de funciones y después las ecuaciones correspondientes. En la totalidad de los currículos escolares de Iberoamérica el orden es funciones y después ecuaciones, excepto en Cuba, que es ecuaciones y después funciones

2. Las funciones lineales son discutidas en el salón de clases con todo el tiempo necesario a partir de un conjunto de actividades que se considera “minimal”, para su aprendizaje.
3. Se mantiene como invariante metodológica el conjunto “minimal” de actividades, para el aprendizaje de las restantes clases de funciones, y a partir de los cambios que es necesario introducir o no para el aprendizaje de las propiedades de las diferentes clases de funciones, se problematiza el contenido.
4. Se introduce cierta flexibilidad en el trazado de las gráficas a partir de la ecuación funcional y viceversa.
5. Se cambia sistemáticamente el uso de las variables que intervienen en la ecuación funcional, pues en la creencia de muchos estudiantes se mantiene el criterio que si no hay “x” y “y”, entonces la ecuación funcional no es una función.
6. Se aplica de manera continua el principio de la sistematización de los conocimientos matemáticos, lo que posibilita mantener activo en los alumnos el dominio de los contenidos que constituyen núcleos básicos, en el nivel preuniversitario.
7. La dirección del proceso de aprendizaje por parte del maestro se realiza a partir del diálogo heurístico, con la aplicación de las técnicas para formular preguntas.

Para finalizar, y con el objetivo de que se tenga una idea más clara de los resultados obtenidos, se mostrarán las estrategias seguidas en el proyecto, para que los alumnos pudieran transferir la definición de cero, que sobre funciones lineales ya poseen a la función *g* con *g(x) = sen x*.

ACTIVIDADES

Se les pregunta a los alumnos el concepto de “cero” de una función lineal. Estos deben responder que “si *f* con $f(x) = mx + n$, m $\in \mathbb{R}^*$, n $\in \mathbb{R}$, es una función lineal, entonces x_o, es un cero de *f* si y sólo si $f(x_o) = 0$”.

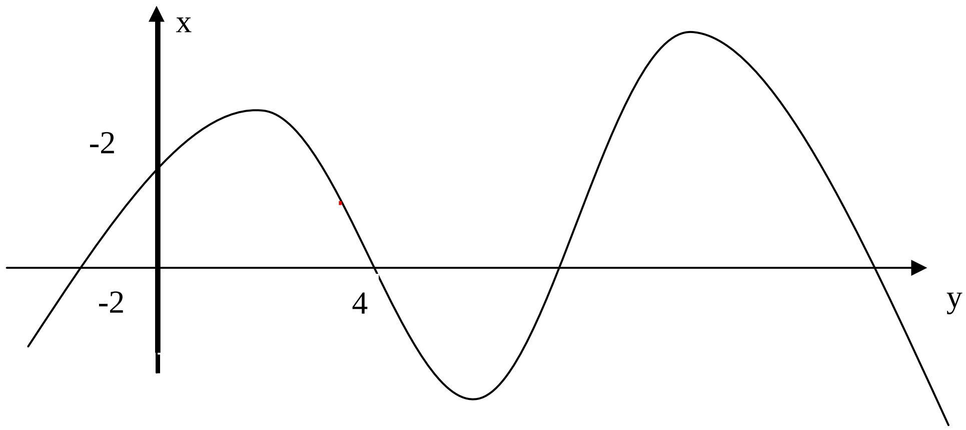
1.- ¿Cómo se puede hallar este valor?

La respuesta de los estudiantes debe ser $mx + n = 0$ de donde, $x = -\frac{n}{m}$. Con esto se concluye que el procedimiento es igualar la ecuación funcional a 0, pues los pares que pertenecen a la función tienen la forma (x;0).

2.- Se le pide a los alumnos que explican por qué las funciones lineales tienen a lo sumo, sólo un cero.

3.- Se propone a continuación el siguiente ejercicio con el objetivo de transferir el concepto de cero a cualquier gráfico.

“En el gráfico siguiente determine las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados señalados”



Obsérvese que hay puntos cuya segunda componente en el par es 0, hay otros que no; pero hay también puntos para los cuales no existe información que permita determinar sus coordenadas. También que el eje vertical es “x”, y el horizontal es “y”. Este tipo de actividad permite desarrollar el pensamiento “flexible y divergente” de los estudiantes.

4.- La discusión a partir del protagonismo de los estudiantes debe aportar la definición de cero, y el procedimiento de cálculo por reflexiones sobre el contenido para su determinación.

5. La evaluación del proceso permitirá a los alumnos valorar si el concepto de cero, para la función seno se adecua al concepto que se tenía para las funciones lineales, o si es necesario transformarlo.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos son alentadores pues se ha logrado una mayor independencia cognoscitiva por parte de los estudiantes y que ellos ocupen el papel protagónico que les corresponde en el proceso de aprendizaje.

Las principales dificultades del proyecto radican fundamentalmente en que todavía hay estudiantes desmotivados, así como la resistencia de algunos profesores para producir el cambio en los estilos de enseñanza, y el tiempo real de preparación de los docentes y alumnos para la búsqueda de información en el cumplimiento de las diferentes tareas docentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Campistrous, L. (2002). Didáctica y resolución de problemas. En *Memorias del II Congreso Internacional “Didácticas de las Ciencias”*, Cuba.

Campistrous, L. (1984). *Seminario Nacional a Dirigentes y Metodólogos del MINED. Ediciones del MINED*. La Habana.

Crespo, C. & Ponteville, Ch. (2002). “El concepto de función: su comprensión y análisis” en Delgado, J.R. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 16. Tomo I. Ciudad de La Habana, Cuba.

Santos, L. M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. Ciudad de México.

Zilberstein, J. (2002). *Aprendizaje desarrollador*. Editado por el IPLAC. La Habana.

Talleres

FLEXOGEOMETRÍA SIN REGLA NI COMPAS
EN LA CONCTRUCCIÓN DE POLÍGONOS Y POLIEDROS REGULARES

Oscar Pacheco Ríos
Grupo Internacional de Estudios de Etnomatemática. Cap. Bolivia: ISGEm-BOL
cepdi@mailcotas.com.bo ospar62@latinmail.com

RESUMEN:

Por alguna razón no muy bien explicada hasta ahora, el aprendizaje de la Geometría es el segundo tabú que crea anticuerpos en los profesores de todo nivel pues, siempre postergan a la geometría para los temas finales o ven el modo de soslayarlo, cuando deberían ser los temas geométricos los que coadyuven a los temas matemáticos. Consideramos que, con flexogeometría esa situación puede revertirse, pues, su aplicación es sencilla, no hace falta regla, compás ni transportador de ángulos y se puede hacer una geometría plana y tridimensional con un simple cuadrado de papel, para luego pasar a la matematización.

Este artículo va dirigido a los profesores de cualquier nivel de enseñanza y en él se discuten ideas aplicadas tanto a la geometría bidimensional como tridimensional.

INTRODUCCIÓN

La Flexogeometría sin regla ni compás es un recurso didáctico, basado en el papel en desuso que es lo que más abunda. Se inicia con la construcción de polígonos regulares mediante una simple fórmula $(\frac{1}{2})^{n\leq 128<n}$: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ ... punto de partida para tener una idea de lo que es la seriación aplicada al plegado en una hoja cuadrada al Trígono, Tetrágono, Pentágono, Hexágono, Heptágono, etc., luego se pasa a la construcción de los poliedros regulares.

En la geometría bidimensional primero se realizan trabajos de modelado o sea la etapa de geometrización, que, dependiendo del ciclo y nivel, desde la cardinalización por el número de lados de los polígonos para luego pasar a la matematización, iniciando con tablas de adición, y/o multiplicación según sea el requerimiento temático.

Del mismo modo se realizan actividades de Perímetro y Área mediante los diseños de contorno una vez construidas las figuras. Inclusive casi jugando con una especie de tangran, los aprendices ingresan a solucionar problemas complejos, casi sin darse cuenta de la complejidad por el aspecto lúdico que ofrece el recurso.

Para geometría tridimensional o del espacio, se usan los pasos didácticos de la geometría bidimensional, y se puede trabajar con Área y Volumen de los poliedros regulares según el nivel de aprendizaje, ciclo y grado de los aprendices. Los poliedros se construyen a partir de la triangulación de un círculo de papel y permiten visualizar de inmediato las áreas lateral y basal de cada poliedro, al ser armados, el volumen respectivo, creando sus propias fórmulas.

CONSTRUCCIÓN BIDIMENSIONAL POLIGONAL

Los primeros polígonos regulares más usuales

Construcción del polígono triangular equilátero

Para construir El *triángulo equilátero*, tomar el cuadrado de papel de cualquier tamaño que se desee y colocarlo en la posición que indica la (*Fig.* 1). Luego nombrar respectivamente, cada uno de los cuatro ángulos rectos con las letras "A", "B”, "C" y "D".

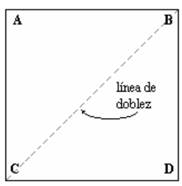


Fig. 1

Por los ángulos "A" y "B" doblar hacia abajo de modo que coincidan "A" con "C" y "B" con "D" (*Fig.* 2), y presionar con el dedo índice para obtener un doblez que sea la línea mediana.

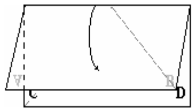


Fig. 2

Luego se la desdobla y se procede a marcar con las letras minúsculas "**a**", "**b**" (*Fig.* 3).

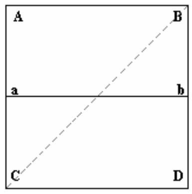


Fig. 3

Sobre la línea marcada por el doblez "**a**"—"**b**" (mediana del cuadrado "ABCD") llevar la punta del ángulo "B", iniciando otro doblez agudo en el vértice del ángulo "D", tal como indica la (*Fig.* 4), luego, pasar con el reverso de la uña del dedo pulgar en el pliegue resultante. Es importante que ese remarcado sea bien fuerte, pues ello facilitará el paso siguiente.

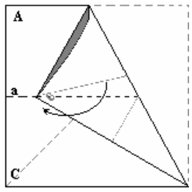


Fig. 4

Desdoblar el papel para tener nuevamente la posición inicial.

Con el cuadrado desdoblado vemos que se presenta un pliegue que parte del ángulo "D" hacia el lado opuesto "A"; "B", marcamos el punto "**d**" sobre el lado "A" "B" para determinar ese pliegue "D" "d". (*Fig.* 5).

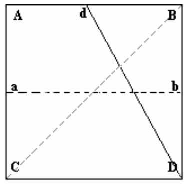


Fig. 5

Repetimos el procedimiento anterior, llevando el ángulo "A" sobre la mediana "**a**"—"**b**" (*Fig.*6) haciendo agudo el ángulo en "C" y también remarcamos con la parte posterior de la uña del dedo pulgar y, tenemos el pliegue "C", "c". (*Fig.* 6).

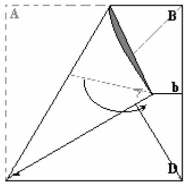


Fig. 6

Sin embargo, ahora ya no es necesario desdoblar el plegado, por el contrario se lo debe mantener en ese estado. Observamos que, hay una parte sobrante en forma de trapecio recto, sobre el filo "D", "d", como si fuera una a leta (*Fig.* 7), a la que llamaremos "S" en lugar de sobrante. Siguiendo el pliegue "D", "d", doblamos "S" sobre este pliegue y así concluimos con todos los pliegues del triángulo equilátero o ***Polígono triangular regular***.

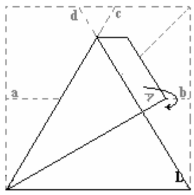


Fig. 7

Damos la vuelta al plegado y tenemos el polígono "DCE" listo (*Fig.* 8) para ser utilizado como patrón de trazado triangular, para crear otras formas geométricas, bordeando la ***Fig.* 6** misma con un lápiz o bolígrafo, cual si se tratara de un tangrán chino, como modelo que presentamos (*Fig.* 8a) que puede ser utilizado desde el nivel inicial coloreando, luego en el nivel primario con la cardinalidad del perímetro como veremos más adelante.

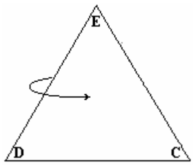


Fig. 8

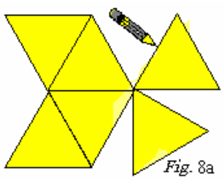
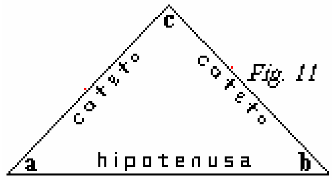


Fig. 8a

Construcción del pentágono.

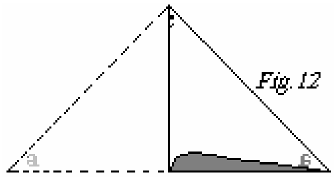
Paso 1

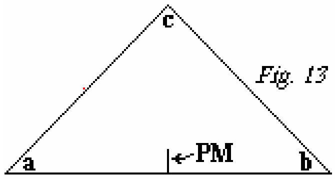
Se toma la plantilla de la (*Fig.* 1) y, se la pliega por la diagonal "B", "C" (*Fig.* 11) colocándola en la posición indicada, luego se procede a nombrar los ángulos "**abc**" de la figura, así como sus catetos y la hipotenusa. En educación inicial, bastará indicar que son los nombres que recibe la figura por tener un ángulo recto en "c", posteriormente se explicará el por qué.



Paso 2

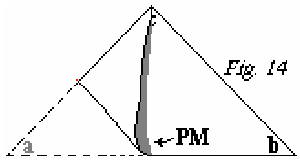
Se lleva el ángulo agudo "**a**" doblando por el medio, sobre "**b**" (“**a/b**”) como si quisiéramos obtener un medio triángulo (*Fig.* 12), pero, apenas marcamos como unos 6 mm. presionando el papel. Y, desdoblamos la figura. Esa marca la resaltamos con el lápiz o bolígrafo y denotamos el "Punto Medio" "**PM**" (*Fig.* 13) que, en un futuro será el eje, a partir del cual se generará el plegado del polígono respectivo.

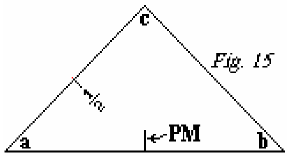




Paso 3

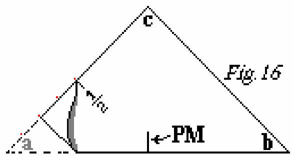
En el cateto determinado por los ángulos "**a**" y "**c**", tomamos el ángulo agudo "**a**" y lo llevamos sobre el ángulo recto "**c**" e igual que en el "*paso 2*" (*Fig.* 14), marcamos como unos 6 mm. presionando con las uñas el canto del papel. Desdoblando la figura, resaltamos la marca con el lápiz o bolígrafo y, anotamos la mediatriz "$\frac{1}{2}$" (*Fig.*15)

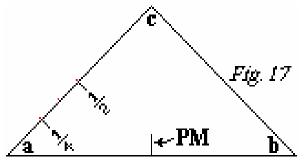




Paso 4

Retomamos, el ángulo agudo "**a**" y lo llevamos sobre la marca de la mediatriz, (*Fig.* 16) y marcamos como en el "*paso 3*" con la yema de la uña del pulgar apenas unos 6 mm.. De este modo hemos obtenido otro punto mediatriz del segmento comprendido entre "**a**" y "$\frac{1}{2}$", al que llamaremos "cuartatriz $\frac{1}{4}$"**,** que resulta ser el primer $\frac{1}{4}$ del cateto "**a—c**" (*Fig.* 17) como si todo el cateto se hubiera dividido en cuatro cuartos. Pero, lo llamaremos simplemente: "$\frac{1}{4}$"

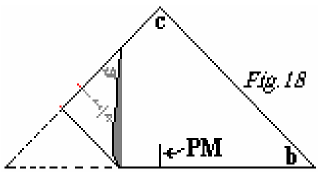


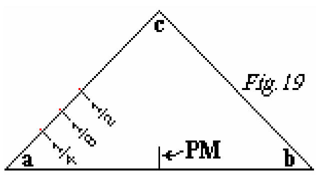


Paso 5

Otra vez, tomamos el ángulo agudo "**a**" y con dirección al ángulo "**c**" llevamos la marca de la "cuartatriz $\frac{1}{4}$" y hacemos coincidir ese punto con la señal "$\frac{1}{2}$" del cateto "**a—c**" (*Fig.* 18).

Realizamos la respectiva marca de unos 6 mm. Luego desdoblamos y resaltamos la marca, obteniendo así, la mediatríz entre los puntos "$\frac{1}{4}$" y "$\frac{1}{2}$". A este nuevo punto lo denominamos "octatriz $\frac{1}{8}$" que vendría a ser el tercer $\frac{1}{8}$ del cateto "**a—c**" (*Fig.* 19) que hipotéticamente hemos dividido en ocho octavos, e igualmente lo llamaremos simplemente: "$\frac{1}{8}$"





Paso 6

Nuevamente, tomamos el ángulo agudo "**a**" y con dirección al ángulo "**c**" llevamos la marca de la octatriz "$\frac{1}{8}$" y hacemos coincidir ese punto con el de "$\frac{1}{2}$" del cateto "**ac**" (*Fig.* 20). Realizamos la respectiva marca de unos 6 mm. Luego desdoblamos y resaltamos la marca, obteniendo así, la mediatriz entre los puntos "$\frac{1}{8}$" y "$\frac{1}{2}$". A este nuevo punto lo denominamos "$\frac{1}{16}$ dieciséisavatriz" que vendría a ser la séptima $\frac{1}{16}$ parte del cateto "**a—c**" (*Fig.* 21).

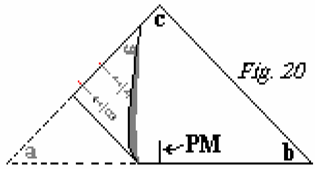


Fig. 20

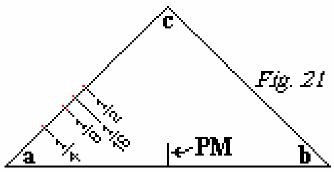


Fig. 21

Paso 7

Presionando con el dedo índice de la mano izquierda en "**PM**" y tomando el ángulo "**b**" con la derecha (*Fig.* 22) se lo lleva sobre la marca "$\frac{1}{16}$", determinando así el pliegue "**d —e**" (*Fig.* 23).

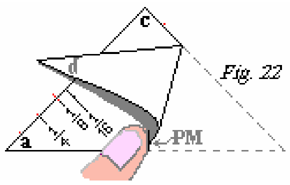


Fig. 22

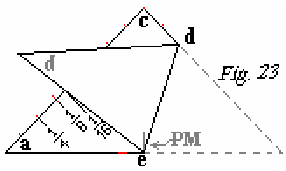


Fig. 23

Paso 8

Después de ese refilado se da la vuelta al plegado (*Fig.* 24) y se tiene tal como se puede ver en (*Fig.* 25), donde el borde "**a—e**" parece señalar la *bisectriz* del ángulo "**e**". Realizamos un leve giro a la izquierda como muestra (*Fig.* 26) y obtenemos la posición deseada en (*Fig.* 27) para proceder a marcar la línea de lo que será el lado.

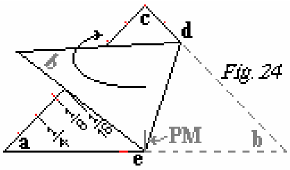


Fig. 24

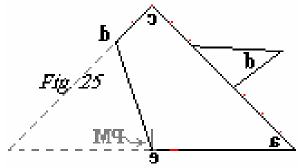


Fig. 25

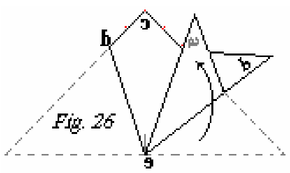


Fig. 26

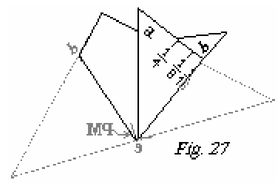


Fig. 27

Paso 9

Luego del paso anterior, tomamos la medida del radio del polígono utilizando la distancia comprendida entre **"e y f"** y, marcamos al lado opuesto en "**e—d**" (Fig. 28). Señalamos la línea de doblez que se inicia un poco más abajo del punto **"d"** hacia **"f"** (Fig. 29). Por esta línea doblamos hacia atrás la parte superior sobrante (*Fig.* 30), remarcando con las uñas el filo "**d—f**" que viene a ser uno de los lados del polígono de estudio, hecho esto, colocamos ese nuevo borde "**d—f**" hacia abajo. Observamos que hemos construido un triángulo isosceles con los lados "**e—d**" y "**e—f**" iguales. Finalmente.

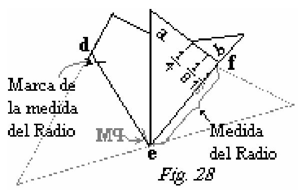


Fig. 28

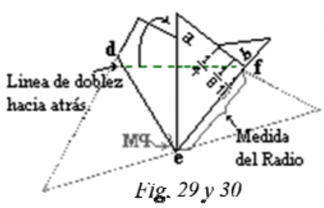


Fig. 29 y 30

Desdoblamos el plegado y tenemos el pentágono regular (*Fig.* 31). La que después de doblar hacia adentro las partes sobrantes resulta como (*Fig.*32), con la que se puede realizar el trazado en el cuaderno de trabajo contornando con el lápiz el borde.

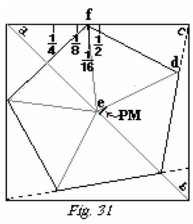


Fig. 31

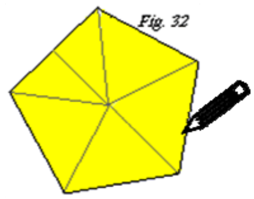


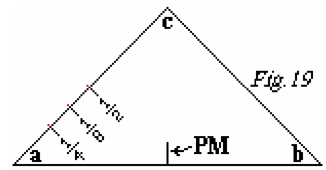
Fig. 32

Problematizacíón.-
Si el lado del pentágono de la fig. 32 mide 2 cm. ¿Cuánto mide todo el contorno?
Aplicando la fórmula de Herón halla el área de uno de los triángulos y después el área total.

Construcción del Hexágono.-

Paso 1

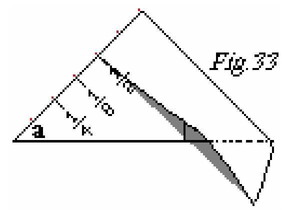
En la construcción del *hexágono*, se siguen los cinco primeros pasos de la construcción del pentágono, por lo tanto daremos inicio en el paso cinco determinado por (*Fig.* 19)

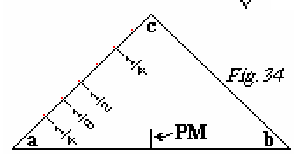


Una vez que se tiene el "*paso5*" de la construcción del pentágono, resulta mucho más sencillo construir el hexágono, pues, con los mismos procedimientos procederemos a marcar puntos en la parte derecha de la mediatriz "$\frac{1}{2}$", basando nuestro accionar en el razonamiento siguiente: si el lado del pentágono es mayor que el del hexágono y el pentágono, lo hemos construido determinando puntos en la parte izquierda de la mediatriz "$\frac{1}{2}$", esto implica que para el hexágono debemos utilizar la parte derecha de la mediatriz "$\frac{1}{2}$", siguiendo los procedimientos ya conocidos.

Paso 2

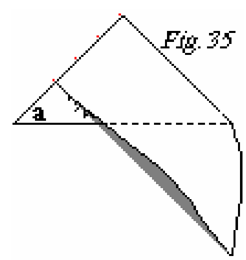
Los puntos determinados de la parte izquierda de la mediatriz "$\frac{1}{2}$" serán nuestros puntos referenciales para los siguientes pasos. Por tanto, tomamos el ángulo recto "**c**" y lo llevamos sobre la mediatriz "$\frac{1}{2}$" (*Fig.* 33) haciendo coincidir el borde del cateto "**b—c**" con la marca de "$\frac{1}{2}$" y procedemos a marcar presionando con la uña, como siempre unos 6 mm. Luego, desdoblamos el plegado y marcamos el punto "$\frac{1}{4}$" que viene a ser la mediatriz de la mediatriz "**a—c**". Si todo el cateto estuviera dividido en cuatro cuartos, éste sería el tercer "$\frac{1}{4}$" del mismo (*Fig.* 34).

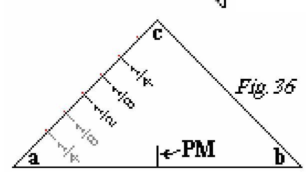




Paso 4

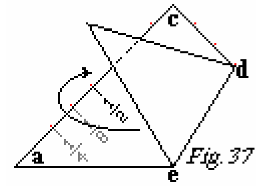
Nuevamente, tomamos el ángulo recto "**c**" y lo llevamos sobre el punto $\frac{1}{4}$ a la izquierda de la mediatriz "$\frac{1}{2}$" (*Fig.* 35), haciendo coincidir el borde del cateto "**b—c**" con la marca de "$\frac{1}{4}$" y procedemos a marcar presionando con la uña, con la medida ya conocida (6 mm), a continuación, desdoblamos el pliegue y tenemos para marcar el punto "$\frac{1}{8}$" u octatriz. Si el cateto "**a—c**" estuviera dividido en octavos, éste sería el quinto "$\frac{1}{8}$". Pero, lo tomamos apenas como punto referente, para facilitar la construcción del polígono hexagonal. Los otros puntos referenciales, están en gris para no confundirnos con los que estamos trabajando

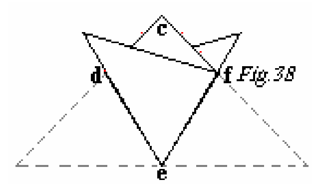




Paso 5

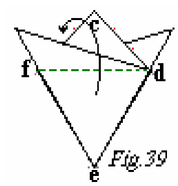
Tomamos el ángulo agudo "**b**" y lo llevamos sobre el punto "$\frac{1}{8}$" a la derecha de la mediatriz "$\frac{1}{2}$" (*Fig.* 37), haciendo coincidir el borde del cateto "**b—c**" con la marca de "$\frac{1}{8}$" y presionando con la uña, procedemos a refilar creando el borde o lado "**d—e**", a continuación, doblamos el pliegue hacia atrás y haciendo coincidir con el borde "**d—e**", igualmente lo refilamos con el reverso de la uña del pulgar y tenemos el lado "**e—f**" (*Fig*. 38).

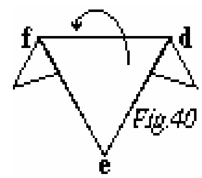


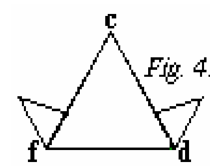


Paso 6

Con un bolígrafo sin tinta trazamos una línea recta desde "**f** "a "**d**" para determinar la línea del pliegue (*Fig.* 39) y doblamos hacia atrás por esa línea (*Fig.* 40). Ahora tenemos un triángulo equilátero "**f—e—d**", después, invertimos esa figura de modo que "**fd**", como base quede en posición horizontal (*Fig*.41) y comprobamos que tenemos un triángulo equilátero. Al desdoblar el plegado tenemos el hexágono regular construido







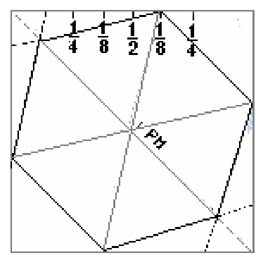


Fig. 42a

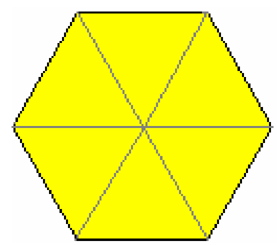
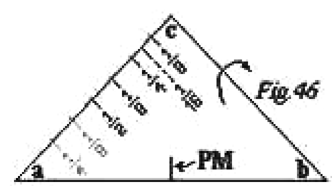


Fig. 42b

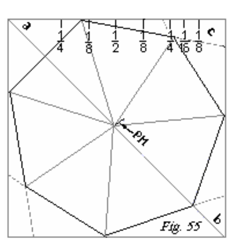
Construcción del Heptágono.

Con la construcción de los polígonos anteriores ya tenemos cierta experiencia, en consecuencia, construir el *heptágono*, resultará más fácil, los pasos ya conocidos y análogos para marcar los puntos referenciales hasta llegar al punto "$\frac{1}{16}$" de la Fig. 46



Siguiendo la modalidad del Pentágono y Hexágono tomamos el ángulo agudo "**b**" y lo llevamos sobre la marca del punto "$\frac{1}{16}$", haciendo coincidir el borde de la hipotenusa "**a—b**" Se refila, como en las Figs. 37 a 41

Desdoblamos el plegado y tenemos las Figs. 55 y 56.



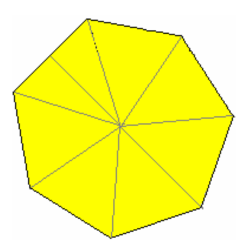
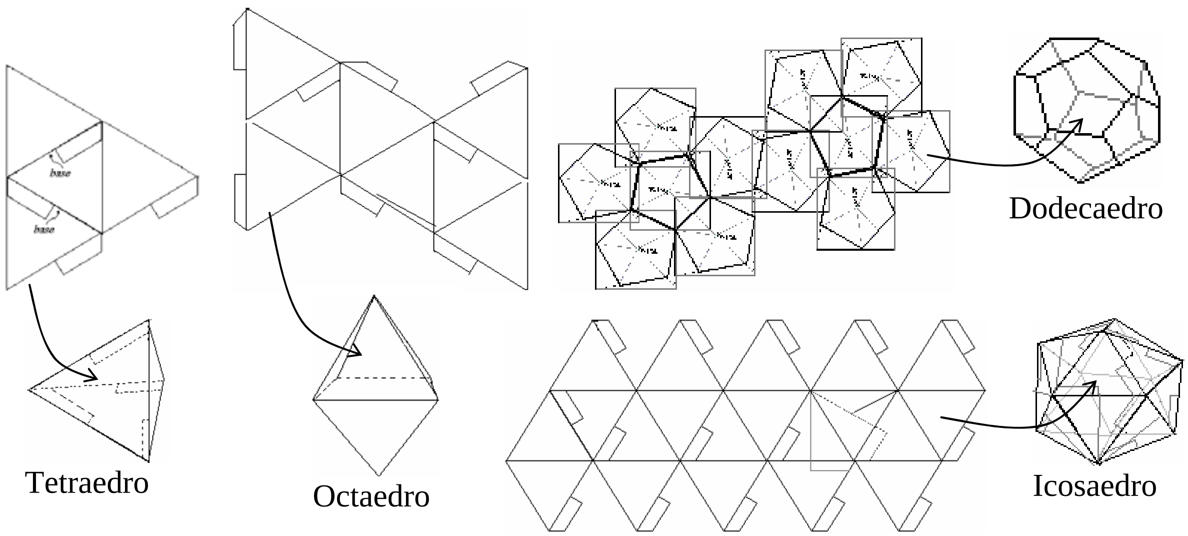


Fig. 56

CONSTRUCCION DE LOS POLIEDROS REGULARES

También por falta de espacio sólo presentaremos la planificación los respectivos poliedros, creemos que el armarlos no ofrecerá ninguna dificultad.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Martínez, A. y Rivaya, F. (1989). "*Una Metodología Activa y Lúdica para La Enseñanza de La Geometría*".Editorial. Síntesis Madrid, España.

Gran VOX. (1990) "*Diccionario de Matemáticas*" Bibliograf. SA Barcelona, España.

Marastroni M. (1980). "*Hagamos Geometría*" Ediciones Fontanela Madrid España.

Pacheco, O. (2000). "*El cuadrado un Rompecabezas*" Edit. CEPDI Santa Cruz, Bolivia.

Pacheco, O. (1992). "*Geommática-Enseñar Matemática Partiendo de la Geometría*" Edit. CEPDI Santa Cruz, Bolivia.

Smogorzhevski, A.S. (1967). "*La Regla en Construcciones Geométricas*" Editorial MIR Moscú.

SOFTWARE DIDÁCTICO EN EL PROGRAMA GEOMETRÍA VIVA

MC Lilia López Vera, Sandino Flores M., Oscar Fernández C. y Ruth Rodríguez G.

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas UANL, México

lilia_lopez@hotmail.com

RESUMEN

Ante el compromiso social de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México (FCFM-UANL), de investigar y contribuir a la solución de Problemas de Enseñanza de las Matemáticas en el País, se realizó un corte vertical en los programas de Geometría del nivel superior y medio superior en la UANL y en los programas del nivel básico y pre-escolar, para identificar la posibilidad de diseñar materiales didácticos que propicien el desarrollo de habilidades matemáticas y la construcción de conceptos de Geometría, surgiendo la propuesta de contar con un Software Didáctico como parte del Taller de Geometría para el Estado de Nuevo León.

Se concibe al Software Didáctico como un Medio para la Enseñanza-Aprendizaje de la Geometría, que el docente de cada nivel escolar emplearía, considerando los conceptos, objetivos y actividades complementarias marcadas en su programa de estudio y libro de texto.

El Software-FCFM fue diseñado con el objetivo de motivar el estudio de las formas geométricas (Motivación) desde el nivel educativo básico. Se propone el Software como un facilitador de aprendizaje, aplicación de terapia de juego, libertad y creatividad. El *Software Didáctico* posee como componentes los programas: Geometría viva, Software-Tangram y Rubik en Perspectiva

INTRODUCCIÓN

La Experiencia Didáctica que se presenta en este documento, como una acción extramuros de la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), depende del Perfil del Docente definido en la Visión 2006, por su enfoque interdisciplinario e impacto social, se enmarca en la Misión de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM)

La acción de desarrollar Software Didáctico para niños de Primaria y Secundaria de parte de FCFM UANL no constituye un hecho aislado en el Sistema Educativo del País. En México se ha desarrollado software didáctico que apoya a niños y jóvenes en el difícil arte de prepararse para desarrollar Habilidades Matemáticas o introducirse al mundo del Arte, de la Historia, de la Física y del Español, entre otros.

La participación de la FCFM UANL en el desarrollo de Software Didáctico o Informáticos Educativos dirigido a alumnos de Primaria y Secundaria, *fue solicitada en 1996* por el Departamento de Informática Educativa de la Secretaría de Educación Pública de Nuevo León, para conformar la *componente de consultoría teórica en el equipo interdisciplinario* de dicha institución en la que los programadores desarrollaban al “Software Mategráficas” para Secundaria. Pero, dicha participación se suspendió por el cambio de autoridades gubernamentales, de modo que en su momento, en el seno del curso de Cálculo Vectorial, se retomó el compromiso con la sociedad.

DESARROLLO

Con el fin de atender a la demanda planteada, se iniciaron estudios teóricos correspondientes y se conformó un *equipo con estudiantes* de 4° a 8° semestre de Licenciatura en Matemáticas, Física y Computación, con un *alto sentido de responsabilidad social e institucional*, que se dio a la tarea de elaborar software didáctico, que contribuyera a la formación de conceptos y desarrollo de habilidades geométricas fundamentales de la Geometría en el nivel básico, *aplicando sus conocimientos* de matemáticas y computación.

Se realizó un corte vertical en los programas de Geometría del nivel superior y medio superior en la UANL y en los programas del nivel básico y pre-escolar , para identificar la posibilidad de diseñar materiales didácticos que propicien la construcción de conceptos y el desarrollo de habilidades geométricas.

Del mismo análisis teórico, surgió la propuesta de contar con un **Taller de Geometría**, en un Parque Público con área verde, funcionando como un *Museo Científico* y/o como un *Laboratorio de Geometría*, que ofreciera la oportunidad de presentar al conjunto de **Materiales Didácticos** para la enseñanza de los Sólidos y al **Software Didáctico de FCFM**, en el que el docente del nivel escolar básico pueda trabajar los conceptos, objetivos y actividades complementarias marcadas en su programa de estudio y libro de texto.

Las estrategias didácticas que conforman el Taller fueron diseñadas con el objetivo de motivar el estudio de las formas geométricas tridimensionales. Los materiales didácticos del Taller Geometría Viva, que se consideran innovadores entre otros, son los siguientes: ***Los Personajes de la Geometría***, ***El teatro guiñol*** **y** ***El Software Didáctico***

SOFTWARE DIDÁCTICO-FCFM:

Está constituido por un grupo de Programas interactivos dirigidos a niños de Primaria, pero que se pueden adaptar para realizar actividades de Secundaria y Preparatoria, con el discurso propio de cada nivel. Lo conforman los Programas: GEOMETRÍA VIVA (HTML), SOFTWARE-TANGRAM, CUBO DE RUBIK EN PERSPECTIVA; los que se describen a continuación:

GEOMETRÍA VIVA (HTML)

Objetivo: Dar a conocer los PERSONAJES DE LA GEOMETRÍA recurriendo a la expresión corporal de cada sólido y motivar al estudiante para que aprenda la descripción de dichas formas geométricas.

Descripción: Es un software tutorial que presenta la descripción de las cuatro FAMILIAS GEOMÉTRICAS (Poliedros Regulares, Prismas, Pirámides y Cuerpos Redondos) mediante fotografías escaneadas de la colección de los personajes de cada familia con expresión corporal, incluye las Fórmulas correspondientes a Áreas y Volúmenes que se pueden consultar si se trabaja la Medición de los recipientes sólidos y presenta a los Sólidos en Movimiento mostrando las Caras o las Aristas y Vértices efectuando rotaciones.

Visión: Se propone el uso del Programa GEOMETRÍA VIVA (HTML) en las salas de cómputo de las escuelas Primarias como Material Didáctico para la Enseñanza-Aprendizaje de los Sólidos para alumnos de 4° a 6° año y para grupos de Secundaria.

SOFTWARE-TANGRAM

Objetivo: Contribuir al desarrollo de la Habilidad de Ubicación Espacial y al desarrollo de la Habilidad de Identificar Transformaciones en el Plano. (TRASLACIONES VERTICALES Y HORIZONTALES, ROTACIONES Y REFLEXIONES)

Descripción: El Tangram Rompecabezas Plano (o Siete Mágico), se trabaja en los libros de Texto de 1° a 5° año de Primaria, como un material recortable que contribuye al desarrollo de la Habilidad de Ubicación Espacial en el Plano.

La diferencia entre el Rompecabezas-Tangram y el Software-Tangram es que el Software Didáctico contribuye además al desarrollo de la habilidad de identificar traslaciones, rotaciones y reflexiones. (Dichas habilidades se marcan en los objetivos de Programas de la SEP y su relevancia se ha constatado en investigaciones educativas)

Actualmente se encuentran sofisticados juegos del Tangram en Internet, sin embargo, se programó al presente Software-Tangram para trabajar con el tablero (DOS), en atención al tipo de equipo de cómputo que se tiene en la mayoría de las escuelas Primarias y Secundarias.

Visión: Lograr la implementación oficial del Software-Tangram como Material Didáctico que apoye a los maestros de Primaria al realizar las actividades del Tangram propuestas en sus libros de texto.

CUBO DE RUBIK EN PERSPECTIVA

Objetivo: Contribuir al desarrollo de la habilidad de identificar objetos en Perspectiva.

Descripción: Es un Software Didáctico que presenta al Cubo de Rubik en aristas y en un primer nivel, contribuye al desarrollo de la habilidad de UBICACIÓN ESPACIAL TRIDIMENSIONAL (Arriba-Abajo, Izquierda-Derecha y Atrás-Adelante).

En un segundo nivel contribuye al desarrollo de la habilidad de efectuar una combinación de rotaciones para reacomodar todos los cuadros pequeños de un solo color en cada cara del cubo.

El programa no requiere de equipo de cómputo de gran capacidad y se pueden realizar todas las rotaciones que un jugador experto realizaría de manera objetiva con el Cubo de Rubik comercializado en plástico.

Visión: Organizar torneos para armar el Cubo de Rubik en Perspectiva, en Preparatorias y Facultades, para contribuir al desarrollo de las habilidades antes mencionadas. (El juego presenta tres niveles opcionales de dificultad)

EVALUACIÓN

El Software Didáctico, fue catalogado y evaluado en la Primer Muestra Nacional de Material Didáctico para la Enseñanza Universitaria en Junio del 2001, en el cual se otorgó reconocimiento al Tutorial "Geometría Viva" como uno de los tres mejores trabajos en su categoría, por cumplir con la validación Didáctica (usables, agradables y útiles) y aceptabilidad en el diseño de interfaz para Software Educativo.

Actualmente, la evaluación profesional del "Software-Tangram" y "Rubik en Perspectiva" está a cargo del Mtro. Manuel Gándara Vázquez, consultor independiente sobre Cómputo Educativo, quien es reconocido en el país por su trabajo sobre validación didáctica de Software Educativo en términos de la amigabilidad y *usabilidad* (utility, practical, aceptability, few errors, subjectively pleasing)

El Software Didáctico se compartió a los programadores del programa JOVEN CLUB de la Habana, en Noviembre del 2001, el cual desarrolla en la actualidad Software Didáctico para el nivel pre-primaria y primaria, se donó a la Facultad de Matemática y Computación de la

Habana para su evaluación y posible implementación en la enseñanza de temas de geometría. Se donó a preparatorias de la UANL y al CEVETis (Preparatoria Técnica), a petición del director de dicha institución, para la posible implementación en la enseñanza de temas de Geometría en su sala de cómputo.

CONTEXTO INSTITUCIONAL

El Software Didáctico- FCFM se enmarca en las siguientes acciones, definidas en el Programan "Educación para la Vida":

Tecnología Educativa*: como una acción del Programa Innovación Académica, con el objetivo de crear material para la impartición de clases, videos, multimedia, software y apoyos gráficos.*

***En el Programa Agentes de Cambio**:* Trascender, *tiene la tarea de crear una conciencia en los alumnos, del rol que desempeñan como agentes de cambio del País; y* Colaborar, *invita a participar en los asuntos de la Comunidad, en los que la UANL pueda aportar conocimiento.*

Programa Desarrollo Científico y Tecnológico: Difundir *el conocimiento científico de la UANL y Promover el* intercambio *y la colaboración interinstitucional para enriquecer las investigaciones*

El Centro de transferencia tecnológica: en el área de Vinculación y Servicio Social (DVSS), *plantea que el conocimiento, la investigación y los servicios que presta la UANL, puedan ser transferidos con mayor calidad y eficiencia al sector productivo.*

Se ha insistido en que el crédito de cada Software o material Didáctico, es compartido entre el Programador y el Autor Teórico Didáctico, dado que se ha trabajado con el **estilo de liderazgo democrático**, en el cual *el líder actúa como un primero entre iguales*. Se fomenta la discusión abierta y aunque se reconoce y se respeta explícitamente la labor de los expertos, pero el líder *se hace responsable* de las conclusiones extraídas".

CONCLUSIONES

Se enmarcan las Expectativas para la aplicación de este Software, bajo el compromiso Social declarado por la FCFM en sus orígenes y en su nueva Misión, de investigar y contribuir a la solución de Problemas de Enseñanza de las Matemáticas de la Comunidad Neoleonesa y del País.

Se ha constatado que la problemática de la enseñanza-aprendizaje de las Formas geométricas en el Nivel Básico son relevantes para el estudio de las geometrías en el Nivel Superior y la modelación matemática geométrica en diferentes disciplinas, lo que el Software Didáctico debe contribuir a resolver.

Formar equipos interdisciplinarios de estudiantes y profesionales con un alto sentido de responsabilidad social, concientes de la importancia de la <u>Aplicabilidad del conocimiento científico</u>, en aras de la Independencia Tecnológica del País, en el sentido de las consecuencias negativas de la trascultura, la dependencia tecnocientífica y la influencia polarizadora de la globalización, es parte de la Misión Social de FCFM.

Es importante lograr la implementación oficial de parte de las Autoridades Educativas, del Software Didáctico(Geometría Viva y Tangram) como material de apoyo para grupos de Primaria y Secundaria al realizar las actividades de Geometría propuestas en los libros de texto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, A. (2001). "Del Pizarrón al Ciberespacio". *Memorias de la Primer Muestra Nacional de Material Didáctico CASA UANL-CECTE*. Inst. Latinoamericano de Comunicación Educativa.

Martínez, R. y Porras, M. (1998). "La presentación ostensiva de las nociones geométricas en los textos de la escuela elemental". *Educación Matemática*, Vol.10, No.3, p.8-24.

Ogalde, I. y Bardavid, E. (1992). *Los Materiales Didácticos- Medios y Recursos de apoyo a la docencia (Tecnología Educativa)*. Editorial Trillas. México.

Placencia, I., Espinel, C. y Dorta, J. (1997). *Visualización y Creatividad.* pp.103.

Pérez, O. (2000). *Didáctica de las Matemáticas - Medios y Recursos Didácticos*. Materiales de Cursos de Maestría en Enseñanza de las Ciencias, UANL

Talizina, N. F. (1985). *Fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior*. Memorias del ciclo de conferencias brindadas en la Universidad de la Habana. Editorial U.H. La Habana. Cuba.

Villegas de Cabrera, L. (2001). "Cómo y por qué iniciar al niño de Educación Inicial en el Mundo de las Matemáticas". *Conferencias del IV encuentro Internacional* CELEP

Wadsworth, L. (1989). *Teoría de Piaget del desarrollo cognitivo y afectivo*. Editorial Diana, México.

LA GEOMETRÍA DINÁMICA Y LA TECNOLOGÍA EN LA ESCUELA BÁSICA.

Dra. Celia Rizo Cabrera.
Dr. Luis Campistrous Pérez.
Investigadores del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación de la República de Cuba.
Dr. Jorge M. López.
Departamento de Matemática de la Universidad de Puerto Rico.
campi@infomed.sld.cu

RESUMEN

El presente trabajo se inscribe en la conjunción de dos líneas de investigación en las que ha incursionado durante más de una década un grupo de investigadores nucleados alrededor de los autores del mismo: La resolución de problemas y el uso de la tecnología en la enseñanza de la Matemática (Rizo et al, 2001; Campistrous, 1993; López & Campistrous,2001).

El marco teórico de estos trabajos descansa por una parte en la investigación didáctica sobre el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas y por otra en la concepción de que las nuevas tecnologías impactan la enseñanza de la Matemática más allá de un simple medio de cálculo.

INTRODUCCIÓN

En el caso de este trabajo específico sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela de educación básica, se incluye los aportes de los autores en cuanto al trabajo con conceptos, juicios y razonamientos en la escuela y la concepción de un curso de geometría para la escuela de educación básica en Cuba.

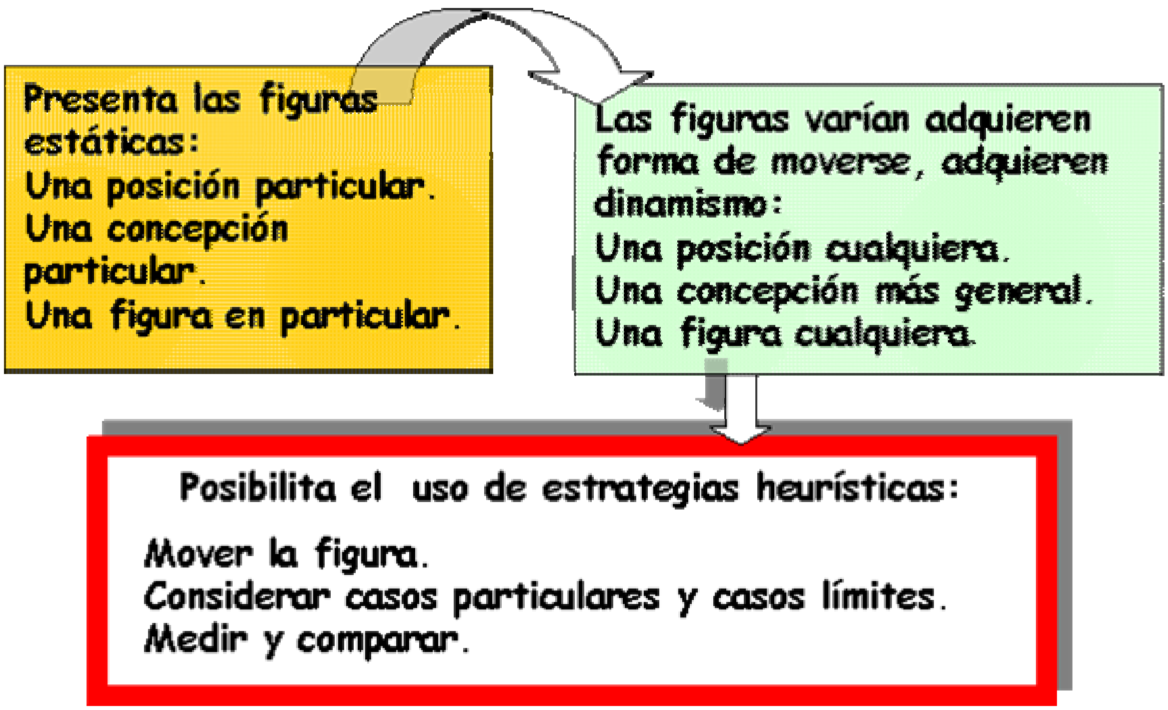
Se parte de una toma de posición de los autores de este trabajo de que es necesario repensar la estructuración del curso actual de geometría en la escuela de educación general básica, e incluir en la nueva concepción la preparación para el uso de nuevas tecnologías desde edades tempranas, lo cual permitiría concebir el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en una actividad más productiva y donde el tiempo que se gana puede ser invertido en cosas más útiles encaminadas a la solución de situaciones interesantes y de problemas que favorecerían un mayor desarrollo de sus capacidades intelectuales y de su pensamiento en general.

Se precisa que para dar pasos en esa dirección habría primero que buscarle respuesta a una serie de cuestionamientos necesarios que uno se hace sobre cómo dar esos pasos, especialmente en la escuela primaria. Entre ellos:

- ¿Cuáles son los cambios en el sistema de trabajo que habría que producir y en qué edades?
- ¿Cuál sería el objetivo de su introducción en cada caso?
- Sería necesario hacer modificaciones curriculares?
- ¿Qué instrumentación didáctica realizar para que sea exitosa su introducción?
- ¿Qué recursos tecnológicos emplear y cómo hacerlo?

En relación con las anteriores interrogantes se plantea que es necesario discutir cómo se ha estado enseñando la geometría durante miles de años y cómo se puede iniciar un proceso de cambio en ello. En particular se presenta a discusión el antagonismo entre la forma clásica de enseñar la geometría de una manera estática y la necesidad de cambiar esta concepción hacia una forma de enseñar la geometría de una manera dinámica.

DE GEOMETRÍA ESTÁTICA A GEOMETRÍA DINÁMICA



En esta dirección es necesario producir cambios tanto en el trabajo de los docentes como en el de los alumnos:

DOCENTES

- Nueva manera de trabajar los contenidos para explotar más y mejor los recursos tecnológicos actuales.
- Poner a los alumnos en situación activa de aprendizaje.

ALUMNOS

- Participar activamente en solución de problemas:
- Procesos de búsqueda
- Planteo de conjeturas.
- Comprobación experimental.

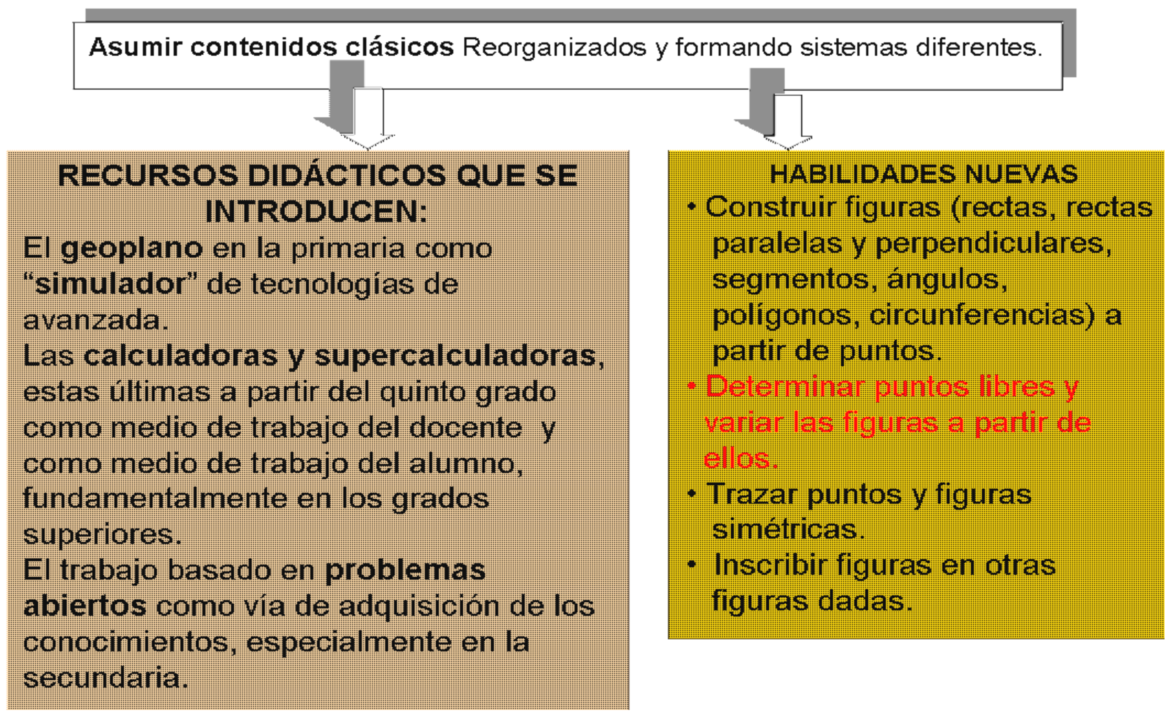
on respecto a los cambios curriculares que habría que hacer en la escuela básica se consideró que es posible introducir la calculadora y otros avances tecnológicos desde la escuela primaria[1], y no debe haber limitantes en cuanto a la edad si se precisan bien los propósitos de su uso y esto se hace atendiendo a las características de los escolares según su edad, siempre que su uso esté orientado a:

---

[1] Ver artículo de los autores titulado La Calculadora en la Escuela Primaria, ¿Amiga o Enemiga?. 2001. Ponencia presentada en el evento internacional Pedagogía 2001. La Habana, Cuba.

- Concentrarse en el proceso de resolución de problemas y no solo en el cálculo formal clásico de la geometría, como es el caso de calcular perímetros, áreas, volúmenes, entre otros.
- Explorar, desarrollar y reforzar conceptos y relaciones geométricas.
- Utilizarla como medio heurístico, para la búsqueda de relaciones, planteo de conjeturas de modo de dar acceso a otras formas de pensamiento que van más allá de los algorítmicos propiamente dichos.
- Para objetivar vías de demostración de propiedades de las figuras geométricas.

Para implementar el uso de esta tecnología habría que estructurar un curso de geometría que le dé cabida a lo que hemos denominado geometría dinámica, es decir que dé posibilidades de **"darle movilidad a las figuras"** además de realizar cálculos si son necesarios. Para ello se consideraron los siguientes cambios curriculares fundamentales en los contenidos, las habilidades que habría que introducir sin obviar las clásicas del trabajo en la geometría, y algunos recursos didácticos pertinentes:



Es opinión de los autores que una concepción de la geometría basada en las congruencias (igualdad por superposición) y los movimientos, permite hacer la introducción de la tecnología, en este caso el empleo de calculadoras, supercalculadoras y computadoras, en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, pues con ella existe la posibilidad de **"mover las figuras geométricas",** es decir, variarlas de modo adquieren **dinamismo**, no obstante habría que incluir algunos elementos de contenido, especialmente en lo que a habilidades se refiere, que permitan también que aprendan a **"mover en una figura o variarla",** tal como se mencionó con anterioridad.

En esta introducción habría que considerar una diferenciación en etapas atendiendo al punto de vista gnoseológico y psicopedagógico y teniendo en cuenta, en ambos casos, las edades e intereses de los alumnos. A continuación se resumen estas etapas y primeras ideas sobre cómo estructurar el contenido en cada una de ellas.

PRIMER MOMENTO DEL DESARROLLO (6 a 7 años)
ETAPA PREPARATORIA

Trabajo intuitivo operativo con figuras geométricas elementales. Igualdad por superposición. Mover figuras sobre otras. Mover en una figura.

Inicio de las primeras ideas sobre la movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente relaciones de congruencia. Uso de clavijeros y ligas para ir desarrollando la habilidad de "mover" en una figura (GEOPLANO como entrenador). Reproducción en papel cuadriculado. Superponer, medir, comparar.

SEGUNDO MOMENTO DEL DESARROLLO (8 a 9 años)
ETAPA PREPARATORIA Y DE EXPLORACIÓN

Continuación del trabajo intuitivo operativo con figuras geométricas elementales. Igualdad por superposición. Relaciones paralelismo y perpendicularidad. Mover figuras sobre otras. Mover en una figura. Conservación de propiedades cuando se producen movimientos en una figura. Primeras ideas sobre la simetría de figuras y sobre el perímetro y áreas de figuras y simétricas.

Ampliación de las ideas sobre la movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente relaciones de congruencia, y conservación de otras propiedades como el paralelismo y la perpendicularidad. Continuación del uso del geoplano para ir desarrollando la habilidad de "mover" en una figura. Reproducción en papel cuadriculado. Superponer, medir, comparar.

TERCER MOMENTO DEL DESARROLLO (10 a 12 años)
ETAPA DE EXPLORACIÓN, HACER CONJETURAS Y PRUEBAS.

Inicio de la etapa deductiva. Igualdad por movimientos geométricos del plano (simetrías y traslaciones). Mover en una figura.
Exploración de propiedades que se conservan cuando se producen movimientos en una figura. Propiedades básicas de las figuras elementales. Búsqueda de teoremas relacionados con la congruencia. Cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Búsqueda de propiedades asociadas a estos conceptos.

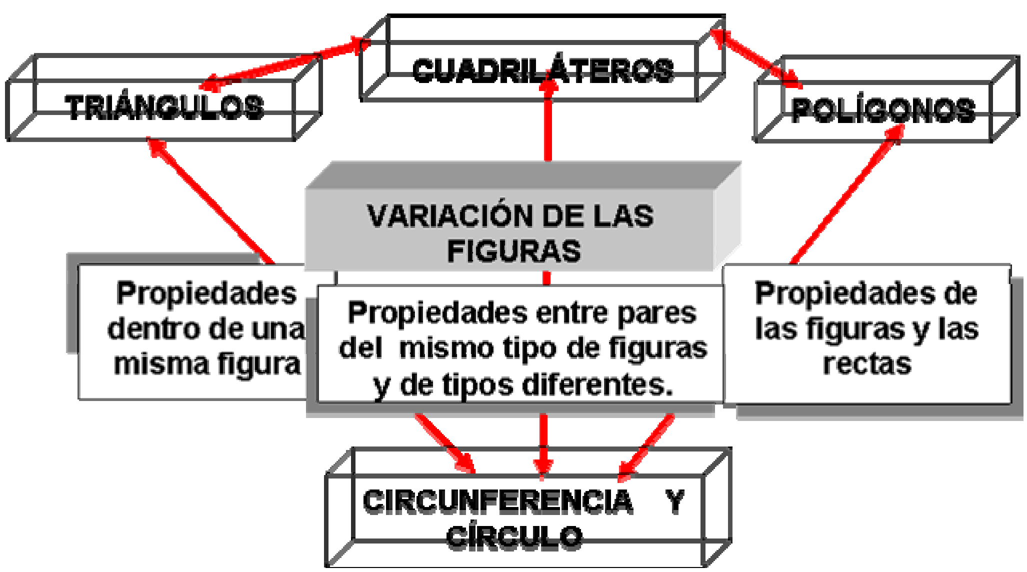
Continuación de la ampliación de las ideas sobre la movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente, y formalmente, relaciones de congruencia, y conservación de otras propiedades como la igualdad, el paralelismo y la perpendicularidad. Búsqueda de elementos simétricos en una figura y en par de figuras.

Uso del geoplano para ir desarrollando la habilidad de "mover" en una figura y de supercalculadoras (principalmente por el docente) como medio heurístico de apoyo a la exploración, comprensión y búsqueda de casos particulares y límites en la demostración de propiedades. Reproducción (simulación) del alumno usando el geoplano. Uso de la calculadora en la solución de problemas geométricos de cálculo y demostración.

SECUNDARIA (12 a 14 años)
CONTINUACIÓN DE LA ETAPA DEDUCTIVA. HACER CONJETURAS. BÚSQUEDA Y DEMOSTRACIÓN DE PROPIEDADES.
Sistematización de las figuras geométricas elementales y de sus propiedades. Igualdad por movimientos geométricos del plano (simetrías y traslaciones). Mover en una figura. Exploración de propiedades que se conservan cuando se producen movimientos en una figura. Propiedades básicas de las figuras elementales. Búsqueda de teoremas relacionados con la congruencia. Cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Búsqueda de propiedades asociadas a estos conceptos. Primeras ideas sobre la semejanza de figuras.

Continuación de la ampliación de las ideas sobre la movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente, y formalmente, relaciones de congruencia, y conservación de otras propiedades como la igualdad, el paralelismo y la perpendicularidad. Búsqueda de elementos simétricos en una figura y en par de figuras. Uso de las supercalculadoras por el docente como medio heurístico de apoyo a la exploración, comprensión y búsqueda de casos particulares y límites en la demostración de propiedades y por el alumno para continuar desarrollando la habilidad de "mover" en una figura y también como recurso para la búsqueda *de* propiedades y de ideas para su demostración, y en la solución de problemas geométricos de demostración, de construcción y de cálculo. Búsqueda de figuras semejantes y de propiedades asociadas a esta relación.

En relación con la organización del contenido en esta última etapa, sería deseable que el contenido geométrico clásico que se ha estado trabajando desde los primeros grados, se sistematizara de una manera diferente para propiciar el proceso de búsqueda y evitar que se vuelvan a trabajar de una manera clásica los contenidos. Una manera de organizar este contenido pudiera ser, mediante un **enfoque de enseñanza a través de problemas**, de la forma siguiente:



Los problemas que se escojan deben ser **problemas abiertos** que permitan las búsquedas de los alumnos y la obtención de múltiples propiedades de estas figuras que se irán sistematizando en la medida en que se van obteniendo.

Como se puede apreciar es otra manera de concebir la enseñanza aprendizaje de la geometría y de presentar la ejercitación: antes de una manera acabada que no daba posibilidades de exploración, búsqueda, y con este enfoque se tienen todas las potencialidades para ello, de ahí la importancia de poder preparar al alumno desde los grados anteriores para esa flexibilidad en su pensamiento que le permita la exploración, la búsqueda de alternativas y motive en ellos el deseo de investigar y obtener cada vez cosas nuevas para él y sus compañeros.

A modo de conclusión, los principales cambios están en la utilización de los medios de enseñanza, especialmente el geoplano, calculadoras y supercalculadoras y en la concepción de la ejercitación para darle cabida a este enfoque dinámico y propiciar las acciones de búsqueda, lo que implica también un cambio importante en cómo aprender y enseñar la geometría y no tanto en qué contenidos dar.

Los recursos tecnológicos se introducen **como un medio que complementa lo previsto en el programa y contribuyen a una mejor comprensión de los contenidos establecidos.**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Barret, G. y Goebel, J. (1990). “The impact of graphing calculators in the teaching and learning of Mathematics en teaching and learning Mathematics” in the *1990’s NCTM* Reston

Campistrous, L. (1993). *Lógica y Procedimientos Lógicos en la Enseñanza.* Editora interna del ICCP del Ministerio de Educación de la República de Cuba.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1997). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Cedillo, T. (1998). *La calculadora en el salón de clase. Sentido Numérico e Iniciación al Algebra*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Cedillo, T y Santillán, M. (1990). “De la aritmética al álgebra: una experiencia para desarrollar habilidades de representación simbólica empleando como recurso tecnológico calculadoras y computadoras” en *Memorias de la 4ª Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa*. pp.223-228 México DF.

Demana, F. Y Waits B. (1990). “Enhancing Mathematics teaching and learning trough technology en teaching and learning Mathematics” in the *1990’s NCTM* Reston.

Forcheri, P. y Molfiere, M. (1994). “A research study of teacher’s beliefs about calculators use” in *Mathematics/Science Education and technology* 1994 56-61 Guy Marks Editor San Diego.

Hitt, F. (1994). “Educación Matemática y uso de nuevas tecnologías”. *Perspectivas en Educación Matemática*. Ernesto Sánchez y Manuel Santos (Editores). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados el IPN. México. Págs. 21- 42.

Hurtado, E. (1995). “Computador, calculadora gráfica y Matemática” en *Memorias de la 8ª Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa* pp.275-278 Costa Rica.

Jiménez, J. (1990). “El empleo de la calculadora en los cursos de Matemática” en *Memorias de la 4ª Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa* pp.99-104 México DF.

Kaber, H. y Longhart, K. (1995). “Using graphing calculators to teach high school mathematics” in *Scientific visualization in Mathematics and Science Teaching* 19-26 David A. Thomas Editor AACE Charlottesville

López, J. (2001). “Didáctica y tecnología: la enseñanza de la geometría tres siglos después de Euclides”. *Revista Innovaciones Educativas* de la Texas Instruments. USA.

López, J. y Campistrous, L. (2001). “La calculadora como herramienta heurística”. *Revista UNO*. No. 28. Septiembre. Universidad Autónoma de Barcelona.

López, J. y Campistrous, L. (2001). “La calculadora: rutina o pensamiento. como herramienta heurística”. *Revista Innovaciones Educativas* de la Texas Instruments. USA.

Martínez, A. (1995). “Gráficas como medio y no como objetivo: el impacto de las calculadoras gráficas en cálculo y precálculo” en *Memorias de la 9ª Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa* pp.119-124. La Habana.

Rizo, C. (1987). *Investigación sobre la estructuración del curso de geometría de 4to. a 6to. grados, basada en las transformaciones y la congruencia*. Tesis doctoral. ICCP. MINED. Cuba.

Rizo, C. (1999). “Estrategias de resolución de problemas en la escuela” en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* Vol. 2 Núm. 3.

Rizo, C. y Campistrous, L. (2001). “Tecnología, Resolución de Problemas y Didáctica de la Matemática”. Ponencia Pedagogía 2001. Ciudad de la Habana.

Rizo, C. y Campistrous, L. (2001) “La Calculadora en la Escuela Primaria, ¿Amiga o Enemiga? Ponencia presentada en el evento internacional Pedagogía 2001. La Habana, Cuba.

Zuñiga, L. (1995). “La supercalculadora: el concepto de función y los contextos gráfico-algebraico”en *Memorias de la 8ª Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa* pp.285-292 Costa Rica

Posters

LA NOCIÓN DEL ESPACIO EN EL NIÑO A TRAVES DEL AMBIENTE COMPUTACIONAL LOGO

Elizabeth Esparza Cruz
CINVESTAV-IPN, Departamento de Matemática Educativa. México
eesparza@mail.cinvestav.mx

RESUMEN:

El propósito general de este estudio de investigación es lograr el enriquecimiento de la noción del espacio en los alumnos de 6° grado de educación primaria, mediante el ambiente computacional "Logo", en el cual se consideran los niveles de pensamiento de Piaget (1975) (perceptual, de pensamiento intuitivo, de operaciones concretas (relaciones topológicas, proyectivas y euclidianas) y de las operaciones formales) para lograr enriquecer la noción del espacio en el niño y se diseñan actividades de programación sustentadas bajo el enfoque construccionista, con apego a Papert (1981).

La investigación es de carácter cualitativo, con alumnos de sexto grado de primaria y tiene como propósito crear un ambiente computacional propicio para que el alumno enriquezca su noción del espacio.

Construcción genética de la noción de espacio

Piaget presenta en su obra *La construcción de lo real en el niño* (1965) la comprensión de cómo, a partir de la noción del objeto, el campo espacial, el desarrollo de la causalidad y la noción temporal, el niño construye de manera racional un primer período de la evolución intelectual.

Un segundo período de construcción referido al campo espacial lo explica *En la Introducción a la Epistemología Genética* (1975), en donde reconoce, a partir de niveles, el desarrollo de las operaciones espaciales. (fig.1)

- ♦ NIVEL PERCEPTUAL.
  - ♦ NIVEL SENSORIOMOTRIZ.
    - ♦ NIVEL DEL PENSAMIENTO INTUITIVO
      - ♦ NIVEL DE LAS OPERACIONES CONCRETAS
        - Relaciones Topológicas(continuidad, proximidad y separación).
        - Relaciones Proyectivas (perspectivas).
        - Relaciones Euclidianas (similitudes, longitudes coordenadas y medición).
          - ♦ NIVEL DE LAS OPERACIONES FORMALES

Figura 1 Presentación esquemática de la explicación que da Piaget a la construcción genética del espacio.

En estos distintos niveles de organización espacial propuestos por Piaget se reconoce una construcción a partir de actividades por parte del sujeto. Estas actividades las sintetizamos a continuación.

- Nivel Perceptual, se caracteriza por una actividad perceptiva consistente en dirigir las miradas, en comparar, analizar, etc., pero la constitución del espacio está lejos de depender de ella sola, y supone su vinculación con el conjunto de las otras acciones que se desarrollarán en el nivel sensoriomotor.
- Nivel Sensoriomotriz, en donde los desplazamientos, unidos a las percepciones, permiten ciertas coordinaciones, que se organizan en un espacio próximo, con conservación práctica del objeto pero sin espacio representativo más allá de los límites de la acción. Se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos.
- Nivel del Pensamiento Intuitivo Preoperatorio, en el que se constituyen imágenes espaciales estáticas y la imaginación de algunas acciones relativas a posibles transformaciones de los objetos, pero sin conservación ni reversibilidad.
- Nivel de las Operaciones Concretas, caracterizado por representaciones operatorias en el que se realizan las primeras operaciones transitivas y reversibles.

Entre el nivel de lo concreto y lo formal se distinguen tres sistemas de operaciones espaciales:

- Operaciones Topológicas (6 - 8 años)[1]
- Operaciones Proyectivas (8 - 9 años)
- Operaciones Euclidianas (9 – 10 años)

Estas operaciones Piaget (1975, p.191-200) las explica a manera que nos permite ver que la formación de operaciones topológicas constituye el antecedente para la construcción de las proyectivas y las euclidianas; las dos últimas se construyen a partir de la primera.

Veámoslo de la siguiente manera: Las operaciones topológicas elementales se refieren a la partición y orden. La partición consiste en separar y en reunir en función de su vecindad las partes que se han separado. Las operaciones de orden o emplazamientos corresponden a proceder desde el orden directo hasta el orden inverso y comprender que la relación “situado entre” se conserva independientemente de las inversiones.

A partir de la consolidación de las operaciones topológicas, el sujeto pasa a la construcción de las operaciones proyectivas, que consisten en buscar puntos de vista en la coordinación sensoriomotriz y operatoria. Es decir, suponen una actividad perceptual vinculada con las acciones en general y la motricidad del sujeto.

En correlación con las operaciones proyectivas, se constituye el espacio euclidiano que es el sistema de elementos referidos a los ejes de coordenadas como son las similitudes, longitudes y medición. Implican actividades vinculadas con las manipulaciones y desplazamientos del sujeto.

---

[1] La edad para cada nivel es relativa, son aproximaciones retomadas de las observaciones hechas a un conjunto de niños.

Nivel de las Operaciones Formales caracterizado por representaciones formales y abstractas. Este nivel corresponde al espacio descrito por la Geometría deductiva de Euclides. Existe la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencias, prediciendo y manipulando mentalmente.

Desarrollo de las Operaciones Euclidianas.

A partir de esta descripción sobre el desarrollo de las relaciones espaciales y entendiéndolas como sistemas que se enlazan de acuerdo al nivel de maduración logrando que se desarrollen aproximadamente entre los 6 y 12 años, trataremos de enlazarlas a los contenidos curriculares de educación básica en nuestro país. En México de los 6 a los 12 es la edad cuando el niño cursa su educación primaria; el plan y programas de estudio (SEP,1993) se refiere al aprendizaje de la matemática de la siguiente manera:

> "*El propósito general a alcanzar por los alumnos de educación primaria al adquirir conocimientos básicos de las matemáticas y específicamente en el eje temático de geometría es desarrollar a través de la formalización paulatina de las relaciones que el niño percibe y de su representación en el plano, se pretende que estructuré y enriquezca su manejo e interpretación del espacio y las formas"* (p.53).

En nuestra investigación pretendemos ayudar a alcanzar este propósito complementando la enseñanza primaria en el área de las matemáticas con la incorporación de situaciones didácticas Logo referidas al desarrollo de las operaciones euclidianas. El reto que nos hemos planteado al diseñar estas situaciones didácticas es la de enriquecer en los estudiantes su noción del espacio.

Ventajas de Logo.

- En la planeación y el diseño de las actividades didácticas intentaremos que los aprendizajes que se lleven a cabo sean, lo más significativos posibles[2]. Para ello, nos apoyaremos en el lenguaje computacional Logo viéndolo como un lenguaje "para construir", "*como el entorno que permite convertir el aula en un centro de investigación*" (Segarra y Gayan 1985, p. 19). Pero Logo no solo es un lenguaje computacional, sino que fue creado por Papert y colaboradores tomando en cuenta la teoría constructivista. Para ello los creadores se basaron en dos ideas centrales de la teoría psicogenética de Piaget y su escuela de Ginebra:
    - El conocimiento es resultado de una construcción incesante a partir de nuestras experiencias, y
    - El niño es constructor de sus propias estructuras intelectuales.

Siguiendo estas ideas Papert (1981) cree que la construcción del conocimiento se puede dar de manera más adecuada y conveniente si se proveen materiales con que construir. Así pues, entre otras cosas, Logo utiliza una tortuga como herramienta gráfica que funciona como interface para construir.

[2] De acuerdo con Coll (1990), *Un aprendizaje puede ser lo más significativo posible, en la medida en que los alumnos profundicen y amplíen los significados que construyen, mediante su participación en las actividades de aprendizaje"*. (p. 194)

Papert (1981) presenta a la tortuga Logo como “un objeto con el cual pensar”, como un objeto con valor educativo: *“La tortuga es un animal cibernético controlado mediante computadora. Siendo Logo el lenguaje de computación en el que tiene lugar la comunicación con la tortuga” (p.24).*

La tortuga, originalmente representada por un triángulo señala la dirección del movimiento sobre una pantalla, obedece instrucciones simples en lenguaje Logo (conjunto de comandos que la tortuga reconoce). Ejemplo:

- AVANZA 40 ó AV 40; la tortuga avanza 40 unidades en la dirección actual
- GIRADERECHA ó GD 90; la tortuga gira 90 grados a la derecha

La tortuga deja un rastro, creando una línea a la pantalla.

En el momento en el que el estudiante le enseña a la Tortuga a actuar o a “pensar” tendrá la oportunidad de reflexionar sobre sus propias acciones y su manera de pensar. Programar con Logo constituye pues un proceso de reflexión y construcción.

Estamos de acuerdo con Nickerson (1985) cuando se refiere a Logo como un enfoque que pretende ocupar a los niños con algo mucho mas semejante al pensamiento matemático que lo que se aprende convencionalmente. Esta convencionalidad radica en querer entregar al estudiante un conocimiento acabado, ya preparado y organizado, el cuál sólo tendrá que incorporarlo a su intelecto. Además como él lo considera: “*Los proyectos de Logo plantean muchos problemas matemáticos que los niños afrontan y aprenden en un contexto realista y bien motivado”(p. 311).*

Tomando en cuenta todo esto, en nuestra investigación queremos plantear situaciones didácticas de tal manera que el estudiante pueda programar a la computadora y no viceversa; tal como lo plantea Papert (1981) *“programar una computadora significa comunicarse con ella en un lenguaje que tanto la máquina como el usuario humano puedan comprender”*(p.18). Además, cuando programen queremos alentarlos a que se aventuren a explorar, descubrir y sobre todo, operar sus operaciones espaciales.

Lo que intentamos lograr al guiar al estudiante para que programe no es la memorización de conceptos, sino desarrollar la suficiente percepción sobre las maneras en cómo él mismo se desplaza en el espacio y logre transferir ese conocimiento en programas que harán que la tortuga se mueva.

Objetivos de la Investigación

De acuerdo al enfoque en matemáticas del plan y programas de estudio para educación primaria (SEP, 1993) “*El éxito en el aprendizaje de esta disciplina depende en buena medida del diseño de actividades que promueven la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas”*.

Estas experiencias concretas podrían ser actividades planteadas en micromundos Logo que enlacen los contenidos programáticos de educación primaria a situaciones didácticas que contribuyan a enriquecer la noción del espacio en el niño, a partir de la estimulación de sus operaciones euclidianas.

¿Por qué Operaciones Euclidianas?. Los movimientos, desplazamientos y la disposición espacial (capacidad de utilizar el espacio y transformarlo) son algunos elementos que nos permiten dar cuenta de nuestra noción del espacio. Creemos que se logra establecer esta noción del espacio en el momento que somos capaces de proyectarnos en él.

Tomamos de Piaget (1965) la idea de que el espacio es un conjunto de relaciones, y que estas relaciones se construyen a partir de niveles; las operaciones Euclidianas representan el tercer nivel en la construcción de las operaciones, el cual ya incluye a las operaciones topologicas y proyectivas.

Estando de acuerdo con Piaget diremos que para que se construyan las operaciones euclidianas se debieron antes construir las topológicas y las proyectivas. Holloway (1969) así lo explica: "*los espacios proyectivos y euclideanos se componen de sistemas totalizadores en contraste con las relaciones topologicas que siguen siendo internas a cada objeto considerado como una cosa aislada por sí mismo*" (p.90). Estos sistemas totalizadores, los entendemos como la organización de los movimientos para lograr desplazamientos y hacer posible el paso de un campo espacial a otro.

De esta manera, podemos ver que son las operaciones euclidianas las que permiten coordinar las posiciones, distancias y desplazamientos, porque en estas acciones ya se incluyen intuiciones y operaciones.

Así pues, nuestra pregunta de investigación sería investigar si mediante situaciones de aprendizaje diseñadas en Logo se puede contribuir a que el alumno desarrolle e interprete de manera eficiente sus operaciones euclidianas promoviendo con ello el enriquecimiento de su noción del espacio.

Sabemos que es difícil conocer la medida en que una noción ha sido construida ó enriquecida, para poder hacerlo en este caso con la noción del espacio, nos apoyaremos en las ideas de Resnick y Klopfer (1989) que se resume en esta frase "*se puede ver el conocimiento a través de los ojos del alumno"(p. 113).*Y que nos lleva a tomar en cuenta lo siguiente:

- Las interpretaciones de las preguntas, instrucciones, procedimientos, y vocabulario típico de los estudiantes en lo que respecta a la matemática escolar.
- Conocer las interpretaciones individuales de cada estudiante, en un mismo tema.
- Conocer como ocupan la matemática formal para generalizar el conocimiento informal en situaciones nuevas.

Como ya lo dijimos anteriormente, los movimientos, desplazamientos, la disposición espacial y la manera en como nos proyectamos en el espacio, son elementos que permiten dar cuenta de nuestra noción del espacio.

Metodología.

Así pues, diseñaremos una secuencia de actividades didácticas dirigidas a estudiantes de sexto grado de educación primaria.

Pretendemos trabajar con 10 estudiantes, lo que nos permitirá planear el trabajo por parejas y tener una mejor observación y registro de los procesos de construcción en cada uno de ellos.

Las actividades precisarán situaciones en las que los alumnos pongan en juego sus operaciones espaciales. Los conceptos matemáticos tomados del plan y programas de estudio (SEP, 1993) que creemos que nos pudieran servir para estas actividades, son los siguientes.

- ♦ Uso de los ejes de coordenadas cartesianas
- ♦ Construcción de figuras a escala
- ♦ Construcción de figuras a partir de sus diagonales
- ♦ Construcción y reproducción de figuras utilizando dos o más ejes de simetría.
- ♦ Variación del área de una figura en función de la medida de sus lados

Estos contenidos se seleccionaron tomando en cuenta los elementos que componen las operaciones euclidianas (ejes de coordenadas, similitudes longitudes y medición) anteriormente desglosados.

La versión Logo que usaremos es MSWLogo por ser una versión gratuita y en español.

Nos atrevemos a prefigurar el número de sesiones de trabajo y el tiempo de duración de cada una, de la siguiente manera:

18 sesiones en total, 2 sesiones por semana con una duración de 60 minutos cada una, distribuidas así:

- ♦ 4 sesiones para introducir a los estudiantes al lenguaje Logo.
- ♦ 2 sesiones para explorar las ideas previas de los estudiantes referidas a su noción del espacio.
- ♦ 2 sesiones de trabajo para abordar cada uno de los temas arriba descrito (10 en total)
- ♦ 2 sesiones para retomar las ideas de los estudiantes referidas a su noción del espacio

Estas dos últimas sesiones en particular, nos servirán para comparar las ideas previas y las ideas últimas de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Holloway, E. (1969). *La concepción del Espacio en el niño según Piaget.* (s/edit.)

Nickerson, R (1985). *Enseñar a Pensar*. Ed. Paidos, Madrid.

Papert, S. (1981). *Desafío a la Mente*,. Tr. Lidia Espinosa. Galápago. Buenos aires.

Piaget, J. (1965). *La Construcción de lo Real en el Niño*. Tr. Rafael Santamaría, Grijalbo

Piaget, J. (1969). *El Nacimiento de la Inteligencia en el Niño*. Edit. Aguilar, Madrid.

Piaget, J. (1975). *Introducción a la Epistemología Genética*. Paidos, Buenos aires. (Título original : Introduction á l' épistemologie génetique. París, 1949).

Resnick, L.; Klopfer L. (1989). *Curriculum y Cognición* Tr. Miguel Walt, Buenos aires.

Segarra, M.; Gayan J. (1985). *Logo para maestros.* El ordenador en la escuela: Propuesta de uso. Edit. Gustavo Gili, Barcelona.

SEP (1993). Plan y Programas de Estudio para Educación Primaria. México.

Grupos de Discusión

UTILIZACIÓN DEL LABORATORIO DE COMPUTACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

M.Sc. Rafael Jiménez Martínez. *M.Sc. Milagros Gutiérrez Alvarez.*
Facultad de Informática. Universidad de Camagüey. Cuba.
rjimenez@reduc.cmw.edu.cu milagu@reduc.cmw.edu.cu

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es el de mostrar cómo pueden estructurarse los tipos de clases en función de lograr una utilización coherente del Laboratorio de Computación, haciendo énfasis en la formación conceptual en nuestras asignaturas.

En el trabajo se hace un análisis de los requerimientos teóricos indispensables para una formación adecuada de los conceptos, que logre en el estudiante una independencia cognoscitiva y creatividad, y cómo utilizar el Laboratorio de Computación con este objetivo.

Entre los principales resultados del trabajo se tiene la creación de Actividades Docentes en las cuales se utiliza el Laboratorio de Computación con fines investigativos, donde el alumno participa activamente en la formación de los conceptos básicos, aprovechando las ventajas de los medios de cómputo, tanto desde el punto de vista gráfico, como por las posibilidades de cálculo, lo cual permite dirigir la evaluación hacia aspectos esenciales del contenido, y al mismo tiempo posibilita que la misma pueda ser de tipo productivo y creativo.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad se ha producido un incremento significativo en la introducción de las técnicas de computación en la docencia. Por otra parte, aún persisten dificultades en la asimilación de los conceptos básicos en las asignaturas de la Disciplina Matemática para Ciencias Técnicas. En nuestro trabajo nos proponemos mostrar cómo puede encauzarse ese desarrollo tecnológico, en función de lograr mejores resultados en la formación conceptual en nuestras asignaturas, mediante la estructuración de los tipos de clases a utilizar, con una nueva concepción en la utilización del Laboratorio de Computación.

DESARROLLO

I. <u>Situación actual</u>.

El surgimiento y desarrollo acelerado de las técnicas de computación ha provocado un aumento notable en el papel de la matemática discreta, como elemento fundamental para la modelación de problemas de la realidad, que posibilite la utilización de las técnicas de cómputo para su solución. Pero, a pesar de este hecho, aún el peso fundamental en la enseñanza de la Matemática en la Universidad, descansa en la matemática del continuo, y persiste la utilización de gran cantidad de tiempo en el desarrollo de habilidades de cálculo de procesos rutinarios, cuya solución puede obtenerse en segundos con la ayuda de una calculadora de bolsillo.

Por otra parte, en la enseñanza tradicional se presentan dificultades en la formación de los conceptos básicos.

Por ejemplo, en la enseñanza del Cálculo Diferencial, desempeña un papel fundamental la introducción del concepto de límite. Este concepto podemos considerarlo como la base para la fundamentación del Cálculo Diferencial e Integral, ya que, a partir de él es que pueden erigirse los dos pilares fundamentales del Cálculo: la Derivada y la Integral.

Este concepto se imparte tradicionalmente en el Primer Semestre de la asignatura donde se estudia el Cálculo Diferencial, y es usual que se introduzca en una Conferencia, en su forma acabada, abstracta, lo cual ocasiona grandes dificultades en su asimilación.

Al respecto citaremos la opinión de algunos docentes, tanto en Cuba, como en el ámbito latinoamericano.

Alicia Estela Collel, del Centro de Investigaciones en Antropología Filosófica y Cultural, en Argentina, plantea:

"El concepto de límite (...) se presenta ante los sujetos como una barrera infranqueable(...) Y es que el concepto de límite funcional (...) constituye un salto de lo real hacia lo potencial, en un proceso -así mismo- potencial infinito, inalcanzable para los alumnos en la Educación Media(1) cuando se le presenta en un contexto puramente lógico, y, por lo tanto, abstracto.(...) constituye para las personas que lo reciben, algo así como un "jeroglífico" que deben descifrar, sin comprender su verdadero significado". [1]

Por su parte, Elfriede Wenzelburger Guttenberger, de la Maestría en Educación Matemática, en la U.N.A.M., México, expresa:

"...el tratamiento tradicional (...) no contribuye nada a la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo. Las ideas básicas del Cálculo Diferencial e Integral permanecen escondidas bajo una capa de "deltas-épsilon". De esta manera se niega al estudiante la posibilidad de una comprensión auténtica, y con ello la aplicación creativa(...). El Análisis Matemático desarrollado en forma abstracta y con perfección matemática, no alcanza a tener un verdadero significado para la mayoría de los alumnos ..." [2]

Ramón Blanco, de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad de Camagüey, hace énfasis sobre:

"...la necesidad de que el alumno interiorice lo mejor posible este concepto, lo cual no quiere decir que el alumno pueda repetir rigurosamente la definición o que haya memorizado un buen número de propiedades de los límites: pues estas memorizaciones están muy lejos de ser acciones mentales (...). También es usual que la enseñanza del límite se dirija al cálculo más o menos hábil de diferentes tipos de límites, con lo que podría contribuirse al desarrollo de la abstracción y el razonamiento de los estudiantes, pero no a la interiorización del concepto". [3, pág. 33]

A lo cual añade:

"...el proceso tendrá fallos si la asimilación del concepto de límite lo tiene.(...) no es fácil lograr que en unas pocas clases el alumno asimile años de desarrollo histórico, pero es fundamental lograr cada vez una mayor asimilación de este concepto". [Ob. Citada, pág. 81-82]

Esta situación relativa al concepto de límite, se hace extensiva a los conceptos básicos del Cálculo Diferencial. Por ejemplo, en el caso del concepto de Derivada, tradicionalmente se introduce en una Conferencia, a partir de su definición abstracta, se estudian sus propiedades y reglas de cálculo, aspecto al cual se le dedica la mayor atención. De esta manera, se convierte en práctica cotidiana la siguiente afirmación de Elfriede Wenzelburger:

"Pero tal tipo de introducción es la causa de la falta de comprensión de las ideas fundamentales del cálculo por parte del alumno, ya que se pierde en la precisión matemática, las demostraciones rigurosas y en un lenguaje formal impecable. De esta manera tenemos muchos alumnos de Cálculo que saben manejar métodos, definiciones y reglas en forma rutinaria, sin comprender el sentido de esas operaciones, reproduciendo los pasos, por ejemplo, de los métodos de diferenciación (...), más de memoria que en forma significativa". [Ob. Citada]

Al respecto, R. Skemp sugiere tener en cuenta en la enseñanza de la Matemática dos principios:

---

(1) Y también en la Educación Superior (Nota de los Autores).

1. Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos.

2. Puesto que en matemáticas estos ejemplos son invariablemente otros conceptos, es necesario en principio asegurarse de que estos se encuentran ya formados en la mente del que aprende. [4]

A lo cual añade que:

" La gran mayoría de los libros de texto, pasados y presentes quebrantan el primero de estos principios. En casi todos se ven nuevos temas, introducidos no a base de ejemplos, sino por definiciones de la más admirable brevedad y exactitud para el profesor (que ya posee los conceptos a los cuales se refieren), pero ininteligibles para el estudiante". [Ob. Citada]

II. <u>Propuesta didáctica</u>.

Para la comprensión adecuada de los conceptos, deben tenerse en cuenta las regularidades que se presentan en el proceso de asimilación. De acuerdo con Davidov [5], con el pensamiento teórico se produce una reelaboración de los datos de la contemplación viva y se representan mediante conceptos, lo cual permite develar su esencia, es decir permite reproducir sus nexos internos, lo que no puede lograrse en la contemplación.

Este aspecto ha sido tratado por investigadores en nuestro colectivo. Al respecto, Blanco precisa:

"...el proceso de asimilación se desarrolla a través de las acciones externas materializadas, a las internas y mentales, esto es de lo abstracto a lo concreto, de lo particular a lo general, y de aquí a lo particular de nuevo. (no podemos decir que se ha asimilado una teoría si no se puede resolver ningún problema particular de la misma)". [3, pág. 43]

y más adelante reitera:

"...la asimilación no se consolida si el alumno no puede regresar a lo particular". [3, pág. 52]

Por su parte, Portuondo plantea [6] que la representación del concepto no es suficiente para su asimilación, debe además, pasar a lo racional, ya que la representación es un proceso sensorial, de aquí que si no se enjuicia el contenido del proceso, sus acciones necesarias y suficientes (esenciales), el alumno, por lo tanto, no se apropia de éste.

Es decir, que el alumno puede saber que de forma general la derivada de funciones de R^n en R^m se define como: $\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(\vec{a} + \Delta t\vec{h}) - f(\vec{a})}{\Delta t}$, pero no ha interiorizado el concepto, si no puede deducir, a partir de esta definición, la derivada ordinaria, las derivadas parciales, etc.

Se requiere entonces que la asimilación vaya de lo particular a lo general en la formación del concepto (la invariante) y regrese a lo particular, tanto en la deducción de los casos particulares del concepto (Derivada ordinaria, Derivada Parcial, etc.), como en la interpretación y posibles aplicaciones, a fin de lograr lo inductivo y lo deductivo en el proceso de asimilación.

Para lograr que se produzca la inducción y posteriormente la deducción, lo que, al mismo tiempo, permite al alumno aplicar este método científico-teórico, incluimos actividades prácticas preparatorias a la introducción de los conceptos.

Previo a la introducción del concepto de Límite, incluimos clases donde se trabaja en:

- Estudio de gráficas de funciones, para analizar la tendencia al aproximarse a un punto.
- Desarrollo de habilidades en el trabajo algebraico con funciones, cálculo de incrementos de funciones, etc.

- Cálculo de valores funcionales en puntos próximos a un punto dado.

Este Tema lo iniciamos con un Laboratorio de Computación, en el cual se realizan los siguientes tipos de Ejercicios:

Laboratorio. Aproximación al concepto de límite.

Ejercicio # 1 .- Dadas las siguientes funciones, complete las tablas correspondientes y dé un estimado del comportamiento de la función al aproximarse al valor indicado:

1)

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$				...	?	...			

2)

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	...	$+\infty$
$f(x)=\dfrac{3x^2}{x+1}$						...	?

Ejercicio # 2.- Dadas las gráficas de las funciones siguientes, analice el comportamiento de la función al aproximarse al valor indicado:

1) $f(x)=x+2$, $x_0=2$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x_0=2$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $x_0=1$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x_0=1$

Para el desarrollo de este Laboratorio, utilizamos el Tabulador Electrónico EXCEL, para el Ejercicio 1, y el paquete profesional DERIVE para el Ejercicio 2.

Con estos ejercicios pretendemos que el alumno desarrolle la intuición alrededor del concepto de Límite, y se familiarice con su lógica (aproximación a un punto), tanto de forma analítica como gráfica. En este sentido hemos seleccionado, entre otros asistentes el DERIVE, puesto que su graficador posee elementos carentes en otros graficadores, como la posibilidad de cambiar la escala en uno u otro eje, o en ambos (ZOOM), lo que permite que el alumno pueda trabajar en la relación entre la aproximación en el dominio y la aproximación en la imagen, aspecto de gran importancia en la formación de este concepto. A lo realizado en esta clase se une que en el Tema de Funciones se han desarrollado habilidades en el trabajo con funciones, cálculo de incrementos, etc., aspectos también importantes en la comprensión del concepto de Límite.

Después del desarrollo de este Laboratorio, estamos en condiciones de establecer la definición de Límite.

De manera análoga, previo a la introducción del concepto de Derivada, incluimos clases donde se trabaja en:

- Cálculo de incrementos de funciones, cocientes de incrementos (razones de cambio), tanto para funciones reales de una variable como para funciones reales de varias variables y funciones vectoriales.
- Determinación de razones de cambio medias en problemas concretos (Velocidad media, pendiente de rectas secantes a una curva, etc.).

- Cálculo de límites de razones de cambio medias (casos particulares de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$).

Este Tema lo iniciamos con un Laboratorio de Computación, en el cual se realizan los siguientes tipos de Ejercicios:

Laboratorio. Razón de Cambio.

Ejercicio # 1.- Complete las tablas siguientes y dé un estimado del límite correspondiente:

1) $f(x) = 3x^2 + 2x$, $x_0 = 1$

Δx	0,1	0,01	0,001	...	0	...	-0,001	-0,01	-0,1
$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$				...	?	...			

2) $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$, $(x_0, y_0) = (1,0)$

Δx	0,1	0,01	0,001	...	0	...	-0,001	-0,01	-0,1
$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x}$				...	?	...			

3)	$f(x,y,z) = x^2 y + yz$	Δt	0,1	0,01	0,001	...	0	...	-0,001	-0,01	-0,1
	$(x_0, y_0, z_0) = (1,2,-1)$ $\vec{h} = (-1,1,2)$	$\frac{\Delta_{\vec{h}} f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta t}$				...	?	...			

Ejercicio # 2.- a) Calcule la pendiente de la recta secante a cada una de las curvas siguientes, en los intervalos indicados.

1) $f(x) = x^3$. Intervalos:

[1;1,1], [1;1,01], [1;1,001], [1;1,0001], [0,9;1], [0,99;1], [0,999;1], [0,9999;1]

2) La curva de intersección del Paraboloide: $z = 2x^2 + y^2$ con el plano:

i) y = 1 en los intervalos:

[1;1,1],[1;1,01],[1;1,001],[1;1,0001],[0,9;1],[0,99;1],[0,999;1],[0,9999;1]

ii) x = 1 en los intervalos:

[1;1,1],[1;1,01],[1;1,001],[1;1,0001],[0,9;1],[0,99;1],[0,999;1],[0,9999;1]

b) ¿Cuál debe ser el valor de la pendiente de la recta tangente a cada una de las curvas del inciso anterior, en los puntos: 1) $(1,1)$ 2) $(1,1,3)$?

Ejercicio # 3.- Si la función de posición de un automóvil es: $s(t) = \frac{90t}{t+5}$, calcule la velocidad media en los intervalos: [10;10,1],[10;10,01],[10;10,001], [9,9;10], [9,99;10], [9,999;10].

Ejercicio # 4.- La altura de un proyectil, t segundos después de ser lanzado hacia arriba, a partir del suelo, con velocidad inicial de v_0 metros por segundo, está dada por: $s(t) = v_0 t - 4{,}9t^2$

1) Calcule la velocidad media del proyectil en cualquier intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

2) ¿Cuál debe ser la velocidad en un instante de tiempo t_0 ?

Después del desarrollo de este Laboratorio, estamos en condiciones de establecer la definición de Derivada.

Otro aspecto a tener en cuenta es que el estudiante, en la enseñanza precedente, desde la primaria, ha afianzado la preconcepción de que los resultados, para que sean correctos, deben ser exactos, ha desarrollado habilidades en la solución exacta de ecuaciones, sistemas de ecuaciones, etc.

Aunque este estudiante posteriormente recibirá elementos de Matemática Numérica, entendemos que, en el momento de estudiar un concepto determinado, debe hacerse el estudio multifacéticamente, es decir, tanto analítica, como gráfica y numéricamente, no absolutizar en ese momento las soluciones exactas. Si bien es cierto que más adelante, como planteamos anteriormente, él estudiará los métodos numéricos, para lo cual se requerirá la obtención de determinados algoritmos de cálculo, la obtención de estos algoritmos se fundamenta en la comprensión de estos conceptos, por lo cual no debe desaprovecharse este momento, pues más adelante habrá un mayor distanciamiento de los conceptos, teoremas, etc., que permiten desarrollar dicho algoritmo, lo que puede incidir negativamente en la comprensión adecuada del mismo.

Es por ello que desarrollamos también Laboratorios de Computación para aplicar los métodos numéricos a la solución de problemas vinculados a la especialidad. Por ejemplo, utilizamos este tipo de Laboratorio en:

- Solución aproximada de ecuaciones. (Métodos de Bisección y Newton)
- Aproximación de Funciones. (Ajuste de Curvas e Interpolación)

En estas clases utilizamos el paquete de programas MATLAB. Estas clases son precedidas de una Clase Práctica en la que se orienta la utilización del MATLAB en el tipo de problemas a resolver, y para que el alumno verifique las condiciones en que pueden aplicarse los algoritmos, verifique las condiciones de convergencia, y para que pueda “correr” manualmente estos algoritmos, lo cual permite que, al utilizar posteriormente el MATLAB, no lo asuma como una “Caja negra” en la resolución de los problemas.

Por último, es necesario hacer hincapié en que en esta Disciplina el estudio de los conceptos matemáticos no constituyen un fin en si mismos, sino un medio para la modelación y resolución de problemas de la práctica profesional, por lo que no constituye un objetivo el que se conviertan en “calculadores” de límites, derivadas, integrales, etc., “resolvedores” de Sistemas de Ecuaciones, de Ecuaciones Diferencialeas, etc. Es por ello que debe darse a la Computadora el papel que le corresponde en este sentido, y mostrar a los estudiantes cómo utilizar los asistentes Matemáticos (DERIVE, MATLAB, etc.) como Medio de cálculo, y permitir la utilización de Tablas, Calculadoras o Computadoras en cualquier tipo de trabajo o evaluación, para que pueda utilizar la Matemática de forma creativa.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado cómo puede perfeccionarse el trabajo en la formación de los conceptos en la Enseñanza de la Matemática, aprovechando las ventajas del desarrollo científico – tecnológico.

En particular hemos mostrado una experiencia desarrollada en la Disciplina Matematica, en la Carrera Ingeniería en Informática, en la que se describe la utilización de una nueva concepción en la utilización del Laboratorio de Computación.

Asimismo, hemos mostrado cómo utilizar los asistentes matemáticos en tres formas:

1) En la formación de los conceptos.

2) En la utilización de Métodos Numéricos.

3) Como herramienta de cálculo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Collel, A.E. (1994). *Educación Matemática*. Vol. 6. No. 2. México

Wenzelburger G, E. (1993) "Didáctica. Cálculo Diferencial". Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Blanco Sánchez, R. (1998) "Subsistema didáctico de la Disciplina Mátemática para Ciencias Técnicas, fundamentado en las leyes de la Asimilación y la Teoría del Conocimiento". Tesis de Doctorado. Camagüey.

Skemp, R. (1980). *Psicología del Aprendizaje*. Editorial Morata. Madrid.

Davidov, V.V.(1988) *La Enseñanza Escolar y el Desarrollo Psíquico*. Editorial Progreso. Moscú.

Portuondo P., R. (1999). "Teoría de la Formación por Etapas de las Acciones Mentales" en *Una metodología de la Enseñanza para el Tercer Milenio*. Antología de la Zona Educativa del Estado de Yaracuy, Yaracuy, Venezuela.

Alvarez de Zayas, C. (1999). *La Escuela en la Vida*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Guzmán, Miguel de.(1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. MEC. Madrid.

Jiménez Martínez, R. (1999). *Utilización de las Cadenas Temáticas en la Enseñanza del Cálculo Diferencial*. Tesis de Maestría. Camagüey.

Cursos Cortos

LA MEDIA ARITMÉTICA EN DIFERENTES CONTEXTOS

Carlos Rondero Guerrero- Rosalba López Gómez-Juan Rivas Sánchez
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo – México
rondero@uaeh.reduaeh.mx , jrivasedumat@prodigy.net.mx

RESUMEN

La media aritmética ha sido un saber matemático al que se le han perdido sus diferentes significados, siendo que es poderoso elemento constructor de conocimiento matemático. En este curso se pretender mostrar a los participantes la riqueza conceptual de la media aritmética como promedio en diferentes contextos: algebraico, geométrico, numérico y estadístico, a través de diferentes situaciones de aprendizaje.

El discurso matemático escolar sobre la media aritmética ha quedado reducido a sólo manejarla algorítmicamente como la suma de los números entre el total de los mismos. Así por ejemplo, la media de dos números, 7 y 9 se encuentra sumando y dividiendo entre 2, es decir, (7+9)/2 =8. Surge entonces la pregunta acerca de ¿qué más hay aparte de la algoritmia? antes mencionada, es decir, ¿cuáles son los significados inherentes a la media aritmética como una manifestación del concepto de promedio?.

Para los estudiantes del nivel primario que tienen referencia por primera vez con la media aritmética, pareciera que el juego de encontrarla se vuelve muy sencillo y para el mismo profesor no le queda sino la sensación de que basta operar de tal forma para siempre obtener el valor deseado que corresponde a su vez al promedio de los números dados. No aparecen preguntas ni del profesor ni de los estudiantes: ¿qué otros significados tiene asignados la media aritmética?, ¿de dónde viene y en qué se sustenta la forma de calcular a la media aritmética?, ¿cómo se presenta la media aritmética en diferentes contextos?

Un discurso didáctico terriblemente simplista acerca de la media aritmética queda restringido a señalar que la media de dos números, por ejemplo, 3 y 5 se encuentra sumando y dividiendo entre 2, es decir, (3+5)/2 =4, *de tal manera de que si entran en juego ahora tres números digamos 4, 7 y 10, la media aritmética se obtiene sumando los tres números y dividiendo entre 3, esto es, (4+7+10)/3=21/3=7.*

Producto de la investigación emerge, la pregunta que surge después de entender la algoritmia antes mencionada, en lo que se refiere a los significados inherentes a la media aritmética: ¿por qué ésta se convierte además en su definición?.

La Aritmética y la Geometría son las dos raíces sobre las cuales ha crecido toda la matemática. La simple medición de una línea representa una fusión de la Geometría y la Aritmética.

Trabajar con tecnología en el aula desde los primeros años en la escuela es importante ya que los niños de hoy viven en este mundo y tenemos que ofrecerles una matemática acorde a su época.

Un discurso didáctico terriblemente simplista acerca de la media aritmética queda restringido a señalar que la media de dos números, por ejemplo, 3 y 5 se encuentra sumando y dividiendo entre 2, es decir, (3+5)/2 =4, de tal manera de que si entran en juego ahora tres números digamos 4, 7 y 10, la media aritmética se obtiene sumando los tres números y dividiendo entre 3, esto es, (4+7+10)/3=21/3=7. La generalización para cuando se tienen más de tres números resulta de ese modo muy fácil, simplemente se suman todos los números que se tengan dados y se divide entre el número de ellos. La pregunta que surge después de entender la algoritmia antes mencionada, es en lo que se refiere a los significados inherentes a la media aritmética como una manifestación del concepto de promedio. Para los estudiantes del nivel primario que tienen referencia por primera vez con la media aritmética, pareciera que el juego de encontrarla se vuelve muy sencillo y para el mismo profesor no le queda sino la sensación de que basta operar de tal forma para siempre obtener el valor deseado que corresponde a su vez al promedio de los números dados. No aparecen preguntas ni del profesor ni de los estudiantes. Aquí es donde podemos empezar a establecer una de los objetivos de este curso es elaborar y construir respuestas a preguntas como las siguientes, ¿qué otros significados tiene asignados la media aritmética?, ¿de dónde viene y en qué se sustenta la supuesta forma de calcular a la media aritmética?, ¿por qué ésta se convierte además en su definición?

Si regresamos al primer ejemplo antes mencionado podemos resignificar a 4 como la media de 3 y 5, por el hecho de que de 3 a 4 hay un déficit de 1, *mientras que el exceso de 4 a 5 es también 1*, esto se puede expresar matemáticamente como 3-4=-1, 5 -4=1, *el primero se interpreta como un defecto y el segundo como un exceso*, de tal modo que sólo cuando ambos son numéricamente iguales, el valor de referencia en este caso el 4 es precisamente aquel que equilibra, es decir, hemos encontrado la media aritmética, el cual es único.

Otra forma de expresar lo anterior es la siguiente,

$$\mathbf{3 - 4 + 5 - 4 = 0} \qquad \textbf{--------1}$$

o bien,

$$3 - 4 = - (5 - 4)$$

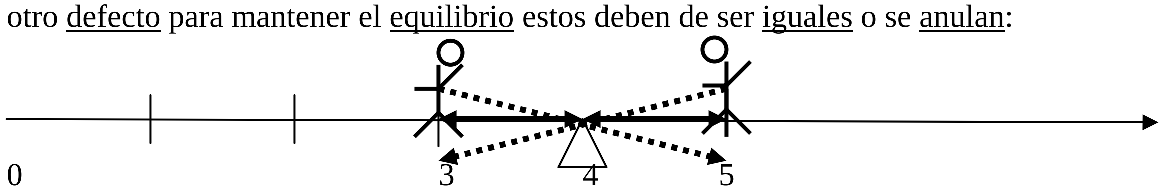
$$-1 = -1$$

o

$$1 = 1$$

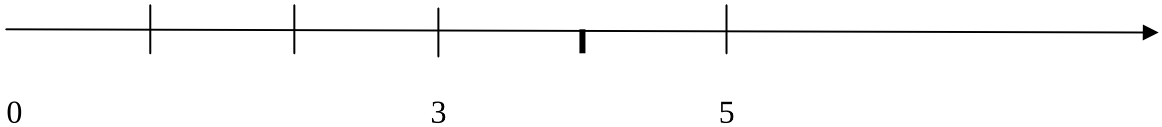
lo que se interpreta como el hecho de que el exceso y el defecto son iguales, o bien que ambos se anulan.

Esto lo podemos ilustrar con dos niños jugando al sube y baja, de un lado hay exceso y del otro defecto para mantener el equilibrio estos deben de ser iguales o se anulan:

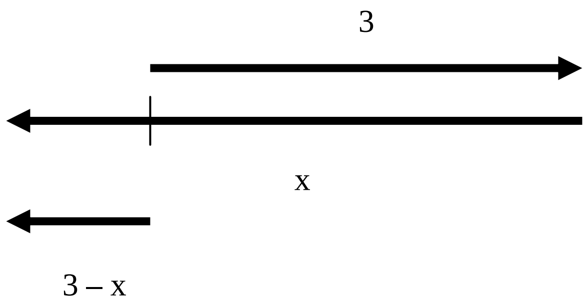


¿Y la anulación como la podemos obtener? :

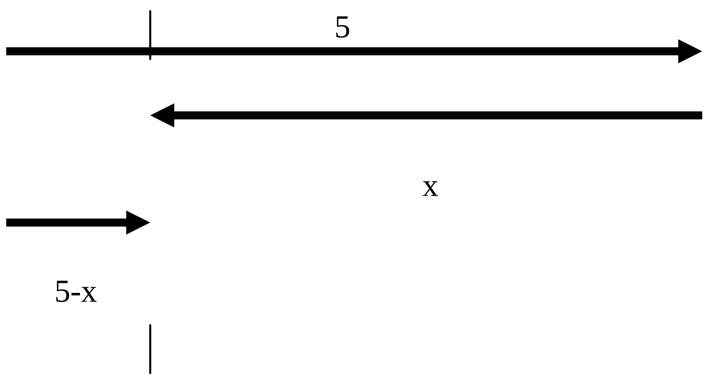
Nuestros datos son:



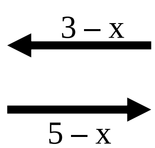
Si esto lo expresamos en lenguaje algebraico, en cuyo caso x representa a ese valor intermedio que se quiere calcular, entonces el defecto de 3 respecto a x, es 3-x:



mientras que el exceso de 5 respecto a x, es 5-x:



sólo cuando se anulan uno al otro es posible encontrar la media aritmética,



es decir:

$$3 - x + 5 - x = 0 \qquad \text{--------}\ 2$$

esto se puede a su vez expresar como

$$3 + 5 - 2x = 0$$

o sea,

$$2x = 3 + 5$$

de donde,

$$x = \frac{3+5}{2}$$

siendo por tanto $x = 4.$

comprobando

$$3 - 4 + 5 - 4 = 0$$
$$8 - 8 = 0$$
$$0 = 0$$

El procedimiento anteriormente señalado corresponde a lo que se le puede llamar la equiparación del exceso y el defecto (o la anulación), para calcular de ese modo la media aritmética de dos valores dados.

ACTIVIDADES

Usando el procedimiento anterior del exceso y el defecto, encontrar la media aritmética en los siguientes casos: (procura utilizar esquemas que te ayuden a visualizar mejor lo que hagas)

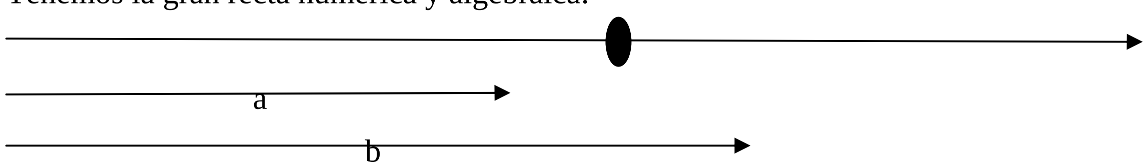
0.- De los pares de números 2 y 24,
4 y 25,
18 y 47
29 y 108.
0 y 15,
0 y 123,
0 y 248,
& 0 y 1025

1.- Usa tu calculadora para obtener esos mismos valores de la media aritmética de cada par de números dados en la actividad 0.

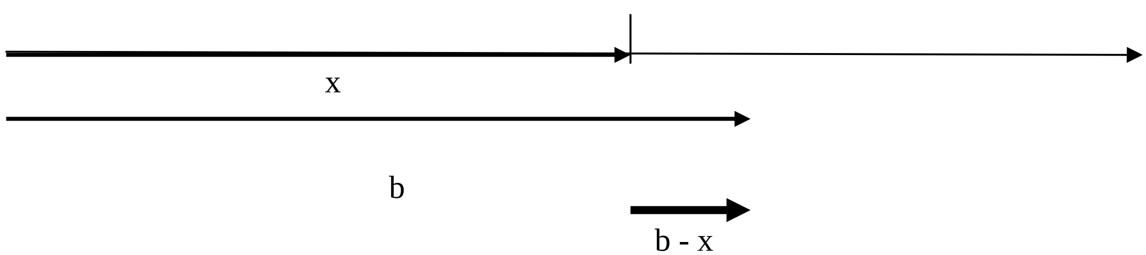
Generalización del exceso y del defecto

Por supuesto que es posible hacer la generalización del método del exceso-defecto para dos valores reales positivos a y b, con a< b:

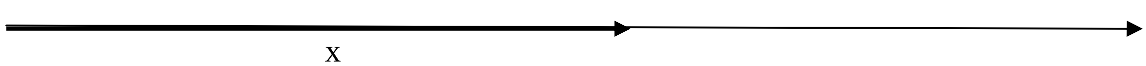
Tenemos la gran recta numérica y algebraica:



para lo cual procedemos de la siguiente forma: el exceso de b respecto al valor que representa a la media aritmética x es, b-x,

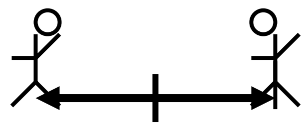


mientras que el defecto de a respecto a x, es a-x,

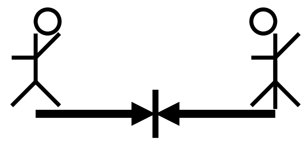


a -x

en forma tal que al equilibrarse se tiene,



o bien anularse:



Esto lo podemos representar como: b – x + a – x = 0 --------- 3

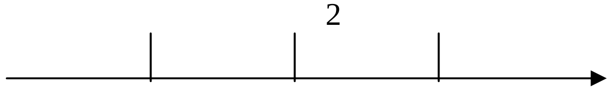
de donde, 2x = a + b

o sea,

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Nótese que llegamos a esa conocida “fórmula” para calcular la media aritmética de dos valores conocidos a y b, sólo que con una parte del significado que le es inherente.

$$x = \frac{a+b}{2}$$



a b

Podemos pasar a calcular las diferencias **a-x** y b-x,

$$a - x = a - \frac{a+b}{2} = \frac{2a - a - b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

$$b - x = b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b - a - b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

ahora sustituyendo en 3:

Actividad 2.- Comprueba que se cumplen las siguientes relaciones,

$$x = a + \frac{b-a}{2},$$

$$x = b - \frac{b-a}{2}$$

Actividad 3.-Calcula por medio de tu calculadora y usando la expresión anterior la media aritmética de los siguientes pares de números, 8 y 27, 4 y 106, 214 y 623, 485 y 537.

Actividad 5.- ¿La media aritmética de dos números pares es siempre un número par?

¿La media aritmética de dos números impares es siempre un número par?

¿La media aritmética de un número par y un número impar es siempre un número entero positivo?

Cuando el discurso se mantiene girando alrededor de la operatividad de cálculo, se pierde la esencia y el sentido de un concepto como en este caso el referido al promedio. Es pues el momento de ampliar nuestro discurso sobre aquello que está más en su esencia.

Promediar es una acción que implica un acto de ir hacia el medio, es decir, ir en búsqueda de un valor medio, representado por un único valor. Una característica adicional es la que corresponde a su representatividad en el sentido de que esos valores dados originalmente son ahora representados por el promedio. Si los valores involucrados son dos y el promedio es el referido a la media aritmética, entonces éste es efectivamente el valor medio.

Actividad 6.- Dadas las siguientes ternas de números, sin hacer cálculos decir entre que par de números se encuentra en cada caso la correspondiente media aritmética, o bien, si coincide con alguno de los valores dados, 1, 9 y 11; 3, 5 y 7; 6, 14, 16; 21, 39 y 58.

Actividad 7.- Usa tu calculadora para encontrar las correspondientes medias aritméticas de cada conjunto de puntos dados en la Actividad 5. Compara con tus resultados anteriores.

Actividad 8.-Una vez conocidas las medias aritméticas de cada conjunto de puntos anteriores, calcula las diferencias de cada número con respecto a la media y di si corresponden a un exceso o un defecto.

Ahora bien, en el caso de tener tres valores dados, ¿es posible calcular la media aritmética por medio de el exceso y el defecto?, ¿cómo se puede interpretar ese valor promedio?

Para cuando se tienen dados los valores 5, 8 y 14, si consideramos a x como aquel valor que equilibra el exceso y el defecto, podemos pasar primero a calcular las diferencias 5-x, 8-x, 14-x. Dependiendo dónde se ubique la media aritmética x, estas diferencias pueden ser defectos o excesos. De cualquier forma la suma total deberá ser cero, es decir,

$$5-x + 8-x + 14-x = 0$$

a sea,

$$5 +8 +14 -3x = 0$$

de donde,

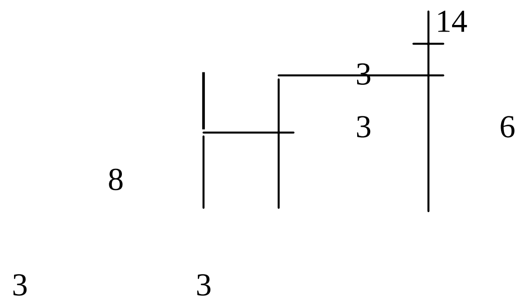
$$3x = 5 +8+ 14$$

$$x = \frac{5+8+14}{3}$$

$$x = \frac{27}{3} = 9$$

Hay una forma gráfica de explicar cómo es que 7 es la media aritmética de 4, 8 y 14. El siguiente esquema se colocó en forma vertical por ser más adecuada para dar la explicación. Primero se calcula el exceso que hay del valor intermedio al valor mayor, en este caso es 14-8=6, luego calculamos el exceso del valor más pequeño al intermedio,

8-5=3, para que se equiparan los tres valores a 8, se requiere del primer exceso quitar 3 y agregárselos a 5. Ahora quedan sólo 3 del primer exceso, de manera que estos últimos 3 será necesario repartirlos entre los tres valores que ya estaban equiparados a 8, la repartición da adicionalmente un total equiparado de 9, luego la media aritmética es precisamente 9.



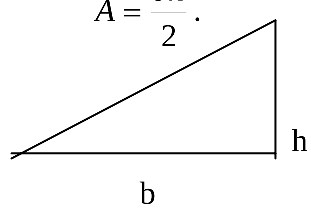
La media aritmética en el cálculo de áreas

Es posible considerar que la media aritmética tiene la característica de ser un tipo de promedio precisamente por ser aquel valor que representa al conjunto de valores dados originalmente. Pero al mismo tiempo es el valor que equilibra, en el sentido de equiparar a los excesos y los defectos, siendo esta cualidad la que permite crear al proceso de cálculo.

Precisamente tal característica va más allá de lo numérico, instalándose en lo geométrico, como es el caso del cálculo de áreas de figuras regulares como el triángulo y el trapecio.

Veamos en primer lugar el caso del triángulo rectángulo de base b y altura h. Es muy conocida la fórmula para calcular su área,

$$A = \frac{bh}{2}.$$

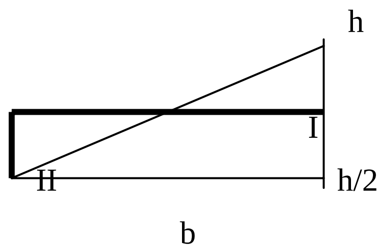


Pero cuando se le pide a un estudiante que explique por qué es esa la fórmula para calcular el área de un triángulo cualquiera muchas veces no sabe dar una explicación coherente.

Si la misma fórmula se expresa de la forma,

$$A = b\left(\frac{h}{2}\right)$$

se puede interpretar como el área de un rectángulo de base b y altura h/2



Se puede interpretar que este rectángulo tiene la misma área del triángulo original porque los triángulos por exceso I y por defecto II, son efectivamente iguales, lo cual se puede demostrar geométricamente. Otra interpretación se refiere al hecho de que h/2 es la altura promedio, considerando los valores 0 y h.

Actividad 1.- Demostrar geométricamente que los triángulos I y II, son iguales.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFÍCA

Boyer, B. Carl. (1968). *A History of Mathematics*, Wiley International. USA

Rondero, C. (2000) “Epistemología y didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales <ponderatio> y <equilibrium> en la constitución del saber físico matemático”, Tesis de doctorado. CINVESTAV-IPN, México.

Rondero, C.(2001) *Cálculo discreto*. Cuaderno didáctico volumen 8, Grupo Editorial Iberoamérica, México.